Luís Filipe de Souza Reis

Algumas conexões entre teoria dos números e física

Rio de Janeiro, Brasil

Abril de 2021

Luís Filipe de Souza Reis

Algumas conexões entre teoria dos números e física

Dissertação de mestrado apresentada ao curso de pós graduação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: Dr. Nami F. Svaiter

Rio de Janeiro, Brasil

Abril de 2021

Reis, Luís Filipe S.
P654r Algumas conexões entre teoria dos números e física/ Luís Filipe de Souza Reis. – Rio de Janeiro, Brasil, Abril de 2021-
53 p. : 0 il. (color.); 30 cm.

Orientador: Dr. Nami F. Svaiter

Dissertação de Mestrado – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Abril de 2021.

1. Teoria dos Números
2. Sistemas desordenados. 3. Método da função zeta distribucional. I. Svaiter, Nami Fux, orient. II. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. III. Coordenação de Física Teórica. IV. Algumas conexões entre teoria dos números e física

Luís Filipe de Souza Reis

Algumas conexões entre teoria dos números e física

Dissertação de mestrado apresentada ao curso de pós graduação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Nami F. Svaiter

Dr. Nami F. Svaiter (Orientador)
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
(CBPF)/ Departamento de Física Teórica

Membro Interno da Banca
Centro Brasileiro de Pesquisas
Físicas(CBPF)

Membro externo da Banca
Instituto de Física

Rio de Janeiro, Brasil
Abril de 2021

Dedico esta dissertação à memória de meu falecido pai Vicente Lopes dos Reis

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar minha família pelo apoio em todas as situações. Gostaria de agradecer meu orientador Nami Fux Saaiter por ter me acolhido como aluno e não ter perdido as esperanças em mim . Também devo meus agradecimentos a Carlos Augusto Domingues Zarro e Alexis David Saldivar pela ajuda na elaboração desta dissertação.

Gostaria de agradecer ao CNPQ pela bolsa de Mestrado que me deu a oportunidade de me dedicar a este trabalho. Finalmente, agradeço ao CBPF pela oportunidade de fazer parte do programa de Mestrado Acadêmico.

Resumo

O objetivo desta dissertação é de discutir algumas conexões entre teoria de números e física. Primeiramente, introduzimos um corte na função zeta de Riemann e assim definimos funções zeta modificadas. Mostramos que uma destas funções satisfaz uma equação funcional envolvendo funções de Bessel. Em seguida, discutimos alguns aspectos de teorias de campos aritmética, onde estudamos a energia livre média de um gás de Riemann desordenado escrita numa representação em séries em termos dos momentos da função de partição do modelo.

Palavras Chave: Teoria de números, função zeta de Riemann, método da função zeta distribucional e gás aritmético desordenado.

Abstract

The aim of this thesis is to discuss some connections between physics and number theory. First, we introduce a cut-off in the Riemann zeta-function in order to define a modified zeta-function. We show that one of these functions satisfies a functional equation which involves the Bessel functions. Second, the average free energy of a disordered Riemann gas is discussed. We get a series representation for the average free energy in terms of moments of the partition function of the model.

Keywords: Number theory, Riemann zeta-function, distributional zeta-function method and arithmetic disordered gas.

Sumário

1 Introdução

Da estrutura aditiva e multiplicativa dos números naturais podemos definir números primos. Os números primos são blocos de construção multiplicativos de um conjunto infinitamente contável dos números naturais. É fato conhecido que existe uma regularidade global destes números primos ao contrário de uma irregularidade local. A grande questão que se coloca é sobre a distribuição destes numeros dentro dos inteiros. A abordagem de Riemman com uma função complexa, doravante função zeta de Riemann, $\zeta(s)$, usa ferramentas de variáveis complexas para discutir a distribuição dos números primos dentro do conjuntos dos números inteiros. O melhor resultado na literatura acerca da sua distribuição global é o teorema dos números primos. O número de primos menores do que x, representada por $\pi(x)$ é assintoticamente dada por $\frac{x}{\log x}$ [1, 2, 3, 4, 5]. Riemann conseguiu fazer uma conexão com os zeros de uma função complexa e a distribuição dos números primos. A relação entre o número de primos menores do que x e os zeros complexos da função zeta de Riemann pode ser obtida usando-se a fórmula de Riemann-Von Mangoldt [6]. A conexão entre os primos e o conjunto de zeros não-triviais da função zeta está relacionada ao fato de que a função zeta pode ser expressa como um produto de Euler ou como um produto de Hadamard. Dentro desse cenário, aparece uma situação onde tudo leva a crer que a distribuição dos zeros não triviais acontece em uma linha. A hipótese de Riemann afirma que todos os zeros complexos não triviais da função zeta estão localizados na linha crítica $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Na ocasião em que Hilbert colocou 23 problemas que a matemática deveria resolver para avançar, ele enfatizou que a função zeta de Riemann não satisfaz nenhuma equação diferencial do tipo daquelas que aparecem usualmente na física matemática como equações diferenciais clássicas, como por exemplo, equação de Bessel, Hermite e etc [7]. Embora a função zeta não seja solução de uma equação diferencial do tipo mencionado acima, ela aparece em muitas situações físicas. Um exemplo que a física clássica fornece surge dos chamados sistemas dinâmicos. No modelo conhecido como modelo de bilhar, as partículas tem energia constante e se movimentam em um volume finito. Uma vez que as partículas chegam na fronteira, elas sofrem uma reflexão especular. Dependendo da forma do bilhar, este sistema pode ser integrável ou caótico. Um dos modelos de bilhar mais simples é o bilhar circular que por conta da existência de uma simetria rotacional constitui um sistema integrável. Respondendo a pergunta de qual seria a probabilidade de que as partículas escapem do volume depois de n saltos e passado um tempo t, dado a existência de um par de buracos sobrepostos de tamanho ϵ, se tem uma situação onde a função zeta aparece conectada à transformada de Mellin dessa probabilidade.

Hilbert e Pólya sugeriram que uma representação espectral dos zeros não-trivias da função zeta de Riemann poderia demonstrar a hipótese de Riemann. Algumas evidências desta representação espectral têm sido discutidas na literatura onde as propriedades estatísticas dos zeros são estudadas [8, 9, 10]. A questão que tem sido discutida é que a distribuição espacial de níveis de energia adjacentes próximos em muitos sistemas é similar da distribuição dos zeros não triviais da função zeta, em particular quando comparado com sistemas quânticos caóticos, o que leva a tentar asociar a dinâmica desse tipo de sistema com a função zeta. Para sistemas integráveis clássicos esperamos uma distribuição do tipo Poisson, entretanto existem outros sistemas onde a distribuição de níveis de energia adjacentes não seguem a distribuição de Poisson. Resultados numéricos indicam que a distribuição dos zeros não-triviais da função zeta de Riemann se assemelham a distribuição dos autovalores de matrizes aleatórias no ensemble unitário Gaussiano. Isto é conhecido como a lei de Montgomery-Odłyzko

O objetivo desta dissertação é discutir algumas conexões entre teoria dos números e física, em particular a física relacionada á função zeta de Riemann [11, 12, 13]. Nesta tese mostraremos algumas situações onde modificando a função zeta original podemos fazer algumas conexões com a física matemática. Uma forma é introduzindo cortes na função zeta de modo a obter uma função que obedece a uma equação diferencial [14]. Introduzimos cortes na função zeta de Riemann para obter funções zeta regularizadas. Uma destas funções exibe uma relação funcional envolvendo funções de Bessel de terceiro tipo. Esta ideia já tinha sido usada anteriormente para se discutir a energia renormalizada associada a campos quânticos na presença de superfícies clássicas [15, 16]. Outra discussão está relacionada a alguns aspectos de teoria de campos aritmética. A teoria de campos aritmética foi desenvolvida para estabelecer conexões entre teoria dos números e teoria de campos [17, 18, 19, 20, 21, 22]. Seguindo essa linha estudamos um gás de Riemann bosônico desordenado [23, 24] e apresentamos a energia livre média escrita numa representação em série dos momentos da função de partição do modelo. Para alguns artigos recentes discutindo a relação entre teoria de números e física recomendamos as Refs. [25, 26].

Antes de discutirmos nossos resultados, queremos enfatizar outros resultados conectando teoria dos números e física. Ressaltamos que estes resultados não estão associados as propriedades estatísticas dos zeros não triviais da função zeta de Riemann. Em vez de discutir os zeros e os sistemas físicos que podem gerar este espectro vamos focar na distribuição dos primos. Nessa direção alguns autores [28, 29, 30, 31] formularam a seguinte questão: existe um sistema quântico com um potencial que geraria o espectro dos números primos. Usando integrais funcionais foi provado que uma grande classe de modelos não pode ter o espectro dado pela distribuição de primos Refs. [32, 33]. Veja também as Refs. [34, 35]

Neste trabalho é discutida duas situações diferentes conectando teoria dos números, física matemática e teoria de campos. Primeiramente é modificada a função zeta inserindo uma função corte que possui uma simetria particular, conhecida como simetria modular, isso nos permitiu encontrar uma generalização para a equação funcional de Riemann. Esta generalização obedece a mesma simetria que a equação funcional original $s \to (1-s)$ na faixa crítica. Ao mesmo tempo essa equação funcional resultante envolve duas funções de Bessel do segundo tipo. Em seguida, discutimos um gás bosônico aritmético. Um gás de Riemann bosônico é um sistema mecânico quantizado a uma certa temperatura β^{-1} cuja função de partição é dada pela função zeta de Riemann. Recentemente foi discutida a conexão entre os zeros não-triviais da função zeta e transições de fase usando um gás aritmético desordenado. Introduzindo a desordem em um gás de Riemann e estudando as variáveis termodinâmicas do gás aritmético no plano complexo, uma conexão entre os zeros da função zeta e a física foi estabelecida. Neste trabalho foi calculada a energia média do gás desordenado. Usando o método da função zeta distribucional [36, 37] obtemos a energia livre média de um gás de Riemann desordenado, resultado que não havia sido obtido no trabalho exposto.

A organização da dissertação é a seguinte: no capítulo 2, discutimos algumas propriedades da função zeta de Riemann. No capítulo 3 as funções zeta regularizadas são apresentadas como uma introdução, para depois no capítulo 4 discutir a função zeta-modificada por meio de um corte. No capitulo 5 , exibimos a energia livre média de um gás de Riemann desordenado. As conclusões são dadas no capítulo 6.

2 A função zeta de Riemann

Neste capítulo apresentamos as ideias principais relacionadas á função zeta de Riemann e a hipótese de Riemann. O conteúdo é colocado de forma expositiva, com o mínimo da matemática essencial para o entendimento do assunto, e expondo os resultados principais.

Começamos o capítulo com a definição do que seria uma número primo. Dado um número inteiro p tal que $p \neq 1$, dizemos que p é um número primo se não podemos encontrar um inteiro n dividindo p, tal que $1 < n < p$. Qualquer inteiro positivo n pode ser decomposto de maneira única como o produto de potências de números primos. Resultado que é conhecido como o teorema fundamental da aritmética

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}. \tag{2.1}$$

Com $k \geqslant 0$ e $e_1, \dots, e_k \geqslant 1$ e $p_1 < p_2 < \dots < p_k$

A função zeta de Riemann $\zeta(s)$ é uma função da variável complexa s onde $s = \sigma + it$ onde $\sigma, t \ \in \mathbb{R}$. A princípio ela está definida no semi-plano complexo $\operatorname{Re} s > 1$ pela série absolutamente convergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.2}$$

e está definida em todo o plano complexo $\mathbb{C}$ por continuação analítica. A série de Dirichlet definida na Eq. (2.2) pode ser estendida para todo plano complexo como uma função meromórfica com polo simples em $s = 1$, com resíduo 1.

Vamos mostrar que relação existe entre a serie de Dirichlet acima definida e o produtório envolvendo números primos.

Usando o teorema fundamental da aritmética, é possível mostrar que

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2.3}$$

para $\operatorname{Re} s > 1$.

Em cada parte do produtório aparece um termo na forma $1/(1-p^{-s})$. Como $|p^{-s}| < 1$, então vemos que cada termo do produto representa uma série geométrica com razão p^{-s}.

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{r=0}^{\infty} p^{-rs} \tag{2.4}$$

Desta maneira teremos o produto de N termos

$$\prod_{p}^{N} \left(1 - \frac{1}{p^{-s}}\right)^{-1} = \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_N=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{r_1} p_1^{r_1} \ldots p_N^{r_N})^s} \tag{2.5}$$

Portanto utilizando o teorema fundamental da aritmética vemos que reproduzimos no denominador todos os inteiros no limite $N \to \infty$.

Com este resultado podemos associar a função zeta com o conjunto dos números primos na região onde a zeta converge. O produto dado pela eq. (2.3) é chamado de produto de Euler. Foi Euler quem primeiramente lidou com essa série, embora não considerando s como um número complexo. A série definida pela eq. (2.3) é absolutamente convergente e desta forma a soma $\zeta(s)$ é analítica no semi-plano complexo $\mathrm{Re}\, s > 1$.

A função zeta também pode ser expressada na forma de uma integral. Utilizando a função gama de Euler

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(s)}{n^s} \tag{2.6}$$

Efetuando a soma em n obtemos o produto da função Zeta com a função Gama.

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx \tag{2.7}$$

Nesta expressão temos uma série geométrica, de modo que podemos colocar esta expressão como

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \tag{2.8}$$

Da Eq. (2.3), temos o inverso da função zeta

$$\zeta^{-1}(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{2.9}$$

Expandindo o produto infinito, obtemos

$$\zeta^{-1}(s) = 1 - \sum_{p} p^{-s} + \sum_{p<q} (p\,q)^{-s} - \sum_{p<q<r} (p\,q\,r)^{-s} + ... \tag{2.10}$$

onde $p, q, r, ...$ são números primos. Note que na Eq. (2.10) somente os inteiros que não apresentam fatores quadrados aparecem na soma (de acordo com o teorema fundamental da aritmética). Para um dado inteiro n o coeficiente de n^{-s} é ± 1, se o número de fatores de n é par ou ímpar respectivamente.

$$\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, n^{-s}, \tag{2.11}$$

onde nós introduzimos a função de inversão de Möbius, $\mu(n)$, definida por [11]

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é um inteiro positivo livre de fatores quadráticos} \\ & \text{com um número par de fatores primos,} \\ -1 & \text{se } n \text{ um inteiro positivo livre de fatores quadráticos} \\ & \text{com um número ímpar de fatores primos,} \\ 0 & \text{se } n \text{ não pode ser escrito da forma acima,} \end{cases}$$

onde $\mu(1) = 1$.

Como nesta dissertação vamos considerar funções zeta modificadas, nós iremos brevemente discutir como se efetua a extensão analítica da função zeta de Riemann [13].

Podemos efetuar uma extensão analítica da função zeta notando que a série que define a função zeta pode ser colocada na forma

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = s \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{n}^{n+1} x^{-s-1} dx \tag{2.12}$$

Podemos decompor um número x na forma $x = [x] + \{x\}$. Onde $[x]$ denota a parte inteira de x, e $\{x\}$ denota a parte fracionaria de x.

Podemos colocar n dentro do integrando como $[x]$ devido ao limite de integração ser entre n e $n+1$.

$$\zeta(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} [x] x^{-s-1} dx = s \int_{1}^{\infty} [x] x^{-s-1} dx \tag{2.13}$$

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty x^{-s}dx - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}dx = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}dx \tag{2.14}$$

A integral converge para $\sigma > 0$. Portanto definimos uma extensão analítica para $\operatorname{Re} s > 0$, com a exceção de um pólo em $s = 1$.

Contudo queremos efetuar uma extensão analítica para todo o plano complexo, assim como é feito por Riemann em seu artigo de 1859.

Podemos ver isto partindo da fórmula da soma de Poisson.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \tag{2.15}$$

Onde $f(n)$ e $\hat{f}(n)$ estão relacionados pela transformada de Fourier.

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-2\,\pi\,i\,t\,x} \tag{2.16}$$

Podemos aplicar a transformada de Fourier para a função $f(x) = e^{-x^2\,\pi\,v}$.

$$\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2\pi\,v - 2\,\pi\,i\,n\,x} \tag{2.17}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\pi v(x+in/v)^2}\, e^{-\pi n^2/v} \tag{2.18}$$

$$= e^{-\pi n^2/v}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\pi v y^2} \tag{2.19}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v}}e^{-\pi n^2/v} \tag{2.20}$$

Pela aplicação da fórmula da soma de Poisson e definindo a função θ, teremos

$$\theta(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi v} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}e^{-\pi n^2/v} \tag{2.21}$$

$$\theta(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}\theta(1/v) \tag{2.22}$$

Agora definimos outra função utilizando um somatória a partir de $n = 1$.

$$\psi(v) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi v} \tag{2.23}$$

Teremos através da relação obtida pela soma de Poisson uma relação envolvendo $\psi(v)$

$$2\psi(v) + 1 = \frac{1}{\sqrt{v}} \left(2\psi\left(\frac{1}{v}\right) + 1 \right) \tag{2.24}$$

Podemos utilizar esta função para calcular a integral com alguma potência envolvendo s, já que a função ψ envolve exponenciais negativas e portanto a integral é convergente.

$$\int_0^\infty x^{s/2-1}\psi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2\pi)^{s/2}} \int_0^\infty y^{s/2-1} e^{-y} dy \tag{2.25}$$

Onde temos trocado $y = n^2\pi x$ na integral e temos reconhecido a função gama de Euler. Desta forma teremos

$$\int_0^\infty x^{s/2-1}\psi(x)dx = \zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \tag{2.26}$$

Separando a integral nos intervalos $[0,1]$ e $[1,\infty)$ e substituindo a Eq. (2.24) na integral de intervalo $[0,1]$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \int_1^\infty dx\, x^{\frac{s}{2}-1}\, \psi(x) + \int_0^1 dx\, x^{\frac{s}{2}-1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\, \psi\left(\frac{1}{x}\right) \right). \tag{2.27}$$

Realizando integrais simples dos termos que não envolvem a função ψ, encontramos

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_0^1 dx\, x^{\frac{1}{2}(s-3)}\, \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \int_1^\infty dx\, x^{\frac{s}{2}-1}\, \psi(x). \tag{2.28}$$

Assim temos após trocarmos x por $1/x$ na primeira integral

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty dx\, \psi(x)(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1}{2}(s+1)}). \tag{2.29}$$

A integral que aparece na Eq. (2.29) é convergente para todos os valores de s devido ao fator exponencial que aparece em $\psi(x)$ e desta forma a Eq. (2.29) é a extensão analítica da função zeta de Riemann a todo plano s complexo. A única singularidade é o pólo em $s = 1$. O outro pólo em $s = 0$ advém da função gama de Euler.

Riemann também demonstrou que a função zeta satisfaz uma equação funcional. Para obtermos uma equação funcional basta observarmos que a parte direita da equação Eq. (2.29) é invariante pela troca de s por $1-s$, com isso chegamos na na seguinte equação funcional

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{2.30}$$

que é válida para $s\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

Agora, vamos esboçar como obter a fórmula que mostra que a extensão analítica possui uma infinidade de zeros na linha $s=\frac{1}{2}$. Pela diferenciação logarítmica, para $\operatorname{Re} s>1$ temos

Partindo da relação

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2.31}$$

podemos tomar o logaritmo da função zeta,

$$\log\zeta(s)=\sum_p\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{2.32}$$

Com isso teremos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_p\frac{\log p}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=-\sum_p\log p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}} \tag{2.33}$$

Assim podemos colocar esta equação na forma

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{2.34}$$

onde $\Lambda(n)$ é a função de von Mangoldt, definida por

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & \text{if } \exists\ \nu\geq 1: n=p^{\nu}\\ 0 & \text{de outra forma.}\end{cases}$$

Introduziremos a função de Chebyshev $\Psi(x)$ através da soma da função $\Lambda(n)$

$$\Psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(x). \tag{2.35}$$

Como a função zeta de Riemann só tem um pólo em $s = 1$ no eixo real, de maneira a demonstrar as propriedades intrínsecas no plano complexo, é conveniente escrever a função zeta como

$$\zeta(s) = \frac{2}{s(s-1)} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \Xi(s). \tag{2.36}$$

De modo que a função $\Xi(s)$ ira satisfazer a equação funcional

$$\Xi(s) = \Xi(1-s) \tag{2.37}$$

A função $\Xi(s)$ é uma função simétrica em relação a linha $\sigma = \frac{1}{2}$ e é analítica em todos os pontos do plano complexo.

Através da representação do produto de Euler da função zeta vemos que ela não possui zeros para $\sigma > 1$. Os pólos da função $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ reproduzem todos os zeros da $\zeta(s)$ no plano real em $\sigma = -2k, \;\; k = 1, 2, ...$ Podemos ver isto considerando a equação funcional (2.30) para $\sigma < 0$. O produto de ambos lados é nulo se ao menos um dos termos é nulo na equação funcional. No lado direito da equação temos a função $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$ que não possui zeros e a função $\zeta(1-s)$ que não possui zeros para $\sigma < 0$. Desta forma a função $\zeta(s)$ deve possuir zeros simples na localização dos pólos da função $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$. Esses são os chamados zeros triviais da função zeta porque a sua localização é inerente à localização dos pólos da função Gama. Desta forma os zeros não triviais devem ocorrer na faixa $0 < \sigma < 1$.

Vemos através da relação (2.37) que se ρ é um zero da função $\Xi(s)$, então $1-\rho$ também é um zero. Além do mais, pela definição de $\Xi(s)$, temos que $\overline{\Xi}(s)$=$\Xi(\overline{s})$, de modo que $\overline{\rho}$ e também $1-\overline{\rho}$ são também zeros da função $\Xi(s)$. Com isso vemos que os zeros estão distribuídos simetricamente em torno do eixo real.

Além disso, os zeros não triviais são simétricos em relação a linha crítica $\sigma = \frac{1}{2}$. Se $\rho = \frac{1}{2} + a + ib$ é um zero da função $\Xi(s)$, então $1-\rho = \frac{1}{2} - a - ib$ é também um zero, e portanto $1-\overline{\rho} = \frac{1}{2} - a + ib$ é também um zero da função $\Xi(s)$. Desta maneira vemos que os zeros não triviais da função zeta estão espelhados com relação a linha crítica $\sigma = \frac{1}{2}$.

A hipótese de Riemann conjectura que todos os zeros não triviais estão localizados na linha crítica $\sigma = \frac{1}{2}$. Portanto a hipótese falha se ao menos um zero dentro da faixa crítica for encontrado com parte real diferente de 1/2. Ao longo dos anos foram demonstrado vários teoremas que ditam sobre a distribuição dos zeros não triviais da função zeta.

Abaixo listamos algumas das provas que envolvem a conjectura de Riemann:

- Hadamard e de la Vallée Poussin provaram independentemente em 1896 que a função zeta não tem zeros para a linha $\sigma = 1$.
- Hardy mostrou em 1914 que infinitamente muitos zeros correm na linha crítica $\sigma = 1/2$
- Levinson mostrou em 1974 que no mínimo um terço dos zeros não triviais da função zeta estão na lina crítica $\sigma = 1/2$
- Conrey mostrou em 1989 que no mínimo dois quintos dos zeros não triviais da função zeta estão na lina crítica $\sigma = 1/2$

Além de resultados matemáticos, existem vários cálculos computacionais que calculam em uma ordem de grandeza muito grande os primeiros zeros da função zeta em $\sigma = \frac{1}{2}$. Nos dias atuais existem cálculos que obtiveram os primeiros 10.000.000.000.000 zeros da função zeta na linha crítica.

Agora apresentaremos algumas consequências para teoria dos números caso a hipótese de Riemann seja comprovada e o que leva a crer que a hipótese é válida.

A demonstração de Hadamard e de la Vallée de que $\zeta(1 + it) \neq 0$ tem consequências para a distribuição dos números primos. A demonstração dessa propriedade é equivalente ao teorema dos números primos, a de que assimptoticamente temos

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} \sim \frac{x}{\log(x)}, \quad x \to \infty \tag{2.38}$$

Nesta expressão $\pi(x)$ denota uma função que conta o número de primos menor que um inteiro x.

Este resultado foi conjecturado por Gauss em uma carta em 1849 e provado independentemente por Hadamard e de la vallée-Poussin em 1896. Este resultado demonstra uma outra conexão entre a distribuição dos números primos e a função zeta de Riemann além do produto de Euler.

Afirmar que a distribuição dos primos é da forma

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O(x^{\Theta}\log(x)) \tag{2.39}$$

é equivalente a afirmação de que

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0,\ \sigma > \Theta \tag{2.40}$$

Desta forma a hipótese de Riemann é equivalente a afirmação

$$\pi(x) = \int_2^\infty \frac{dt}{\log(t)} + O(x^{\frac{1}{2}}\log(x)) \tag{2.41}$$

Desta maneira aumentar a região possível de ausência de zeros não triviais permite determinar com mais acurácia as distribuição dos números primos.

Na atualidade o melhor resultado para a ausência de zeros da função zeta para a região

$$\sigma > 1 - \frac{c}{(\log|t|+1)^{\frac{2}{3}}(\log\log(3+|t|))^{\frac{1}{3}}}, \tag{2.42}$$

resultado obtido por Vinogradov e Korobov independentemente em 1958, onde c em a expressão é alguma constante positiva.

Pode-se mostrar que o número de zeros da função zeta de Riemann na faixa crítica com $0 \leq \mathrm{Im}(s) < T$ é dado por

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{2.43}$$

Este resultado foi conjecturado por Riemann em seu artigo de 1859 e foi provado por von Mangoldt em 1905.

Von Mangoldt provou em 1895 a seguinte expressão para a função de contagem dos números primos

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n}) \tag{2.44}$$

Onde

$$J(x) = Li(x) - \lim_{T\to\infty}\left[\sum_{|\rho|\leq T} Ei[\rho\log(x)]\right] + \int_x^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)t\log(t)} - \log(2)\,, \tag{2.45}$$

$\mu(n)$ é a função de Möbius, ρ denota os zeros não triviais da função zeta. $Li(x) = \int_x^2 dt/\log(t)$ e $Ei(x) = \int_{-\infty}^{x}(e^t/t)\,dt$ denotam a a integral logarítmica e a integral exponencial.

Com esta expressão vemos que saber a distribuição dos zeros da função zeta de Riemann nos permite saber a distribuição dos números primos. Observamos ao tomarmos os primeiros elementos dessa série que reproduzimos o teorema dos números primos $\pi(x) \sim Li(x)$. A localização dos zeros não triviais da função zeta determinam os desvios da tendência principal da função $\pi(x)$ se comportar como $Li(x)$, sendo os termos envolvendo os zeros da função zeta oscilações da tendência principal de $\pi(x)$.

Hilbert and Pólya sugeriram que deve existir uma interpretação espectral para estes zeros não triviais da função zeta de Riemann, de modo que os zeros não triviais da função zeta são autoestados de um operador hermitiano, da mesma forma que para um oscilador harmônico quântico temos a presença dos polinômios de Hermite como autofunções. No próximo capítulo apresentaremos as funções zeta regularizadas.

3 Funções zeta regularizadas

Na física e particularmente em a teoria quântica de campos (TQC), muitas vezes nos encontramos diante de expressões ou quantidades divergentes. Um método que trata com essas situações é conhecido como regularização. Em poucas palavras a regularização é um procedimento que extrai quantidades finitas de quantidades divergentes. Existem diversos métodos de regularização, como por exemplo a regularização de Pauli-Villars, que partindo das expansões de loop isola termos divergentes de quantidades finitas, e assim ela é utilizada pra renormalizar a teoria desejada. Outro procedimento de regularização que vale a pena destacar é conhecido como regularização dimensional, desenvolvido por Juan José Giambiagi e Carlos Guido Bollini e independentemente por Gerardus ‘t Hooft e Martinus J. G. Veltman. O trabalho de Giambiagi teve como objetivo dar sentido a integrais divergentes que aparecem na TQC perturbativa. A versão de ’t Hooft e Veltman era mais extensa, sendo aplicadas originalmente nas teorias de Yang-Mills.

Existem autores que asumem a equivalência entre a regularização dimensional e as funções zeta regularizadas (ZR), sendo estas últimas de nosso interesse. Vamos mostrar brevemente a ideia do método da ZR. Partimos da seguinte expressão

$$\det \hat{O} = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \tag{3.1}$$

onde $\hat{O}$ é um operador autoadjunto e positivo, e λ_n são os autovalores desse operador. Queremos dar sentido ao determinante do operador na equação (3.1). Em seguida podemos escrever

$$\log \det \hat{O} = \log \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log \lambda_n. \tag{3.2}$$

A continuação é definida uma zeta associada com esse operador da seguinte forma

$$\zeta_{\hat{O}}(s) = \operatorname{Tr} \hat{O}^{-s} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s}, \tag{3.3}$$

dessa forma podemos ver que

$$\frac{d}{ds}\zeta_{\hat{O}}(s)|_{s=0} = -\sum_n \log \lambda_n, \tag{3.4}$$

e portanto se diz que a quantidade,

$$e^{-\frac{d}{ds}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}}|_{s=0} \tag{3.5}$$

é um produto zeta regularizado de λ_n. Este procedimento é possível devido as propriedades analíticas da função zeta de Riemann, e portanto permite definir quantidades finitas para expressões que de outra forma podem divergir.

Uma aplicação conhecida da função ZR é aplicação ao efeito casimir. O efeito Casimir ocorre devido a presença de um material macroscópico que altera o valor esperado da energia do vácuo. Quando temos duas placas condutoras descarregadas no vácuo a uma pequena distância, as placas se atraem devido as flutuações da energia do vácuo causado pela presença de ambas.

No efeito Casimir calculamos a diferença de energia do vácuo na presença das placas e a energia do vácuo sem a presença das placas e ambas as quantidades são divergentes.

Muitas vezes temos que calcular a quantidade

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2} \tag{3.6}$$

Para regularizar esta quantidade nós calculamos

$$\langle 0|T_{00}(s)|0\rangle = \sum_n \frac{\hbar|\omega_n|}{2}|\omega_n|^{-s}, \tag{3.7}$$

de modo que podemos estabelecer uma conexão entre a energia do vácuo e a função zeta de Riemann.

Para o cálculo da energia de vácuo no efeito Casimir temos que calcular a expressão

$$\langle E\rangle = \hbar\int \frac{A dk_x dk_y}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n. \tag{3.8}$$

Nesta expressão tem $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a}}$ e A é a área das placas.

A expressão anterior é claramente infinita. Desta maneira inserimos um regulador na expressão e o fazemos nulo após o cálculo.

Teremos portanto

$$\langle E(s)\rangle = \hbar \int \frac{A dk_x dk_y}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\omega_n|^{-s}, \tag{3.9}$$

onde tomaremos o limite $s \to 0$ ao final do cálculo.

Definindo $q^2 = k_x^2 + k_y^2$ teremos

$$\frac{\langle E(s)\rangle}{A} = \frac{\hbar c^{1-s}}{4\pi^2} \sum_n \int_0^{\infty} 2\pi q \left| q^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right|^{(1-s)/2} \tag{3.10}$$

Calculando a integral em q ficamos com

$$\frac{\langle E(s)\rangle}{A} = \frac{\hbar c^{1-s}}{4\pi^2} \sum_n \int_0^{\infty} 2\pi q \left| q^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right|^{(1-s)/2} \tag{3.11}$$

$$\frac{\langle E(s)\rangle}{A} = -\frac{\hbar c^{1-s}\pi^{2-s}}{2a^{3-s}(3-s)} \sum_n \frac{1}{|n|^{s-3}} \tag{3.12}$$

Temos nesta expressão exatamente a zeta de Riemann de -3 quando $s \to 0$, de modo que sabemos o valor pela extensão analítica da função zeta. Desta maneira trocamos uma soma divergente pelo valor da função zeta em -3.

$$\frac{\langle E\rangle}{A} = -\frac{\hbar c\pi^2}{6a^3}\zeta(-3) = -\frac{\hbar c\pi^2}{720a^3} \tag{3.13}$$

Uma maneira de se investigar a hipótese de Riemann é estudar funções modificadas e estudar seu análogo da hipótese de Riemann. A ideia deste capítulo é modificar a função zeta de Riemann de forma a obter uma função zeta generalizada que obedece a uma equação diferencial da física matemática. Uma possibilidade é estudar o fluxo dos zeros de uma função zeta modificada para cada valor do parâmetro λ. Definiremos a função $F(s, \lambda)$ como

$$F(s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} e^{-\lambda\pi n^2}, \tag{3.14}$$

para $s = \sigma + it$; σ, t and $\lambda \in \mathbb{R}$. Derivando com repeito a λ, encontramos que a função zeta modificada satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} F(s, \lambda) = -\pi F(s-2, \lambda). \tag{3.15}$$

Repetindo os mesmos passos que foram feitos para obter a Eq. (2.27) e da definição da função Gama

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\, e^{-n^2\pi x}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s \pi^{\frac{s}{2}}} \tag{3.16}$$

Multiplicamos esta identidade por $e^{-\lambda\pi n^2}$ e somamos em n de 0 até ∞ para obtermos a série $F(s,\lambda)$.

$$F(s,\lambda)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\, e^{-n^2\pi(x+\lambda)}\, dx \tag{3.17}$$

Agora trocamos a variável x pela variável $y = x+\lambda$

$$F(s,\lambda)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty (y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1}\, e^{-n^2\pi y}\, dy = \int_0^\infty (y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1}\psi(y)\, dy \tag{3.18}$$

Usando a Eq. (2.24) podemos colocar esta equação na forma

$$F(s,\lambda)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = A(s,\lambda)+B(s,\lambda)+C(s,\lambda)+D(s,\lambda), \tag{3.19}$$

De onde teremos

$$A(s,\lambda) = \int_{1+\lambda}^\infty dy\, (y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1}\psi(y) \tag{3.20}$$

$$B(s,\lambda) = \int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, (y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{y}}\psi\left(\frac{1}{y}\right) \tag{3.21}$$

$$C(s,\lambda) = -\frac{1}{2}\int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, (y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1} \tag{3.22}$$

e

$$D(s,\lambda) = \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, (y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{y}}. \tag{3.23}$$

Para prosseguir, usemos a seguinte representação em séries para $(y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1}$. Nós temos

$$(y-\lambda)^{\frac{s}{2}-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)}. \tag{3.24}$$

Substituindo a representação em séries nas equações acima, somos levados a

$$A(s,\lambda) = \int_{1+\lambda}^{\infty} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)} \psi(y), \tag{3.25}$$

$$B(s,\lambda) = \int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)} \psi\left(\frac{1}{y}\right) \tag{3.26}$$

$$C(s,\lambda) = -\frac{1}{2} \int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)} \tag{3.27}$$

e

$$D(s,\lambda) = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)}. \tag{3.28}$$

A função $F(s,\lambda)$ pode ser escrita como

$$F(s,\lambda) = A_1(s,\lambda) + B_1(s,\lambda) + C_1(s,\lambda) + D_1(s,\lambda), \tag{3.29}$$

onde

$$A_1(s,\lambda) = \pi^{\frac{s}{2}} \int_{1+\lambda}^{\infty} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-1} \frac{\psi(y)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)}, \tag{3.30}$$

$$B_1(s,\lambda) = \pi^{\frac{s}{2}} \int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)} \psi\left(\frac{1}{y}\right) \tag{3.31}$$

$$C_1(s,\lambda) = -\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2} \int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-1} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)} \tag{3.32}$$

e

$$D_1(s,\lambda) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2} \int_{\lambda}^{1+\lambda} dy\, \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, y^{\frac{s}{2}-k-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-k-1\right)}. \tag{3.33}$$

Para prosseguir uma ideia seria investigar a trajetória dos zeros de $F(s,\lambda)$ como função de λ no espaço σ, t e λ. Isto não sera feito nesta tese.

Em vez de discutir funções zeta com o corte definido acima, vamos propor uma modificação na representação integral para responder as seguintes questões [38]:

- que modificações são possíveis para obter uma equação funcional ainda na linha crítica com estas funções zeta modificadas?

4 Funções zeta-modificadas e generalizações da equação funcional de Riemann

No estudo das características e propriedades da função zeta de Riemann, tanto a generalização da equação funcional do Riemann quanto o estudo de funções semelhantes a função zeta aparecem na literatura como ideias recorrentes. As funções semelhantes a função zeta são chamadas de L-functions. Estas L-functions podem ser funções zeta do tipo Dirichlet , este caso é conhecido como hipótese de Riemann generalizada. Se a função zeta for de Dedekind, a hipótese de Riemann é chamada de hipótese de Riemann extendida.

Outro enfoque que é utilizado no estudo da função zeta consiste em modifica-lá e ver se é possível encontrar generalizações ou estudar o comportamento da dinâmica dos zeros não trivias, entre outros possíveis análises. Seguindo essa direção a ideia principal desta seção é discutir modificações em uma representação integral da função zeta de Riemann introduzindo funções que exibem a simetria $x \mapsto 1/x$.

Começamos por definir a função zeta modificada $\zeta_h(s,\lambda)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$, construída com uma função contínua arbitrária $h(x;\lambda)$ tal que $h(\frac{1}{x};\lambda) = h(x;\lambda)$, e $\lim_{\lambda\to 0} h(x;\lambda) = 1$. Nós temos

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_h(s,\lambda) = \int_0^\infty dx\,\psi(x)\,h(x;\lambda)\,x^{\frac{s}{2}-1} \tag{4.1}$$

Seguindo o procedimento de Riemann, obtemos

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_h(s,\lambda) &= \frac{1}{2}\int_1^\infty dx\,h(x;\lambda)\,x^{-\frac{1}{2}(s+1)} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,h(x;\lambda)\,x^{\frac{1}{2}(s-2)} \\ &\quad + \int_1^\infty dx\,\psi(x)\,h(x;\lambda)\left(x^{\frac{1}{2}(s-2)} + x^{-\frac{1}{2}(s+1)}\right).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Podemos usar a mesma ideia para calcular $\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\!\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta_h(1-s,\lambda)$. Subtraindo ambas as expressões, finalmente encontramos

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\!\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta_h(1-s,\lambda) + \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\,h(x;\lambda)\,x^{-\frac{1}{2}(s+1)} &= \\ \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_h(s,\lambda) + \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\,h(x;\lambda)\,x^{\frac{1}{2}(s-2)}&.\end{aligned} \tag{4.3}$$

A equação acima é uma generalização para a bem conhecida equação funcional satisfeita pela função zeta de Riemann e possui a simetria $s \to (1-s)$ que apresenta a equação funcional de Riemann dentro da faixa crítica. Vamos imprementar esta ideia aproveitando a simetria da função teta de Jacobi apresentada. Definimos uma função zeta de Riemann regularizada, *i.e.*, com o corte $\zeta(s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$. Introduzindo o corte que apresenta a simetria $x \mapsto 1/x$, definimos a função zeta regularizada por

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s,\lambda) = \int_0^\infty dx\, x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\,\pi\, x} e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)}. \tag{4.4}$$

Novamente, seguindo o procedimento de Riemann podemos mostrar que

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s,\lambda) &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{\frac{1}{2}(s-3)} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{\frac{1}{2}(s-2)} \\ &+ \int_1^\infty dx\, \psi(x) e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left(x^{\frac{1}{2}(s-2)} + x^{-\frac{1}{2}(s+1)}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Nosso objetivo será de encontrar uma generalização da equação funcional de Riemann. Discutiremos esta equação funcional generalizada. Como o corte é invariante por transformações $x \mapsto 1/x$, fazendo a substituição $x \mapsto 1/x$ na primeira integral que aparece na Eq. (4.5), achamos

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s,\lambda) &= \frac{1}{2}\int_1^\infty dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{-\frac{1}{2}(s+1)} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{\frac{1}{2}(s-2)} \\ &+ \int_1^\infty dx\, \psi(x) e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left(x^{\frac{1}{2}(s-2)} + x^{-\frac{1}{2}(s+1)}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Podemos usar a mesma idea para calcular $\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s,\lambda)$. Obtemos

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s,\lambda) &= \frac{1}{2}\int_1^\infty dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{\frac{1}{2}(s-2)} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{-\frac{1}{2}(s+1)} \\ &+ \int_1^\infty dx\, \psi(x) e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left(x^{-\frac{1}{2}(s+1)} + x^{\frac{1}{2}(s-2)}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tomando a diferença entre as Eqs. (4.7) e (4.6), encontramos

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s,\lambda) + \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{-\frac{1}{2}(s+1)} &= \\ \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s,\lambda) + \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{\frac{1}{2}(s-2)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando a seguinte representação integral para a função de Bessel modificada de segundo tipo [39]

$$\int_0^\infty dx\, x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x}-\gamma\, x} = 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right) \quad (\mathrm{Re}\,(\beta) > 0\ , \mathrm{Re}\,(\gamma) > 0) \tag{4.9}$$

podemos reescrever a Eq. (4.8) como

$$\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s,\lambda) + K_{\frac{1-s}{2}}(2\lambda) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s,\lambda) + K_{\frac{s}{2}}(2\lambda)\,. \tag{4.10}$$

A equação acima é o primeiro resultado importante da Ref. [14]. Obtivemos uma possível generalização para a equação funcional original obtida por Riemann dada pela Eq. (2.30) que possui a mesma simetria $s \to (1-s)$ que está presente na equação funcional construída com a função zeta de Riemann dentro da faixa crítica. Para $\lambda > 0$, a Eq. (4.10) é definida dentro da faixa crítica. Não é difícil mostrar que

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s,\lambda) &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,\left(x^{\frac{1}{2}(s-3)} - x^{\frac{1}{2}(s-2)}\right)e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\ &- \int_0^1 dx\,\psi(x)\left(x^{\frac{1}{2}(s-2)} + x^{-\frac{1}{2}(s+1)}\right)e^{-\lambda\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\ &+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+n^2\pi}\right)^{\frac{s}{4}}K_{\frac{s}{2}}\left(2\sqrt{\lambda^2+\lambda\,n^2\pi}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+n^2\pi}\right)^{\frac{1-s}{4}}K_{\frac{1-s}{2}}\left(2\sqrt{\lambda^2+\lambda\,n^2\pi}\right).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Esta representação é válida para todo plano complexo $\mathbb{C}$. Vemos que essa representação envolve funções de Bessel, que são funções que aparecem na física matemática. Esse resultado acima já nos trás uma conexão entre funções da física matemática e as funções zeta de Riemann modificadas

5 O gás de Riemann desordenado

O objetivo principal deste capítulo é discutir situações que conectam a física de um gás de Riemann desordenado e as propriedades da função zeta de Riemann. Calculamos a energia livre média de um gás de Riemann com uma desordem do tipo quenched. Partindo da referência [24] onde a energia média do gás foi calculada, estendemos o resultado apresentando a energia livre media para esse gás usando o método da zeta distribucional. [36, 37].

No que se segue, usaremos uma nova abordagem para usar números primos para fornecer uma interpretação física para os objetos matemáticos construídos com a função zeta de Riemann. Esta nova abordagem será usada para calcular a energia livre média em modelos de teorias de campos contínuos com desordem conforme foi recentemente proposto nas Refs. [36, 37]. Este método, conhecido como método da função zeta distribucional, foi usado para analisar a termodinâmica de polímeros e interfaces num meio aleatório [43] e o modelo de Guinzburg-Landau com uma fonte aleatória [44, 45]. A vantagem deste método sobre o método das réplicas é que ele torna possível acessar o regime não perturbativo de modelos não-Gaussianos. Veja, por exemplo, a Ref. [46].

5.1 A energia livre quenched no gás aritmético

Aqui, usaremos o método da função zeta distribucional para calcular a energia livre média de um gás de Riemann desordenado através de uma representação em série. Suporemos que uma teoria de campo bosônica não-interagente é definida num volume V com o Hamiltoniano dado por

$$H_B = \omega \sum_{k=1}^{\infty} \log(p_k) b_k^{\dagger} b_k, \tag{5.1}$$

onde $b_k^{\dagger}$ e b_k são respectivamente os operadores de criação e aniquilação e $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é a sequência de números primos. Como a energia de cada modo é $\nu_k = \omega \log p_k$ a função de partição deste sistema é exatamente a função zeta de Riemann, *i.e.*, $Z = \zeta(\beta\omega)$.

Temos a energia do sistema na forma

$$H_B = \sum_{k=1}^{\infty} H_k. \tag{5.2}$$

Com $H_k = \omega \log(p_k) b_k^\dagger b_k$, teremos a função de partição para um membro do ensemble,

$$Z_k = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\beta\omega \log(p_k)\, n\} = \frac{1}{1 - \exp\{-\beta\omega \log(p_k)\}} \tag{5.3}$$

Desta forma

$$Z_k = \frac{1}{1 - p_k^{-\beta\omega}} \tag{5.4}$$

Como todos membros do ensemble são independentes, teremos a função de partição do sistema

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} Z_k = \left(\frac{1}{1 - p_1^{-\beta\omega}}\right)\left(\frac{1}{1 - p_2^{-\beta\omega}}\right)\cdots = \zeta(\beta\omega) \tag{5.5}$$

Esta relação nada mais é do que a representação de Euler da função zeta. Portanto concluímos que a função de partição do sistema é a função zeta com argumento $\beta\omega$.

Para um gás aritmético fermiônico não interagente, teremos o hamiltoniano

$$H_B = \omega \sum_{k=1}^{\infty} \log(p_k) c_k^\dagger c_k, \tag{5.6}$$

onde $c^\dagger$ e c_k são respectivamente os operadores de criação e aniquilação fermiônicos.

Podemos mostrar utilizando a função de inversão de Möbius que a função de partição do sistema férmiônico consiste em a razão entre a função de partição de dois sistemas bosônicos

$$Z_F(\beta\omega) = \frac{\zeta(\beta\omega)}{\zeta(2\beta\omega)} \tag{5.7}$$

Desta forma a função de partição de um sistema com temperatura β^{-1} é equivalente a um sistema não interagente de bósons com temperatura $(2\beta)^{-1}$ e férmions com temperatura β^{-1}.

A desordem pode ser introduzida supondo que o parâmetro ω que aparece no Hamiltoniano do gás aritmético dado pela Eq. (5.1) é uma variável aleatória. Consideramos

$\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como um conjunto de variáveis aleatórias não correlacionadas com uma densidade de probabilidade $P(\omega_k)$ sobre o ensemble de Hamiltonianos. Para seguir, precisamos de calcular a média no ensemble de alguma quantidade física de interesse. Definimos a energia livre média do gás de Riemann como

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta}\mathbb{E}\left[\log\zeta(\beta\omega)\right], \tag{5.8}$$

onde $\mathbb{E}[...]$ denota a média sobre o ensemble de realizações da variável aleatória com uma função densidade de probabilidade discreta. Para uma função $f(\omega_k)$ teriamos

$$\mathbb{E}\left[f(\omega_k)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k) f(\omega_k) \tag{5.9}$$

A média da energia livre, para o caso de um ensemble que consiste em um infinito enumerável de cópias do sistema é

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta V}\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k)\log\zeta(\omega_k\beta), \tag{5.10}$$

onde V é o volume do sistema e $P(\omega_k)$ é a função densidade de probabilidade discreta unidimensional definida no intervalo $\{\omega : \omega_1 \leq \omega_k < \infty\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Em vez de considerar um ensemble feito por um conjunto infinito enumerável de cópias, estendemos estas definições para um conjunto não-enumerável de cópias. Desta forma a média sobre um ensemble de realizações pode ser representada por uma integral com ω definida num contínuo, *i.e.* $\{\omega : \omega \in \mathbb{R}^+\}$. A densidade de energia livre média e a energia média podem ser escritas como

$$f(\beta,\lambda) = -\frac{1}{\beta V}\int_0^{\infty} d\omega\, P(\omega,\lambda)\log\zeta(\omega\beta) \tag{5.11}$$

$$\epsilon(\beta,\lambda) = -\frac{1}{V}\int_0^{\infty} d\omega\, P(\omega,\lambda)\frac{\partial}{\partial\beta}\log\zeta(\omega\beta) \tag{5.12}$$

onde λ é uma parâmetro com dimensão de comprimento que tivemos que introduzir para obter a dimensão correta das expressões. Observamos que na expressão da energia média temos que utilizar a a relação da derivada logarítmica (Eq. (2.34)) da função zeta . Para calcular a energia livre, usaremos o método da função zeta distribucional [36].

Introduzindo a definição da função zeta distribucional $\Phi(s)$, inspirada na função zeta espectral, como

$$\Phi(s,\lambda) = \int_0^\infty d\omega P(\omega,\lambda)\,\frac{1}{\zeta(\beta\omega)^s}, \tag{5.13}$$

para $s \in \mathbb{C}$, esta função sendo definida na região onde a integral acima converge. A energia livre média é dada por

$$f(\beta,\lambda) = \frac{1}{\beta V}\frac{d}{ds}\Phi(s,\lambda)|_{s=0^+}, \qquad \operatorname{Re} s \geq 0, \tag{5.14}$$

onde $\Phi(s,\lambda)$ é bem definida.

Podemos utilizar a representação integral de Euler para a função gama

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \tag{5.15}$$

e substituimos $x = \zeta(\beta\omega)\,t$ na integral para obtermos

$$\frac{1}{\zeta(\beta\omega)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dt\, t^{s-1}e^{-\zeta(\beta\omega)t}, \quad \text{for} \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{5.16}$$

Embora, a integral de Mellin seja convergente somente para $\operatorname{Re} s > 0$, dado que Re $(\zeta(\beta\omega)) > 0$, mostraremos como obterar da expressão acima uma fórmula para a energia livre média válida para $\operatorname{Re} s \geq 0$. Substituindo a Eq. (5.16) na Eq. (5.13) achamos

$$\Phi(s,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty d\omega P(\omega,\lambda)\int_0^\infty dt\, t^{s-1}e^{-\zeta(\beta\omega)t}. \tag{5.17}$$

Nós já sabemos que a função zeta distribucional $\Phi(s,\lambda)$ é definida para $\operatorname{Re} s \geq 0$. A expressão acima será utilizada para calcular suas derivadas em $s = 0^+$ usando-se métodos analíticos. Suporemos ainda que, a princípio as seguintes operações, média na desordem, diferenciação e integração, comutam sempre que necessário.

Para continuar, tomemos $a > 0$ e escrevamos $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ onde

$$\Phi_1(s,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty d\omega P(\omega,\lambda)\int_0^a dt\, t^{s-1}e^{-\zeta(\beta\omega)t} \tag{5.18}$$

e

$$\Phi_2(s,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty d\omega P(\omega,\lambda)\int_a^\infty dt\, t^{s-1}e^{-\zeta(\beta\omega)t}, \tag{5.19}$$

onde a é um parâmetro adimensional. A energia livre média pode então ser escrita como

$$f(\beta,\lambda) = \frac{1}{\beta V}\frac{d}{ds}\Phi_1(s,\lambda)\bigg|_{s=0^+} + \frac{1}{\beta V}\frac{d}{ds}\Phi_2(s,\lambda)\bigg|_{s=0^+}. \tag{5.20}$$

Definiremos o k-ésimo momento da função de partição como $\mathbb{E}\left[\zeta(\beta\omega)^k\right]$, onde

$$\mathbb{E}\left[\zeta(\beta\omega)^k\right] = \int_0^\infty d\omega P(\omega,\lambda)\zeta(\beta\omega)^k. \tag{5.21}$$

A integral $\Phi_2(s,\lambda)$ define uma função analítica definida em todo plano complexo $\mathbb{C}$. A contribuição de $\Phi_1(s,\lambda)$ pode ser computada expandindo a exponencial na eq.(5.28) em uma série e integrando em t

$$e^{-\zeta(\beta\omega)\,t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^k}{k!}\zeta(\beta\omega)^k \tag{5.22}$$

Para $k=0$ temos o produto $\Gamma(s)\,s = \Gamma(s+1)$ no denominador.Com isso teremos uma expressão para a função Φ_1 envolvendo um a série com cada termo contendo um momento da função $\zeta(\beta\omega)$

$$\Phi_1(s,\lambda) = \frac{a^s}{\Gamma(s+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{k+s}}{k!(k+s)}\,\mathbb{E}\left[\zeta(\beta\omega)^k\right], \tag{5.23}$$

uma expressão válida para $\mathrm{Re}\, s \geq 0$. A função $\Gamma(s)$ tem um pólo em $s=0$ com resíduo 1, assim

$$\frac{d}{ds}\Phi_1(s,\lambda)|_{s=0^+} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{k!\,k}\,\mathbb{E}\left[\zeta(\beta\omega)^k\right] + g(a), \tag{5.24}$$

onde

$$g(a) = \frac{d}{ds}\left(\frac{a^s}{\Gamma(s+1)}\right)\bigg|_{s=0^+} = \Big(\log a + \gamma\Big) \tag{5.25}$$

e γ é a constante de Euler $0.577\ldots$. A derivada de Φ_2 na Eq. (5.19) é dada por

$$\frac{d}{ds}\Phi_2(s,\lambda)|_{s=0} = \int_0^\infty d\omega P(\omega,\lambda)\int_a^\infty \frac{dt}{t}\,e^{-\zeta(\beta\omega)t} = R(a,\lambda). \tag{5.26}$$

Desta forma, utilizando-se métodos de análise complexa, uma vez integrado sobre a desordem, a energia livre média pode ser representada por

$$f(\beta,\lambda) = \frac{1}{\beta V}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{k!\,k}\mathbb{E}\left[\zeta(\beta\omega)^k\right] + \log a + \gamma + R(a,\lambda)\right]. \tag{5.27}$$

Podemos mostrar que $R(a, \lambda)$ se anula quando $a \to \infty$. Na Ref. [24], a densidade de energia livre média e a densidade de energia média foram obtidas, embora, somente a última quantidade foi estudada. Aqui, nesta dissertação, fomos além e encontramos uma representação em série para a densidade de energia livre *quenched* do gás de Riemann desordenado. Note que esta representação em série é válida em todo ponto exceto nos zeros não triviais da função zeta de Riemann.

6 Conclusões

Nesta dissertação apresentamos conexões entre a física e a teoría de números, em particular relacionadas com as propriedades da função zeta de Riemann. Primeramente modificamos uma representação integral da função zeta inserindo um função corte que posui a simetría $f\left(\frac{1}{x};\lambda\right) = f(x;\lambda)$. Fruto dessa modificação encontramos uma generalização para a equação funcional de Riemann que respeita a simetria $s \to (1-s)$ na faixa crítica. Ao mesmo tempo essa equação funcional generalizada envolve funções de Bessel, o que implica uma conexão com funções que obedecen equações diferenciais, ou seja, funções que estão relacionadas à processos físicos.

Finalmente usando o formalismo da função zeta distribucional, calculamos a energia livre quenched do gás como uma representação em série dos momentos da função de partição. Essa representação não é válida para os zeros não trivias da função zeta. Na literatura isso tem sido interpretado como pontos de transição de fase do sistema.

Referências

[1] Hadamard J 1896 *Bull. Soc. Math. France* **24** 119.

[2] de Vallée-Poussin C 1896 *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **202** 183.

[3] de Vallée-Poussin C 1896 *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **202** 281.

[4] Newman D J 1980 *Am. Math. Month.* **87**, 693.

[5] Korevaar J 1982 *Math. Intell.* **4** 108.

[6] Titchmarsh E C 1964 *The Zeta-Function of Riemann* (New York: Stechert-Hafner Service Agency).

[7] Hilbert D 1902 *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** 437.

[8] Bohigas O and Gianonni M J 1984 Chaotic Motion and Random Matrix Theories *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics* (Lecture Notes in Physics vol 209) ed Araki H, Ehlers J, Hepp K, Kippenhahn R, Weidenmuller H and Zittart J, (Berlin: Springer Verlag).

[9] M. V. Berry 1981 Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion *Chaotic Behaviour of Deterministic Systems* (*Les Houches Lectures* vol 36) ed Iooss G, Helleman R and Stora R (Amsterdam: North Holland).

[10] Berry M V 1985 *Proc. R. Soc.* A **400** 229.

[11] Hardy G H and Wright E M 1956 *An introduction to the Theory of Numbers* (London: Oxford Clarenton Press).

[12] Ingham A E 1990 *The Distribution of Prime Numbers* (Cambridge: Cambridge University Press).

[13] Riemann B 1859 *Monatsberichte d. Preuss. Acad. d. Wissens. Berlin* **1859:1860** 671.

[14] Saldivar A, Svaiter N F and Zarro C A D 2020 *J. Phys.* A **53** 235205.

[15] Svaiter N F and Svaiter B F 1991 *J. Math. Phys.* **32** 175.

[16] Svaiter N F and Svaiter B F 1992 *J. Phys.* A **25** 979.

[17] Julia B 1990 Statistical Theory of Numbers *Number Theory and Physics* (*Springer Proceedings in Physics* vol 47), ed Luck J M, Moussa D and M. Waldschmidt (Berlin: Springer Verlag).

[18] Spector D 1990 *Commun. Math. Phys.* 127 239.

[19] Bakas I and Bowick M J 1991 *J. Math. Phys.* **32** 1881.

[20] Spector D 1996 *Commun. Math. Phys.* **177** 13.

[21] Spector D 1998 *J. Math. Phys.* **39**, 1919.

[22] Wolf M 1999 *Physica* A **274** 149.

[23] Julia B L 1994 *Physica* A **203** 425.

[24] Duenas J G and Svaiter N F 2015 *J. Phys.* **48** 315201.

[25] Cartier P. Julia B, Moussa P and Vanhove P (eds) 2006 *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry I* (Berlin:Springer Berlin).

[26] Schumayer D and Hutchinson D A W 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 307.

[27] Mehta M L 2004 *Random Matrices* (Amsterdam: Elsevier).

[28] Mussardo G 1997 The Quantum Mechanical Potential for the Prime Numbers arXiv:cond-mat/9712010.

[29] Rosu H 2003 *Mod. Phys. Lett.* **18** 1205.

[30] Sakhr J, Bhaduri R K and van Zyl B 2003 *Phys. Rev* E **68** 026206.

[31] Schumayer D, van Zyl B P and Hutchinson D W 2008 *Phys. Rev* E **78** 056215.

[32] Menezes G and Svaiter N F 2012 Quantum Field Theories and Prime Numbers Spectrum arXiv:1211.5198 [math-ph].

[33] Menezes G, Svaiter B F and Svaiter N F 2013 *Int. Jour. Mod. Phys.* **A28** 1350128.

[34] Duenas J G and Svaiter N F 2014 *Int. Jour. Mod. Phys.* **A29** 1450051.

[35] Duenas J G, Svaiter N F and Menezes G 2014 *Int. Jour. Mod. Phys.* **A29** 1450182.

[36] Svaiter B F and Svaiter N F 2016 *Int. Jour. Mod. Phys.* A **31** 1650144.

[37] Svaiter B F and Svaiter N F 2016 Disordered Field Theory in $d = 0$ and Distributional Zeta-Function arXiv:1606.04854 [math-ph].

[38] Saldivar A, Svaiter N F e Zarro C A D 2020 *J. Phys.* A **53** 235205.

[39] Abramowitz M e Stegun I 1972 *Handbook of mathematical functions* (Nova Iorque: Dover Publications).

[40] Gutzwiller M G 1970 *J. Math. Phys.* **11** 1791.

[41] Gutzwiller M G 1971 *J. Math. Phys.* **12** 343.

[42] Brack M and Bahduri R K 2003 *Semiclassical Physics* (Cambridge: Westview Press).

[43] Acosta Diaz R, Rodríguez-Camargo C D and Svaiter N F 2016 Free-Energy of Polymers and Interfaces in Random Media arXiv:1609.07084 [cond-mat.stat-mech].

[44] Acosta Diaz R, Menezes G, Svaiter N F and Zarro C A D 2017 *Phys. Rev.* D **96** 065012.

[45] Acosta Diaz R, Svaiter N F and Zarro C A D 2017 Bubble nucleation in disordered Landau-Ginzburg model arXiv:1711.03408 [cond-mat.stat-mech]

[46] Acosta Diaz R, Svaiter N F, Krein G and Zarro C A D 2018 *Phys. Rev.* D **97** 065012.

[47] Conrey J B and Gosh A 1998 *Int. Math. Res. Not.* **15** 775.