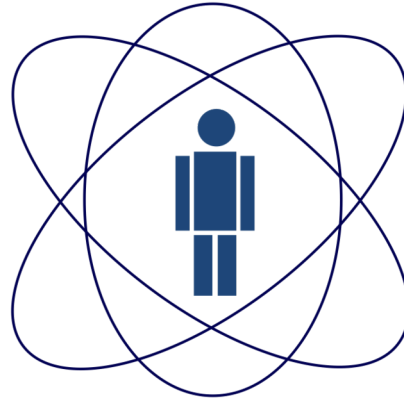


Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas



CBPF

Simetrias da Equação de Schrödinger através do Prolongamento de Campos Vetoriais no Fibrado de Jatos

Autor: Alexander Kopernik da Silva Guerreiro
Orientador: Francesco Toppan

Rio de Janeiro - RJ
2021

“SIMETRIAS DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER ATRAVÉS DO
PROLONGAMENTO DE CAMPOS VETORIAIS NO FIBRADO DE JATOS”

ALEXANDER KOPERNIK DA SILVA GUERREIRO

Dissertação de Mestrado em Física, apresentada
no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e
Comunicações. Fazendo parte da banca
examinadora os seguintes professores:



Francesco Toppan – Presidente/Orientador/CBPF



Igor Leite Freire – UFABC



José Abdalla Helayel Neto - CBPF

Rio de Janeiro, 10 de Fevereiro de 2021.

Simetrias da Equação de Schrödinger através do Prolongamento de Campos Vetoriais no Fibrado de Jatos

Autor: Alexander Kopernik da Silva Guerreiro

Aluno de mestrado do CBPF

R. Dr. Xavier Sigaud, 150 - Urca, Rio de Janeiro - RJ, 22290-180

Orientador: Francesco Toppan

Pesquisador Titular III do CBPF

R. Dr. Xavier Sigaud, 150 - Urca, Rio de Janeiro - RJ, 22290-180

Rio de Janeiro - RJ

2021

Tese apresentada como requisito parcial
do curso de mestrado do CBPF para a
obtenção do título Mestre em Física.

Para Luciene e Andrea,
com amor

“Un des titres de gloire des génies qui ont illustré le XVI^e et le XVII^e siècles a été de reconnaître cette vérité : La Physique ne deviendra point une science claire, précise, exempte des perpétuelles et stériles disputes dont elle avait été l’objet jusqu’alors, capable d’imposer ses doctrines au consentement universel des esprits, tant qu’elle ne parlera pas le langage des géomètres. Ils ont créé la véritable Physique théorique en comprenant qu’elle devait être une Physique mathématique.

Créée au XVII^e siècle, la Physique mathématique a prouvé qu’elle était la saine méthode physique par les progrès prodigieux et incessants qu’elle a faits dans l’étude de la nature. Aujourd’hui, il serait impossible, sans heurter le bon sens le plus vulgaire, de nier que les théories physiques se doivent exprimer en langage mathématique.”

- *Pierre Duhem*

Agradecimentos

Ao CBPF e CNPq por toda a estrutura que me foi disponibilizada nos últimos dois anos; aos professores Ivan dos Santos Oliveira Junior, Jose Abdalla Helayël-Neto, Sílvio Manuel Duarte Queirós e Sebastião Alves Dias por compartilharem seu vasto conhecimento durante essa jornada; aos professores Ricardo Kulloock e Cesar Linhares por me inspirarem a me tornar um físico-matemático; aos meus amados Karlos Barbosa e Isabela Rocha por seu apoio indispensável; e principalmente ao professor Franceso Toppan, cuja inteligência eu já admirava mesmo antes de conhecê-lo, por sua orientação, motivação e paciência, que culminaram no meu amadurecimento e aperfeiçoamento profissional.

Sumário

Resumo	1
Abstract	2
Introdução	3
1 Prolongamentos de campos vetoriais e equações diferenciais	8
1.1 Curvas integrais no espaço das soluções	8
1.2 Equações algébricas G -invariantes	8
1.3 Prolongamento de campos vetoriais	9
1.3.1 Prolongamento de variáveis no espaço de funções	9
1.3.2 Abordagem para equações diferenciais	10
1.3.3 Comentário sobre a abordagem para lagrangianas	10
1.4 Forma evolucionária de campos vetoriais e simetrias generalizadas	11
1.5 Operadores recursivos para equações diferenciais lineares	12
2 Simetrias geométricas da equação de Schrödinger unidimensional	14
2.1 Vínculos sobre os geradores para um potencial arbitrário	14
2.2 Geradores para potenciais de potências	16
2.2.1 Caso constante: $V(x) = 0$	17
2.2.2 Caso linear: $V(x) = \omega x$	17
2.2.3 Caso quadrático: $V(x) = \nu^2 x^2$	18
2.2.4 Potencial do tipo Calogero: $V(x) = r/x^2$	19
2.3 Álgebra de Schrödinger e isomorfismo	20
2.4 Soluções particulares através de invariantes	21
2.4.1 Solução de onda plana para a partícula livre	21
2.5 Transformações de grupo das soluções de Δ	22
2.5.1 Ação de G sobre Δ para $V(x) = 0$	22
2.5.2 Da solução constante à solução de onda plana para a partícula livre	24
3 Tradução de prolongamentos para matrizes	25
3.1 Breve revisão de matrizes	25
3.2 Isomorfismo entre operadores matriciais e prolongamentos	26
3.3 Justificando o uso de prolongamentos	29
4 Simetrias generalizadas da equação de Schrödinger unidimensional	31
4.1 Forma evolucionária da equação de Schrödinger	31
4.2 Recursão, álgebra envelopante universal e álgebras de spin superior	33
5 Geradores lineares de até terceira ordem para duas equações de Schrödinger	38
5.1 Potenciais de Calogero puro e deformado por oscilador	38
5.2 Geradores do potencial puro	42
5.2.1 Geradores pares	42
5.2.2 Geradores ímpares para o caso k	42
5.3 Geradores do potencial deformado	45
5.3.1 Geradores pares	45
5.3.2 Geradores ímpares para o caso k	45

5.4	Transformações de similaridade	48
5.4.1	Geradores pares	48
5.4.2	Geradores ímpares para o caso k	48
6	Espaços de Hilbert para o potencial deformado	50
6.1	Geração de espectro	50
6.2	Álgebra de geradores	56
6.2.1	Relações de comutação entre geradores lineares	56
6.2.2	Relações de comutação com geradores pontuais	57
6.3	Diagramas de estado	60
7	Representações de spin	64
7.1	Comparação das álgebras	64
7.1.1	Comparação entre as álgebras para $k = 0$ e $k = 2$	64
7.1.2	Comparação entre as álgebras para $k = 1$ e $k = 3$	65
7.2	Representações superiores de spin	65
8	Geradores fortemente independentes de ordem k	68
8.1	Gerador com raiz simples negativa para o caso k do potencial puro	68
8.2	Geradores de ordem k para ambos os potenciais	70
	Conclusões	71
	Apêndice A Rudimentos da teoria de grupos	74
A.1	Axiomas de grupo	74
A.2	Exemplos de grupos	74
A.3	Subgrupos	75
	Apêndice B Grupos e álgebras de Lie	76
B.1	Do grupo à álgebra	76
B.2	Álgebras de Lie na base de Cartan-Weyl	77
B.3	Grupo das rotações no plano	78
B.4	Gerador do $SO(2)$	78
B.5	Representações do $\mathfrak{so}(3)$	80
B.6	Cobertura do $SL(2, \mathbb{R})$ pelos seus geradores	80
B.7	O grupo $SU(2)$	81
B.8	Isomorfismo $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	82
B.9	Isomorfismo $\mathfrak{su}(1, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	82
B.10	Base de Cartan-Weyl do $\mathfrak{su}(2, 1)$	83
	Apêndice C Representações de peso mínimo	85
C.1	Representações de peso mínimo para $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	85
C.2	Representações de peso mínimo do $\mathfrak{su}(2, 1)$	87
	Apêndice D Geradores de simetria através de operadores matriciais	92
D.1	Condições sobre os potenciais para geradores ímpares	92
D.2	Geradores para $\beta = 0$	94
D.3	Geradores para $\beta \neq 0$	95

Apêndice E Simetrias dos modelos de Calogero puro e deformado - Implementação no software Mathematica 12.1	96
E.1 Campos vetoriais lineares	96
E.2 Geradores de simetria para o potencial puro	96
E.3 Álgebra de geradores para o potencial puro	97
E.4 Geradores de simetria para o potencial deformado	97
E.5 Mudança de base e transformações de similaridade	97
E.6 Álgebra de geradores para o potencial deformado	97
E.7 Característica do gerador de peso mínimo para o caso k	97
Referências	99

Lista de Figuras

5.1	Forma geral dos potenciais.	39
5.2	Condições sobre r e s para geradores ímpares de ordem k	40
6.1	Distribuição de probabilidade dos quatro primeiros estados ψ_n na mesma família e com mesma paridade fermiônica para diferentes valores de b	55
6.2	Diagramas de estado para os quatro casos estudados.	60
6.3	Diagramas de estado para a união dos casos k e $k + 1$	63
B.1	Rotação de um ângulo θ no plano.	78
C.1	Diagramas de estado para $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	86
C.2	Diagrama de raízes para $\mathfrak{su}(2, 1)$	88
C.3	Rotações no espaço das raízes.	89
C.4	Diagrama de estado para $\mathfrak{su}(2, 1)$ com representação de peso mínimo $ \!-\frac{3}{2}, 1\rangle$	91

Resumo

Esta é uma tese de mestrado em Física-Matemática e consiste em encontrar geradores de simetria da equação de Schrödinger 1 + 1-dimensional através do método algébrico de prolongamento de campos vetoriais no fibrado de jatos. Noções básicas do método de prolongamentos são apresentadas e um dicionário pedagógico é oferecido para traduzir o método de operadores diferenciais matriciais, bem como é traçado um paralelo entre ambos os métodos, mostrando a vantagem de se trabalhar com prolongamentos. Os potenciais considerados para uma única equação são aqueles da partícula livre, do potencial linear, do oscilador harmônico e o potencial do tipo Calogero. Para um sistema com duas equações consideramos o potencial do tipo Calogero puro e com deformação de oscilador. São encontradas transformações de similaridade que atestam a equivalência da equação para diferentes potenciais e permitem transformar os geradores obtidos de um modelo para o outro. Definimos um produto associativo de campos vetoriais para construir geradores de simetrias generalizadas que nos permitiram deduzir a álgebra envelopante universal da álgebra de Heisenberg, além de fixar as constantes de estrutura de sua álgebra de spin superior; um exemplo mostra, a partir de considerações simples de simetria, como estender esta álgebra para qualquer dimensão espacial. Para duas equações de Schrödinger com potenciais do tipo Calogero puro e deformado, encontramos duas famílias equivalentes de infinitas (super)álgebras de spin superior, as quais denominamos $\mathfrak{q}(k, g_k)$, dependendo de um parâmetro contínuo g_k , que decorre do potencial, e de um parâmetro discreto k , que é dado pela menor ordem dos geradores no setor ímpar do espaço infinito \mathbb{Z}_2 -graduado. São trabalhados em detalhes os casos para $k = 0, 1, 2, 3$ do potencial deformado, que possui espectro de energia discreto. Damos a forma explícita de todas as funções de onda para qualquer k e a condição que a normalização das mesmas impõe sobre os parâmetros; além disso, nós também revelamos as contrações exatas sobre os parâmetros contínuos para unir duas álgebras diferentes em um único espaço de Hilbert e desenhamos os diagramas de estado. São computadas todas as comutações de geradores que não podem ser escritos como um produto, bem como fixadas as constantes de estrutura na comutação com as funções de onda, que revelam que os espaços de Hilbert são diferentes para cada k . Comparando as constantes de estrutura das álgebras, concluímos que, $\mathfrak{q}(k, g_k) \subset \mathfrak{q}(k', g_{k'})$ apenas se $g_k = g_{k'} = \pm k k'$, k e k' têm a mesma paridade e $k > k'$; todas as demais possibilidades culminam em constantes de estrutura diferentes. A superálgebra de spin superior $\mathfrak{q}(1, g_1)$ foi utilizada por Vasiliev na construção de um modelo de supergravidade de Chern-Simons e contém os geradores da álgebra envelopante universal da superálgebra finita $\mathfrak{osp}(2|2)$. Na forma covariante, a superálgebra $\mathfrak{osp}(2|2)$ nos permite interpretar o setor ímpar de $\mathfrak{q}(k, g_k)$ como espinores de Majorana com duas componentes em 2 + 1 dimensões e damos uma indicação de como alternar as representações de spin dentro das álgebras. Por fim, encontramos os geradores ímpares de raiz negativa simples do potencial puro para qualquer k , o que permite encontrar todos os demais geradores ímpares através da comutação com o gerador de raiz positiva do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, e então mapeá-los nos geradores do potencial deformado através da transformação de similaridade obtida.

Palavras-chave: equação de Schrödinger, prolongamento de campos vetoriais, simetrias generalizadas, álgebras de spin superior.

Abstract

This is a master's degree thesis in Mathematical Physics and intends to find symmetry generators of $1 + 1$ -dimensional Schrödinger equation through the algebraic method of prolongation of vector fields in jet bundles. Basic notions of the prolongation method are presented and its offered a pedagogical dictionary to translate the matrix differential operator method, as well as a parallel between both methods is drawn, showing the advantage of working with prolongations. The potentials considered for a single equation are those of the free particle, linear potential, harmonic oscillator and the Calogero type potential. For a system with two equations we consider the potentials of the Calogero type both pure and with oscillator deformation. We found similarity transformations that attest the equivalence of the equation of different potentials and allow transforming the generators obtained from one model to another. We have defined an associative product of vector fields to build generalized symmetry generators that allowed us to deduce Heisenberg's universal enveloping algebra, as well as fixing the structure constants of its higher spin algebra; out of simple symmetry considerations, how to extend this algebra to any spatial dimension. For two Schrödinger equations with pure and deformed Calogero type potentials, we find two equivalent families, each with an infinite number of higher spin (super)algebras, which we called $\mathfrak{q}(k, g_k)$, that depend on a continuous parameter g_k , which stems from the potential, and a discrete parameter k , which is given by the lowest order of generators in the odd sector of the \mathbb{Z}_2 -graded infinite space. The cases for $k = 0, 1, 2, 3$ of the deformed potential, which has a discrete energy spectrum, are worked out in detail. We give the explicit form of all wave functions for any k and the condition imposed by their normalization on the parameters. In addition, we also reveal the exact contractions of the continuous parameters to combine two different algebras into a single Hilbert space and draw the state diagrams. All commutations of generators that cannot be written as a product are computed, as well as the structure constants in the commutations with wave functions, which reveal that the Hilbert spaces are different for each k . Comparing the algebras' structure constants, we conclude that $\mathfrak{q}(k, g_k) \subset \mathfrak{q}(k', g_{k'})$ only if $g_k = g_{k'} = \pm k k'$, k and k' have same parity and $k > k'$; all other possibilities culminate in different structure constants. The higher-spin superalgebra $\mathfrak{q}(1, g_1)$ was used by Vasiliev in the construction of a Chern-Simons supergravity model and contains the generators of the universal enveloping algebra of the finite superalgebra $\mathfrak{osp}(2|2)$. In covariant form, the superalgebra $\mathfrak{osp}(2|2)$ allows us to interpret the odd sector of $\mathfrak{q}(k, g_k)$ as two-component Majorana spinors in $2 + 1$ -dimensions and we give an indication of how to alternate the spin representations inside the algebras. Finally, we find the odd generators with simple negative root of the pure potential for any k , allowing us to find all the other odd generators by commutation with the generator of positive root in $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, and then map them in generators of the deformed potential through the similarity transformation obtained.

Key-words: Schrödinger equation, prolongation of vector fields, generalized symmetries, higher spin algebras.

Introdução

Sendo esta uma tese de mestrado, é natural que o autor não se sinta compelido à publicação apressada de artigos, mas sim ao estudo cuidadoso da matéria fundamental que dará origem aos artigos que serão publicados durante o doutorado e depois. Meu interesse principal está na teoria de jatos [1], tanto de uma perspectiva de possíveis aplicações na física teórica (e em outros ramos da ciência) quanto no contexto da matemática pura. No prefácio de [2], encontramos o espírito do qual o presente autor é entusiasta:

“Even though Ehresmann in his original papers from 1951 underlined the conceptual meaning of the notion of an r-jet for differential geometry, jets have been mostly used as a purely technical tool in certain problems in the theory of systems of partial differential equations, in singularity theory, in variational calculus and in higher order mechanics. But the theory of natural bundles and natural operators clarifies once again that jets are one of the fundamental concepts in differential geometry, so that a thorough treatment of their basic properties plays an important role in this book. We also demonstrate that the central concepts from the theory of connections can very conveniently be formulated in terms of jets, and that this formulation gives a very clear and geometric picture of their properties.”

Apesar de esta tese usar a teoria de jatos como uma “ferramenta puramente técnica” no estudo de simetrias da equação de Schrödinger, é (esperamos que seja) evidente a vantagem que ela proporciona quando comparada ao método usual de operadores diferenciais matriciais. Os autores de [3] partilham da mesma opinião citada, porém, fazem questão de ressaltar a utilidade da teoria para operadores não-lineares, enquanto em [4] os autores trabalham com o formalismo usual para sistemas lineares e com o formalismo de jatos para sistemas não-lineares. Veremos que a teoria de jatos abarca os resultados e facilita o entendimento também para sistemas lineares.

Um objeto matemático de grande importância para cientistas (incluindo físicos) é a equação de movimento do sistema estudado. Ela permite prever como o sistema vai se comportar, o que nos leva a fazer hipóteses, experimentos, e ter algum controle sobre o sistema. Na geometria diferencial usual, equações são interpretadas como variedades, e a teoria de grupos de Lie descreve propriedades de simetria desses espaços; mais especificamente, pergunta-se quais são as possíveis transformações de pontos desse espaço que não abandonam o subespaço das soluções. O método algébrico limita-se a procurar tais transformações na vizinhança da identidade (o que simplifica consideravelmente o esforço) e as mesmas são operadas por campos vetoriais, chamados geradores do grupo de transformações de simetria. Através do mapa exponencial podemos sair da vizinhança da identidade para outras vizinhanças, levando membros da álgebra de geradores nos elementos do grupo, mas isso não assegura que possamos recuperar todos os elementos do grupo. A equação de Schrödinger é a equação de movimento de sistemas da mecânica quântica, e descreve a evolução temporal das funções de onda, que por sua vez nos dão a densidade de probabilidade de encontrar um sistema de partículas em algum estado específico [5]. Ela é o principal objeto de estudo desta tese.

Na formulação da teoria de jatos, “prolongamos” as variáveis de um sistema de equações diferenciais, de modo que funções e suas derivadas de cada ordem e em cada componente são uma nova variável prolongada, e o espaço em questão se torna um fibrado de jatos, um espaço mais geral que contém a variedade original como subespaço. Esse procedimento visa transformar equações diferenciais em equações algébricas ao custo de aumentar o número de variáveis,

mas que torna mais simples a sua solução e o estudo de suas transformações de simetria. O método algébrico de prolongamento de campos vetoriais procura transformações de simetria na vizinhança de um ponto desse fibrado; no caso da equação de Schrödinger, esses pontos são as funções de onda e os campos vetoriais são os operadores de criação e aniquilação de estados que transformam esses pontos uns nos outros. Assim, procederemos encontrando os campos vetoriais a partir da equação do prolongamento para, em seguida, encontrarmos o vácuo da teoria (que é o ponto levado pelos campos de raiz negativa no estado nulo); encontrando o vácuo, construímos o espectro com os campos de raiz positiva. Alertamos que vamos transitar indiscriminadamente entre as terminologias, acreditando que o contexto é suficiente para esclarecer do que se trata. A origem histórica da geometria diferencial e da teoria de grupos pode ser encontrada em [6, 7]; também recomendamos [8] para uma apresentação detalhada da origem da mecânica quântica com vasta bibliografia e [9] como uma estimulante leitura sobre o papel de simetrias na física.

Na seção 1 apresentamos o fluxo de campos tangentes a curvas integrais como motivação para encontrar invariantes de equações algébricas e, em seguida, introduzir o teorema central do prolongamento [10], no qual sustentamos nossos resultados. A forma evolucionária de um campo leva a campos mais gerais no fibrado de jatos, permitindo obter os geradores de simetria de qualquer ordem¹, e o início da conexão com o formalismo de operadores matriciais é apresentado. Fazemos um pequeno comentário sobre o uso deste método para lagrangianas, com vista àqueles que trabalham com teorias de campo.

Iniciamos o estudo da equação de Schrödinger unidimensional de uma partícula, para geradores de simetrias geométricas, na seção 2 acompanhando o trabalho realizado em [13], e os cálculos são bem detalhados. Os potenciais considerados são o potencial nulo (partícula livre), linear, quadrático (oscilador harmônico) e inverso do quadrado (do tipo Calogero [14]). Nos três primeiros casos encontramos a álgebra de Schrödinger em uma dimensão (a soma semi-direta das álgebras de Heisenberg e do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$) mais a subálgebra infinita abeliana das funções de onda; não encontramos a forma explícita das mesmas, mas é possível construir o espectro de soluções utilizando o método algébrico no apêndice C. Mostraremos que existem transformações de similaridade que levam geradores lineares de uma equação a geradores lineares da outra. No caso do potencial de Calogero encontramos quatro geradores lineares: a identidade mais os três membros do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, e a mesma transformação de similaridade que relaciona a partícula livre ao oscilador harmônico conecta o potencial de Calogero ao potencial $V(x) = c_1 x^2 + c_2/x^2$, com c_1 e c_2 constantes, conhecido como modelo de de Alfaro-Fubini-Furlan (DFF)² [15]. Esses são os potenciais que vamos estudar na seção 5 para um sistema com duas equações de Schrödinger, seguindo [16]. Damos um exemplo simples de como encontrar soluções particulares a partir do requisito de invariância por certa transformação; o exemplo leva em conta soluções de onda plana a partir da equação característica da combinação linear dos geradores de translações. Por fim, mostramos as transformações de grupo que surgem da exponenciação de cada um dos geradores para a partícula livre.

Oferecemos um dicionário para traduzir o método de operadores matriciais para o método de prolongamento de campos na seção 3. Deste modo, será mais fácil para aqueles familiarizados com sistemas de equações diferenciais parciais matriciais (MPDEs) acompanharem os desenvolvimentos dos capítulos subsequentes, já que esta tradução é válida para qualquer sistema de equações lineares. Porém, frisamos que o nosso método permite extrapolar o matricial

¹ Comumente chamados de simetrias generalizadas, ou dinâmicas. Um exemplo de tal simetria é o $\mathfrak{so}(4)$ no átomo de hidrogênio [11, 12].

² Neste trabalho nós chamaremos a estes dois potenciais de potencial de Calogero puro e com deformação de oscilador, respectivamente.

tanto pelo poder computacional (simetrias generalizadas de equações não-lineares, por exemplo), quanto pela facilitação do entendimento (através da substituição de operadores por meras variáveis algébricas). Também definimos um produto associativo de campos vetoriais, o que não é definido na geometria diferencial usual, que nos permitirá construir álgebras envelopantes universais [17] a partir de geradores que denominaremos fortemente independentes, em oposição à independência linear; esses são geradores que não podem ser escritos como o produto de dois outros. Chamaremos fracamente independentes aos geradores linearmente independentes que podem ser escritos como um produto.

A forma evolucionária dos geradores tem sua primeira aplicação na seção 4. Esta serve para apresentar como trabalhar com o formalismo a partir dos exemplos na seção 2 e para corroborar o método. Em seguida, damos a definição de superálgebra para motivarmos álgebras de envelopamento universal utilizando o produto associativo definido na seção 3. Uma vez que tenhamos essa álgebra associativa, basta um pequeno passo para se obter uma álgebra infinita chamada álgebra de spin superior, introduzidas no estudo de campos de calibre por Fronsdal [18], Fradkin e Vasiliev [19–21]. Seu nome decorre do fato de, originalmente, estes geradores estarem em representações superiores de spin do grupo de Lorentz, e são ditas *on/off-shell* se as consideramos dentro/fora do espaço das soluções da equação de movimento. Estas são álgebras construídas com os membros de uma álgebra envelopante universal, porém com o comutador de Lie como produto, em vez do associativo; superálgebras de spin superior são construídas analogamente, porém com o comutador \mathbb{Z}_2 -graduado. O envelopamento da álgebra de Heisenberg é feito com ordenamentos normal e de Weyl (totalmente simétrico), mas de modo um tanto arbitrário já que a álgebra fecha em primeira e segunda ordem e a superálgebra fecha em segunda. A importância de nos valermos desse exemplo se deve ao fato de que as álgebras encontradas na seção seguinte são todas álgebras de spin superior, e este exemplo convém para ganharmos experiência. Em seguida, obtemos a álgebra de spin superior do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ excluindo os geradores de ordem ímpar na álgebra de spin superior da álgebra de Heisenberg para mostrar que sempre podemos construir subálgebras infinitas a partir de álgebras de spin superior; isso vai nos ajudar a decidir se as famílias de álgebras que encontramos na seção 5 são diferentes ou subálgebras umas das outras. Fazendo uma consideração sobre a equação da partícula livre em d dimensões com invariância por rotações, construímos a soma semi-direta da álgebra das rotações $\mathfrak{so}(d)$ com a soma direta de d álgebras de spin superior da álgebra de Heisenberg para ilustrar como pode ser fácil generalizar uma álgebra para dimensões quaisquer a partir de princípios de simetria, e que recompensa abordar primeiro o caso mais simples para depois generalizá-lo.

A contribuição mais original desta tese se encontra nas próximas seções. Procurando por geradores de simetria de até terceira ordem para duas equações de Schrödinger com potenciais do tipo Calogero puro e deformado, encontramos duas famílias, equivalentes pela transformação de similaridade 5.4.1, de infinitas (super)álgebras de spin superior dependendo em dois parâmetros: um contínuo, relacionado ao potencial de Calogero, e outro discreto que depende da ordem dos geradores ímpares fortemente independentes. Acreditamos que todas essas álgebras sejam diferentes, e não subálgebras umas das outras, exceto por vínculos muito específicos sobre os parâmetros, e mostramos que os espaços de Hilbert para cada uma são manifestamente diferentes através da fixação das constantes de estrutura dos geradores lineares com as funções de onda.

Na seção 5 procuramos geradores de simetria de até terceira ordem para os potenciais de Calogero puro e deformado num sistema com duas equações¹. Para que haja geradores ímpares precisamos que os parâmetros contínuos adimensionais das duas equações satisfaçam certo vínculo

¹ Este é um sistema de equações diferenciais parciais matriciais, MPDEs, e não um sistema de dois corpos, já que as partículas para ambas as equações estão localizadas no “mesmo ponto” e, portanto, não coexistem. Isso distingue nosso modelo daquele em [14].

entre si que depende da ordem dos geradores ímpares; o padrão nos vínculos nos permite intuir que podemos estendê-los a geradores de qualquer ordem k , o que será confirmado na seção 8, e apontamos as contrações que permitem unir duas álgebras para diferentes valores de k . Vamos trabalhar com quatro álgebras que chamaremos $\mathfrak{q}(k, g_k)$, sendo $k = 0, 1, 2, 3$ o parâmetro da ordem e g_k o parâmetro contínuo do potencial para o caso k . Manipular geradores de quatro linhas de até terceira ordem é uma tarefa hercúlea e, por conveniência, disponibilizamos uma pasta com a implementação no software Mathematica 12.1 que pode ser acessada clicando [aqui](#) ou copiando a url em E.0.1. Lá podem ser encontrados três arquivos, um no formato .nb (notebook) do software, outro com o formato .pdf do mesmo arquivo e esta tese. Vamos nos referir a este arquivo como sendo o apêndice E, que neste texto traz algum esclarecimento sobre a implementação adotada; no texto usaremos $\text{In}[\mathbf{N}]$ quando quisermos nos referir à célula de entrada/saída \mathbf{N} da implementação, que pode ser vista no arquivo .pdf. Frisamos que esses arquivos não são indispensáveis para ler a tese, mas são de grande ajuda para as considerações que faremos. O resto da seção 5 contém a lista dos geradores de ambos os potenciais, que também podem ser vistos em E.3 e E.5, bem como a transformação de similaridade que os relaciona.

Nosso foco na seção 6 está em construir os espaços de Hilbert para o modelo com deformação de oscilador, pois o mesmo tem espectro de energia discreto, enquanto o potencial puro tem espectro contínuo. A forma explícita das funções de onda é dada, e a verificação de que elas satisfazem a equação de Schrödinger para qualquer valor dos parâmetros k e g_k , não apenas os quatro casos considerados, pode ser vista em E.6. A normalização das mesmas, no entanto, impõe vínculos sobre os parâmetros e gráficos das densidades de probabilidade mostram sob qual contração de g_k recuperamos o oscilador sem deformação. São listadas todas as relações de comutação entre geradores fortemente independentes, o que possibilita o envelopamento das álgebras. No método adotado, funções de onda também são interpretadas como geradores, e as constantes de estrutura das mesmas com os geradores lineares também é dada; estas constantes de estrutura distinguem os espaços de Hilbert e uma ilustração desse resultado pode ser vista nos diagramas de estado. Também consideramos sob que circunstâncias a contração dos parâmetros contínuos une duas álgebras com parâmetros discretos diferentes respeitando a normalização das funções de onda.

Precisamos saber se as álgebras são diferentes ou subálgebras independentemente das soluções e essa consideração é levada em conta na seção 7. Veremos que as álgebras para $k = 0, 1, 2, 3$ possuem constantes de estrutura diferentes para comutações entre geradores ímpares de mesma ordem, exceto pelas contrações em 5 e certas condições nos parâmetros discretos. Essa discussão aponta um forte indício de que, exceto pelos vínculos citados, $\mathfrak{q}(k, g_k) \not\subseteq \mathfrak{q}(k', g_{k'})$ para $k \neq k'$. A (super)álgebra $\mathfrak{q}(1, g_1)$ tem geradores na álgebra envelopante universal de $\mathfrak{osp}(2|2)$; ela foi primeiramente introduzida em [22] no contexto da quantização de observáveis em um hiperbolóide e usada para a construção de um modelo de supergravidade de Chern-Simons de spin superior, que foi posteriormente generalizado para campos de spin fracionário em [23, 24]. Ao escrever $\mathfrak{osp}(2|2)$ na forma covariante, identificamos que os geradores do setor ímpar de $\mathfrak{q}(k, g_k)$ podem ser interpretados como espinores de Majorana e damos uma indicação de como encontrar os multipletos das diferentes representações de spin dentro das álgebras.

Com a experiência acumulada nas seções anteriores, na seção 8 escrevemos a forma geral para o gerador ímpar fortemente independente de raiz simples negativa e ordem k do potencial puro, a partir do qual podemos construir todos os geradores do caso k e usar a transformação de similaridade para obter todos os geradores do mesmo caso para o potencial deformado. A característica (função diferencial dos geradores) obtida não é muito simples mas nos permitiu atestar que, de fato, existe uma família de infinitas álgebras para cada potencial. Nas conclusões apresentamos nossas considerações sobre os resultados.

Os apêndices [A](#), [B](#) e [C](#), constituem uma introdução à teoria de grupos e álgebras de Lie. A ideia é apresentar as definições e trabalhar com exemplos. Eles são parte do trabalho que realizei na tese de graduação e acreditamos que eles tornam a presente tese mais auto-contida. No apêndice [D](#) encontramos os geradores para os casos $k = 0, 1, 2$ usando o método matricial e mostramos sua conexão com o método de prolongamentos. No apêndice [E](#) estão alguns comentários para ligar o arquivo do software ao texto. Não garantimos que a pasta com o arquivo permanecerá disponível após a defesa da tese. Solicitações, dúvidas e sugestões devem ser enviadas para alexanderkopernik@gmail.com.

1 Prolongamentos de campos vetoriais e equações diferenciais

Nesta seção introduziremos a definição de prolongamento de variáveis e campos vetoriais no fibrado de jatos, bem como detalhar a abordagem desse formalismo para quaisquer sistemas de equações; estes resultados serão utilizados ao longo de toda a tese. Não apresentaremos detalhes sobre o maquinário da geometria diferencial. Para uma introdução sobre variedades, campos vetoriais, fibrados tangentes, etc., recomendamos [25] (páginas 859 – 909); para uma apresentação mais rigorosa, vide [26] (páginas 111 – 143).

1.1 Curvas integrais no espaço das soluções

Da teoria de variedades suaves [27], sabemos que um campo vetorial $\mathbf{v} = \xi^i \partial_i \in TM$ é tangente a uma curva integral $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, em uma variedade p -dimensional M , se (assumindo a convenção de Einstein para soma sobre índices repetidos):

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^i(s) \partial_i = \frac{d\gamma^i(s)}{ds} \partial_i = \xi^i(\gamma(s)) \partial_i \equiv \mathbf{v}(\gamma(s)); \quad i = 1, \dots, p \quad (1.1.1)$$

Já que $\gamma^i(s)$ são simplesmente componentes em M , nós podemos reescrever a curva integral γ em uma coordenatização cartesiana $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^p$.

$$\phi(\gamma(s)) = x(s) = (x^1(s), x^2(s), \dots, x^p(s)) \quad (1.1.2)$$

Assim,

$$\phi(\dot{\gamma}) = \frac{dx^i(s)}{ds} \partial_i = \xi^i(x^1(s), x^2(s), \dots, x^p(s)) \partial_i \quad (1.1.3)$$

Isto nos dá a condição para que a curva integral esteja contida no fluxo do campo. Se $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, \mathfrak{g} a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G , γ é um invariante sob a ação de $g = \exp(s\mathbf{v}) \in G^1$. Em nossa abordagem, as soluções de equações serão interpretadas como pontos de uma curva integral no espaço das soluções, e tanto os elementos do grupo de simetria quanto os geradores desse grupo transformam soluções em outras soluções.

1.2 Equações algébricas G -invariantes

Seja $F_\nu(x) = F_\nu(x^1, x^2, \dots, x^p) = 0$, $\nu = 1, \dots, r \leq p$, no domínio

$$\mathcal{S}_F \subset M \mid F_\nu(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{S}_F, \quad \nu \in [1, r] \quad (1.2.1)$$

um sistema de equações algébricas com posto (*rank*) r (isto é, o posto é máximo). Como o posto é máximo, qualquer função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que seja nula no domínio \mathcal{S}_F pode ser particionada numa base em termos de produtos $h^\nu(x)F_\nu(x)$, onde $h^\nu(x)$ são funções suaves [10].

$$f(x|x \in \mathcal{S}_F) = 0 \iff f(x) = \sum_{\mu=1}^r h^\mu(x)F_\mu(x) \quad (1.2.2)$$

Seja G um grupo de Lie, e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie associada. Se o sistema $F_\nu(x) = 0$ é G -invariante, isto é, se ele é invariante sob a ação de qualquer $g \in G$ tal que $F_\nu(g \cdot x) = F_\nu(x)$, então [25]:

$$\mathbf{v}(F_\nu) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{g} \quad (1.2.3)$$

¹ Vale mencionar que o mapa exponencial não assegura a cobertura de G . Veja o exemplo em B.6.

Usando o resultado 1.2.3, encontramos:

$$\mathbf{v}(F_\nu) = (\xi^i \partial_i) F_\nu = \xi^j (\partial_i F_\nu) \delta_j^i = \xi^j (\partial_i F_\nu) \langle dx^i, \partial_j \rangle = \langle dx^i \partial_i F_\nu, \xi^j \partial_j \rangle = \langle \nabla F_\nu, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (1.2.4)$$

Em 1.2.4 fizemos uso do fato de que $\{\partial_i\} \in \mathcal{V}$ é uma base cartesiana e $\{dx^i\} \in \mathcal{V}^*$ é a base do seu espaço dual. Logo, o gradiente ∇F_ν é perpendicular a \mathbf{v} . Já que o gradiente de uma função pode ser visto como um vetor normal à superfície de $F_\nu(x)$ constante em uma variedade p -dimensional M e existem $p - 1$ vetores linearmente independentes de \mathbf{v} , haverá $p - 1$ de tais superfícies. Ou seja, existem $p - 1$ soluções $F_\nu^j(x) = c^j$, $j = 1, \dots, p - 1$, para cada $\nu = 1, \dots, r$. Tomando a variação ΔF_ν^j :

$$\Delta F_\nu^j \approx \sum_{i=1}^p \frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i} \Delta x^i = 0 \quad (1.2.5)$$

Observando a expressão no pareamento dual 1.2.4, ela nos sugere que:

$$\Delta x^i = \alpha \xi^i(x) \Rightarrow \frac{\Delta x^i}{\xi^i} = \alpha; \quad i = 1, \dots, p \quad (1.2.6)$$

com α uma constante. Tomando o limite $\Delta x^i \rightarrow dx^i$ encontramos a equação característica de $\mathbf{v}(F_\nu)$:

$$\frac{dx^1}{\xi^1} = \frac{dx^2}{\xi^2} = \dots = \frac{dx^p}{\xi^p} \quad (1.2.7)$$

Resolver cada uma das equações em 1.2.7 nos dá $p - 1$ invariantes $F^j(x)$ para cada ν do sistema.

1.3 Prolongamento de campos vetoriais

1.3.1 Prolongamento de variáveis no espaço de funções

Seja $x = (x^1, \dots, x^p) \in X$ variáveis do espaço base X e $u = (u^1 \dots u^q) \in U$ variáveis no espaço U das funções de x . Definimos o operador derivada total por

$$D_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=0}^{\infty} u_{iJ}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}; \quad (1.3.1)$$

Na definição 1.3.1 o símbolo J denota um multi-índice não ordenado dos índices das variáveis x . Por exemplo, para $p = 3$ temos os índices $i = 1, 2, 3$; quando $J = 2$, temos o seguinte conjunto de índices: $\{11, 12, 13, 22, 23, 33\}$, ou, denotando as variáveis, $\{x^1 x^1, x^1 x^2, x^1 x^3, x^2 x^2, x^2 x^3, x^3 x^3\}$. Essa definição nos permite interpretar derivadas de funções como um operador que substitui uma variável por outra. Deste modo, $u_i^\alpha = D_i u^\alpha$ é uma variável algébrica tanto quanto x^i e u^α ; isto é o que significa prolongar as variáveis. O espaço $J^n(X \times U)$ ao qual todas essas variáveis pertencem é chamado o n -ésimo fibrado de jatos de $X \times U$, e o índice n indica a ordem das derivadas totais de u . Assim como derivadas parciais, o operador derivada total satisfaz a regra de derivação de Leibniz e comuta com qualquer outro operador derivada total. Equações diferenciais passam a ser interpretadas como funções diferenciais: $\Delta(x, f(x)) \mapsto \Delta(x, u^{(n)})$, onde n é a ordem da equação e $u^{(n)} \equiv \text{pr}^{(n)}(u)$ é o n -ésimo prolongamento das variáveis u , isto é, todas as variáveis prolongadas até a n -ésima ordem.

$$u^{(n)} \equiv \text{pr}^{(n)}(u) := (u, u_{i_1}, u_{i_1 i_2}, \dots, u_{i_1 i_2 \dots i_n}); \quad i_j = 1, \dots, p \quad (1.3.2)$$

1.3.2 Abordagem para equações diferenciais

Seja $\Delta_\nu \equiv \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0$ um sistema de equações diferenciais de posto máximo em $M^{(n)} \subset J^n(X \times U)$, e $(x, u) \in M \subset X \times U$, com $x = (x^1, \dots, x^p)$ as p variáveis no subconjunto de X , $u = (u^1, \dots, u^q)$ as variáveis no espaço das soluções contido em U^1 . Se $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ é um campo vetorial associado ao grupo de simetria G de transformações em M que preservam $\Delta_\nu = 0$, podemos escrevê-lo como:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.3.3)$$

O prolongamento (infinito)² de \mathbf{v} é definido por [10]:

$$\text{pr } \mathbf{v} := \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=1}^{\infty} \Phi_J^\alpha(x, u^{(m)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (1.3.4)$$

com a função diferencial Φ_J^α dada por³

$$\Phi_J^\alpha(x, u^{(m)}) \equiv D_J \left(\phi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{iJ}^\alpha \quad (1.3.5)$$

e m dependendo de J . Se $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, então:

$$\text{pr } \mathbf{v}(\Delta_\nu) = 0 \quad (1.3.6)$$

A equação 1.3.6 constitui a conclusão do teorema central do prolongamento de campos vetoriais para sistemas de equações diferenciais, e este é o teorema que sustenta os resultados aqui obtidos. Sua prova é complicada o suficiente para não dedicarmos espaço a ela aqui, mas pode ser encontrada em [10].

Uma vez que $\Delta_\nu = 0$ tem posto máximo ordem n e o prolongamento de \mathbf{v} atuando sobre Δ_ν é uma função diferencial de ordem $m \geq n$ que é nula no espaço das soluções $M^{(n)} \subset M^{(m)}$, podemos particioná-la em termos de operadores diferenciais, analogamente ao que fizemos em 1.2.2.

$$\text{pr } \mathbf{v}(\Delta_\nu) = \sum_{\mu=1}^r \sum_{J=0}^{\infty} P_\nu^{\mu J}(x, u^{(m)}) D_J \Delta_\mu \quad (1.3.7)$$

1.3.3 Comentário sobre a abordagem para lagrangianas

Outra aplicação interessante para o prolongamento de campos vetoriais é o estudo de simetrias variacionais para uma ação $S[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)}) d^p x$. Seja $g \in G$ um elemento do grupo de Lie G que atua nas variáveis x e u . O prolongamento de g atua também sobre as variáveis prolongadas [25].

$$\text{pr } g \cdot (x, u^{(n)}) = (\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)}) \quad (1.3.8)$$

¹ Tal que uma solução $f(x)$ de Δ é um valor fixo de u

² As equações diferenciais consideradas, sobre as quais o prolongamento dos campos atua, são de ordem finita. Por conseguinte, não haverá derivadas de ordem infinita, nem um número infinito de coeficientes.

³ Estamos assumindo que apenas subíndices de u representam derivadas totais; para qualquer função diferencial f adotamos $f_y = \partial_y f$, a menos que digamos expressamente do que trata o índice, como em 1.3.5.

Se G é um grupo de simetria variacional de S , então teremos:

$$S[u] = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)}) d^p x = \int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)}) d^p \tilde{x} \quad (1.3.9)$$

Sendo $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ um gerador do grupo de simetria G , então a fórmula abaixo é verificada [25].

$$\text{pr } \mathbf{v}(L) + L \sum_{i=1}^p D_i \xi^i = 0 \quad (1.3.10)$$

Para a abordagem de jatos do chamado problema inverso, aquele de encontrar a lagrangiana dadas as equações de movimento, veja [1] e [10].

1.4 Forma evolucionária de campos vetoriais e simetrias generalizadas

Vamos renomear a expressão que aparece entre parênteses em 1.3.5, sobre a qual o operador derivada total atua, por Q^α .

$$Q^\alpha(x, u^{(1)}) \equiv \phi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) u_i^\alpha \quad (1.4.1)$$

A função diferencial Q^α é definida como a função característica do gerador \mathbf{v} , e tem ao todo $p+q+pq$ variáveis. As expressões em 1.3.3 e 1.3.4 para o campo e seu prolongamento se tornam, respectivamente:

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^q Q^\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) \quad (1.4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{pr } \mathbf{v} = & \sum_{\alpha=1}^q Q^\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=1}^{\infty} D_J \left(Q^\alpha(x, u^{(1)}) \right) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \\ & + \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \left(u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{J=1}^{\infty} u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

O operador com coeficiente ξ^i em 1.4.3 é apenas a derivada total 1.3.1. Denotando

$$\mathbf{v}_Q \equiv \sum_{\alpha=1}^q Q^\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.4.4)$$

definimos a forma evolucionária de \mathbf{v} como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) \quad (1.4.5)$$

Seu prolongamento assume a forma:

$$\text{pr } \mathbf{v} = \text{pr } \mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) D_i ; \quad \text{pr } \mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=0}^{\infty} D_J \left(Q^\alpha(x, u^{(1)}) \right) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (1.4.6)$$

Já que $D_i(\Delta_\nu) = 0$ é trivial no espaço das soluções, se $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, então:

$$0 = \text{pr } \mathbf{v}(\Delta_\nu) = \text{pr } \mathbf{v}_Q(\Delta_\nu) + \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) D_i(\Delta_\nu) = \text{pr } \mathbf{v}_Q(\Delta_\nu) \quad (1.4.7)$$

Conclui-se que a única parte relevante do campo prolongado que atua em Δ_ν é a sua parte evolucionária \mathbf{v}_Q .

A forma evolucionária de um campo cuja característica depende em $(x, u^{(1)})$ é relacionada a simetrias geométricas (de primeira ordem) do sistema Δ_ν . Podemos estender a dependência das características para derivadas totais de u com qualquer ordem.

$$Q^\alpha(x, u^{(n)}) = Q^\alpha(x, u, u_{i_1}, u_{i_1 i_2}, \dots, u_{i_1 i_2 \dots i_n}) \quad (1.4.8)$$

Todos os subíndices i_j em 1.4.8 varrem o intervalo $[1, p]$ e temos q geradores com características de ordem até n . Chamamos de simetrias dinâmicas¹, ou generalizadas, àquelas que surgem de geradores para os quais $n > 1$. Definindo a notação para o fatorial ascendente (também conhecido como símbolo de Pochhammer) e o fatorial descendente (também chamado potência fatorial), respectivamente, por:

$$b_{(n)} := \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} ; \quad b_{[n]} := \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1-n)} \quad (1.4.9)$$

o número total de variáveis da característica em 1.4.8 é:

$$p + q \sum_{j=0}^n \frac{p^{(j)}}{j!} \quad (1.4.10)$$

Desta forma, escrevemos as expressões para geradores de n -ésima ordem e seu prolongamento², respectivamente.

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^q Q^\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.4.11)$$

$$\text{pr } \mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=0}^{\infty} D_J(Q^\alpha(x, u^{(n)})) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.4.12)$$

1.5 Operadores recursivos para equações diferenciais lineares

Para sistemas lineares, podemos representar Δ ³ pela ação de um operador Ω , independente de u e suas derivadas totais, atuando sobre a q -upla u .

$$\Delta(x, u^{(n)}) = \Omega(u) = \sum_{\alpha=1}^q \Omega_\alpha u^\alpha = \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=0}^n f_\alpha^J(x) D_J u^\alpha \quad (1.5.1)$$

¹ Em oposição a simetrias geométricas.

² Veja [10] para uma discussão sobre as dificuldades que surgem para a exponenciação de tais geradores.

³ Vamos suprimir o índice ν para não sobrecarregar a notação. Deve-se levar em conta que teremos um operador Ω_ν para cada equação Δ_ν , totalizando r (o posto do sistema) operadores.

Seja \mathbf{v}_Q a forma evolucionária de um gerador de simetria do sistema linear Δ . Seu prolongamento sobre Δ é dado por

$$\begin{aligned} \text{pr } \mathbf{v}_Q(\Delta) &= \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=0}^{\infty} \left(D_J Q^\alpha(x, u^{(n)}) \right) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^q \sum_{K=0}^n f_\beta^K(x) D_K u^\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J=0}^{\infty} f_\alpha^J(x) \left(D_J Q^\alpha(x, u^{(n)}) \right) = \Omega(Q) = 0 \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Seja $Q'(x, u^{(m)}) = \mathcal{R}(u)$ a característica de um gerador linear de Δ , dada pela ação sobre u de um operador diferencial \mathcal{R} que não depende em u nem em suas derivadas totais. Então, para qualquer característica $Q(x, u^{(l)})$, temos que $\mathcal{R}(Q)$ também é característica de um gerador de Δ . Sendo assim, \mathcal{R} é dito um operador recursivo. Para provar o que acabamos de dizer, consideremos o prolongamento de $\mathbf{v}_{Q'}$ sobre Δ , tendo em vista a relação 1.5.2.

$$\text{pr } \mathbf{v}_{Q'}(\Delta) = \Omega(Q') = \Omega\mathcal{R}(u) \quad (1.5.3)$$

Enquanto isso, de 1.3.7 nós temos que

$$\text{pr } \mathbf{v}_{Q'}(\Delta) = \tilde{\mathcal{R}}(\Delta) = \tilde{\mathcal{R}}\Omega(u) \quad (1.5.4)$$

onde $\tilde{\mathcal{R}}$ é algum operador diferencial que não depende em u , nem em suas derivadas totais. As equações 1.5.3 e 1.5.4 nos dizem que

$$\Omega\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}\Omega \quad (1.5.5)$$

identicamente no espaço das soluções. Agora nós podemos provar que se Q é a característica de um gerador de Δ , então $\mathcal{R}(Q)$ também é.

$$\text{pr } \mathbf{v}_{\mathcal{R}(Q)}(\Delta) = \Omega\mathcal{R}(Q) = \tilde{\mathcal{R}}\Omega(Q) = \tilde{\mathcal{R}} \text{pr } \mathbf{v}_Q(\Delta) \quad (1.5.6)$$

É fácil perceber que a atuação de qualquer produto (composição) de operadores recursivos também é um operador recursivo. Para ver isso, seja Q uma característica do sistema Δ e \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' operadores recursivos que satisfazem a relação 1.5.5.

$$\Omega\mathcal{R}' = \tilde{\mathcal{R}}'\Omega; \quad \Omega\mathcal{R}'' = \tilde{\mathcal{R}}''\Omega \quad (1.5.7)$$

Logo,

$$\text{pr } \mathbf{v}_{\mathcal{R}''\mathcal{R}'(Q)}(\Delta) = \Omega\mathcal{R}''\mathcal{R}'(Q) = \tilde{\mathcal{R}}''\Omega\mathcal{R}'(Q) = \tilde{\mathcal{R}}''\tilde{\mathcal{R}}'\Omega(Q) = \tilde{\mathcal{R}}''\tilde{\mathcal{R}}' \text{pr } \mathbf{v}_Q(\Delta) \quad (1.5.8)$$

Em geral, se \mathcal{R} é um operador recursivo, também o são todas as suas potências, o que nos dá uma família de infinitos geradores. Veremos em 3.2 que podemos definir um produto associativo de campos vetoriais através de prolongamentos. A álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ construída a partir de todos os produtos dos geradores recursivos em \mathfrak{g} é chamada de álgebra envelopante universal de \mathfrak{g} [17].

2 Simetrias geométricas da equação de Schrödinger unidimensional

O método de prolongamento de campos vetoriais é útil para encontrar soluções de sistemas de equações diferenciais e suas transformações de simetria. Se o sistema não possui simetrias, o método perde seu valor. Felizmente, muitos dos sistemas da física possuem simetrias devido à conservação de certas quantidades na natureza; a equação de Schrödinger, por exemplo, constitui um sistema mecânico autônomo (o potencial é independente do tempo), o que assegura a conservação da energia [28]. Os geradores de simetrias geométricas são encontrados para todos os potenciais de potência na equação de Schrödinger. Transformações de similaridade relacionam diferentes potenciais e nos permitem mapear os geradores de simetria de um potencial para o outro. Para o caso mais simples da partícula livre damos um exemplo de como obter soluções particulares através de invariantes e encontramos os elementos de grupo que surgem da exponenciação dos geradores.

2.1 Vínculos sobre os geradores para um potencial arbitrário

A equação de Schrödinger unidimensional com potencial real $V(x)$ pode ser escrita como [29]:

$$\Delta(x, t, \psi(x, t)) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial^2 x} - aV(x) \psi(x, t) = 0 \quad (2.1.1)$$

com $a \equiv \hbar/2im$ ¹.

Fazendo u a variável no espaço das soluções, de tal modo que em um ponto P_0 deste espaço $u|_{P=P_0} = \psi(x, t)$, a equação 2.1.1 se torna

$$\Delta \equiv \Delta(x, t, u^{(2)}) = u_t + au_{xx} - aV(x)u = 0 \quad (2.1.2)$$

e o campo vetorial mais geral \mathbf{v} é dado por

$$\mathbf{v} = \chi(x, t, u) \partial_x + \tau(x, t, u) \partial_t + \phi(x, t, u) \partial_u \quad (2.1.3)$$

Para o prolongamento de \mathbf{v} , de 1.3.4, nós temos

$$\text{pr } \mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_J \Phi_J[u] \frac{\partial}{\partial u_J}; \quad J \neq 0 \quad (2.1.4)$$

onde $\Phi_J[u]$ é dado por

$$\Phi_J[u] = D_J(\phi - \chi u_x - \tau u_t) + \chi u_{xJ} + \tau u_{tJ} \quad (2.1.5)$$

com D_J o operador de derivada total definido em 1.3.1.

A aplicação de 2.1.4 sobre Δ nos dá um novo sistema de equações diferenciais parciais.

$$\text{pr } \mathbf{v}(\Delta) = \Phi_t + a\Phi_{xx} - aV_x u \chi - aV\phi = 0 \quad (2.1.6)$$

A equação 2.1.2 é uma equação algébrica e, portanto implica que uma das variáveis pode ser escrita em termos das outras, tornando-a uma variável dependente no subespaço das soluções.

¹No que vem a seguir, vamos eliminar i dos cálculos para simplificação. Quando se queira, basta substituir $a \equiv \hbar/2im$ para, por exemplo, verificar a hermiticidade de algum gerador.

Podemos substituir $u_{xx} = Vu - u_t/a$ ou $u_t = a(Vu - u_{xx})$ ¹; a substituição de u em termos u_t e u_{xx} pode implicar em divergências devido ao potencial. Adotaremos a convenção de sempre substituir a variável u_t , de modo a termos derivadas totais apenas em x . Depois de substituir o vínculo $u_t = a(Vu - u_{xx})$ de 2.1.2, nós derivamos a seguinte expressão para Φ_t e Φ_{xx} :

$$\begin{aligned}\Phi_t &= (\phi_t + aVu\phi_u - a^2V^2u^2\tau_u - aVu\tau_t) - (\chi_t + aVu\chi_u)u_x \\ &\quad + (a\tau_t - a\phi_u + 2a^2Vu\tau_u)u_{xx} + a\chi_uu_xu_{xx} - a^2\tau_uu_{xx}^2 \\ \Phi_{xx} &= (\phi_{xx} - aVu\tau_{xx} - 2aV_xu\tau_x) + (2\phi_{xu} - \chi_{xx} - 2aVu\tau_{xu} - 2aV\tau_x - 2aV_xu\tau_u)u_x \\ &\quad + (\phi_{uu} - 2\chi_{xu} - aVu\tau_{uu} - 2aV\tau_u)u_x^2 - \chi_{uu}u_x^3 + (\phi_u - 2\chi_x + a\tau_{xx} - aVu\tau_u)u_{xx} \\ &\quad + (2a\tau_{xu} - 3\chi_u)u_xu_{xx} + a\tau_{uu}u_x^2u_{xx} + a\tau_uu_{xx}^2 + 2a\tau_xu_{xxx} + 2a\tau_uu_xu_{xxx}\end{aligned}\quad (2.1.7)$$

De 2.1.7, encontramos a forma explícita de 2.1.6:

$$\begin{aligned}\text{pr } \mathbf{v}(\Delta) &= (\phi_t + aVu\phi_u - a^2V^2u^2\tau_u - aVu\tau_t + a\phi_{xx} - a^2Vu\tau_{xx} - 2a^2V_xu\tau_x - aV_xu\chi - aV\phi) \\ &\quad + (2a\phi_{xu} - a\chi_{xx} - 2a^2Vu\tau_{xu} - 2a^2V\tau_x - 2a^2V_xu\tau_u - \chi_t - a^2Vu\chi_u)u_x \\ &\quad + (a\phi_{uu} - 2a\chi_{xu} - a^2Vu\tau_{uu} - 2a^2V\tau_u)u_x^2 \\ &\quad - a\chi_{uu}u_x^3 \\ &\quad + (a\phi_u - 2a\chi_x + a^2\tau_{xx} + a\tau_t - a\phi_u + a^2Vu\tau_u)u_{xx} \\ &\quad + (2a^2\tau_{xu} - 2a\chi_u)u_xu_{xx} \\ &\quad + a^2\tau_{uu}u_x^2u_{xx} \\ &\quad + 2a^2\tau_xu_{xxx} \\ &\quad + 2a^2\tau_uu_xu_{xxx} = 0\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

Levando em conta que as derivadas totais de u são variáveis independentes e que V , χ , τ e ϕ dependem apenas em x , t e u , os coeficientes dos monômios das variáveis prolongadas em 2.1.8 precisam ser anulados de acordo com o resultado 1.3.6 do teorema central.

$$\tau_x = 0; \quad \tau_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \tau(t)$$

$$\chi_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi = \chi(x, t)$$

$$\tau_t = 2\chi_x \quad \Rightarrow \quad \chi_x = \chi_x(t) \quad \Rightarrow \quad \chi = \gamma(t)x + \delta(t); \quad \tau_t = 2\gamma$$

$$\phi_{uu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \alpha(x, t)u + \beta(x, t)$$

$$2a\phi_{xu} = \chi_t \quad \Rightarrow \quad \phi_{xu} = \alpha_x = \frac{1}{2a}(\gamma_t x + \delta_t) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4a}(\gamma_t x^2 + 2\delta_t x + \rho(t)) \quad (2.1.9)$$

Conseguimos explicitar a dependência em x (exceto por $\beta(x, t)$), e a única dependência em u é linear para ϕ . Logo, restam apenas os coeficientes de u e de 1.

$$\phi_t + aVu\phi_u - aVu\tau_t + a\phi_{xx} - aV_xu\chi - aV\phi = 0 \quad (2.1.10)$$

¹ Algo parecido com a escolha em transformadas de Legendre entre lagrangianas e hamiltonianas, onde podemos escolher entre aumentar a ordem do sistema ou o número de variáveis [28].

Usando as expressões encontradas em τ , χ e ϕ em 2.1.9, a equação 2.1.10 se torna

$$\begin{aligned} & \alpha_t u + \beta_t + aVu\alpha - 2aVu\gamma + \frac{1}{2}\gamma_t u + a\beta_{xx} - aV_x u\gamma x - aV_x u\delta - aV\alpha u - aV\beta = 0 \\ \Rightarrow & \left(\alpha_t - 2aV\gamma + \frac{1}{2}\gamma_t - aV_x\gamma x - aV_x\delta \right) u + (\beta_t + a\beta_{xx} - aV\beta) = 0 \quad \forall u \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Para o coeficiente de 1, encontramos que β é qualquer função que satisfaça a equação de Schrödinger.

$$\beta_t + a\beta_{xx} - aV\beta = \Delta(x, t, \beta) = 0 \quad (2.1.12)$$

Os geradores $\mathbf{v}_\beta = \beta\partial_u$ constituem uma subálgebra abeliana de dimensão infinita. Para o coeficiente de u em 2.1.11, depois de escrever α explicitamente, encontramos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4a} (\gamma_{tt}x^2 + 2\delta_{tt}x + \rho_t) - 2aV\gamma + \frac{1}{2}\gamma_t - aV_x\gamma x - aV_x\delta = 0 \\ \Rightarrow & \gamma_{tt}x^2 + 2\delta_{tt}x + \rho_t - 8a^2V\gamma + 2a\gamma_t - 4a^2V_x\gamma x - 4a^2V_x\delta = 0 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

A equação 2.1.13 não tem qualquer dependência arbitrária em x e nenhuma dependência em u . Além disso, ela é de primeira ordem em ρ e de segunda ordem em γ e δ , totalizando 5 constantes arbitrárias. Reparando que $\tau_t = 2\gamma$, teremos ao máximo seis geradores linearmente independentes em 2.1.3.

2.2 Geradores para potenciais de potências

Em [30] foi mostrado que a equação linear de Schrödinger em 1 dimensão com potencial $V(x, t) = \gamma_1(t)x^2 + \gamma_2(t)x + \gamma_3(t) + i\gamma_4(t)$, para certas funções reais $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 de t , é equivalente a equação para a partícula livre¹. Em 2.3, apresentaremos transformações relacionando potenciais $V(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$, para quaisquer constantes a_1, a_2 e a_3 , bem como potenciais $V(x) = b_1x^2 + b_2/x^2 + b_3$, para quaisquer constantes b_1, b_2 e b_3 . Nos exemplos que se seguem vamos considerar apenas os potenciais de potências e substituímos $V(x) = \nu_\lambda x^\lambda$ (λ e ν_λ são constantes) explicitamente em 2.1.13.

$$\gamma_{tt}x^2 + 2\delta_{tt}x - 4a^2\nu_\lambda\gamma(2 + \lambda)x^\lambda - 4a^2\lambda\nu_\lambda\delta x^{\lambda-1} + (\rho_t + 2a\gamma_t) = 0 \quad (2.2.1)$$

Nos casos em que λ é diferente de $-2, 0, 1$ e 2 , a única maneira de satisfazer a equação 2.2.1 é deixando $\gamma = \delta = \rho_t = 0$. Assim, $\tau = c_1$ e $\rho = c_2$. Os geradores são

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_t \\ \mathbf{v}_2 &= u\partial_u \\ \Psi &= \psi(x, t)\partial_u \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

onde $\psi(x, t)$ é qualquer solução de 2.1.1². Para $\lambda = 0, 1, 2$, nós temos seis geradores linearmente independentes, enquanto para $\lambda = -2$, nós salvamos duas constantes de γ mas nenhuma de δ , restando quatro geradores linearmente independentes, dos quais dois deles são ∂_t e $u\partial_u$.

¹ Para mais sobre cryptohermiticidade e equivalência entre equações de Schrödinger com potencial real e complexo, vide [31].

² É fácil provar que os geradores $u\partial_u$ e $\psi\partial_u$ estão sempre presentes para qualquer equação linear, enquanto ∂_t está sempre presente para qualquer sistema mecânico autônomo.

2.2.1 Caso constante: $V(x) = 0$

Antecipamos que é sempre possível obter uma equação de Schrödinger equivalente adicionando uma constante ao potencial (veja 2.3). Substituindo $\nu_0 = 0$ em 2.2.1, a equação passa a ser

$$\gamma_{tt}x^2 + 2\delta_{tt}x + \rho_t + 2a\gamma_t = 0 \quad (2.2.3)$$

A solução desta equação é

$$\begin{aligned} \gamma_{tt} = 0 &\Rightarrow \gamma = c_1t + c_2 \\ \delta_{tt} = 0 &\Rightarrow \delta = c_3t + c_4 \\ \rho_t = -2a\gamma_t &= -2ac_1 \Rightarrow \rho = -2ac_1t + c'_5 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Reescalando $c'_5 \mapsto c_5/4a$ e substituindo os resultados em τ , χ e ϕ , encontramos os geradores linearmente independentes.

$$\begin{aligned} \tau_t = 2\gamma &\Rightarrow \tau = c_1t^2 + 2c_2t + c_6 \\ \chi = \gamma x + \delta &\Rightarrow \chi = c_1tx + c_2x + c_3t + c_4; \\ \phi = \alpha u + \beta &= \frac{1}{4a}(\gamma_{tt}x^2 + 2\delta_{tt}x + \rho)u + \beta = \left(\frac{1}{4a}c_1x^2 + \frac{1}{2a}c_3x - \frac{1}{2}c_1t + c_5\right)u + \beta \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Lembrando da expressão para \mathbf{v} em 2.1.3, escrevemos os seis geradores (mais os geradores $\{\Psi\}$ da subálgebra abeliana) numa certa base.

$$\begin{aligned} z_+ &= t^2\partial_t + tx\partial_x + \left(\frac{1}{4a}x^2 - \frac{1}{2}t\right)u\partial_u \\ z_0 &= 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u \\ z_- &= \partial_t \\ w_+ &= t\partial_x + \frac{1}{2a}xu\partial_u \\ w_0 &= \frac{1}{2a}u\partial_u \\ w_- &= -\partial_x \\ \Psi &= \psi(t, x)\partial_u \mid \Delta(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

2.2.2 Caso linear: $V(x) = \omega x$

Para o potencial linear $V(x) = \omega x$, 2.2.1 nos dá:

$$\gamma_{tt}x^2 + 2(\delta_{tt} - 6a^2\omega\gamma)x + (\rho_t + 2a\gamma_t - 4a^2\omega\delta) = 0 \quad (2.2.7)$$

Resolvendo para γ , δ e ρ :

$$\gamma_{tt} = 0 \Rightarrow \gamma = c_1t + c_2$$

$$\begin{aligned} \delta_{tt} - 6c_1a^2\omega t - 6c_2a^2\omega &= 0 \Rightarrow \delta = c_1a^2\omega t^3 + 3c_2a^2\omega t^2 + (3a^2\omega c_6 + c'_3)t + c_4 \\ \Rightarrow \delta &= c_1a^2\omega t^3 + 3c_2a^2\omega t^2 + (2a^2\omega c_6 + c_3)t + c_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_t = 4a^2\omega\delta - 2a\gamma_t &= 4c_1a^4\omega^2t^3 + 12c_2a^4\omega^2t^2 + 8c_6a^4\omega^2t + 4c_3a^2\omega t + 4c_4a^2\omega - 2c_1a \\ \Rightarrow \rho &= c_1a^4\omega^2t^4 + 4c_2a^4\omega^2t^3 + 4c_6a^4\omega^2t^2 + 2c_3a^2\omega t^2 + 4c_4a^2\omega t - 2c_1at + c'_5 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Substituindo o resultado em τ , χ e ϕ :

$$\tau = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_6$$

$$\chi = \gamma x + \delta \Rightarrow \chi = c_1 (tx + a^2 \omega t^3) + c_2 (x + 3a^2 \omega t^2) + 2c_6 a^2 \omega t + c_3 t + c_4$$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha u + \beta = \frac{1}{4a} (\gamma_t x^2 + 2\delta_t x + \rho) u + \beta \\ \Rightarrow \phi &= \left(c_1 \frac{x^2}{4a} + c_1 \frac{3a\omega t^2 x}{2} + 3c_2 a\omega t x + c_6 a\omega x + c_3 \frac{x}{2a} + c_1 \frac{a^3 \omega^2 t^4}{4} + c_2 a^3 \omega^2 t^3 \right. \\ &\quad \left. + c_6 a^3 \omega^2 t^2 + c_3 \frac{a\omega t^2}{2} + c_4 a\omega t - c_1 \frac{t}{2} + c_5 \right) u + \beta \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

encontramos os geradores:

$$\begin{aligned} z_+ &= t^2 \partial_t + (tx + a^2 \omega t^3) \partial_x + \left(\frac{1}{4a} x^2 + \frac{3}{2} a\omega t^2 x + \frac{1}{4} a^3 \omega^2 t^4 - \frac{1}{2} t \right) u \partial_u \\ z_0 &= 2t \partial_t + (x + 3a^2 \omega t^2) \partial_x + \left(3a\omega t x + a^3 \omega^2 t^3 - \frac{1}{2} \right) u \partial_u \\ z_- &= \partial_t + 2a^2 \omega t \partial_x + (3a\omega t x + a\omega x) \\ w_+ &= t \partial_x + \left(\frac{1}{2a} x + \frac{1}{2} a\omega t^2 \right) u \partial_u \\ w_0 &= \frac{1}{2a} u \partial_u \\ w_- &= -\partial_x - a\omega t u \partial_u \\ \Psi &= \psi(t, x) \partial_u \mid \Delta(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

2.2.3 Caso quadrático: $V(x) = \nu^2 x^2$

Vamos trabalhar agora o caso quadrático $V(x) = \nu^2 x^2$.

$$\begin{aligned} \gamma_{tt} x^2 + 2\delta_{tt} x + \rho_t - 8a^2 \nu^2 \gamma x^2 + 2a\gamma_t - 8a^2 \nu^2 \gamma x^2 - 8a^2 \nu^2 \delta x &= 0 \\ \Rightarrow (\gamma_{tt} - 16a^2 \nu^2 \gamma) x^2 + 2(\delta_{tt} - 4a^2 \nu^2 \delta) x + \rho_t + 2a\gamma_t &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Resolvendo para γ , δ e ρ :

$$\begin{aligned} \gamma_{tt} - 16a^2 \nu^2 \gamma &= 0 \Rightarrow \gamma = c_1 e^{4a\nu t} + c_2 e^{-4a\nu t} \\ \delta_{tt} - 4a^2 \nu^2 \delta &= 0 \Rightarrow \delta = c_3 e^{2a\nu t} + c_4 e^{-2a\nu t} \\ \rho_t - 2a\gamma_t &\Rightarrow \rho = -2a\gamma + c_5 = -2ac_1 e^{4a\nu t} - 2ac_2 e^{-4a\nu t} + c'_5 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Depois de substituir τ , χ e ϕ , encontramos:

$$\begin{aligned}
\tau_t = 2\gamma &\Rightarrow \tau = \frac{1}{2a\nu} (c_1 e^{4a\nu t} - c_2 e^{-4a\nu t}) + c_6 \\
\chi = \gamma x + \delta &\Rightarrow \chi = c_1 e^{4a\nu t} x + c_2 e^{-4a\nu t} x + c_3 e^{2a\nu t} + c_4 e^{-2a\nu t} \\
\phi = \alpha u + \beta &= \frac{1}{4a} (\gamma_t x^2 + 2\delta_t x + \rho) u + \beta \\
\phi &= \left(\nu c_1 e^{4a\nu t} x^2 - \nu c_2 e^{-4a\nu t} x^2 + \nu c_3 e^{2a\nu t} x - \nu c_4 e^{-2a\nu t} x - \frac{1}{2} c_1 e^{4a\nu t} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} c_2 e^{-4a\nu t} + c_5 \right) u + \beta
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Os geradores são

$$\begin{aligned}
z_{\pm} &= \frac{1}{4a\nu} e^{\pm 4a\nu t} (\partial_t \pm 2a\nu x \partial_x + 2a\nu^2 x^2 u \partial_u \mp a\nu u \partial_u) \\
z_0 &= \frac{1}{2a\nu} \partial_t \\
w_{\pm} &= e^{\pm 2a\nu t} (\pm \partial_x + \nu x u \partial_u) \\
w_0 &= 2\nu u \partial_u \\
\Psi &= \psi(t, x) \partial_u \mid \Delta(\psi) = 0
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

2.2.4 Potencial do tipo Calogero: $V(x) = r/x^2$

No potencial do tipo Calogero $V(x) = r/x^2$, r é um parâmetro adimensional e não pode ser reescalado mudando convenções de unidades de medida; veremos mais sobre isso em 5. Substituindo o potencial em 2.2.1:

$$\gamma_{tt} x^2 + 2\delta_{tt} x + \rho_t - \frac{8a^2 r \gamma}{x^2} + 2a\gamma_t + \frac{8a^2 r \gamma}{x^2} + \frac{8a^2 r}{x^3} \delta = 0 \tag{2.2.15}$$

Resolvendo para γ , δ e ρ :

$$\begin{aligned}
\gamma_{tt} = 0 &\Rightarrow \gamma = c_1 t + c_2 \\
\delta &= 0 \\
\rho_t = -2a\gamma_t &= -2ac_1 \Rightarrow \rho = -2ac_1 t + c_3
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Substituindo em τ , χ e ϕ :

$$\begin{aligned}
\tau_t = 2\gamma &\Rightarrow \tau = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_4 \\
\chi = \gamma x + \delta &\Rightarrow \chi = c_1 t x + c_2 x \\
\phi = \alpha u + \beta &= \frac{1}{4a} (\gamma_t x^2 + 2\delta_t x + \rho) u + \beta = \left(c_1 \frac{x^2}{4a} - c_1 \frac{t}{2} + c_3 \frac{1}{4a} \right) u + \beta
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Os geradores estão listados abaixo.

$$\begin{aligned}
z_+ &= t^2 \partial_t + tx \partial_x + \left(\frac{1}{4a} x^2 - \frac{1}{2} t \right) u \partial_u \\
z_0 &= 2t \partial_t + x \partial_x - \frac{1}{2} u \partial_u \\
z_- &= \partial_t \\
w_0 &= \frac{1}{2a} u \partial_u \\
\Psi &= \psi(t, x) \partial_u \mid \Delta(\psi) = 0
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Estes são os mesmos geradores que aparecem em 2.2.6, excluídos w_{\pm} . Note que r não aparece em qualquer dos geradores, já que $-8a^2 V \gamma$ e $-4a^2 V_x \gamma x$ cancelam, e $\delta = 0$ implica $-4a^2 V_x \delta = 0$, sendo estes os três únicos termos em 2.2.1 onde o potencial aparece.

2.3 Álgebra de Schrödinger e isomorfismo

Para os geradores em 2.2.6, 2.2.10 e 2.2.14, temos a mesma relação de comutação (os geradores em 2.2.18 satisfazem essas relações se excluirmos w_{\pm}). Abaixo se encontram todas as comutações não nulas.

$$\begin{aligned}
[z_0, z_{\pm}] &= \pm 2z_{\pm} \\
[z_0, w_{\pm}] &= \pm w_{\pm} \\
[z_+, z_-] &= -z_0 \\
[w_+, w_-] &= w_0 \\
[z_{\pm}, w_{\mp}] &= \pm w_{\pm} \\
[\mathbf{v}, \Psi] &= \Psi_{\mathbf{v}} = \psi_{\mathbf{v}}(t, x) \partial_u \mid \Delta(\psi_{\mathbf{v}}) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Os geradores w_{\pm} e w_0 fecham a álgebra de Heisenberg [29], \mathfrak{heis} , enquanto os geradores z_{\pm} e z_0 fecham o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (B.6.5). A álgebra em 2.3.1 é a soma semi-direta dessas duas álgebras e se chama álgebra de Schrödinger [32–34] $\mathfrak{sch} \cong \mathfrak{heis} \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Nesta escolha particular para a base da álgebra, descobrimos que o peso de um gerador é dado pela constante de estrutura da comutação de z_0 ¹, à esquerda, com o gerador em questão à direita. Denotando os geradores de cada caso como $\bar{\mathbf{v}}$ para o caso constante, $\check{\mathbf{v}}$ para o caso linear e $\tilde{\mathbf{v}}$ para o caso quadrático, existem transformações de similaridade S' e S relacionando o potencial constante ao linear e ao quadrático, respectivamente. Para $V(x) = 0 \rightarrow V(x) = \omega x$, a transformação de similaridade é

$$S' = e^{-a^2 \omega t^2 \partial_x} e^{-a \omega t x u \partial_u} e^{-\frac{1}{3} a^3 \omega^2 t^3 u \partial_u} \tag{2.3.2}$$

Através de 2.3.2, encontramos exatamente os mesmos geradores que em 2.2.10.

$$S' \bar{\mathbf{v}} S'^{-1} = \check{\mathbf{v}} \tag{2.3.3}$$

Para ligar os potenciais $V(x) = 0$ e $V(x) = \nu^2 x^2$, a transformação de similaridade é

$$S = e^{-M x \partial_x} e^{-R u \partial_u} e^{h(t) \partial_t} \tag{2.3.4}$$

¹ O único membro da subálgebra de Cartan.

com as funções M , R e h dadas por

$$\begin{aligned}
M &= \ln(\cosh(2avt)) \\
R &= \frac{1}{4}\nu x^2 \sinh(4avt) + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sech}(2avt)) \\
h &= h(t)|e^{h\partial_t}te^{-h\partial_t} = \frac{1}{2a\nu}\tanh(2avt)
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Não encontramos a forma exata de $h(t)$, mas podemos fixar seus coeficientes na expansão de Maclaurin para satisfazer a condição em 2.3.5. Os 50 primeiros coeficientes estão listados em E.5. A transformação muda a base em 2.2.14 da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}
\dot{z}_+ &= S\bar{z}_+S^{-1} = \frac{1}{4a\nu}(\tilde{z}_+ + \tilde{z}_- - \tilde{z}_0) \\
\dot{z}_0 &= S\bar{z}_0S^{-1} = \tilde{z}_+ - \tilde{z}_- \\
\dot{z}_- &= S\bar{z}_-S^{-1} = a\nu(\tilde{z}_+ + \tilde{z}_- + \tilde{z}_0) \\
\dot{w}_+ &= S\bar{w}_+S^{-1} = \frac{1}{4a\nu}(\tilde{w}_+ + \tilde{w}_-) \\
\dot{w}_0 &= S\bar{w}_0S^{-1} = \frac{1}{4a\nu}\tilde{w}_0 \\
\dot{w}_- &= S\bar{w}_-S^{-1} = \frac{1}{2}(\tilde{w}_- - \tilde{w}_+)
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Os geradores $\hat{\mathbf{v}}$ satisfazem as mesmas relações de comutação que aquelas em 2.3.1. Se quisermos passar do caso linear para o quadrático, devemos usar a transformação SS'^{-1} . Como transformações de similaridade são bijeções (todos os mapas podem ser invertidos), os três casos estão completamente relacionados. Além disso, podemos sempre adicionar uma constante b ao potencial através da transformação de similaridade $S'' = e^{-abtu\partial_u}$ e obter uma álgebra equivalente, recuperando a álgebra original com a contração $b \rightarrow 0$. No caso do potencial quadrático, basta uma translação $x \mapsto x' + c$ para obter um termo linear extra no potencial. Com tudo isso, temos que todos os potenciais do tipo $V(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$ são equivalentes. Como todos os geradores 2.2.18 estão presentes em 2.2.6, eles são mapeados por 2.3.4 nos geradores 2.2.14 excluídos w_{\pm} . Veremos na seção 5 que o potencial equivalente ao de Calogero por 2.3.4 possui um termo quadrático extra. Isso completa a equivalência entre potenciais do tipo $V(x) = b_1x^2 + b_2/x^2 + b_3$.

2.4 Soluções particulares através de invariantes

Uma forma de encontrar soluções particulares de Δ é através de invariantes específicos. Vejamos um exemplo simples.

2.4.1 Solução de onda plana para a partícula livre

Soluções de onda plana são funções do tipo $\psi(x - ct)$ que resolvem $\Delta(x - ct, \psi(x - ct)) = 0$. Para $V(x) = 0$ em Δ , podemos obter esse invariante com a combinação linear $\mathbf{v} = \partial_t + c\partial_x$. Escrevendo a equação característica para \mathbf{v} , encontramos

$$\mathbf{v} = -c\omega_- + z_- = c\partial_x + \partial_t \Rightarrow \frac{dx}{c} = \frac{dt}{1} \Rightarrow x - ct = \epsilon \tag{2.4.1}$$

onde c e ϵ são constantes. Isto confirma que existem soluções de onda para Δ . Mudando as variáveis através de $x - ct = y$, examinemos como mudam as derivadas.

$$\frac{\partial \psi(x - ct)}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{d\psi(y)}{dy} = -c \frac{d\psi(y)}{dy}; \quad \frac{\partial \psi(x - ct)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{d\psi(y)}{dy} = \frac{d\psi(y)}{dy} \quad (2.4.2)$$

Reescrevemos a equação em termos da nova variável como $\Delta(y, \psi(y))$.

$$\Delta = -c \frac{d\psi}{dy} + a \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{dy} = c_1 e^{\frac{\epsilon}{a}y} \Rightarrow \psi = c_2 e^{\frac{\epsilon}{a}y} + c_3$$

Para a partícula livre, é bem conhecida a solução fundamental (em unidades de medida do sistema internacional) [29]:

$$\psi_0(x, t) = A e^{i\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \quad (2.4.3)$$

Escolhendo $c = \sqrt{\frac{E}{2m}}$, $c_2 = A$ e $c_3 = 0$ encontramos $\psi(x, t) = \psi_0(x, t)$.

2.5 Transformações de grupo das soluções de Δ

Para encontrar as transformações de grupo de um parâmetro associadas a um gerador, utilizamos o mapa exponencial. Mostraremos as transformações do tripleto $(x, t, u) \in M \subset X \times U$ que surgem da exponenciação dos membros da álgebra de Schrödinger para a partícula livre.

2.5.1 Ação de G sobre Δ para $V(x) = 0$

Vamos trabalhar em detalhes a transformação de $\exp(sz_+)$; para os demais geradores o cálculo é mais simples e apenas listamos as transformações de grupo. A coordenatização em questão para a curva integral é $\phi(\gamma(s)) = (x(s), t(s), u(s))$. Desta maneira, as derivadas das variáveis x , t , e u no parâmetro s nos dá os coeficientes $\xi^i(x(s), t(s), u(s))$ do gerador z_+ .

$$\frac{dt}{ds} = t^2; \quad \frac{dx}{ds} = tx; \quad \frac{du}{ds} = \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{t}{2}\right)u \quad (2.5.1)$$

A derivada mais à esquerda nos diz quem é t depois de um fluxo [27] $F_s(t_0) \equiv \gamma_{t_0}(s)$ (ignorando x e u , já que dt/ds depende apenas em t). Substituímos, então, este resultado na equação seguinte, e assim por diante.

$$t = \frac{2t_0}{2 - st_0}; \quad x = \frac{x_0}{\left(1 - \frac{st_0}{2}\right)^2}; \quad u = u_0 \left(1 - \frac{st_0}{2}\right) \exp\left[\frac{x_0^2}{6at_0\left(1 - \frac{st_0}{2}\right)^3}\right] \quad (2.5.2)$$

Assim, encontramos o fluxo (transformação de grupo de um parâmetro) do ponto inicial $P_0 \equiv (x_0, t_0, u_0)$. Para qualquer ponto $P = (x, t, u) \in M$, teremos

$$\begin{aligned} \exp(sz_+) \cdot (x, t, u) &\equiv g_1 \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_1 \\ &= \left(\frac{4x}{(2 - st)^2}, \frac{2t}{2 - st}, u \frac{2 - st}{2} \exp\left[\frac{4x^2}{3at(2 - st)^3}\right]\right) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Isto nos diz que se o ponto $P = (x, t, u)$ está na curva integral, então o ponto $P_1 = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_1$ também está. Traduzindo para a linguagem de equações diferenciais, se (x, t, u) é uma solução

de Δ , então também o é $(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_1$. Em analogia com simetrias de equações algébricas, esta transformação deixa Δ invariante:

$$\Delta(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_1 = \Delta(x, t, u) = 0 \quad (2.5.4)$$

Isto é equivalente a

$$\text{pr } z_+(\Delta(x, t, u)) = 0 \quad (2.5.5)$$

Para ver como g_1 transforma as funções $\psi(x, t)$, devemos inverter as variáveis na transformação.

$$t = \frac{2\tilde{t}}{2 + s\tilde{t}}; \quad x = \frac{(2 - st)^2\tilde{x}}{4} \quad (2.5.6)$$

e substituí-las em $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t})$.

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \psi(x, t) \frac{2 - st}{2} \exp\left[\frac{4x^2}{3at(2 - st)^3}\right] \\ &= \psi\left(\frac{4\tilde{x}}{(2 + s\tilde{t})^2}, \frac{2\tilde{t}}{2 + s\tilde{t}}\right) \frac{2}{2 + s\tilde{t}} \exp\left(\frac{\tilde{x}^2}{6a\tilde{t}}\right) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Finalmente, já que temos apenas variáveis transformadas (\tilde{x}, \tilde{t}) em ambos os lados da equação 2.5.7 e ela é válida para qualquer par (\tilde{x}, \tilde{t}) , trivialmente substituímos as mesmas pelas variáveis originais.

$$\tilde{\psi}_1(x, t) = g_1 \cdot \psi(x, t) = \psi\left(\frac{4x}{(2 + st)^2}, \frac{2t}{2 + st}\right) \frac{2}{2 + st} \exp\left(\frac{x^2}{6at}\right) \quad (2.5.8)$$

Deste modo, encontramos a transformação de grupo do tripleto (x, t, u) para os geradores remanescentes. Consideramos certa mudança de base para deixar as transformações mais uniformes.

$$\exp(s(z_0 + aw_0)) \cdot (x, t, u) \equiv g_2 \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_2 = (xe^s, te^{2s}, u)$$

$$\exp(sw_+) \cdot (x, t, u) \equiv g_3 \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_3 = \left(x + st, t, u \exp\left[\frac{2sx + s^2t}{4a}\right]\right)$$

$$\exp(s(-w_-)) \cdot (x, t, u) \equiv g_4 \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_4 = (x + s, t, u)$$

$$\exp(s(2aw_0)) \cdot (x, t, u) \equiv g_5 \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_5 = (x, t, ue^s)$$

$$\exp(sz_-) \cdot (x, t, u) \equiv g_6 \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_6 = (x, t + s, u)$$

$$\exp(s\Psi) \cdot (x, t, u) \equiv g_\Psi \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_\Psi = (x, t, u + s\psi) \quad (2.5.9)$$

Transformações	Inversão	Dilatação	Transl. temporal	Boost de Galileu	Transl. espacial
Geradores	z_+	$z_0 + aw_0$	z_-	w_+	w_-

Tabela 2.1: Transformação de M através da exponenciação dos membros de \mathfrak{sch} .

As transformações g_5 e g_Ψ decorrem do fato de combinações lineares de soluções de equações lineares também serem soluções da mesma equação; as demais transformações estão sumarizadas na tabela 2.1. A transformação que denominamos inversão é mais conhecida como transformação conforme especial. O fator 2 em $g_2 \cdot t = te^{2s}$ é chamado expoente dinâmico crítico [35] e tem grande relevância na física da matéria condensada [36]; álgebras \mathfrak{sch}_z , com z o expoente dinâmico, são discutidas em [37]. Da tabela 2.1, notamos que todas as transformações são conformes o que aponta para a incorporação da álgebra de Schrödinger na álgebra conforme [38].

2.5.2 Da solução constante à solução de onda plana para a partícula livre

A ação de g_3 , depois da dilatação $s \mapsto 2s$, nos dá:

$$(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})_3 = \left(x + 2st, t, u \exp \left[\frac{sx + s^2t}{a} \right] \right) \quad (2.5.10)$$

Invertendo as variáveis por $t = \tilde{t}$ e $x = \tilde{x} - 2s\tilde{t}$ e substituindo-as na expressão 2.5.10, teremos apenas as variáveis transformadas (\tilde{x}, \tilde{t}) em ambos os lados da equação.

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \psi(\tilde{x} - s\tilde{t}, \tilde{t}) \exp \left(\frac{s\tilde{x} - s^2\tilde{t}}{a} \right) \quad (2.5.11)$$

Renomeando (\tilde{x}, \tilde{t}) para (x, t) , encontramos a transformação de $\psi(x, t)$ sob a ação de g_3 .

$$\psi_3(x, t) \equiv g_3 \cdot \psi(x, t) = \psi(x - st, t) \exp \left(\frac{sx - s^2t}{a} \right) \quad (2.5.12)$$

Consideremos $\psi(x, t) = c$, a solução constante. Transformando c com a ação de g_3 , encontramos:

$$\psi_3(x, t) = g_3 \cdot c = \exp \left(\frac{sx - s^2t}{a} \right) c \quad (2.5.13)$$

Transformando ψ_3 por g_2 com o parâmetro $s' = \ln \left(s^{-1} \sqrt{\frac{E}{2m}} \right)$, em seguida por g_5 com o parâmetro $s'' = \ln \frac{A}{c}$ e lembrando que $a = \frac{\hbar}{2im}$, encontramos $g_5(s'') \cdot g_2(s') \cdot g_3(2s) \cdot c = \psi_0(x, t)$, que é a solução de onda plana 2.4.3.

3 Tradução de prolongamentos para matrizes

Para fazer contato com o formalismo de operadores matriciais definiremos um produto associativo \star usando o prolongamento de campos. A transposição de campos vetoriais, no entanto, não é irrelevante e pode implicar na substituição incorreta de vínculos da equação, o que nos leva a definir um produto sutilmente diferente que será utilizado nas próximas seções. Concluímos que não apenas sistemas de equações não-lineares, mas também sistemas de equações diferenciais parciais matriciais têm um melhor tratamento com a abordagem de jatos.

3.1 Breve revisão de matrizes

Vamos limitar nossa revisão a matrizes quadradas. Uma matriz X é um vetor que pode ser decomposto em uma base cartesiana $\{e_j^i\} = \{e^i \otimes e_j\}$ no \mathbb{R}^{n^2} com o produto matricial definido por:

$$e_j^i \cdot e_l^k := e_l^i \delta_j^k \quad (3.1.1)$$

O índice superior indica a linha de entrada da componente, enquanto o índice inferior, a coluna. As componentes podem pertencer a um espaço qualquer, o espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ das transformações lineares atuando sobre o espaço de Hilbert, por exemplo. Uma matriz genérica X pode ser decomposta como:

$$X = \sum_{i,j} X_j^i e_j^i \quad (3.1.2)$$

A operação de transposição matricial é dada pela troca dos índices da base, mantendo fixos os índices das componentes (ou o contrário, trocar os índices das componentes, mantendo fixos os índices da base).

$$X^T := \sum_{i,j} X_j^i e_i^j \equiv \sum_{i,j} X_i^j e_j^i \quad (3.1.3)$$

Desta maneira, é comum escrevermos $(X_j^i)^T = (X^T)_j^i = X_i^j$. Tomando o produto matricial de X com outra matriz Y , encontramos a seguinte identidade para as componentes do produto:

$$X \cdot Y = \sum_{i,l} \sum_k X_k^i Y_l^k e_l^i = \sum_{i,l} (X \cdot Y)_l^i e_l^i \Rightarrow (X \cdot Y)_l^i = \sum_k X_k^i Y_l^k \quad (3.1.4)$$

A composição $X_j^i Y_l^k$ das componentes de uma matriz é dada pela natureza do espaço ao qual as mesmas pertencem e, geralmente, não é comutativa. Por exemplo, o produto de duas matrizes transpostas, geralmente, não pode ser escrito apenas em termos das matrizes originais.

$$\begin{aligned} X^T \cdot Y^T &= \sum_{j,k} \sum_l X_j^l Y_l^k e_k^j = \sum_{j,k} \sum_l Y_l^k X_j^l e_k^j + \sum_{j,k} \sum_l [X_j^l, Y_l^k] e_k^j = \\ &= (Y \cdot X)^T + Z; \quad Z_k^j = \sum_l [X_j^l, Y_l^k]^T \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o comutador de Lie.

3.2 Isomorfismo entre operadores matriciais e prolongamentos

Uma representação da base cartesiana $\{e_j^i\}$ que satisfaz o produto matricial é a representação diferencial. O isomorfismo entre as bases é dado por $e_j^i \mapsto u^i \partial_{u^j}$, enquanto o produto é realizado pela derivação.

$$u^i \partial_{u^j} \cdot u^k \partial_{u^l} := u^i \partial_{u^j} \left(u^k \right) \partial_{u^l} = u^i \partial_{u^l} \delta_j^k \quad (3.2.1)$$

Assim, a relação entre as representações matricial e diferencial do $\mathfrak{so}(3)$ é:

$$L_{x^k} = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} e_j^i \mapsto \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} x^i \partial_{x^j} \quad (3.2.2)$$

Dadas as considerações sobre matrizes, passemos ao prolongamento de campos. Seja $\mathbf{v}_P = \sum_{\alpha} P_{\alpha} (x, u^{(n)}) \partial_{u^{\alpha}}$ um campo vetorial no jato $J^n (X \times U)$, com $(x, u) \in M \subset X \times U$ e P_{α} uma função diferencial. Se o campo é linear, a decomposição se dá como segue.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \sum_{\alpha} P_{\alpha} (x, u^{(n)}) \partial_{u^{\alpha}} = \sum_{\alpha, \beta} P_{\alpha}^{\beta} (x, u^{\beta(n)}) \partial_{u^{\alpha}} = \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{P}_{\alpha}^{\beta} (u^{\beta}) \partial_{u^{\alpha}} \\ &\equiv \sum_{\alpha, \beta} \sum_J f_{\alpha}^{\beta J} (x) D_J (u^{\beta}) \partial_{u^{\alpha}} = \sum_{\alpha, \beta} \sum_J f_{\alpha}^{\beta J} (x) u_J^{\beta} \partial_{u^{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

A soma no multi-índice J é feita de zero a n , a ordem do operador. Na penúltima identidade, nós explicitamos a forma dos operadores matriciais \mathcal{P} em termos de derivadas totais em u com coeficientes $f(x)$. O contato com o método matricial aparece com o isomorfismo $u^{\beta} \partial_{u^{\alpha}} \mapsto e_{\alpha}^{\beta}$, onde e_{α}^{β} é a unidade com entrada na linha β e coluna α de uma matriz. Definimos a transposição \mathbf{v}_P^T de um campo linear, similarmente à transposição de matrizes, através da troca dos índices α e β da base, enquanto mantemos fixos os índices das componentes (ou vice-versa).

$$\mathbf{v}_P^T = \left(\sum_{\alpha, \beta} \mathcal{P}_{\alpha}^{\beta} (u^{\beta}) \partial_{u^{\alpha}} \right)^T := \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{P}_{\alpha}^{\beta} (u^{\alpha}) \partial_{u^{\beta}} \equiv \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{P}_{\beta}^{\alpha} (u^{\beta}) \partial_{u^{\alpha}} \quad (3.2.4)$$

Seja $\mathbf{v}_Q = \sum_{\gamma, \lambda} \mathcal{Q}_{\gamma}^{\lambda} u^{\lambda} \partial_{u^{\gamma}} = \sum_{\gamma, \lambda} \sum_K g_{\gamma}^{\lambda K} (x) u_K^{\lambda} \partial_{u^{\gamma}}$ outro campo linear, com a soma em K de zero a m . Queremos um produto isomórfico ao produto matricial; isto implica que o produto deve satisfazer a relação

$$\mathbf{v}_P \star \mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{P}_{\alpha}^{\beta} u^{\beta} \partial_{u^{\alpha}} \star \sum_{\gamma, \lambda} \mathcal{Q}_{\gamma}^{\lambda} u^{\lambda} \partial_{u^{\gamma}} = \sum_{\beta, \gamma} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}^{\beta} \mathcal{Q}_{\gamma}^{\lambda} u^{\beta} \partial_{u^{\gamma}} = \sum_{\beta, \gamma} (\mathcal{P}\mathcal{Q})_{\gamma}^{\beta} u^{\beta} \partial_{u^{\gamma}} \quad (3.2.5)$$

O prolongamento de um campo vetorial sobre outro não apenas inverte a ordem dos opera-

dores, ele também transpõe a ambos, bem como o resultado do produto.

$$\begin{aligned}
\text{pr } \mathbf{v}_P(\mathbf{v}_Q) &= \sum_L D_L \left(\sum_{\alpha, \beta} \sum_J f_\alpha^{\beta J}(x) u_J^\beta \right) \partial_{u_L^\alpha} \left(\sum_{\gamma, \lambda} \sum_K g_\gamma^{\lambda K}(x) u_K^\lambda \right) \partial_{u^\gamma} \\
&= \sum_L \sum_{\gamma, \lambda} \sum_K g_\gamma^{\lambda K}(x) D_L \left(\sum_{\alpha, \beta} \sum_J f_\alpha^{\beta J}(x) u_J^\beta \right) \delta_\alpha^\lambda \delta_K^L \partial_{u^\gamma} \\
&= \sum_{\gamma, \beta} \sum_\alpha \sum_K g_\gamma^{\alpha K}(x) D_K \left(\sum_J f_\alpha^{\beta J}(x) u_J^\beta \right) \partial_{u^\gamma} = \sum_{\gamma, \beta} \sum_\alpha \mathcal{Q}_\gamma^\alpha \mathcal{P}_\alpha^\beta u^\beta \partial_{u^\gamma} \\
&= \sum_{\gamma, \beta} \sum_\alpha (\mathcal{Q}^T)_\alpha^\gamma (\mathcal{P}^T)_\beta^\alpha u^\beta \partial_{u^\gamma} = \left(\sum_{\gamma, \beta} (\mathcal{Q}^T \mathcal{P}^T)_\gamma^\beta u^\beta \partial_{u^\gamma} \right)^T \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

Se nós meramente invertermos a ordem dos campos no prolongamento, ainda teremos transposições indesejadas. Logo, nosso produto \star será a transposição do prolongamento da transposição do segundo campo sobre a transposição do primeiro; dito mais claramente:

$$\mathbf{v}_P \star \mathbf{v}_Q := (\text{pr } \mathbf{v}_Q^T (\mathbf{v}_P^T))^T \tag{3.2.7}$$

Vamos verificar que, de fato, obtemos um isomorfismo com o produto matricial.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_P \star \mathbf{v}_Q &= \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{P}_\alpha^\beta u^\beta \partial_{u^\alpha} \star \sum_{\lambda, \gamma} \mathcal{Q}_\gamma^\lambda u^\lambda \partial_{u^\gamma} \\
&= \left(\sum_L D_L \left(\sum_{\lambda, \gamma} \sum_K g_\gamma^{\lambda K}(x) u_K^\lambda \right) \partial_{u_L^\lambda} \left(\sum_{\alpha, \beta} \sum_J f_\alpha^{\beta J}(x) u_J^\alpha \right) \partial_{u^\beta} \right)^T \\
&= \left(\sum_{\alpha, \beta} \sum_J \sum_L f_\alpha^{\beta J}(x) D_L \left(\sum_{\lambda, \gamma} \sum_K g_\gamma^{\lambda K}(x) u_K^\lambda \right) \delta_\lambda^\alpha \delta_J^L \partial_{u^\beta} \right)^T \\
&= \left(\sum_{\beta, \gamma} \sum_\alpha \sum_J f_\alpha^{\beta J}(x) D_J \left(\sum_K g_\gamma^{\alpha K}(x) u_K^\gamma \right) \partial_{u^\beta} \right)^T = \left(\sum_{\beta, \gamma} \sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha^\beta \mathcal{Q}_\gamma^\alpha u^\gamma \partial_{u^\beta} \right)^T \\
&= \left(\sum_{\beta, \gamma} (\mathcal{P}\mathcal{Q})_\gamma^\beta u^\gamma \partial_{u^\beta} \right)^T = \sum_{\beta, \gamma} (\mathcal{P}\mathcal{Q})_\gamma^\beta u^\beta \partial_{u^\gamma} \tag{3.2.8}
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos alternar entre os métodos de prolongamento de campos e operadores matriciais através do mapa σ definido abaixo.

$$\sigma : (D_J, u^\alpha \partial_{u^\beta}, \star) \mapsto (\partial_J, e_\beta^\alpha, \cdot) \quad \sigma^{-1} : (\partial_J, e_\beta^\alpha, \cdot) \mapsto (D_J, u^\alpha \partial_{u^\beta}, \star) \tag{3.2.9}$$

Podemos também usar o mapa σ' .

$$\sigma' : (u_J^\alpha \partial_{u^\beta}, \star) \mapsto (e_\beta^\alpha \partial_J, \cdot) \quad \sigma'^{-1} : (e_\beta^\alpha \partial_J, \cdot) \mapsto (u_J^\alpha \partial_{u^\beta}, \star) \tag{3.2.10}$$

Vejam os o exemplo de uma campo $u = (u^1, u^2)$ e variedade base de Minkowski.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_P &= b(x-t^2)u_{ttt}^1\partial_{u^1} + 2b^4u_{xyy}^2yf(x,t)\partial_{u^1} + zu_{zz}^1(x^2+y^2)\partial_{u^2} + abxu^2\partial_{u^2} \\
\Rightarrow \mathbf{v}_P &\mapsto \begin{pmatrix} b(x-t^2)\partial_t^3 & z(x^2+y^2)\partial_z^2 \\ 2b^4yf(x,t)\partial_x\partial_y^2 & abx \end{pmatrix} \\
\mathbf{v}_Q &= f(t,x,y,z)\partial_{u^1} + g(t,x,y,z)\partial_{u^2} \\
\Rightarrow \mathbf{v}_Q &\mapsto \begin{pmatrix} f(t,x,y,z) \\ g(t,x,y,z) \end{pmatrix} \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Não precisamos nos preocupar com a posição das variáveis u^α , contanto que elas estejam à esquerda de ∂_{u^β} . Com o mapa σ , todas as propriedades de operadores diferenciais matriciais são trazidas para os campos vetoriais (na forma evolucionária): traço, determinante, conjugação hermitiana, associatividade do produto, transformações de similaridade, expansão em série, (anti)comutação, etc. Porém, transposição não é uma operação tão natural para o prolongamento de campos. Na verdade, vemos que as transposições que aparecem no prolongamento são necessárias para se substituir variáveis dependentes adequadamente; um exemplo que esclarece o que estamos dizendo se encontra na seção D. Agora que a ponte para transitar entre os dois métodos está estabelecida, vamos finalmente definir o produto que vamos usar nas próximas seções:

$$\mathbf{v}_P \circledast \mathbf{v}_Q := \text{pr } \mathbf{v}_Q (\mathbf{v}_P) \tag{3.2.12}$$

O motivo para esta escolha é que queremos tornar a discussão mais tratável para aqueles com familiaridade com matrizes e que não utilizam prolongamentos, sem, no entanto, prejudicar o método que elegemos. Desta forma, deve-se ter em mente que será necessário transpor os geradores antes e depois do produto para estabelecer o isomorfismo.

Antes de prosseguirmos, vamos mostrar que esse produto é associativo. Primeiro, simplifiquemos a notação denotando um campo pelo seu operador matricial de derivadas totais e sua base simbolicamente como $\mathbf{v}_A = Ae$. Através de 3.2.8, podemos escrever

$$Ae \star Be = (AB)e \tag{3.2.13}$$

Sabemos que o produto de operadores matriciais é associativo. Vamos usar esse fato para facilitar a demonstração da associatividade de \star .

$$\begin{aligned}
(Ae \star Be) \star Ce &= (AB)e \star Ce = ((AB)C)e = (A(BC))e = Ae \star (BC)e \\
&= Ae \star (Be \star Ce) \tag{3.2.14}
\end{aligned}$$

Para mostrar a associatividade de \circledast , vamos considerar campos transpostos e inverter a ordem do produto em 3.2.6.

$$A^T e \circledast B^T e = (AB)^T e \tag{3.2.15}$$

Em analogia ao que fizemos em 3.2.14, demonstramos a associatividade de \circledast .

$$\begin{aligned}
(A^T e \circledast B^T e) \circledast C^T e &= (AB)^T e \circledast C^T e = ((AB)C)^T e = (A(BC))^T e = A^T e \circledast (BC)^T e \\
&= A^T e \circledast (B^T e \circledast C^T e) \tag{3.2.16}
\end{aligned}$$

Apesar de já termos o produto que vamos usar de agora em diante, vamos apenas mostrar que o prolongamento também é associativo, e poderia nos servir como um produto. Definamos

$$Ae \boxtimes Be := (B^T A^T)^T e \quad (3.2.17)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} (A^T e \boxtimes B^T e) \boxtimes C^T e &= (BA)^T e \boxtimes C^T e = (C(BA))^T e = ((CB)A)^T e = A^T e \boxtimes (CB)^T e \\ &= A^T e \boxtimes (B^T e \boxtimes C^T e) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

De agora em diante, iremos transitar indistintamente entre termos específicos de operadores e campos vetoriais. Uma vez que todas as correspondências estão plenamente estabelecidas, assumiremos a convenção de Einstein para soma sobre índices “covariantes” e “contravariantes” sobre todos os valores admitidos. Desta forma, o vetor \mathbf{v}_P poderá ser escrito $\mathbf{v}_P = \mathcal{P}_\beta^\alpha u^\beta \partial_{u^\alpha}$. Também iremos preferir operadores de derivada total atuando em funções diferenciais, e não em outros operadores. Desta forma, o produto \otimes será

$$\mathbf{v}_P \otimes \mathbf{v}_Q = (\mathcal{P}Q)_\beta^\gamma u^\beta \partial_{u^\gamma} = \mathcal{P}_\alpha^\gamma Q_\beta^\alpha \left(x, u^{\beta(n)} \right) \partial_{u^\gamma} \quad (3.2.19)$$

A seguir, vamos abandonar a notação \otimes para o produto de dois campos, assumindo que este produto é dado pela mera composição dos mesmos.

$$\mathbf{v}_P \mathbf{v}_Q \equiv \mathbf{v}_P \otimes \mathbf{v}_Q; \quad (\mathbf{v}_P)^n = \underbrace{\mathbf{v}_P \otimes \mathbf{v}_P \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_P}_{n \text{ vezes}} = (\mathcal{P}^n)_\beta^\alpha u^\beta \partial_{u^\alpha} \quad (3.2.20)$$

Do mesmo modo, definimos o comutador e o anti-comutador de dois campos \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_Q .

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_Q] &:= \mathbf{v}_P \mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_Q \mathbf{v}_P \\ \{\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_Q\} &:= \mathbf{v}_P \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_Q \mathbf{v}_P \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

A identidade para campos é $I = u^\alpha \partial_{u^\alpha}$, que comuta com todos os campos lineares em u , mas não comuta com simetrias pontuais (não dependentes em u) do tipo $\psi^\alpha(x) \partial_{u^\alpha}$.

$$[I, \psi^\alpha(x) \partial_{u^\alpha}] = \psi^\alpha \partial_{u^\alpha} (u^\beta) \partial_{u^\beta} - u^\beta \partial_{u^\beta} (\psi^\alpha \partial_{u^\alpha}) = \psi^\alpha \partial_{u^\alpha} \quad (3.2.22)$$

3.3 Justificando o uso de prolongamentos

Alguma justificativa deve ser oferecida para usar um método que necessita rever a definição de matrizes para traduzi-las em vez de simplesmente usá-las. Nós temos algumas.

- Primeiramente, queremos ganhar familiaridade com a teoria de jatos. Prolongamentos de campos são novos campos no fibrado de jatos, e imerge a teoria de álgebras de Lie no maquinário da geometria diferencial, o que permite definir formas, tensores, conexões, foliações, etc., além de facilitar o estudo de invariantes topológicos através dos grupos de homotopia, homologia e cohomologia. Estudar a teoria de jatos a nível algébrico com aplicações na equação de Schrödinger, que talvez seja a equação linear mais importante para a física teórica, é um bom começo.
- Operadores diferenciais matriciais são lineares e não encontram correspondência no gerador $u_J^\alpha u_K^\beta \partial_{u^\gamma}$, enquanto na geometria diferencial usual a composição de campos vetoriais não é definida, apenas o seu comutador (que é não-associativo), e o campo $\mathbf{v}_P \mathbf{v}_Q$ não faz sentido. O método de prolongamentos generaliza ambos.

- Lagrangianas são funções diferenciais não-lineares, e possuem tratamento mais pertinente com o método de prolongamentos, tanto para encontrar simetrias variacionais (e de calibre) generalizadas, quanto para resolver o problema inverso.
- A interpretação das funções de onda como geradores não é assim tão irrisória. O método matricial não distingue um operador função de uma função comum e a comutação de ambos é sempre nula; no caso de prolongamentos temos a variável u para distinguir um gerador linear de um “pontual”; a equação de Schrödinger tem infinitos de tais geradores pontuais, cuja transformação de grupo é a translação de u . Sabemos que a álgebra de Schrödinger pode ser incorporada na álgebra conforme¹ e na próxima seção construiremos uma álgebra não-abeliana infinita através da recursividade dos geradores lineares. Outra álgebra que possui uma estrutura similar a esta é a álgebra BMS estendida, que é uma generalização da álgebra de Poincaré, e é chamado que invariância por tais simetrias é requisito para teorias de gravidade quântica assintoticamente planas [39–41]. Ela é constituída da soma semi-direta de uma álgebra não-abeliana infinita (superrotações) com uma álgebra abeliana infinita (supertranslações). Caso exista algum morfismo entre a álgebra de geradores da equação de Schrödinger e a álgebra BMS (estendida ou não), a inclusão das soluções na álgebra pode desempenhar um papel importante.
- No produto de operadores, os operadores à esquerda atuam nos operadores à direita e “depois”. Na verdade, devemos considerar que estamos atuando esse produto numa função (ou uma matriz de funções), para então extrair o resultado do produto. Quando o operador à direita é uma função torna-se ainda mais confuso saber se o operador deve ou não seguir atuando, pois não temos o operador de derivada para delimitar a atuação. Este problema complica quando lidamos com ordens superiores e matrizes grandes. No método de prolongamentos não precisamos atuar operadores no vazio e nem em funções artificiais, mas nas características dos próprios campos, que são funções diferenciais. Deixe-nos comparar, passo-a-passo, um caso simples com os operadores $D_{xx} \mapsto \partial_{xx}$ e $x^2 u \partial_u \mapsto x^2$.

$$\begin{aligned}\partial_{xx}x^2 &= \partial_x(2x + x^2\partial_x) = 2 + 2x\partial_x + 2x\partial_x + x^2\partial_{xx} = 2 + 4x\partial_x + x^2\partial_{xx} \\ D_{xx}(x^2u)\partial_u &= (uD_{xx}x^2 + 2(D_x x^2)(D_x u) + x^2 D_{xx}u)\partial_u = (2u + 4xu_x + x^2 u_{xx})\partial_u\end{aligned}$$

Isso faz com que o prolongamento seja mais fácil de implementar em programas tais como o Mathematica e o Maple, já que derivação (mesmo derivadas totais) é procedimento corriqueiro em tais programas enquanto o produto de operadores não.

- Como equações diferenciais são tratadas como funções diferenciais no método de prolongamentos, torna-se evidente que uma das variáveis em uma equação pode ser escrita em termos das outras, o mesmo valendo para a substituição das variáveis dependentes aparecendo nos geradores de simetria da equação. No método matricial não é clara a “dependência” entre operadores e a base das matrizes não preserva a informação para a substituição do vínculo correto, como veremos em [D](#).

¹ Na seção 7 teremos a álgebra de Lorentz explicitamente como subálgebra.

4 Simetrias generalizadas da equação de Schrödinger unidimensional

Agora iremos encontrar as simetrias generalizadas para o caso constante, sabendo que os demais casos são encontrados analogamente. Iremos procurar por simetrias de segunda ordem e pelos geradores recursivos para estender estas simetrias em uma hierarquia de infinitos geradores. O comutador \mathbb{Z}_2 -graduado na definição de superálgebras de Lie serve de motivação para a introdução de álgebras envelopantes universais, que exigem o produto associativo definido em 3 e, assim, apresentamos a álgebra de spin superior que surge da álgebra de Heisenberg. Uma vez obtida essa álgebra em 1 + 1-dimensões indicamos como generalizá-la para quaisquer $d + 1$ -dimensões.

4.1 Forma evolucionária da equação de Schrödinger

A forma evolucionária dos geradores de simetria em 2.2.6, 2.2.10 e 2.2.14 (desconsiderando a parte trivial que não afeta as simetrias) é dada por 1.4.1.

- $V(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 Z_+ &= \left(-t^2 u_t - txu_x + \left(\frac{1}{4a} x^2 - \frac{1}{2} t \right) u \right) \partial_u \\
 Z_0 &= - \left(2tu_t + xu_x + \frac{1}{2} u \right) \partial_u \\
 Z_- &= -u_t \partial_u \\
 W_+ &= \left(-tu_x + \frac{1}{2a} xu \right) \partial_u \\
 W_0 &= \frac{1}{2a} u \partial_u \\
 W_- &= u_x \partial_u \\
 \Psi &= \psi(t, x) \partial_u \mid \Delta(\psi) = 0
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

- $V(x) = \omega x$

$$\begin{aligned}
 Z_+ &= \left(-t^2 u_t - (tx + a^2 \omega t^3) u_x + \left(\frac{1}{4a} x^2 + \frac{3}{2} a \omega t^2 x + \frac{1}{4} a^3 \omega^2 t^4 - \frac{1}{2} t \right) u \right) \partial_u \\
 Z_0 &= \left(-2tu_t - (x + 3a^2 \omega t^2) u_x + \left(3a \omega t x + a^3 \omega^2 t^3 - \frac{1}{2} \right) u \right) \partial_u \\
 Z_- &= (-u_t - 2a^2 \omega t u_x + (3a \omega t x + a \omega x) u) \partial_u \\
 W_+ &= \left(-tu_x + \left(\frac{1}{2a} x + \frac{1}{2} a \omega t^2 \right) u \right) \partial_u \\
 W_0 &= \frac{1}{2a} u \partial_u \\
 W_- &= (u_x - a \omega t u) \partial_u \\
 \psi &= \psi(t, x) \partial_u \mid \Delta(\psi) = 0
 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

- $V(x) = \nu x^2$

$$\begin{aligned}
Z_{\pm} &= \frac{1}{4a\nu} e^{\pm 4a\nu t} (-u_t \mp 2a\nu x u_x + 2a\nu^2 x^2 u \mp a\nu u) \partial_u \\
Z_0 &= -\frac{1}{2a\nu} u_t \partial_u \\
W_{\pm} &= e^{\pm 2a\nu t} (\mp u_x + \nu x u) \partial_u \\
W_0 &= 2\nu u \partial_u \\
\Psi &= \psi(t, x) \partial_u \mid \Delta(\psi) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Deixando as características dos geradores da equação de Schrödinger dependerem linearmente em derivadas totais de u de até segunda ordem¹, temos:

$$Q(t, x, u^{(2)}) = \alpha(t, x) u_{xx} + \beta(t, x) u_x + \gamma(t, x) u + \Psi(t, x) \tag{4.1.4}$$

De 4.1.4, encontramos o prolongamento sobre a equação Δ .

$$\begin{aligned}
\text{pr } \mathbf{v}_Q(\Delta) &= \sum_{J=0}^{\infty} D_J Q(x, u, u_x, u_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_J} \left(\frac{1}{a} u_t + u_{xx} - V(x) u \right) \\
&= \frac{1}{a} D_t Q + D_{xx} Q - V(x) Q = 0
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Depois de substituir $u_t = a(V(x)u - u_{xx})$ e zerar os coeficientes das derivadas de segunda ordem $Q_{u_J u_K}$ para todos os valores dos multi-índices J e K , chegamos à equação

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{a} Q_t - VQ + VQ_u u + V_x Q_{u_x} u + VQ_{u_x} u_x + V_{xx} Q_{u_{xx}} u + 2V_x Q_{u_{xx}} u_x \\
&\quad + VQ_{u_{xx}} u_{xx} + Q_{xx} + 2Q_{xu} u_x + 2Q_{xu_x} u_{xx} + 2Q_{xu_{xx}} u_{xxx} \\
&= 2\alpha_x u_{xxx} + \left(\frac{1}{a} \alpha_t + \alpha_{xx} + 2\beta_x \right) u_{xx} + \left(\frac{1}{a} \beta_t + 2V_x \alpha + \beta_{xx} + 2\gamma_x \right) u_x \\
&\quad \left(\frac{1}{a} \gamma_t + V_x \beta + V_{xx} \alpha + \gamma_{xx} \right) u + \Delta(\psi)
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Agora precisamos anular os coeficientes dos monômios $1, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_x = 0 &\Rightarrow \alpha = \alpha(t) \\
\frac{1}{a} \alpha_t + 2\beta_x = 0 &\Rightarrow \beta = -\frac{1}{2a} \alpha_t x + \delta(t) \\
\Delta(\psi) &= 0
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Os monômios restantes u e u_x fornecem duas equações acopladas para as funções $\alpha(t)$, $\delta(t)$ e $\gamma(t, x)$.

$$\begin{cases}
-(1/2a^2) \alpha_{tt} x + (1/a) \delta_t + 2V_x \alpha + 2\gamma_x = 0 \\
(1/a) \gamma_t - (1/2a) \alpha_t V_x x + V_x \delta + V_{xx} \alpha + \gamma_{xx} = 0
\end{cases} \tag{4.1.8}$$

¹ Aqui, nós assumimos $Q(x, u^{(2)}) = Q(x, u, u_x, u_{xx})$ já que $u_t = u_t(x, u, u_{xx}) = a(uV(x) - u_{xx})$ e todas as suas derivadas são variáveis dependentes no domínio $M^{(n)}$.

Como apenas derivadas do potencial aparecem em 4.1.8, vemos que nos é permitido trivialmente adicionar uma constante arbitrária ao mesmo sem que isso afete a estrutura da álgebra. Podemos resolver a primeira equação em 4.1.8 para γ , revelando todas as dependências em x .

$$\gamma = \frac{1}{8a^2}\alpha_{tt}x^2 - \frac{1}{2a}\delta_t x + f(t) - V\alpha \quad (4.1.9)$$

Substituindo γ como dado pela expressão 4.1.9 na segunda equação de 4.1.8, encontramos a equação para a característica Q .

$$\frac{1}{8a^3}\alpha_{ttt}x^2 - \frac{1}{2a^2}\delta_{tt}x + \frac{1}{4a^2}\alpha_{tt} + \frac{1}{a}f_t - \frac{1}{2a}\alpha_t x V_x - \frac{1}{a}\alpha_t V + \delta V_x = 0 \quad (4.1.10)$$

No caso de um potencial de potência da forma $V(x) = \nu_\lambda x^\lambda$, teremos:

$$\frac{1}{8a^3}\alpha_{ttt}x^2 - \frac{1}{2a^2}\delta_{tt}x + \frac{1}{4a^2}\alpha_{tt} + \frac{1}{a}f_t - \frac{1}{2a}(2 + \lambda)\nu_\lambda\alpha_t x^\lambda + \delta\lambda\nu_\lambda x^{\lambda-1} = 0 \quad (4.1.11)$$

Para a partícula livre, a condição 4.1.11 fornece as seguintes características:

$$\begin{aligned} Q_1 &= t^2 u_{xx} - \frac{1}{a} t x u_x + \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{2a} x^2 - t \right) u \\ Q_2 &= -t u_{xx} + \frac{1}{2a} x u_x + \frac{1}{a} \\ Q_3 &= u_{xx} \\ Q_4 &= -t u_x + \frac{1}{2a} x u \\ Q_5 &= u_x \\ Q_6 &= \frac{1}{2a} u \\ \Psi | \Delta(t, x, \Psi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Vemos que 4.1.12 é igual (a menos de uma constante) às características de 4.1.1 depois de substituir $u_t = -a u_{xx}$. O mesmo acontece para 4.1.2 e 4.1.3, levando em conta seus respectivos potenciais. Isso serve para nos mostrar que sempre podemos substituir o vínculo que define a equação dentro dos geradores quando estivermos no subespaço das soluções. Se sairmos desse subespaço, a equação é diferente de zero e os geradores são independentes. Isso pode ser útil para considerar álgebras com mais membros, mas sempre que estivermos no subespaço das soluções os vínculos devem ser considerados; no presente caso, $u_t \partial_u$ e $-a u_{xx} \partial_u$ são o mesmo gerador.

4.2 Recursão, álgebra envelopante universal e álgebras de spin superior

Um espaço vetorial \mathbb{Z}_2 -graduado \mathcal{V} é a soma direta de dois espaços vetoriais: $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$, onde elementos $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ desse espaço são designados como pares se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_0$ e ímpares quando $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$. Se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_a$, chamamos $\bar{v} = a$ a paridade de \mathbf{v} . Uma superálgebra de Lie \mathfrak{h} é um espaço vetorial \mathbb{Z}_2 -graduado com um produto bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ que satisfaz [42]:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}_a, \mathfrak{h}_b] &\subseteq \mathfrak{h}_{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_2 \\ [A, B] &= -(-1)^{\bar{A}\bar{B}} [B, A] \quad \forall A, B \in \mathcal{V} \\ (-1)^{\bar{A}\bar{C}} [A, [B, C]] + (-1)^{\bar{B}\bar{A}} [B, [C, A]] + (-1)^{\bar{C}\bar{B}} [C, [A, B]] &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Os geradores lineares Z_d e W_{\pm} (numa certa base) fecham a superálgebra¹ $\mathfrak{osp}(1|2)$:

$$\begin{aligned}
[W_+, W_+] &= 2Q_1 \partial_u \equiv 2Z_+ \\
[W_+, W_-] &= 2Q_2 \partial_u \equiv 2Z_0 \\
[W_-, W_-] &= 2Q_3 \partial_u \equiv 2Z_- \\
[Z_{d_1}, W_{d_2}] &= (d_1 - d_2) W_{2d_1+d_2} \\
[Z_{d_1}, Z_{d_2}] &= 2(d_1 - d_2) Z_{d_1+d_2}
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Concluimos que os geradores Z_d e W_{ϵ} fecham tanto uma álgebra quanto uma superálgebra de Lie e dizemos que esse conjunto de geradores possui uma dualidade álgebra/superálgebra [13]. Do ponto de vista de álgebras de Lie, vemos que o efeito prático do anti-comutador de geradores ímpares é criar novos geradores pares de ordem superior enquanto ignoram a comutação dos geradores ímpares entre si. Lembrando da discussão em 1.5, podemos construir não só geradores de segunda ordem a partir de geradores de primeira, mas geradores de ordem qualquer. Para construir esses geradores, precisamos escolher uma convenção para a base desse espaço infinito, isto é, temos que especificar o ordenamento em que eles aparecem a fim de não criarmos ambiguidades. Uma escolha natural é a base de ordenamento normal, em que fixamos a posição das potências de cada gerador. Seja

$$W_{n,m}^{[N.O.]} := (W_+)^n (W_-)^m \tag{4.2.3}$$

A representação desses geradores em termos de características pode ser muito complicada. Iremos, no entanto, trabalhar apenas com a álgebra abstrata \mathfrak{heis} , uma vez que a representação terá as mesmas contantes de estrutura:

$$[W_+, W_-] = cI \quad [W_{\pm}, I] = 0 \tag{4.2.4}$$

com c uma constante. A composição de dois geradores 4.2.3, usando as relações de comutação 4.2.4, é

$$W_{n_1, m_1}^{[N.O.]} W_{n_2, m_2}^{[N.O.]} = \sum_{l=0}^{m_1+n_2} (-1)^l j_{m_1, n_2, l} W_{n_1+n_2-l, m_1+m_2-l}^{[N.O.]} \tag{4.2.5}$$

com²

$$j_{m,n,l} = \frac{1}{l!} m_{[l]} n_{[l]} c^l \tag{4.2.6}$$

Esta é a álgebra envelopante universal da álgebra de Heisenberg, $\mathcal{U}(\mathfrak{heis})$.

Se considerarmos esses geradores sob o comutador de Lie, obtemos a álgebra de spin superior $\mathcal{HS}(\mathfrak{heis})$, da álgebra de Heisenberg 4.2.4.

$$\left[W_{n_1, m_1}^{[N.O.]}, W_{n_2, m_2}^{[N.O.]} \right] = \sum_{l=0}^{m_1+m_2} (-1)^l (j_{m_1, n_2, l} - j_{n_1, m_2, l}) W_{n_1+n_2-l, m_1+m_2-l}^{[N.O.]} \tag{4.2.7}$$

¹ Veja [43] para a classificação de álgebras e superálgebras de Lie.

² Estamos utilizando a notação de fatorial descendente definida em 1.4.10. No caso de números naturais: $n_{[l]} = n!/(n-l)!$.

Em vez da base com ordenamento normal, podemos considerar o ordenamento de Weyl, que simetriza completamente os geradores W_+ e W_- na álgebra envelopante universal.

$$W_{n,m}^{[W.O.]} \equiv \frac{1}{(n+m)!} \left(\sum_{\pi} W_{\pi(a_1)} W_{\pi(a_2)} \dots W_{\pi(a_n)} W_{\pi(b_1)} W_{\pi(b_2)} \dots W_{\pi(b_m)} \right) \quad (4.2.8)$$

A soma em 4.2.8 é por todas as permutações dos índices a e b . O trabalho pode ser facilitado se utilizarmos os resultados obtidos para o ordenamento normal. Primeiro, escrevamos 4.2.8 de outra forma. Vamos considerar $n > m$, isto não vai afetar a conclusão. Podemos escrever $W_{n,m}^{[W.O.]}$ como:

$$W_{n,m}^{[W.O.]} = \frac{n!m!}{(n+m)!} \sum_{l_0=n}^n \prod_{j=1}^m \left[\sum_{l_j=0}^{l_{j-1}} \right] \left(\prod_{k=1}^m \left(W_+^{l_{k-1}-l_k} W_- \right) W_+^{l_m} \right) \quad (4.2.9)$$

A expressão 4.2.9 parece complicada. Vejamos o exemplo de $m = 3$.

$$W_{n,3}^{[W.O.]} = \frac{n!3!}{(n+3)!} \sum_{l_1=0}^n \sum_{l_2=0}^{l_1} \sum_{l_3=0}^{l_2} \left(W_+^{n-l_1} W_- W_+^{l_1-l_2} W_- W_+^{l_2-l_3} W_- W_+^{l_3} \right) \quad (4.2.10)$$

É possível mostrar que a mudança de base é dada por

$$\begin{aligned} W_{n,m}^{[W.O.]} &= \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{2^l} j_{n,m,l} W_{n-l,m-l}^{[N.O.]} \\ W_{n,m}^{[N.O.]} &= \sum_{l=0}^m \frac{1}{2^l} j_{n,m,l} W_{n-l,m-l}^{[W.O.]} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Vamos definir $W_{n,m} \equiv W_{n,m}^{[W.O.]}$. Podemos apresentar $\mathcal{HS}(\mathfrak{heis})$ através da comutação.

$$[W_{n_1,m_1}, W_{n_2,m_2}] = \sum_{l=0}^{m_1+m_2} \sum_{k=0}^{m_1+m_2} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2l-2}} j_{n_1,m_2,l} j_{n_2,m_1,2l-1-k} W_{n_1+n_2+1-2l, m_1+m_2+1-2l} \quad (4.2.12)$$

A álgebra completa (não consideramos geradores pseudo-diferenciais nesta tese [10]) da representação de peso mínimo dos geradores da equação linear de Schrödinger em 1 + 1 dimensões para potencias $V(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ é $\mathcal{HS}(\mathfrak{heis}) \times \mathfrak{psi}$, definindo \mathfrak{psi} a álgebra abeliana das funções de onda. Podemos considerar o caso do potencial de Calogero, que é constituído apenas do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e da identidade. Para achar a álgebra $\mathcal{HS}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ devemos permitir apenas geradores de ordem par. A soma dos índices n e m em 4.2.12 nos dá a ordem dos geradores, enquanto sua diferença nos dá o peso. Uma mera mudança de convenção nos permite encontrar $\mathcal{HS}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ facilmente, invertendo $n + m = 2p$ e $n - m = 2q$ para $n = p + q$ e $m = p - q$.

$$\left[W_{2q_1}^{2p_1}, W_{2q_2}^{2p_2} \right] = \sum_{l=0}^{p_1+p_2} \sum_{k=0}^{p_1+p_2} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2l-2}} j_{p_1+q_1, p_2-q_2, l} j_{p_2+q_2, p_1-q_1, 2l-1-k} W_{2(q_1+q_2+1-2l)}^{2(p_1+p_2+1-2l)} \quad (4.2.13)$$

com $W_{2d}^2 = Z_d$. Essa é a álgebra dos geradores lineares da equação de Schrödinger com potencias $V(x) = c_1 x^2 + c_2/x^2 + c_3$. Se considerarmos essa notação para $\mathcal{HS}(\mathfrak{heis})$ fica mais claro o porquê do nome álgebra de spin superior. Os geradores W_{2q}^{2p} têm índices no intervalo

$2p \in \mathbb{N}$ e $q = -p, -p + 1, \dots, p - 1, p$. Como vemos, podemos alocar os geradores de ordem $2p$ em multipletos da representação de peso mínimo $-p$ do $\mathfrak{su}(2)$ com spin q . A comutação de um gerador W_{2q}^{2p} com geradores com $p = 1$ altera o spin dentro de uma representação enquanto a comutação/anticomutação com geradores com $p = 1/2$ diminuem/aumentam em $1/2$ a representação. Veremos mais sobre isso na seção 7.

A passagem da álgebra de geradores de primeira ordem para a álgebra de geradores com qualquer ordem é apenas a primeira generalização que se pode fazer. A segunda é considerar um sistema com um número qualquer de equações. Na seção 5 trabalharemos com duas equações. A terceira generalização é considerar uma dimensão espacial qualquer. Tratemos agora desse caso. Seja a equação livre de Schrödinger em $d + 1$ dimensões:

$$\Delta = u_t + a \sum_{j=1}^d u_{x^j x^j} \quad (4.2.14)$$

Devido à invariância por rotações, a álgebra $\mathfrak{so}(d)$ entra na simetria. Para ver como isto acontece, sejam $L_{ij} = (x^i u_{x^j} - x^j u_{x^i}) \partial_u$ os geradores das rotações. Vamos estudar a atuação do operador $D_t + a D_{x^k x^k}$ (assumindo soma sobre quaisquer índices repetidos) sobre $x^i u_{x^j}$. Substituindo u_t da equação,

$$\begin{aligned} D_t(x^i u_{x^j}) &= x^i u_{t x^j} = -a x^i u_{x^k x^k x^j} \\ D_{x^k x^k}(x^i u_{x^j}) &= 2u_{x^i x^j} + x^i u_{x^k x^k x^j} \\ \Rightarrow (D_t + a D_{x^k x^k})(x^i u_{x^j}) &= 2u_{x^i x^j} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Concluimos que L_{ij} são geradores de simetria.

$$\text{pr } L_{ij}(\Delta) = (D_t + a D_{x^k x^k})(x^i u_{x^j} - x^j u_{x^i}) \partial_u = 0 \quad (4.2.16)$$

Denotando x por x^1 e calculando o prolongamento de W_{\pm} sobre Δ , nos mostra que estes também são geradores de simetria. Vamos denotá-los W_{\pm}^1 . Comutando com L_{ij} , encontramos outros geradores, uma subálgebra \mathfrak{heis} para cada dimensão espacial.

$$[L_{ij}, W_{\pm}^1] = \delta_j^1 W_{\pm}^i - \delta_i^1 W_{\pm}^j \quad (4.2.17)$$

A álgebra em primeira ordem é dada pelas comutações abaixo.

$$\begin{aligned} [W_{\epsilon_1}^i, W_{\epsilon_2}^j] &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \delta^{ij} W_{\epsilon_1 + \epsilon_2}^j \\ [L_{ij}, W_{\epsilon}^k] &= \delta_j^k W_{\epsilon}^i - \delta_i^k W_{\epsilon}^j \\ [L_{ij}, L_{kl}] &= \delta_{jk} L_{il} - \delta_{ik} L_{jl} + \delta_{il} L_{jk} - \delta_{jl} L_{ik} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Podemos agora construir a álgebra da soma semi-direta de $\mathfrak{so}(d)$ com a soma direta de d álgebras $\mathcal{HS}(\mathfrak{heis})$.

$$\begin{aligned} [W_{n_1, m_1}^i, W_{n_2, m_2}^j] &= \delta^{ij} \sum_{l=0}^{m_1+m_2} \sum_{k=0}^{m_1+m_2} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2l-2}} j_{n_1, m_2, l} j_{n_2, m_1, 2l-1-k} W_{n_1+n_2+1-2l, m_1+m_2+1-2l}^j \\ [L_{ij}, W_{n, m}^k] &= \delta_j^k W_{n, m}^i - \delta_i^k W_{n, m}^j \\ [L_{ij}, L_{kl}] &= \delta_{jk} L_{il} - \delta_{ik} L_{jl} + \delta_{il} L_{jk} - \delta_{jl} L_{ik} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Isso nos mostra como pode ser simples expandir resultados uma vez que se domine apropriadamente o caso mais simples. Em vez de invariância por rotações, poderíamos considerar um espaço com assinaturas $\mathfrak{so}(d-n, n)$. Também vemos que é sempre possível construir subálgebras a partir de álgebras de spin superior. No nosso caso excluímos todos os geradores ímpares, porém, poderíamos construir inúmeras álgebras diferentes. Veremos exemplos disso nas próximas seções.

5 Geradores lineares de até terceira ordem para duas equações de Schrödinger

Procurando por geradores de simetria de até terceira ordem encontramos duas famílias relacionadas pela transformação de similaridade 2.3.4 de quatro equivalentes álgebras de spin superior para os potenciais de Calogero puro e deformado, uma família para cada potencial. O padrão que surge para os vínculos entre os parâmetros adimensionais no potencial de cada álgebra sugere que existem infinitas de tais álgebras, o que será confirmado na seção 8. Na discussão das próximas seções usamos um software para auxiliar as explicações. Clicando [aqui](#) (ou copiando a url em E.0.1) é possível visualizar e baixar um arquivo em formato .nb de um notebook do Mathematica 12.1 que constitui o apêndice E, bem como a versão .pdf do arquivo e desta tese.

5.1 Potenciais de Calogero puro e deformado por oscilador

Sejam $V^1(x) = r/x^2 + \beta^2 x^2$ e $V^2(x) = s/x^2 + \gamma^2 x^2$ potenciais do tipo Calogero com deformação oscilatória, e r e s parâmetros adimensionais, para duas partículas de mesma massa com funções de onda $\psi(t, x)$ e $\phi(t, x)$, respectivamente. Estes não são superpotenciais usuais da mecânica quântica supersimétrica [44], mas vêm do modelo de equações diferenciais parciais matriciais (MPDEs) [45,46]. A forma geral dos potenciais pode ser vista no gráfico 5.1, enquanto as equações de Schrödinger são dadas em 5.1.1.

$$\begin{aligned} \frac{i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V^1 \psi &= 0 \\ \frac{i}{a} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - V^2 \phi &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

As constantes são $a = \hbar^2/2m$, $\beta^2 = m\omega_1^2/2a$ e $\gamma^2 = m\omega_2^2/2a$.

Usando o método de prolongamento de campos vetoriais, podemos escrever essas equações como uma função diferencial no 2-jato $J^2(X, U)$, que é identicamente nula no espaço das soluções.

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2; \quad \Delta_1 = \frac{i}{a} u_t^1 + u_{xx}^1 - V^1 u^1 = 0; \quad \Delta_2 = \frac{i}{a} u_t^2 + u_{xx}^2 - V^2 u^2 = 0 \quad (5.1.2)$$

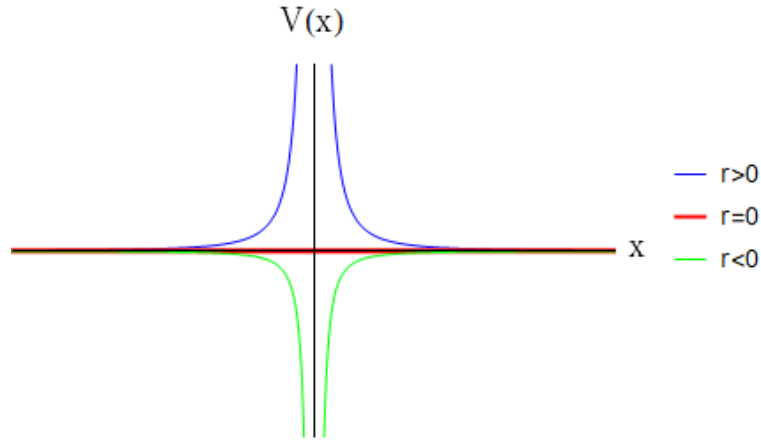
Se $\mathbf{v}_P = P(t, x, u^{1(n)}, u^{2(n)}) \partial_{u^1} + Q(t, x, u^{1(n)}, u^{2(n)}) \partial_{u^2}$ é um gerador de simetria de ordem n do sistema Δ , então nós temos:

$$\text{pr } \mathbf{v}_P(\Delta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{pr } \mathbf{v}_P(\Delta_1) = \sum_J D_J(P) \partial_{u_J^1}(\Delta_1) = \frac{i}{a} D_t P + D_{xx} P - V^1 P = 0 \\ \text{pr } \mathbf{v}_P(\Delta_2) = \sum_J D_J(Q) \partial_{u_J^2}(\Delta_2) = \frac{i}{a} D_t Q + D_{xx} Q - V^2 Q = 0 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

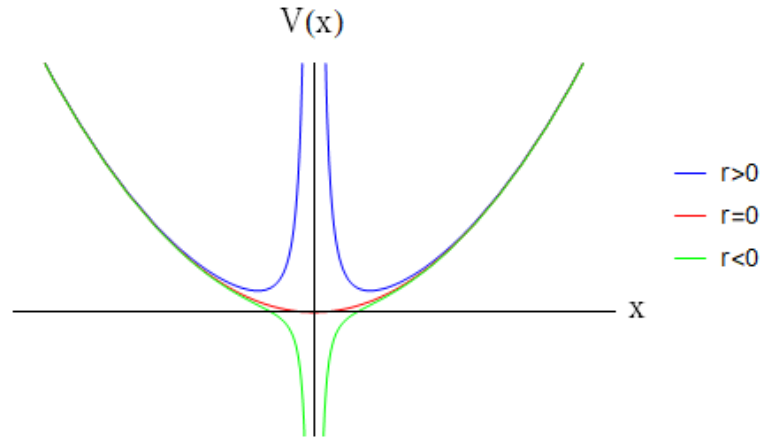
De 5.1.2, os vínculos da equação são $u_t^\alpha = ia(u_{xx}^\alpha - V^\alpha)$. Substituindo esses vínculos, e procurando por simetrias de até terceira ordem, isto é, $P = P(t, x, u^1, u^2, u_x^1, u_x^2, u_{xx}^1, u_{xx}^2, u_{xxx}^1, u_{xxx}^2)$ e $Q = Q(t, x, u^1, u^2, u_x^1, u_x^2, u_{xx}^1, u_{xx}^2, u_{xxx}^1, u_{xxx}^2)$, primeiramente descobrimos que os geradores devem ser lineares (vamos focar apenas em P para a equação Δ_1).

$$\begin{aligned} P &= A_1(t, x) u_{xxx}^1 + A_2(t, x) u_{xxx}^2 + A_3(t, x) u_{xx}^1 + A_4(t, x) u_{xx}^2 + A_5(t, x) u_x^1 \\ &\quad + A_6(t, x) u_x^2 + A_7(t, x) u^1 + A_8(t, x) u^2 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Em segundo lugar, encontramos quatro relações distintas entre r e s (E.2), com $\gamma = \beta$ (E.4), para preservar geradores ímpares, isto é, A_2, A_4, A_6 e A_8 não são todos nulos. Como



(a) Potencial puro: $\beta = 0$.



(b) Potencial deformado: $\beta > 0$.

Figura 5.1: Forma geral dos potenciais.

precisamos anular os coeficientes das variáveis em 5.1.3, encontramos as seguintes condições a serem impostas sobre r e s para preservar geradores ímpares.

$$\begin{aligned}
 A_8(t, x) \neq 0 &\Rightarrow s = r \\
 A_6(t, x) \neq 0 &\Rightarrow \frac{r^2}{2} - rs - r + \frac{s^2}{2} - s = 0 \\
 A_4(t, x) \neq 0 &\Rightarrow \frac{3r^2s}{8} - \frac{r^3}{8} + r^2 - \frac{3rs^2}{8} - \frac{3r}{2} + \frac{s^3}{8} - s^2 + \frac{3s}{2} = 0 \\
 A_2(t, x) \neq 0 &\Rightarrow \frac{r^2s^2}{8} - \frac{r^3s}{12} + \frac{5r^2s}{12} + \frac{r^4}{48} - \frac{5r^3}{12} + \frac{9r^2}{4} - \frac{rs^3}{12} + \frac{5rs^2}{12} - \frac{3rs}{2} \\
 &- 3r + \frac{s^4}{48} - \frac{5s^3}{12} + \frac{9s^2}{4} - 3s = 0
 \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

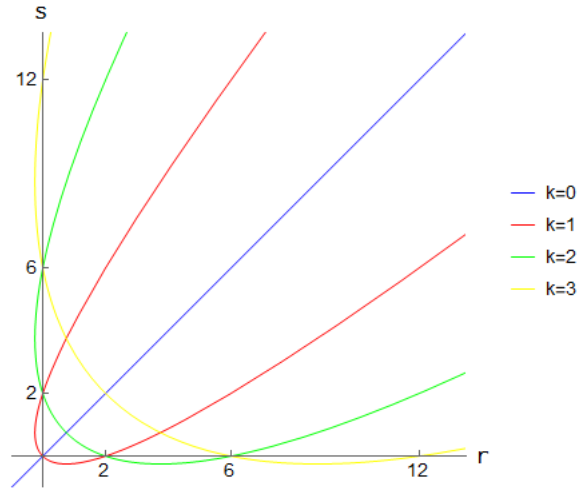


Figura 5.2: Condições sobre r e s para geradores ímpares de ordem k .

Definindo $g = s - r$, essas condições se tornam¹:

$$\begin{aligned}
 s &= r && \Rightarrow \text{Geradores de ordem 0 e 2} \\
 r &= \frac{1}{4}g(g-2) \text{ e } s = \frac{1}{4}g(g+2) && \Rightarrow \text{Geradores de ordem 1 e 3} \\
 r &= \frac{1}{16}(g-2)(g-6) \text{ e } s = \frac{1}{16}(g+2)(g+6) && \Rightarrow \text{Geradores de ordem 2} \\
 r &= \frac{1}{36}(g-6)(g-12) \text{ e } s = \frac{1}{36}(g+6)(g+12) && \Rightarrow \text{Geradores de ordem 3} \quad (5.1.6)
 \end{aligned}$$

O gráfico 5.2 apresenta a reta $g = 0$ e três parábolas, e é simétrico para r e s . As curvas atravessam os eixos r e s nos pontos 0, 2, 6 e 12. Destes quatro casos, podemos reconhecer o seguinte padrão: procurando por simetrias de ordem k do sistema 5.1.2, aparecerão as seguintes $k + 1$ relações entre r e s para a preservação de simetrias ímpares.

$$\begin{aligned}
 s_0 &= r_0 \\
 r_k &= \frac{1}{(2k)^2}(k_{(2)} - g_k)(k_{[2]} - g_k) \\
 s_k &= \frac{1}{(2k)^2}(k_{(2)} + g_k)(k_{[2]} + g_k) \quad k > 0 \quad (5.1.7)
 \end{aligned}$$

Vamos designar a álgebra de geradores do caso k por $\mathfrak{q}(k, g_k)$ ². Para que duas álgebras $\mathfrak{q}(k, g_k)$ e $\mathfrak{q}(k', g_{k'})$ diferentes sejam subálgebras de uma álgebra mais abrangente, precisamos que $r_k = r_{k'}$ e $s_k = s_{k'}$ para que o potencial em 5.1.2 de ambos os casos seja o mesmo. Essas

¹ Veja D, E.2, E.4 e 8 para detalhes sobre a obtenção das condições e da forma explícita dos geradores.

² Vamos escrever $\mathfrak{q}(0, \rho)$ (veja a definição de ρ em 6.1.3) quando especializamos para o caso $k = 0$, e não $\mathfrak{q}(0, g_0)$, pois g_k é a diferença entre os parâmetros nos potenciais, que é nula para $k = 0$. No entanto, esse caso ainda depende em um parâmetro contínuo, e sempre que estivermos tratando de $\mathfrak{q}(k, g_k)$ de um modo geral, consideramos que para $k = 0$ temos $\mathfrak{q}(0, \rho)$.

igualdades são satisfeitas para os seguintes potenciais (os sinais \pm são correlacionados).

$$\begin{aligned} g_k &= g_{k'} = \pm k k' \\ r_k &= r_{k'} = \frac{1}{4} ((k \mp k')^2 - 1) \\ s_k &= s_{k'} = \frac{1}{4} ((k \pm k')^2 - 1) \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Reconhecemos que esses são justamente os pontos de interseção entre as curvas no gráfico 5.2. Veremos na seção 6 que se impusermos a restrição de funções de onda normalizadas, a álgebra $\mathfrak{q}(k, g_k)$ só pode ser unida a uma das álgebras $\mathfrak{q}(k \pm 1, g_k)$.

Os geradores comuns aos quatro casos estudados são a identidade e o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ¹ para cada uma das equações em 5.1.2, somando oito geradores pares. Todos os demais geradores são ímpares. Eles aparecem em pares, um para cada equação. Abaixo, uma lista que resume quantos geradores ímpares aparecem e qual a sua ordem.

$k = 0$: 1 par de geradores de ordem 0 e 3 pares de geradores de ordem 2.

$k = 1$: 2 pares de geradores de ordem 1 e 4 pares de geradores de ordem 3.

$k = 2$: 3 pares de geradores de ordem 2.

$k = 3$: 4 pares de geradores de ordem 3.

Os três pares de ordem 2 para $k = 0$ e os quatro pares de ordem 3 para $k = 1$ são o produto de outros geradores, e por isso não serão considerados até a seção 7. Mudaremos a notação das variáveis do espaço de jato da seguinte maneira.

$$u_{\underbrace{n, t \dots t}_{m \text{ vezes}}} \equiv u_{\underbrace{x \dots x}_n \underbrace{t \dots t}_m} \tag{5.1.9}$$

No resto dessa seção vamos apenas listar os geradores de cada caso que não podem ser escritos como o produto de dois outros geradores (o que definimos como geradores fortemente independentes), bem como mostrar a transformação de similaridade dos mesmos.

¹Incluiremos os geradores do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ para $k = 1$ entre os geradores fortemente independentes apenas para unificar o tratamento das diferentes álgebras.

5.2 Geradores do potencial puro

Os geradores da equação com potencial de Calogero puro são encontrados em E.3. A multiplicação por constantes complicadas serve para fixar exatamente as mesmas constantes de estrutura para ambos os potenciais.

5.2.1 Geradores pares

$$\begin{aligned}
 I &= u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} \\
 K &= u^1 \partial_{u^1} - u^2 \partial_{u^2} \\
 Z_+ &= \left(t^2 u_t^1 + u^1 \left(\frac{t}{2} - \frac{ix^2}{4a} \right) + txu_1^1 \right) \partial_{u^1} + \left(t^2 u_t^2 + u^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{ix^2}{4a} \right) + txu_1^2 \right) \partial_{u^2} \\
 Z_0 &= \left(-tu_t^1 - \frac{1}{2}xu_1^1 - \frac{u^1}{4} \right) \partial_{u^1} + \left(-tu_t^2 - \frac{1}{2}xu_1^2 - \frac{u^2}{4} \right) \partial_{u^2} \\
 Z_- &= u_t^1 \partial_{u^1} + u_t^2 \partial_{u^2}
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

5.2.2 Geradores ímpares para o caso k

- Caso 0

$$Q_0^{(0)} = u^2 \partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2} \tag{5.2.2}$$

- Caso 1

$$\begin{aligned}
 Q_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= \sqrt{ia} \left(\left(\left(\frac{g_1 t}{2x} - \frac{ix}{2a} \right) u^2 + tu_1^2 \right) \partial_{u^1} + \left(\left(-\frac{g_1 t}{2x} - \frac{ix}{2a} \right) u^1 + tu_1^1 \right) \partial_{u^2} \right) \\
 Q_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -\sqrt{ia} \left(\left(\frac{g_1 u^2}{2x} + u_1^2 \right) \partial_{u^1} + \left(u_1^1 - \frac{g_1 u^1}{2x} \right) \partial_{u^2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

- Caso 2

$$Q_1^{(2)} = ia \left(\left(\left(-\frac{x^2}{4a^2} - \frac{ig_2t}{4a} - \frac{it}{2a} + \frac{g_2^2t^2}{16x^2} - \frac{g_2t^2}{4x^2} - \frac{3t^2}{4x^2} \right) u^2 + \left(\frac{g_2t^2}{2x} - \frac{itx}{a} \right) u_1^2 + t^2u_2^2 \right) \partial_{u^1} \right. \\ \left. + \left(\left(-\frac{x^2}{4a^2} + \frac{ig_2t}{4a} - \frac{it}{2a} + \frac{g_2^2t^2}{16x^2} + \frac{g_2t^2}{4x^2} - \frac{3t^2}{4x^2} \right) u^1 + \left(-\frac{g_2t^2}{2x} - \frac{itx}{a} \right) u_1^1 + t^2u_2^1 \right) \partial_{u^2} \right)$$

$$Q_0^{(2)} = -ia \left(\left(\left(-\frac{ig_2}{8a} - \frac{i}{4a} + \frac{g_2^2t}{16x^2} - \frac{g_2t}{4x^2} - \frac{3t}{4x^2} \right) u^2 + \left(\frac{g_2t}{2x} - \frac{ix}{2a} \right) u_1^2 + tu_2^2 \right) \partial_{u^1} \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{ig_2}{8a} - \frac{i}{4a} + \frac{g_2^2t}{16x^2} + \frac{g_2t}{4x^2} - \frac{3t}{4x^2} \right) u^1 + \left(-\frac{g_2t}{2x} - \frac{ix}{2a} \right) u_1^1 + tu_2^1 \right) \partial_{u^2} \right)$$

$$Q_{-1}^{(2)} = ia \left(\left(\left(\frac{g_2^2}{16x^2} - \frac{g_2}{4x^2} - \frac{3}{4x^2} \right) u^2 + \frac{g_2u_1^2}{2x} + u_2^2 \right) \partial_{u^1} \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{g_2^2}{16x^2} + \frac{g_2}{4x^2} - \frac{3}{4x^2} \right) u^1 - \frac{g_2u_1^1}{2x} + u_2^1 \right) \partial_{u^2} \right)$$

(5.2.4)

• Caso 3

$$\begin{aligned}
Q_{\frac{3}{2}}^{(3)} = & (ia)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\left(-\frac{g_3tx}{8a^2} - \frac{3tx}{4a^2} + \frac{ix^3}{8a^3} - \frac{ig_3^2t^2}{24ax} + \frac{3it^2}{2ax} + \frac{g_3^3t^3}{216x^3} - \frac{g_3^2t^3}{12x^3} - \frac{g_3t^3}{6x^3} + \frac{3t^3}{x^3} \right) u^2 \right. \right. \\
& + \left. \left(-\frac{3tx^2}{4a^2} - \frac{ig_3t^2}{2a} - \frac{3it^2}{2a} + \frac{g_3^2t^3}{12x^2} - \frac{g_3t^3}{2x^2} - \frac{3t^3}{x^2} \right) u_1^2 + \left(\frac{g_3t^3}{2x} - \frac{3it^2x}{2a} \right) u_2^2 + t^3u_3^2 \right) \partial_{u^1} \\
& + \left(\left(\frac{g_3tx}{8a^2} - \frac{3tx}{4a^2} + \frac{ix^3}{8a^3} - \frac{ig_3^2t^2}{24ax} + \frac{3it^2}{2ax} - \frac{g_3^3t^3}{216x^3} - \frac{g_3^2t^3}{12x^3} + \frac{g_3t^3}{6x^3} + \frac{3t^3}{x^3} \right) u^1 \right. \\
& \left. + \left(-\frac{3tx^2}{4a^2} + \frac{ig_3t^2}{2a} - \frac{3it^2}{2a} + \frac{g_3^2t^3}{12x^2} + \frac{g_3t^3}{2x^2} - \frac{3t^3}{x^2} \right) u_1^1 + \left(-\frac{g_3t^3}{2x} - \frac{3it^2x}{2a} \right) u_2^1 + t^3u_3^1 \right) \partial_{u^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\frac{1}{2}}^{(3)} = & - (ia)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\left(-\frac{g_3x}{24a^2} - \frac{x}{4a^2} - \frac{ig_3^2t}{36ax} + \frac{it}{ax} + \frac{g_3^3t^2}{216x^3} - \frac{g_3^2t^2}{12x^3} - \frac{g_3t^2}{6x^3} + \frac{3t^2}{x^3} \right) u^2 \right. \right. \\
& + \left. \left(-\frac{x^2}{4a^2} - \frac{ig_3t}{3a} - \frac{it}{a} + \frac{g_3^2t^2}{12x^2} - \frac{g_3t^2}{2x^2} - \frac{3t^2}{x^2} \right) u_1^2 + \left(\frac{g_3t^2}{2x} - \frac{itx}{a} \right) u_2^2 + t^2u_3^2 \right) \partial_{u^1} \\
& + \left(\left(\frac{g_3x}{24a^2} - \frac{x}{4a^2} - \frac{ig_3^2t}{36ax} + \frac{it}{ax} - \frac{g_3^3t^2}{216x^3} - \frac{g_3^2t^2}{12x^3} + \frac{g_3t^2}{6x^3} + \frac{3t^2}{x^3} \right) u^1 \right. \\
& \left. + \left(-\frac{x^2}{4a^2} + \frac{ig_3t}{3a} - \frac{it}{a} + \frac{g_3^2t^2}{12x^2} + \frac{g_3t^2}{2x^2} - \frac{3t^2}{x^2} \right) u_1^1 + \left(-\frac{g_3t^2}{2x} - \frac{itx}{a} \right) u_2^1 + t^2u_3^1 \right) \partial_{u^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{-\frac{1}{2}}^{(3)} = & (ia)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\left(-\frac{ig_3^2}{72ax} + \frac{i}{2ax} + \frac{g_3^3t}{216x^3} - \frac{g_3^2t}{12x^3} - \frac{g_3t}{6x^3} + \frac{3t}{x^3} \right) u^2 \right. \right. \\
& + \left. \left(-\frac{ig_3}{6a} - \frac{i}{2a} + \frac{g_3^2t}{12x^2} - \frac{g_3t}{2x^2} - \frac{3t}{x^2} \right) u_1^2 + \left(\frac{g_3t}{2x} - \frac{ix}{2a} \right) u_2^2 + tu_3^2 \right) \partial_{u^1} \\
& + \left(\left(-\frac{ig_3^2}{72ax} + \frac{i}{2ax} - \frac{g_3^3t}{216x^3} - \frac{g_3^2t}{12x^3} + \frac{g_3t}{6x^3} + \frac{3t}{x^3} \right) u^1 \right. \\
& \left. + \left(\frac{ig_3}{6a} - \frac{i}{2a} + \frac{g_3^2t}{12x^2} + \frac{g_3t}{2x^2} - \frac{3t}{x^2} \right) u_1^1 + \left(-\frac{g_3t}{2x} - \frac{ix}{2a} \right) u_2^1 + tu_3^1 \right) \partial_{u^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{-\frac{3}{2}}^{(3)} = & - (ia)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\left(\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} - \frac{g_3}{6x^3} + \frac{3}{x^3} \right) u^2 + \left(\frac{g_3^2}{12x^2} - \frac{g_3}{2x^2} - \frac{3}{x^2} \right) u_1^2 + \frac{g_3u_2^2}{2x} + u_3^2 \right) \partial_{u^1} \right. \\
& \left. + \left(\left(-\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} + \frac{g_3}{6x^3} + \frac{3}{x^3} \right) u^1 + \left(\frac{g_3^2}{12x^2} + \frac{g_3}{2x^2} - \frac{3}{x^2} \right) u_1^1 - \frac{g_3u_2^1}{2x} + u_3^1 \right) \partial_{u^2} \right)
\end{aligned}$$

(5.2.5)

5.3 Geradores do potencial deformado

Os geradores da equação com potencial de Calogero deformado são encontrados em E.5.

5.3.1 Geradores pares

$$I = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}$$

$$K = u^1 \partial_{u^1} - u^2 \partial_{u^2}$$

$$\widehat{Z}_+ = e^{-4ia\beta t} \left(\left(-\frac{i u_t^1}{4a\beta} + u^1 \left(\frac{\beta x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} x u_1^1 \right) \partial_{u^1} + \left(-\frac{i u_t^2}{4a\beta} + u^2 \left(\frac{\beta x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} x u_1^2 \right) \partial_{u^2} \right)$$

$$\widehat{Z}_0 = -\frac{i u_t^1}{4a\beta} \partial_{u^1} - \frac{i u_t^2}{4a\beta} \partial_{u^2}$$

$$\widehat{Z}_- = e^{4ia\beta t} \left(\left(-\frac{i u_t^1}{4a\beta} + u^1 \left(\frac{\beta x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{x u_1^1}{2} \right) \partial_{u^1} + \left(-\frac{i u_t^2}{4a\beta} + u^2 \left(\frac{\beta x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{x u_1^2}{2} \right) \partial_{u^2} \right)$$

(5.3.1)

5.3.2 Geradores ímpares para o caso k

- Caso 0

$$\widehat{Q}_0^{(0)} = u^2 \partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2} \quad (5.3.2)$$

- Caso 1

$$\widehat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{e^{-2ia\beta t}}{2\sqrt{\beta}} \left(\left(\left(\frac{g_1}{2x} - \beta x \right) u^2 + u_1^2 \right) \partial_{u^1} + \left(\left(-\beta x - \frac{g_1}{2x} \right) u^1 + u_1^1 \right) \partial_{u^2} \right)$$

$$\widehat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{e^{2ia\beta t}}{2\sqrt{\beta}} \left(\left(\left(\frac{g_1}{2x} + \beta x \right) u^2 + u_1^2 \right) \partial_{u^1} + \left(\left(\beta x - \frac{g_1}{2x} \right) u^1 + u_1^1 \right) \partial_{u^2} \right) \quad (5.3.3)$$

- Caso 2

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_1^{(2)} &= \frac{e^{-4ia\beta t}}{4\beta} \left(\left(\left(-\frac{\beta g_2}{2} + \frac{g_2^2}{16x^2} - \frac{g_2}{4x^2} - \beta + \beta^2 x^2 - \frac{3}{4x^2} \right) u^2 + \left(\frac{g_2}{2x} - 2\beta x \right) u_1^2 + u_2^2 \right) \partial_{u^1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{\beta g_2}{2} + \frac{g_2^2}{16x^2} + \frac{g_2}{4x^2} - \beta + \beta^2 x^2 - \frac{3}{4x^2} \right) u^1 + \left(-\frac{g_2}{2x} - 2\beta x \right) u_1^1 + u_2^1 \right) \partial_{u^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_0^{(2)} &= \frac{1}{4\beta} \left(\left(\left(\frac{g_2^2}{16x^2} - \frac{g_2}{4x^2} - \beta^2 x^2 - \frac{3}{4x^2} \right) u^2 + \frac{g_2}{2x} u_1^2 + u_2^2 \right) \partial_{u^1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{g_2^2}{16x^2} + \frac{g_2}{4x^2} - \beta^2 x^2 - \frac{3}{4x^2} \right) u^1 - \frac{g_2}{2x} u_1^1 + u_2^1 \right) \partial_{u^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{-1}^{(2)} &= \frac{e^{4ia\beta t}}{4\beta} \left(\left(\left(\frac{\beta g_2}{2} + \frac{g_2^2}{16x^2} - \frac{g_2}{4x^2} + \beta + \beta^2 x^2 - \frac{3}{4x^2} \right) u^2 + \left(\frac{g_2}{2x} + 2\beta x \right) u_1^2 + u_2^2 \right) \partial_{u^1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(-\frac{\beta g_2}{2} + \frac{g_2^2}{16x^2} + \frac{g_2}{4x^2} + \beta + \beta^2 x^2 - \frac{3}{4x^2} \right) u^1 + \left(2\beta x - \frac{g_2}{2x} \right) u_1^1 + u_2^1 \right) \partial_{u^2} \right)\end{aligned}$$

(5.3.4)

• Caso 3

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{\frac{3}{2}}^{(3)} &= \frac{e^{-6ia\beta t}}{8\beta^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\left(\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} - \frac{g_3}{6x^3} + \frac{1}{2}\beta^2 g_3 x - \frac{\beta g_3^2}{12x} - \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} + 3\beta^2 x + \frac{3\beta}{x} \right) u^2 \right. \right. \\ &\quad + \left(-3\beta - \beta g_3 + \frac{g_3^2}{12x^2} - \frac{g_3}{2x^2} + 3\beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^2 + \left(\frac{g_3}{2x} - 3\beta x \right) u_2^2 + u_3^2 \Big) \partial_{u^1} \\ &\quad + \left(-\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} + \frac{g_3}{6x^3} - \frac{1}{2}\beta^2 g_3 x - \frac{\beta g_3^2}{12x} - \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} + 3\beta^2 x + \frac{3\beta}{x} \right) u^1 \\ &\quad + \left(-3\beta + \beta g_3 + \frac{g_3^2}{12x^2} + \frac{g_3}{2x^2} + 3\beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^1 + \left(-\frac{g_3}{2x} - 3\beta x \right) u_2^1 + u_3^1 \Big) \partial_{u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= \frac{e^{-2ia\beta t}}{8\beta^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\left(\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} - \frac{g_3}{6x^3} - \frac{1}{6}\beta^2 g_3 x - \frac{\beta g_3^2}{36x} + \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} - \beta^2 x + \frac{\beta}{x} \right) u^2 \right. \right. \\ &\quad + \left(-\beta - \frac{\beta g_3}{3} + \frac{g_3^2}{12x^2} - \frac{g_3}{2x^2} - \beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^2 + \left(\frac{g_3}{2x} - \beta x \right) u_2^2 + u_3^2 \Big) \partial_{u^1} \\ &\quad + \left(\left(-\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} + \frac{g_3}{6x^3} + \frac{1}{6}\beta^2 g_3 x - \frac{\beta g_3^2}{36x} + \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} - \beta^2 x + \frac{\beta}{x} \right) u^1 \right. \\ &\quad + \left. \left(-\beta + \frac{\beta g_3}{3} + \frac{g_3^2}{12x^2} + \frac{g_3}{2x^2} - \beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^1 + \left(-\beta x - \frac{g_3}{2x} \right) u_2^1 + u_3^1 \right) \partial_{u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(3)} &= \frac{e^{2ia\beta t}}{8\beta^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\left(\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} - \frac{g_3}{6x^3} - \frac{1}{6}\beta^2 g_3 x + \frac{\beta g_3^2}{36x} - \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} - \beta^2 x - \frac{\beta}{x} \right) u^2 \right. \right. \\ &\quad + \left(\beta + \frac{\beta g_3}{3} + \frac{g_3^2}{12x^2} - \frac{g_3}{2x^2} - \beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^2 + \left(\frac{g_3}{2x} + \beta x \right) u_2^2 + u_3^2 \Big) \partial_{u^1} \\ &\quad + \left(\left(-\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} + \frac{g_3}{6x^3} + \frac{1}{6}\beta^2 g_3 x + \frac{\beta g_3^2}{36x} - \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} - \beta^2 x - \frac{\beta}{x} \right) u^1 \right. \\ &\quad + \left. \left(\beta - \frac{\beta g_3}{3} + \frac{g_3^2}{12x^2} + \frac{g_3}{2x^2} - \beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^1 + \left(\beta x - \frac{g_3}{2x} \right) u_2^1 + u_3^1 \right) \partial_{u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{-\frac{3}{2}}^{(3)} &= \frac{e^{6ia\beta t}}{8\beta^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\left(\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} - \frac{g_3}{6x^3} + \frac{1}{2}\beta^2 g_3 x + \frac{\beta g_3^2}{12x} + \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} + 3\beta^2 x - \frac{3\beta}{x} \right) u^2 \right. \right. \\ &\quad + \left(3\beta + \beta g_3 + \frac{g_3^2}{12x^2} - \frac{g_3}{2x^2} + 3\beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^2 + \left(\frac{g_3}{2x} + 3\beta x \right) u_2^2 + u_3^2 \Big) \partial_{u^1} \\ &\quad + \left(\left(-\frac{g_3^3}{216x^3} - \frac{g_3^2}{12x^3} + \frac{g_3}{6x^3} - \frac{1}{2}\beta^2 g_3 x + \frac{\beta g_3^2}{12x} + \beta^3 x^3 + \frac{3}{x^3} + 3\beta^2 x - \frac{3\beta}{x} \right) u^1 \right. \\ &\quad + \left. \left(3\beta - \beta g_3 + \frac{g_3^2}{12x^2} + \frac{g_3}{2x^2} + 3\beta^2 x^2 - \frac{3}{x^2} \right) u_1^1 + \left(3\beta x - \frac{g_3}{2x} \right) u_2^1 + u_3^1 \right) \partial_{u^2}\end{aligned}$$

(5.3.5)

5.4 Transformações de similaridade

A transformação de similaridade 2.3.4 na forma evolucionária e com a explicitamente real se torna:

$$S = e^{-\bar{M}x D_x I} e^{-\bar{R}I} e^{\bar{h}(t) D_t I} \quad (5.4.1)$$

com as funções \bar{M} , \bar{R} e \bar{h} dadas por

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \ln(\cos(2a\beta t)) \\ \bar{R} &= \frac{i}{4}\beta x^2 \sin(4a\beta t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(2a\beta t)) \\ \bar{h} &= \bar{h}(t) | e^{\bar{h}\partial_t} t e^{-\bar{h}\partial_t} = \frac{1}{2a\beta} \tan(2a\beta t) \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Os 50 primeiros coeficientes de \bar{h} e a verificação das transformações de similaridade dos geradores do potencial puro para os geradores do potencial deformado podem ser encontrados em E.5.

5.4.1 Geradores pares

$$\begin{aligned} S Z_+ S^{-1} &= \frac{1}{4ia\beta} \left(\hat{Z}_+ + \hat{Z}_- - 2\hat{Z}_0 \right) \\ S Z_0 S^{-1} &= \frac{1}{2} \left(\hat{Z}_+ - \hat{Z}_- \right) \\ S Z_- S^{-1} &= ia\beta \left(\hat{Z}_+ + \hat{Z}_- + 2\hat{Z}_0 \right) \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

5.4.2 Geradores ímpares para o caso k

- Caso 0

$$S Q_0^{(0)} S^{-1} = \hat{Q}_0^{(0)} \quad (5.4.4)$$

- Caso 1

$$\begin{aligned} S Q_{\frac{1}{2}}^{(1)} S^{-1} &= - \frac{1}{\sqrt{4ia\beta}} \left(\hat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \hat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \right) \\ S Q_{-\frac{1}{2}}^{(1)} S^{-1} &= - \sqrt{ia\beta} \left(\hat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(1)} + \hat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

- Caso 2

$$\begin{aligned}
SQ_1^{(2)}S^{-1} &= \frac{1}{4ia\beta} \left(\widehat{Q}_1^{(2)} + \widehat{Q}_{-1}^{(2)} - 2\widehat{Q}_0^{(2)} \right) \\
SQ_0^{(2)}S^{-1} &= \frac{1}{2} \left(\widehat{Q}_1^{(2)} - \widehat{Q}_{-1}^{(2)} \right) \\
SQ_{-1}^{(2)}S^{-1} &= ia\beta \left(\widehat{Q}_1^{(2)} + \widehat{Q}_{-1}^{(2)} + 2\widehat{Q}_0^{(2)} \right)
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

- Caso 3

$$\begin{aligned}
SQ_{\frac{3}{2}}^{(3)}S^{-1} &= -\frac{1}{(4ia\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(\widehat{Q}_{\frac{3}{2}}^{(3)} - \widehat{Q}_{-\frac{3}{2}}^{(3)} \right) - 3 \left(\widehat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(3)} - \widehat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(3)} \right) \right) \\
SQ_{\frac{1}{2}}^{(3)}S^{-1} &= -\frac{1}{4\sqrt{ia\beta}} \left(\left(\widehat{Q}_{\frac{3}{2}}^{(3)} + \widehat{Q}_{-\frac{3}{2}}^{(3)} \right) - \left(\widehat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(3)} + \widehat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(3)} \right) \right) \\
SQ_{-\frac{1}{2}}^{(3)}S^{-1} &= -\frac{\sqrt{ia\beta}}{2} \left(\left(\widehat{Q}_{\frac{3}{2}}^{(3)} - \widehat{Q}_{-\frac{3}{2}}^{(3)} \right) + \left(\widehat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(3)} - \widehat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(3)} \right) \right) \\
SQ_{-\frac{3}{2}}^{(3)}S^{-1} &= -(ia\beta)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\widehat{Q}_{\frac{3}{2}}^{(3)} + \widehat{Q}_{-\frac{3}{2}}^{(3)} \right) + 3 \left(\widehat{Q}_{\frac{1}{2}}^{(3)} + \widehat{Q}_{-\frac{1}{2}}^{(3)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

6 Espaços de Hilbert para o potencial deformado

Os geradores que obtivemos na seção anterior são usados na construção do espectro de soluções e a normalização das funções de onda impõe vínculos adicionais nos parâmetros. A forma geral das funções de onda normalizadas para qualquer k (não só os quatro casos estudados) é dada em 6.1.18, e a verificação de que elas satisfazem a equação 5.1.2 se encontra em E.6. Após a correção das fases para fazer contínua a corrente de probabilidade na origem encontramos em que condições há tunelamento quântico. Exceto pelas comutações entre geradores ímpares, as contantes de estrutura exibem um padrão que nos permite supor sua extrapolação para qualquer k . Gráficos da distribuição de probabilidades e diagramas de estado dão uma visão sucinta dos sistemas.

6.1 Geração de espectro

Como vimos, no método de prolongamentos as soluções $f^\alpha(x)e_\alpha$ de um sistema de equações lineares aparecem como uma subálgebra abeliana de geradores $f^\alpha(x)\partial_{u^\alpha}$. Isto implica interpretar os coeficientes da atuação de geradores lineares \mathbf{v} sobre soluções como constantes de estrutura.

$$\mathbf{v}(f^\alpha(x)e_\alpha) = cf'^\alpha(x)e_\alpha \mapsto [\mathbf{v}, f^\alpha(x)\partial_{u^\alpha}] = cf'^\alpha(x)\partial_{u^\alpha} \quad (6.1.1)$$

O estado fundamental da equação Δ_1 é $\Psi_0^{(k)} = \psi_0^{(k)}\partial_{u^1}$, onde $\Delta_1(\psi_0^{(k)}) = 0$ e $\Psi_0^{(k)}$ comuta com qualquer raiz negativa. Assim, encontramos que o vácuo do caso $k, k = 0, 1, 2, 3$, é

$$\Psi_0^{(k)} = \psi_0^{(k)}\partial_{u^1} = c_0^{(k)}e^{-ia\beta b^{(k)}t}e^{-\frac{\beta x^2}{2}}x^{\frac{b^{(k)}-1}{2}}\partial_{u^1} \quad (6.1.2)$$

com $c_0^{(k)}$ a constante de normalização, $b^{(0)} = 2 + \rho$ e $b^{(k)} = 2 - k + g_k/k$ para $k \neq 0$, onde definimos ρ através do potencial para $k = 0$.

$$r_0 = s_0 = \frac{\rho^2 - 1}{4} \quad (6.1.3)$$

Comutando o vácuo 6.1.2 com a raiz positiva \widehat{Z}_+ geramos uma torre de estados.

$$\Psi_n^{(k)} \propto \underbrace{\left[\widehat{Z}_+, \left[\widehat{Z}_+, \dots, \left[\widehat{Z}_+, \left[\widehat{Z}_+, \Psi_0^{(k)} \right] \right] \dots \right] \right]}_{n \text{ comutações}}$$

$$\Rightarrow \Psi_n^{(k)} = \psi_n^{(k)}\partial_{u^1} = c_n^{(k)}e^{-ia\beta(4n+b^{(k)})t}e^{-\frac{\beta x^2}{2}}x^{\frac{b^{(k)}-1}{2}}P_{n, \frac{b^{(k)}}{2}}(\beta x^2)\partial_{u^1} \quad (6.1.4)$$

com $c_n^{(k)}$ contantes de normalização e P o polinômio definido abaixo.

$$P_{n,b}(y) := (-1)^n b_{(n)} {}_1F_1(-n; b; y) \equiv \sum_{l=0}^n a_l y^l \quad (6.1.5)$$

onde $b_{(n)}$ é dado pelo símbolo de Pochhammer em 1.4.10 e ${}_1F_1(d; b; y)$ é a função hipergeométrica confluyente.

$${}_1F_1(d; b; y) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_{(l)} y^l}{b_{(l)} l!} \quad (6.1.6)$$

Essa expressão para o polinômio é apenas matéria de simplificação, e oferecemos em E.6 a prova de que as funções de onda satisfazem a equação para qualquer k . O autovalor da atuação do operador hamiltoniano $H = iD_t$ sobre esses estados é a energia dos mesmos e, portanto, deve ser real. Essa condição é satisfeita se $\rho \in \mathbb{R}$ e $g_k \in \mathbb{R}$.

$$iD_t\psi_n^{(k)} = a\beta(4n + b^{(k)})\psi_n^{(k)} \quad (6.1.7)$$

O quadrado da norma dos estados 6.1.4 representa a densidade de probabilidade de se encontrar a partícula num ponto x , e as constantes de normalização são encontradas a partir da integração dessa densidade por todo o espaço.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{(k)*} \psi_n^{(k)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |c_n^{(k)}|^2 e^{-\beta x^2} |x|^{b^{(k)}-1} \left(P_{n, \frac{b^{(k)}}{2}}(\beta x^2) \right)^2 dx \\ &= \frac{|c_n^{(k)}|^2}{\beta^{\frac{b^{(k)}}{2}}} 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{b^{(k)}-1} \left(P_{n, \frac{b^{(k)}}{2}}(y^2) \right)^2 dy \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Para integrar essa equação, faremos uso da seguinte identidade para o quadrado de uma série:

$$\left(\sum_{l=0}^n a_l x^l \right)^2 = \sum_{l=0}^n \sum_{\lambda=l}^{n+l} a_l a_{\lambda-l} x^\lambda \quad (6.1.9)$$

Logo,

$$1 = \frac{|c_n^{(k)}|^2}{\beta^{\frac{b^{(k)}}{2}}} \sum_{l=0}^n \left(\sum_{\lambda=l}^{n+l} \left(2a_l a_{\lambda-l} \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2\left(\lambda + \frac{b^{(k)}}{2}\right)-1} dy \right) \right) \quad (6.1.10)$$

O termo λ é somado por todos os valores inteiros no intervalo $[0, 2n]$. Consequentemente, devemos ter $b^{(k)} > 0$ para que a integral seja convergente. Com isso, $\rho > -2$, o que implica $b^{(0)} > 0$. Para os demais casos, encontramos a condição

$$g_k > k(k-2) \quad (6.1.11)$$

Usando a representação integral da função Γ

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} y^{b-1} e^{-y} dy = 2 \int_0^{\infty} x^{2b-1} e^{-x^2} dx \quad (6.1.12)$$

encontramos as constantes de normalização.

$$1 = \frac{|c_n^{(k)}|^2}{\beta^{\frac{b^{(k)}}{2}}} \sum_{l=0}^n \left(\sum_{\lambda=l}^{n+l} \left(a_l a_{\lambda-l} \Gamma \left(\lambda + \frac{b^{(k)}}{2} \right) \right) \right) = \frac{|c_n^{(k)}|^2}{\beta^{\frac{b^{(k)}}{2}}} n! \Gamma \left(n + \frac{b^{(k)}}{2} \right) \quad (6.1.13)$$

$$\Rightarrow c_n^{(k)} = \frac{\beta^{\frac{b^{(k)}}{4}}}{\sqrt{n! \Gamma \left(n + \frac{b^{(k)}}{2} \right)}} \quad (6.1.14)$$

Para a última igualdade em 6.1.13 nós usamos, de modo mais geral,

$$\sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^m a_j a_l \Gamma(j+l+b) = \delta_{n,m} n! \Gamma(n+b) \quad (6.1.15)$$

o que está demonstrado em E.6 para $n, m \in [0, 10]$ e assegura a ortonormalidade das funções de onda.

A atuação do gerador K sobre os estados possui autovalor 1 se ψ satisfaz a equação Δ_1 , e -1 se Δ_2 . Podemos interpretá-lo como o operador de paridade fermiônica. A partir de agora vamos denominar $\Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \propto \left[\widehat{Q}_{\frac{k}{2}}^{(k)}, \Psi_{n,+}^{(k)} \right]$ como o estado fermiônico conjugado do estado bosônico $\Psi_{n,+}^{(k)} \equiv \Psi_n^{(k)}$. A forma explícita dos férmions é dada por

$$\Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} = \psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \partial_{u^2} = c_{n,-}^{(k)} e^{-ia\beta(4n+b_-^{(k)})t} e^{-\frac{\beta x^2}{2}} x^{\frac{b_-^{(k)}-1}{2}} \mathbf{P}_{n, \frac{b_-^{(k)}}{2}}^{b_-^{(k)}}(\beta x^2) \partial_{u^2} \quad (6.1.16)$$

Definimos $b_-^{(0)} = b^{(0)}$ e $b_-^{(k)} = 2 + k + g_k/k$ para $k \neq 0$, e a partir de agora assumimos $b_+^{(k)} \equiv b^{(k)}$. Notamos que sempre que $b_+^{(k)} > 0$, teremos $b_-^{(k)} > 0$. A expressão 6.1.16 para os férmions é análoga àquela em 6.1.4 para os bósons, e tem as seguintes constantes de normalização.

$$c_{n,-}^{(k)} = \frac{\beta^{\frac{b_-^{(k)}}{4}}}{\sqrt{n! \Gamma\left(n + \frac{b_-^{(k)}}{2}\right)}} \quad (6.1.17)$$

Repetindo a discussão acima para o vácuo da equação Δ_2 , encontramos os estados $\Phi_{n,-}^{(k)}$ e seus conjugados $\Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)}$. O conjunto de todos os estados normalizados para a equação Δ e qualquer k está reunido em 6.1.18.

$$\begin{aligned}
\Psi_{n,+}^{(k)} &= \psi_{n,+}^{(k)} \partial_{u^1} = \frac{\beta^{\frac{b_+^{(k)}}{4}}}{\sqrt{n! \Gamma\left(n + \frac{b_+^{(k)}}{2}\right)}} e^{-ia\beta(4n+b_+^{(k)})t} e^{-\frac{\beta x^2}{2}} x^{\frac{b_+^{(k)}}{2}-1} P_{n, \frac{b_+^{(k)}}{2}}(\beta x^2) \partial_{u^1} \\
\Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} &= \psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \partial_{u^2} = \frac{\beta^{\frac{b_-^{(k)}}{4}}}{\sqrt{n! \Gamma\left(n + \frac{b_-^{(k)}}{2}\right)}} e^{-ia\beta(4n+b_-^{(k)})t} e^{-\frac{\beta x^2}{2}} x^{\frac{b_-^{(k)}}{2}-1} P_{n, \frac{b_-^{(k)}}{2}}(\beta x^2) \partial_{u^2} \\
\Phi_{n,-}^{(k)} &= \phi_{n,-}^{(k)} \partial_{u^2} = \frac{\beta^{\frac{b'_-{}^{(k)}}{4}}}{\sqrt{n! \Gamma\left(n + \frac{b'_-{}^{(k)}}{2}\right)}} e^{-ia\beta(4n+b'_-{}^{(k)})t} e^{-\frac{\beta x^2}{2}} x^{\frac{b'_-{}^{(k)}}{2}-1} P_{n, \frac{b'_-{}^{(k)}}{2}}(\beta x^2) \partial_{u^2} \\
\Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)} &= \phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)} \partial_{u^1} = \frac{\beta^{\frac{b'_+{}^{(k)}}{4}}}{\sqrt{n! \Gamma\left(n + \frac{b'_+{}^{(k)}}{2}\right)}} e^{-ia\beta(4n+b'_+{}^{(k)})t} e^{-\frac{\beta x^2}{2}} x^{\frac{b'_+{}^{(k)}}{2}-1} P_{n, \frac{b'_+{}^{(k)}}{2}}(\beta x^2) \partial_{u^1}
\end{aligned} \tag{6.1.18}$$

Em 6.1.18, definimos $b_{\pm}^{(0)} = 2 - \rho$ e $b'_{\pm}{}^{(k)} = 2 \pm k - g_k/k$, para $k \neq 0$. De 6.1.10, vemos que é necessário $b_-^{(k)} > 0$, que implica $b'_+{}^{(k)} > 0$, e impõe $\rho < 2$ e uma nova restrição sobre g_k .

$$g_k < -k(k-2) \tag{6.1.19}$$

Portanto, só é possível termos um sistema com ambas as famílias de funções de onda $\{\psi\}$ e $\{\phi\}$ convergentes para $k = 0$ quando $\rho \in]-2, 2[$ e para $k = 1$ quando $g_1 \in]-1, 1[$. Para qualquer $k > 1$, teremos apenas uma ou nenhuma das famílias, dependendo do valor de g_k satisfazer 6.1.11, 6.1.19 ou nenhuma das duas relações. Outra possibilidade é termos funções convergentes para estados com mesma paridade fermiônica em famílias diferentes para $0 < b_{\pm}^{(k)} = 4 - b'_{\pm}{}^{(k)} < 4$, que é o caso que passamos a investigar agora.

Ainda não consideramos qualquer condição de contorno e é possível que a corrente de probabilidade seja descontínua na origem; de fato, este é o caso. Vamos usar (ψ_n, b) e (ϕ_n, b') para nos referirmos aos pares $(\psi_{n,+}^{(k)}, b_+^{(k)})$ e $(\phi_{n,+}^{(k)}, b'_+{}^{(k)})$, respectivamente, e substituiremos $b' = 4 - b$ quando convir; a mesma discussão será válida para $(\psi_{n,-}^{(k)}, b_-^{(k)})$ e $(\phi_{n,-}^{(k)}, b'_-{}^{(k)})$.

A corrente é definida em termos do wronskiano $Wr[\varphi_1^*, \varphi_2](x) = \varphi_1^* \partial_x \varphi_2 - (\partial_x \varphi_1^*) \varphi_2$; calcu-

lemos o wronskiano para as soluções 6.1.18.

$$\begin{aligned}
Wr[\psi_n^*, \psi_m](x) &= 2\beta f_n^*(t) f_m(t) e^{-\beta x^2} |x|^b \frac{x}{|x|} \\
&\quad \times \left(m P_{n, \frac{b}{2}}(\beta x^2) P_{m-1, \frac{b}{2}+1}(\beta x^2) - n P_{n-1, \frac{b}{2}+1}(\beta x^2) P_{m, \frac{b}{2}}(\beta x^2) \right) \\
Wr[\phi_n^*, \phi_m](x) &= 2\beta f_n'^*(t) f_m'(t) e^{-\beta x^2} |x|^{b'} \frac{x}{|x|} \\
&\quad \times \left(m P_{n, \frac{b'}{2}}(\beta x^2) P_{m-1, \frac{b'}{2}+1}(\beta x^2) - n P_{n-1, \frac{b'}{2}+1}(\beta x^2) P_{m, \frac{b'}{2}}(\beta x^2) \right) \\
Wr[\psi_n^*, \phi_m](x) &= 2f_n^*(t) f_m'(t) e^{-i(b-1)\arg(x)} e^{-\beta x^2} \left(P_{n, \frac{b}{2}}(\beta x^2) P_{m, -2\frac{b}{2}}(\beta x^2) \right. \\
&\quad \left. + \beta x^2 \left(m P_{n, \frac{b}{2}}(\beta x^2) P_{m-1, 3-\frac{b}{2}}(\beta x^2) - n P_{n-1, \frac{b}{2}+1}(\beta x^2) P_{m, 2-\frac{b}{2}}(\beta x^2) \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.1.20}$$

em que definimos

$$f_n(t) = \frac{\beta^{\frac{b}{4}}}{\sqrt{n! \Gamma(n + \frac{b}{2})}} e^{-ia\beta(4n+b)t} \quad f_m'(t) = \frac{\beta^{\frac{b'}{4}}}{\sqrt{m! \Gamma(m + \frac{b'}{2})}} e^{-ia\beta(4m+b')t} \tag{6.1.21}$$

Conforme $x \rightarrow 0$ o wronskiano de dois estados quaisquer na mesma família é nulo, enquanto para dois estados em famílias diferentes nós temos descontinuidade na origem devido à fase $e^{-i(b-1)\arg(y)}$. Podemos remover essa descontinuidade fazendo $\psi_n(x, t) \mapsto e^{-i\frac{(b-1)}{2}\arg(x)} \psi_n(x, t) = \psi_n(|x|, t)$ e $\phi_n(x, t) \mapsto e^{i\frac{(b-1)}{2}\arg(x)} \phi_n(x, t) = \phi_n(|x|, t) (\Theta(x) - \Theta(-x))$, com Θ a função de Heaviside; eliminando a fase, o wronskiano é contínuo, mas diferente de zero na origem. Um estado qualquer pode ser decomposto como $\varphi(x) = \sum_n (c_n^1 \psi_n + c_n^2 \phi_n)$ e a corrente de probabilidade de tal estado na origem é diferente de zero, o que atesta a ocorrência de tunelamento quântico quando $0 < b < 4$, que é o caso de termos estados convergentes de mesma paridade fermiônica em ambas as famílias. A constante de acoplamento no potencial inverso do quadrado é $ra = (b-1)(b-3)\hbar^2/8m$; conseqüentemente, ocorre tunelamento quântico através da barreira de potencial (infinita) quando $0 < b < 1$ ou $3 < b < 4$, isto é, quando $0 < ra < 3\hbar^2/8m$. Para uma discussão detalhada do papel do grupo $U(2)$ na construção desse espaço de Hilbert, bem como do fenômeno de cáustica quântica para esse potencial, vide [47, 48].

No que vem a seguir, a correção da fase das funções de onda é irrelevante e trabalharemos com as soluções 6.1.18. Os gráficos em 6.1 apresentam a distribuição de probabilidade dos quatro primeiros estados ψ_n : \bullet $n = 0$, \blacksquare $n = 1$, \blacktriangleright $n = 2$, \blacktriangleleft $n = 3$, para diferentes valores de b , onde o par (ψ_n, b) está denotando qualquer dos pares $(\psi_{n,\pm}^{(k)}, b_{\pm}^{(k)})$ e $(\phi_{n,\pm}^{(k)}, b'_{\pm}^{(k)})$. Sumarizamos abaixo algumas informações sobre os gráficos.

- **6.1(a)**: Para $b \rightarrow 0$ o estado fundamental tende a ficar confinado em torno da origem, $\psi_0 \rightarrow \delta(x)$, bem como o primeiro batimento da amplitude de probabilidade dos demais estados.
- **6.1(b)**: Para $0 < b < 1$ o estado fundamental é desconfinado da origem, assim como o primeiro batimento da amplitude de probabilidade dos demais estados.

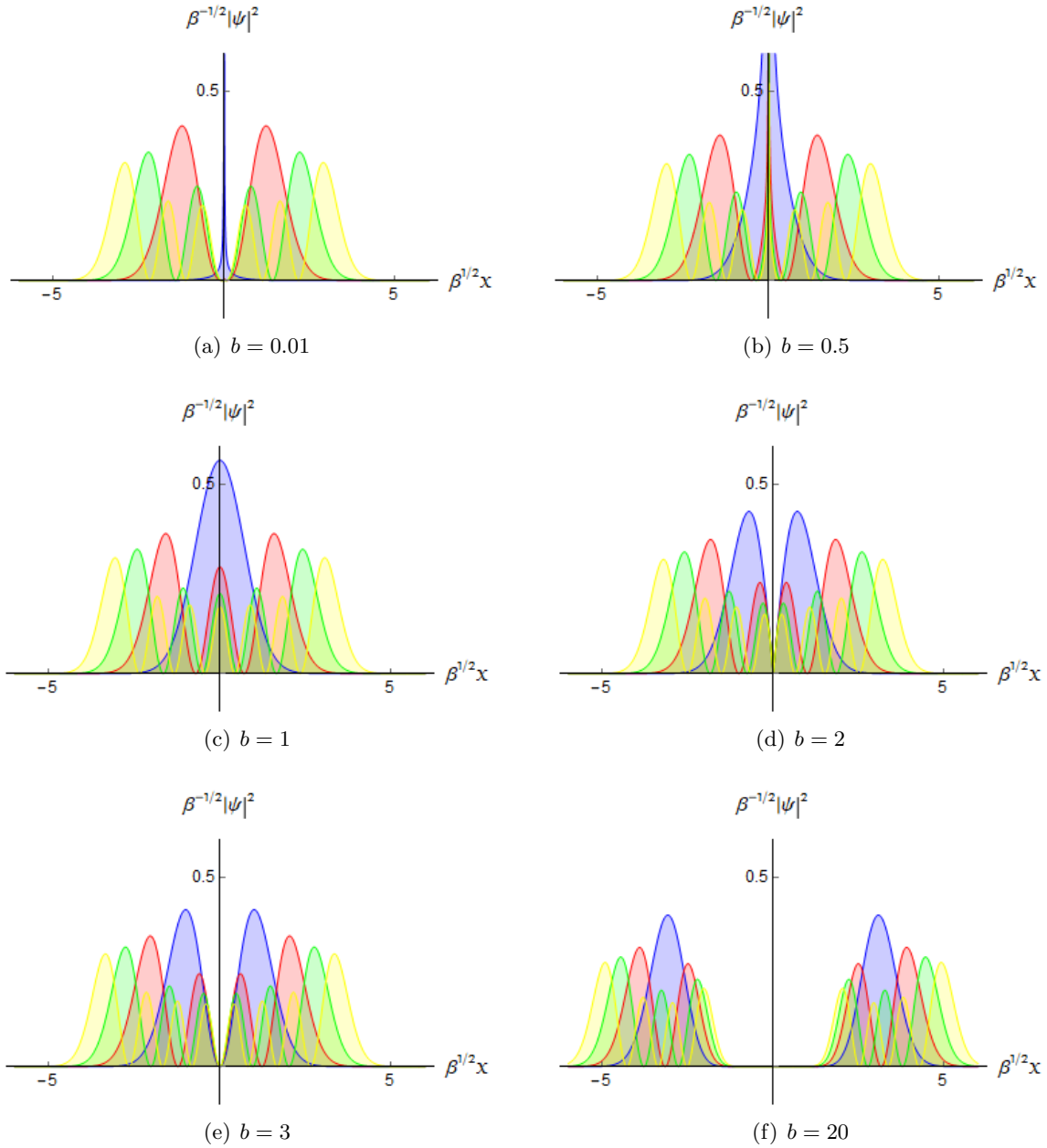


Figura 6.1: Distribuição de probabilidade dos quatro primeiros estados ψ_n na mesma família e com mesma paridade fermiônica para diferentes valores de b .

- **6.1(c)**: Quando $b = 1$ o potencial com inverso do quadrado é nulo e recuperamos os estados pares φ_{2n} do oscilador sem deformação, $\psi_n|_{b=1} = \varphi_{2n}$.
- **6.1(d)**: Para $1 < b < 3$, o potencial com inverso do quadrado é negativo e a barreira se torna um fosso de potencial com contorno superior parabólico. As cristas na origem se dividem em duas simetricamente em relação à origem.
- **6.1(e)**: Quando $b = 3$ o potencial com inverso do quadrado é novamente nulo e recuperamos os estados ímpares φ_{2n+1} do oscilador sem deformação, $\psi_n|_{b=3} = \varphi_{2n+1}$.

- **6.1(f)**: Para $b > 3$ as amplitudes de probabilidade se afastam simetricamente da origem, e a distância é crescente para b crescente.

Podemos resumir esses gráficos através da variação contínua de b : para um valor inicial $b > 3$ variando até $b \rightarrow 0$, temos duas amplitudes idênticas simetricamente separadas em relação à origem viajando em sentidos opostos que encontram a barreira de potencial em $b < 3$ e são comprimidas em $b \rightarrow 0$, então mudando o sentido de propagação para b crescente, como uma colisão elástica. Mas b é constante e já discutimos o caso para tunelamento quântico. Apenas ressaltamos que quando $b = 1$ temos $b' = 3$ e vice-versa; portanto, recuperamos todos os estados do oscilador sem deformação.

6.2 Álgebra de geradores

As constantes de estrutura fixam unicamente a álgebra. Com elas podemos construir a matriz de Cartan que dá a sua classificação. Isso nos permitirá dizer se essas álgebras são ou não subálgebras umas das outras. Não damos, porém, as constantes de estrutura da álgebra (infinita) inteira, isso requer primeiro a álgebra envelopante universal. No entanto, é possível discernir algumas propriedades da álgebra através da comutação dos geradores fortemente independentes, inclusive facilitando seu envelopamento. Incluímos comutações com as funções de onda, interpretando-as como geradores.

6.2.1 Relações de comutação entre geradores lineares

A lista de comutações não nulas entre geradores fortemente independentes é dada abaixo e tem as mesmas constantes de estrutura que aquelas para o potencial puro, o que pode ser verificado em [E.3](#) e [E.6](#).

$$\begin{aligned}
\left[K, \widehat{Q}_d^{(k)} \right] &= 2K \widehat{Q}_d^{(k)} \\
\left[\widehat{Z}_{d_1}, \widehat{Z}_{d_2} \right] &= (d_1 - d_2) \widehat{Z}_{d_1+d_2} \\
\left[\widehat{Z}_{d_1}, \widehat{Q}_{d_2}^{(k)} \right] &= \left(\frac{k}{2} d_1 - d_2 \right) \widehat{Q}_{d_1+d_2}^{(k)} \\
\left[\widehat{Q}_{d_1}^{(k)}, \widehat{Q}_{d_2}^{(k)} \right] &= (d_1 - d_2) J^{(k)} Y_{d_1+d_2}^{(k)} + \delta^{k,3} \delta_{d_1, -d_2} Y_{0, |d_1|}^{(3)} ; \quad k > 0
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Os geradores na última comutação não exibem um padrão apropriado para generalizarmos. Eles são:

$$J^{(k)} = \frac{1}{2} \left(kI + \frac{gk}{k} K \right) = \frac{1}{4} \left(b_-^{(k)} - 2 \right) (I + K) - \frac{1}{4} \left(b_+^{(k)} - 2 \right) (I - K) \tag{6.2.2}$$

$$Y_0^{(1)} = I \tag{6.2.3}$$

$$Y_d^{(2)} = \widehat{Z}_d \quad (6.2.4)$$

$$Y_{\pm 2}^{(3)} = \frac{1}{2} \{ \widehat{Z}_{\pm}, \widehat{Z}_{\pm} \} \quad Y_d^{(3)} = \frac{1}{2} \{ \widehat{Z}_0, \widehat{Z}_d \}; \quad d = -1, 0, 1 \quad (6.2.5)$$

$$\begin{aligned} Y_{0,|d_1|}^{(3)} &= \binom{\binom{b_+^{(3)}}{4}}{\binom{\frac{3}{2}+|d_1|}}{\binom{\binom{b_+^{(3)}}{4}}{\binom{\frac{3}{2}-|d_1|}}} (I+K) \\ &\quad - \binom{\binom{b_+^{(3)}}{4} - |d_1|}{\binom{\frac{3}{2}+|d_1|}} \binom{\binom{b_+^{(3)}}{4} + |d_1|}{\binom{\frac{3}{2}-|d_1|}} (I-K) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Na seção 8, vamos indicar um modo de obter geradores ímpares para qualquer caso k . Isto pode permitir a simplificação dessa comutação para construirmos a álgebra $\mathfrak{q}(k, g_k)$ inteira.

6.2.2 Relações de comutação com geradores pontuais

As relações de comutação dos geradores lineares com esses geradores pontuais (para não chamar de constantes) permitem construir o diagrama de estados do sistema, que pode ser visto na figura 6.2.

- Comutações com $\Psi_{n,+}^{(k)}$

$$[I, \Psi_{n,+}^{(k)}] = \Psi_{n,+}^{(k)}$$

$$[K, \Psi_{n,+}^{(k)}] = \Psi_{n,+}^{(k)}$$

$$[\widehat{Z}_0, \Psi_{n,+}^{(k)}] = - \left(n + \frac{b_+^{(k)}}{2} \right) \Psi_{n,+}^{(k)}$$

$$[\widehat{Z}_{\pm}, \Psi_{n,+}^{(k)}] = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + \frac{b_+^{(k)}}{2} \right)} \Psi_{n\pm 1,+}^{(k)}$$

$$[\widehat{Q}_d^{(k)}, \Psi_{n,+}^{(k)}] = (-1)^{\frac{k}{2}+d} \sqrt{n_{[\frac{k}{2}-d]} \left(n + \frac{b_+^{(k)}}{2} \right)}_{\binom{\frac{k}{2}+d}} \Psi_{n+d,-}^{(k)}$$

(6.2.7)

- Comutações com $\Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)}$

$$\left[I, \Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \right] = \Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)}$$

$$\left[K, \Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \right] = -\Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Z}_0, \Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \right] = -\left(n + \frac{b_{-}^{(k)}}{2} \right) \Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Z}_{\pm}, \Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \right] = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + \frac{b_{-}^{(k)}}{2} \right)} \Psi_{\frac{k}{2}+n\pm 1,-}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Q}_d^{(k)}, \Psi_{\frac{k}{2}+n,-}^{(k)} \right] = (-1)^{\frac{k}{2}+d} \sqrt{n_{\left(\frac{k}{2}+d\right)} \left(n + \frac{b_{-}^{(k)}}{2} \right)}_{\left[\frac{k}{2}-d\right]} \Psi_{\frac{k}{2}+n+d,+}^{(k)}$$

(6.2.8)

- Comutações com $\Phi_{n,-}^{(k)}$

$$\left[I, \Phi_{n,-}^{(k)} \right] = \Phi_{n,-}^{(k)}$$

$$\left[K, \Phi_{n,-}^{(k)} \right] = -\Phi_{n,-}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Z}_0, \Phi_{n,-}^{(k)} \right] = -\left(n + \frac{b'_{-}{}^{(k)}}{2} \right) \Phi_{n,-}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Z}_{\pm}, \Phi_{n,-}^{(k)} \right] = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + \frac{b'_{-}{}^{(k)}}{2} \right)} \Phi_{n\pm 1,-}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Q}_d^{(k)}, \Phi_{n,-}^{(k)} \right] = (-1)^{\frac{k}{2}+d} \sqrt{n_{\left[\frac{k}{2}-d\right]} \left(n + \frac{b'_{-}{}^{(k)}}{2} \right)}_{\left(\frac{k}{2}+d\right)} \Phi_{n+d,+}^{(k)}$$

(6.2.9)

- Comutações com $\Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)}$

$$\left[I, \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)} \right] = \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)}$$

$$\left[K, \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)} \right] = \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Z}_0, \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)} \right] = - \left(n + \frac{b'_+(k)}{2} \right) \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Z}_{\pm}, \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)} \right] = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + \frac{b'_+(k)}{2} \right)} \Phi_{\frac{k}{2}+n \pm 1,+}^{(k)}$$

$$\left[\widehat{Q}_d^{(k)}, \Phi_{\frac{k}{2}+n,+}^{(k)} \right] = (-1)^{\frac{k}{2}+d} \sqrt{n_{(\frac{k}{2}+d)} \left(n + \frac{b'_+(k)}{2} \right)}_{[\frac{k}{2}-d]} \Phi_{\frac{k}{2}+n+d,-}^{(k)}$$

(6.2.10)

6.3 Diagramas de estado

A partir das comutações 6.2.7–6.2.10, podemos construir o diagrama de estados, que mostra, sintaticamente, como atuam os operadores de criação e aniquilação.

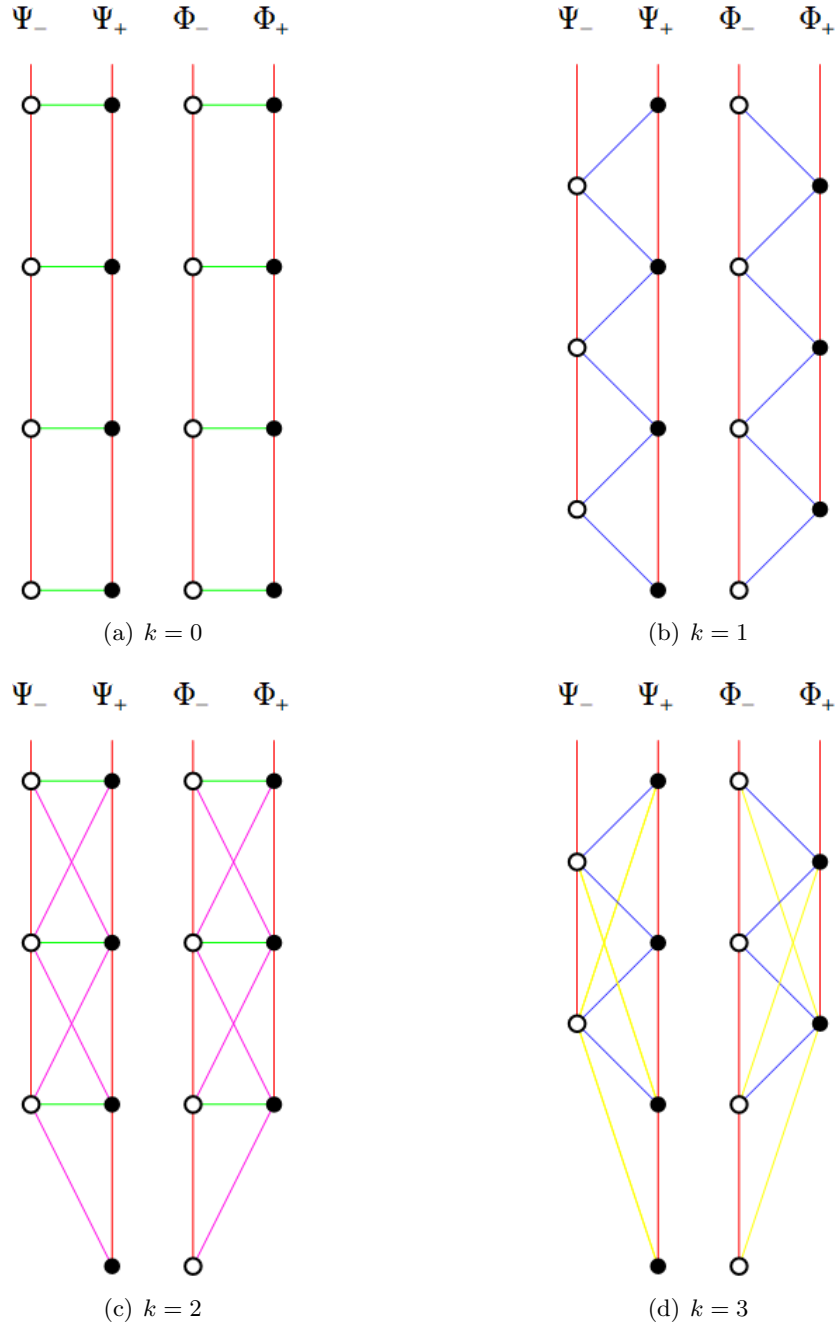


Figura 6.2: Diagramas de estado para os quatro casos estudados.

Nos diagramas 6.2, a escala é tal que a diferença de energia entre dois estados consecutivos de mesma paridade fermiônica é $2\hbar\omega$. Os estados são ligados pelos geradores \hat{Z}_{\pm} , $\hat{Q}_0^{(k)}$, $\hat{Q}_{\pm 1/2}^{(k)}$, $\hat{Q}_{\pm 1}^{(k)}$, $\hat{Q}_{\pm 3/2}^{(k)}$. A energia dos estados fundamentais bosônicos $\Psi_{0,+}^{(k)}$ e fermiônicos $\Phi_{0,-}^{(k)}$ são,

respectivamente, $E_{0,+}^{(k)} = \hbar\omega b_+^{(k)}/2$ e $E_{0,-}^{(k)} = \hbar\omega b_-^{(k)}/2$, o que implica, a partir de 6.1.10, que a energia é sempre positiva definida. Resultado similar ao obtido por Wigner que, partindo diretamente da equação de Schrödinger em vez da quantização canônica, mostrou que o estado fundamental do oscilador harmônico pode ter qualquer energia positiva definida¹ [49].

Retomando a discussão sobre a união de duas álgebras $\mathfrak{q}(k, g_k)$, vamos estabelecer qual a condição a ser imposta sobre os parâmetros k e g_k para construir uma álgebra maior respeitando a normalização das funções de onda. De 5.1.8, 6.1.11 e 6.1.19, temos as seguintes restrições sobre os potenciais.

$$\begin{aligned} \{\psi\} \neq 0 &\Rightarrow g_k = k(k \pm 1) &\Rightarrow r_k = 0 & s_k = k(k \pm 1) \\ \{\phi\} \neq 0 &\Rightarrow g_k = -k(k \pm 1) &\Rightarrow r_k = k(k \pm 1) & s_k = 0 \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

A única união de álgebras que preserva ambas as famílias $\{\psi\}$ e $\{\phi\}$ é a união dos casos com $k = 0$ e $k' = 1$, com $g_1 = 0$ e $\rho = \pm 1$. Como as funções de onda se distinguem apenas pelos parâmetros $(b_{\pm}^{(k)}, b'_{\pm}^{(k)})$ é fácil identificar o que acontece com o espectro; os detalhes estão resumidos na tabela 6.1. Nos diagramas 6.3 a energia mais baixa em cada caso é $\hbar\omega/2$ e a escala e os geradores são como nos diagramas 6.2.

¹ Veja [12] para a obtenção desse resultado através da quantização direta pela álgebra abstrata $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Parâmetros				Estados
Caso	Potencial	Energia		
		Bósons	Férmions	
$k = 0$	$\rho = 1$	$b_+^{(0)} = 3$ $b_+^{\prime(0)} = 1$	$b_-^{(0)} = 3$ $b_-^{\prime(0)} = 1$	$\Psi_{n,+}^{(0)} = \Phi_{n+\frac{1}{2},+}^{(1)}$ $\Psi_{n,-}^{(0)} = \Psi_{n+\frac{1}{2},-}^{(1)}$
	$g_1 = 0$	$b_+^{(1)} = 1$ $b_+^{\prime(1)} = 3$	$b_-^{(1)} = 3$ $b_-^{\prime(1)} = 1$	$\Phi_{n,+}^{(0)} = \Psi_{n,+}^{(1)}$ $\Phi_{n,-}^{(0)} = \Phi_{n,-}^{(1)}$
	$\rho = -1$	$b_+^{(0)} = 1$ $b_+^{\prime(0)} = 3$	$b_-^{(0)} = 1$ $b_-^{\prime(0)} = 3$	$\Psi_{n,+}^{(0)} = \Psi_{n,+}^{(1)}$ $\Psi_{n,-}^{(0)} = \Phi_{n,-}^{(1)}$
	$g_1 = 0$	$b_+^{(1)} = 1$ $b_+^{\prime(1)} = 3$	$b_-^{(1)} = 3$ $b_-^{\prime(1)} = 1$	$\Phi_{n,+}^{(0)} = \Phi_{n+\frac{1}{2},+}^{(1)}$ $\Phi_{n,-}^{(0)} = \Psi_{n+\frac{1}{2},-}^{(1)}$
$k > 0$	$g_k = k(k+1)$	$b_+^{(k)} = 3$ $b_+^{\prime(k)} = 1$	$b_-^{(k)} = 2k+3$ $b_-^{\prime(k)} = -2k+1$	$\Psi_{n,+}^{(k)} = \Phi_{n+\frac{k+1}{2},+}^{(k+1)}$ $\Psi_{n+\frac{k}{2},-}^{(k)} = \Psi_{n+\frac{k+1}{2},-}^{(k+1)}$
	$g_{k+1} = k(k+1)$	$b_+^{(k+1)} = 1$ $b_+^{\prime(k+1)} = 3$	$b_-^{(k+1)} = 2k+3$ $b_-^{\prime(k+1)} = -2k+1$	$\Phi_{n+\frac{k}{2},+}^{(k)} = \Psi_{n,+}^{(k+1)}$ $\Phi_{n,-}^{(k)} = \Phi_{n,-}^{(k+1)} = 0$
	$g_k = -k(k+1)$	$b_+^{(k)} = -2k+1$ $b_+^{\prime(k)} = 2k+3$	$b_-^{(k)} = 1$ $b_-^{\prime(k)} = 3$	$\Psi_{n,+}^{(k)} = \Psi_{n,+}^{(k+1)} = 0$ $\Psi_{n+\frac{k}{2},-}^{(k)} = \Phi_{n,-}^{(k+1)}$
	$g_{k+1} = -k(k+1)$	$b_+^{(k+1)} = -2k+1$ $b_+^{\prime(k+1)} = 2k+3$	$b_-^{(k+1)} = 3$ $b_-^{\prime(k+1)} = 1$	$\Phi_{n+\frac{k}{2},+}^{(k)} = \Phi_{n+\frac{k+1}{2},+}^{(k+1)}$ $\Phi_{n,-}^{(k)} = \Psi_{n+\frac{k+1}{2},-}^{(k+1)}$

Tabela 6.1: Identificação dos estados para a união dos casos k e $k+1$.

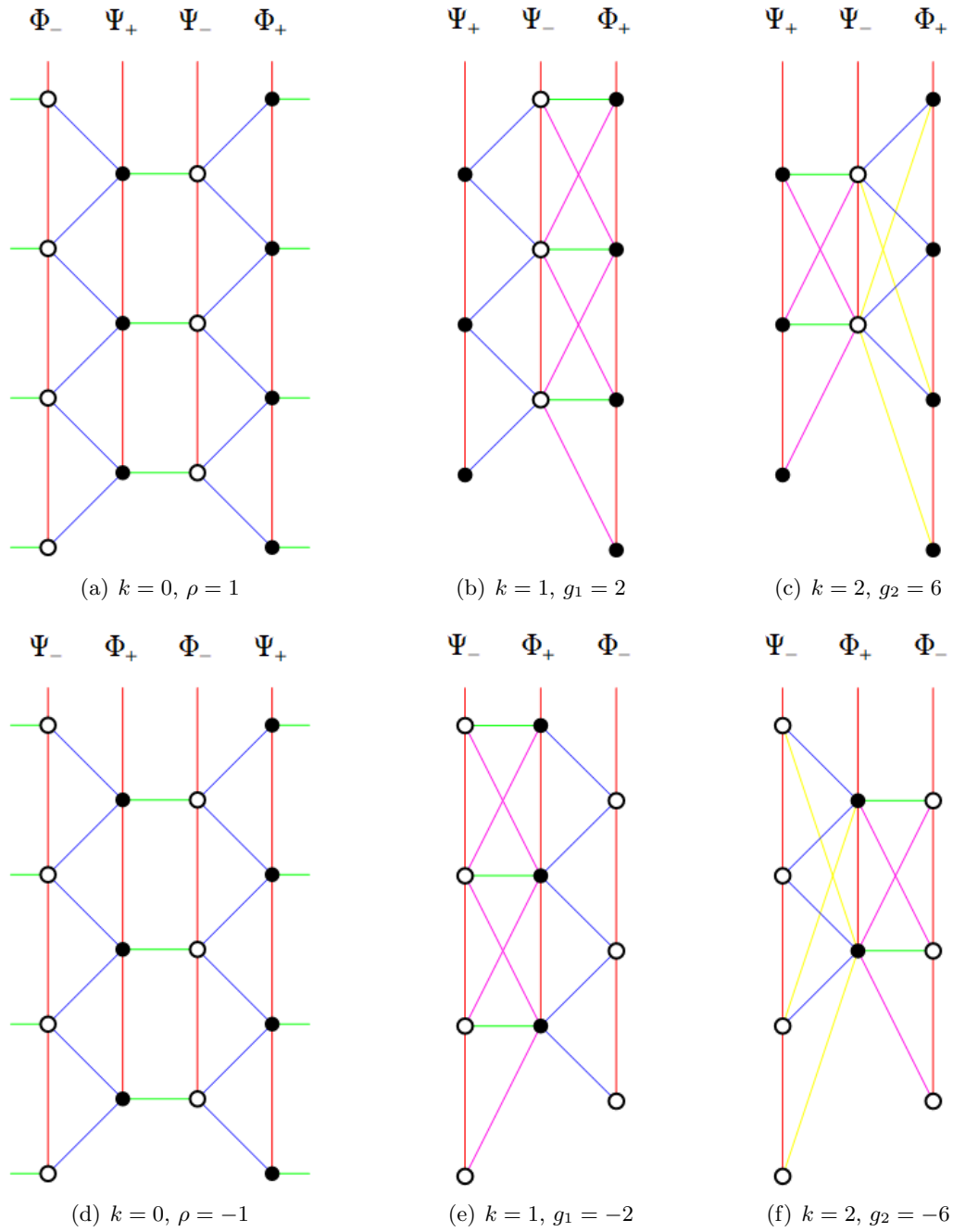


Figura 6.3: Diagramas de estado para a união dos casos k e $k + 1$.

7 Representações de spin

Nesta seção vamos apontar caminhos que podem nos ajudar a saber se $\mathfrak{q}(k+l, g_{k+l}) \subset \mathfrak{q}(k, g_k)$, para $l > 0$, ou se essas são álgebras verdadeiramente diferentes. Começemos apontando que álgebras de spin superior admitem infinitas subálgebras. Um exemplo disto é o caso $\mathcal{HS}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) \subset \mathcal{HS}(\mathfrak{heis})$ que apresentamos em 4.2.12 e 4.2.13. Naquela ocasião, construímos $\mathcal{HS}(\mathfrak{heis})$ a partir de produtos de W_+ e W_- , ambos de primeira ordem, criando outros geradores de ordem qualquer. Se tomarmos os três produtos possíveis (fixando um ordenamento) apenas entre os geradores de primeira ordem W_+ e W_- , temos os três geradores do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, que são de segunda ordem. Se depois disso descartarmos os geradores de primeira ordem e construirmos $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, teremos uma subálgebra que contém todos os geradores de ordem par de $\mathcal{HS}(\mathfrak{heis})$, e nenhum de ordem ímpar. As constantes de estrutura em 4.2.12 e 4.2.13 revelam, porém, que $\mathcal{HS}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ é uma subálgebra.

Em seguida, mostramos como fechar a superálgebra finita $\mathfrak{osp}(2|2) \subset \mathfrak{q}(1, g_1)$ na forma covariante, o que nos revela que os geradores ímpares podem ser interpretados como espinores de Majorana para, então, indicarmos de que modo se dá a transição entre as diferentes representações dentro da mesma álgebra.

7.1 Comparação das álgebras

Vamos usar três parâmetros para nos ajudar a fixar as constantes de estrutura: a paridade, a ordem e o peso dos geradores. Em primeiro lugar, precisamos levar em conta apenas os casos $\mathfrak{q}(k+2l, g_{k+2l}) \subset \mathfrak{q}(k, g_k)$, para $l > 0$. A razão de introduzirmos o fator 2 na subálgebra se deve ao fato de que para k ímpar só teremos geradores ímpares de ordem ímpar; do mesmo modo, para k par só teremos geradores ímpares de ordem par. Além disso, podemos nos valer das seguintes identidades que nos permitirão tratar de uma só vez de álgebras e superálgebras.

$$\begin{aligned} [K\mathbf{v}, Q_d^{(k)}] &= K\mathbf{v}Q_d^{(k)} - Q_d^{(k)}K\mathbf{v} = K\mathbf{v}Q_d^{(k)} + KQ_d^{(k)}\mathbf{v} = K\{\mathbf{v}, Q_d^{(k)}\} \\ \{K\mathbf{v}, Q_d^{(k)}\} &= K\mathbf{v}Q_d^{(k)} + Q_d^{(k)}K\mathbf{v} = K\mathbf{v}Q_d^{(k)} - KQ_d^{(k)}\mathbf{v} = K[\mathbf{v}, Q_d^{(k)}] \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

com \mathbf{v} qualquer gerador linear.

Também vamos acrescentar mais dois índices nos geradores e definir, para qualquer gerador linear \mathbf{v} estudado, $\mathbf{v}_+ \equiv \mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_- \equiv K\mathbf{v}$, bem como usaremos o índice l para especificar a ordem dos geradores numa certa base: $\mathbf{v}^{(k,l)}$, tal que $Q_d^{(k,k)} = Q_d^{(k)}$.

7.1.1 Comparação entre as álgebras para $k = 0$ e $k = 2$

Nas álgebras $\mathfrak{q}(0, \rho)$ e $\mathfrak{q}(2, g_2)$ existem apenas seis geradores ímpares de segunda ordem: $Q_{d,\pm}^{(0,2)} \equiv Q_{0,\pm}^{(0,0)}Z_d$ e $Q_{d,\pm}^{(2,2)}$, $d = -1, 0, 1$. A comutação desses geradores possui constante de estrutura diferente.

$$\begin{aligned} [Q_{0,\pm}^{(k,2)}, Q_{d,\pm}^{(k,2)}] &= -dZ_{d,+} - \delta^{k,2}d\frac{g_2}{4}Z_{d,-} \\ \{Q_{0,\mp}^{(k,2)}, Q_{d,\pm}^{(k,2)}\} &= \pm K [Q_{0,\pm}^{(k,2)}, Q_{d,\pm}^{(0,2)}] \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

A constante de estrutura para $k = 2$ possui um parâmetro contínuo enquanto para $k = 0$ não. Essas comutações só são iguais quando $g_2 = 0$, resultado já previsto em 5.1.8 e que não

preserva funções de onda normalizadas para $k = 2$; concluímos que $\mathfrak{q}(2, g_2) \not\subseteq \mathfrak{q}(0, \rho)$ fora das condições 5.1.8.

7.1.2 Comparação entre as álgebras para $k = 1$ e $k = 3$

Existem apenas dois geradores de ordem 3 e peso $-3/2$ em $\mathfrak{q}(1, g_1)$, que vamos denotar $Q_{-3/2, \pm}^{(1,3)}$.

$$Q_{-3/2, \pm}^{(1,3)} \equiv \pm \left(Q_{-1/2, \pm}^{(1,1)} \right)^3 \quad (7.1.3)$$

Comutando $Q_{-3/2, \pm}^{(1,3)}$ com Z_+ e exigindo que tenham as mesmas constantes de estrutura para $k = 3$, fixamos unicamente os demais geradores.

$$\begin{aligned} Q_{3/2, \pm}^{(1,3)} &= \pm \left(Q_{1/2, \pm}^{(1)} \right)^3 \\ Q_{1/2, \pm}^{(1,3)} &= \pm \frac{1}{3} \left(Q_{-1/2, \pm}^{(1)} Q_{1/2, \pm}^{(1)} Q_{1/2, \pm}^{(1)} + Q_{1/2, \pm}^{(1)} Q_{-1/2, \pm}^{(1)} Q_{1/2, \pm}^{(1)} + Q_{1/2, \pm}^{(1)} Q_{1/2, \pm}^{(1)} Q_{-1/2, \pm}^{(1)} \right) \\ Q_{-1/2, \pm}^{(1,3)} &= \pm \frac{1}{3} \left(Q_{1/2, \pm}^{(1)} Q_{-1/2, \pm}^{(1)} Q_{-1/2, \pm}^{(1)} + Q_{-1/2, \pm}^{(1)} Q_{1/2, \pm}^{(1)} Q_{-1/2, \pm}^{(1)} + Q_{-1/2, \pm}^{(1)} Q_{-1/2, \pm}^{(1)} Q_{1/2, \pm}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

A comutação entre eles possui as mesma constantes de estrutura que os geradores ímpares de $k = 3$ se fizermos $g_1 = g_3$, exceto pelas constantes que os relacionam a I e K , os geradores pares de ordem 0.

$$\begin{aligned} \left[Q_{d_1, \pm}^{(k,3)}, Q_{d_2, \pm}^{(k,3)} \right] &= (d_1 - d_2) J^{(k)} Y_{d_1+d_2}^{(3)} + \delta_{d_1, -d_2} Y_{0, |d_1|}^{(k,0)} \\ \left\{ Q_{d_1, \mp}^{(k,3)}, Q_{d_2, \pm}^{(k,3)} \right\} &= \pm K \left[Q_{d_1, \pm}^{(k,3)}, Q_{d_2, \pm}^{(k,3)} \right] \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

O gerador $J^{(k)}$ exige $g_1 = g_3$ para que as álgebras sejam isomórficas; se o fizermos, porém, $Y_{0, |d|}^{(1,0)} \neq Y_{0, |d|}^{(3,0)}$ (E.6). Para estabelecer o isomorfismo, precisaríamos que $g_1 = g_3 = \pm 3$, o que já foi previsto em 5.1.8 e não permite funções de onda normalizadas para $k = 3$. Ressaltamos que K não é um centro das álgebras, e mesmo a diferença das constantes de estrutura em I produziriam álgebras diferentes em caso de se assumir as mesmas convenções para a construção dos geradores de ordem superior. Acreditamos que, deste modo, podemos considerar $\mathfrak{q}(3, g_3) \not\subseteq \mathfrak{q}(1, g_1)$ fora das condições 5.1.8, o que, juntamente com $\mathfrak{q}(2, g_2) \not\subseteq \mathfrak{q}(0, \rho)$, é um forte indício de que $\mathfrak{q}(k', g_{k'}) \not\subseteq \mathfrak{q}(k, g_k)$ para $k' \neq k$, exceto quando 5.1.8 é satisfeito, k e k' tem a mesma paridade e $k' \geq k$.

7.2 Representações superiores de spin

Em [22] a superálgebra $\mathfrak{q}(1, g_1)$ foi denotada $\mathfrak{q}(2; \nu)$, com ν o parâmetro contínuo, e concluiu-se que a mesma é construída a partir da álgebra envelopante universal de $\mathfrak{osp}(2|2)$. Verifiquemos

esse resultado. Para $k = 1$, temos as seguintes comutações.

$$\begin{aligned}
[Q_{d_1, \epsilon_1}^{(1)}, Q_{d_2, \epsilon_2}^{(1)}] &= -(\epsilon_1 - \epsilon_2)Z_{d_1+d_2, -} + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2}(d_1 - d_2)J_+^{(1)} \\
[Z_{d_1, \epsilon_1}, Q_{d_2, \epsilon_2}^{(1)}] &= -\left(\frac{d_1}{2} - d_2\right)Q_{d_1+d_2, \epsilon_1\epsilon_2}^{(1)} + (1 - \epsilon_1)Q_{d_2, \epsilon_2}^{(1)}Z_{d_1, +} \\
[Q_{d_1, \epsilon_1}^{(1)}, J_{\epsilon_2}^{(1)}] &= -\left(\frac{(1 - \epsilon_2)}{2} + \frac{(1 + \epsilon_2)}{2}g_1\right)Q_{d_1, -\epsilon_1}^{(1)} \\
[Z_{d_1, \epsilon_1}, Z_{d_2, \epsilon_2}] &= (d_1 - d_2)Z_{d_1+d_2, \epsilon_1\epsilon_2}
\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Vemos que os membros que não nos permitem fechar uma álgebra finita com geradores ímpares são $Z_{d, -}$, que decorrem da comutação entre os próprios geradores ímpares. Porém, se tomarmos o comutador \mathbb{Z}_2 -graduado, aparece $Z_{d, +}$ no anti-comutador dos mesmos.

$$\left\{Q_{d_1, \epsilon_1}^{(1)}, Q_{d_2, \epsilon_2}^{(1)}\right\} = (\epsilon_1 + \epsilon_2)Z_{d_1+d_2, +} - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2}(d_1 - d_2)J_-^{(1)} \tag{7.2.2}$$

Isso nos permite fechar a superálgebra $\mathfrak{osp}(2|2)$ e, a partir de sua álgebra envelopante universal, construir $\mathfrak{q}(1, g_1)$. Para $k > 1$ não fechamos álgebra ou superálgebra finita, a estrutura das mesmas depende da álgebra envelopante universal de seus geradores. Podemos tornar mais claro o papel desempenhado pelos geradores dessa superálgebra através da seguinte mudança de base.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^0 &= -2i(Z_+ + Z_-); & \mathcal{J}^1 &= 2i(Z_+ - Z_-); & \mathcal{J}^2 &= -4iZ_0; & \mathcal{R} &= 2J_-^{(1)} \\
\mathcal{Q}_1^1 &= \sqrt{2i}Q_{\frac{1}{2}, +}^{(1)}; & \mathcal{Q}_2^1 &= \sqrt{2i}Q_{\frac{-1}{2}, +}^{(1)}; & \mathcal{Q}_\alpha^2 &= iK\mathcal{Q}_\alpha^1
\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Nessa base os geradores \mathcal{Q}_α^A são hermitianos e podemos escrever a superálgebra $\mathfrak{osp}(2|2)$ na forma covariante (admitindo soma sobre os índices repetidos).

$$\begin{aligned}
[\mathcal{Q}_\alpha^A, \mathcal{Q}_\beta^B] &= \delta^{AB}(C\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\mathcal{J}^\mu + \epsilon^{AB}C_{\alpha\beta}\mathcal{R} \\
[\mathcal{J}_\mu, \mathcal{J}_\nu] &= 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda}\mathcal{J}^\lambda \\
[\mathcal{J}_\mu, \mathcal{Q}_\alpha^A] &= 2i(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\mathcal{Q}_\beta^A \\
[\mathcal{R}, \mathcal{Q}_\alpha^A] &= -2iS_B^A\mathcal{Q}_\alpha^B
\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

onde definimos as matrizes

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.5)$$

Concluimos que podemos interpretar os geradores \mathcal{Q}_α^A como espinores de Majorana; os índices α, β distinguem o spin, com a matriz C servindo de métrica para os índices espinoriais, enquanto A, B se refere à simetria interna cuja transformação é dada pelo gerador $\mathcal{R} \in \mathfrak{u}(1)$. Os índices μ, ν, λ remetem às componentes de tempo e espaço com métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ em $2 + 1$ dimensões e os geradores \mathcal{J}_μ fecham a álgebra $\mathfrak{so}(2, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. As matrizes γ_μ satisfazem a lei de composição $\gamma_\mu \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}(e_1^1 + e_2^2) + \epsilon_{\mu\nu\lambda} \gamma^\lambda$ dos split quaternions [50], o que as torna membros da álgebra de Clifford $Cl_{2,1}(\mathbb{R})$ [51]. A álgebra $\mathfrak{osp}(2|2)$ na base 7.2.4 foi apresentada e discutida em [16].

Já sabemos estarmos tratando de espinores de Majorana, falta ainda saber como aparecem as diferentes representações de spin dentro da álgebra. Consideremos em primeiro lugar uma nova mudança de base.

$$L_0 = -Z_0; \quad L_\pm = iZ_\pm; \quad \varphi_{d,\epsilon}^{(k)} = \frac{i^{\frac{k}{2}-d}}{\sqrt{2|d| + \delta_{d,0}}} Q_{d,\epsilon}^{(k)} \quad (7.2.6)$$

Assim é mais fácil perceber as representações do $\mathfrak{su}(2)$.

$$\begin{aligned} [L_0, L_\pm] &= \pm L_\pm; & [L_+, L_-] &= 2L_0; & [L_0, \varphi_{d,\epsilon}^{(k)}] &= d\varphi_{d,\epsilon}^{(k)} \\ [L_\pm, \varphi_{d,\epsilon}^{(k)}] &= \sqrt{\left(\frac{k}{2} \mp d\right) \left(\frac{k}{2} \pm d + 1\right)} \varphi_{d\pm 1, \epsilon}^{(k)} \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Vemos que temos que identificar $k/2$ com a representação e d com o estado de spin dentro da representação. Especializando a discussão para $k = 1$, indicamos como se dá a mudança de representação dentro da álgebra.

$$\begin{aligned} \left[Q_{d_1, \pm}^{(1)}, \varphi_{d_2, \mp 1 \pm 2 \bmod(l, 2)}^{(1, l)} \right] &= c_{d_1, d_2}^{(l)} \varphi_{d_1 + d_2, \pm 1 \mp 2 \bmod(l, 2)}^{(1, l+1)} \\ \left[Q_{d_1, +}^{(1)}, \varphi_{d_2, +}^{(1, l)} \right] &= c'_{d_1, d_2}{}^{(l)} \varphi_{d_1 + d_2, +}^{(1, l-1)} + c''_{d_1, d_2}{}^{(l)} \varphi_{d_1 + d_2, -}^{(1, l-1)} \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

com c, c' e c'' constantes de estrutura que dependem dos índices l, d_1 e d_2 .

Desta forma, a ordem l é a representação e d o peso, e temos todos os multipletos do $\mathfrak{su}(2)$: $\{\varphi_{d, \pm}^{(1, l)}\}$, com $l = 2j \in \mathbb{N}$ e $d = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$. Para fechar $\mathfrak{osp}(2|2)$, ignoramos os geradores $Z_{d,-}$, mas eles parecem em representações superiores fechando $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Concluimos que temos a álgebra de Lorentz¹ como subálgebra de $\mathfrak{q}(k, g_k)$: $\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{q}(k, g_k)$; a base em 7.2.4 se deve a $\mathfrak{so}(2, 1) \subset \mathfrak{so}(3, 1)$ (equivalente a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$). Resultado similar a 7.2.8 foi obtido por Majorana [52]² com membros da álgebra de Lorentz atuando sobre funções de onda, mas alternando apenas entre representações de mesma paridade fermiônica. Para $k \neq 1$ não temos nenhum gerador de primeira ordem e, conseqüentemente, só podemos alternar para representações superiores.

¹Essa é a álgebra $\mathfrak{so}(4)$ com assinatura dada pela métrica de Minkowski em $3 + 1$ dimensões.

²Veja [53] para um visionário review de Fradkin renunciando já em 1965 a relevância que representações superiores de spin teriam nas décadas subsequentes.

8 Geradores fortemente independentes de ordem k

Dos exemplos que trabalhamos, podemos extrair certas propriedades para uma álgebra $q(k, g_k)$ qualquer. Já sabemos que as funções 6.1.18 satisfazem a equação 5.1.2 para qualquer k ; porém, não sabemos a forma dos geradores ímpares porque a ordem e o número de geradores cresce com k e suas características são diferentes. Se quisermos classificar essas álgebras para decidir se são ou não subálgebras umas das outras, precisamos fixar suas constantes de estrutura dos geradores fortemente independentes. Nesta seção, vamos encontrar o gerador de raiz simples negativa para o potencial puro com qualquer k . Isso permite obter os outros geradores ímpares do mesmo caso através da comutação com Z_+ , em vez de precisar resolver a equação 5.1.3. Obtidos todos os geradores do caso k para o potencial puro, encontramos os geradores do potencial deformado através da transformação de similaridade 5.4.1.

8.1 Gerador com raiz simples negativa para o caso k do potencial puro

Da forma dos geradores em 5.2.2, podemos arriscar uma expressão para o gerador $Q_{-\frac{k}{2}}^{1,(k)}$.

$$Q_{-\frac{k}{2}}^{1,(k)} = \sum_{m=0}^k \frac{P_{k,m}}{x^m} u_{k-m}^2 \partial_{u^1} \quad (8.1.1)$$

com $P_{k,m}$ constante para todo k e todo m . O gerador 8.1.1 precisa satisfazer a equação do prolongamento 5.1.3 para $\beta = 0$.

$$0 = \text{pr } Q_{-\frac{k}{2}}^{1,(k)} (\Delta) = \left(\frac{i}{a} D_t + D_x^2 - \frac{r}{x^2} \right) \sum_{m=0}^k \frac{P_{k,m}}{x^m} u_{k-m}^2$$

$$\sum_{m=0}^k P_{k,m} \left(\left(\frac{i}{a} \frac{u_{k-m,t}^2}{x^m} \right) + \left(m(m+1) \frac{u_{k-m}^2}{x^{m+2}} - 2m \frac{u_{k-m+1}^2}{x^{m+1}} + \frac{u_{k-m+2}^2}{x^m} \right) - r \left(\frac{u_{k-m}^2}{x^{m+2}} \right) \right) \quad (8.1.2)$$

Precisamos eliminar as variáveis dependentes $u_{k-m,t}^2$ através do vínculo da equação 5.1.2.

$$\begin{aligned} \frac{i}{a} u_{k-m,t}^2 &= D_x^{k-m} \left(\frac{i}{a} u_t^2 \right) = D_x^{k-m} \left(-u_2^2 + \frac{s}{x^2} u^2 \right) \\ &= -u_{k-m+2}^2 + s \sum_{j=0}^{k-m} \frac{(k-m)!}{(k-m-j)!j!} \left((-1)^j \frac{(j+1)!}{x^{j+2}} \right) u_{k-m-j}^2 \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Vamos simplificar a notação através da definição das constantes $C_{k,m,j}$.

$$C_{k,m,j} \equiv (-1)^j (j+1) \frac{(k-m)!}{(k-m-j)!} \quad (8.1.4)$$

Antes de prosseguirmos, precisamos reordenar as somas de modo a evidenciar as variáveis e anular seus coeficientes.

$$\sum_{m=0}^k \sum_{j=0}^{k-m} C_{k,m,j} P_{k,m} \frac{u_{k-m-j}^2}{x^{m+j+2}} = \sum_{m=0}^k \sum_{j=0}^m C_{k,m-j,j} P_{k,m-j} \frac{u_{k-m}^2}{x^{m+2}} \quad (8.1.5)$$

$$\sum_{m=0}^k 2m P_{k,m} \frac{u_{k-m+1}^2}{x^{m+1}} = \sum_{m=0}^{k-1} 2(m+1) P_{k,m+1} \frac{u_{k-m}^2}{x^{m+2}} = \sum_{m=0}^k 2(m+1) P_{k,m+1} \frac{u_{k-m}^2}{x^{m+2}} \quad (8.1.6)$$

O termo 8.1.5 vem da atuação D_t em 8.1.2, enquanto 8.1.6 vem da atuação de D_x^2 . Na última igualdade em 8.1.6, usamos o fato de que estamos procurando geradores de ordem k , o que torna o coeficiente de ordem $k+1$ nulo.

$$P_{k,k+1} = 0 \quad (8.1.7)$$

Resumindo, a equação 8.1.2 adquire a forma abaixo.

$$\sum_{m=0}^k \left((m(m+1) - r) P_{k,m} + s \sum_{j=0}^m C_{m,m-j,j} P_{k,m-j} - 2(m+1) P_{k,m+1} \right) \frac{u_{k-m}^2}{x^{m+2}} = 0 \quad (8.1.8)$$

Resolver a equação 8.1.8 é equivalente a resolver a equação recursiva 8.1.9 para os coeficientes.

$$P_{k,m} = \frac{1}{2m} ((m-1)m - r) P_{k,m-1} + s \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1,m-1-j,j} P_{k,m-1-j} \quad (8.1.9)$$

Para simplificá-la, vamos evidenciar o primeiro termo da soma em 8.1.9.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1,m-1-j,j} P_{k,m-1-j} &= \sum_{j=1}^m C_{m-1,m-j,j-1} P_{k,m-j} = P_{k,m-1} + \sum_{j=2}^m C_{m-1,m-j,j-1} P_{k,m-j} \\ &= P_{k,m-1} + \sum_{j=2}^m (-1)^{j+1} j \frac{(k+j-m)!}{(k+1-m)!} P_{k,m-j} \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Finalmente, 8.1.11 é a equação recursiva para os coeficientes que precisa ser resolvida.

$$P_{k,m} = \frac{1}{2m} (m(m-1) + s - r) P_{k,m-1} + s \sum_{j=2}^m (-1)^{j+1} \frac{j}{2m} \frac{(k+j-m)!}{(k+1-m)!} P_{k,m-j} \quad (8.1.11)$$

A solução dessa equação pode ser dada pela expressão 8.1.12 (E.7).

$$P_{k,m} = \delta_{m,0} + \sum_{q=1}^m \sum_{j_1=m}^m \sum_{j_{q+1}=0}^0 \prod_{p=1}^{q-1} \left[\sum_{j_{p+1}=m-p}^{j_p-1} \right] \prod_{l=1}^q A_{k,j_l,j_l-j_{l+1}} \quad (8.1.12)$$

onde usamos a seguinte definição para $A_{k,m,j}$.

$$A_{k,m,1} = \frac{1}{2m} (s - r + m(m-1)); \quad A_{k,m,j} = (-1)^{j+1} \frac{j}{2m} \frac{(k+j-m)!}{(k+1-m)!} s, \quad j > 1 \quad (8.1.13)$$

Definindo $g = s - r$, encontramos as condições a serem impostas sobre r e s exigindo que o coeficiente $P_{k,k+1}$ seja nulo. A simplificação de $P_{k,k+1}$ resulta:

$$\begin{aligned} 0 = P_{k,k+1} &= \frac{-1}{2^{k+1}(k+1)!} g^{1-\text{mod}(k,2)} \\ &\times \prod_{l=1}^{\frac{1}{2}(k-\text{mod}(k,2))} \left((g + (k+2-2l)_{[2]}) (g + (k+2-2l)_{(2)}) - 4(k+2-2l)^2 s \right) \end{aligned} \quad (8.1.14)$$

O termo $\text{mod}(k, 2)$ em 8.1.14, separa geradores de ordem com paridade diferente. Isso acontece porque todos os geradores pares em $\mathfrak{q}(k, g_k)$ possuem ordem par, e fazer o produto de um gerador ímpar de ordem k' com um gerador par não altera a paridade de k' . Por isso, para que o gerador $Q_{-\frac{k}{2}}^{1,(k)}$ seja fortemente independente precisamos que as soluções r e s sejam:

$$r = \frac{1}{(2k)^2}(g_k - k_{[2]})(g_k - k_{(2)}); \quad s = \frac{1}{(2k)^2}(g_k + k_{[2]})(g_k + k_{(2)}); \quad k > 0 \quad (8.1.15)$$

A solução 8.1.15 é exatamente a condição que encontramos para os casos $k = 1, 2, 3$.

8.2 Geradores de ordem k para ambos os potenciais

Com a experiência que adquirimos com os casos $k = 0, 1, 2, 3$, basta um procedimento simples para obter todos os geradores ímpares fortemente independentes (já temos todos os geradores pares: $\{I, K, Z_d\}$) da álgebra $\mathfrak{q}(k, g_k)$ através do gerador $Q_{-\frac{k}{2}}^{1,(k)}$ em 8.1.1 com coeficientes $P_{k,m}$ dados por 8.1.12. Primeiramente, encontramos $Q_{-\frac{k}{2}}^{2,(k)}$ transpondo $Q_{-\frac{k}{2}}^{1,(k)}$ e refletindo o parâmetro contínuo g_k no eixo real. Definindo o mapa

$$G : g_k \mapsto -g_k \quad (8.2.1)$$

encontramos o gerador $Q_{-\frac{k}{2}}^{2,(k)}$, dado por

$$Q_{-\frac{k}{2}}^{2,(k)} = \sum_{m=0}^k \frac{P'_{k,m}}{x^m} u_{k-m}^1 \partial_{u^2} \quad (8.2.2)$$

onde $P'_{k,m} = G(P_{k,m})$. Feito isso, mudemos a base dos geradores.

$$Q_{-\frac{k}{2}}^{(k)} = Q_{-\frac{k}{2}}^{1,(k)} + Q_{-\frac{k}{2}}^{2,(k)} \quad (8.2.3)$$

Em 6 obtivemos o estado n comutando o vácuo com \widehat{Z}_+ n vezes, isto é,

$$\Psi_n \propto \underbrace{\left[\widehat{Z}_+, \left[\widehat{Z}_+, \dots, \left[\widehat{Z}_+, \left[\widehat{Z}_+, \Psi_0 \right] \right] \dots \right] \right]}_{n \text{ comutações}} \quad (8.2.4)$$

Naquela ocasião tínhamos \widehat{Z}_d como geradores do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; agora devemos interpretar Z_d como geradores do $\mathfrak{su}(2)$ e $Q_{-\frac{k}{2}}^{(k)}$ como peso mínimo da representação $-k/2$. Assim, comutando $Q_{-\frac{k}{2}}^{(k)}$ com Z_+ m vezes, $m \leq k$, encontramos os outros k geradores, totalizando $k+1$ geradores ímpares fortemente independentes.

$$Q_{-\frac{k}{2}+m}^{(k)} \propto \underbrace{\left[Z_+, \left[Z_+, \dots, \left[Z_+, \left[Z_+, Q_{-\frac{k}{2}}^{(k)} \right] \right] \dots \right] \right]}_{m \text{ comutações}}; \quad m \leq k \quad (8.2.5)$$

Uma vez obtidos todos os geradores fortemente independentes do potencial puro, podemos usar a transformação de similaridade S em 5.4.1 para obter os geradores do potencial deformado. Resta definir as constantes de estrutura da comutação de $Q_{d_1}^{(k)}$ com $Q_{d_2}^{(k)}$, tudo o que sabemos é que será algum polinômio em termos de I, K e Z_d . Uma vez que tenhamos todos os geradores fortemente independentes podemos construir a álgebra de spin superior $\mathfrak{q}(k, g_k)$.

Conclusões

Resultados e perspectivas

O método de prolongamento de campos vetoriais torna mais intuitiva a obtenção de geradores de simetria para sistemas MPDEs e esta tese é uma introdução prática ao método para qualquer cientista trabalhando com sistemas de equações diferenciais; em particular, podem ser úteis para professores que queiram adotar uma formulação mais geométrica nos cursos de mecânica quântica¹.

A equação de Schrödinger com potencial $V(x) = c_1x^2 + c_2/x^2$ foi investigada por Calogero em 1969 [14] e a expressão mais geral dessa solução só foi obtida em 2002 [47]², através de um *Ansatz* e considerações sobre o contorno na origem. A teoria de representações de peso mínimo das álgebras de Lie nos permitiu obter as mesmas soluções que aquelas em [47] sem nenhuma consideração particular além das imposições *a posteriori* de normalização das funções de onda e continuidade da corrente de probabilidade, de onde se vê a conveniência em usar os geradores para obter soluções (a desvantagem sendo a tarefa de simplificá-las em funções especiais³).

Procurando por simetrias de até terceira no sistema 5.1.2 foi possível antever duas famílias equivalentes de infinitas (super)álgebras de spin superior relacionadas pela transformação de similaridade 5.4.1. Isso seria muito mais difícil sem a implementação no software, que requer otimização. O principal desafio é criar um algoritmo adequado usando a função DSolve do Mathematica, que não interpreta variáveis independentes adequadamente.

Dos exemplos em 7 acreditamos que todas essas álgebras são diferentes para parâmetros discretos diferentes; as constantes de estrutura em 6.2.1 e 6.2.7–6.2.10 são facilmente estendidas para qualquer k , com exceção da comutação entre geradores ímpares que exige mais exemplos. O padrão que surge para os espaços de Hilbert é facilmente percebido nos diagramas 6.2 e 6.3 e a forma das funções de onda 6.1.18 é exata para qualquer k .

Temos a expressão exata, apesar de não muito clara, para os geradores $Q_{-k/2}^{(k)}$ o que nos dá todos os geradores fortemente independentes da álgebra $\mathfrak{q}(k, g_k)$ para o potencial puro e a transformação de similaridade 5.4.1 relaciona tanto a partícula livre ao oscilador quanto o potencial de Calogero puro ao deformado; a partir dela e dos geradores do caso puro obtemos todos os geradores fortemente independentes do potencial deformado. Precisamos ainda encontrar a forma explícita de $\bar{h}(t)$ em 5.4.2 e isso envolve o problema mais geral $e^{h(x)\partial_x} x e^{-h(x)\partial_x} = f(x)$ para $f(x)$ conhecido e $h(x)$ desconhecido. Pretendemos também considerar a ação dessa transformação sobre as soluções. Para os casos $k = 0, 1, 2, 3$, notamos que, fazendo $\beta = 0$, todos os geradores $\widehat{Q}_d^{(k)}$ do potencial deformado contraem para $Q_{-\frac{k}{2}}^{(k)}$. Sendo assim, pode ser mais fácil construir os geradores do potencial deformado diretamente a partir de $Q_{-\frac{k}{2}}^{(k)}$.

Podemos usar a álgebra envelopante universal do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ para construir as (super)álgebras de spin superior com o seguinte conjunto de geradores (em algum ordenamento):

$$A\mathfrak{q}(k, g_k) = \left\{ \left(Q_{m,\pm}^{(k)} \right)^\alpha W_{2q}^{2p} \right\} \quad \alpha = 0, 1; \quad 2|m| \leq k; \quad |q| \leq p \quad (8.2.6)$$

com $W_{2q}^2 = Z_q$, do mesmo modo que fizemos em 4.2.13. Vamos seguir estudando mais casos, procurando fixar as constantes de estrutura de todas essas álgebras e classificá-las. A experiência com o $\mathfrak{su}(2, 1)$ C será de grande ajuda, inclusive na construção dos diagramas de estado.

¹ Recomendamos [54, 55] para uma apresentação rigorosa.

² Nenhuma solução anterior previa tunelamento quântico.

³ Este é o caso também para a simplificação dos geradores ímpares em $\mathfrak{q}(k, g_k)$.

Já dissemos que generalizar a ordem dos geradores é apenas a primeira generalização e podemos também ampliar nosso sistema. Em 7 encontramos espinores de Majorana; notando os geradores

$$\{I, Q_{0,+}^{(0)}, -iQ_{0,-}^{(0)}, K\} \mapsto \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad (8.2.7)$$

em $\mathfrak{q}(0, \rho)$, onde σ_i , $i = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli e σ_0 é a matriz identidade 2×2 , podemos considerar $\mathfrak{q}(0, \rho) \oplus \mathfrak{q}(0, \rho)$ e construir uma versão da equação de Dirac interpretando os autoestados do oscilador deformado como componentes de espinores de Dirac.

$$i\gamma^\mu J_\mu \varphi_m = E_m \varphi_m; \quad J^\mu = -\frac{1}{4} \delta^{\mu\nu} \sigma_3 \otimes \sigma_\nu \partial_t; \quad \varphi_m = \frac{1}{2} \bigoplus_{\mu=0}^3 \psi_m^{(0)} \quad (8.2.8)$$

com γ^μ na representação de Dirac e métrica $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Essa escolha, porém, não recupera a equação de Klein-Gordon.

Um argumento mais forte para considerar sistemas maiores é a recente construção das mecânicas clássica e quântica com graduação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ [56, 57], onde os geradores são matrizes 4×4 com diferentes polinômios do operador ∂_t entrando não trivialmente nas componentes das matrizes. Talvez o método de prolongamentos tenha algo a dizer sobre esses sistemas e pretendemos otimizar a implementação no software também para considerar sistemas maiores. Avaliamos inclusive a possibilidade de criar um programa para classificar simetrias de equações diferenciais e escrever artigos no formato CDF para, por exemplo, incluir gráficos dinâmicos que permitam a manipulação dos parâmetros k , g_k e n das funções de onda e distribuições de probabilidades.

É comum a construção da teoria quântica de campos a partir da álgebra de Heisenberg [29, 58]. Em [59] os autores constroem uma teoria quântica de campos a partir da seguinte generalização da álgebra de Heisenberg.

$$J_0 A^\dagger = A^\dagger f(J_0) \quad A J_0 = f(J_0) A \quad [A^\dagger, A] = J_0 - f(J_0) \quad (8.2.9)$$

Mas essa generalização não abrange a álgebra de Heisenberg deformada

$$K Q_{\pm\frac{1}{2}}^{(1)} = -Q_{\pm\frac{1}{2}}^{(1)} K \quad \left[Q_{\frac{1}{2}}^{(1)}, Q_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \right] = I + g_1 K \quad (8.2.10)$$

que aparece em $\mathfrak{q}(1, g_1)$ e gostaríamos de considerar tal construção.

Confiamos que estamos no caminho certo em primeiro classificar as álgebras dos sistemas discutidos antes de iniciar aplicações em áreas como correspondência AdS/CFT, gravidade de spin superior e teoria de cordas. Iniciamos essa tese com uma citação que critica a mera instrumentalização da teoria de jatos, que está no cerne da geometria diferencial; nós apenas arranhamos a superfície da teoria e o seu estudo aprofundado é o principal interesse do autor. Uma teoria matemática bem elaborada conduz a uma física teórica bem elaborada; como exemplo, nenhum pesquisador ou instituição despenderia tempo e dinheiro procurando em aceleradores por partículas que já não estivessem em alguma representação de peso das álgebras de Lie. Nesse sentido, partilhamos da filosofia do brilhante físico-matemático Igor Vladimir Arnold:

“Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.

Resultados inacabados

Uma solução com um número fixo de somatórios, ou mesmo uma simplificação em termos de funções especiais, para $Q_{-\frac{k}{2}}^{(k)}$ é preferível àquela encontrada. Se tomarmos o polinômio $P_{k,m}$ em função de g_k podemos observar que os coeficientes de g_k constituem uma pirâmide de números racionais, e a fixação desses coeficientes pode nos dar a forma explícita de $P_{k,m}$ com um número fixo de somatórios. Após a simplificação de $P_{k,m}$, podemos escrevê-lo em termos de uma pirâmide de inteiros $B_{k,m,j}$, relacionada a pirâmides generalizadas de Pascal [60].

$$P_{k,m} = \frac{k!}{2^m k^m m! (k-m)!} (g_k - k(m-1))^{\text{mod}(m,2)} \times \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(m-\text{mod}(m,2))} k^{2j} B_{k,m,j} (g_k (g_k - 2k(m-1)))^{\frac{1}{2}(m-\text{mod}(m,2))-j} \quad (8.2.11)$$

Os três primeiros triângulos numéricos que obtemos para $j = 0, 1, 2$ são.

$$B_{k,m,0} = 1$$

$$B_{k,m,1} = -3(m-1) \text{mod}(m,2) + \frac{1}{6}(m-1)(m(2m-3k-7))$$

$$B_{k,m,2} = -\frac{1}{24}(m-1)^3(m(4m-6k-23)+9) \text{mod}(m,2) + \frac{1}{360}(m-2)(m-1)m(45(m-3)k^2 - 60((m-4)m+9)k + m(4m(5m-42)+331) - 501) \quad (8.2.12)$$

Percebe-se facilmente que se não tivéssemos evidenciado o termo $k!/(m!(k-m)!)$, o primeiro triângulo $B_{k,m,0}$ seria justamente o triângulo de Pascal. Para m par podemos escrever essa pirâmide em termos de mais dois somatórios.

$$B_{k,m,j} = \frac{m!(-2j+m-1)!!}{(m-2j)!} \sum_{q=0}^j \frac{(-1)^{j-q} 2^{-(\text{mod}(j,2)-1)\text{mod}(q,2)-j+q} k^{j-q}}{\widehat{B}(q)(j-q)!(+m-1-2(j-q))!!} \sum_{l=0}^{2q} m^l a_{j,q,l} \quad (8.2.13)$$

com $\widehat{B}(q)$ dado pelo valor absoluto da sequência [A262179](#) e $a_{j,q,l}$ desconhecido. Uma vez encontrada a pirâmide $B_{k,m,j}$, surge uma nova pirâmide em $Q_{1-\frac{k}{2}}^{(k)}$. O conjunto de geradores $Q_{\frac{k}{2}-l}^{(k)}$, $l \leq k$, possui um simplexo quadridimensional de números inteiros, e, a princípio, nada nos impede de considerar $k \rightarrow \infty$ em [8.1.12](#).

Encontrar a forma exata das características desses geradores, já conhecendo sua estrutura algébrica, tem o seu valor para as áreas da análise e da matemática numérica, bem como podem nos ajudar a procurar uma extensão infinita de $q(k, g_k)$ análoga à álgebra de Schrödinger-Virasoro [38].

A Rudimentos da teoria de grupos

Para uma introdução às teorias de grupos e álgebras de Lie vide [61].

A.1 Axiomas de grupo

Um grupo G consiste de um conjunto de entidades $\{g_\alpha\}$ chamados elementos do grupo, os quais podem ser compostos (multiplicados) com outros elementos. O índice α pode ser discreto ou contínuo. Dados dois elementos quaisquer g_α e g_β , o produto $g_\alpha \cdot g_\beta$ é igual a um outro elemento, digamos g_γ , em G . Em outras palavras, $g_\alpha \cdot g_\beta = g_\gamma$. A isto chama-se condição de fechamento do grupo. A multiplicação \cdot satisfaz os seguintes axiomas:

1. Associatividade: $(g_\alpha \cdot g_\beta) \cdot g_\gamma = g_\alpha \cdot (g_\beta \cdot g_\gamma)$; $g_\alpha, g_\beta, g_\gamma \in G$.
2. Existência do elemento identidade: $\exists I \in G \mid I \cdot g_\alpha = g_\alpha \cdot I = g_\alpha$.
3. Existência do elemento inverso: $\exists g_\alpha^{-1} \mid g_\alpha^{-1} \cdot g_\alpha = g_\alpha \cdot g_\alpha^{-1} = I$.

A multiplicação de elementos de um grupo não requer comutatividade. Em geral, $g_\alpha \cdot g_\beta \neq g_\beta \cdot g_\alpha$. Um grupo para o qual a multiplicação é comutativa é dito abeliano (comutativo), caso contrário é dito não-abeliano (não-comutativo).

A.2 Exemplos de grupos

Grupos são, em geral, abstratos, bastando que os axiomas de grupo sejam satisfeitos. No entanto, a definição dos grupos será dada a partir de sua representação fundamental, onde os elementos são matrizes. Para cada um dos exemplos seguintes os axiomas de grupo são satisfeitos.

1. O conjunto de matrizes $n \times n$ invertíveis de entradas reais formam o grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R})$. Do mesmo modo, $GL(n, \mathbb{C})$ é o grupo de matrizes $n \times n$ invertíveis de entradas complexas. Todo grupo de Lie, na representação fundamental, é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$. Nota-se que estes grupos não são abelianos, tendo em vista que a multiplicação de matrizes, em geral, não comuta.
2. O grupo de matrizes $n \times n$ de entradas reais com determinante unitário é o $SL(n, \mathbb{R})$ e se chama grupo linear especial. Percebe-se que a condição de fechamento é satisfeita: $\det(M_1 M_2) = \det M_1 \det M_2 = 1$; $M_1, M_2 \in SL(n, \mathbb{R})$. $SL(n, \mathbb{C})$ é o grupo de matrizes $n \times n$ de entradas complexas com determinante unitário.
3. O grupo unitário $U(n)$ é o conjunto de matrizes unitárias $n \times n$ e seu subgrupo $SU(n)$ é o conjunto de matrizes unitárias $n \times n$ de determinante unitário. O $SU(2)$ é bastante popular na mecânica quântica por ser o grupo de spin e o $SU(3)$ por ser o grupo da cromodinâmica. No caso de $n = 1$, encontramos o grupo $U(1) = e^{i\theta}$, que tem aplicações na eletrodinâmica.
4. Rotações no espaço euclidiano bidimensional formam um grupo chamado $SO(2)$, que consiste do conjunto de rotações em torno de um eixo perpendicular ao plano. Denotando uma rotação de um ângulo ϕ por $O(\phi)$, temos que $O(\phi_1) \cdot O(\phi_2) = O(\phi_1 + \phi_2) = O(\phi_2)O(\phi_1)$. Rotações no espaço tridimensional formam um dos mais característicos grupos, o $SO(3)$, que é praticamente indispensável em física. Considere um corpo rígido sendo rotacionado. Após duas rotações sucessivas, o corpo não é deformado de nenhum modo, ele meramente

adquire uma nova orientação. Assim, a composição de duas rotações é outra rotação. Rotações num espaço de n dimensões são dadas pelo grupo $SO(n)$, chamado ortogonal especial, que é o conjunto de matrizes $n \times n$ ortogonais de determinante unitário. Se relaxarmos a condição de determinante unitário do $SO(n)$ para determinante diferente de zero, isso nos permite incluir a reflexão \mathcal{P} , e assim encontramos o grupo ortogonal $O(n)$.

5. O grupo das permutações S_4 rearranja um conjunto ordenado de quatro objetos $(1, 2, 3, 4)$. Um exemplo poderia ser uma permutação que leva $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2$ e $4 \rightarrow 1$. Como existem $4!$ permutações possíveis, o S_4 possui 24 elementos. O grupo de permutações S_n (também chamado grupo simétrico) possui $n!$ elementos.
6. Uma dada permutação pode ser caracterizada como ímpar ou par. Permutações pares de n elementos formam o grupo das alternações A_n .
7. As duas raízes quadradas de 1, $\{1, -1\}$, formam o grupo Z_2 sob multiplicação ordinária. Similarmente, as três raízes cúbicas de 1 formam o grupo $Z_3 = \{1, \omega, \omega^2\}$, com $\omega \equiv e^{2\pi i/3}$. De modo geral, as n raízes enésimas (quadradas, cúbicas, etc.) de 1 formam o grupo cíclico $Z_n = \{e^{2\pi i k/n}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$.

A.3 Subgrupos

Dado um conjunto de entidades $\{g_\alpha\}$ que formam um grupo G , se um subconjunto $\{h_\beta\}$ também forma um grupo, chamemos de H , então H é dito ser um subgrupo de G , $H \subset G$. Aqui estão alguns exemplos

1. $SO(2) \subset SO(3)$. Isto mostra que os índices α e β , em $\{g_\alpha\}$ e $\{h_\beta\}$ podem ter significado diferente; α consiste de três ângulos, enquanto β consiste de apenas um ângulo.
2. $S_m \subset S_n$, para $m < n$. Permutar três objetos é o mesmo que permutar cinco objetos fixando dois. Assim, $S_3 \subset S_5$
3. $SO(3) \subset SL(3, \mathbb{R})$. Rotações são efetuadas por matrizes 3×3 com entradas reais de determinante unitário, que além disso são ortogonais.
4. $Z_2 \subset Z_4$. É evidente que $\{1, -1\} \subset \{1, i, -1, -i\}$. Porém Z_2 não é subconjunto de Z_5 .
5. $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \subset SU(5)$. O $SU(5)$ é o menor grupo que, sozinho, contém o modelo padrão de partículas.

Todos os grupos de parâmetros contínuos listados na seção anterior podem ser considerados subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$ ou $GL(n, \mathbb{C})$, enquanto os de parâmetros discretos são subgrupos de S_n .

B Grupos e álgebras de Lie

B.1 Do grupo à álgebra

O que discutiremos a seguir será válido para qualquer grupo cujos elementos $g(\theta_1, \theta_2, \dots)$ são rotulados por um conjunto contínuo de parâmetros θ_a tais que $g(0, 0, \dots)$ é a identidade. Estes grupos são chamados grupos de Lie, e as álgebras que decorrem desses grupos são chamadas álgebras de Lie.

De modo geral, para encontrar a álgebra partindo de um certo grupo, procedemos como se segue (a convenção de soma de Einstein é assumida sempre para quaisquer dois índices repetidos):

1. Expandem-se dois elementos do grupo em torno da identidade fazendo os parâmetros contínuos tenderem a zero: $g_1 \simeq I + A$ e $g_2 \simeq I + B$.
2. Escreve-se $A = i\theta_a T^a$ e $B = i\theta_b T^b$ como combinações lineares de T^a , conhecidos como geradores do grupo, da forma determinada pela natureza do grupo.
3. A diferença desses geradores captura a essência do grupo próximo à identidade: $g_1 g_2 g_1^{-1} - g_2 \simeq [A, B] = i^2 \theta_a \theta_b [T^a, T^b]$.
4. A álgebra de Lie associada ao grupo é uma estrutura de comutação de dois geradores, que pode ser escrita como a combinação linear de todos os geradores

$$[T^a, T^b] = i f^ab_c T^c \quad (\text{B.1.1})$$

O número de geradores numa álgebra dá o posto da álgebra, enquanto os coeficientes f^ab_c são chamados constantes de estrutura, e são suficientes pra fixar a álgebra sem ambiguidade, o que, praticamente, fixa o grupo.

Pode-se, também, definir a álgebra de Lie abstratamente como um espaço vetorial V equipado com uma operação binária $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, chamada comutação de Lie satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Antissimetria: $[X, Y] = -[Y, X], \forall X, Y \in V$.
2. Linearidade: $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).
3. Identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

A identidade de Jacobi para os geradores mostrados na álgebra B.1.1 implica

$$f^ab_d f^dc_g + f^bc_d f^da_g + f^ca_d f^db_g = 0 \quad (\text{B.1.2})$$

Podemos definir a representação adjunta de uma álgebra de Lie através das constantes de estrutura: $(T^a)^b_d \equiv -i f^ab_d$. Verifica-se que B.1.1 continua satisfeita. Com isso, podemos definir a métrica de Cartan-Killing (considerando apenas os casos em que ela é inversível).

$$g^{ab} \equiv \text{tr}(T^a T^b) = -f^ac_d f^bd_c \quad g^{ad} g_{db} = \delta^a_b \quad (\text{B.1.3})$$

Por construção g^{ab} é simétrica em a e b . Já f^ab_c é antissimétrica em relação aos mesmos índices. Usando a métrica, mostramos que as constantes de estrutura são antissimétricas para a permutação de qualquer índice.

$$f^{abc} \equiv f^ab_d f^dc_g = -f^ab_d f^de_g f^cg_e = (f^be_d f^da_g + f^ea_d f^db_g) f^cg_e$$

$$= i^3 \text{tr}(T^b(-T^a)T^c + (-T^a)(-T^b)T^c) = -i \text{tr}(T^a T^b T^c - T^b T^a T^c) = -f^{acb} \quad (\text{B.1.4})$$

O operador de Casimir é dado pela contração da métrica com os geradores.

$$\mathbb{C} \equiv g_{ab} T^a T^b \quad (\text{B.1.5})$$

Este operador comuta com todos os membros da álgebra

$$\begin{aligned} [\mathbb{C}, T^c] &= g_{ab} [T^a T^b, T^c] = g_{ab} (T^a [T^b, T^c] + [T^a, T^c] T^b) \\ &= g_{ab} (f^{bc}_d T^a T^d + f^{ac}_d T^d T^b) = g_{ab} f^{ac}_d (T^b T^d + T^d T^b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

Na última igualdade foi usada a antissimetria de $g_{ab} f^{ac}_d$ nos índices b e d .

Como no caso de grupos, também se pode falar em subálgebras. Dado um conjunto de entidades $\{T^a\}$ que formam uma álgebra A , se um subconjunto $\{X^b\}$ também forma uma álgebra, chamemos de B , então B é dito ser uma subálgebra de A , $B \subset A$.

B.2 Álgebras de Lie na base de Cartan-Weyl

A álgebra B.1.1 na base de Cartan-Weyl é apresentada como

$$[H^i, H^j] = 0 \quad (\text{B.2.1})$$

$$[H^i, E_\alpha] = \alpha^i E_\alpha \quad (\text{B.2.2})$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \quad (\text{B.2.3})$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_i H^i \quad (\text{B.2.4})$$

A subálgebra B.2.1 é composta dos membros simultaneamente diagonalizáveis e é conhecida como subálgebra de Cartan. Os E_α são chamados raízes¹ da álgebra. Em mecânica quântica, escolhemos auto estados dos operadores diagonais para descrever o sistema. Estes estados podem ser dispostos num espaço vetorial euclidiano com dimensão d igual ao posto da subálgebra de Cartan, chamado diagrama de estados. A aplicação $H^i |m^1, m^2, \dots, m^d\rangle = m^i |m^1, m^2, \dots, m^d\rangle$ mede a coordenada m^i do estado no diagrama, enquanto as raízes dão a transição desses estados

$$E_\alpha |m^1, m^2, \dots, m^d\rangle \propto |m^1 + \alpha^1, m^2 + \alpha^2, \dots, m^d + \alpha^d\rangle \quad (\text{B.2.5})$$

Para simplificar a notação, podemos escrever

$$|m^1 + \alpha^1, m^2 + \alpha^2, \dots, m^d + \alpha^d\rangle \equiv |\vec{m} + \vec{\alpha}\rangle \quad (\text{B.2.6})$$

Elencando uma ordenação preferencial dos membros diagonais H^1, H^2, \dots, H^d , definimos como raízes positivas as raízes E_α cujo vetor $\vec{\alpha}$ possui o primeiro valor diferente de zero sendo positivo. Como estamos num espaço vetorial, devemos satisfazer a condição de elemento inverso sob a operação de adição; esses elementos são as raízes negativas. Inversamente, podemos definir as raízes negativas como aquelas para as quais o primeiro valor diferente de zero de seu vetor é negativo. De agora em diante usaremos E_α também para designar $\vec{\alpha}$ e assumiremos sempre estados ortonormais $\langle m_i | m_j \rangle = \delta_{ij}$.

Nas seções que se seguem, obteremos as álgebras dos grupos na base de Cartan-Weyl para aplicá-las nos próximos capítulos.

¹Rigorosamente, apenas o vetor α é uma raiz. Mas nesse trabalho chamaremos tanto E_α quanto α de raízes, acreditando que o contexto esclarece do que se trata

B.3 Grupo das rotações no plano

Rotações no espaço euclidiano podem ser definidas como transformações de eixos coordenados que deixam invariante a distância entre dois pontos. Da trigonometria básica divisamos na Figura 2 a transformação dos eixos coordenados:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (\text{B.3.1})$$

Pelo teorema de Pitágoras $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, a condição de invariância da distância entre pontos é satisfeita. A lei dessa transformação é dada por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.2})$$

A matriz de transformação é

$$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.3})$$

Estas são matrizes ortogonais de determinante unitário para qualquer valor real de θ e constituem os elementos do grupo $SO(2)$. Rotações em espaços de dimensão n são dadas pelos elementos

$$SO(n) = \{O_{n \times n} \mid O^T O = I, \det O = 1\} \quad (\text{B.3.4})$$

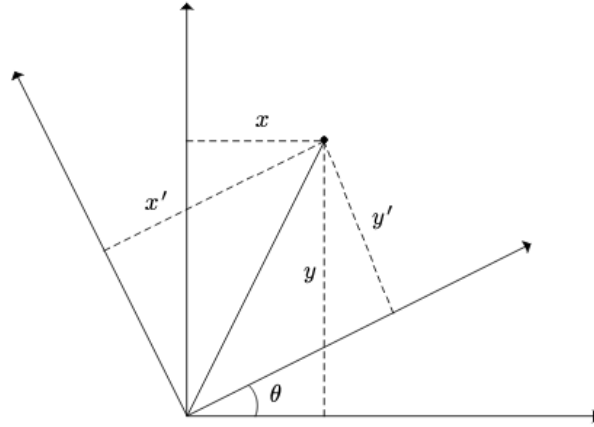


Figura B.1: Rotação de um ângulo θ no plano.

B.4 Gerador do $SO(2)$

Inversamente ao que foi feito antes, poderíamos partir da condição de invariância da distância e checar se obtemos a lei de transformação B.3.3. Definindo

$$\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{r}' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \vec{r}' = O(\theta)\vec{r} \quad (\text{B.4.1})$$

Encontramos a condição a ser imposta sobre a matriz de transformação $O(\theta)$

$$\vec{r}'^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T O^T O \vec{r} = \vec{r}^T \vec{r} = \vec{r}^2 \Rightarrow O^T O = I \quad (\text{B.4.2})$$

Uma rotação através de um ângulo finito pode sempre ser obtida de infinitas rotações infinitesimais; logo para estudar rotações generalizadas, basta estudar rotações através de ângulos infinitesimais. Uma rotação através de um ângulo infinitesimal é aproximadamente a identidade.

$$O(\theta) \simeq I + A \quad (\text{B.4.3})$$

Aqui, A representa uma matriz de ordem θ . Os termos negligenciados são de ordem θ^2 e termos menores.

Impondo $O^T O = I$, encontramos uma relação para A .

$$O(\theta) \simeq I + A \Rightarrow O^T O \simeq (I + A)^T (I + A) \simeq I + A^T + A = I \quad (\text{B.4.4})$$

Isto requer que $A^T = -A$, isto é, A é uma matriz antissimétrica. Existe basicamente apenas uma matriz 2×2 antissimétrica

$$\mathcal{J} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4.5})$$

Em outras palavras, a solução de $A^T = -A$ é $A = \theta \mathcal{J}$ para algum parâmetro real θ infinitesimal. Assim, rotações no entorno da identidade tem a forma

$$O = I + \theta \mathcal{J} + \mathcal{O}(\theta^2) \simeq \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4.6})$$

A matriz \mathcal{J} é o gerador do grupo $SO(2)$ e constitui o único membro da álgebra $\mathfrak{so}(2)$.

Lembrando da identidade $e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$, a qual pode ser provada diferenciando-se ambos os lados quantas vezes se queira, nós temos

$$O(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(O \left(\frac{\theta}{N} \right) \right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta \mathcal{J}}{N} \right)^N \equiv e^{\theta \mathcal{J}} \quad (\text{B.4.7})$$

A primeira igualdade representa a ideia de Lie de considerar um ângulo θ finito cortado em N partes iguais tal que θ/N é infinitesimal para N grande o suficiente e performar essa rotação infinitesimal N vezes. A segunda igualdade vem de B.4.6 e a terceira da possibilidade de se escrever a exponencial como um limite.

Com a série de Taylor podemos construir uma função $f(x)$ em, digamos, $x = 0$ a partir de todas as derivadas da função no ponto. Em contraste, graças à estrutura multiplicativa de grupos, é necessário apenas o elemento $O(\theta)$ próximo à identidade.

$$\left. \frac{dO(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \mathcal{J} \quad (\text{B.4.8})$$

A razão de precisarmos de muito menos informação é que a estrutura de grupo é altamente restritiva. Agora podemos checar que $O(\theta) = e^{\theta \mathcal{J}}$ reproduz B.3.3 para qualquer valor de θ .

$$\begin{aligned} e^{\theta \mathcal{J}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n \mathcal{J}^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{2k!} \right) I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \mathcal{J} \\ &= \cos \theta I + \sin \theta \mathcal{J} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.4.9})$$

a qual é precisamente $O(\theta)$ como dado em B.3.3. Nota-se que isto funciona porque \mathcal{J} desempenha o mesmo papel de i na identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. O fato de não termos precisado usar a condição $\det O = 1$ se deve por estarmos procurando elementos continuamente relacionados à identidade I , e a reflexão \mathcal{P} , com $\det \mathcal{P} = -1$, manifestamente, não o é.

B.5 Representações do $\mathfrak{so}(3)$

De B.4.4, sabemos que se $O \simeq I + A$ então A é antissimétrica. Existem três matrizes 3×3 antissimétricas linearmente independentes

$$\mathcal{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.1})$$

A matriz A pode ser escrita como $A = \theta_x \mathcal{J}_x + \theta_y \mathcal{J}_y + \theta_z \mathcal{J}_z$. Como discutido no caso do $SO(2)$, exponenciando a matriz A recuperamos os elementos finitos do grupo

$$O(\theta) = e^A = e^{\theta_x \mathcal{J}_x + \theta_y \mathcal{J}_y + \theta_z \mathcal{J}_z} = e^{\theta_i \mathcal{J}_i} \quad (\text{B.5.2})$$

Notamos que as matrizes \mathcal{J}_i por serem reais e antissimétricas são, conseqüentemente, antihermitianas; porém, observáveis na mecânica quântica são representados por operadores hermitianos. Para torná-las hermitianas, definimos $J_i \equiv -i\mathcal{J}_i$, e escrevemos uma rotação finita como

$$O(\theta) = e^{\theta_i \mathcal{J}_i} = e^{i\theta_i J_i} = e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} \quad (\text{B.5.3})$$

tratando os números reais θ_i e as matrizes J_i como dois vetores tridimensionais.

Comutando os geradores, descobrimos que suas constantes de estrutura são 1, -1 ou 0. Isto nos permite escrever sua álgebra em termos do tensor de Levi-Civita

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad (\text{B.5.4})$$

Esta álgebra também pode ser satisfeita se utilizarmos operadores diferenciais, em vez de matrizes. Escrevendo $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$, com $\vec{p} \equiv -i\vec{\nabla}$, encontramos B.5.4. Esta é dita a representação diferencial da álgebra. O $\mathfrak{so}(3)$ é a álgebra do momento angular na mecânica quântica.

B.6 Cobertura do $SL(2, \mathbb{R})$ pelos seus geradores

Consideremos o grupo $SL(n, \mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ de entradas reais e determinante unitário. Investigando um elemento no entorno da identidade $M \simeq I + A$ podemos descobrir A impondo as exigências do grupo.

$$\det M = e^{\text{tr} \ln M} \simeq e^{\text{tr} \ln(I+A)} \simeq e^{\text{tr} A} \simeq 1 + \text{tr} A = 1 \Rightarrow \text{tr} A = 0 \quad (\text{B.6.1})$$

Assim, obtemos os geradores do $SL(2, \mathbb{R})$.

$$A = \frac{\theta_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \theta_i L_i \quad (\text{B.6.2})$$

Encontramos a álgebra a partir da computação direta dos geradores L_i .

$$[L_1, L_2] = L_3 \quad [L_2, L_3] = -L_1 \quad [L_3, L_1] = L_2 \quad (\text{B.6.3})$$

Lembrando que álgebras de Lie são espaços vetoriais, os geradores estão sujeitos a mudanças de base. Na base de Cartan-Weyl, esta álgebra é dada por

$$L_{\pm} \equiv L_1 \pm L_2 \quad L_3 = L_3 \quad (\text{B.6.4})$$

Comutando os geradores na nova base, encontramos

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad [L_+, L_-] = -2L_3 \quad (\text{B.6.5})$$

Esta álgebra possui apenas um membro (da subálgebra) de Cartan, L_3 . Para diagonalizar outro gerador através de uma mudança de base, perderíamos a diagonalização de L_3 . Os geradores L_+ e L_- são as raízes positiva e negativa, respectivamente.

Vimos que para o $SO(2)$ podemos obter qualquer elemento exponenciando o gerador. Para o $SO(3)$ basta considerar z o eixo em torno do qual ocorre a rotação, de modo que também é possível obter todos os elementos; similarmente para o $SO(n)$. No entanto, para o $SL(2, \mathbb{R})$ isso não ocorre. Os autovalores da matriz A em (33) tem a forma $\pm\omega$, com ω real ou imaginário, o que decorre diretamente da condição de traço nulo. Diagonalizando A por uma transformação de similaridade S , avaliamos o traço de elementos conseguidos com a exponenciação

$$T \equiv \text{tr } M = \text{tr } e^A = \text{tr } e^{S^{-1}AS} = e^\omega + e^{-\omega} = \begin{cases} 2 \cos \varphi, & \omega \in \mathbb{I} \\ 2 \cosh \varphi, & \omega \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow T \geq -2 \quad (\text{B.6.6})$$

Logo, o traço de qualquer elemento do $SL(2, \mathbb{R})$ conseguido através da exponenciação será $T \geq -2$. Por outro lado, a matriz $U = \begin{pmatrix} -u & 0 \\ 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$, para u real, é manifestamente um elemento do $SL(2, \mathbb{R})$. Mas $\text{tr } U = -(u + u^{-1}) \leq -2$, para $u > 0$. Assim, nem todo elemento do grupo $SL(2, \mathbb{R})$ pode ser escrito na forma e^A , apenas aqueles continuamente conectados à identidade.

B.7 O grupo $SU(2)$

Na representação fundamental do $SU(n)$ os elementos do grupo são matrizes $U_{n \times n}$ unitárias de determinante unitário. Investigando os elementos U vizinhos à identidade nos revela a condição a ser satisfeita pela matriz infinitesimal H .

$$U \simeq I + iH \Rightarrow U^\dagger U \simeq (I + iH)^\dagger (I + iH) \simeq I - i(H^\dagger - H) = I \rightarrow H^\dagger = H \quad (\text{B.7.1})$$

Esta relação é satisfeita se H for uma matriz hermitiana. Usando o vínculo $\det U = 1$, de B.7.1 descobrimos que a matriz H precisa, também, ter traço nulo. Assim, construímos a matriz H para o $SU(2)$:

$$H = \begin{pmatrix} u & z* \\ z & -u \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \theta_i \sigma_i \Rightarrow U = e^{i\theta_i \sigma_i / 2} \quad (\text{B.7.2})$$

onde as matrizes $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$ são chamadas matrizes de Pauli. A álgebra é

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \quad (\text{B.7.3})$$

Definindo $T_i \equiv \sigma_i / 2$, $i = 1, 2, 3$, e $T_\pm \equiv T_1 \pm iT_2$, encontramos a álgebra do $SU(2)$ na base de Cartan-Weyl.

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm, \quad [T_+, T_-] = 2T_3 \quad (\text{B.7.4})$$

Notamos que $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ pode ser dividido em B.5.4 e B.7.3. Quando a álgebra de dois grupos distintos são iguais, dizemos que há um isomorfismo local entre os grupos, $SU(2) \simeq SO(3)$. Isto significa que é possível definir uma bijeção entre os elementos vizinhos dos grupos que são continuamente conectados à identidade. Na verdade, o $SU(2)$ tem uma dupla cobertura do $SO(3)$, e isso distingue suas topologias. No caso de um isomorfismo global, essa bijeção existiria para quaisquer elementos dos grupos, o que significa que trata-se de um mesmo grupo. Concluimos também que B.7.4 é a base de Cartan-Weyl do $\mathfrak{so}(3)$, dado o isomorfismo.

Comparando o $\mathfrak{su}(2)$ em B.7.4 com o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ em B.6.5, percebemos que essas álgebras diferem por um sinal. Veremos na seção 4.1 que isso vai nos permitir trabalhar suas representações de peso mínimo ao mesmo tempo.

B.8 Isomorfismo $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$

O $\mathfrak{so}(4)$ é a álgebra associada ao grupo $SO(4)$ das rotações em 4 dimensões. De B.4.4, sabemos que seus geradores são matrizes 4×4 antissimétricas. Existem seis de tais matrizes

$$\begin{aligned}
 J_1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & J_2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & J_3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 K_1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & K_2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.8.1}$$

A partir das relações de comutação destas matrizes, obtemos a álgebra do $SO(4)$.

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k; \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k; \quad [K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{B.8.2}$$

Podemos mudar a base definindo $J_{\pm i} = \frac{1}{2}(J_i \pm K_i)$, onde a álgebra se torna:

$$[J_{+i}, J_{+j}] = i\epsilon_{ijk}J_{+k}, \quad [J_{-i}, J_{-j}] = i\epsilon_{ijk}J_{-k}, \quad [J_{+i}, J_{-j}] = 0 \tag{B.8.3}$$

O $\mathfrak{so}(4)$, na base mostrada em B.8.3, é constituído de duas álgebras $\mathfrak{su}(2)$ independentes: $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ ¹. Esta álgebra possui dois membros na subálgebra de Cartan e quatro raízes.

B.9 Isomorfismo $\mathfrak{su}(1, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

O grupo $SU(p, n-p)$ é definido, na representação fundamental, como o conjunto de todas as matrizes ([63]):

$$SU(p, n-p) = \{U_{n \times n} \mid U^\dagger I_{p, n-p} U = I_{p, n-p}, \det U = 1\} \tag{B.9.1}$$

com elementos complexos e sob a operação de produto matricial, onde $I_{p, n-p} = I_{p \times p} \oplus -I_{n-p \times n-p}$:

$$I_{p, n-p} \equiv \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-p}) \tag{B.9.2}$$

Vale a pena comentar que $I_{p, n-p}$ e $I_{n-p, p}$ fornecem, a partir da representação fundamental, o mesmo grupo; eles são globalmente isomórficos. Investigando os elementos do grupo na vizinhança da identidade, encontramos a condição que os membros da álgebra devem satisfazer:

$$U = e^H \Rightarrow U \simeq I + iH \mid U^\dagger I_{p, n-p} U \simeq (I + iH)^\dagger I_{p, n-p} (I + iH) = (I - iH^\dagger) I_{p, n-p} (I + iH)$$

¹ Para definições de soma direta, soma semi-direta e produto direto vide [25] e [62].

$$\simeq I_{p,n-p} - iH^\dagger I_{p,n-p} + iI_{p,n-p}H = I_{p,n-p} \rightarrow H^\dagger I_{p,n-p} = I_{p,n-p}H \quad (\text{B.9.3})$$

Além de B.9.3, devemos impor a condição de traço nulo. Podemos encontrar os elementos das matrizes do $\mathfrak{su}(1,1)$ que satisfazem essa relação do seguinte modo:

$$I_{1,1}H = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & -c^* \\ b^* & -d^* \end{pmatrix} = H^\dagger I_{1,1} \quad (\text{B.9.4})$$

Com a condição de traço nulo encontramos os seguintes vínculos:

$$d^* = d = -a; \quad c = -b^* \quad (\text{B.9.5})$$

Esses elementos, porém, são complexos. Vamos escrevê-los em termos de parâmetros reais:

$$b = \theta_1 - i\theta_2; \quad a = \theta_3 \quad (\text{B.9.6})$$

Desses vínculos, percebe-se que existem 3 geradores para o $SU(1,1)$. Agora podemos encontrar os membros X_i da álgebra numa base particular:

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ -\theta_1 - i\theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{\theta_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H \equiv \theta_i X_i \quad (\text{B.9.7})$$

Deste modo, temos as relações de comutação da álgebra

$$[X_1, X_2] = -iX_3; \quad [X_3, X_1] = iX_2; \quad [X_2, X_3] = iX_1 \quad (\text{B.9.8})$$

Como feito para as outras álgebras, mudamos para a base da Cartan-Weyl de modo a explicitar as raízes:

$$Q_\pm \equiv X_1 \pm iX_2; \quad Q_3 \equiv X_3 \quad (\text{B.9.9})$$

A álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$, nesta base, é dada pelas seguintes relações de comutação dos geradores:

$$[Q_3, Q_\pm] = \pm Q_\pm \quad [Q_+, Q_-] = -2Q_3 \quad (\text{B.9.10})$$

Esta é a mesma álgebra que B.6.5 do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Com isso, identificamos um isomorfismo local $\mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

B.10 Base de Cartan-Weyl do $\mathfrak{su}(2,1)$

De B.9.3, sabemos que a condição a ser satisfeita pela matriz H para o $SU(2,1)$ é

$$H^\dagger I_{2,1} = I_{2,1}H \quad (\text{B.10.1})$$

Podemos encontrar os elementos das matrizes que satisfazem essa relação do seguinte modo:

$$I_{2,1}H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & d^* & -g^* \\ b^* & e^* & -h^* \\ c^* & f^* & -j^* \end{pmatrix} = H^\dagger I_{2,1} \quad (\text{B.10.2})$$

Os vínculos necessários para que essa igualdade seja satisfeita, incluindo a condição de traço nulo, que vêm da condição de unitariedade do determinante, estão apresentados abaixo:

$$a^* = a; e^* = e; j^* = -a - e; d = b^*; g = -c^*; h = -f^* \quad (\text{B.10.3})$$

Esses elementos, porém, são complexos. Vamos escrevê-los em termos de parâmetros reais:

$$b = \theta_1 + i\theta_2; c = \theta_3 + i\theta_4; f = \theta_5 + i\theta_6; a = \theta_7; e = \theta_8 \quad (\text{B.10.4})$$

Desses vínculos, percebe-se que existem oito geradores para o $\mathfrak{su}(2, 1)$. Agora podemos encontrar os membros X_i da álgebra numa base particular:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_7 & \theta_1 + i\theta_2 & \theta_3 + i\theta_4 \\ \theta_1 - i\theta_2 & \theta_8 & \theta_5 + i\theta_6 \\ -\theta_3 + i\theta_4 & -\theta_5 + i\theta_6 & -\theta_7 - \theta_8 \end{pmatrix} = \frac{\theta_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\theta_3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_4}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_5}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_6}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\theta_7}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\theta_8}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \theta_i X_i \quad (\text{B.10.5}) \end{aligned}$$

Operando a seguinte mudança de base, encontramos a base de Cartan-Weyl.

$$\begin{aligned} T_{\pm} &\equiv \frac{X_1 \pm iX_2}{2}; \quad U_{\pm} \equiv \frac{X_3 \pm iX_4}{2}; \quad V_{\pm} \equiv \frac{X_5 \pm iX_6}{2} \\ T_1 &\equiv \frac{X_7 - X_8}{2}; \quad T_2 \equiv \frac{X_7 + X_8}{2\sqrt{3}} \quad (\text{B.10.6}) \end{aligned}$$

O gerador T_2 foi reescalado para que as raízes tenham mesmo módulo e estejam igualmente espaçadas. Com isso, encontramos as seguintes relações de comutação para a álgebra do $\mathfrak{su}(2, 1)$ na base de Cartan-Weyl (os sinais \pm estão correlacionados):

$$\begin{aligned} [T_+, T_-] &= 2T_1 & [U_+, U_-] &= -(T_1 + \sqrt{3}T_2) & [V_+, V_-] &= -(\sqrt{3}T_2 - T_1) & [T_1, T_2] &= 0 \\ [T_1, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm} & [T_1, U_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2}U_{\pm} & [T_1, V_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2}V_{\pm} & [T_2, T_{\pm}] &= 0 \\ [T_2, U_{\pm}] &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}U_{\pm} & [T_2, V_{\pm}] &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}V_{\pm} & [T_{\pm}, U_{\mp}] &= \mp V_{\mp} & [T_{\pm}, U_{\pm}] &= 0 \\ [T_{\pm}, V_{\pm}] &= \pm U_{\pm} & [T_{\pm}, V_{\mp}] &= 0 & [U_{\pm}, V_{\mp}] &= \mp T_{\pm} & [U_{\pm}, V_{\pm}] &= 0 \end{aligned}$$

(B.10.7)

Percebe-se uma diferença significativa em relação ao $\mathfrak{su}(2)$ e ao $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$: assim como para $\mathfrak{so}(4)$, existem dois membros simultaneamente diagonalizáveis na subálgebra de Cartan do $\mathfrak{su}(2, 1)$, mas agora temos seis raízes.

C Representações de peso mínimo

C.1 Representações de peso mínimo para $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Agora abandonamos as representações matriciais das diversas álgebras com as quais trabalhamos, sem abrir mão das estruturas algébricas conseguidas, para introduzir as representações de peso mínimo. Nestas representações, promovemos os geradores a operadores do espaço de Hilbert. Considerando autovetores dos membros da subálgebra de Cartan (que são simultaneamente diagonalizáveis por definição), descobriremos o efeito da atuação das raízes nestes vetores. Definimos o peso mínimo de uma representação como o autovetor dos membros de Cartan que retorna coeficiente zero para a atuação de qualquer raiz negativa.

Começemos com o $\mathfrak{su}(2)$ e o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Como as álgebras B.7.4 e B.6.5 diferem apenas pelo sinal na comutação das raízes, vamos trabalhá-las coletivamente utilizando $[T_+, T_-] = \epsilon 2T_3$, onde $\epsilon = \pm 1$. Sempre podemos passar de uma álgebra à outra através do automorfismo $T_\pm \mapsto iT_\pm$ ([64]), que implica $\epsilon \mapsto -\epsilon$. A escolha $\epsilon = 1$ nos dará o $\mathfrak{su}(2)$, e $\epsilon = -1$ o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Sendo assim, escrevamos a nova forma que daremos às relações de comutação.

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm; \quad [T_+, T_-] = \epsilon 2T_3 \quad (\text{C.1.1})$$

Seja $|m\rangle$ um autovetor de T_3 de autovalor m : $T_3 |m\rangle = m|m\rangle$. Atuando com $T_3 T_\pm$ em $|m\rangle$, encontramos uma nova equação de autovalor

$$T_3 T_\pm |m\rangle = (T_\pm T_3 + [T_3, T_\pm]) |m\rangle = (m \pm 1) T_\pm |m\rangle \quad (\text{C.1.2})$$

O que significa que $T_\pm |m\rangle$ é proporcional ao estado $|m \pm 1\rangle$. Em mecânica quântica (não podemos nos distanciar das aplicações que pretendemos), utilizam-se operadores hermitianos para que os autovalores sejam reais e, conseqüentemente, tenham significado físico direto. Dado que $T_\pm^\dagger = -T_\mp$ para o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ na representação matricial, vamos apenas impor que $T_\pm^\dagger \equiv T_\mp$. Todos os outros membros já são hermitianos, e isso nos permite escrever

$$\begin{aligned} T_+ |m\rangle &= t_{m+1} |m+1\rangle; \quad T_- |m\rangle = \tilde{t}_{m-1} |m-1\rangle \\ \Rightarrow \langle m+1 | T_+ |m\rangle^\dagger &= \langle m | T_- |m+1\rangle = \tilde{t}_m = t_{m+1}^* \end{aligned} \quad (\text{C.1.3})$$

A última igualdade em C.1.3 vincula os coeficientes das duas raízes. Levando isto em conta, juntamente com a álgebra C.1.1, podemos obter uma relação recursiva para os coeficientes:

$$\begin{aligned} \langle m | 2\epsilon T_3 |m\rangle &= \langle m | [T_+, T_-] |m\rangle = \langle m | T_+ T_- - T_- T_+ |m\rangle = \tilde{t}_{m-1} t_m - t_{m+1} \tilde{t}_m \\ &= |t_m|^2 - |t_{m+1}|^2 = 2\epsilon m \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

Nas representações de peso mínimo, admi-se que exista um estado, que vamos designar por $|\lambda\rangle$, tal que $\lambda \leq m \forall m$, no qual a aplicação das raízes negativas retornam autovalor nulo

$$T_- |\lambda\rangle = \tilde{t}_{\lambda-1} |\lambda-1\rangle = t_\lambda^* |\lambda-1\rangle = 0 \Rightarrow t_\lambda^* = 0 = t_\lambda \quad (\text{C.1.5})$$

com $T_3 |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$. Substituindo este resultado na relação recursiva C.1.4, encontraremos os coeficientes t_m .

$$\begin{aligned}
|t_{\lambda+1}|^2 &= |t_\lambda|^2 - \epsilon 2\lambda = -\epsilon 2\lambda \\
|t_{\lambda+2}|^2 &= |t_{\lambda+1}|^2 - \epsilon 2(\lambda+1) = -\epsilon 2\lambda - \epsilon 2(\lambda+1) \\
&\dots \\
|t_{\lambda+k}|^2 &= |t_{\lambda+k-1}|^2 - \epsilon 2(\lambda+k-1) = -\epsilon 2 \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda+j) = -\epsilon 2 \left(\frac{(\lambda) + (\lambda+k-1)}{2} \right) k \\
\Rightarrow |t_{\lambda+k}|^2 &= -\epsilon (2\lambda+k-1)k \geq 0
\end{aligned} \tag{C.1.6}$$

Tratemos primeiro do caso do $\mathfrak{su}(2)$, com $\epsilon = 1$. Para o menor valor de k , $k_{\min} = 1$, temos que $-2\lambda \geq 0$, e $\lambda \leq 0$. Como λ é negativo ou nulo, existe um limite superior para k , k_{\max} , de modo que a relação $-2\lambda - k^2 + k \geq 0$ não implique coeficientes de norma negativa.

$$\begin{aligned}
T_+ |\lambda + k_{\max}\rangle &= t_{\lambda+k_{\max}+1} |\lambda + k_{\max} + 1\rangle = 0 \\
\Rightarrow |t_{\lambda+k_{\max}+1}|^2 &= -[2\lambda + (k_{\max} + 1) - 1](k_{\max} + 1) = -(2\lambda + k_{\max})(k_{\max} + 1) = 0 \\
\Rightarrow k_{\max} &= -2\lambda
\end{aligned} \tag{C.1.7}$$

Como resultado, λ além de negativo ou nulo, é inteiro ou semi-inteiro e, incluindo o estado de peso mínimo $|\lambda\rangle$, haverá um total de $-2\lambda + 1$ estados possíveis, para a representação λ do $\mathfrak{su}(2)$ que podem ser dispostos no diagrama de estados C.1, chamado de diagrama de peso para o caso das álgebras $\mathfrak{su}(n)$. A dimensão da representação é o número de estados que ela contém; no presente caso, $-2\lambda + 1$.

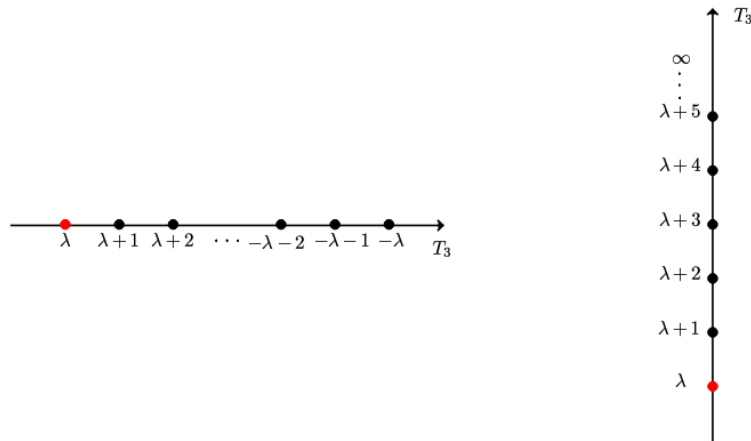


Figura C.1: Diagramas de estado para $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Considerando o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, com $\epsilon = -1$ em C.1.6, para o menor valor de k , $k_{\min} = 1$, temos que $\lambda \geq 0$. λ pode assumir qualquer valor real positivo ou zero. Como não existe um limite superior para k , já que $(2\lambda + k - 1)k$ nunca implica coeficientes de norma negativa, a dimensão da representação é infinita. Existem infinitos estados permitidos ao sistema, e o diagrama que os dispõe é conhecido como torre de estados.

Sendo $m = \lambda + k$ e fazendo a fase de t_m igual a 0 encontramos os coeficientes para T_\pm .

$$\begin{aligned}
T_+ |m\rangle &= T_+ |\lambda + k\rangle = t_{\lambda+k+1} |\lambda + k + 1\rangle = \sqrt{-\epsilon(2\lambda + k)(k + 1)} |\lambda + k + 1\rangle \\
\Rightarrow T_+ |m\rangle &= \sqrt{-\epsilon(m + \lambda)(m + 1 - \lambda)} |m + 1\rangle \\
\\
T_- |m\rangle &= T_- |\lambda + k\rangle = t_{\lambda+k} |\lambda + k - 1\rangle = \sqrt{-\epsilon(2\lambda + k - 1)k} |\lambda + k - 1\rangle \\
\Rightarrow T_- |m\rangle &= \sqrt{-\epsilon(m - \lambda)(m - 1 + \lambda)} |m - 1\rangle
\end{aligned} \tag{C.1.8}$$

Basta substituir $\epsilon = 1$ para o $\mathfrak{su}(2)$ ou $\epsilon = -1$ para o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ nos coeficientes C.1.8. Para calcular a métrica das álgebras, utilizamos B.7.3 e B.6.3, de modo que $g^{ij} = \text{diag}(1, 1, \epsilon)$. O operador de Casimir T^2 é encontrado contraindo a métrica com os geradores.

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + \epsilon T_3^2 = (T_1 + iT_2)(T_1 - iT_2) + i[T_1, T_2] + \epsilon T_3^2 = T_+ T_- - \epsilon T_3 + \epsilon T_3^2 \tag{C.1.9}$$

De C.1.1 vemos que o operador de Casimir pode assumir a forma

$$T^2 = \frac{1}{2}(T_+ T_- + T_- T_+) + \epsilon T_3^2 \tag{C.1.10}$$

Podemos aplicar o operador de Casimir em qualquer estado para saber de qual representação estamos tratando. Utilizando C.1.8, encontramos a equação de autovalor para o Casimir.

$$T^2 |m\rangle = \lambda(\lambda - 1) |m\rangle, \quad \epsilon = 1 \tag{C.1.11}$$

$$T^2 |m\rangle = (\lambda(\lambda - 1) - 2m^2) |m\rangle, \quad \epsilon = -1 \tag{C.1.12}$$

Vemos que o autovalor do Casimir do $\mathfrak{su}(2)$ é positivo definido, enquanto o autovalor para o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não o é. Assim, o Casimir pode nos dizer se tratamos do $\mathfrak{su}(2)$ ou do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, bem como a representação.

C.2 Representações de peso mínimo do $\mathfrak{su}(2, 1)$

Consideremos a álgebra $\mathfrak{su}(2, 1)$ na base mostrada em B.10.7

Na figura C.2, o diagrama das raízes ajuda a visualizar as possíveis transições de estado.

Atentando às relações de comutação consegue-se divisar uma subálgebra $\mathfrak{su}(2)$:

$$[T_+, T_-] = 2T_1; \quad [T_1, T_\pm] = \pm T_\pm \tag{C.2.1}$$

Isto significa que o $\mathfrak{su}(2, 1)$ contém o $\mathfrak{su}(2)$ como subálgebra. Além disso, definindo

$$U_1 \equiv \frac{1}{2}(T_1 + \sqrt{3}T_2); \quad U_2 \equiv \frac{1}{2}(T_2 - \sqrt{3}T_1) \tag{C.2.2}$$

identificamos uma subálgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

$$[U_+, U_-] = -2U_1; \quad [U_1, U_\pm] = \pm U_\pm \tag{C.2.3}$$

Vemos então que o $\mathfrak{su}(2, 1)$, além do $\mathfrak{su}(2)$, contém o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ como subálgebra. Podemos, igualmente, definir

$$V_1 \equiv \frac{1}{2}(\sqrt{3}T_2 - T_1); \quad V_2 \equiv -\frac{1}{2}(\sqrt{3}T_1 + T_2) \tag{C.2.4}$$

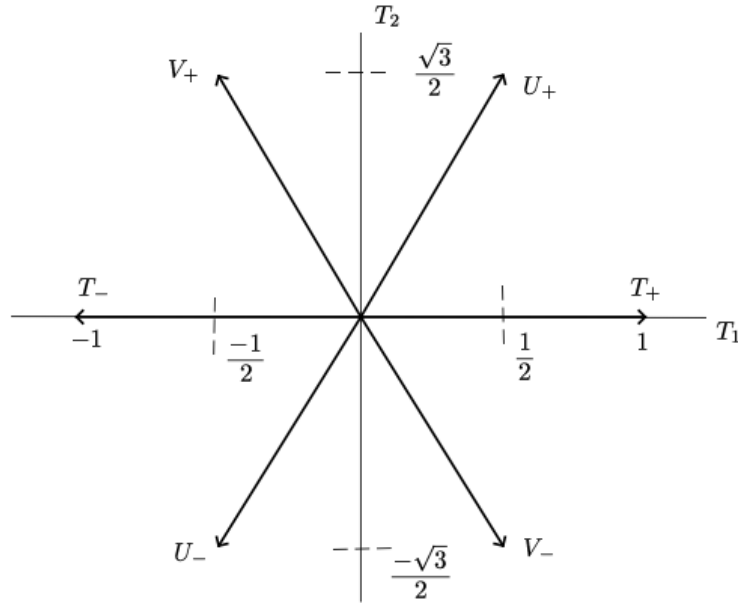


Figura C.2: Diagrama de raízes para $\mathfrak{su}(2, 1)$.

e obter outra subálgebra do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

$$[V_+, V_-] = -2V_1; \quad [V_1, V_\pm] = \pm V_\pm \quad (\text{C.2.5})$$

Isto não quer dizer que o $\mathfrak{su}(2, 1)$ contém o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{su}(2)$ como subálgebra¹, pois estas álgebras estão sobrepostas e não conseguimos que as relações de comutação necessárias apareçam ao mesmo tempo nas relações B.10.7, já que estamos considerando bases diferentes.

Para facilitar a obtenção de resultados com o que já conseguimos do $\mathfrak{su}(2)$ e do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, trabalharemos em três bases distintas, visando a isolar as três álgebras. Ao final, vamos relacionar as bases para concluir o raciocínio. Chamemo-las de bases T , U e V . As equações de autovalor para os membros diagonais de cada uma das subálgebras de Cartan na respectiva base são

$$\begin{aligned} T_1 |l_1, l_2\rangle_T &= l_1 |l_1, l_2\rangle_T; & T_2 |l_1, l_2\rangle_T &= l_2 |l_1, l_2\rangle_T \\ U_1 |m_1, m_2\rangle_U &= m_1 |m_1, m_2\rangle_U; & U_2 |m_1, m_2\rangle_U &= m_2 |m_1, m_2\rangle_U \\ V_1 |n_1, n_2\rangle_V &= n_1 |n_1, n_2\rangle_V; & V_2 |n_1, n_2\rangle_V &= n_2 |n_1, n_2\rangle_V \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

As bases T , U e V são relacionadas de acordo com B.3.3 usando $\theta = 60^\circ$ e $\theta = 120^\circ$ (Figura 5).

$$|l_1, l_2\rangle_T = \left| \frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2 \right\rangle_U = \left| -\frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}l_1 - \frac{1}{2}l_2 \right\rangle_V \quad (\text{C.2.7})$$

Nota-se que a mudança de base se dá através de rotações de 60° e 120° no espaço euclidiano bidimensional das raízes, e não no espaço de Hilbert, ou seja, apenas designamos o mesmo estado com um rótulo diferente. Impondo $U_\pm^\dagger = U_\mp$ e $V_\pm^\dagger = V_\mp$ da mesma forma que fizemos para o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, seja o peso mínimo $|\lambda_1, \lambda_2\rangle_T = |m_1, m_2\rangle_U = |n_1, n_2\rangle_V$ nas bases (rótulos) T , U e V , respectivamente. De C.1.8 conseguimos os coeficientes das raízes.

¹ Em primeiro lugar precisaríamos de ao menos 9 geradores independentes para tanto, enquanto só temos 8.

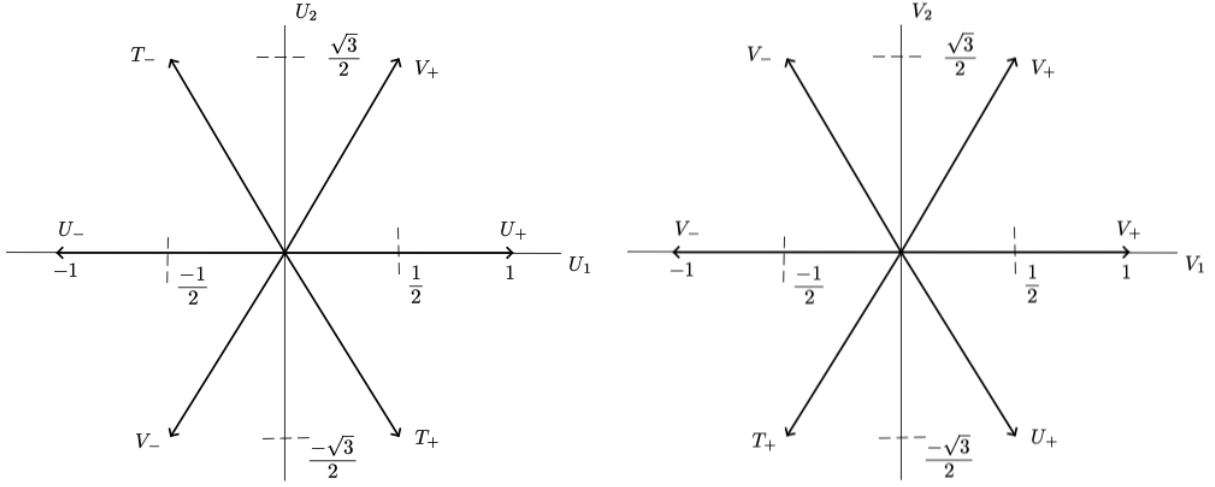


Figura C.3: Rotações no espaço das raízes.

$$T_{\pm}|\lambda_1, \lambda_2\rangle_T = 0 \Rightarrow T_{\pm} |l_1, l_2\rangle_T = \sqrt{-(l_1 \pm \lambda_1)(l_1 \pm 1 \mp \lambda_1)} |l_1 \pm 1, l_2\rangle_T \quad (\text{C.2.8})$$

$$U_{\pm}|m_1, m_2\rangle_U = 0 \Rightarrow U_{\pm} |m_1, m_2\rangle_U = \sqrt{(m_1 \pm \mu_1)(m_1 \pm 1 \mp \mu_1)} |m_1 \pm 1, m_2\rangle_U \quad (\text{C.2.9})$$

$$V_{\pm}|n_1, n_2\rangle_V = 0 \Rightarrow V_{\pm} |n_1, n_2\rangle_V = \sqrt{(n_1 \pm \nu_1)(n_1 \pm 1 \mp \nu_1)} |n_1 \pm 1, n_2\rangle_V \quad (\text{C.2.10})$$

O parâmetro λ_1 é inteiro negativo, semi-inteiro negativo ou zero, enquanto μ_1 e ν_1 podem ser reais positivos ou zero.

Usando os vínculos entre λ_1 , μ_1 e ν_1 fixamos o estado de peso mínimo:

$$\begin{aligned} |\lambda_1, \lambda_2\rangle_T &= \left| \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \right\rangle_U = |\mu_1, \mu_2\rangle_U \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \lambda_2 \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_1 \end{aligned} \quad (\text{C.2.11})$$

$$\begin{aligned} |\lambda_1, \lambda_2\rangle_T &= \left| -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \right\rangle_V = |\nu_1, \nu_2\rangle_V \Rightarrow \nu_1 = -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \lambda_2 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_1 \end{aligned} \quad (\text{C.2.12})$$

Como $-\lambda_1 \geq \lambda_1$ a condição sobre λ_2 é:

$$\lambda_2 \in \mathbb{R} \mid \lambda_2 \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_1 \quad (\text{C.2.13})$$

O fator $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de λ_1 provém da escala adotada para T_2 , e por isso não é um número relevante por si só. O peso mínimo estará num ponto do plano com $\theta \in [0^\circ, 60^\circ]$, no sentido anti-horário do eixo T_2 do diagrama de estados. Resta ainda mostrar os coeficientes das diferentes raízes numa só base. Por conveniência, será escolhida a base T :

Primeiro, operamos a mudança de base

$$U_+|l_1, l_2\rangle_T = U_+ \left| \frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2 \right\rangle_U \quad (\text{C.2.14})$$

Depois, utilizamos a equação de espalhamento na base U .

$$U_+|l_1, l_2\rangle_T = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2 + \mu_1 \right) \left(\frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2 + 1 - \mu_1 \right)} \left| \frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2 + 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2 \right\rangle_U \quad (\text{C.2.15})$$

Em seguida, operamos a mudança de base inversa, retornando a base original e substituímos os valores de rótulo do peso mínimo $\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \sqrt{3}\lambda_2)$.

$$U_+|l_1, l_2\rangle_T = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 \right) \left(\frac{1}{2}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}l_2 + 1 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 \right)} \quad (\text{C.2.16})$$

$$(\text{C.2.17})$$

$$\left| \frac{1}{4}l_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}l_2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}l_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}l_2, \frac{\sqrt{3}}{4}l_1 + \frac{3}{4}l_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}l_1 + \frac{1}{4}l_2 \right\rangle_T \quad (\text{C.2.18})$$

Finalmente, efetuam-se as somas de rótulo no interior do ket e rearranjam-se os termos do coeficiente.

$$U_+|l_1, l_2\rangle_T = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(l_1 + \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 + \lambda_2) \right) \left(\frac{1}{2}(l_1 - \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 - \lambda_2) + 1 \right)} \left| l_1 + \frac{1}{2}, l_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle_T \quad (\text{C.2.19})$$

O resultado para os coeficientes das demais raízes aparecem abaixo:

$$U_-|l_1, l_2\rangle_T = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(l_1 - \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 - \lambda_2) \right) \left(\frac{1}{2}(l_1 + \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 + \lambda_2) - 1 \right)} \left| l_1 - \frac{1}{2}, l_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle_T \quad (\text{C.2.20})$$

$$V_+|l_1, l_2\rangle_T = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}(l_1 + \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 + \lambda_2) \right) \left(-\frac{1}{2}(l_1 - \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 - \lambda_2) + 1 \right)} \left| l_1 - \frac{1}{2}, l_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle_T \quad (\text{C.2.21})$$

$$V_-|l_1, l_2\rangle_T = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}(l_1 - \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 - \lambda_2) \right) \left(-\frac{1}{2}(l_1 + \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 + \lambda_2) - 1 \right)} \left| l_1 + \frac{1}{2}, l_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle_T \quad (\text{C.2.22})$$

Agora podemos seguramente abandonar o subíndice T e trabalhar em uma só base. Examinando os coeficientes das raízes a partir do peso mínimo percebemos que os estados são simétricos em relação a T_2 (propriedade do $\mathfrak{su}(2)$), e que é possível uma aplicação infinita de U_+ e V_+ a partir do peso mínimo, sem nunca retornar coeficiente nulo (propriedade do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$). Para desenhar o diagrama de uma representação do $\mathfrak{su}(2, 1)$ no espaço dos estados, mostraremos como construir seu contorno; os estados possíveis serão todos os pontos, sob a ação das raízes, contidos pelo contorno.

1. $\lambda_1 \leq 0$ e $\lambda_2 \geq 0 \Rightarrow |\lambda_1, \lambda_2\rangle$ estará no segundo quadrante.
2. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \tan \theta \leq \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow |\lambda_1, \lambda_2\rangle$ estará em um ângulo $90^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ com o eixo T_1 .
3. Aplicando sucessivamente a raiz V_+ a $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$, geramos infinitos estados nessa direção.
4. Aplicando sucessivamente a raiz T_+ a $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$, nos deparamos eventualmente com $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$, fechando uma representação λ_1 do $\mathfrak{su}(2)$.
5. Aplicando sucessivamente a raiz U_+ a $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$, geramos infinitos estados nessa direção.

Na Figura C.4 está a torre de estados da representação $|\lambda_1, \lambda_2\rangle = |-\frac{3}{2}, 1\rangle$ onde os pontos são estados permitidos e as linhas indicam como os estados se conectam. Essa representação é possível porque $\lambda_2 = 1 \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

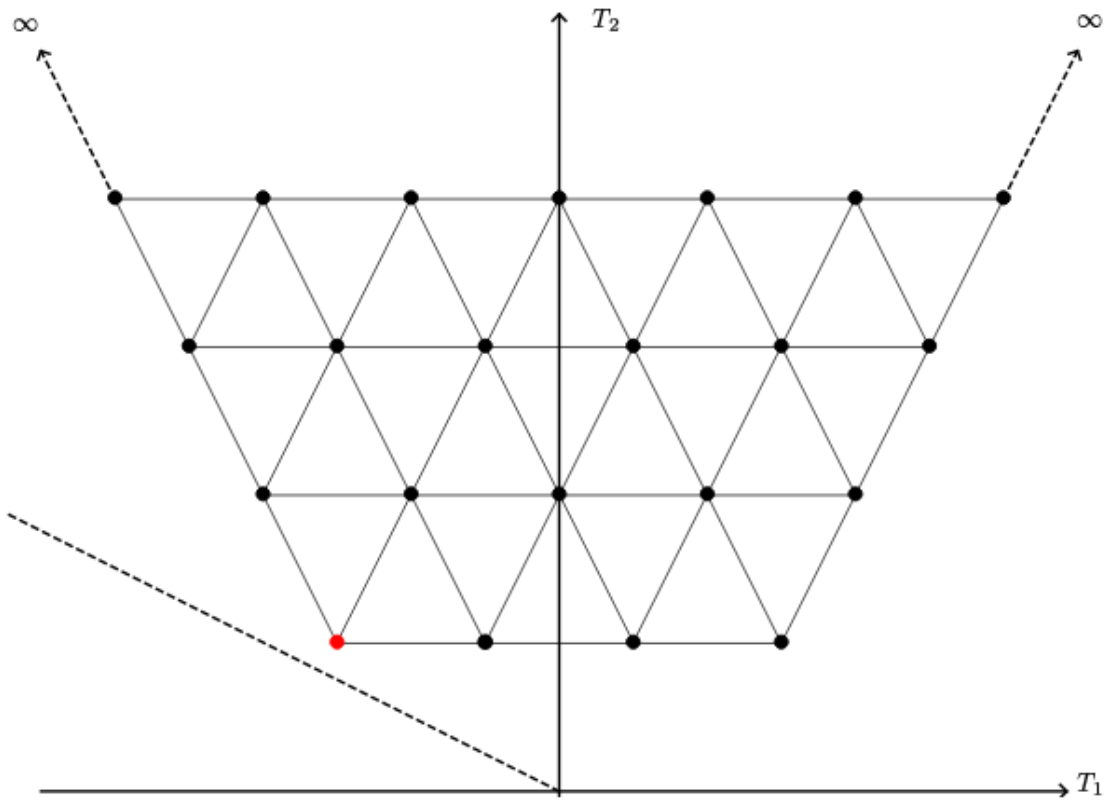


Figura C.4: Diagrama de estado para $\mathfrak{su}(2, 1)$ com representação de peso mínimo $|-\frac{3}{2}, 1\rangle$.

D Geradores de simetria através de operadores matriciais

Nesta seção nós vamos encontrar os geradores lineares para os casos $k = 0, 1, 2$ do sistema 5.1.2 usando o método matricial e estabelecer contato com o método de prolongamentos através do mapa 3.2.9.

D.1 Condições sobre os potenciais para geradores ímpares

Seja Ω o operador da equação de Schrödinger com potencial do tipo Calogero deformado por um potencial de oscilador (já estamos assumindo massas e frequências iguais).

$$\Omega = \Omega_1 e_1^1 + \Omega_2 e_2^2 = \left(\frac{i}{a} \partial_t + \partial_x^2 - \frac{r}{x^2} - \beta^2 x^2 \right) e_1^1 + \left(\frac{i}{a} \partial_t + \partial_x^2 - \frac{s}{x^2} - \beta^2 x^2 \right) e_2^2 \quad (\text{D.1.1})$$

Em primeira ordem, o operador Σ mais geral com entrada em e_2^1 tem a forma abaixo.

$$\Sigma = (\tau(t, x) \partial_t + \chi(t, x) \partial_x + \phi(t, x)) e_2^1 \quad (\text{D.1.2})$$

Da expressão 1.5.5 para operadores lineares, sabemos que o operador Σ é um gerador de simetria do sistema 5.1.2 se

$$\Omega \Sigma = \tilde{\Sigma} \Omega = (\Sigma - \mathcal{R}) \Omega \Rightarrow [\Sigma, \Omega] = \mathcal{R} \Omega \quad (\text{D.1.3})$$

com \mathcal{R} um operador linear. Calculemos o operador \mathcal{R} (fazendo $\dot{f}(t, x) = \partial f / \partial t$ e $f'(t, x) = \partial f / \partial x$).

$$\begin{aligned} [\Sigma, \Omega] &= (\Sigma \Omega_2 - \Omega_1 \Sigma) e_2^1 \\ &= - \left(\left(\frac{i}{a} \dot{\tau} + \tau'' + \frac{(s-r)}{x^2} \tau \right) \partial_t + \left(\frac{i}{a} \dot{\chi} + \chi'' + \frac{(s-r)}{x^2} \chi + 2\phi' \right) \partial_x \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{i}{a} \dot{\phi} + \phi'' + \frac{(s-r)}{x^2} \phi + 2 \left(-\frac{s}{x^3} + \beta^2 x \right) \chi \right) + 2\tau' \partial_x \partial_t + 2\chi' \partial_x^2 \right) e_2^1 \end{aligned} \quad (\text{D.1.4})$$

É fácil notar que para obtermos a expressão D.1.3 precisamos satisfazer as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(t) \\ 2\chi' &= \dot{\tau} - ia \frac{(s-r)}{x^2} \tau \\ \frac{i}{a} \dot{\chi} + \chi'' + \frac{(s-r)}{x^2} \chi + 2\phi' &= 0 \\ \frac{i}{a} \dot{\phi} + \phi'' + \frac{(s-r)}{x^2} \phi + 2 \left(-\frac{s}{x^3} + \beta^2 x \right) \chi &= -2\chi' \left(\frac{s}{x^2} + \beta^2 x^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

Com isso, $\mathcal{R} = -2\chi' e_2^1$. Antes de resolver essas equações, vamos mostrar que podemos reobtê-las através da substituição de variáveis dependentes. Temos que anular os coeficientes dos

operadores de derivadas em D.1.4 para encontrar os geradores; nos sentimos tentados a fazer $\chi' = 0$, pois operadores (nesse caso, ∂_x^2) não têm “valores” para serem tratados como variáveis. Mas nós vimos em 2 que é justamente essa a abordagem do método de prolongamentos, e a equação define a dependência entre as variáveis. Sendo assim, poderíamos pensar na transformação

$$[\Sigma, \Omega] = \dots - 2\chi' \partial_x^2 e_1^1 \mapsto \dots - 2\chi' u_2^1 \partial_{u_2} \quad (\text{D.1.6})$$

Se fizermos isso, não obteremos um gerador de simetria. Precisamos do mapa σ , definido em 3.2.9. Vamos definir $\sigma(\Sigma, \Omega) = (\bar{\Sigma}, \bar{\Omega})$.

$$\begin{aligned} \sigma([\Sigma, \Omega]) &= [\bar{\Sigma}^T, \bar{\Omega}^T]^T = (\dots - 2\chi' u_2^2 \partial_{u_1})^T = \left(\dots - 2\chi' \left(-\frac{i}{a} u_t^2 + \left(\frac{s}{x^2} + \beta^2 x^2 \right) u^2 \right) \partial_{u_1} \right)^T \\ &= \sigma \left(\dots - 2\chi' \left(-\frac{i}{a} \partial_t + \left(\frac{s}{x^2} + \beta^2 x^2 \right) \right) e_1^2 \right)^T = \sigma \left(\dots - 2\chi' \left(-\frac{i}{a} \partial_t + \left(\frac{s}{x^2} + \beta^2 x^2 \right) \right) e_2^1 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1.7})$$

Usando $\sigma^{-1}\sigma = Id$ nós temos o vínculo correto. Como escolhemos substituir ∂_x^2 , o operador $\partial_x \partial_t$ é independente, e seu coeficiente pode ser anulado.

$$2\tau' \partial_x \partial_t = 0 \Rightarrow \tau = \tau(t) \quad (\text{D.1.8})$$

Substituindo o vínculo obtido em D.1.7, encontramos uma expressão diferente na comutação D.1.4, que leva exatamente às equações D.1.5.

$$\begin{aligned} 0 = [\Sigma, \Omega] &= - \left(\left(\frac{i}{a} \dot{\tau} + \frac{(s-r)}{x^2} \tau - 2\frac{i}{a} \chi' \right) \partial_t + \left(\frac{i}{a} \dot{\chi} + \chi'' + \frac{(s-r)}{x^2} \chi + 2\phi' \right) \partial_x \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{i}{a} \dot{\phi} + \phi'' + \frac{(s-r)}{x^2} \phi + 2 \left(-\frac{s}{x^3} + \beta^2 x \right) \chi + 2 \left(\frac{s}{x^2} + \beta^2 x^2 \right) \chi' \right) \right) e_2^1 \end{aligned} \quad (\text{D.1.9})$$

Em seguida, fixamos completamente a dependência do gerador em x anulando os coeficientes de ∂_t e ∂_x em D.1.9.

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} \dot{\tau} x + ia \frac{(s-r)}{x} \tau + \alpha(t) \\ \phi &= -\frac{i}{8a} \ddot{\tau} x^2 + \frac{i}{8a} ((s-r)^2 + 2(s-r)) \frac{\tau}{x^2} - \frac{i}{2a} \dot{\alpha} x + \frac{(s-r)}{2x} \alpha + \gamma(t) \end{aligned} \quad (\text{D.1.10})$$

As funções χ e ϕ em D.1.10 são apenas as soluções das equações D.1.5. Definindo $g \equiv s-r$, temos de resolver a equação para o monômio 1 em D.1.9; após substituir as expressões D.1.10 para χ e ϕ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{8a^2} \ddot{\tau} + 2\beta^2 \dot{\tau} \right) x^2 + \left(\frac{1}{2a^2} \ddot{\alpha} + 2\beta^2 \alpha \right) x + \frac{i}{a} \left(\dot{\gamma} - \frac{(g+2)}{8} \ddot{\tau} \right) \\ &\quad + g \left(\gamma - \frac{(g+2)}{8} \dot{\tau} \right) \frac{1}{x^2} + (g(g+2) - 4s) \frac{\alpha}{2x^3} + ia \frac{g}{8} ((g+2)(g+6) - 16s) \frac{\tau}{x^4} \end{aligned} \quad (\text{D.1.11})$$

De [D.1.11](#), vemos que para que Σ seja diferente de zero, temos que escolher uma de três condições para impor sobre r e s .

$$\tau \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} s = r \\ \text{ou} \\ r = \frac{1}{16}(g-2)(g-6) \quad e \quad s = \frac{1}{16}(g+2)(g+6) \end{cases} \quad (\text{D.1.12})$$

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4}g(g-2) \quad e \quad s = \frac{1}{4}g(g+2) \quad (\text{D.1.13})$$

Denominando caso 0 aquele em que $s = r$ e casos 1 e 2 a condição em [D.1.13](#) e a segunda condição em [D.1.12](#), respectivamente, encontramos exatamente as condições sobre os potenciais para $k = 0, 1, 2$ em [5.1.6](#). No resto desta seção, apenas listamos os geradores.

D.2 Geradores para $\beta = 0$

- Caso 0

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(0)} &= \left(t^2 \partial_t + tx \partial_x + \frac{t}{2} - \frac{ix^2}{4a} \right) e_2^1 \\ \Sigma_2^{(0)} &= \left(t \partial_t + \frac{x}{2} \partial_x \right) e_2^1 \\ \Sigma_3^{(0)} &= \partial_t e_2^1 \\ \Sigma_4^{(0)} &= e_2^1 \end{aligned} \quad (\text{D.2.1})$$

- Caso 1

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(1)} &= \left(t \partial_x + \frac{g_1 t}{2x} - \frac{ix}{2a} \right) e_2^1 \\ \Sigma_2^{(1)} &= \left(\partial_x + \frac{g_1}{x} \right) e_2^1 \end{aligned} \quad (\text{D.2.2})$$

- Caso 2

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(2)} &= \left(t^2 \partial_t + \left(tx + \frac{ia g_2 t^2}{2x} \right) \partial_x + (g_2 + 2) \frac{t}{4} + ia g_2 (g_2 + 2) \frac{t^2}{8x^2} - 2 \frac{ix^2}{a} \right) e_2^1 \\ \Sigma_2^{(2)} &= \left(2t \partial_t + \left(x + \frac{ia g_2 t}{x} \right) \partial_x + \frac{(g_2 + 2)}{4} + ia g_2 (g_2 + 2) \frac{t}{4x^2} \right) e_2^1 \\ \Sigma_3^{(2)} &= \left(2 \partial_t + \frac{ia g_2}{x} \partial_x + ia \frac{g_2 (g_2 + 2)}{4x^2} \right) e_2^1 \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

D.3 Geradores para $\beta \neq 0$

- Caso 0

$$\begin{aligned}\Sigma_1^{(0)} &= e^{4ia\beta t} \left(\frac{1}{4ia\beta} \partial_t + \frac{x}{2} \partial_x + \frac{\beta x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) e_2^1 \\ \Sigma_2^{(0)} &= e^{-4ia\beta t} \left(\frac{-1}{4ia\beta} \partial_t + \frac{x}{2} \partial_x - \frac{\beta x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) e_2^1 \\ \Sigma_3^{(0)} &= \partial_t e_2^1 \\ \Sigma_4^{(0)} &= e_2^1\end{aligned}\tag{D.3.1}$$

- Caso 1

$$\begin{aligned}\Sigma_1^{(1)} &= e^{2ia\beta t} \left(\partial_x + \beta x + \frac{g_1}{2x} \right) e_2^1 \\ \Sigma_2^{(1)} &= e^{-2ia\beta t} \left(\partial_x - \beta x + \frac{g_1}{2x} \right) e_2^1\end{aligned}\tag{D.3.2}$$

- Caso 2

$$\begin{aligned}\Sigma_1^{(2)} &= e^{4ia\beta t} \left(\frac{1}{4ia\beta} \partial_t + \left(\frac{x}{2} + \frac{g_2}{8\beta x} \right) \partial_x + \frac{4\beta x^2}{2} + \frac{g_2 + 2}{8} + \frac{g_2(g_2 + 2)}{32\beta x^2} \right) e_2^1 \\ \Sigma_2^{(2)} &= e^{-4ia\beta t} \left(\frac{-1}{4ia\beta} \partial_t + \left(\frac{x}{2} - \frac{g_2}{8\beta x} \right) \partial_x - \frac{4\beta x^2}{2} + \frac{g_2 + 2}{8} - \frac{g_2(g_2 + 2)}{32\beta x^2} \right) e_2^1 \\ \Sigma_3^{(2)} &= \left(\frac{1}{4ia} \partial_t + \frac{g_2}{8x} \partial_x + \frac{g_2(g_2 + 2)}{32x^2} \right) e_2^1\end{aligned}\tag{D.3.3}$$

E Simetrias dos modelos de Calogero puro e deformado - Implementação no software Mathematica 12.1

Nesta seção vamos fazer uma ponte entre a tese e a implementação no software. A pasta com os arquivos em formato .nb e .pdf podem ser vistos ou baixados no link [E.0.1](#). A documentação da linguagem do programa pode ser encontrada em <https://reference.wolfram.com/language/>. O arquivo é totalmente auto-contido e não requer grande capacidade de processamento. Não garantimos que a pasta permanecerá disponível depois da defesa da tese. Solicitações, dúvidas e sugestões devem ser enviadas para alexanderkopernik@gmail.com.

$$\text{https://www.dropbox.com/sh/6zaf8vy5do85aof/AAAFna6XPwf2CR_BgBKEnHSa?dl=0} \quad (\text{E.0.1})$$

E.1 Campos vetoriais lineares

Um padrão comum será iniciarmos uma subseção por “Definições”. Nelas estabelecemos os elementos principais que vamos usar ao longo da seção. Definimos os operadores de derivada total, a notação para as variáveis de jato e algumas convenções para manipularmos as expressões. Usamos u_1 e u_2 para u^1 e u^2 , respectivamente. Os símbolos ∂ e D são protegidos, e em seu lugar usamos d ; também não conseguimos ordená-lo à direita, e quase sempre ele aparece à esquerda, mas isso não afeta os cálculos. Nossos campos têm de ser convertidos do seguinte modo:

$$d_{u\alpha} f(x, t) \mapsto u_{J,K}^\beta f(x, t) u_{J,K}^\beta \partial_{u^\alpha} \quad (\text{E.1.1})$$

com J denotando o número de derivadas totais em x e K o número de derivadas em t . Vamos substituir derivadas totais em t sempre que aparecerem nas variáveis de jatos usando a definição da equação de Schrödinger, por isso a definição de prolongamento só exige somar o índice J em x e uma única soma em t , em primeira ordem, pois ainda precisamos prolongar a equação de Schrödinger. As equações para os diferentes potenciais, bem como os vínculos das mesmas a serem substituídos, são definidos separadamente.

E.2 Geradores de simetria para o potencial puro

Começamos por definir o gerador linear Θ_{01_0} de até terceira ordem para atuar apenas na equação Δ_1 . Os demais geradores são conseguidos com o mapa $(g \mapsto -g, u^1 \mapsto u^2, u^2 \mapsto u^1)$. A principal dificuldade da implementação está no uso otimizado da função `DSolve`. Ela não reconhece apropriadamente variáveis independentes, o que nos obriga a fragmentar a solução em diversas etapas. Em [In\[59\]](#) começam as soluções algébricas em r e s , que dão o vínculo entre ambas para os diferentes casos. Coletamos todas as soluções parciais em Θ_{01_5} e mostramos que essa combinação dos geradores linearmente independentes é solução da equação de prolongamento em [In\[90\]](#) – [In\[94\]](#). O procedimento para verificar a validade de uma equação é usando o sinal `==` entre duas quantidades, que retorna `True`, `False` ou uma expressão quando não se puder afirmar. A substituição $r \rightarrow \frac{\rho^2 - 1}{4}$ é para facilitar a convenção da quantidade $b_\pm^{(0)}$ em [6](#), que facilita escrever as funções de onda para todos os casos. Os geradores devem ser traduzidos do seguinte modo:

$$X_{\alpha k, d} \mapsto X_d^{\alpha, (k)} \quad X_{k, d} \mapsto X_d^{(k)} \quad (\text{E.2.1})$$

E.3 Álgebra de geradores para o potencial puro

Definimos as operações binárias como em 3. Mostramos que alguns geradores são apenas o produto de outros, como afirmado em 5, e depois os desprezamos. Mostramos que a combinação linear dos geradores fortemente independentes satisfaz a equação de prolongamento na nova base $(X^1\partial_{u^1}, X^2\partial_{u^2}) \mapsto X^1\partial_{u^1} + X^2\partial_{u^2}$. Encontramos a álgebra como em 6.

E.4 Geradores de simetria para o potencial deformado

Procedemos da mesma forma que em E.2. A única diferença sendo que agora temos que impor a condição $\gamma = \beta$ em In[246] – In[248], de que as frequências para as duas equações do potencial deformado devem ser as mesmas. As condições sobre r e s são as mesmas que aquelas para o potencial puro, e isso está mostrado em In[261].

E.5 Mudança de base e transformações de similaridade

Aqui começamos por proceder como em E.3. As transformações de similaridade são definidas em In[369] – In[375], com alguns arranjos para facilitar a visualização dos geradores transformados. A função $\bar{h}(t)$ em 5.4.2 é ímpar, e seus coeficientes de até 50ª ordem podem ser vistos em In[376] e verificados em In[379]. A transformação dos campos está em In[380] – In[397] e é a mesma de 5.

E.6 Álgebra de geradores para o potencial deformado

Antes de chegar na álgebra de geradores, definimos as funções de onda. Elas foram simplificadas em funções hipergeométricas manualmente e os detalhes são trabalhosos. Em vez disso, oferecemos a verificação de que elas são soluções de ambas as equações para todos os bósons e férmions com qualquer k e g_k .

Começamos por definir o polinômio 6.1.5 em In[399] e sua expansão em série em In[400], verificando os coeficientes em In[401]. Usamos os coeficientes para demonstrar 6.1.15 em In[404]. De In[406] – In[409], construímos as funções de onda. Elas devem ser traduzidas por:

$$\psi_{k,n,\pm 1} \mapsto \psi_{n,\pm}^{(k)} \quad \phi_{k,n,\pm 1} \mapsto \phi_{n,\pm}^{(k)} \quad (\text{E.6.1})$$

As condições sobre r e s em In[410] para qualquer k serão demonstradas em E.7; porém, aproveitamos para provar que as funções de onda satisfazem a equação para qualquer k , sendo esta definida em In[411] para $k = 0$ e em In[412] para $k > 0$. As verificações estão em In[413] – In[420]. As comutações entre geradores lineares estão em In[422] – In[476]. A definição dos geradores de terceira ordem para $k = 1$ como em 7 se encontram em In[477] – In[480]; já a comparação das duas comutações que distinguem por constantes em 7.1.5 pode ser vista nas saídas em In[481] – In[484]. As comutações com funções de onda estão em In[485] – In[506]. Esse trecho do arquivo é o que mais força o processador, por isso só foram calculadas as comutações para $n = 0, 1, 2, 3$. É possível, no entanto, acessar o arquivo .nb e fazer a verificação para qualquer n . Algumas comutações com Z_- não foram completamente simplificadas, mas é fácil ver nas saídas que a equação é satisfeita.

E.7 Característica do gerador de peso mínimo para o caso k

A definição do polinômio 8.1.12 está em In[508] – In[518]. Ela é complicada o suficiente para não a detalharmos aqui. Caso haja interesse, deve-se contatar o e-mail no início do apêndice.

A verificação de 8.1.14 está em In[519]. Esta não é uma prova rigorosa, mas acreditamos ser suficiente para convencer. A verificação das condições sobre r e s para qualquer $k \in [1, 10]$ está em In[520]. Em In[521] definimos o gerador usando o polinômio 8.1.12 e em In[522] mostramos que ele é um gerador de simetria do potencial puro para $k = 1, \dots, 10$.

Referências

- [1] D. J. Saunders. *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge University Press, 1989.
- [2] Ivan Kolar, Peter W. Michor, and Jan Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer, 1993.
- [3] L. Maggiarotti and G. Sardanashvily. *Connections in Classical and Quantum Field Theory*. World Scientific, 2000.
- [4] V. I. Fushchich and A. G. Nikitin. *Symmetries of Equations of Quantum Mechanics*. Al-lerton Press, 1994.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Pergamon Press, third edition, 1991.
- [6] Howard Eves. *An Introduction to the History of Mathematics*. Cengage Learning, sixth edition, 1990.
- [7] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, third edition, 2011.
- [8] Francisco Caruso e Vitor Oguri. *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*. Elsevier, 2006.
- [9] Anthony Zee. *Fearful Symmetry: The Search of Beauty in Physics*. Princeton University Press, 2007.
- [10] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, second edition, 1993.
- [11] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2017.
- [12] Alexander Kopernik Guerreiro. Representações de peso mínimo de álgebras de Lie aplicadas à mecânica quântica, Agosto 2018. Tese de bacharelado.
- [13] Francesco Toppan. Symmetries of the Schrödinger equation and algebra/superalgebra duality. In *Journal of Physics Conference Series*, volume 597 of *Journal of Physics Conference Series*, page 012071, April 2015.
- [14] F. Calogero. Solution of a three-body problem in one-dimension. *J. Math. Phys.*, 10:2191–2196, 1969.
- [15] Vittorio de Alfaro, S. Fubini, and G. Furlan. Conformal Invariance in Quantum Mechanics. *Nuovo Cim. A*, 34:569, 1976.
- [16] Francesco Toppan and Mauricio Valenzuela. Higher spin symmetries and deformed schrödinger algebra in conformal mechanics. *Advances in Mathematical Physics*, 2018, 05 2017.
- [17] Jürgen Fuchs. *Affine Lie Algebras and Quantum Groups: An Introduction with Applications in Conformal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, second edition, 1992.

- [18] Christian Fronsdal. Massless Fields with Integer Spin. *Phys. Rev. D*, 18:3624, 1978.
- [19] E.S. Fradkin and Mikhail A. Vasiliev. Candidate to the Role of Higher Spin Symmetry. *Annals Phys.*, 177:63, 1987.
- [20] E.S. Fradkin and Mikhail A. Vasiliev. Cubic Interaction in Extended Theories of Massless Higher Spin Fields. *Nucl. Phys. B*, 291:141–171, 1987.
- [21] E.S. Fradkin and Mikhail A. Vasiliev. On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields. *Phys. Lett. B*, 189:89–95, 1987.
- [22] M. A. Vasiliev. Higher Spin Algebras and Quantization on the Sphere and Hyperboloid. *International Journal of Modern Physics A*, 6(7):1115–1135, January 1991.
- [23] Nicolas Boulanger, Per Sundell, and Mauricio Valenzuela. Gravitational and gauge couplings in chern-simons fractional spin gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2016, 04 2015.
- [24] Nicolas Boulanger, Per Sundell, and Mauricio Valenzuela. Three-dimensional fractional-spin gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2014, 12 2013.
- [25] Sadri Hassani. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer, second edition, 2013.
- [26] Yvonne Choquet-Bruhat and Cecile DeWitt-Morette. *Analysis, Manifolds and Physics - Part I: Basics*. North Holland, revised edition, 1982.
- [27] Vladimir G. Ivancevic and Tijana T. Ivancevic. *Applied Differential Geometry: A Modern Introduction*. World Scientific, 2007.
- [28] Florian Scheck. *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Springer, sixth edition, 2018.
- [29] Florian Scheck. *Quantum Physics*. Springer, second edition, 2013.
- [30] Célestin Kurujyibwami, Peter Basarab-Horwath, and Roman O. Popovych. *Algebraic Method for Group Classification of (1+1)-Dimensional Linear Schrödinger Equations*. World Scientific Press, second edition, 2000.
- [31] N. Aizawa, Z. Kuznetsova, and F. Toppan. Invariant partial differential equations of conformal Galilei algebra as deformations: cryptohermiticity and contractions. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2016(8), 08 2016. 083A01.
- [32] U. Niederer. The maximal kinematical invariance group of the free Schrodinger equation. *Helv. Phys. Acta*, 45:802–810, 1972.
- [33] U. Niederer. The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator. *Helv. Phys. Acta*, 46:191–200, 1973.
- [34] U. Niederer. The maximal kinematical invariance groups of Schrödinger equations with arbitrary potentials. *Helv. Phys. Acta*, 47:167–172, 1974.
- [35] Joshua D. Qualls. Lectures on Conformal Field Theory. *arXiv e-prints*, page arXiv:1511.04074, November 2015.

- [36] Silvio R. A. Salinas. *Introduction to Statistical Physics*. Springer, 2001.
- [37] Christian Duval and Peter Horvathy. Non-relativistic conformal symmetries and Newton–Cartan structures. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42:465206, 10 2009.
- [38] Claude Roger and Jérémie Unterberger. The Schrödinger-Virasoro Lie group and algebra: from geometry to representation theory. working paper or preprint, March 2006.
- [39] Temple He, Vyacheslav Lysov, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. Bms supertranslations and Weinberg’s soft graviton theorem. *Journal of High Energy Physics*, 2015(5):151, May 2015.
- [40] Glenn Barnich and Cedric Troessaert. Symmetries of asymptotically flat 4 dimensional spacetimes at null infinity revisited. *Phys. Rev. Lett.*, 105:111103, 2010.
- [41] Blagoje Oblak. *BMS Particles in Three Dimensions*. Springer, 2017.
- [42] Ian M. Musson. *Lie Superalgebras and Enveloping Algebras*. American Mathematical Society, 2012.
- [43] L. Frappat and A. Sciarrino. *Dictionary on Lie Algebras and Lie Superalgebras*. Academic Press, 2000.
- [44] Asim Gangopadhyaya, Jeffrey Mellow, and Constantin Rasinariu. *Supersymmetric Quantum Mechanics: An Introduction*. World Scientific Press, second edition, 2000.
- [45] I. Cunha, Nicolaus Linneu Holanda, and Francesco Toppan. From worldline to quantum superconformal mechanics with/without oscillatorial terms: $d(2, 1; \alpha)$ and $sl(2|1)$ models. *Physical Review D*, 96, 10 2016.
- [46] N. Aizawa, I. E. Cunha, Z. Kuznetsova, and F. Toppan. On the spectrum-generating superalgebras of the deformed one-dimensional quantum oscillators. *Journal of Mathematical Physics*, 60:042102, 2019.
- [47] Hitoshi Miyazaki and Izumi Tsutsui. Quantum Tunneling and Caustics under Inverse Square Potential. *Annals Phys.*, 299:78, 2002.
- [48] L. Feher, Izumi Tsutsui, and Tamás Fülöp. Inequivalent quantizations of the three-particle Calogero model constructed by separation of variables. *Nuclear Physics B*, 715, 12 2004.
- [49] Eugene P. Wigner. Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations? *Phys. Rev.*, 77:711–712, Mar 1950.
- [50] Oral K.H. Alagöz, Y. and S. Yüce. Split quaternion matrices. *Miskolc Mathematical Notes*, 13:223–232, 2012.
- [51] H. Blaine Lawson Jr. and Marie-Louise Michelson. *Spin Geometry*. Princeton University Press, 1989.
- [52] Ettore Majorana. Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 9(10):335–344, Dec 1932.
- [53] D. Fradkin and Ignazio Licata. Comments on a paper by Majorana concerning elementary particles. *Am. J. Phys.*, 34:314–318, 01 2006.

- [54] Giovanni Giachetta, Luigi Mangiarotti, and Gennadi Sardanashvily. *Geometric Formulation of Classical and Quantum Mechanics*. World Scientific, 2011.
- [55] Giovanni Giachetta, Luigi Mangiarotti, and Gennadi Sardanashvily. *Geometric and Algebraic Topological Methods in Quantum Mechanics*. World Scientific, 2005.
- [56] N. Aizawa, Z. Kuznetsova, and F. Toppan. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -graded mechanics: the classical theory. *The European Physical Journal C*, 80(7):668, Jul 2020.
- [57] N. Aizawa, Z. Kuznetsova, and F. Toppan. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -graded mechanics: the quantization. *arXiv e-prints*, page arXiv:2005.10759, May 2020.
- [58] Michio Kaku. *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. Oxford University Press, 1993.
- [59] M. Rego-Monteiro and E. Curado. Construction of a non-standard quantum field theory using generalized Heisenberg algebra. *International Journal of Modern Physics A - IJMPA*, 17:661–673, 02 2002.
- [60] Boris A. Bondarenko. *Generalized Pascal Triangles and Pyramids - Their Fractal, Graphs and Applications*. Fibonacci Association, 1993.
- [61] Anthony Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton Press, 2016.
- [62] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of Group Representations and Applications*. World Scientific, 1986.
- [63] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. *Symmetries, Representations and Invariants*. Springer, 2019.
- [64] Pierre Ramond. *Group Theory: A Physicist's Survey*. Cambridge University Press, 2010.