CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações

Dissertação de Mestrado

Aspectos da Supergravidade em Três Dimensões

Caio César Souto de Souza

Rio de Janeiro, RJ

12 de novembro de 2020

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações

Aspectos da Supergravidade em Três Dimensões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduacão em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. José Abdalla Helayël-Neto.

Rio de Janeiro, RJ

12 de novembro de 2020

CAIO CÉSAR SOUTO DE SOUZA

ASPECTOS DA SUPERGRAVIDADE EM TRÊS DIMENSÕES

BANCA EXAMINADORA:

Prof. José Abdalla Helayël-Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Orientador

Prof. Dr. Sebastião Dias Alves
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Examinador Interno

Dr. Leonardo Ospedal Prestes Rosas
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Examinador Interno

Prof. Dr. Mário Júnior de Oliveira Neves
Departamento de Física - DF/UFRRJ
Examinador Externo

Prof. Dr. Antônio Duarte Pereira Junior
Instituto de Física - IMPG/UFF
Examinador Externo

Rio de Janeiro - RJ, 12 de novembro de 2020

Agradecimentos

- Em primeiro lugar, e acima de tudo, eu agradeço a Deus e ao bom Senhor Jesus Cristo pela realização do sonho de ter sido parte do CBPF. Sem dúvida, cada momento que vivi no CBPF foi incrível e que deixará muitas saudades. Só tenho a agradecer à Deus por ter me proporcionado viver todos esses momentos;

- Agradeço aos meus amados pais, Rita e Erasmo, por serem o maior exemplo que eu poderia ter na vida, por embarcarem nos meus planos, por não medirem esforços para me fazer feliz e por terem apoiado inteiramente essa minha jornada no CBPF. Eu me sinto honrado de tê-los como meus pais e eu amo muito vocês. Muito obrigado por tanto amor que vocês me deram. Esse trabalho é pra vocês.

- Agradeço fundo do meu coração a minha noiva, Manoela Policarpo. Você, meu amor, foi a pessoa que sonhou cada passo desse mestrado comigo, que me incentivou nos momentos de tristeza, que celebrou comigo nos momentos de felicidade. Sem você, eu não teria conseguido, não teria chegado até aqui. Muito obrigado por me dar tanto amor, por ter enchido a minha vida de carinho, felicidade e de paz. Eu sou completamente realizado na vida porque tenho você comigo. Com você eu sou mais forte, mais feliz e mais realizado. Muito obrigado por ser um anjo na minha vida, por embarcar nas minhas ideias malucas, por sonhar comigo e por deixar eu sonhar com você. Muito obrigado por tudo. Juntos, vencemos o mestrado. Juntos, venceremos o doutorado e qualquer obstáculo que aparecer. Eu te amo muito!

- Ao meu orientador José Helayel por ter me guiado nesta parte tão importante da minha vida. Agradeço por toda a gentileza e boa vontade que o senhor teve comigo ao longo destes anos. Agradeço por todos os conselhos e sugestões que recebi. Por fim, agradeço por todo o conhecimento que ganhei ao longo do mestrado e por ter

tido a oportunidade de participar do Diracstão. Saio muito feliz e honrado por ter sido parte deste grupo tão receptivo e sadio;

- Aos meus queridos colegas do CBPF pela amizade, pelos momentos de descontração e por todas as discussões. Em especial, agradeço a Gabriel Silva, Gabriel Freitas, Matheus e Jeferson por terem me ajudado imensamente na realização deste trabalho. Sem vocês, meus amigos, este trabalho teria sido muito mais difícil do que já foi;

- Aos meus queridos amigos da Panela Paraibana pela amizade que construímos ao longo de todos estes anos e por fazerem meus dias mais felizes com nossas brincadeiras e discussões inúteis. Vocês foram fundamentais nessa minha trajetória me fazendo sorrir todos os dias e me lembrando que uma amizade sincera é tudo que precisamos nessa vida;

- Aos meus queridos amigos da Casa de Caio, com quem compartilho uma incrível amizade há mais de 10 anos. Obrigado por todos os momentos que vivemos juntos, por todas as bebedeiras e por estarem comigo em todos os momentos;

- Aos meus queridos amigos e professores da UFCG que me proporcionaram uma graduação leve, divertida e rica em aprendizado. Agradeço de coração ao professor Marcos Anacleto que me deu a oportunidade de ter duas bolsas de PIBIC, o que gerou o meu primeiro contato com a pesquisa em Física;

- Agradeço aos professores Sebastião Alves Dias e Mário Júnior de Oliveira Neves por terem topado fazer parte da minha banca e por suas contribuições ao meu trabalho. Além disso, agradeço também a Leonardo Ospedal Prestes Rosas e ao professor Antônio Duarte Pereira Junior por, embora terem sido avaliadores suplentes, participaram da minha defesa e fizeram contribuições ao trabalho.

- Por último, agradeço à Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro dado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as teorias de Supergravidade e suas principais características em várias dimensões. Detalhamos como a Supersimetria está intrinsecamente conectada ao espaço-tempo e como a Supergravidade pode ser construída. Além disso, também abordamos métodos de redução dimensional em diversos modelos supersimétricos, os quais são fundamentais nas Teorias de Supercordas, para descrevê-las num espaço-tempo de 4 dimensões. Por fim, em conexão com as Teorias Topológicas, as quais também vêm sendo utilizadas no estudo da gravitação quântica, verificamos o caráter topológico da Supergravidade em três dimensões, o que pode facilitar seu estudo em dimensões mais baixas.

Palavras-chave: Supersimetria, Supergravidade, Teorias Topológicas, Redução Dimensional

Abstract

In the present work, we investigate Supergravity theories and their main features in several dimensions. We demonstrate how Supersymmetry is intrinsically connected to the space-time and how a Supergravity theory can be constructed. Furthermore, we also discuss dimensional reduction approaches, which play a crucial role in the Superstring Theory to describe them in 4-dimensional space-time, in diverse supersymmetric models. Finally, in connection with the topological theories, which have been used in quantum gravity research, we verify the topological characteristic of the 3-dimensional Supergravity theory, which can enhance its research in lower dimensions.

Keywords: Supersymmetry, Supergravity, Topological Theories, Dimensional Reduction.

Apresentação e Contextualização

A interação gravitacional é a única das quatro forças fundamentais que não possui uma descrição quântica satisfatória em quatro dimensões espaço-temporais. Entre 1927 e 1973, as outras três interações fundamentais (eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte) foram quantizadas com êxito, tendo produzido modelos teóricos altamente precisos e eficazes para cálculos de processos físicos, constituindo o corpo teórico a que nos referimos como Modelo-Padrão da Física de Partículas. Isso foi possível devido à técnica de renormalização dessas teorias, a qual é capaz de remover de forma sistemática e consistente os diversos infinitos ultravioleta inerentes ao chamado método de segunda quantização. No entanto, a interação gravitacional não pôde ser quantizada seguindo esta mesma técnica, uma vez que a Relatividade Geral na formulação einsteiniana, e em múltiplas formas estendidas, é uma teoria não-renormalizável. Em outras palavras, não podemos ainda fornecer uma descrição quântica da Relatividade Geral em quatro dimensões espaço-temporais; assim, faz-se necessária a introdução de novas ideias, talvez mesmo um novo paradigma na Física de Interações Fundamentais, de modo a unificar a gravitação com o Modelo-Padrão, isto é, incluí-los em uma mesma teoria.

Em meados da década de 70, surgiu uma possibilidade teórica para abordar esse problema. Chamada de Supergravidade, esta teoria incorporava à Relatividade Geral um novo princípio de simetria que já vinha sendo estudado na literatura desde 1972: a Supersimetria [**1**] [**2**]. A partir de sua formulação quadridimensional, a Supergravidade pôde ser estudada em dimensões superiores, sendo onze a dimensão máxima [**3**], uma vez que tal cenário de onze dimensões abria a possibilidade de promover uma descrição unificada - em quatro dimensões - entre as diversas interações do Modelo-Padrão e a interação gravitacional; para esta descrição unificada, uma prescrição de redução dimensional tem que ser adotada. Nesse contexto, no início dos anos 1980, a Supergravidade estava em máxima evidência, pois se acreditava que ela seria capaz de resolver os dois maiores problemas em aberto da física de partículas: a renormalização de uma teoria de gravitação e a unificação das quatro interações fundamentais.

Posteriormente, verificou-se que, embora a Supergravidade amenizasse as divergências ultravioleta no processo de quantização da gravidade, não foi capaz de produzir uma teoria quântica renormalizável ou completamente finita no regime das altas energias. Assim, nesse período, as atenções deste tópico voltaram-se ao estudo das Teorias de Supercordas que, entre outros aspectos fundamentais, proporciona uma descrição quântica consistente da gravidade em dez dimensões espaço-temporais e têm a Supergravidade como seu limite em baixas energias. Portanto, desde o final dos anos 1980 até o presente momento, a importância da Supergravidade reside no fato de que ela é utilizada para uma compreensão inicial dos aspectos das Supercordas. A Supergravidade está para as Supercordas da mesma forma que a Mecânica Quântica está para as Teorias Quânticas de Campos, pois a SUGRA funciona como a primeira quantização de uma teoria quântica para as supercordas. Além disso, a Supergravidade é também importante no estudo dos mecanismos de quebra do Modelo-Padrão Minimamente Supersimétrico (MSSM, em inglês), cujas previsões de novas partículas (chamadas de parceiros supersimétricos), novas interações e novos efeitos em canais de decaimentos são o objeto de busca sobretudo nas colaborações ATLAS, CMS e LHCb do LHC. A detecção dos superparceiros é objeto de investigação no experimento Ba-Bar realizado no SLAC, em que se busca sua verificação através de modos de decaimento dos mésons-b.

Nesse sentido, este Projeto de Mestrado tem como objetivo rever as bases das teorias de Supergravidade e suas principais características em diferentes dimensões. O principal enfoque desta Dissertação é proporcionar ao Mestrando o aprendizado e o treinamento necessários de modo a obter a conceituação e as ferramentas teóricas para torná-lo apto a realizar pesquisas em Gravitação Quântica no seu Doutorado. Além disso, a presente Dissertação visa também mostrar um aspecto da Supersimetria que não está presente nos livros-texto da área: a sua presença intrínseca à estrutura de cones-de-luz, ou seja, à estrutura de causalidade dos espaços-tempo. O esforço aqui é mostrar que a Supersimetria não reside necessariamente na existência dos chamados parceiros supersimétricos, mas sim que a mesma é inerente ao grupo de transformações conformes, grupo este que deixa invariante os cones-de-luz dos espaços-tempo. Os parceiros supersimétricos e a escala de energia na faixa dos TeV onde se pensa detectá-los no LHC são um resultado de uma engenharia de quebra da Supersimetria. A simetria férmion-bóson surge naturalmente como uma simetria nas altas energias. Trazê-la para as escalas de nossos aceleradores de partículas é uma escolha que se pode fazer, porém, não é a essência da Supersimetria; é, sim, um artefato ao qual se recorre para apresentar um mecanismo de quebra da Supersimetria e, desta forma, trazê-la para mais próximo de nossas possibilidades experimentais. Este pode ser considerado o esforço maior desta Dissertação.

Para a constituição deste trabalho, foram mobilizados os seguintes tópicos de estudo, nos quais pude me aprofundar tendo em mente a meta de um Projeto de Doutorado na área da Gravidade Quântica:

1. Relatividade Geral

2. Modelos de Chern-Simons

3. Supersimetria e Supergravidade em diferentes dimensões

4. Processos de Redução Dimensional

5. Modelo supersimétrico de Yang-Mills

6. Aspectos do campo de Rarita-Schwinger.

Convenções

- **Representação das Matrizes da Álgebra de Clifford**

∘ Representação de Majorana das matrizes na álgebra das 3 dimensões

$$\gamma^0 \equiv \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ,\gamma^1 \equiv i\sigma_x = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,\gamma^2 \equiv i\sigma_z = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

∘ Representação de Majorana das matrizes na álgebra das 4 dimensões

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & -\gamma^0 \end{pmatrix} \quad ,\Gamma^1 = \begin{pmatrix} \gamma^1 & 0 \\ 0 & -\gamma^1 \end{pmatrix} ,\Gamma^2 = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{pmatrix} ,\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

∘ Matriz de quiralidade em 4 dimensões

$$\Gamma_5 = i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

- **Capítulo 1**

∘ Índices do espaço-tempo curvo: $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$

∘ Índices do espaço-tempo plano: $a, b, \ldots = 0, 1, 2, 3$

- **Capítulo 2 - Seção 2.1 até Seção 2.2.2**

∘ Índices do espaço-tempo curvo: $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$

∘ Índices do espaço-tempo plano: $a, b, \ldots = 0, 1, 2, 3$

- **Capítulo 2 - Seção 2.2.3 e 2.2.4**

∘ Índices do espaço-tempo curvo 11-dimensional: $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \ldots = 0, \ldots, 10$

∘ Índices do espaço-tempo curvo 10-dimensional: $\mu, \nu, \ldots = 0, \ldots, 9$

∘ Quantidades com o chapéu, ˆ , pertencem à variedade 11-dimensional

∘ O Índice latino z representa a coordenada curva de índice 10 e o índice y representa a coordenada plana de índice 10

∘ Métrica: $\eta = (+1, -1, \ldots, -1)$

- **Capítulo 3 - Seção 3.1**

∘ Índices do espaço-tempo curvo: $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2$

∘ Índices espinoriais: $\alpha, \beta = 1, 2$

- **Capítulo 3 - Seção 3.2 e Capítulo 4**

∘ Índices do espaço-tempo curvo 4-dimensional: $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \ldots = 0, 1, 2, 3$

∘ Índices do espaço-tempo curvo 3-dimensional: $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2$

∘ Quantidades com o chapéu, ˆ , pertencem à variedade 4-dimensional

∘ O Índice latino a refere-se a graus de liberdade internos e o índice z representa a coordenada de índice 3

∘ Métrica: $\eta = (+1, -1, \ldots, -1)$

- **Capítulo 5**

∘ Índices do espaço-tempo curvo: $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2$

∘ Índices do espaço-tempo plano: $a, b, \ldots = 0, 1, 2$

∘ Índices espinoriais: $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$

Conteúdo

Introdução

A Supergravidade (SUGRA) é uma teoria de gravitação supersimétrica que engloba pilares fundamentais do desenvolvimento da Física Teórica, em particular, do desenvolvimento do Modelo-Padrão da Física de Partículas, que são as simetrias de gauge. A SUGRA contém um campo de gauge fermiônico, oriundo de sua invariância sob supersimetria local, chamado de gravitino, cujo spin é $3/2$. Além disso, envolve outro campo de gauge, o gráviton, de spin-2, proveniente da sua simetria local sob transformações gerais de coordenadas, que acomoda os graus de libedade do campo gravitacional.

A SUGRA desenvolveu-se no final da década de 1970 e, originalmente, foi vista como uma candidata a uma teoria para descrever a gravitação quântica e promover uma unificação de interações fundamentais. Apesar de melhorar o caráter quântico de uma teoria de gravidade, verificou-se que a SUGRA não seria renormalizável em todas as ordens e, assim, ela não pode ser a teoria final da gravitação quântica. Em um cenário de uma física mais fundamental, a SUGRA emerge como teorias-limite das Supercordas nas quais os campos descrevem partículas como sendo puntiformes, ao invés de objetos estendidos. Portanto, como há um consenso de que a SUGRA é uma teoria efetiva proveniente de um modelo mais fundamental, o critério da renormalizabilidade deixa de ser essencial.

Como as Teorias de Cordas são consistentes num espaço-tempo de 10 dimensões (e a Teoria-M, que é uma unificação de diferentes Teorias de Cordas, vive em 11 dimensões), seu tratamento matemático torna-se bastante complexo, assim como a da Supergravidade maximamente estendida das 11 dimensões. Nestas situações, é comum recorrer a modelos mais simples e de dimensões inferiores para estudá-los e adquirir novas visões a respeito dos modelos originais. Por exemplo, a Relatividade Geral em três dimensões foi utilizada como um laboratório teórico para maior compreensão do que seria a versão quântica do modelo quadridimensional **[4][5]**, uma vez que essa versão inferior é uma teoria topológica.

As denominadas Teorias de Campos Topológicas são caracterizadas, do ponto de vista quântico, por campos quânticos cujas funções de correlação são independentes da métrica e, do ponto de vista clássico, por ações que também não dependem da métrica do espaço-tempo onde são definidas. Efetivamente, dependem das características globais da variedade espaço-temporal em que são definidas e não exigem a noção de distância entre pontos. Fisicamente, isto significa que as grandezas observáveis devem ser estáveis mediante deformações contínuas da forma geométrica do espaço-tempo, sendo, portanto, preservadas as propriedades físicas associadas às fronteiras do sistema.

Introduzidas por Edward Witten em 1988 [**6**][**7**][**8**], as Teorias de Campos Topológicas possuem diversas aplicações em áreas de estudo da Física e na Matemática. Do ponto de vista da Relatividade Geral, por exemplo, as Teorias Topológicas são bastante interessantes, pois elas possuem invariância por difeomorfismos, assim como a mesma quantidade de simetrias locais e de campos, o que simplifica o seu tratamento matemático. O próprio Witten mostrou que, em três dimensões, a Relatividade Geral é uma teoria topológica [**9**]. A generalização dos resultados do Witten para todas as dimensões ímpares pode ser encontrada na referência [**10**], assim como uma discussão a respeito dos casos envolvendo dimensões pares e a propagação do gráviton no contexto das Teorias Topológicas.

A partir disso, trabalhos relacionando teorias topológicas com gravitação quântica surgiram na literatura. A referência [**11**] discute princípios básicos de uma nova teoria de perturbação da gravidade quântica, tendo como ponto de partida as Teorias de Campos Topológicas. Já o trabalho [**12**] aborda as conexões existentes entre teorias topológicas e gravitação quântica em dimensões inferiores. Outros trabalhos que trazem uma relação dos dois temas podem ser encontrados nas referências [**13**][**14**]. Além disso, Teorias Topológicas desenvolvem-se no contexto da Loop Quantum Gravity [**15**][**16**] e no da correspondência AdS/CFT [**17**], que está ligada à Teoria das Cordas.

Portanto, vemos que tanto a SUGRA quanto as Teorias Topológicas são empregadas para o estudo do mesmo problema, que é a quantização da gravitação. Por um lado, a SUGRA, sendo o limite de baixas energias da Teoria de Cordas, introduz a possibilidade de quantização da gravitação, o que não é possível via quantização direta da Relatividade Geral. Por outro lado, as Teorias de Campos Topológicas são estudadas por serem mais simples, uma vez que não carregam alguns dos problemas encontrados nas versões não-topológicas destes modelos.

Dessa forma, a busca de modelos mais simples de SUGRA é válida, pois poderia resultar em uma melhor compreensão a respeito dos modelos de dimensões superiores. Uma das formas de buscar estes modelos mais acessíveis é justamente verificar se as versões de dimensões inferiores possuem este caráter topológico. Deste modo, o objetivo deste trabalho é investigar o caráter topológico da SUGRA em um espaço-tempo inferior, de três dimensões. Para isso, faremos ao longo do trabalho uma revisão sistemática a respeito do caráter topológico da Relatividade Geral em três dimensões, da Supersimetria e da Supergravidade e de um método de redução dimensional para a obtenção da ação da SUGRA em três dimensões, a partir de seu modelo 4-dimensional. Para tanto, esta Dissertação de Mestrado está estruturada da seguinte maneira:

O Capítulo 1 será dividido em duas seções principais. A primeira delas apresentará a descrição da Relatividade Geral, através do formalismo das vielbeins e da conexão de spin. A segunda seção será dedicada ao estudo do caráter topológico da Relatividade Geral em três dimensões. Para tanto, partiremos da ação tridimensional de Chern-Simons para recuperar a ação de Einstein-Hilbert 3-dimensional através da utilização da álgebra do grupo ISO(2,1).

O Capítulo 2 também será dividido em duas seções. A primeira seção abordará uma introdução à Supersimetria a partir do entendimento do quão fundamentais são os espinores para a descrição do espaço-tempo. Assim, discutiremos o papel dos espinores na constituição das invariâncias do cone-de-luz do espaço-tempo e de outras quantidades empregadas na descrição da Relatividade Restrita e da Mecânica Quântica. Com este entendimento, formularemos a Supersimetria e suas principais características a partir da utilização de um parâmetro espinorial no formalismo da Teoria de Campos. Por sua vez, a segunda seção será dedicada ao estudo da Supergravidade, em que iniciaremos mostrando como formulá-la e suas principais características em um espaço-tempo quadridimensional. Após isso, motivaremos e introduziremos o estudo da Supergravidade em 11 dimensões, que é a dimensão máxima em que uma teoria de SUGRA pode ser construída. Por fim, abordaremos a importância e as características de uma redução dimensional.

O Capítulo 3 será dedicado ao estudo do método da redução dimensional que será utilizado no capítulo seguinte. Na primeira seção deste Capítulo, introduziremos o método da compactificação, e mostraremos como ele se relaciona com o método Scherk-Schwarz, o qual será empregado no Capítulo 4. Na seção seguinte, mostraremos a utilização do método de Scherk-Schwarz em teorias de campos mais simples, a fim de proporcionar um melhor entendimento deste método e de suas principais características.

No Capítulo 4, abordaremos a redução dimensional da Supergravidade quadridimensional através do método Scherk-Schwarz, a fim de obter a versão tridimensional desta teoria que será objeto de estudo do Capítulo 5.

No Capítulo 5, partiremos da ação de Chern-Simons para recuperar a ação da Supergravidade tridimensional, utilizando o mesmo método empregado no Capítulo 1.

O Capítulo 6 é dedicado à apresentação de Comentários Conclusivos, Considerações Finais e Perspectivas de Continuidade do trabalho desta Dissertação, onde será apresentada uma questão de pesquisa específica construída a partir da Dissertação e que será objeto de investigação com vistas a uma publicação em periódico da área.

Capítulo 1

A Relatividade Geral Como uma Teoria Topológica

Ao longo deste Capítulo, apresentaremos brevemente as ideias da Relatividade Geral na versão einsteiniana e vamos construí-la no caso especial de (1+2) dimensões. A ideia é mostrar a sua equivalência com uma teoria topológica, a Teoria de Chern-Simons, o que foi demonstrado por Edward Witten [**9**].

1.1 Relatividade Geral em Três Dimensões

1.1.1 O Princípio da Equivalência e As Vielbeins

O sucesso da Relatividade Restrita de Einstein foi fundamental para desenvolver outra grande mudança na Física Teórica: a necesssidade de encontrar uma teoria de gravitação relativística. Por diversas razões, como discutidas na referência [**18**], a teoria Newtoniana, por não ser capaz de descrever corretamente a interação gravitacional no limite relativístico, foi substituída por um modelo que envolve tensores para descrever as interações gravitacionais. Além de estar em concordância com os dados experimentais, este novo modelo é capaz de fornecer uma explicação geométrica para a gravidade. Este modelo tensorial da gravidade é chamado de Relatividade Geral e está baseado na extensão dos princípios de simetria da Relatividade Restrita. Agora, em vez de considerar apenas os referenciais inerciais, leva-se em conta todos os referenciais, sejam eles inerciais ou não. Deste modo, supõe-se que todos os observadores são equivalentes e que as leis físicas são válidas em qualquer referencial. Esta suposição leva-nos ao princípio da covariância geral:

As equações da física são covariantes sob transformações gerais de coordenadas. [**18**][**19**]

ou seja, elas não mudam sua forma quando realizamos uma transformação geral de coordenadas. Assim, as coordenadas são apenas objetos matemáticos para identificar pontos no espaço-tempo. Isto quer dizer que quaisquer coordenadas são capazes de descrever a mesma física e, portanto, não devem exercer algum papel importante na representação da Natureza. Assim, o princípio da covariância é uma extensão do princípio empregado na Relatividade Restrita, em que se considera somente as transformações de Lorentz.

Uma das características fundamentais da interação gravitacional e, consequentemente, da Relatividade Geral é descrita pelo princípio da equivalência:

em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, os efeitos da interação gravitacional são equivalentes aos de um referencial acelerado. Em outras palavras, a interação gravitacional pode ser eliminada localmente.

Assim, como podemos eliminar localmente a gravitação, as leis físicas serão aquelas que são válidas no espaço de Minkowski da Relatividade Restrita. Ou seja, o espaço-tempo é localmente invariante pelas transformações de Lorentz. Além disso, a universalidade do acoplamento gravitacional garante a completa eliminação da interação gravitacional em qualquer sistema físico [**18**].

Outra característica fundamental da Relatividade Geral é o esclarecimento sobre o que de fato é a gravidade: a manifestação da curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria e energia. Assim, fica clara a necessidade de uma nova estrutura do espaço-tempo, uma estrutura curva, cujos novos efeitos possam ser sempre eliminados localmente devido ao princípio da equivalência. Isto é, devemos ser capazes de sempre recuperar, em qualquer ponto do espaço-tempo, a geometria de Minkowski, através da introdução de um sistema de coordenadas apropriado, chamado de *sistema de coordenadas localmente inercial*.

A Geometria Diferencial fornece as ferramentas necessárias para implementar matematicamente essa teoria. O espaço-tempo é visto como uma variedade suave D-dimensional,$\mathcal{M}$. Já os espaços planos com métrica de Minkowski que, correspondem a pequenas vizinhanças planas definidas em cada ponto da variedade, são denominados *espaços tangentes*, T_x. Logo, a eliminação local dos efeitos gravitacionais, por meio de uma transformação de coordenadas, corresponde a uma transição entre a variedade $\mathcal{M}$ e o plano tangente T_x, gerando um isomorfismo entre ambos. Ou seja, existe um mapa que transforma tensores (e suas bases) com as coordenadas curvas da variedade, x^μ, em tensores (e suas bases) com coordenadas planas do espaço tangente, ξ^a e vice-versa. Este mapa é uma matriz jacobiana chamada de *vielbein* que depende da posição do espaço-tempo e é definida da seguinte forma:

$$\boxed{e^a{}_\mu(x) = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu}} \; . \tag{1.1}$$

É importante destacar que vamos adotar neste Capítulo a notação definida na seção *Convenções*. Assim, índices latinos $(a, b, c, \ldots)$ representam as coordenadas do plano tangente T_x e são contraídos pela métrica do espaço de Minkowski, η. Já os índices gregos $(\mu, \nu, \ldots)$ representam as coordenadas associadas à variedade $\mathcal{M}$ e são contraídos pela métrica curva g.

A vielbein define uma relação linear entre os tensores do espaço das variedades e do plano tangente. Assim, se B é um tensor da variedade com componentes $B^{\mu_1 \cdots \mu_n}$, sua projeção no plano tangente local será dada por

$$F^{a_1 \ldots a_n}(x) = e^{a_1}{}_{\mu_1}(x) \ldots e^{a_n}{}_{\mu_n}(x) B^{\mu_1 \ldots \mu_n} \; . \tag{1.2}$$

Uma vez que estamos supondo que, devido ao princípio da equivalência, o espaço tangente tem a geometria de Minkowski, cuja métrica η_{ab} é bem definida, podemos usar as vielbeins (1.1) para determinar a métrica induzida na variedade $\mathcal{M}$. Para tanto, vamos considerar que dois pontos infinitesimalmente próximos em $\mathcal{M}$ tenham suas coordenadas separadas por dx^μ. Por meio da vielbein (1.1), a separação correspondente das coordenadas desses pontos no plano tangente será

$$d\xi^a = e^a{}_\mu(x) dx^\mu \; . \tag{1.3}$$

Tomando o elemento de linha, isto é, o intervalo invariante entre dois eventos infinitesimalmente próximos, podemos obter a métrica em $\mathcal{M}$ usando a equação (1.3)

$$ds^2 = \eta_{ab} d\xi^a d\xi^b = \eta_{ab} e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu(x) dx^\mu dx^\nu \; ,$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu(x) \; . \tag{1.4}$$

Assim, nesse formalismo, a vielbein é um dos campos fundamentais da Relatividade Geral na descrição da gravitação. Através dela, podemos medir ângulos e calcular distâncias na variedade. Além disso, conforme discutido ao longo das próximas subseções, a vielbein é importante, pois ela revela simetrias locais que a métrica não manifesta, o que permite a inclusão de férmions na teoria.

No que diz respeito às simetrias, tanto o tensor métrico quanto a vielbein transformam-se de acordo com as transformações gerais de coordenadas. Na vielbein, essa simetria manifesta-se nos índices gregos e é dada por

$$e^a{}_\mu(x) \longrightarrow e'^a{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a{}_\nu(x) \ , \tag{1.5}$$

transformando-se covariantemente como um co-vetor.

Além das transformações gerais de coordenadas, a vielbein transforma-se como um vetor sob transformações locais de Lorentz

$$e^a{}_\mu(x) \longrightarrow e'^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x) \ , \tag{1.6}$$

em que a matriz $\Lambda(x) \in SO(1, D-1)$ é a matriz das transformações de Lorentz e depende da posição do espaço-tempo.

O espaço tangente local é invariante sob transformações de Lorentz, isto é, a métrica não é alterada por estas transformações

$$\eta_{ab} \Lambda^a{}_c(x) \Lambda^b{}_d(x) = \eta_{cd} \ . \tag{1.7}$$

Assim, se métrica não é alterada, isto significa que podemos realizar infinitas transformações de Lorentz na métrica dos planos tangentes sem que nenhuma alteração ocorra com a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ da variedade $\mathcal{M}$. Logo, como cada um desses infinitos planos tangentes pode ser relacionado com a variedade $\mathcal{M}$ através das vielbeins e como a métrica dessa variedade, $g_{\mu\nu}(x)$, permanece invariante sob as transformações (1.7), concluímos que não é possível determinar univocamente a vielbein que reproduz a métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Em outras palavras, existem infinitas vielbeins que são capazes de reproduzir a mesma métrica $g_{\mu\nu}(x)$.

Além disso, é importante ressaltar que a descrição da Relatividade Geral em termos de $g_{\mu\nu}(x)$ e $e^a{}_\mu(x)$ é equivalente, pois ambos possuem o mesmo número de graus de liberdade. A métrica $g_{\mu\nu}$ é uma matriz simétrica e, portanto, tem, em um espaço D-dimensional, $D(D+1)/2$ componentes independentes. Por outro lado, a vielbein teria, em princípio,

D^2 componentes independentes. Entretanto, devido à simetria por transformações de Lorentz (1.6), o número de componentes independentes da matriz antisimétrica $\Lambda^a{}_c(x)$, $D(D-1)/2$, é subtraído, de modo que a vielbein também adquire $D(D+1)/2$ componentes independentes.

É importante ressaltar que a vielbein deve possuir uma matriz inversa. Ela foi definida em (1.1) como a matriz jacobiana que faz o mapa entre os tensores da variedade $\mathcal{M}$ e os tensores do plano tangente T_x. Para que haja um isomorfismo, deve ser possível fazer uma transformação de coordenadas em tensores do plano tangente T_x para obter tensores correspondentes em $\mathcal{M}$. Logo, definimos a inversa da vielbein como

$$e^\mu{}_a(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \ , \tag{1.8}$$

de modo que são estabelecidos os seguintes vínculos

$$e^a{}_\mu e^\mu{}_b(x) = \delta^a{}_b \ , \tag{1.9}$$

$$e^a{}_\nu e^\mu{}_a(x) = \delta^\mu{}_\nu \ . \tag{1.10}$$

Portanto, uma quantidade da variedade $\mathcal{M}$, $Z_{\mu\nu}$, é um tensor que transforma-se por meio das transformações gerais de coordenadas. Ao ser projetado no espaço tangente, obtemos uma nova quantidade: o tensor Z_{ab}, o qual transforma-se por meio das transformações de Lorentz. Assim, a presença dessas duas simetrias é fundamental para descrever a gravitação.

As transformações de Lorentz são consequência do princípio da equivalência. Elas têm dependência espaço-temporal, pois o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ varia de ponto a ponto e, assim, os planos tangentes e as vielbeins também variam. Consequentemente, estas transformações variam de ponto a ponto e são chamadas de *transformações de Lorentz locais*. Assim, podemos realizar em dois pontos distintos do espaço-tempo, de forma independente uma da outra, duas diferentes transformações de Lorentz. A segunda simetria, os difeomorfismos, aparece devido à necessidade de conectar estes dois (e todos os outros) pontos da variedade $\mathcal{M}$.

Por fim, é importante ressaltar que o formalismo métrico da Relatividade Geral é baseado nas transformações gerais de coordenadas, cujo grupo de simetria, em D dimensões, é $GL(D,\mathcal{R})$. No entanto, como esse grupo não apresenta representações spinoriais **[20]**, podemos incluir o acoplamento ferminônico na gravitação através do formalismo das vielbeins. Assim, estamos incluindo a presença de férmions em um cenário de gravitação através da simetria de transformação de Lorentz local. Vale ressaltar que existem outras formas de inserir os férmions em um contexto gravitacional, as quais são descritas nas referências **[21][22]**.

1.1.2 Conexões de Spin e Derivadas Covariantes

Na seção anterior, vimos que podemos recuperar o espaço de Minkowski em cada ponto do espaço-tempo e que as transformações de Lorentz locais, cujo grupo é o $SO(1, D-1)$ são fundamentais nessa descrição da gravidade. Todavia, vale destacar que esta é uma simetria do espaço tangente à variedade, o que significa que este é um grupo de simetria interna. Isto é, $SO(1, D-1)$ não é uma simetria propriamente da variedade (do espaço-tempo), e sim dos planos tangentes associados a ela em cada ponto. Consequentemente, a existência desta simetria intrinsecamente interna permite-nos fazer comparações entre uma teoria de gravitação para o grupo $SO(1, D-1)$ e as teorias de gauge, as quais são a base para descrever as interações fundamentais. A referência **[18]** traz uma breve revisão das simetrias locais e dos campos de gauge.

As quantidades físicas podem ser classificadas de acordo com a sua transformação sob o grupo de Lorentz **[23]**. Desta forma, objetos cuja lei de transformação é dada pela equação (1.6) são definidos como vetores. Já um escalar é uma quantidade que é invariante sob essas transformações. De forma geral, um campo genérico transforma-se em uma representação R de dimensão n do grupo de Lorentz de acordo com a seguinte expressão

$$\Phi' = \Lambda\Phi \; ; \quad \Lambda = e^{-\frac{i}{2}\lambda^{ij}(x)\Sigma_{ij}} \; , \tag{1.11}$$

$$\Phi' = e^{-\frac{i}{2}\lambda^{ij}(x)\Sigma_{ij}}\Phi \; , \tag{1.12}$$

em que $\lambda^{ab}(x) = -\lambda^{ba}(x)$ são os parâmetros de transformação do grupo de Lorentz e Σ_{ab} são os geradores do grupo, que são matrizes $n \times n$ cuja forma explícita depende da representação do campo Φ.

Conforme ilustrado nessa referência **[18]**, na presença de simetrias locais, a derivada dos campos transforma-se diferentemente dos próprios campos, quebrando seu caráter tensorial. Por exemplo, se $X^a(x)$ é um campo que se transforma como um vetor sob $SO(1, D-1)$, sua lei de transformação será a mesma que a da vielbein na equação (1.7) e, portanto, sua derivada $\partial_\mu X^a(x)$ não se transformará mais como um vetor sob $SO(1, D-1)$, pois o grupo de gauge atua independentemente em cada ponto. Logo, para recuperar o caráter tensorial da derivada

$$\Big(D_\mu\Phi(x)\Big)' = e^{-\frac{i}{2}\lambda^{ij}(x)\Sigma_{ij}}\Big(D_\mu\Phi(x)\Big) \ , \tag{1.13}$$

em transformações que envolvem um parâmetro local, $\lambda_{ab} = \lambda_{ab}(x)$, adicionamos um termo chamado de *campo de gauge*, ${\omega_\mu}^{ab}(x)$, que está associado aos geradores da transformação Σ_{ab}. Assim, como é comum nas teorias de gauge, estes campos tomam valores na álgebra de Lie do grupo proposto, que neste caso é o grupo de Lorentz.

Com isso, a derivada covariante de um campo Φ em qualquer representação é definida da seguinte forma

$$\boxed{D_\mu\Phi(x) = \partial_\mu\Phi(x) + \frac{i}{2}{\omega_\mu}^{ab}(x)\Sigma_{ab}\Phi(x)} \ . \tag{1.14}$$

Considerando a seguinte definição

$$\omega_\mu(x) \doteq \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{ab}(x)\Sigma_{ab} \ , \tag{1.15}$$

podemos reescrever a derivada covariante do campo Φ da seguinte forma

$$D_\mu\Phi(x) = \partial_\mu\Phi(x) + i\omega_\mu(x)\Phi(x) \ . \tag{1.16}$$

A derivada covariante, definida através da equação (1.16), recuperará seu caráter tensorial se sua transformação for de acordo com a equação (1.13). Considerando que a lei de transformação do campo Φ é dada pelas equações (1.11) e (1.12), temos

$$D'_\mu\Phi'(x) = \Big(\partial_\mu + i\omega'_\mu(x)\Big)\Lambda(x)\Phi(x)$$

$$D'_\mu\Phi'(x) = \Big(\partial_\mu\Lambda(x)\Big)\Phi(x) + \Lambda(x)\partial_\mu\Phi(x) + i\omega'_\mu(x)\Lambda(x)\Phi(x) \ . \tag{1.17}$$

Por outro lado, operando com $\Lambda D_\mu\Phi$, obtemos

$$\Lambda(x)\Big(\partial_\mu + i\omega_\mu(x)\Big)\Phi(x) = \Lambda(x)\partial_\mu\Phi(x) + i\Lambda(x)\omega_\mu(x)\Phi(x) \ . \tag{1.18}$$

Portanto, para recuperar a condição de transformação tensorial da derivada, dada pela equação (1.13), devemos impor a igualdade entre as equações (1.17) e (1.18). Esta exigência fixa a transformação da quantidade ω_μ, a qual é dada por

$$\Big(\partial_\mu\Lambda(x)\Big)\Phi(x) + \Lambda(x)\partial_\mu\Phi(x) + i\omega'_\mu(x)\Lambda(x)\Phi(x) = \Lambda(x)\partial_\mu\Phi(x) + i\Lambda(x)\omega_\mu(x)\Phi(x)$$

$$\omega'_\mu(x) = \Lambda(x)\omega_\mu(x)\Lambda^{-1}(x) + i\Big(\partial_\mu\Lambda(x)\Big)\Lambda^{-1}(x)\ . \tag{1.19}$$

Quantidades que têm sua lei de transformação tal qual a expressa pela equação (1.19) são chamadas de *conexões*. Desta forma, os termos $\omega_\mu(x)$ também são chamados de *conexões de Lorentz* ou *conexões de spin* e são definidos através da equação (1.15).

Assim como comentado anteriormente, as definições da derivada covariante (1.14) e (1.16) estão em uma representação geral, de modo que a forma dessas equações mudará conforme mudarmos a representação do campo, que pode ser escalar, vetorial ou espinorial. Se o campo assumir a representação vetorial $\Phi(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow \Phi(x) \equiv X^a(x)$, a forma explícita dos geradores ao considerar a definição do grupo dada pela equação (1.12), será dada por

$$\Big(\Sigma_{cd}\Big)^a_{\ b} = i\Big(\delta^a_c\eta_{db} - \delta^a_d\eta_{cb}\Big)\ . \tag{1.20}$$

Adequando a equação (1.14) a um campo vetorial e substituindo a expressão (1.20) nesta equação, ficamos com a expressão da derivada covariante de um campo na representação vetorial

$$D_\mu X^a(x) = \partial_\mu X^a(x) + \frac{i}{2}\omega_\mu^{\ cd}(x)\Big(\Sigma_{cd}\Big)^a_{\ b} X^b(x)$$
$$D_\mu X^a(x) = \partial_\mu X^a(x) - \omega_\mu{}^a{}_b(x)X^b(x)\ . \tag{1.21}$$

Caso o campo assuma uma representação escalar, $\Phi(x) \in (0,0) \Rightarrow \Phi(x) \equiv \varphi(x)$, os geradores do grupo de Lorentz são nulos e a derivada covariante se reduz à derivada ordinária

$$D_\mu\varphi(x) = \partial_\mu\varphi(x) \tag{1.22}$$

Por fim, caso o campo assuma uma representação espinorial do grupo de Lorentz, $\Phi(x) \in (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \Phi(x) \equiv \Psi_\alpha(x)$, com os geradores do grupo, em 4 dimensões, sendo dados por

$$\Sigma^{ab} = \frac{i}{4}[\gamma^a, \gamma^b]\mathbb{I}_{4\times 4}\ , \tag{1.23}$$

em que γ^a e γ^b são as matrizes de Dirac de dimensão 4×4, que satisfazem a álgebra de Clifford

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathbb{I}_{4\times 4}$$
$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \qquad ; \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Novamente, adequando a equação (1.14) a um campo espinorial e substituindo a expressão dos geradores (1.23) nesta equação, obtemos a derivada covariante de um campo na representação espinorial do grupo de Lorentz

$$D_\mu \Psi_\alpha(x) = \partial_\mu \Psi_\alpha(x) - \frac{1}{8}\omega_\mu{}^{ab}(x)\Big([\gamma^a, \gamma^b]\Big)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x) \ . \tag{1.24}$$

1.1.3 A Relação Entre os Dois Formalismos

Ao longo das seções anteriores, introduzimos um novo formalismo para a descrição da Relatividade Geral, cujo campo fundamental projeta os objetos matemáticos da variedade $\mathcal{M}$ no espaço tangente T_x, através de uma transformação de coordenadas. Assim como comentado no final da seção *O Princípio da Equivalência e As Vielbeins*, tanto o formalismo métrico quanto este formalismo das vielbeins são capazes de fornecer descrições equivalentes da Relatividade Geral, pois ambos possuem o mesmo número de graus de liberdade. Além disso, as informações contidas no tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ estão contidas na vielbein.

No formalismo métrico da Relatividade Geral, também existe a presença de uma conexão, Γ, que serve para garantir o transporte paralelo de tensores ao longo da variedade $\mathcal{M}$, recuperando a covariância da derivada sob transformações gerais de coordenadas. Assim, a conexão é introduzida para que o espaço-tempo tenha uma estrutura geométrica consistente. Em geral, tanto a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ quanto a conexão Γ são os objetos necessários para uma completa descrição do espaço-tempo. No entanto, no modelo geométrico riemanniano, como exigimos que o comprimento do vetor permaneça constante ao longo de seu deslocamento na variedade, relacionamos a métrica com a conexão. Portanto, a consequência dessa exigência é que a conexão seja completamente descrita em termos da métrica, sendo chamada de *conexão métrica*

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\Big(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\Big) \ . \tag{1.25}$$

Desta forma, a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ é suficiente para fornecer uma completa descrição da geometria do espaço-tempo. Assim, se este formalismo métrico é equivalente ao formalismo das vielbeins, e se a vielbein e a métrica possuem o mesmo número de graus de liberdade, então a conexão de spin $\omega_\mu(x)$ precisa ser fixada em termos da vielbein, $\omega = \omega(e)$, de modo que ela não introduza nenhum novo grau de liberdade, para que essas formulações sejam realmente equivalentes.

Se a conexão Γ é determinada completamente pela métrica, ela é chamada de símbolo de Christoffel. Além disso, se a conexão de spin $\omega_\mu(x)$ pode ser escrita em termos da vielbein, então como a métrica também está relacionada com a vielbein, podemos inferir que existe uma relação entre o símbolo de Christoffel e a conexão de spin. Para determinar a relação entre a vielbein e a conexão de spin, precisamos retomar a discussão sobre derivadas covariantes.

Definimos, na seção anterior, por meio da conexão de spin, a derivada covariante de Lorentz (1.16) do espaço tangente. Assim como no espaço tangente, também é possível definir uma derivada covariante na variedade $\mathcal{M}$, mas desta vez baseado no grupo das transformações gerais de coordenadas. Seguindo o desenvolvimento feito no formalismo métrico, como apresentado nas referências **[19][24]**, a derivada covariante de um vetor da variedade $\mathcal{M}$ pode ser definida como

$$\nabla_\mu X^\nu(x) = \partial_\mu X^\nu(x) + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} X^\rho(x) \ . \tag{1.26}$$

Desta forma, a derivada covariante (1.26) de um objeto pertencente à variedade $\mathcal{M}$ será outro objeto da variedade $\mathcal{M}$ de mesmo rank e natureza.

As derivadas (1.16) e (1.26) atuam em tensores que se transformam sob transformações de Lorentz locais e difeomorfismos, respectivamente. No entanto, como existem objetos que possuem índices da variedade e do plano tangente, como a vielbein, torna-se necessária a construção de uma derivada que envolva o símbolo de Christoffel e a conexão de spin. Desse modo, teremos uma derivada que é covariante sob as transformações gerais de coordenadas e as tansformações de Lorentz locais. Logo, a partir das equações (1.21) e (1.26), definimos a derivada covariante de um tensor misto total como

$$\mathcal{D}_\mu X^a_\nu(x) = \partial_\mu X^a_\nu(x) - \omega_\mu{}^a{}_b(x) X^b_\nu(x) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} X^a_\rho(x) \ ,$$

$$\mathcal{D}_\mu X^a_\nu(x) = D_\mu X^a_\nu(x) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} X^a_\rho(x) \ . \tag{1.27}$$

Assim, considerando a equação (1.27), a derivada total da vielbein fica

$$\mathcal{D}_\mu e^a{}_\nu(x) = D_\mu e^a{}_\nu(x) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} e^a{}_\rho(x) \ . \tag{1.28}$$

Uma vez que estamos considerando uma conexão métrica (1.25), utilizando a derivada covariante (1.26) da métrica, obtemos um importante resultado, conhecido como condição de metricidade

$$\nabla_\mu g^{\nu\rho} = 0 \ , \tag{1.29}$$

indicando que a métrica é um tensor covariantemente constante na variedade curva. Um cálculo detalhado e uma melhor discussão do resultado (1.29) podem ser encontrados na referência [**19**]. Assim, substituindo a equação (1.4) na expressão (1.29) e seguindo a argumentação desenvolvida na referência [**18**], a relação de metricidade (1.29) impõe as vielbeins a seguinte condição

$$\mathcal{D}_\mu e^a{}_\nu = 0 \ . \tag{1.30}$$

Substituindo o resultado (1.30) na derivada covariante da vielbein (1.28), obtemos uma relação entre a conexão de spin e o símbolo de Christoffel, cuja existência havia sido comentada no começo desta seção

$$\mathcal{D}_\mu e^a{}_\nu(x) = \partial_\mu e^a{}_\nu(x) - \omega_\mu{}^a{}_b(x) e^b{}_\nu(x) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} e^a{}_\rho(x) = 0 \ ,$$

$$\partial_\mu e^a{}_\nu(x) - \omega_\mu{}^a{}_b(x) e^b{}_\nu(x) = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} e^a{}_\rho(x) \ . \tag{1.31}$$

Multiplicando a equação (1.31) pela vielbein inversa $e^\nu{}_b$, encontramos a expressão para a conexão de spin

$$\omega_\mu{}^a{}_b(x) = e^\nu{}_b(x)\partial_\mu e^a{}_\nu(x) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} e^a{}_\rho(x) e^\nu{}_b(x) \ . \tag{1.32}$$

Assim, a equação (1.32) mostra que há uma relação explícita entre as duas conexões e que a única dependência da conexão de Lorentz será a vielbein. Logo, encontramos a relação desejada que fixa $\omega = \omega(e)$, de modo que a conexão de Lorentz não traz consigo nenhum novo grau de liberdade.

Portanto, verificamos nesta seção que as duas conexões, ω e Γ, não são independentes e que ambos os formalismos possuem o mesmo número de graus de liberdade, o que significa que eles são completamente equivalentes.

1.1.4 A Curvatura e a Ação de Einstein-Hilbert

No formalismo métrico da Relatividade Geral e nas teorias de Yang-Mills, uma importante característica é que, ao contrário das derivadas ordinárias, as derivadas covariantes perdem a propriedade de comutatividade, devido à curvatura do espaço em questão. Assim, o resultado do comutador de duas derivadas covariantes é o tensor de curvatura do espaço em questão, que nas teorias de Yang-Mills são chamados de *field strength tensor*. Portanto, como estamos usando o formalismo das vielbeins, precisamos determinar a forma do tensor de curvatura em termos das vielbeins e das conexões de spin. Após determinarmos sua forma, poderemos expressar a ação da Relatividade Geral neste formalismo.

Usando a definição da derivada covariante de um objeto misto, dada pela equação (1.27), o comutador fica

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]A^a = \left[\partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b - \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b\right] A^b + \left(\Gamma_{\nu\mu}{}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho\right) D_\rho A^a \ . \quad (1.33)$$

Como estamos considerando a conexão simétrica, o termo de torção é nulo

$$T_{\nu\mu}{}^\rho \equiv \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho = 0 \ , \quad (1.34)$$

de modo que o comutador das derivadas (1.33) fica

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]A^a = \left[\partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b - \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b\right] A^b \ . \quad (1.35)$$

Por outro lado, assim como demonstrado nas referências **[18][19]**, no formalismo métrico o tensor de curvatura é dado por

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\sigma = \left[\partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}{}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}{}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}{}^\sigma \Gamma_{\mu\rho}{}^\lambda\right] A^\rho \ , \quad (1.36)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\sigma = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma A^\rho \ . \quad (1.37)$$

Assim, como a equação (1.35) tem a mesma estrutura que a equação (1.36), podemos definir a quantidade entre colchetes da equação (1.35) como o tensor de curvatura em termos da conexão de spin, $R(e)$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}(e) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^{cb} - \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^{cb} \ , \quad (1.38)$$

em que usamos a propriedade de anti-simetria do tensor $R_{\nu\mu}{}^{ab} = -R_{\mu\nu}{}^{ab}$, que também é conhecido como *field strength* da conexão de spin. Assim, o tensor de curvatura de Riemann da variedade toma valores na álgebra de Lie do grupo de estrutura do espaço tangente.

Uma das características que tornam a Relatividade Geral uma teoria especial em (1+2) dimensões é a possibilidade de contrair os objetos tensoriais com o tensor tridimensional de *Levi-Civita*, ϵ_{abc}. Por exemplo, os geradores do grupo de Lorentz $SO(1,2)$ podem ser reescritos como $\Sigma_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\Sigma^{bc}$. Já a conexão de spin adquire a seguinte forma

$$\omega_\mu{}^a{}_b = \epsilon^a{}_{bc}\omega_\mu{}^c \ . \quad (1.39)$$

Assim, reescrevendo o tensor de Riemann (1.38)

$$R_{\mu\nu}{}^{bc}(e) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{bc} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{bc} + \omega_\nu{}^b{}_d \omega_\mu{}^{dc} - \omega_\mu{}^b{}_d \omega_\nu{}^{dc} \ , \tag{1.40}$$

podemos substituir a expressão (1.39) nos dois últimos termos deste tensor de Riemann (1.40), de modo que podemos reescrevê-los como

$$\omega_\nu{}^b{}_d \omega_\mu{}^{dc} - \omega_\mu{}^b{}_d \omega_\nu{}^{dc} = \omega_\mu{}^b \omega_\nu{}^c - \omega_\mu{}^c \omega_\nu{}^b \ . \tag{1.41}$$

Deste modo, o tensor de curvatura de Riemann (1.40) fica

$$R_{\mu\nu}{}^{bc}(e) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{bc} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{bc} + \omega_\mu{}^b \omega_\nu{}^c - \omega_\mu{}^c \omega_\nu{}^b \ . \tag{1.42}$$

Podemos simplificar a expressão (1.42). Para tanto, devemos lembrar que em três dimensões podemos escrever $R^a{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^a{}_{bc} R^{bc}{}_{\mu\nu}$. Assim, ao contrair ambos os lados da equação (1.42) com o tensor de Levi-Civita ϵ_{abc}, temos

$$R_{\mu\nu}{}^a(e) = \partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a + \epsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b \omega_\nu{}^c \ . \tag{1.43}$$

Para encerrar esta parte de revisão da Relatividade Geral, falta escrevermos a ação de Einstein-Hilbert. Como vimos ao longo desta seção, a descrição da Relatividade Geral via formulação de gauge do grupo de Lorentz $SO(1, D-1)$ apresenta duas simetrias: as transformações gerais de coordenadas e as transformações de Lorentz locais, cujos campos de gauge associados são a vielbein e a conexão de spin, respectivamente. Como a densidade Lagrangeana deve ser invariante sob essas simetrias, então ela deve ser um escalar. A quantidade escalar mais simples que preenche esses requisitos é dada pelo escalar de curvatura de Ricci, o qual é calculado a partir do tensor de Riemann (1.42)

$$R = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} = e^\mu{}_a e^\nu{}_b R_{\mu\nu}{}^{ab}(e) \ . \tag{1.44}$$

Devemos notar, com o auxílio das equações (1.25), (1.32) e (1.38), que este escalar de Ricci envolve, no máximo, derivadas de segunda ordem na vielbein. Assim como comentado na referência **[18]**, existe uma discussão na literatura a respeito da possibilidade de termos envolvendo derivadas superiores, como por exemplo na discussão elaborada na referência **[25]**. No entanto, esta discussão envolvendo termos de derivadas superiores ganha força apenas no cenário de uma teoria quântica da gravitação, como é o caso da Teoria de Cordas. Como estamos no limite macroscópico, não precisamos levar em conta esses termos de derivada superior.

Usando o escalar de curvatura (1.44), juntamente com o determinante da vielbein (ou da métrica), que é responsável por garantir a invariância da ação sob transformações gerais de coordenadas, como detalhado na referência [**19**], a ação da Relatividade Geral, em D dimensões, sem a presença da constante cosmológica é dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^D x(\det\ e)R_{\mu\nu}{}^{ab}(e)e^{\mu}{}_{a}e^{\nu}{}_{b}\ . \tag{1.45}$$

No entanto, apesar deste ser o roteiro seguido pelas teorias de Yang-Mills, como no caso da QED, a ação (1.45) é linear no *field strength*, diferentemente das teorias de Yang-Mills, as quais são quadráticas no *field strength*. É possível encontrar nas referências [**26**][**27**] uma clara e direta construção da QED, mostrando que a ação envolve termos quadráticos. Desta forma, a Relatividade Geral não é exatamente uma teoria de gauge, devido a esta considerável diferença na sua dinâmica.

Em (1+2) dimensões, usando a possibilidade de contrações com o tensor tridimensional de Levi-Civita, podemos reescrever a ação de Einstein-Hilbert (1.45) como

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\rho}e_{a\rho}R_{\mu\nu}{}^{a}(e)\ . \tag{1.46}$$

A partir da ação (1.46), podemos obter a equação de Einstein da Relatividade Geral em $(1+2)$ dimensões.

Conforme discutido nas referências [**4**][**28**], a quantização da gravidade em $(1+3)$ dimensões apresenta vários problemas conceituais, tal como o problema do tempo, que é tratado de maneiras distintas na Relatividade Geral e na Mecânica Quântica. Assim, uma forma de tentar entender esses problemas da quantização da gravidade em $(1+3)$ dimensões é procurar por modelos mais simples que tenham as características da Relavidade Geral, mas que não possuam algumas das dificuldades do modelo 4-dimensional.

Desta forma, a Relatividade Geral em $(1+2)$ dimensões aparece como um ótimo modelo para tratar desses problemas conceituais, pois, como mencionado na referência [**4**], é um modelo matematicamente mais simples, mas que continua sendo uma teoria covariante, dotada de vários dos problemas quânticos que o modelo 4-dimensional possui. Com isso, um estudo do modelo 3-dimensional pode ser instrutivo para obter-se uma maior compressão das questões que aparecem na teoria em $(1+3)$ dimensões . Além disso, considerando a presença da constante cosmológica negativa, $\Lambda < 0$, o modelo em $(1+2)$ dimensões também admite soluções de buracos negros, chamados de BTZ [**29**], os quais possuem massa, carga e momento angular, além de propriedades termodinâmicas similares as dos modelos em 4 dimensões. Uma revisão a respeito desses buracos negros pode ser encontrada na referência [**30**]. Já a referência [**31**] traz uma grande discussão a respeito de diversos aspectos ligados à física gravitacional em $(1+2)$ dimensões, abordando, por exemplo, modelos cosmológicos como o modelo de Friedmann-Robertson-Walker, cenários envolvendo eletrodinâmica não-linear, além de um ampla revisão sobre buracos negros.

Portanto, tendo em vista a riqueza e a relevância da Relatividade Geral em $(1+2)$ dimensões para a quantização da gravidade e a sua importância para o estudo das teorias topológicas, objeto de estudo desta Dissertação, o objetivo da próxima seção será demonstrar uma das principais características deste modelo: a sua indepedência em relação à métrica e, consequentemente, o fato que não há propagação de ondas gravitacionais.

1.2 Gravitação como uma Teoria Topológica

Assim como mencionado no final da última seção, a gravidade 3-dimensional exerce um importante papel no cenário da física contemporânea, estando diretamente ligada à gravitação e, em especial, a sua quantização. Assim, como existe uma conexão entre a Relatividade Geral e a teoria de Chern-Simons, o objetivo da primeira subseção é ilustrar as principais características desta teoria, concluindo com a obtenção de sua equação de movimento. Posteriormente, prosseguiremos para a identificação da Relatividade Geral como uma teoria de Chern-Simons em 3 dimensões.

1.2.1 Breves Comentários sobre a Teoria de Chern-Simons

Uma teoria de Chern-Simons é uma teoria de gauge em dimensões ímpares que não requer a introdução da métrica ou de qualquer outra estrutura de fundo para a sua definição, ou seja, é uma teoria que não requer uma noção de distância, deixando apenas a topologia da variedade como propriedade relevante da teoria, tornando-a, portanto, invariante sob transformações de difeomorfismo. Dessa forma, a teoria de Chern-Simons é um exemplo de teoria topológica, tema que será abordado mais adiante nesta dissertação. Com isso, seja $\mathcal{M}$ uma variedade 3-dimensional e G um grupo de gauge, a ação de Chern-Simons é definida como

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} Tr\left\{A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right\} . \tag{1.47}$$

Na ação (1.47), A é uma *1-forma*, $A \equiv A_\mu dx^\mu = A^a_\mu T_a dx^\mu$, e corresponde a uma conexão do grupo de gauge G, isto é, A é um potencial vetor da teoria de gauge, que tem G como seu grupo de gauge e T_a como os geradores da sua álgebra de Lie, que satisfazem

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c \ , \tag{1.48}$$

em que $f_{ab}{}^c$ é a constante de estrutura do grupo. Desse modo, a transformação da conexão A sob o grupo de gauge G é dada por

$$A \longrightarrow A'_\mu = U^{-1} A_\mu U + U^{-1} \partial_\mu U \ , \tag{1.49}$$

em que U é um elemento do grupo G, dado por $U = e^{i\lambda^a(x)T_a}$, no qual k é o parâmetro de transformação. Além disso, na expressão (1.47) κ é uma constante de acoplamento e Tr denota um invariante bilinear sob a álgebra de gauge do grupo G.

Para obtermos mais informações a respeito da teoria de Chern-Simons, vamos calcular sua equação de movimento. Para tanto, vamos reescrever a ação (1.47) em termos de componentes, a qual fica dada por

$$S = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \ Tr \left\{ A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right\} . \tag{1.50}$$

Assim, sob variações infinitesimais do campo de gauge A_μ, a variação na ação é dada por

$$\delta S = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \ Tr \left\{ \delta A_\mu \partial_\nu A_\rho + A_\mu \partial_\nu (\delta A_\rho) + \frac{2}{3} \delta A_\mu A_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu \delta A_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu \delta A_\rho \right\} . \tag{1.51}$$

Como o tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ é totalmente antisimétrico, vamos fazer uma permutação anticíclicas no segundo termo e permutações cíclicas nos três últimos termos da equação (1.51), de modo que ficamos com

$$\delta S = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \ Tr \left\{ \delta A_\mu \partial_\nu A_\rho + A_\nu \partial_\rho (\delta A_\mu) + 2 \delta A_\mu A_\nu A_\rho \right\} . \tag{1.52}$$

Notando que $A_\nu \partial_\rho (\delta A_\mu) = \partial_\rho (A_\nu \delta A_\mu) - \delta A_\mu \partial_\rho A_\nu$ e que o termo com a derivada total pode ser eliminado via condições de contorno, a equação (1.52) pode ser reescrita como

$$\delta S = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \ Tr \left\{ \delta A_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + 2 \delta A_\mu A_\nu A_\rho \right\} . \tag{1.53}$$

Usando novamente o fato de que o tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ é totalmente antisimétrico, podemos escrever $A_\nu A_\rho = \frac{1}{2}(A_\nu A_\rho - A_\rho A_\nu) = \frac{1}{2}[A_\nu, A_\rho]$. Com isso, a variação da ação fica

$$\delta S = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \ Tr \left\{ \delta A_\mu \Big(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu + [A_\nu, A_\rho] \Big) \right\} . \tag{1.54}$$

O fator entre parênteses corresponde ao tensor *field-strenth* de gauge A e é definido como

$$F_{\nu\rho} = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu + [A_\nu, A_\rho] \quad ; F = dA + A \wedge A \; . \tag{1.55}$$

Portanto, tomando a variação da ação como zero, a equação de movimento da ação de Chern-Simons 3-dimensional é dada por

$$\delta S = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \; \epsilon^{\mu\nu\rho} \; Tr \Big\{ \delta A_\mu F_{\nu\rho} \Big\} = 0 \Longrightarrow \boxed{F = dA + A \wedge A = 0} \; . \tag{1.56}$$

Portanto, a equação de movimento (1.56) expressa uma das características da ação de Chern-Simons 3-dimensional: o *field-strenth* é identicamente nulo. Também podemos destacar que a ação (1.50) é invariante sob transformações de gauge infinitesimais para k genérico. A referência **[32]** contempla o caso de transformações de Yang-Mills na forma finita. Uma ampla revisão a respeito das Teorias de Chern-Simons pode ser encontrada na referência **[33]**. Já a referência **[34]** aborda uma revisão das Teorias de Chern-Simons em conexão com a gravitação e com a Supergravidade.

1.2.2 Chern-Simons e a Relatividade Geral

O objetivo desta subseção é demonstrar a relação entre a teoria de Chern-Simons, estudada na subseção anterior, com a Relatividade Geral em $(1+2)$ dimensões, o qual foi demonstrado por Witten em 1988 **[9]**. Desta forma, vamos considerar o caso da ação de Chern-Simons sem a presença da constante cosmológica, dada pela equação (1.47). A constante cosmológica será incluída na próxima subseção.

Para realizarmos essa identificação, é necessária a escolha de um grupo de gauge G para a ação de Chern-Simons, o qual será dado pelo grupo de Poincaré em 3 dimensões, $ISO(1,2)$. Este grupo possui 6 geradores, que correspodem à translação, P^a, e às transformações de Lorentz, J^{ab} $(a, b = 0, 1, 2)$. Note que nesta dimensão é válida a seguinte relação: $J^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}J_{bc}$. Com isso, as relações de comutação da álgebra destes geradores são dadas por

$$\begin{cases} [J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J^c, \\ [J_a, P_b] = \epsilon_{abc}P^c, \\ [P_a, P_b] = 0. \end{cases} \tag{1.57}$$

Além disso, vamos escolher a forma para o bilinear invariante do grupo. Em outras palavras, vamos impor o seguinte comportamento para o traço do produto de dois geradores

$$\begin{cases} \left\langle J_a, P^b \right\rangle = \delta_a^b, \\ \langle J_a, J_b \rangle = 0, \\ \langle P_a, P_b \rangle = 0. \end{cases} \tag{1.58}$$

Com essas definições, podemos escrever o campo de gauge A em termos dos geradores do grupo $ISO(1,2)$, o qual fica dado por

$$A_\mu(x) = e^a{}_\mu(x)P_a + \omega_\mu{}^a(x)J_a \ . \tag{1.59}$$

Estas definições serão utilizadas mais adiante. É importante destacar que uma p-forma é um tensor de rank p completamente antissimétrico e que a 1-forma A é dada por $A = A_\mu dx^\mu$. Além disso, também devemos lembrar que são válidas as seguintes relações para as formas diferenciais

$$A \wedge A = \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu \ , \tag{1.60}$$

$$dA = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\Big)dx^\mu \wedge dx^\nu \ . \tag{1.61}$$

Com isso, substituindo-as na expressão (1.47), a ação de Chern-Simons fica dada por

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{A_\rho dx^\rho \wedge \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\Big)dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{2}{3}A_\rho dx^\rho \wedge \Big(\frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu\Big)\Bigg\} . \tag{1.62}$$

Substituindo a expressão (1.59) na ação (1.62), ficamos com

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\Big(e^a{}_\rho P_a + \omega_\rho{}^a J_a\Big)dx^\rho \wedge \frac{1}{2}\Big[\partial_\mu\Big(e^b{}_\nu P_b + \omega_\nu{}^b J_b\Big) - \partial_\nu\Big(e^b{}_\mu P_b + \omega_\mu{}^b J_b\Big)\Big]dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$+ \frac{2}{3}\Big(e^a{}_\rho P_a + \omega_\rho{}^a J_a\Big)dx^\rho \wedge \frac{1}{2}\Big[e^b{}_\mu P_b + \omega_\mu{}^b J_b, e^c{}_\nu P_c + \omega_\nu{}^c J_c\Big]dx^\mu \wedge dx^\nu\Bigg\} . \tag{1.63}$$

Trabalhando com o primeiro termo da equação (1.63), temos

$$\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\Big(e^a{}_\rho P_a + \omega_\rho{}^a J_a\Big)dx^\rho \wedge \Bigg[J_b \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\omega_\nu{}^b - \partial_\nu\omega_\mu{}^b\Big)\ dx^\mu \wedge dx^\nu}_{d\omega^b}$$

$$+ \ P_b \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu e^b{}_\nu - \partial_\nu e^b{}_\mu\Big)\ dx^\mu \wedge dx^\nu}_{de^b}\Bigg]\Bigg\} . \tag{1.64}$$

Lembrando que $\omega^a = \omega^a_\rho dx^\rho$ e $e^a = e^a{}_\rho dx^\rho$, o primeiro termo da equação (1.63) é dado por

$$\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\Big(e^a P_a + \omega^a J_a\Big) \wedge \Big(de^b P_b + d\omega^b J_b\Big)\Bigg\} . \tag{1.65}$$

Por outro lado, trabalhando o comutador do segundo termo da equação (1.63)

$$= \int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\frac{2}{3}\Big(e^a_\rho P_a + \omega_\rho{}^a J_a\Big)dx^\rho \wedge \frac{1}{2}\Big(e^b{}_\mu e^c{}_\nu [P_b, P_c]dx^\mu \wedge dx^\nu + e^b{}_\mu \omega_\nu{}^c [P_b, J_c]dx^\mu \wedge dx^\nu +$$

$$+ \omega_\mu{}^b e^c{}_\nu [J_b, P_c]dx^\mu \wedge dx^\nu + \omega_\mu{}^b \omega_\nu{}^c [J_b, J_c]dx^\mu \wedge dx^\nu\Big)\Bigg\} . \qquad (1.66)$$

Usando as relações de comutação (1.57), a equação (1.66) pode ser reescrita como

$$\int_{\mathcal{M}} Tr\left[\frac{2}{3}\Big(e^a P_a + \omega^a J_a\Big) \wedge \frac{1}{2}\Big(e^b \wedge \omega^c [P_b, J_c] + \ \omega^b \wedge e^c [J_b, P_c] + \omega^b \wedge \omega^c [J_b, J_c]\Big)\right] \qquad (1.67)$$

Portanto, substituindo as expressões (1.65) e (1.67) na equação (1.63)

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\Big(e^a P_a + \omega^a J_a\Big) \wedge \Big(de^b P_b + d\omega^b J_b\Big) +$$

$$+ \frac{2}{3}\Big(e^a P_a + \omega^a J_a\Big) \wedge \frac{1}{2}\Big(e^b \wedge \omega^c [P_b, J_c] + \ \omega^b \wedge e^c [J_b, P_c] + \omega^b \wedge \omega^c [J_b, J_c]\Big)\Bigg\} . \qquad (1.68)$$

Desenvolvendo o produto exterior da equação (1.68), ficamos com

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\Big(e^a \wedge de^b P_a P_b + e^a \wedge d\omega^b P_a J_b + \omega^a \wedge de^b J_a P_b + \omega^a \wedge d\omega^b J_a J_b\Big)$$

$$+ \frac{1}{3}\Big(e^a \wedge e^b \wedge \omega^c \ P_a [P_b, J_c] + e^a \wedge \omega^b \wedge e^c \ P_a [J_b, P_c] + e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \ P_a [J_b, J_c] \qquad (1.69)$$

$$+ \omega^a \wedge e^b \wedge \omega^c \ J_a [P_b, J_c] + \omega^a \wedge \omega^b \wedge e^c \ J_a [J_b, P_c] + \omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \ J_a [J_b, J_c]\Big)\Bigg\} .$$

Estes comutadores também podem ser calculados através das relações (1.57). Além disso, note que, por exemplo, usando as relações (1.58)

$$Tr(\omega^a \wedge \omega^b \wedge e^c \ J_a [J_b, P_c]) = \omega^a \wedge \omega^b \wedge e^c \ \epsilon_{bcd} \langle J_a, P^d \rangle = e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \ \epsilon_{abc} . \qquad (1.70)$$

Repetindo o mesmo procedimento descrito pela equação (1.70) nos demais termos da equação (1.69), temos

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \Big[2e^a \wedge d\omega_a + \epsilon_{abc} e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c\Big] . \qquad (1.71)$$

Reescrevendo a equação (1.71) em termos de $\omega^a = \omega_\rho{}^a dx^\rho$ e $e^a = e^a{}_\rho dx^\rho$

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \Big\{e^a{}_\rho \Big[\partial_\mu(\omega_a)_\nu - \partial_\nu(\omega_a)_\mu\Big] + \epsilon_{abc} \ e^a{}_\rho \omega_\mu{}^b \omega_\nu{}^c\Big\} \underbrace{dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu}_{\epsilon^{\rho\mu\nu} d^3x} . \qquad (1.72)$$

Fazendo uma renomeação nos índices da equação (1.72), podemos reescrevê-la como

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\rho} e_{a\mu}\Big\{\partial_\nu \omega_\rho{}^a - \partial_\rho \omega_\nu{}^a + \epsilon^a{}_{bc}\ \omega_\nu{}^b \omega_\rho{}^c\Big\}\ . \tag{1.73}$$

O termo entre chaves da equação (1.73) é justamente o tensor de curvatura de Riemann em $(1+2)$ dimensões, dado pela equação (1.43). Assim, a ação (1.73) fica dada por

$$\boxed{S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\rho} e_{\mu a} R_{\nu\rho}{}^a}\ , \tag{1.74}$$

que é justamente a ação (1.46). Portanto, escrevemos a ação da Relatividade Geral em $(1+2)$ dimensões a partir da ação de Chern-Simons (1.47) para o grupo de gauge $ISO(1,2)$ e das relações (1.57) e (1.58). Dessa forma, a Relatividade Geral nesta dimensão caracteriza-se como uma teoria que não depende da métrica, ou seja, uma teoria topológica. Também é importante destacar que a completa identificação é feita tomando $k = \frac{4\pi}{2\kappa^2}$

Variando a ação (1.74) em relação a vielbein, obtemos a primeira equação de movimento

$$R_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a + \epsilon^a{}_{bc}\ \omega_\mu{}^b \omega_\nu{}^c = 0\ , \tag{1.75}$$

que mostra que a equação de campo de Einstein é identicamente nula. Assim, esse resultado indica que qualquer solução da equação de campo terá curvatura constante, implicando que em $(1+2)$ dimensões não há propagação de ondas gravitacionais. A outra equação de movimento pode ser obtida pela variação da conexão de spin, resultando na condição de torção nula, $T_{\mu\nu} = 0$. Desse modo, estabelecemos uma relação entre a conexão de spin e a vielbein.

Por fim, o próximo passo de nosso cálculo é investigar como as transformações de gauge infinitesimais da teoria de Chern-Simons se relacionam com as transformações sob translações locais e as transformações de Lorentz locais, que são as simetrias presentes na Relatividade Geral. Para tanto, vamos considerar o campo de gauge A_μ dado pela equação (1.59), e que toma valores na álgebra de Lie do grupo $ISO(1,2)$. A transformação infinitesimal de gauge deste campo é dada por

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \lambda - [A_\mu, \lambda]\ , \tag{1.76}$$

em que λ é o parâmetro de transformação infinitesimal. Este parâmetro também toma valores na álgebra de Lie do grupo $ISO(1,2)$ e é dado por $\lambda = \rho^a P_a + \tau^a J_a$, em que ρ

e τ são parâmetros infinitesimais associados, respectivamente, às translações locais e às transformações de Lorentz locais. Substituindo a expressão do parâmetro λ na equação (1.76), ficamos com

$$\delta A_\mu = \Bigg(-\partial_\mu \rho^a - \epsilon^a{}_{bc} e^b{}_\mu \tau^c - \epsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b \rho^c \Bigg) P_a + \Bigg(-\partial_\mu \tau^a - \epsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b \tau^c \Bigg) J_a \ . \qquad (1.77)$$

Portanto, comparando a equação (1.77) com a variação da equação (1.59), verificamos que as transformações infinitesimais dos campos de gauge são dadas por

$$\begin{cases} \delta e^a{}_\mu = -\partial_\mu \rho^a - \epsilon^a{}_{bc} e^b{}_\mu \tau^c - \epsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b \rho^c, \\ \delta \omega_\mu{}^a = -\partial_\mu \tau^a - \epsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b \tau^c \ . \end{cases} \qquad (1.78)$$

Note que os termos proporcionais a τ correspondem perfeitamente às transformações de Lorentz locais. Além disso, também devemos notar que as translações locais e as transformações de Lorentz locais se misturam na expressão da vielbein (1.78). Assim, vamos considerar apenas as transformações sob translações locais, isto é, aquelas que estão ligadas ao parâmetro ρ

$$\begin{cases} \delta e^a{}_\mu = -\partial_\mu \rho^a - \epsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b \rho^c, \\ \delta \omega_\mu{}^a = 0, \end{cases} \qquad (1.79)$$

e compará-las com as transformações sob difeomorfismos, de modo a verificar uma equivalência entre elas. Assim, as transformações sob difeomorfismos gerados por um campo vetorial $-v^\nu$ são dadas por

$$\bar{\delta} e^a{}_\mu = -v^\nu (\partial_\nu e^a{}_\mu - \partial_\mu e^a{}_\nu) - \partial_\mu (e^a{}_\nu v^\nu) \ , \qquad (1.80)$$

$$\bar{\delta} \omega_\mu{}^a = -v^\nu (\partial_\nu \omega_\mu{}^a - \partial_\mu \omega_\nu{}^a) - \partial_\mu (\omega_\mu{}^a v^\nu) \ . \qquad (1.81)$$

No caso da vielbein, para que a equação (1.80) seja equivalente à equação (1.79), tomamos o parâmetro infinitesimal ρ^a como $\rho^a = v^\mu e^a{}_\mu$. Com isso, comparando (1.80) com a equação (1.79), temos

$$\bar{\delta} e^a{}_\mu - \delta e^a{}_\mu = -v^\nu (\partial_\nu e^a{}_\mu - \partial_\mu e^a{}_\nu) + \epsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b v^\nu e^c{}_\nu \ . \qquad (1.82)$$

Utilizando a equação (1.21), podemos reescrever a equação (1.82) como

$$\bar{\delta} e^a{}_\mu - \delta e^a{}_\mu = -v^\nu (D_\nu e^a{}_\mu - D_\mu e^a{}_\nu) + \epsilon^a{}_{bc} \omega_\nu{}^b v^\nu e^c{}_\mu \ . \qquad (1.83)$$

Podemos destacar que o termo entre parênteses da equação (1.83), $D_\nu e^a{}_\mu - D_\mu e^a{}_\nu$, corresponde à torção no formalismo das vielbeins. Contudo, encontramos anteriormente que uma das equações de movimento da ação (1.74) correspondia justamente à torção nula. Ou seja, o termo entre parênteses é zero (*on-shell*). Além disso, o termo restante da equação (1.83) pode ser identificado como uma transformação de Lorentz local, cujo parâmetro é dado por $\tau^b = v^\nu {\omega_\nu}^b$.

$$\bar{\delta}{e^a}_\mu - \delta {e^a}_\mu = {\epsilon^a}_{bc}\tau^b {e^c}_\mu \ . \tag{1.84}$$

Portanto, como $\bar{\delta}{e^a}_\mu$ representa uma legítima transformação das vielbeins sob difeomorfismos, a equação (1.84) assegura que $\delta {e^a}_\mu$ também é uma transformação da vielbein sob difeomorfismos. Com isso, verificamos que, *on-shell*, a transformação (1.79) para a vielbein é equivalente à transformação de difeomorfismo (1.80). Além disso, também podemos ver que as transformações de Lorentz local aparecem, *on-shell*, por meio dos difeomorfismos.

No caso da conexão de spin, tomando o parâmetro infinitesimal como $\tau^a = v^\mu {\omega_\mu}^a$ e fazendo a subtração entre as equações (1.81) e (1.78), ficamos com

$$\bar{\delta}{\omega_\mu}^a - \delta{\omega_\mu}^a = -v^\nu (D_\nu {\omega_\mu}^a - D_\mu {\omega_\nu}^a) + {\epsilon^a}_{bc}\tau^b {\omega_\mu}^c \ . \tag{1.85}$$

O termo entre parênteses, $D_\nu {\omega_\mu}^a - D_\mu {\omega_\nu}^a$, equivale ao tensor de curvatura dado pela equação de movimento (1.75), que é zero. Assim, observamos novamente que a diferença entre as duas transformações é igual a uma transformação de Lorentz local. Portanto, verificamos que as translações locais e as transformações de Lorentz locais equivalem às transformações de gauge do grupo $ISO(1,2)$, desde que haja a inclusão das equações de movimento.

1.2.3 A Inclusão da Constante Cosmológica

Para encerrar o Capítulo, vamos generalizar a gravitação 3-dimensional para englobar o caso envolvendo a constante cosmológica. Para tanto, a única mudança necessária a ser feita é a modificação das relações de comutação (1.57), as quais passam a ser dadas por

$$\begin{cases} [J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J^c, \\ [J_a, P_b] = \epsilon_{abc}P^c, \\ [P_a, P_b] = \lambda\epsilon_{abc}J^c. \end{cases} \tag{1.86}$$

Nas equações (1.86), λ é justamente a constante cosmológica. Assim sendo, a diferença causada por estas novas relações de comutação aparece na equação (1.66), em que o termo

${e^b}_\mu {e^c}_\nu [P_b, P_c]$ deixa de ser zero. Com exceção deste termo, o desenvolvimento é exatamente o mesmo que no caso $\lambda = 0$. Assim, o termo extra é dada por

$$\frac{1}{3}\int_{\mathcal{M}} Tr\Big\{ e^a \wedge e^b \wedge e^c P_a[P_b, P_c] + \omega^{\ a} \wedge e^b \wedge e^c J_a[P_b, P_c] \Big\} \ . \tag{1.87}$$

Com isso, utilizando as relações de comutação (1.86) e desenvolvendo os mesmos passos que no caso anterior, a ação da gravitação em $(1 + 2)$ dimensões envolvendo a constante cosmológica é

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho}\Big\{ e_{a\mu}\Big(\partial_\nu {\omega_\rho}^a - \partial_\rho {\omega_\nu}^a\Big) + \epsilon_{abc} {e^a}_\mu \Big({\omega_\nu}^b {\omega_\rho}^c - \frac{\lambda}{3} {e^b}_\nu {e^c}_\rho\Big)\Big\} \tag{1.88}$$

Da mesma forma que no caso da ação (1.74), podemos calcular as equações de movimento da nova ação. Variando em relação a viebein, encontramos o tensor de curvatura

$${R_{\mu\nu}}^a = \partial_\mu {\omega_\nu}^a - \partial_\nu {\omega_\mu}^a + {\epsilon^a}_{bc} {\omega_\mu}^b {\omega_\nu}^c - {\epsilon^a}_{bc}\frac{\lambda}{3} {e^b}_\mu {e^c}_\nu \ , \tag{1.89}$$

mostrando que o espaço-tempo deixa de ser plano e torna-se localmente homogêneo com curvatura proporcional à constante cosmológica, λ. A outra equação de movimento permance a mesma, isto é, continuamos sem a presença de torção, $T_{\mu\nu} = 0$.

É importante destacar que, ao mudarmos as relações de comutação do grupo $ISO(1, 2)$, através da adição da constante cosmológica, nós mudamos o grupo de gauge da teoria. Assim, no caso da constante cosmológica positiva, o grupo passa a ser o grupo de *de Sitter*, $SO(1, 3)$ e, no caso da constante cosmológica negativa, o grupo passa a ser *anti-de Sitter*, $SO(2, 2)$. Logo, o grupo $ISO(1, 2)$ é o grupo de gauge da gravitação em 3 dimensões apenas na situação em que não há a presença de uma constante cosmológica. Caso contrário, os grupos são estes dois mencionados acima, dependendo do sinal de λ.

Com isto, encerramos o Capítulo em que evidenciamos a importância das teorias topológicas, sobretudo em um cenário gravitacional. Ressaltamos ainda que a referência [**35**] aborda outros detalhes desta discussão envolvendo Chern-Simons e Relatividade Geral em três dimensões, incluindo um outro método para obter os resultados demonstrados nesta seção. O próximo passo deste modelo seria desenvolver a sua quantização que, como comentado anteriormente, pode ajudar a elucidar questões do modelo em 4 dimensões. O procedimento de quantização da gravitação em (1+2) dimensões pode ser encontrado nas referências [**9**][**4**]. Já a referência [**36**] aborda outros detalhes da gravitação 3-dimensional como, por exemplo, a formulação Hamiltoniana e modelos massivos.

Capítulo 2

Supersimetria e Supergravidade

2.1 Uma Introdução Alternativa à Supersimetria

O modelo proposto por Gell-Mann [**37**] e, independentemente, por Ne'eman [**38**], para descrever as interações fortes, expandia o grupo de simetria $SU(2)$ de isospin isotópico de Wigner [**39**] para uma simetria mais ampla, $SU(3)$, de modo a incluir a estranheza entre os números quânticos. Assim, o modelo era capaz de acoplar partículas com diferentes cargas, isospin e estranheza, mas com massas muito próximas e idêntico spin em um mesmo multiplete, que constitui uma representação irredutível e unitária de $SU(3)$. As referências [**40**][**41**] apresentam detalhes do modelo Eightfold Way associado à simetria de sabor $SU(3)$. Com o advento do modelo de quarks por Gell-Mann [**42**] e, independemente, por Zweig [**43**], uma linha de trabalhos, iniciada por B. Sakita [**44**], levou em conta o cenário de quarks não-relativísticos e introduziu a possibilidade de estender a simetria $SU(3)$, agora considerando o triplete de quarks, para o grupo $SU(6)$, de modo que partículas de diferentes spins pudessem ser agrupadas em multipletes de maior dimensionalidade, como o singlete e octeto de mésons vetoriais e mésons pseudoescalares.

Conforme discutido na referência [**45**], o teorema de Coleman-Mandula [**46**] assegura que não é possível combinar os geradores do grupo de Poincaré com os geradores de uma simetria interna de uma forma não-trivial. Isto é, a única álgebra de Lie possível é aquela em que os geradores da simetria interna comutem com os do grupo de Poincaré. Dessa maneira, seria impossível implementar a simetria mista $SU(6)$, interna e espaço-temporal, por incluir geradores de spin, na Teoria Quântica de Campos.

No entanto, este teorema pode ser contornado através da generalização da álgebra de

Lie, que envolve a inclusão de geradores que satisfaçam relações de anti-comutação. Desta forma, o subgrupo bosônico ainda seria controlado pelo teorema de Coleman-Mandula, porém suas relações de comutação com os geradores fermiônicos passam a ser não-triviais. Estes geradores fermiônicos dão origem a uma simetria que agrega bósons e férmions em um multiplete único - o supermultiplete - sendo denominada **Supersimetria**. Além disso, a álgebra formada pelo anti-comutador dos geradores fermiônicos com os geradores das simetrias internas e do grupo de Poincaré forma a chamada álgebra de Lie generalizada ou graduada (*Graded Lie Algebra*) [**47**][**48**] [**49**].

O objetivo desta seção é introduzir a Supersimetria através de uma abordagem mais fundamental, intrinsecamente associada à simetria conforme, que opera no regime de altas energias, uma vez que uma teoria sem partículas massivas e com constantes de acoplamento adimensionais possui simetria conforme [**50**]. O nosso ponto de vista, não correntemente adotado, é desvincular a Supersimetria daquilo que são realmente os modelos de quebra da Supersimetria. O nosso objetivo é localizar a origem da Supersimetria. Parceiros supersimétricos, suas massas e sua aparição em escalas de energia dos aceleradores em operação atualmente é uma questão ligada a mecanismos de quebra, e não estão na essência do que é a Supersimetria. Esta, na nossa abordagem, é tão fundamental quanto é a simetria conforme no regime de energias assintoticamente altas. E isto faz uma grande diferença. Ao longo das sub-seções, discutiremos a importância dos espinores para a Física, evidenciando sua relação com o espaço-tempo e com o cone-de-luz. Baseado na fundamentalidade dos espinores, vamos discutir a introdução de uma transformação com parâmetro espinorial e obter a álgebra das transformações de um campo escalar e um campo espinorial. Com isto, poderemos perceber que a álgebra resultante é a mesma obtida através da evasão do teorema de Coleman-Mandula. Assim, a Supersimetria não se resume a uma busca por um grupo estendido de transformações que agrupa partículas de diferentes spins em um mesmo multiplete, e sim a uma consequência direta da fundamentalidade dos espinores no que diz respeito às isometrias do espaço-tempo e à estrutura causal deste mesmo espaço-tempo.

2.1.1 O Cone-de-Luz e o Grupo Conforme

Na estrutura do espaço-tempo de Minkowski e da Relatividade Restrita, existe um objeto chamado *cone-de-luz* que exerce um papel fundamental para que a teoria possa descrever processos físicos levando em conta a causalidade. O cone-de-luz é uma hipersuperfície formada pelo conjunto de todos os vetores tipo-luz em relação a um ponto específico do espaço-tempo **[24]** e pode ser estabelecido em todo e qualquer ponto do espaço-tempo. O cone-de-luz de um determinado ponto divide o espaço-tempo em três regiões distintas: parte superior (chamada de futuro), parte inferior (chamada de passado) e na região exterior.

A importância de tal definição reside no fato de que é através desta estrutura que estabelecemos a causalidade, que é um dos princípios mais fundamentais da natureza. Assim, um evento que ocorra em um determinado ponto A estabelece relações de causa e efeito com qualquer evento dentro ou na superfície de seu cone. No entanto, este mesmo evento A não pode desenvolver estas relações causais com pontos no exterior do cone. Desta forma, definimos as regiões causalmente acessíveis a este ponto.

Seja neste ponto A ou em qualquer outro ponto do espaço-tempo de Minkowski, é necessário garantir que as suas regiões não-causais em um dado referencial não possam se transformar, por uma simples troca de coordenadas, em regiões causais ou vice-versa. Desta forma, estamos tornando unívoca a nossa estrutura de causalidade, sem que haja mistura das regiões tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz. Este é um procedimento necessário, pois a quantização dos campos requer o princípio da microcausalidade **[26]**.

Isto posto, torna-se fundamental encontrar o conjunto de transformações mais geral possível que preserve a estrutura do cone-de-luz do espaço-tempo. Matematicamente, a definição do cone-de-luz no espaço de Minkowski é dada por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \ , \tag{2.1}$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço. Tomando o cone-de-luz em um novo referencial

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = 0 \ , \tag{2.2}$$

precisamos encontrar qual o conjunto mais geral possível de transformações que levam da equação (2.2) de volta na sua forma original (2.1), isto é, que deixam o cone-de-luz invariante. Assim, vamos considerar a seguinte transformação

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \ , \tag{2.3}$$

e sua derivada

$$\partial_\kappa x'^\mu = \partial_\kappa x^\mu + \partial_\kappa \xi^\mu(x) = \delta^\mu{}_\kappa + \partial_\kappa \xi^\mu(x) \ , \tag{2.4}$$

em que $\xi^\mu(x)$ é um vetor infinitesimal e pode representar qualquer uma das transformações que deixam o cone-de-luz invariante.

Fazendo uma transformação geral de coordenadas no cone-de-luz definido pela equação (2.2)

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}dx^\kappa\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}dx^\lambda = 0 \ . \tag{2.5}$$

Substituindo a relação (2.4) na equação (2.5) e considerando apenas os termos de primeira ordem

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu}\Big(\delta^\mu{}_\kappa + \partial_\kappa\xi^\mu(x)\Big)dx^\kappa\Big(\delta^\nu{}_\lambda + \partial_\lambda\xi^\nu(x)\Big)dx^\lambda = 0 \ ,$$

$$ds'^2 = \underbrace{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}_{0} + \Big(\partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu\Big)dx^\mu dx^\nu + \vartheta(\xi^2) = 0 \ .$$

Portanto, para que a igualdade seja satisfeita, devemos ter

$$\Big(\partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu\Big)dx^\mu dx^\nu = 0 \ . \tag{2.6}$$

Como o termo $dx^\mu dx^\nu$ na equação (2.6) é simétrico, isso significa que o termo $\partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu$ também deve ser simétrico, uma vez que a parte anti-simétrica é automaticamente zero. Além disso, devemos lembrar que uma matriz simétrica M, em um espaço N-dimensional, pode ser decomposta em

$$M_{\mu\nu} = \overline{M}_{\mu\nu} + \frac{1}{N}\delta_{\mu\nu}TrM \ , \tag{2.7}$$

em que $\overline{M}_{\mu\nu}$ é uma matriz simétrica de traço nulo e TrM é o traço da matriz M. No espaço de Minkowski em 4 dimensões, a equação (2.7) fica

$$M_{\mu\nu} = \overline{M}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}TrM \ . \tag{2.8}$$

Assim, tomando $M_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$ e substituindo a decomposição dessa matriz simétrica (2.8) na equação (2.6)

$$\Big(\overline{M}_{\nu\mu} + \frac{1}{4}\eta_{\nu\mu}TrM\Big)dx^\mu dx^\nu = 0 \ . \tag{2.9}$$

O segundo termo da equação (2.9) contém a estrutura do cone-de-luz, $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, que é automaticamente zero. Dessa forma, na equação (2.6), o termo nulo não deve ser $\partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu$, mas sim sua parte simétrica de traço nulo, $\overline{M}_{\mu\nu}$. É importante destacar que isto se deve ao fato de que o termo $dx^\mu dx^\nu$ é simétrico e de traço nulo. Logo,

$$\boxed{\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\kappa\xi^\kappa = 0} \ . \tag{2.10}$$

Esta equação fornece as isometrias do cone-de-luz e é chamada de *equação tipo-Killing conforme*. Ou seja, é a equação (2.10) que devemos resolver para determinar o conjunto mais geral possível de transformações locais que deixam o cone-de-luz invariante. A solução geral dessa equação tipo-Killing conforme (2.10) é dada por [**47**]

$$\xi^{\mu}(x) = \varepsilon^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + \lambda x^{\mu} + a^{\mu} x^{2} - 2x^{\mu} a^{\nu} x_{\nu}\ . \tag{2.11}$$

Esta solução (2.11), válida para dimensões $D > 2$, é chamada de transformação conforme e inclui as translações, transformações de Lorentz, dilatações e um termo quadrático em x, chamado de *boosts conformes*, cujos paramêtros correspondentes são, respectivamente, ε^{μ}, $\omega^{\mu}{}_{\nu}$, λ e a^{μ}, totalizando 15 componentes em 4 dimensões. Além disso, estas quatro transformações, combinadas na equação (2.11), formam um grupo de simetria chamado *grupo de simetria conforme*.

Este grupo de simetria é utilizado na Física de Altas Energias, com diversas aplicações em diferentes campos, tais como as Teorias de Campo Conforme, Teoria de Cordas, Gravitação, Supergravidade. A importância da simetria conforme e suas diversas aplicações na Física são discutidas nas referências [**51**][**52**]. Além disso, a correspondência das Teorias de Campos Conformes com as teorias de gravidade em espaços de Anti-de Sitter, conhecida como correspondência AdS/CFT, desempenha um importante papel no entendimento da Teoria de Cordas. Uma revisão sobre esta correspondência pode ser encontrada nas referências [**47**][**53**].

Com isso, concluímos que o grupo conforme é o grupo de simetrias do cone-de-luz no espaço de Minkowski. Em outras palavras, o grupo conforme está diretamente vinculado aos cones-de-luz da Relatividade Restrista.

2.1.2 O Espinor como um Objeto Fundamental

Na subseção anterior, vimos que as transformações mais gerais que deixam o cone-de-luz invariante são compostas por parâmetros escalares, vetoriais e tensoriais (2.11). No entanto, esses objetos matemáticos não são as quantidades mais básicas do espaço-tempo, isto é, eles podem ser formados a partir de outra entidade mais fundamental, que são os espinores. O objetivo desta subseção é justamente levantar tal discussão em torno da fundamentalidade dos espinores.

Conforme discutido na referência [**54**], para cada tensor de rank k, existe um espinor de rank *2k* correspondente, de modo que um quadri-vetor pode ser construído a partir de espinores e das matrizes de Pauli. As combinações entre espinores e as matrizes de Pauli também são capazes de produzir escalares, pseudo-escalares, pseudo-vetores e tensores de Lorentz [**55**]. Logo, é possível formar qualquer quantidade das representações do grupo de Lorentz a partir dos espinores. Além disso, também é possível construir as coordenadas de um ponto específico do espaço-tempo através da combinação de um espinor χ com as matrizes de Pauli do tipo $x_i = \chi^\dagger \sigma_i \chi$. Assim sendo, um conjunto de espinores é capaz de originar as coordenadas de todos os pontos do espaço-tempo.

Uma outra relação intrínseca entre o espinor e os vetores do espaço-tempo é dada pela conexão do grupo de transformação dos espinores, $SU(2)$, com o grupo de rotações do espaço euclidiano, $SO(3)$, que é um subgrupo do grupo de Lorentz. Conforme discutido nas referências [**23**][**54**][**56**], os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ são localmente isomórficos. Em outras palavras, a álgebra de Lie do grupo $SU(2)$ é idêntica a do $SO(3)$, implicando que estes dois são o mesmo grupo no limite de transformações infinitesimais. Do ponto de vista global, conforme demonstrado por um teorema na referência [**57**], existe uma relação de homomorfismo entre os dois grupos, pois existem dois elementos de $SU(2)$ correspondendo a cada elemento de $SO(3)$. Além disso, tomando uma combinação entre a matriz de Pauli σ_i e as matrizes de transformação do $SU(2)$, $U = e^{\frac{i}{2}\theta_j \sigma_j}$, podemos combiná-las, de modo que

$$U^\dagger \sigma_i U = \left(e^{\frac{i}{2}\theta_j \sigma_j}\right)^\dagger \sigma_i \left(e^{\frac{i}{2}\theta_j \sigma_j}\right) = \left(\delta_{ik} - \theta_j \epsilon_{ijk}\right)\sigma_k \ , \tag{2.12}$$

em que tomamos a expansão do grupo até a primeira ordem. Por outro lado, como o grupo $SO(3)$ é isomórfico ao $SU(2)$ em transformações infinitesimais, eles terão o mesmo parâmetro de transformação θ_j, de modo que tomando a versão infinitesimal do grupo $SO(3)$ é dada por

$$R = e^{i\theta_j G_j} \Longrightarrow R_{ik} = \delta_{ik} - \theta_j \epsilon_{ijk} \ , \tag{2.13}$$

em que G_j é o gerador do grupo $SO(3)$ em uma representação genérica e irredutível. Assim, substituindo (2.13) na equação (2.12), encontramos

$$U^\dagger \sigma_i U = R_{ij} \sigma_j \ . \tag{2.14}$$

Portanto, a equação (2.14) mostra que podemos obter o grupo de rotações do espaço euclidiano a partir da matriz de transformação do $SU(2)$ e das matrizes de Pauli, evidenciando outra relação do espaço-tempo com os spinors.

Do ponto de vista quântico, um sistema de spins composto por duas partículas com spins s_1 e s_2, forma um novo autoestado que está associado a um novo espaço de Hilbert. Por sua vez, os estados de base do novo espaço de Hilbert são construídos a partir dos autoestados das partículas originais, ou seja, seus estados de base são combinações entre os autoestados originais. Assim, este novo espaço é formado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert das duas partículas originais. Logo, podemos representar nosso sistema de spins envolvendo duas partículas em termos dos autoestados dos operadores das partículas originais ou através dos autoestados do novo operador, que vive no novo espaço de Hilbert. Desta forma, nosso sistema é descrito por

$$|s_1 \ , \ m_{s_1}\rangle \otimes |s_2 \ , \ m_{s_2}\rangle = |s_1 + s_2 \ , \ m_{s_1+s_2}\rangle \oplus \ldots \oplus | \ |s_2 - s_1| \ , \ m_{|s_2-s_1|}\rangle \ . \qquad (2.15)$$

Assim, tomando o caso particular em que $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$, os autoestados do novo espaço de Hilbert serão dados por

$$|1/2 \ , \ m_{1/2}\rangle \otimes |1/2 \ , \ m_{1/2}\rangle = |1 \ , \ m_1\rangle \oplus |0 \ , \ 0\rangle \ . \qquad (2.16)$$

Considerando que valores tomados pelo número quântico m_1 são $m_1 = -1, 0, 1$, concluímos que um sistema de spin constituído por dois estados de spin $\frac{1}{2}$, dá origem a três diferentes estados do spin 1 e um estado de spin 0. Assim, a composição de um sistema formado por partículas de spin $\frac{1}{2}$, origina partículas de spin 1 e spin 0. De forma geral, partículas de spin $\frac{1}{2}$ podem construir sistema composto de todos os possíveis spins inteiros ou semi-inteiros [**23**]. No entanto, vale ressaltar que o inverso não se aplica, isto é, não podemos obter partículas de spin $\frac{1}{2}$ a partir de sistemas formados por partículas de spin 1 e spin 0.

Um exemplo que ressalta o quão fundamentais são os espinores pode ser encontrado na formulação do Modelo-Padrão da Física de Partículas, através dos quarks. Os quarks são férmions de spin $\frac{1}{2}$, cujas combinações entre eles e os antiquarks têm a capacidade de gerar todos os mésons e os bárions catalogados pela Física de Partículas e agrupados num esquema conhecido como *Eightfold Way* [**41**]. Assim, a estrutura espinorial dos quarks está por trás de todos os hádrons (mésons e bárions) do modelo padrão.

Estes argumentos apresentados sugerem que a estrutura fundamental para descrever a natureza é a estrutura espinorial e que as outras quantidades matemáticas e a própria física derivam desta estrutura espinorial. Tendo isso em vista, podemos nos questionar se os quatro parâmetros do grupo conforme, dado pela equação (2.11), também possuem uma origem espinorial, ou seja, se eles podem ser escritos em termos de combinações de espinores.

Os quatro parâmetros que compõem o grupo conforme são quantidades bosônicas, pois eles são a solução de uma equação de caráter bosônico, que é a equação tipo-Killing conforme (2.10). Assim, se buscamos uma estrutura espinorial para formar estes quatro parâmetros, então precisamos modificar a equação tipo-Killing conforme bosônica (2.10), de modo a obter uma equação tipo-Killing conforme com caráter fermiônico.

Como precisamos preservar a estrutura matemática da equação (2.10), podemos nos basear na equação de Dirac sem massa, $i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0$, para encontrar a equação fermiônica correspondente. Através disso, podemos propor que a equação tipo-Killing conforme com caráter fermiônico é dada por

$$\left(\gamma_\mu\partial_\nu + \gamma_\nu\partial_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma_\kappa\partial^\kappa\right)\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.17}$$

Agora, temos uma equação tipo-Killing conforme de caráter fermiônico escrita em termos de um espinor, em vez do vetor ξ^μ. A equação (2.17) possui o mesmo papel que a equação (2.10) e o espinor $\Psi(x)$ faz o papel do vetor de Killing conforme ξ^μ nesta nova equação.

Para encontrar a forma do espinor $\Psi(x)$ podemos multiplicar a matriz γ^μ pela esquerda da equação (2.17). Além disso, utilizando a álgebra de Clifford destas matrizes $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, podemos reescrever a equação (2.17) como

$$\partial_\nu\Psi(x) = \frac{1}{4}\gamma_\nu\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) \ . \tag{2.18}$$

Derivando ambos os lados da equação (2.18) por ∂^ν e lembrando que $\Box = \gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu$, encontramos

$$\Box\Psi = \frac{1}{4}\Box\Psi(x) \Longrightarrow \Box\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.19}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.18) por $\gamma^\lambda\partial_\lambda$ e usando a álgebra de Clifford das matrizes γ^μ temos

$$\gamma^\lambda\partial_\lambda\partial_\nu\Psi(x) = \frac{1}{2}\eta^\lambda{}_\nu\partial_\lambda\left(\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x)\right) - \frac{1}{4}\gamma_\nu\underbrace{\gamma^\lambda\gamma^\mu\partial_\lambda\partial_\mu\Psi(x)}_{0} \ , \tag{2.20}$$

em que usamos o resultado (2.19) no segundo termo da equação (2.20). Logo, a partir da equação (2.20), encontramos que

$$\gamma^\lambda\partial_\lambda\partial_\nu\Psi(x) = \frac{1}{2}\gamma^\lambda\partial_\nu\partial_\lambda\Psi(x) \Longrightarrow \gamma^\lambda\partial_\lambda\partial_\nu\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.21}$$

Por fim, derivando ambos os lados da equação (2.18) por ∂_λ, temos

$$\partial_\lambda \partial_\nu \Psi(x) = \frac{1}{4}\gamma_\nu \partial_\lambda \Big(\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) \Big) = \frac{1}{4}\gamma_\nu \Big(\gamma^\mu \partial_\lambda \partial_\mu \Psi(x) \Big) \ . \tag{2.22}$$

Por último, utilizando o resultado (2.21) na expressão (2.22), verificamos que o espinor $\Psi(x)$ da equação (2.17) satisfaz a seguinte equação

$$\partial_\lambda \partial_\nu \Psi(x) = 0 \ , \tag{2.23}$$

indicando que $\Psi(x)$ é no máximo linear nas coordenadas do espaço-tempo, x^μ. Assim, a solução mais geral da equação tipo-Killing (2.17) é dada por

$$\Psi(x) = \psi_0 + i x_\mu \gamma^\mu \psi_1 \ , \tag{2.24}$$

em que ψ_0 e ψ_1 são espinores constantes.

Espinores de Majorana obedecem a uma condição de realidade **[58][59]**. Assim, qualquer 4-vetor do espaço-tempo de Minkowski pode ser construído a partir destes espinores, pois eles asseguram a realidade do objeto formado. Logo, podemos escrever o próprio vetor de Killing (2.11) como uma combinação de dois espinores de Majorana, β e Ψ, que passam a ser os objetos fundamentais do cone-de-luz

$$\xi^\mu \equiv i\overline{\Psi}\gamma^\mu \beta \ , \tag{2.25}$$

em que $\overline{\Psi}$ é chamado de espinor adjunto e é definido da seguinte forma: $\overline{\Psi} \doteq \Psi^\dagger \gamma^0$.

Como os espinores de Majorana β e Ψ estão por trás do vetor de Killing ξ^μ, os mesmos também estão por trás dos 15 parâmetros do grupo conforme. Assim, precisamos encontrar as combinações de β e Ψ que geram os parâmetros ε^μ, ${\omega^\mu}_\nu$, λ e a^ν. Tomando o espinor β com a forma (2.24) e substituindo na equação (2.25), ficamos com

$$\xi^\mu = i\Big(\overline{\psi_0} - i x_\nu \overline{\psi_1}\gamma^\nu \Big)\gamma^\mu \Big(\beta_0 + i x_\lambda \gamma^\lambda \beta_1 \Big) \ . \tag{2.26}$$

Para que haja uma equivalência entre as equações (2.11) e (2.26), precisamos reescrever a equação (2.26), de modo a deixar explícito

- Um vetor independete de x^μ
- Um objeto de dois índices do espaço-tempo multiplicado por x^μ
- Um escalar multiplicado por x^μ
- Um vetor a^μ multiplicado por x^2 e um termo do tipo a^ν multiplicado por $x_\nu x^\mu$

Fazendo o produto distributivo na equação (2.26), temos

$$\xi^\mu = i\left(\overline{\psi_0}\gamma^\mu\beta_0 + i\overline{\psi_0}\gamma^\mu x_\lambda\gamma^\lambda\beta_1 - ix_\nu\overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\beta_0 + x_\nu\overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu x_\lambda\gamma^\lambda\beta_1\right) . \tag{2.27}$$

O primeiro termo da equação (2.27) fornece um vetor de Lorentz independente de x^μ. Assim, ele pode ser identificado como o parâmetro das translações

$$\varepsilon^\mu \equiv i\overline{\psi_0}\gamma^\mu\beta_0 . \tag{2.28}$$

Trabalhando com o segundo e o terceiro termo da equação (2.27), podemos usar a expressão $\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ para reescrevê-los como

$$-\overline{\psi_0}\gamma^\mu x_\lambda\gamma^\lambda\beta_1 + x_\nu\overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\beta_0 = x^\mu\left(-\overline{\psi_0}\beta_1 + \overline{\psi_1}\beta_0\right) + \frac{1}{2}x_\nu\left(-\overline{\psi_0}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\beta_1 + \overline{\psi_1}[\gamma^\nu, \gamma^\mu]\beta_0\right) . \tag{2.29}$$

Como as matrizes β e Ψ são matrizes de Majorana, podemos aplicar a seguinte propriedade na equação (2.29)

$$\overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\beta_0 = \overline{\beta_0}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_1 . \tag{2.30}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão (2.29) como

$$-\overline{\psi_0}\gamma^\mu x_\lambda\gamma^\lambda\beta_1 + x_\nu\overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\beta_0 = x^\mu\left(-\overline{\psi_0}\beta_1 + \overline{\psi_1}\beta_0\right) + \frac{1}{2}x_\nu\left(-\overline{\psi_0}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\beta_1 + \overline{\beta_0}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi_1\right) . \tag{2.31}$$

Visto isso, conseguimos rearranjar os termos da equação (2.26), de modo que a equação (2.31) contém um objeto de dois índices do espaço-tempo multiplicado por x_ν e um escalar multiplicado por x^μ. Assim, podemos identificar os parâmetros das transformações de Lorentz e das dilatações, reescritos em termos de espinores, respectivamentes como

$$\omega^{\mu\nu} \equiv -\overline{\psi_0}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\beta_1 + \overline{\beta_0}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\psi_1 , \tag{2.32}$$

$$\lambda \equiv -\overline{\psi_0}\beta_1 + \overline{\psi_1}\beta_0 . \tag{2.33}$$

Por fim, precisamos tornar explícita a forma dos boosts conformes na equação (2.27). Aplicando a álgebra de Clifford no último termo do lado direito desta equação, temos

$$ix_\nu x_\lambda\overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\beta_1 = 2ix_\nu x_\lambda\overline{\psi_1}\gamma^\nu\eta^{\mu\lambda}\beta_1 - ix_\nu x_\lambda\overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\beta_1 . \tag{2.34}$$

O produto das matrizes $\gamma^\nu\gamma^\lambda$ pode ser reescrito como a soma da combinação simétrica e anti-simétrica destas matrizes. Como o termo $x_\nu x_\lambda$ é simétrico, isto significa que a parte antissimétrica desta combinação é nula. Logo, este produto pode ser reescrito em função apenas da sua combinação simétrica, de modo que a equação (2.34) fica

$$= 2ix_\nu x^\mu \overline{\psi_1}\gamma^\nu \beta_1 - i\frac{1}{2}x_\nu x_\lambda \overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\beta_1 - i\frac{1}{2}x_\nu x_\lambda \overline{\psi_1}\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu\beta_1 \; . \tag{2.35}$$

Para o produto das três matrizes γ, podemos usar a identidade

$$\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = \eta^{\nu\lambda}\gamma^\mu + \eta^{\lambda\mu}\gamma^\nu - \eta^{\nu\mu}\gamma^\lambda - i\epsilon^{\sigma\nu\lambda\mu}\gamma_\sigma\gamma^5 \; . \tag{2.36}$$

Novamente, como o termo $x_\nu x_\lambda$ é simétrico, ao substituirmos a identidade (2.36) na equação (2.35), o último termo da equação (2.36) será nulo, pois o tensor $\epsilon^{\sigma\nu\lambda\mu}$ é totalmente antissimétrico. Além disso, como estamos trabalhando com espinores de Majorana, vale a seguinte relação $\overline{\Psi}\gamma^\mu\beta = -\overline{\beta}\gamma^\mu\Psi$. Com estas considerações, ficamos com

$$ix_\nu x_\lambda \overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\beta_1 = 2ix_\nu x^\mu \overline{\psi_1}\gamma^\nu\beta_1 - x_\nu x^\nu \overline{\psi_1}\gamma^\mu\beta_1 \; ,$$

$$ix_\nu x_\lambda \overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\beta_1 = -2ix_\nu x^\mu \overline{\beta_1}\gamma^\nu\psi_1 + x_\nu x^\nu \overline{\beta_1}\gamma^\mu\psi_1 \; . \tag{2.37}$$

Portanto, conseguimos reescrever o termo $ix_\nu x_\lambda \overline{\psi_1}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\beta_1$ de modo a explicitar um vetor multiplicado por x^2 e outro termo multiplicado por $x_\nu x^\mu$. A partir disto, podemos identificar os boosts conformes como

$$a^\mu \equiv i\overline{\beta_1}\gamma^\mu\psi_1 \; . \tag{2.38}$$

Assim, fizemos uma completa identificação dos parâmetros do grupo conforme em termos de espinores tipo-Majorana, formados a partir da equação tipo-Killing conforme (2.26). Portanto, existem espinores por trás do grupo conforme, os quais se combinam para formar todos os seus parâmetros.

2.1.3 Uma Simetria entre Bósons e Férmions

Na subseção anterior, mostramos que existe uma estrutura fermiônica por trás do grupo conforme com os parâmetros de transformação do grupo sendo formados por espinores. Quando escrevemos o vetor de Killing conforme ξ^μ em termos de espinores (2.25), levamos os espinores para uma representação no espaço das coordenadas. Na Teoria de Campos, todas as simetrias internas são introduzidas no espaço de configuração dos campos, através de parâmetros bosônicos e qualquer simetria pode ser escrita em termos da representação dos campos. Por exemplo, a simetria interna $U(1)$ de parâmetro escalar é implementada na Eletrodinâmica Quântica, *QED*, no espaço dos campos como $\Psi \longrightarrow e^{iq\theta}\Psi$. Assim, se os espinores são as quantidades fundamentais da Natureza, originando as coordenadas do espaço-tempo e até próprias simetrias deste espaço-tempo, podemos nos questionar se podemos levá-los para o espaço de configuração dos campos, através de parâmetros espinoriais associados a uma nova simetria. Tendo isso em vista, estamos baseando-nos na abordagem tradicional da Teoria Quântica de Campos, mas desta vez utilizando um parâmetro fermiônico.

Portanto, a nossa proposição é entender as consequências que encontraríamos na ação de uma Teoria de Campos, caso o parâmetro de transformação fosse de natureza fermiônica.

A estrutura dos grupos de Lie é uma peça essencial na Física das Interações Fundamentais. Grupos de Lie são grupos que dependem de parâmetros reais que variam continuamente e é através deles que implementamos as simetrias e descrevemos as interações na Teoria de Campos [**60**]. Um exemplo destes grupos é o grupo de Lorentz. Em uma dada representação R deste grupo, um campo genérico χ^a transforma-se de acordo com a seguinte lei de transformação [**23**]

$$\chi^a \longrightarrow \left(e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}J_R^{\mu\nu}}\right)^a_{\ b}\chi^b \ , \tag{2.39}$$

em que $J_R^{\mu\nu}$ são os geradores do grupo de Lorentz na representação R e $\theta_{\mu\nu}$ os parâmetros da transformação. A versão infinitesimal desta transformação (2.39) é dada por

$$\delta\chi^a = -\frac{i}{2}\left(\theta_{\mu\nu}J_R^{\mu\nu}\right)^a_{\ b}\chi^b \ . \tag{2.40}$$

É importante destacar que os índices (μ, ν) dos geradores são referentes ao grupo de Lie em questão, que neste caso é o grupo de Lorentz, e os índices (a,b) são os índices matriciais de uma determinada representação R. As referências [**26**][**60**][**61**][**20**] fornecem mais detalhes a respeito dos grupos de Lie. Uma abordagem mais técnica pode ser encontrada na referência [**27**].

Assim, seguindo o procedimento utilizado nas Teorias de Gauge, para implementar uma simetria de parâmetro de transformação espinorial, ϵ, via grupos de Lie, precisamos assegurar que esse parâmetro seja real. Logo, o parâmetro ϵ deve ser um férmion de Majorana. Além disso, como os geradores dos grupos de Lie têm o mesmo caráter que os parâmetros, o gerador da transformação deve ter índice fermiônico, de modo que a transformação infinitesimal (2.40) para o caso de uma simetria contínua de parâmetro fermiônico fica

$$\delta \; campo = i(\bar{\epsilon}^{\alpha} Q_{\alpha}) \; campo \tag{2.41}$$

Para obtermos uma melhor compreensão a respeito das características desta transformação, vamos considerar a transformação de campo escalar real bosônico Φ de spin 0 e a de um campo fermiônico de Majorana Ψ_α com spin $\frac{1}{2}$. Uma condição fundamental que a transformação (2.41) deve respeitar é a covariância de Lorentz, isto é, ambos os lados da equação devem possuir os mesmos índices livres. Assim, considerando o caso de uma transformação do campo escalar bosônico, $\delta\Phi$, como o parâmetro é fermiônico, devemos ter um campo fermiônico do lado direito da equação (2.41), de modo a assegurar a covariância de Lorentz. Logo, a transformação infinitesimal fica

$$\boxed{\delta\Phi = \bar{\epsilon}_{\alpha} \Psi^{\alpha}} \; . \tag{2.42}$$

Portanto, a transformação de um campo bosônico, $\delta\Phi$, não envolve outro campo bosônico, como é comum nas transformações das Teorias de Campos, mas sim um campo fermiônico Ψ^α de spin $\frac{1}{2}$.

Além disso, podemos obter a transformação do campo fermiônico, $\delta\Psi_\alpha$, por meio da mesma argumentação. Assim, para que o produto tensorial entre o parâmetro espinorial e o campo resulte num férmion de spin $\frac{1}{2}$, o campo do lado direito deve ser um bóson. Logo, a transformação $\delta\Psi_\alpha$ é dada por

$$\boxed{\delta\Psi_{\alpha} = i(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu})_{\alpha} \partial_{\mu}\Phi} \; . \tag{2.43}$$

O fator i garante que o termo do lado direito também é um espinor de Majorana e a derivada do campo escalar é introduzida para que ambos os lados da equação possuam a dimensão canônica.

Portanto, uma simetria de parâmetro fermiônico gera as seguintes transformações para os campos Ψ_α e Φ

$$\begin{cases} \delta\Psi_{\alpha} = i(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu})_{\alpha} \partial_{\mu}\Phi, \\ \delta\Phi = \bar{\epsilon}_{\alpha} \Psi^{\alpha}. \end{cases} \tag{2.44}$$

Com isso, esta nova simetria possui um caráter diferente das outras simetrias utilizadas nas Teorias de Gauge. Agora, a transformação de um campo fermiônico origina campo bosônico, assim como a transformação de um campo bosônico resulta num campo fermiônico. Logo, esta nova simetria mistura férmions e bósons.

Levando a ideia da fundamentalidade dos espinores ao formalismo da Teoria de Campos, realizamos um novo tipo de transformação em termos de um parâmetro fermiônico, cuja consequência é que a sua simetria associada mistura bósons e férmions em um mesmo multiplete, relacionando cada bóson a um férmion correspondente e vice-versa. Esta nova simetria é conhecida como **Supersimetria**. Assim, os campos Ψ_α e Φ são chamados de parceiros supersimétricos e suas transformações, (2.44), são chamadas de transformações supersimétricas.

É importante destacar que a construção da Supersimetria envolvendo um campo escalar Φ e um campo fermiônico Ψ_α tem o objetivo de simplesmente ilustrar um caso simples da Supersimetria no espaço dos campos. No entanto, esta construção pode ser estendida para outros conjuntos de campos com diferentes spins, através da introdução do superespaço e do supercampo. Uma introdução a estes conceitos pode ser encontrada nas referências [**62**][**63**].

Definida a característica das transformações da Supersimetria, o próximo passo é a obtenção de sua álgebra, o que será feito na subseção seguinte. Assim, a partir disto, estabeleceremos sua conexão com o grupo conforme e, consequentemente, com o cone-de-luz.

2.1.4 A Álgebra da Supersimetria

As interações fundamentais são descritas em termos de simetrias que possuem uma importante propriedade que é a álgebra dos geradores. Esta propriedade é fundamental, pois é através dela que garantimos que os geradores da simetria formem um grupo, isto é, garantimos que a simetria seja completamente implementada em uma teoria. Assim, o objetivo desta subseção é proceder de modo análogo às Teorias de Gauge e encontrar a álgebra da Supersimetria, que está codificada em relações de comutação e anticomutação dos geradores.

A abordagem que será utilizada para encontrar a álgebra da Supersimetria também pode ser utilizada, por exemplo, para encontrar a álgebra associada aos geradores do grupo $SU(2)$, assim como demonstrado na referência [**64**]. Desse modo, vamos calcular o comutador de duas transformações de Supersimetria do campo escalar Φ. Logo, considerando as equações (2.44) e omitindo seus índices, teremos

$$\begin{cases} \delta_2\delta_1\Phi = i\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\partial_\mu\Phi\epsilon_2, \\ \delta_1\delta_2\Phi = i\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\partial_\mu\Phi\epsilon_1. \end{cases} \tag{2.45}$$

Assim, o comutador das duas transformações fica

$$[\delta_2, \delta_1]\Phi = i\partial_\mu\Phi\bigg(\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2 - \bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1\bigg)\ . \tag{2.46}$$

Como os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 são férmions de Majorana, podemos escrever $\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1 = -\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2$, de modo que a equação (2.46) fica

$$[\delta_2, \delta_1]\Phi = 2i(\partial_\mu\Phi)\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\ . \tag{2.47}$$

É importante notar que o termo $\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2$ é um vetor sob transformações de Lorentz. Assim, podemos identificá-lo como $\xi^\mu \equiv 2\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2$. Logo,

$$\boxed{[\delta_2, \delta_1]\Phi = \xi^\mu(i\partial_\mu\Phi)}\ . \tag{2.48}$$

Como $i\partial_\mu \equiv P_\mu$ é o gerador das translações, a equação (2.48) mostra que o comutador de duas supersimetrias corresponde a uma translação infinitesimal, cujo parâmetro é ξ^μ. Portanto, a álgebra da Supersimetria precisa das translações para ser fechada. A partir do resultado (2.48), iremos introduzir o conceito de Supergravidade na próxima seção.

Assim como mostrado na referência **[64]**, no caso do grupo $SU(2)$, o comutador de dois geradores atuando num campo produz um terceiro gerador de $SU(2)$ atuando no mesmo campo, caracterizando completamente a sua álgebra. No caso da Supersimetria, o comutador de duas transformações produziu uma translação (2.48), implicando que a álgebra da Supersimetria não está completamente estabelecida. Desta forma, torna-se necessário calcular o comutador entre uma translação e uma transformação supersimétrica atuando num campo Φ e o comutador entre duas translações. Começando pelo primeiro deles, obtemos

$$[\delta_s(\epsilon), \delta_t(\xi)]\Phi = \delta_s(\epsilon)\delta_t(\xi)\Phi - \delta_t(\xi)\delta_s(\epsilon)\Phi\ . \tag{2.49}$$

Considerando que $\delta_t(\xi)\Phi = i\xi^\mu\partial_\mu\Phi$ e as transformações (2.44), o comutador (2.49) fica

$$[\delta_s(\epsilon), \delta_t(\xi)]\Phi = i\xi^\mu\partial_\mu(\bar{\epsilon}_\alpha\Psi^\alpha) - \bar{\epsilon}_\alpha(i\xi^\mu\partial_\mu\Psi^\alpha)\ . \tag{2.50}$$

Como $\xi^\mu\partial_\mu$ não é um objeto fermiônico, sua comutação com o parâmetro espinorial $\bar{\epsilon}_\alpha$ é trivial. Com isso, fazendo essa comutação,

$$[\delta_s(\epsilon), \delta_t(\xi)]\Phi = 0\ . \tag{2.51}$$

Assim, as transformações de Supersimetria e de translação comutam. Por fim, precisamos verificar a comutação de duas translações. Logo, considerando novamente $\delta_t(\xi)\Phi = i\xi^\mu\partial_\mu\Phi$, temos

$$[\delta_t(\xi_2), \delta_t(\xi_1)]\Phi = \delta_2\bigg(i\xi_1^\mu\partial_\mu\Phi\bigg) - \delta_1\bigg(i\xi_2^\mu\partial_\mu\Phi\bigg) = i\xi_1^\mu\partial_\mu\bigg(i\xi_2^\nu\partial_\nu\Phi\bigg) - i\xi_2^\mu\partial_\mu\bigg(i\xi_1^\nu\partial_\nu\Phi\bigg) \; . \tag{2.52}$$

Uma vez que os parâmetros ξ_2^μ e ξ_1^μ são bosônicos, eles comutam entre si. Além disso, como os índices do último termo da equação (2.52) são mudos, podemos trocá-los, de modo que obtemos

$$[\delta_t(\xi_2), \delta_t(\xi_1)]\Phi = 0 \; . \tag{2.53}$$

Portanto, os resultados (2.48), (2.51) e (2.53) constituem a álgebra da Supersimetria, mostrando que as translações são necessárias para que a álgebra seja fechada. Esta álgebra pode ser reescrita em termos dos geradores da Supersimetria. Para tanto, vamos nos inspirar no procedimento adotado nos grupos de Lie, nos quais tomamos o comutador $[i\theta_1 J, i\theta_2 J]$ para obter a álgebra em termos dos geradores. A partir do resultado (2.48), o comutador deve ser dado por

$$[i\bar{\epsilon}_2^\beta Q_\beta, i\bar{\epsilon}_1^\alpha Q_\alpha]\Phi = \xi^\mu P_\mu\Phi \; . \tag{2.54}$$

Abrindo o comutador do lado esquerdo da equação (2.54), temos

$$[i\bar{\epsilon}_2^\beta Q_\beta, i\bar{\epsilon}_1^\alpha Q_\alpha]\Phi = -\bigg(\bar{\epsilon}_2^\beta Q_\beta\bar{\epsilon}_1^\alpha Q_\alpha - \bar{\epsilon}_1^\alpha Q_\alpha\bar{\epsilon}_2^\beta Q_\beta\bigg)\Phi \; . \tag{2.55}$$

Como os parâmetros e os geradores são espinores de Majorana, podemos usar as seguintes propriedades: $\bar{\epsilon}_1^\alpha Q_\alpha = \overline{Q}_\alpha\epsilon_1^\alpha$ e $\epsilon_1^\alpha\bar{\epsilon}_2^\beta = -\bar{\epsilon}_2^\beta\epsilon_1^\alpha$. Além disso, como $\overline{Q}_\alpha Q_\beta = \overline{Q}_\beta Q_\alpha$, o comutador em termos dos geradores (2.55) fica dado por

$$[i\bar{\epsilon}_2^\beta Q_\beta, i\bar{\epsilon}_1^\alpha Q_\alpha]\Phi = -\bar{\epsilon}_2\bigg(Q_\alpha\overline{Q}_\beta + \overline{Q}_\beta Q_\alpha\bigg)\epsilon_1^\alpha\Phi \; ,$$

$$[i\bar{\epsilon}_2^\beta Q^\beta, i\bar{\epsilon}_1^\alpha Q^\alpha]\Phi = -\bigg(\bar{\epsilon}_2\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\}\epsilon_1^\alpha\bigg)\Phi \; . \tag{2.56}$$

Anteriormente, havíamos tomado a seguinte definição: $\xi^\mu \equiv 2\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2$. Assim, reescrevendo esta definição como $\xi^\mu = -2\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1$ e comparando as equações (2.54) e (2.56), encontramos que o anticomutador entre dois geradores da Supersimetria é dada por

$$\boxed{\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = 2i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu} \; . \tag{2.57}$$

Podemos repetir este mesmo procedimento nas equações (2.51) e (2.53) para reescrevê-las em termos dos geradores. Com isso, a álgebra da Supersimetria $\mathcal{N}=1$ (com um único gerador espinorial) é dada por

$$\begin{cases} \{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = 2i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \\ [Q_\alpha, P_\mu] = 0. \end{cases} \tag{2.58}$$

A álgebra da Supersimetria (2.58) envolve as translações, o que significa que a Supersimetria está conectada ao espaço-tempo. Assim, é possível construir uma representação de partículas para a Supersimetria, tendo em vista que na Teoria de Campos as partículas são descritas como representações irredutíveis do grupo de Poincaré **[65]**. Para tanto, é necessário ampliar a álgebra (2.58), de modo a incluir os geradores de Lorentz na álgebra. Repetindo um cálculo análogo ao que foi desenvolvido para determinarmos as equações (2.58) e considerando que os geradores de uma transformação espinorial são $\frac{1}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]$, obtemos a *super-álgebra de Poincaré*

$$\begin{cases} \{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = 2i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \\ [Q_\alpha, P_\mu] = 0, \\ [Q_\alpha, J_{\mu\nu}] = \frac{i}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]_{\alpha\beta} Q_\beta, \end{cases} \tag{2.59}$$

Portanto, podemos estabelecer a conclusão desta seção. O espinor que é solução da equação tipo-Killing conforme de caráter fermiônico, dado pela equação (2.24), é um espinor local que origina os parâmetros de transformação do grupo conforme. Se este espinor for constante, a única transformação que não se anula do grupo conforme é a translação, dada pela equação (2.28). Logo, como vimos na subseção anterior que a Supersimetria é originada de uma transformação de parâmetro espinorial constante (global) e conforme indicado pela álgebra (2.59) que duas transformações de Supersimetria geram uma translação, podemos concluir que as transformações de Supersimetria estão diretamente conectadas ao grupo conforme. Assim sendo, como o grupo conforme é o grupo que mantém o cone-de-luz invariante, concluímos que a Supersimetria está diretamente vinculada ao cone-de-luz do espaço-tempo.

É importante destacar que a superalgebra de Poincaré inclui, além das equações (2.59), as relações usuais do grupo de Poincaré. Agora, em posse desta álgebra, podemos construir todo um espectro de partículas associadas à Supersimetria e, através dos operadores de Casimir, determinar algumas propriedades importantes que estas partículas dos multipletes supersimétricos terão.

Assim como discutido nas referências **[66][67][64]**, como o gerador de Supersimetria comuta com o gerador das translações, e, portanto, com o operador de Casimir $P^2 = P_\mu P^\mu$, todas as partículas em um mesmo multiplete devem ter a mesma massa. Logo, como não observamos na natureza férmions e bósons com a mesma massa, então a Supersimetria deve estar quebrada na escala de energia do LHC (10 Tev), para que ela esteja de acordo com a fenomenologia e, assim, ser implementada na Física de Partículas. Nesse sentido, existem diversos mecanismos para descrever a quebra da Supersimetria. As referências **[66][68][64]** introduzem e discutem alguns destes modelos existentes.

Por outro lado, o gerador de Supersimetria não comuta com o operador de Casimir construído a partir do vetor de Pauli−Lubanski. Assim, as partículas dentro de um multiplete terão spins diferentes. Por fim, os multipletes da Supersimetria possuem o mesmo número de graus de liberdade de bosons e férmions **[69][48]**. Os tipos de multipletes da Supersimetria $\mathcal{N} = 1$ são apresentados nas referências **[66][68][67]**. Nestas referências, também são apresentadas as principais características e os diversos tipos de multipletes que estão presentes nas Supersimetrias estendidas, que são os casos em que os geradores fermiônicos possuem um índice interno, $i = 1, 2, \ldots \mathcal{N}$. A possibilidade de se obter uma Supersimetria estendida a partir da equação (2.17) será objeto de estudo em trabalhos futuros.

Existem diversas motivações para abordar a Supersimetria em um cenário de Física de Partículas. Conforme introduzido pelas referências **[70][71]**, o Modelo-Padrão possui diversas questões que precisam ser resolvidas ou aperfeiçoadas. Nesta perspectiva, a Supersimetria é capaz de fornecer soluções para algumas destas questões, como por exemplo o *problema da hierarquia.* As referências **[66][68]** discutem brevemente a respeito da forma com a qual a Supersimetria é capaz de fornecer soluções para estas questões.

No que se refere às Supersimetrias estendidas, elas desenvolvem um importante papel na unificação das forças, uma vez que são capazes de fornecer multipletes que abrigam diversos spins, unindo, por exemplo, a gravitação ao setor de gauge e de matéria. Além disso, estes modelos ganharam mais importância, pois foi provado que a Supersimetria $\mathcal{N} = 4$ é finita em todas as ordens da teoria de pertubação **[72]**.

2.2 Uma Breve Introdução à Supergravidade

Assim como comentado no final da seção anterior, a Supersimetria pode propor algumas soluções para os problemas da Física de Partículas. Assim, se a Supersimetria realmente pode ser introduzida neste cenário, é natural que ela também possa ser introduzida em um contexto envolvendo a gravitação. Esta combinação recebe o nome de *Supergravidade* e será o tema de estudo ao longo desta seção, cujo objetivo é propor uma introdução ao tema, apresentando a forma com a qual ela pode ser obtida, suas principais características e sua relação com um dos maiores problemas da Física Teórica, que é a quantização da gravidade.

2.2.1 A Supersimetria Local e a Gravidade

Uma das ideias que norteiam a construção das interações fundamentais no Modelo-Padrão é a simetria de gauge, em que as transformações de simetria devem ser locais, atuando independentemente em cada ponto do espaço-tempo. Neste sentido, podemos nos inspirar neste princípio e questionar quais as consequências de termos uma transformação de supersimetria local. Desta forma, tornando o parâmetro fermiônico local $\epsilon \longrightarrow \epsilon(x)$ na equação (2.54), temos

$$[i\bar{\epsilon}_2(x)Q, i\bar{\epsilon}_1(x)Q]\Phi = \xi^\mu(x)P_\mu\Phi \ . \tag{2.60}$$

Assim, o comutador de duas transformações de Supersimetria locais corresponde a uma translação local, isto é, aos difeomorfismos, que é a simetria da Relatividade Geral. Portanto, a consequência de promovermos a supersimetria a uma versão local é o surgimento da gravidade! A necessidade da gravidade no contexto da Supersimetria local também pode ser vista através de um procedimento similiar ao discutido no Capítulo *Relatividade Geral Como uma Teoria Topológica*. Neste sentido, vamos considerar um modelo simples constituído por um campo escalar real, Φ, e seu parceiro supersimétrico, um férmion de Majorana de spin $\frac{1}{2}$, ψ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x) - \frac{i}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) \ . \tag{2.61}$$

Sob as transformações de Supersimetria globais (2.44), a variação da lagrangiana (2.61), omitindo os índices spinoriais, é dada por

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\bigg(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi(x)\partial_\nu\Phi(x)\bigg) \ . \tag{2.62}$$

Como a 4-divergência se anula na ação, vemos que a lagrangiana (2.61) é invariante sob as transformações (2.44). Por outro lado, promovendo as transformações de Supersimetria (2.44) a um caráter local, a variação da lagrangiana (2.61), a menos de termos envolvendo 4-divergências, fica

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \bar{\epsilon}(x)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi(x)\partial_\mu\Phi(x) \ . \tag{2.63}$$

Assim, precisamos introduzir um campo de gauge para recuperar a invariância da lagrangiana (2.61), de modo que o termo extra deve ser do tipo

$$\mathcal{L}_N = -\kappa\overline{\Psi}_\nu(x)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi(x)\partial_\mu\Phi(x) \ , \tag{2.64}$$

em que κ é uma constante de dimensão $[\kappa] = [m^{-1}]$, necessária para assegurar que a dimensão de $\mathcal{L}_N$ esteja correta. Com isso, para que este novo termo (2.64) anule a contribuição indesejada da equação (2.63), o campo de gauge Ψ_μ deve possuir a seguinte lei de transformação

$$\delta\Psi_{\mu\alpha} = \frac{1}{\kappa}\partial_\mu\epsilon_\alpha \ . \tag{2.65}$$

Portanto, a lei de transformação (2.65) mostra-nos que o campo de gauge $\Psi_{\mu\alpha}$ necessário para recuperar a invariância do lagrangeano sob transformações de Supersimetria locais é um campo de spin 3/2. Assim como discutido na seção anterior, na Supersimetria $\mathcal{N} = 1$, cada férmion pertence a um supermultiplete, junto com seu superparceiro bosônico. Uma vez que não é possível introduzir partículas de spin maior que 1 em uma teoria unitária e casual que não contenha a gravidade, o campo de gauge de spin 3/2, chamado de gravitino, deve ter como parceiro bosônico uma partícula de spin 2, ou seja, o gráviton **[63]**[**73**].

No entanto, a necessidade da inclusão da gravidade neste contexto pode ser tornada mais explícita. Conforme discutido nas referências **[66]**[**74**][**75**], a simples introdução do termo $\mathcal{L}_N$ não é suficiente para recuperar a invariância, pois $\delta(\mathcal{L} + \mathcal{L}_N)$ ainda não é invariante sob transformações de supersimetria local. No entanto, o tensor energia-momento pode ser identificado entre as quantidades remanescentes desta transformação. Logo, para que a variação $\delta(\mathcal{L}+\mathcal{L}_N)$ seja nula, precisamos introduzir uma nova lagrangiana contendo um campo $g_{\mu\nu}$ acoplado ao tensor energia-momento. Com isso, a transformação supersimétrica deste campo deve ser $\delta g_{\mu\nu} \sim \kappa\overline{\Psi}_\mu\gamma_\nu\epsilon$. Desta forma, identificamos este campo $g_{\mu\nu}$ como o gráviton e, assim, verificamos que a Supersimetria local requer a inclusão da gravidade, sendo, portanto, chamada de **Supergravidade**.

Por último, é importante destacarmos que o superparceiro do gravitino deve ser a vielbein, pois é através deste formalismo que acoplamos os férmions na gravitação. Conforme mencionado anteriormente, o formalismo métrico não é adequado para a descrição dos férmions.

2.2.2 A Supergravidade em 4 Dimensões

Conforme ilustrado nas referências [**47**][**76**], a vielbein e o gravitino possuem, *on-shell*, o mesmo número de graus de liberdade em 4 dimensões, de modo que eles são suficientes para formar o multiplete de uma Supergravidade $\mathcal{N} = 1$. Assim, a ação desta Supergravidade será formada pela contribuição da partícula de spin 2, dada pelo termo de Einstein-Hilbert, e pela contribuição do gravitino, dada pelo termo de Rarita-Schwinger

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2} e e^{\mu}{}_{a} e^{\nu}{}_{b} R_{\mu\nu}{}^{ab}(e,\omega) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\Psi}_{\mu}\gamma_5\gamma_{\nu}D_{\rho}\Psi_{\sigma} \right\} . \tag{2.66}$$

É importante destacar que a estrutura do segundo termo garante que o gravitino seja invariante sob difeomorfismos e transformações de Lorentz locais, correspondendo ao termo de Rarita-Schwinger em espaço curvo. Além disso, o fator 1/2 refere-se ao fato de que estamos trabalhando com um gravitino-Majorana. Uma discussão a respeito da construção desta lagrangiana pode ser encontrada na referência [**18**].

A ação (2.66) apresenta três campos: $e^{a}{}_{\mu}$, $\omega_{\mu}{}^{ab}$ e $\Psi_{\mu\alpha}$. Como a vielbein e o gravitino já formam um supermultiplete, a conexão de spin não pode introduzir nenhum novo grau de liberdade, ou seja, ela não deve ser um campo independente. A referência [**74**] traz uma discussão a respeito das diferentes formas de implementar esta exigência no tratamento da ação (2.66), cujas transformações de Supersimetria dos campos são dadas por

$$\begin{cases} \delta e^{a}{}_{\mu} = \frac{\kappa}{2}(\bar{\epsilon}(x)\gamma^{a})_{\beta}\Psi_{\mu\beta}, \\ \delta\Psi_{\mu\alpha} = \frac{1}{\kappa}D_{\mu}\epsilon_{\alpha}(x), \\ \delta\omega_{\mu}{}^{ab} = 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

Além destas transformações (2.67), os campos da ação (2.66) também possuem transformações sob Lorentz local e difeomorfismo, as quais estão explicitadas na referência [**47**].

A partir da ação (2.66), podemos obter as equações de campo, através do formalismo de primeira ordem, em que os três campos são tomados como independentes. Assim, podemos escrever a conexão de spin em termos da vielbein e do gravitino, a partir das equações de campos. Variando a ação em relação a conexão de spin, a equação de campo fica dada por

$$\delta_\omega S : T_{\mu\nu}{}^{a} = -\frac{\kappa^2}{4}\overline{\Psi}_\mu \gamma^a \Psi_\nu \ , \tag{2.68}$$

em que $T_{\mu\nu}{}^{a} = D_\mu e^a{}_\nu - D_\nu e^a{}_\mu$ é a torção. Desta forma, vemos que a torção está diretamente vinculada aos gravitinos.

A partir da equação (2.68), podemos expressar a conexão de spin em termos da vielbein e do gravitino. Para tanto, tomando a parte anti-simétrica da equação (1.31), $\partial_{[\mu} e^c{}_{\nu]} + \omega_{[\mu}{}^{c}{}_{\nu]} - T_{\mu\nu}{}^{c} = 0$, e a multiplicando por $e^\mu{}_a e^\nu{}_b$, obtemos

$$e^\mu{}_a e^\nu{}_b \partial_{[\mu} e^c{}_{\nu]} + \frac{1}{2}\left(\omega_a{}^c{}_b - \omega_b{}^c{}_a\right) - T_{\mu\nu}{}^{c} = 0 \ , \tag{2.69}$$

em que identificamos $\Omega_{ab}{}^{c} = e^\mu{}_a e^\nu{}_b \partial_{[\mu} e^c{}_{\nu]}$ como o coeficiente de rotação de Ricci. Fazendo duas permutações cíclicas entre os índices da equação (2.69) e subtraindo estas duas novas equações de (2.69), encontramos

$$\omega_{cab} = \Omega_{cab} + \Omega_{bca} - \Omega_{abc} - T_{cab} - T_{bca} + T_{abc} \ . \tag{2.70}$$

Assim, substituindo (2.68) na equação (2.70) e multiplicando por $e^c{}_\mu$, encontramos a conexão de spin em termos da vielbein e do gravitino

$$\omega_{\mu ab}(e,\Psi) = e^c{}_\mu\left(\Omega_{cab} + \Omega_{bca} - \Omega_{abc}\right) + \frac{\kappa^2}{4} e^c{}_\mu \left(\overline{\Psi}_c \gamma_b \Psi_a + \overline{\Psi}_b \gamma_a \Psi_c - \overline{\Psi}_a \gamma_c \Psi_b\right) . \tag{2.71}$$

Agora, variando (2.66) em relação a vielbein, obtemos

$$\delta_e S : R^\mu{}_a - \frac{1}{2} e^\mu{}_a R = e^{\rho\nu\mu\sigma}\overline{\Psi}_\rho \gamma_5 \gamma_a D_\nu \Psi_\sigma \ . \tag{2.72}$$

Podemos destacar que o lado direito da equação (2.72) equivale ao tensor energia-momento do spin 3/2, sendo a fonte do campo do gravitino. Por fim, variando a ação em relação ao gravitino $\overline{\Psi}_\mu$, obtemos a terceira equação de campo

$$\delta_\Psi S : e^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \Psi_\sigma = 0 \ . \tag{2.73}$$

A matéria pode ser incluída no contexto da Supergravidade através do acoplamento de outros multipletes supersimétricos. Por exemplo, a referência **[77]** traz o acoplamento do multiplete de spins $(1, 1/2)$ ao multiplete de Supergravidade $(2, 3/2)$. A ação deste modelo será dada pela soma entre a contribuição do multiplete gravitacional e a do multiplete de matéria. Assim, o modelo envolve um campo vetorial de spin-1 (o fóton), A_μ, um campo spinorial de Majorana de spin $\frac{1}{2}$, além do gravitino e do gráviton. Outro multiplete que podemos acoplar ao da Supergravidade, é o chamado multiplete quiral de spins $(1/2, 0)$.

Além deste exemplo, também é possível construir o acoplamento entre o multiplete do gravitino $(3/2, 1)$ e o da Supergravidade $(2, 3/2)$ [**78**]. Este novo multiplete formado é constituído pelo gráviton, dois gravitinos e um campo de spin-1 (o fóton), $\{e^a{}_\mu, \Psi_{\mu\alpha}, A_\mu\}$. Com isso, este modelo unifica a gravitação e o eletromagnetismo, com o fóton pertencendo a um multiplete de gauge supersimétrico. Destaca-se ainda que a versão quântica desta Supergravidade é finita em correções de 1-loop [**79**].

Como este modelo envolve um gravitino adicional, é necessário introduzir uma outra transformação de Supersimetria local. Assim, o acoplamento entre $(3/2, 1)$ e $(2, 3/2)$ produz uma teoria que possui duas transformações de Supersimetrias locais, sendo conhecida como Supergravidade $\mathcal{N} = 2$ e que traz duas importantes consequências: a unificação da gravitação com o Eletromagnetismo, e a finitude a 1-loop de sua versão quântica. Embora o modelo seja divergente em loops superiores, ele representa um avanço na tentativa de formular uma teoria quântica da gravidade completamente finita.

A Supergravidade $\mathcal{N} = 2$ pode ser estendida através de novos acoplamentos de multipletes supersimétricos. Os multipletes que formam a Supergravidade $\mathcal{N} = 3$ são $(2, 3/2)$, $2 \times (3/2, 1)$ e $(1, 1/2)$ e correspondem aos campos $\{e^a{}_\mu, \Psi^i_{\mu\alpha}, A^i_\mu, \chi_\alpha\}$, em que $i = 1, 2, 3$ [**80**][**81**]. Já uma Supergravidade $\mathcal{N} = 4$ englobará uma quantidade maior de campos, os quais correspondem ao gráviton, gravitino, campos vetoriais, espinoriais-$\frac{1}{2}$ e escalares [**82**] [**83**].

Por fim, cabe ressaltar que a extensão máxima da Supergravidade em 4 dimensões corresponde ao modelo $\mathcal{N} = 8$ [**84**], que contém todos os casos de supergravidades estendidas, e é o favorito para fornecer uma descrição unificada das partículas. O conteúdo de campos associados a este modelo é $\{e, \Psi, A, \chi, \Phi\}$, correspondendo a 1 gráviton, 8 gravitinos, 28 vetores, 56 espinores e 70 escalares. A Supergravidade $\mathcal{N} = 8$ pode ser obtida a partir de uma redução dimensional de uma Supegravidade $\mathcal{N} = 1$ em 11 dimensões, que é o maior número possível de dimensões em que uma teoria de Supergravidade pode ser construída [**3**][**85**]. Assim, como esta Supergravidade pode fornecer uma descrição unificada entre as interações e partículas do Modelo-Padrão, ela será objeto de estudo na próxima subseção, onde apresentaremos algumas de suas principais características e introduziremos uma discussão para obtermos um modelo em 10 dimensões via redução dimensional.

Outro aspecto que ressalta a importância da Supergravidade em 11 dimensões é que ela é o limite de baixas energias da chamada *Teoria-M*, que é um modelo que relaciona todas as Teorias de Cordas através de dualidades [**86**].

2.2.3 A Supergravidade em 11 Dimensões

A razão pela qual 11 dimensões é o limite máximo para a construção de uma Supergravidade está diretamente ligada ao spin das partículas envolvidas no modelo. Como os campos de uma Supergravidade são determinados pelas representações irredutíveis da sua superálgebra de Poincaré, devemos exigir que os supermultipletes da superálgebra obtidos via redução dimensional não envolvam partículas de spin maior que 2, uma vez que as teorias locais que descrevem estes tipos de partículas ainda não possuem consistência. Logo, esta condição limita a quantidade de superálgebras que são aplicáveis na construção das supergravidades, restringindo-as, portanto, a terem no máximo 11 dimensões [**87**][**88**].

O primeiro passo na construção de qualquer modelo de Supergravidade é determinar os campos envolvidos. Assim como discutido no começo desta seção, a Supergravidade é uma teoria supersimétrica local, a qual requer, *on-shell*, uma equivalência entre o número de graus de liberdade de férmions e bósons, além da presença obrigatória do gráviton e do gravitino. Em 11 dimensões, as matrizes de Dirac são 32×32 e o gravitino $\hat{\Psi}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}$, que é um campo de Majorana-$\frac{3}{2}$, possui $32 \times (D-3)/2 = 128$ graus de liberdade. É importante destacar que o gravitino é tomado como um espinor de Majorana com o objetivo de assegurar sua realidade. Por outro lado, o gráviton possui $D(D-3)/2 = 44$ graus de liberdade em 11 dimensões. Logo, diferentemente das 4 dimensões, o multiplete da Supergravidade em 11 dimensões não pode ser formado apenas pelo gráviton e pelo gravitino, pois precisamos adicionar um novo campo que contenha exatamente os 84 graus de liberdade ausentes. O objeto que preenche este requisito é uma *3-forma de gauge*, $\hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$, que é um objeto totalmente antissimétrico, cujo número de graus de liberdade é $\begin{pmatrix} D-2 \\ 3 \end{pmatrix} = 84$. Portanto, o multiplete da Supergravidade em 11 dimensões é formado por

$$\left\{ \hat{e}^{\hat{a}}{}_{\hat{\mu}}; \hat{\Psi}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}; \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} \right\} . \tag{2.74}$$

Conforme destacado na seção *Convenções* no começo desta Dissertação, os objetos com chapéu, $\hat{}$, indicam que estamos trabalhando em 11 dimensões. Assim, as coordenadas dos campos de (2.74) são tais que $\begin{cases} \hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\rho} = 0, \ldots 10, \\ \hat{\alpha}, \hat{\beta} = 1, \ldots 32, \\ \hat{a}, \hat{b} = 0, \ldots 10, \end{cases}$.

Como o campo $\hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$ é uma *3-forma de gauge*, ele possui uma transformação abeliana de gauge envolvendo a um parâmetro $\hat{\xi}_{\hat{\nu}\hat{\rho}}$, que é uma *2-forma*.

$$\delta \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = 3\partial_{[\hat{\mu}}\hat{\xi}_{\hat{\nu}\hat{\rho}]} \Longleftrightarrow \hat{C}'_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} + \partial_{\hat{\mu}}\hat{\xi}_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \partial_{\hat{\nu}}\hat{\xi}_{\hat{\rho}\hat{\mu}} + \partial_{\hat{\rho}}\hat{\xi}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \ . \tag{2.75}$$

A partir da expressão (2.75), podemos definir um *field-strength* associado, que será uma *4-forma* totalmente antissimétrica invariante sob a transformação (2.75)

$$\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = 24\partial_{[\hat{\mu}}\hat{C}_{\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}]} \ . \tag{2.76}$$

Com isso, a ação da Supergravidade em 11 dimensões será uma combinação destas quantidades e, seguindo as convenções da referência [**89**], é dada por

$$\hat{S} = \frac{1}{16\pi G_N^{(11)}} \int d^{11}\hat{x}\; \hat{e} \Bigg[\hat{R}(\hat{\omega}) + \frac{1}{192} \left(\overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\mu}} \hat{\Gamma}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} \hat{\Psi}_{\hat{\nu}} + 12 \overline{\hat{\Psi}}^{\hat{\rho}} \hat{\Gamma}^{\hat{\sigma}\hat{\kappa}} \hat{\Psi}^{\hat{\lambda}} \right) \left(\hat{F}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} + \hat{\widetilde{F}}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} \right) - \frac{1}{48} \hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$$

$$- \frac{i}{2} \overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\mu}} \hat{\Gamma}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} D_{\hat{\nu}} \left(\frac{\hat{\omega} + \widetilde{\hat{\omega}}}{2} \right) \hat{\Psi}_{\hat{\rho}} - \frac{1}{\hat{e}(144)^2} \hat{\epsilon}^{\hat{\mu}_0 \ldots \hat{\mu}_{10}} \hat{F}_{\hat{\mu}_0 \ldots \hat{\mu}_3} \hat{F}_{\hat{\mu}_4 \ldots \hat{\mu}_7} \hat{C}_{\hat{\mu}_8 \ldots \hat{\mu}_{10}} \Bigg] \ . \tag{2.77}$$

A referência [**58**] traz uma discussão mais detalhada a respeito da construção de cada um dos termos da ação (2.77).

É importante destacar que as matrizes Γ's satisfazem a relação de anticomutação usual, $\{\hat{\Gamma}^a, \hat{\Gamma}^b\} = 2\hat{\eta}^{\hat{a}\hat{b}}$, e que estamos utilizando a seguinte notação: $\hat{\Gamma}^{\hat{a}\ldots\hat{n}} = \hat{\Gamma}^{[\hat{a}}\hat{\Gamma}^{\hat{b}} \cdots \hat{\Gamma}^{\hat{n}]}$. Além disso, também podemos definir a matriz de quiralidade como sendo $\hat{\Gamma}^{10} = i\hat{\Gamma}^0 \cdots \hat{\Gamma}^9 \equiv -i\hat{\Gamma}^{11}$. Outros detalhes a respeito da álgebra espinorial de 11 dimensões podem ser encontrados nas referências [**89**][**58**].

Na ação (2.77), a conexão de Lorentz $\hat{\omega}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}}$ é similar à expressão (2.71) escrita em 4 dimensões

$$\hat{\omega}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}} = \hat{e}^{\hat{c}}{}_{\hat{\mu}} \left(\hat{\Omega}_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} + \hat{\Omega}_{\hat{b}\hat{c}\hat{a}} - \hat{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \right) + \hat{K}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}} \ , \tag{2.78}$$

em que $\hat{K}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}}$ é o tensor da contorsão

$$\hat{K}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}} = -\frac{i}{16} \left[-\overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\rho}} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}}{}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}} \hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} + 2 \left(\overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\mu}} \hat{\Gamma}_{\hat{b}} \hat{\Psi}_{\hat{a}} - \overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\mu}} \hat{\Gamma}_{\hat{a}} \hat{\Psi}_{\hat{b}} + \overline{\hat{\Psi}}_{\hat{b}} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}} \hat{\Psi}_{\hat{a}} \right) \right] \ . \tag{2.79}$$

Além disso, as quantidades $\hat{\tilde{\omega}}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}}$ e $\hat{\tilde{F}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ serão dadas com o auxílio das equações (2.78) e (2.76), respectivamente, sendo dadas por

$$\hat{\tilde{\omega}}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}} = \hat{\omega}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}} - \frac{i}{16}\overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\rho}}\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}}{}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} \tag{2.80}$$

$$\hat{\tilde{F}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} - \frac{3}{2}\hat{\Psi}_{[\hat{\mu}}\hat{\Gamma}_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}]} \tag{2.81}$$

Por fim, ainda cabe ressaltar que as transformações supersimétricas que deixam a ação (2.77) invariante são parametrizadas por um espinor de Majorana de 32 componentes, $\hat{\epsilon}$, e valem

$$\begin{cases} \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{e}^{\hat{a}}{}_{\hat{\mu}} = -\frac{i}{2}\bar{\hat{\epsilon}}\hat{\Gamma}^{\hat{a}}\hat{\Psi}_{\hat{\mu}}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{\Psi}_{\hat{\mu}} = 2D_{\hat{\mu}}(\hat{\tilde{\omega}})\hat{\epsilon} + \frac{i}{144}\left(\hat{\Gamma}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}{}_{\hat{\mu}} - 8\hat{\Gamma}^{\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\eta_{\hat{\mu}}{}^{\hat{\rho}}\right)\hat{\tilde{F}}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \frac{3}{2}\bar{\hat{\epsilon}}\hat{\Gamma}_{[\hat{\mu}\hat{\nu}}\Psi_{\hat{\rho}]}, \end{cases} \tag{2.82}$$

Além desta simetria, a lagrangiana da Supergravidade (2.77) também é invariante sob transformações gerais de coordenadas e transformações de Lorentz locais, $SO(1,10)$.

Conforme mencionado no final da subseção *A Supergravidade em 4 Dimensões*, a Supegravidade está diretamente relacionada à Teoria das Supercordas, pois ela representa o limite de baixas energias destas teorias. Em 10 dimensões, existem 5 modelos diferentes de supercordas, os quais se relacionam por meio de dualidades e se agrupam para formar a Teoria-M, que possui a Supergravidade $D = 11$ como limite de baixas energias. Dentre estes 5 modelos, o que possui a ligação mais direta com a Supergravidade $D = 11$ é a chamada *Supergravidade Tipo-IIA*, pois ela pode ser construída diretamente através de uma redução dimensional da Supegravidade $D = 11$ **[90][91][92]**, embora também existam modelos alternativos que não utilizem o método de redução dimensional **[93]**.

Assim, com estas consideranções, o objetivo da próxima subseção será apresentar alguns detalhes do procedimento para obter-se a Supergravidade *Tipo-IIA* através de uma redução dimensional da Supergravidade $\mathcal{N} = 1$, $D = 11$.

2.2.4 Breves Comentários sobre Redução Dimensional

A redução dimensional apresentada nesta subseção está baseada na referência **[89]** e será feita através do formalismo de Scherk-Schwarz, o qual considera que os campos das dimensões inferiores não tenham dependência das dimensões extras. Ao longo desta subseção, iremos discutir a respeito deste método reducional e do método da compactificação, que é baseado na existência de dimensões extras recurvadas. Embora sejam métodos diferentes, eles equivalem-se quando consideramos apenas os modos-zero do método da compactificação. Esta equivalência será discutida no próximo Capítulo desta Dissertação.

O princípio central que norteia a redução é bastante similar ao utilizado no modelo de Kaluza-Klein, o qual propõe a existência de uma quarta dimensão espacial. Como o espaço-tempo claramente possui apenas 3 dimensões espaciais estendidas, a quarta dimensão espacial precisa ser recurvada. Assim, a compactificação de uma das coordenadas da métrica do espaço-tempo de 5 dimensões é capaz de originar, em 4 dimensões, a métrica (4-dimensional), um campo vetorial, que corresponde ao fóton, e um campo escalar, que é chamado de *dílaton*. Ou seja, a existência e a compactificação de uma quarta dimensão espacial têm como consequência o aparecimento dos campos gravitacionais e eletromagnético (bem como o diláton) em uma descrição unificada em $(1+3)$ dimensões, cuja ação resultante é

$$S_5 = \frac{-1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{|g_5|}R_5 \Longrightarrow S_4 = \frac{-1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[R + \frac{e^{-\sqrt{3}\sigma}}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma\Big] \tag{2.83}$$

Nesta lagrangiana, g_5 é o determinante da métrica em 5 dimensões, R_5 é o escalar de Ricci construído a partir da métrica 5-dimensional, g_{AB}, e G_5 é a constante gravitacional em 5 dimensões. Além disso, $\sigma = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\phi$, representa uma reparametrização do dilaton, ϕ. Detalhes sobre esta redução dimensional e outras informações sobre o modelo de Kaluza-Klein podem ser encontrados nas referências **[18][94]**.

De forma similar, a décima primeira dimensão deve ser recurvada. Assim, a topologia da décima primeira dimensão corresponde a um círculo S^1, de modo que a sua coordenada $\hat{x}^{10}$, que daqui em diante será identificada como $\hat{x}^{10} \equiv z$ no espaço curvo e $\hat{x}^{10} \equiv y$ no espaço plano, torna-se periódica

$$0 \leq z < 2\pi R\ , \tag{2.84}$$

em que R é o raio da dimensão. Assim, a condição (2.84) mostra que as funções são periódicas na direção z, o que significa que elas podem ser expandidas em séries de Fourier. Logo, considerando que as coordenadas das 11 dimensões dividem-se em $\hat{\mu} = (\mu, z)$, um campo 11-dimensional qualquer, $\hat{\phi}$, pode ser escrito em termos da sua expansão de Fourier

$$\hat{\phi}(x^\mu, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\phi_n(x^\mu)e^{inz/R}\ . \tag{2.85}$$

A equação (2.85) separa a décima primeira coordenada das demais, pois os coeficientes $\phi_n(x^\mu)$ representam funções do espaço-tempo 10-dimensional, as quais são independentes da coordenada x^{10} (nesta notação, $x^\mu = x^0, \ldots, x^9$). Assim, uma vez que expressamos os campos 11-dimensionais em termos de campos 10-dimensionais, a redução dimensional é feita substituindo a expansão (2.85) na ação (2.77), gerando um modo-zero $\phi_0(x)$, que representa um campo sem massa, e os modos superiores $\phi_n(x)(n = 1, 2, \ldots)$, os quais representam campos 10-dimensionais massivos, chamados de *modos de Kaluza-Klein*, cuja massa é dada por $m^2 = n^2/R^2$. Como o raio da dimensão recurvada deve ser muito pequeno, as massas dos modos de Kaluza-Klein devem ser incrivelmente grandes, o que justifica considerarmos apenas os modos-zeros. Desta forma, estamos assumindo que os campos são independentes da décima primeira dimensão, e assim, eles não variam ao longo desta dimensão, $\partial_z \hat{X}^{\hat{\mu}} = 0$. Esta condição foi justificada por Oscar Klein através da proposta da dimensão extra (no caso do artigo, a quinta dimensão) ser curva e microscópica, com o seu raio na ordem de 10^{-30}cm, o que também explicaria o motivo da mesma nunca ter sido detectada [**95**].

Com essas considerações, nossa primeira tarefa é determinar os campos que aparecem no multiplete da Supergravidade 10-dimensional, resultantes da decomposição do multiplete (2.74). A métrica das 11 dimensões, $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, possui $D(D+1)/2 = 66$ componentes independentes, as quais são decompostas, nas 10 dimensões, em uma métrica (55 graus de liberdade), um campo vetorial (10 graus de liberdade) e um campo escalar (1 grau de liberdade).

Devido à condição de não dependência da componente z, as componentes da métrica $\hat{g}_{zz}$ e $\hat{g}_{\mu z}$ comportam-se, respectivamente, como um campo escalar e um campo vetorial sob o grupo de transformações $SO(1, 9)$ do espaço de 10 dimensões e são definidos como $\hat{g}_{zz} = -\Phi$ e $\hat{g}_{\mu z} = -\Phi A_\mu$.

A forma da componente $\hat{g}_{\mu\nu}$ pode ser determinada pela imposição de uma relação de ortogonalidade entre o espaço 10-dimensional e a direção z. Sejam $\hat{e}_{\hat{\mu}} = \{e_\mu, e_z\}$ os vetores de base do espaço 11-dimensional curvo, a métrica do espaço 10-dimensional fica dada por $g_{\mu\nu} = e^\perp_\mu \cdot e^\perp_\nu$. Neste caso, para garantir a ortogonalidade da métrica $g_{\mu\nu}$ em relação à direção z, tomamos a componente perpendicular, cuja forma é dada por

$$e^\perp_\mu = e_\mu - e^\parallel_\mu = e_\mu - \frac{e_\mu \cdot e_z}{e_z \cdot e_z} e_z = e_\mu - \frac{\hat{g}_{\mu z}}{\hat{g}_{zz}} e_z \ . \tag{2.86}$$

Logo, substituindo a relação (2.86) na forma da métrica 10-dimensional, $g_{\mu\nu} = e^\perp_\mu \cdot e^\perp_\nu$, e usando as defininições de $\hat{g}_{zz}$ e $\hat{g}_{\mu z}$ encontramos

$$g_{\mu\nu} = \underbrace{e_\mu \cdot e_\nu}_{\hat{g}_{\mu\nu}} - \frac{g_{\mu z} g_{\nu z}}{\hat{g}_{zz}} \Longrightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \Phi A_\mu A_\nu \ . \tag{2.87}$$

Com isso, a decomposição das componentes da métrica 11-dimensional, $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, fica dada por

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \longrightarrow \begin{cases} \hat{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \Phi A_\mu A_\nu, \\ \hat{g}_{\mu z} \equiv -\Phi A_\mu, \\ \hat{g}_{zz} \equiv -\Phi. \end{cases} \tag{2.88}$$

A partir das relações (2.88), podemos verificar como a simetria de transformações gerais de coordenadas da métrica 11-dimensional se decompõe no espaço 10-dimensional. Na variedade 11-dimensional, a métrica transforma-se sob transformações gerais de coordenadas, cuja variação é dada por

$$\delta \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (\partial_{\hat{\mu}} \hat{\xi}^{\hat{\rho}}) \hat{g}_{\hat{\rho}\hat{\nu}} + (\partial_{\hat{\nu}} \hat{\xi}^{\hat{\rho}}) \hat{g}_{\hat{\rho}\hat{\mu}} + \hat{\xi}^{\hat{\rho}} (\partial_{\hat{\rho}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}) \ . \tag{2.89}$$

Nesta equação, o parâmetro de transformação $\hat{\xi}^{\hat{\rho}}$ pode ser decomposto em $\hat{\xi}^{\hat{\rho}} = (\xi^\mu, \xi^z)$. Com isso, podemos obter as leis de transformação no espaço 10-dimensional, que são mediadas pelos parâmetros ξ^μ e ξ^z, sendo originadas através da decomposição da equação (2.89). Logo, considerando inicialmente $\hat{\xi}^{\hat{\rho}} \to \xi^\mu$, a transformação (2.89) fica dada por

$$\delta \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (\partial_{\hat{\mu}} \xi^\rho) \hat{g}_{\rho\hat{\nu}} + (\partial_{\hat{\nu}} \xi^\rho) \hat{g}_{\rho\hat{\mu}} + \xi^\rho (\partial_\rho \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}) \ . \tag{2.90}$$

Fazendo as decomposições das coordenadas $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ na equação (2.90) e usando as definições (2.88), as transformações gerais de coordenadas em 10 dimensões são dadas por

$$\begin{cases} \delta g_{\mu\nu} = (\partial_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu \xi^\rho) g_{\rho\mu} + \xi^\rho (\partial_\rho g_{\mu\nu}), \\ \delta A_\mu = (\partial_\mu \xi^\rho) A_\rho + \xi^\rho (\partial_\rho A_\mu), \\ \delta \Phi = \xi^\rho (\partial_\rho \Phi). \end{cases} \tag{2.91}$$

Assim, originam-se três transformações a partir da redução dimensional da equação (2.89), as quais são precisamente as leis de transformações da métrica, do campo vetorial e do campo escalar. Desta forma, como os campos resultantes da redução dimensional possuem as corretas leis sob transformações gerais de coordenadas, asseguramos que a decomposição (2.88) está correta. Agora, considerando o segundo caso, em que $\hat{\xi}^{\hat{\rho}} \to \xi^z$, ficamos com

$$\delta \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (\partial_{\hat{\mu}} \xi^z) \hat{g}_{z\hat{\nu}} + (\partial_{\hat{\nu}} \xi^z) \hat{g}_{z\hat{\mu}} \ . \tag{2.92}$$

Repetindo os mesmos passos da equação anterior, obtemos

$$\begin{cases} \delta g_{\mu\nu} = 0, \\ \delta A_\mu = \partial_\mu \xi^z, \\ \delta \Phi = 0. \end{cases} \tag{2.93}$$

As transformações (2.93) indicam que o parâmetro ξ^z descreve uma transformação de gauge, associada ao grupo $U(1)$, para o campo vetorial, A_μ. Como o grupo de transformação de gauge do Eletromagnetismo é justamente o grupo $U(1)$, podemos identificar o campo vetorial A_μ como o potencial eletromagnético, de modo que a existência da simetria interna, $U(1)$, na teoria reduzida dimensionalmente é fruto da existência de uma dimensão espacial recurvada. Em outras palavras, o Eletromagnetismo aparece como consequência da existência desta dimensão extra. Além disso, a transformação (2.93) também indica que a métrica não é afetada por essa transformação de gauge, o que significa que o campo gravitacional não tem carga elétrica.

Antes de prosseguirmos, vamos fazer um reescalonamento, utilizando o chamado *string frame*, nas equações (2.88). Além disso, vamos fazer o seguinte renomeamento para o campo vetorial $A_\mu \equiv C^{(1)}{}_\mu$. Isto posto, a decomposição das componentes da métrica 11-dimensional $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ fica dada por

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \longrightarrow \begin{cases} \hat{g}_{\mu\nu} \equiv e^{-\frac{2}{3}\Phi} g_{\mu\nu} - e^{\frac{4}{3}\Phi} C^{(1)}{}_\mu C^{(1)}{}_\nu, \\ \hat{g}_{\mu z} \equiv -e^{\frac{4}{3}\Phi} C^{(1)}{}_\mu, \\ \hat{g}_{zz} \equiv -e^{\frac{4}{3}\Phi}. \end{cases} \tag{2.94}$$

O próximo campo a ser reduzido é a *3-forma*, que possui $\frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{6} = 84$ graus de liberdade em 11 dimensões, sendo decompostos em

$$\hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C}_{\mu\nu\rho} \equiv C_{\mu\nu\rho}, & \text{3-forma (56 graus de liberdade);} \\ \hat{C}_{\mu\nu z} \equiv B_{\mu\nu}, & \text{2-forma (28 graus de liberdade)} \end{cases} \tag{2.95}$$

No caso do gravitino, embora os espinores de 11 e 10 dimensões possuam o mesmo número de componentes, suas características mudam ao trocarmos de dimensão. Em 11 dimensões, o gravitino é um spinor de Majorana com 128 graus de liberdade. No entanto, como o espinor mais simples em 10 dimensões é o espinor de Majorana-Weyl, cada gravitino de 11 dimensões pode ser decomposto em dois de gravitinos 10-dimensionais, que são espinores de Majorana-Weyl (cada um com 56 componentes independentes), podendo possuir a mesma ou diferentes quiralidade ($\Psi_L \oplus \Psi_R$; $2\Psi_L$; $2\Psi_R$). Desta forma, como a decomposição origina dois gravitinos, esta Supergravidade é dita $\mathcal{N}=2$. A Supergravidade *Tipo-IIA* envolve os gravitinos com diferentes quiralidades.

Além destes dois gravitinos, a decomposição também gera dois campos fermiônicos-$\frac{1}{2}$ de Majorana-Weyl, em que cada um possui 8 componentes independentes. Estes campos são chamados de *dilatinos*, λ, pois são os superparceiros fermiônicos do diláton. Logo, a decomposição do gravitino gera $\hat{\Psi}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}} \longrightarrow \left\{\Psi^{(1)}_{\mu\alpha}; \Psi^{(2)}_{\mu\alpha}; \lambda_\alpha\right\}$. Portanto, o multiplete da Supergravidade *Tipo-IIA* $\mathcal{N}=2-D=10$ é dado por

$$\boxed{\left\{g_{\mu\nu}, C^{(1)}{}_{\mu}, \Phi, C_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu}; \Psi_{\mu\alpha}, \lambda_\alpha\right\}} \,. \tag{2.96}$$

Por fim, como a ação da Supegravidade 11-dimensional utiliza o formalismo das vielbeins, precisamos escrever a decomposição da métrica (2.94) em termos das vielbeins, o que pode ser feito através da relação (1.4). Assim, considerando $\hat{\eta}_{zz}=-1$, as vielbeins que reproduzem as equações (2.94) são dadas por

$$\hat{e}^{\hat{a}}{}_{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{e}^{a}{}_{\mu} & \hat{e}^{a}{}_{z} \\ \hat{e}^{y}{}_{\mu} & \hat{e}^{y}{}_{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}\Phi} e^{a}{}_{\mu} & 0 \\ e^{\frac{2}{3}\Phi} C^{(1)}{}_{\mu} & e^{\frac{2}{3}\Phi} \end{pmatrix} . \tag{2.97}$$

Por sua vez, a matriz inversa das vielbeins (2.97) é dada por

$$\hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \hat{e}^{\mu}{}_{a} & \hat{e}^{\mu}{}_{y} \\ \hat{e}^{z}{}_{a} & \hat{e}^{z}{}_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{3}\Phi} e^{\mu}{}_{a} & 0 \\ -e^{\frac{1}{3}\Phi} C^{(1)}{}_{a} & e^{-\frac{2}{3}\Phi} \end{pmatrix} . \tag{2.98}$$

A partir das vielbeins (2.97) e (2.98), podemos realizar a redução dimensional de vários outros termos da ação (2.77). O primeiro deles é a conexão de spin, $\hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}(e)$, o qual compõe vários dos termos da ação 11-dimensional da Supergravidade, incluindo o escalar de curvatura de Ricci. Como o objetivo é ilustrar o processo de redução dimensional, focaremos apenas nos termos bosônicos, o que significa que a conexão de spin (2.71) será escrita sem os termos de contorção, isto é,

$$\hat{\omega}_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} = -\hat{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} + \hat{\Omega}_{\hat{b}\hat{c}\hat{a}} + \hat{\Omega}_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} \,, \tag{2.99}$$

em que $\hat{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{a}} \hat{e}^{\hat{\nu}}{}_{\hat{b}} \partial_{[\hat{\mu}} \hat{e}^{\hat{d}}{}_{\hat{\nu}]} \hat{\eta}_{\hat{d}\hat{c}}$. A partir disso, nosso objetivo é reescrever $\hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}$ em termos de objetos 10-dimensionais, o que é feito separando os índices em, por exemplo, $\hat{a}=(a,y)$. Assim, para construir o primeiro objeto a partir da conexão de spin (2.99), fazemos a seguinte escolha: $\hat{a}=a$, $\hat{b}=b$ e $\hat{c}=c$. Logo, ficamos com

$$\hat{\omega}_{cab} = -\hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{a} \hat{e}^{\hat{\nu}}{}_{b} \partial_{[\hat{\mu}} \hat{e}^{\hat{d}}{}_{\hat{\nu}]} \hat{\eta}_{\hat{d}c} + \hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{b} \hat{e}^{\hat{\nu}}{}_{c} \partial_{[\hat{\mu}} \hat{e}^{\hat{d}}{}_{\hat{\nu}]} \hat{\eta}_{\hat{d}a} + \hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{c} \hat{e}^{\hat{\nu}}{}_{a} \partial_{[\hat{\mu}} \hat{e}^{\hat{d}}{}_{\hat{\nu}]} \hat{\eta}_{\hat{d}b} \,. \tag{2.100}$$

Abrindo os índices somados e anti-simetrizados da equação (2.100) e lembrando da condição de Scherk-Schwarz, $\partial_y \hat{e}^{\hat{d}}{}_{\hat{\nu}} = 0$, ficamos com

$$\hat{\omega}_{cab} = -\frac{\hat{e}^{\mu}{}_a \hat{e}^{\nu}{}_b}{2}\left[\partial_\mu \hat{e}^d{}_\nu - \partial_\nu \hat{e}^d{}_\mu\right]\hat{\eta}_{dc} + \frac{\hat{e}^{\mu}{}_b \hat{e}^{\nu}{}_c}{2}\left[\partial_\mu \hat{e}^d{}_\nu - \partial_\nu \hat{e}^d{}_\mu\right]\hat{\eta}_{da} + \frac{\hat{e}^{\mu}{}_c \hat{e}^{\nu}{}_a}{2}\left[\partial_\mu \hat{e}^d{}_\nu - \partial_\nu \hat{e}^d{}_\mu\right]\hat{\eta}_{db} \,. \tag{2.101}$$

Note que as vielbeins da equação (2.101) são justamente as quantidades expressadas nas equações (2.97) e (2.98). Assim, substituindo-as na equação (2.101)

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{cab} = \frac{-e^{\frac{2}{3}\Phi}}{2}\hat{e}^{\mu}{}_a \hat{e}^{\nu}{}_b\Big[-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}\Phi}(\partial_\mu\Phi)e^d{}_\nu + e^{-\frac{1}{3}\Phi}\partial_\mu e^d{}_\nu + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}\Phi}(\partial_\nu\Phi)e^d{}_\mu - e^{-\frac{1}{3}\Phi}\partial_\nu e^d{}_\mu\Big]\eta_{dc} \\ +\frac{e^{\frac{2}{3}\Phi}}{2}\hat{e}^{\mu}{}_b \hat{e}^{\nu}{}_c\Big[-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}\Phi}(\partial_\mu\Phi)e^d{}_\nu + e^{-\frac{1}{3}\Phi}\partial_\mu e^d{}_\nu + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}\Phi}(\partial_\nu\Phi)e^d{}_\mu - e^{-\frac{1}{3}\Phi}\partial_\nu e^d{}_\mu\Big]\eta_{da} \\ +\frac{e^{\frac{2}{3}\Phi}}{2}\hat{e}^{\mu}{}_c \hat{e}^{\nu}{}_a\Big[-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}\Phi}(\partial_\mu\Phi)e^d{}_\nu + e^{-\frac{1}{3}\Phi}\partial_\mu e^d{}_\nu + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}\Phi}(\partial_\nu\Phi)e^d{}_\mu - e^{-\frac{1}{3}\Phi}\partial_\nu e^d{}_\mu\Big]\eta_{db} \,. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Dentre os termos da equação (2.102), tomando apenas aqueles que possuem a derivada do campo Φ, $\partial_\mu\Phi$, e utilizando as relações (1.2), (1.9) e (1.10), podemos reescrever todos estes termos como

$$\frac{e^{\frac{1}{3}\Phi}}{6}\Big[2\eta_{cb}\partial_a\Phi - 2\eta_{ca}\partial_b\Phi\Big] = \frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}\Phi}\eta_{c[b}\partial_{a]}\Phi \,. \tag{2.103}$$

Agora, tomando os termos restantes da equação (2.102), podemos reescrevê-los da seguinte forma

$$e^{\frac{1}{3}\Phi}\Big[-e^{\mu}{}_a e^{\nu}{}_b \partial_{[\mu}e^d{}_{\nu]}\eta_{dc} + e^{\mu}{}_b e^{\nu}{}_c \partial_{[\mu}e^d{}_{\nu]}\eta_{da} + e^{\mu}{}_c e^{\nu}{}_a \partial_{[\mu}e^d{}_{\nu]}\eta_{db}\Big] \,, \tag{2.104}$$

que é precisamente a equação (2.100) para a conexão de spin em 10 dimensões, ω_{abc}. Por conseguinte, somando as contribuições (2.103) e (2.104), a componente $\hat{\omega}_{abc}$ da conexão de spin 11-dimensional, $\hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}$, é reescrita em termos de quantidades 10-dimensionais e vale

$$\hat{\omega}_{cab} = e^{\frac{1}{3}\Phi}\Big[\omega_{cab} + \frac{2}{3}\eta_{c[b}\partial_{a]}\Phi\Big] \,. \tag{2.105}$$

Podemos repetir este mesmo procedimento para obter os outros termos a partir da equação (2.99). Por exemplo, podemos tomar $\hat{a} = a$, $\hat{b} = b$ e $\hat{c} = y$, entre outras possibilidades. Com isso, as componentes não nulas da conexão de spin 11-dimensional $\hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}$ são dadas por

$$\hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\omega}_{abc} = e^{\frac{1}{3}\Phi}\Big[\omega_{abc} + \frac{2}{3}\eta_{a[c}\partial_{b]}\Phi\Big], \\ \hat{\omega}_{aby} = -\frac{1}{2}e^{\frac{4}{3}\Phi}G_{ab}, \\ \hat{\omega}_{yab} = \frac{1}{2}e^{\frac{4}{3}\Phi}G_{ab}, \\ \hat{\omega}_{yay} = \frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}\Phi}\partial_a\Phi. \end{cases} \tag{2.106}$$

Nestas equações, o termo G_{ab} corresponde ao *field-strength* do vetor A_a: $G_{ab} = 2\partial_{[a}A_{b]}$.

Assim como comentado na referência **[96]**, a redução dimensional do termo de Einstein-Hilbert da ação (2.77) pode ser simplificada se o escrevermos em termos apenas das conexões de Lorentz. Assim, em vez de considerarmos a forma (1.45), com o tensor de Riemann dado pela equação (1.38), vamos tomar a seguinte forma para o termo de Einstein-Hilbert

$$\int d^{11}\hat{x}\sqrt{|\hat{g}|}\hat{R} = \int d^{11}\hat{x}\sqrt{|\hat{g}|}\left(\hat{\omega}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}\hat{c}}\hat{\omega}_{\hat{b}\hat{c}}{}^{\hat{a}} + \hat{\omega}_{\hat{b}}{}^{\hat{b}\hat{a}}\hat{\omega}_{\hat{c}}{}^{\hat{c}}{}_{\hat{a}}\right) . \tag{2.107}$$

Detalhes da dedução da equação (2.107) também podem ser encontrados nas referências **[89][97]**. Assim, lembrando que a conexão de spin é antissimétrica nos dois últimos índices, $\hat{\omega}_{abc} = \hat{\omega}_{a[bc]}$, e explicitando as coordenadas 10-dimensionais e a décima primeira coordenada plana, y, podemos escrever a ação (2.107), tomando apenas seus termos não nulos, como

$$\int d^{11}\hat{x}\sqrt{|\hat{g}|}\hat{R} = \int d^{11}\hat{x}\sqrt{|\hat{g}|}\Bigg[\left(\hat{\omega}_a{}^{bc}\hat{\omega}_{bc}{}^{a} + \hat{\omega}_a{}^{by}\hat{\omega}_{by}{}^{a} + \hat{\omega}_a{}^{yc}\hat{\omega}_{yc}{}^{a} + \hat{\omega}_y{}^{bc}\hat{\omega}_{bc}{}^{y} + \hat{\omega}_y{}^{yc}\hat{\omega}_{yc}{}^{y}\right)$$
$$+\left(\hat{\omega}_b{}^{ba}\hat{\omega}_c{}^{c}{}_{a} + \hat{\omega}_b{}^{ba}\hat{\omega}_y{}^{y}{}_{a} + \hat{\omega}_b{}^{by}\hat{\omega}_c{}^{c}{}_{y} + \hat{\omega}_y{}^{ya}\hat{\omega}_c{}^{c}{}_{a} + \hat{\omega}_y{}^{ya}\hat{\omega}_y{}^{y}{}_{a}\right)\Bigg] . \tag{2.108}$$

Substituindo as conexões de spin (2.106) na equação (2.108) e fazendo a seguinte redução no determinante da métrica, $\sqrt{|\hat{g}|} = \sqrt{|g|}e^{-\frac{8}{3}}$, ficamos com

$$\hat{S} = \int d^{11}\hat{x}\sqrt{|g|}\left[e^{-2\Phi}\left(\omega_b{}^{ba}\omega_c{}^{c}{}_{a} + \omega_a{}^{bc}\omega_{bc}{}^{a} - 4\partial_a\Phi\omega_b{}^{ba} + 4\partial_a\Phi\partial^a\Phi\right) + \frac{1}{4}G^{ab}G_{ab}\right] . \tag{2.109}$$

Como todos os termos da ação (2.109) são objetos 10-dimensionais, podemos integrar separadamente a décima primeira coordenada, de modo que obtemos

$$\hat{S} = \int dz \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[e^{-2\Phi}\left(R(\omega) - 4\partial_a\Phi\omega_b{}^{ba} + 4\partial_a\Phi\partial^a\Phi\right) + \frac{1}{4}G^{ab}G_{ab}\right] , \tag{2.110}$$

em que $R = \omega_b{}^{ba}\omega_c{}^{c}{}_{a} + \omega_a{}^{bc}\omega_{bc}{}^{a}$ é o escalar de Ricci em 10 dimensões. Portanto, tomando L como o comprimento da dimensão extra, a redução do termo de Einstein-Hilbert é dada por

$$S = \frac{L}{16\pi G_N^{(11)}}\int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[e^{-2\Phi}\left(R(\omega) - 4\partial_a\Phi\omega_b{}^{ba} + 4\partial_a\Phi\partial^a\Phi\right) + \frac{1}{4}G^{ab}G_{ab}\right] . \tag{2.111}$$

A constante de acoplamento à frente da equação (2.111) corresponde à constante de acoplamento da ação 10-dimensional, de modo que podemos escrevê-la como $\kappa_{10} \equiv \frac{L}{16\pi G_N^{(11)}}$. Assim, as constantes de acoplamento das diferentes dimensões estão diretamente relacionadas ao tamanho desta dimensão extra. No caso de modelos que propõem a existência de dimensões extras recurvadas, como o caso do modelo de Kaluza-Klein, podemos estimar seu raio através da razão entre as constantes de acoplamento das diferentes dimensões. No próximo Capítulo, discutiremos um pouco mais a respeito do tamanho que este comprimento L deve ter e suas consequências.

Capítulo 3

A Supersimetria em Três Dimensões e a Redução Dimensional

Como o objetivo desta Dissertação é estudar o caráter topológico da Supergravidade em 3 dimensões, este Capítulo terá dois grandes focos principais. O primeiro deles é mostrar que os espinores também geram as isometrias do cone-de-luz em (1+2) dimensões, ou seja, que a Supersimetria em 3 dimensões também tem origem na fundamentalidade dos espinores e na estrutura causal do espaço-tempo. Na sequência, iremos abordar novamente o processo de redução dimensional, com o objetivo de fornecer a base teórica que norteará o Capítulo seguinte. Assim, na segunda seção deste Capítulo, vamos introduzir o método da compactificação e discutir como ele se relaciona com o método de Scherk-Schwarz. Posteriormente, vamos aplicar este último método para reduzir dimensionalmente a ação de dois modelos teóricos.

3.1 A Supersimetria em 3 Dimensões

Ao longo do Capítulo *Supersimetria e Supergravidade*, mostramos que a Supersimetria em (1+3) dimensões está por trás do grupo conforme e, consequentemente, do cone-de-luz do espaço-tempo. A partir da definição do cone-de-luz (2.1), encontramos a equação de Killing (2.10) que fornece as suas isometrias, cuja solução era dada pela equação (2.11). Assim, através de uma série de argumentos, tanto do ponto de vista físico quanto do ponto de vista matemático, motivamos que as quantidades fundamentais da natureza seriam espinores e, com isso, sugerimos que o vetor de Killing, que é solução da equação (2.10), seria formado por uma combinação espinorial (2.25). Consequentemente, escrevemos os quatros parâmetros que formam o grupo conforme, e em última instância o cone-de-luz, em termos de espinores. A partir desses resultados, verificamos que a consequência de introduzir um parâmetro de natureza espinorial na Teoria de Campos é o aparecimento de uma simetria que mistura férmions com bósons, a qual é chamada de Supersimetria. Além disso, também comentamos a respeito de algumas motivações para a introdução da Supersimetria em um cenário de Física de Partículas e também como ela estava naturalmente ligada à gravitação.

Assim, como queremos introduzir uma discussão a respeito da Supergravidade em $(1 + 2)$ dimensões, vamos iniciar esta seção com a mesma discussão que nos levou a Supersimetria no Capítulo *Supersimetria e Supergravidade*, isto é, abordando a relação entre o grupo conforme (e consequentemente o cone-de-luz) e objetos espinoriais. Para não tornar o texto repetitivo, vamos apenas apontar as diferenças do modelo 3-dimensional para o modelo 4-dimensional, que foi desenvolvido no Capítulo anterior e, portanto, vamos omitir nesta seção os detalhes técnicos explicitados anteriormente.

A notação que iremos utilizar neste Capítulo está indicada na seção *Convenções*, no início deste trabalho. Assim, partindo da estrutura do cone-de-luz definida pela equação (2.1), podemos repetir o mesmo cálculo do modelo 4-dimensional para as 3 dimensões, de modo que obtemos a equação de Killing como

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\partial_\kappa \xi^\kappa = 0 \ . \tag{3.1}$$

No entanto, como bem enfatizado no Capítulo anterior e nas referências **[98][47]**, a solução (2.11) é a solução mais geral possível para um espaço-tempo de dimensão $D > 2$. Portanto, em $(1 + 2)$ dimensões a solução da equação de Killing permanece sendo dada por

$$\xi^\mu(x) = \varepsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu \, x^\nu + \lambda x^\mu + a^\mu x^2 - 2x^\mu a^\nu x_\nu \ . \tag{3.2}$$

Em D dimensões, os parâmetros da transformação conforme (3.2) possuem $\frac{1}{2}(D + 1)(D + 2)$ componentes, o que significa que são 10 os parâmetros independentes do grupo conforme em 3 dimensões. Assim, o grupo conforme 3-dimensional possui os mesmos parâmetros do grupo conforme 4-dimensional, diferindo apenas pelo número de componentes que eles possuem.

Assim, tendo em vista a argumentação a respeito da fundamentalidade dos espinores desenvolvida no Capítulo *Supersimetria e Supergravidade*, podemos propor uma equação fermiônica tipo-Killing para as três dimensões, em completa analogia com (2.17), como

$$\left(\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\gamma_\kappa \partial^\kappa\right)\Psi(x) = 0 \ . \tag{3.3}$$

Novamente, podemos destacar que a equação (3.3) preserva a estrutura matemática da equação de Killing, mas agora fica escrita em termos de um espinor, $\Psi(x)$, em vez do vetor de Killing $\xi^\mu(x)$. A grande diferença entre as equações (2.17) e (3.3) reside na estrutura do espinor $\Psi(x)$, que contém apenas 2 componentes neste modelo 3-dimensional, ao passo que ele possui 4 componentes em 4 dimensões.

Na sequência, realizando os mesmos procedimentos que o do modelo 4-dimensional, encontramos que o espinor $\Psi(x)$ é linear nas coordenadas do espaço-tempo, tal qual obtido para o modelo 4-dimensional (2.24). Portanto, também podemos construir o vetor de Killing em termos de espinores de Majorana, ou seja, a relação

$$\xi^\mu \equiv i\overline{\Psi}\gamma^\mu\beta \ , \tag{3.4}$$

permanece válida no caso das três dimensões. Assim, tal qual o procedimento realizado no Capítulo anterior, podemos nos apropriar da linearidade dos espinores Ψ e β para também escrever os parâmetros do grupo conforme em termos de espinores. Logo, as mesmas expressões para o modelo 3-dimensional permanecem inalteradas

$$\begin{cases} \varepsilon^\mu \equiv i\overline{\psi_0}\gamma^\mu\beta_0, \\ \omega^{\mu\nu} \equiv -\overline{\psi_0}\Big(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\Big)\beta_1 + \overline{\beta_0}\Big(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\Big)\psi_1, \\ \lambda \equiv -\overline{\psi_0}\beta_1 + \overline{\psi_1}\beta_0, \\ a^\mu \equiv i\overline{\beta_1}\gamma^\mu\psi_1, \ . \end{cases} \tag{3.5}$$

Assim, a diferença das equações (3.5) para as suas correspondentes do modelo em 4 dimensões permanece sendo a álgebra das matrizes γ empregada, o número de componentes dos espinores (neste caso são duas) e, consequentemente, o número de componentes que cada um dos parâmetros possuem, com exceção do escalar λ. Além disso, também é importante destacar que a identidade (2.36) é válida apenas em 4 dimensões, mas que há um análogo no espaço 3-dimensional, que é dado por

$$\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = \eta^{\nu\lambda}\gamma^\mu + \eta^{\lambda\mu}\gamma^\nu - \eta^{\nu\mu}\gamma^\lambda + \epsilon^{\nu\lambda\mu}\,\mathcal{I}_{2\times2} \ , \tag{3.6}$$

em que $\mathcal{I}_{2\times2}$ é a matriz identidade de tamanho 2×2.

Assim, a nossa conclusão é que os parâmetros que formam o grupo conforme em $(1+2)$ dimensões, os quais representam o grupo de invariância do cone-de-luz do espaço de Minkowski nesta dimensão, também podem ser escritos em termos de espinores. Em outras palavras, o próprio cone-de-luz indica que há uma estrutura mais fundamental que vetores e escalares. Portanto, é possível prosseguir da mesma forma que fizemos no espaço 4-dimensional e obter as transformações de campos que misturam bósons e férmions, ou seja, obter as transformações de Supersimetria, bem como sua álgebra, neste novo espaço 3-dimensional.

Dando sequência ao desenvolvimento deste Capítulo, o objetivo da próxima seção será mostrar em detalhes o processo de redução dimensional dos vários tipos de campos que aparecerão na redução da Supergravidade 4-dimensional, tornando mais claro o processo de truncamento que utilizaremos no próximo Capítulo.

3.2 O Método da Redução Dimensional

Assim como comentado no Capítulo *Supersimetria e Supergravidade*, a hipótese da introdução de dimensões extras sempre esteve ligada ao desejo de promover uma unificação entre diferentes forças nas 4 dimensões usuais. A redução dimensional é o mecanismo que permite estabelecer uma conexão entre a física com a presença de dimensões extras e a nossa física tradicional, descrita em termos de três dimensões espaciais e uma temporal. Assim, a forma com a qual conectamos diferentes dimensões, isto é, com a qual fazemos uma redução dimensional permanece sendo objeto de estudo, principalmente no âmbito da Teoria de Supercordas. A referência [**99**] traz alguns do mecanismos de redução que são utilizados nas Teorias de Supercordas. Já a referência [**100**] traz uma grande revisão histórica dos mecanismos de redução dimensional.

Um dos principais mecanismos de redução dimensional é o da *compactificação*, que consiste em considerarmos que as dimensões extras sejam recurvadas. Ao longo da Dissertação, seja neste Capítulo ou no próximo, a compactificação não será o método que utilizaremos para fazer as reduções. Em vez disso, utilizaremos a abordagem de Scherk e Schwarz, a qual consiste apenas em considerar que os campos das dimensões usuais não são sensíveis às dimensões extras, ou seja, que eles não possuem dependência nas coordenadas das dimensões extras. No entanto, como a compactificação é uma das abordagens mais importantes e populares da redução dimensional, e como podemos obter a condição de Scherk e Schwarz a partir dela, a próxima subseção terá um caráter pedagógico, cujo objetivo é explicitar a compactificação do campo escalar e vetorial. Após isso, comentaremos o truncamento necessário para obtermos a condição mencionada.

Na sequência, usando justamente a condição de Scherk e Schwarz, vamos calcular a ação do campo de Rarita-Schwinger e do modelo de Super Yang-Mills em (1+2) dimensões, a partir dos seus correspondentes 4-dimensionais.

3.2.1 Compactificação e o Formalismo de Scherk-Schwarz

Para simplificar a descrição, vamos considerar apenas a presença de uma dimensão compacta, cuja topologia é a de um círculo S^1. Assim, a variedade do espaço-tempo $(D+1)$-dimensional, com a presença desta dimensão recurvada, é $M^D \otimes S^1$, em que M^D é o espaço de Minkowski em D dimensões. Com isso, vamos denotar R como o raio da dimensão compacta, chamar de y a coordenada desta dimensão, a qual obedece uma condição de contorno periódica, $0 \leq y \leq 2\pi R$, e chamar de μ as coordenadas do espaço-tempo D-dimensional. Assim, as coordenadas do espaço $(D+1)$-dimensional ficam descritas por $\hat{\mu} = (0 \ldots D-1, y) \equiv (\mu, y)$. Neste sentido, num espaço com uma dimensão temporal, três dimensões espaciais estendidas e uma compacta, as coordenadas deste espaço 5-dimensional são $\hat{\mu} = (0 \ldots 3, y) \equiv (\mu, y)$.

Como caso inicial, vamos considerar um campo escalar sem massa $\hat{\Phi}(x^\mu, y)$, o qual obedece à equação de Klein-Gordon $(D+1)$-dimensional

$$\hat{\Box}\hat{\Phi} = 0 \Longrightarrow \Box\hat{\Phi} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \hat{\Phi} = 0 \; . \tag{3.7}$$

Devido à presença da dimensão recurvada, o campo obedece a condições de contorno periódicas na coordenada y, ou seja,

$$\hat{\Phi}(x^\mu, y) = \hat{\Phi}(x^\mu, y + 2\pi R) \tag{3.8}$$

Com isso, podemos expandir o campo escalar $\hat{\Phi}$ em termos de uma série de Fourier

$$\hat{\Phi}(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iny/R} \, \Phi_n(x^\mu) \; . \tag{3.9}$$

Substituindo a expansão (3.9) na equação (3.7), temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iny/R} \left[\Box\Phi_n(x^\mu) - \frac{n^2}{R^2}\Phi_n(x^\mu)\right] = 0 \; . \tag{3.10}$$

Portanto, a equação de Klein-Gordon no espaço D-dimensional fica

$$\left[\Box - \frac{n^2}{R^2}\right]\Phi_n(x^\mu) = 0 \tag{3.11}$$

A equação (3.11) descreve uma partícula escalar de massa $m_n = (n/R)^2$ em D dimensões. Assim, vemos que a redução dimensional de uma teoria escalar com dimensão recurvada gera massa para as partículas escalares da dimensão inferior. Além disso, também podemos extrair desta equação que o espectro da teoria em D dimensões contém um número infinito de escalares massivos, os quais são inversamente proporcionais ao raio da dimensão recurvada. Se este raio for do tamanho do comprimento de Planck, $R \sim 10^{-33}$cm, as massas são da ordem de 10^{19}GeV.

Ao longo das próximas seções e dos próximos Capítulos, vamos trabalhar apenas com partículas sem massa, ou seja, utilizaremos apenas o modo-zero da equação (3.11), que é dado tomando $n = 0$. Em outras palavras, estamos trabalhando num limite cujas massas são muito menores que $1/L \sim 10^{19}$GeV. Veja que esta equação referente ao modo-zero também teria sido obtida se tivéssemos tomado a condição de Scherk-Schwarz, $\partial_y(\cdots) = 0$, na equação (3.7). Assim, vemos que o limite das partículas sem massa é equivalente

Passando para o próximo campo, vamos considerar agora o campo vetorial $\hat{A}_{\hat{\mu}}$, o qual obedece à equação de Maxwell

$$\partial^{\hat{\nu}}\hat{F}_{\hat{\nu}\hat{\mu}} = \partial^{\hat{\nu}}\left(\partial_{\hat{\nu}}\hat{A}_{\hat{\mu}} - \partial_{\hat{\mu}}\hat{A}_{\hat{\nu}}\right) = \hat{\Box}\hat{A}_{\hat{\mu}} - \partial_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\nu}}\hat{A}_{\hat{\nu}} = 0 \; . \tag{3.12}$$

Veja que o campo vetorial é capaz de gerar um campo vetorial e um campo escalar na dimensão inferior. Assim, devido à presença de uma dimensão recurvada, vamos expandir estes campos em termos de séries de Fourier

$$\hat{A}_\mu(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iny/R}\; A_\mu^{(n)}(x^\mu) \; , \tag{3.13}$$

$$\hat{A}_y(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iny/R}\; A_y^{(n)}(x^\mu) \; . \tag{3.14}$$

Assim, vamos analisar primeiramente o caso em que $\hat{\mu} = y$. Logo, substituindo as expansões (3.13) and (3.14) na equação (3.12) e tomando essa componente, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\hat{\Box}\left(e^{iny/R}\; A_y^{(n)}(x^\mu)\right) - \partial_y\partial^{\hat{\nu}}\left(e^{iny/R}\; A_{\hat{\nu}}^{(n)}(x^\mu)\right)\right\} = 0 \; . \tag{3.15}$$

Veja que tomando $n = 0$, isto é, tomando o modo-zero, a equação (3.15) fica

$$\hat{\Box}A_y^{(0)}(x^\mu) - \partial_y\partial^{\hat{\nu}}A_{\hat{\nu}}^{(0)}(x^\mu) = 0 \Longrightarrow \Box A_y^{(0)}(x^\mu) = 0 \; , \tag{3.16}$$

que é justamente a equação de Klein-Gordon. Assim, do ponto de vista das D-dimensões, a componente $A_y^{(0)}$ descreve uma partícula escalar sem massa.

Antes de tomarmos o caso em que $\hat{\mu} = \mu$, podemos simplificar nossa análise através de uma escolha de gauge. A transformação de gauge do campo $\hat{A}_y$ é dada por

$$\hat{A}'_y(x^\mu, y) = \hat{A}_y(x^\mu, y) + \partial_y \hat{\xi}(x^\mu, y) \ , \tag{3.17}$$

em que $\hat{\xi}(x^\mu, y)$ é o parâmetro de gauge da transformação. Substituindo as expansões de Fourier na equação (3.17) de $\hat{A}_y(x^\mu, y)$ e $\hat{\xi}(x^\mu, y)$, temos

$$A_y^{(n)\prime}(x^\mu) = \ A_y^{(n)}(x^\mu) + \frac{in}{R}\xi(x^\mu) \ . \tag{3.18}$$

Desta forma, quando $n = 0$ obtemos que o campo $A_y^{(0)}(x^\mu)$ é invariante de gauge, isto é, $A_y^{(0)\prime}(x^\mu) = \ A_y^{(0)}(x^\mu)$. Este resultado já era esperado, uma vez que havíamos visto que este campo obedecia à equação de Klein-Gordon e era, portanto, um escalar. Na situação que $n \neq 0$, a equação (3.18) mostra que podemos tomar a seguinte condição de gauge: $A_y^{(n)}(x^\mu) = 0$.

Com essa escolha de gauge, vamos substituir novamente as expansões (3.13) e (3.14) na equação (3.12), mas dessa vez para $\hat{\mu} = \mu$. Assim, ficamos com

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{\Box}\left(e^{iny/R} \ A_\mu^{(n)}(x^\mu) \right) - \partial_\mu \partial^{\hat{\nu}} \left(e^{iny/R} \ A_{\hat{\nu}}^{(n)}(x^\mu) \right) \right\} = 0 \tag{3.19}$$

Operando com as derivadas e considerando a condição de gauge $A_y^{(n)}(x^\mu) = 0$, a equação (3.19) fica dada por

$$\left[\Box - \frac{n^2}{R^2} \right] A_\mu^{(n)}(x^\mu) - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu^{(n)}(x^\mu) = 0 \tag{3.20}$$

Assim, vemos que a presença de uma dimensão recurvada também é capaz de gerar uma torre de massas para o campo vetorial A_μ e que elas são inversamente proporcionais ao raio da dimensão compacta. Novamente, como estamos interessados apenas nos casos de massas zero, vamos truncá-las e trabalhar apenas com o modo-zero, que é dado por $n = 0$. Assim, obtemos

$$\Box A_\mu^{(0)}(x^\mu) - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu^{(0)}(x^\mu) = 0 \ , \tag{3.21}$$

que é justamente a equação que descreve um campo vetorial e sem massa em D-dimensões.

A referência **[58]** traz outros detalhes sobre a abordagem que fizemos acima, além de também demonstrar a redução e a obtenção das massas do campo fermiônico e do gravitino. Com isso, concluímos a subseção sobre o processo de compactificação dos campos. Na próxima subseção, vamos realizar a redução dimensional do campo de Rarita-Schwinger usando a condição de Scherk-Schwarz que, nas palavras deste Capítulo, é equivalente a truncarmos todas as massas e considerarmos apenas os modos-zeros.

3.2.2 O Campo de Rarita-Schwinger

Assim como mencionado no Capítulo *Supersimetria e Supergravidade*, a equivalência entre o número de graus de liberdade fermiônico e bosônico é parte fundamental e característico das teorias supersimétricas. O gravitino, objeto que iremos apresentar nesta seção, é parte fundamental da Supergravidade; é o parceiro fermiônico do gráviton. Ele é uma partícula de spin-3/2, o que significa que ele carrega uma representação vetorial e uma espinorial do grupo de Lorentz. Em outras palavras, o gravitino tem um índice vetorial com $\mu = (0, \ldots, D-1)$ componentes e um spinorial com $2^{[D/2]}$ componentes. No entanto, é importante destacar que, por motivos de economia na notação, vamos omitir o índice espinorial. Assim, o gravitino fica representado por $\Psi_{\mu\alpha} \Rightarrow \Psi_\mu$, tornando implícito que ele contém um caráter espinorial.

Ao longo desta subseção, vamos considerar apenas a lagrangiana do gravitino livre em um espaço-tempo D-dimensional plano, a qual é dada por

$$S = -\int d^D x \; \overline{\Psi}_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho \; , \tag{3.22}$$

em que $\Gamma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3!}\Gamma^{[\mu}\Gamma^{\nu}\Gamma^{\rho]}$. Em quatro dimensões, podemos simplificar esta ação utilizando a seguinte identidade: $\Gamma^{\mu\rho\sigma} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma_5\Gamma_\nu$. Logo, já adotando a notação com o chapéu, $\hat{}$, para os índices 4-dimensionais, a ação do gravitino fica dada por

$$S = i\int d^4 x \; \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \; \hat{\overline{\Psi}}_{\hat{\mu}} \Gamma_5 \Gamma_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} \; . \tag{3.23}$$

Uma importante característica que podemos destacar da ação (3.23) é a dimensionalidade em massa do gravitino; sua dimensão canônica é $[\hat{\Psi}] = [massa]^{3/2}$. Como o operador derivada tem dimensão canônica $[\partial] = [massa]^1$, vemos que a ação (3.23) está dimensionalmente correta, uma vez que $[d^4x] = [massa]^{-4}$. Além disso, também podemos destacar que esta ação é invariante de gauge, com a transformação do gravitino dada por

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mu}}(x) \longrightarrow \hat{\Psi}_{\hat{\mu}}(x) + \partial_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}(x) \; . \tag{3.24}$$

Outras características e detalhes sobre o gravitino podem ser encontradas nas referências **[58]** e **[18]**. Agora, nosso objetivo é reduzir dimensionalmente a ação (3.23) para obter sua versão em um espaço-tempo com três dimensões. Para tanto, como mencionado no início desta seção, vamos usar apenas a condição que os campos 3-dimensionais não dependem da coordenada 3, a qual será identificada como $3 \equiv z$. Ou seja, $\partial_z(\cdots) = 0$.

Para todas as reduções dimensionais que faremos neste trabalho, utilizaremos a notação das matrizes Γ na representação de Majorana, a qual foi definida na seção *Convenções*. Além disso, também é importante destacar que o gravitino $\Psi_{\hat{\mu}}$, que é um espinor com 4×1 componentes, será divido em dois espinores com 2×1 componentes cada um. Desta forma, escrevemos um espinor de 4 dimensões em termos dos espinores presentes na dimensão inferior, o qual é dado por

$$\hat{\Psi}_\mu = \begin{pmatrix} \psi_\mu \\ \xi_\mu \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\Psi}_z = \begin{pmatrix} \psi \\ \xi \end{pmatrix} \; . \tag{3.25}$$

Com estas considerações, podemos realizar a redução dimensional da ação (3.23), a qual pode ser reescrita como

$$\hat{S} = i \int d^4x \; \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \hat{\Psi}^\dagger_{\hat{\mu}} \Gamma^0 \Gamma_5 \Gamma_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} \; . \tag{3.26}$$

Considerando a representação das matrizes Γ's definida na seção *Convenções* e os gravitinos (3.25), podemos abrir a soma no primeiro índice, $\hat{\mu}$, de modo que obtemos

$$\hat{S} = \int d^4x \left\{ \epsilon^{\mu\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \left(\overline{\xi}_\mu, \overline{\psi}_\mu \right) \Gamma_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} + \epsilon^{z\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \left(\overline{\xi}, \overline{\psi} \right) \Gamma_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} \right\} \; . \tag{3.27}$$

A única contribuição não-nula do segundo termo da equação (3.27) se dá quando $\hat{\nu}$, $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ são diferentes de z, devido à presença do tensor de Levi-Civita. Ou seja, temos

$$\hat{S} = \int d^4x \left\{ \epsilon^{\mu\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \left(\overline{\xi}_\mu, \overline{\psi}_\mu \right) \Gamma_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} + \epsilon^{z\nu\rho\sigma} \left(\overline{\xi}, \overline{\psi} \right) \Gamma_{\nu} \partial_{\rho} \hat{\Psi}_{\sigma} \right\} \; . \tag{3.28}$$

Vamos abrir todas as somas do primeiro termo de forma separada dos outros termos da equação (3.28). É importante destacar que estamos assumindo que as derivadas com relação a coordenada z são nulas. Logo, a coordenada $\hat{\rho}$ não pode assumir o valor de z neste primeiro termo. Além disso, também devemos notar que, do ponto de vista das 3 dimensões, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, uma vez que todos os índices vão de zero até dois. Logo, o primeiro termo fica

$$\epsilon^{\mu\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \left(\overline{\xi}_\mu, \overline{\psi}_\mu \right) \Gamma_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} = \epsilon^{\mu\nu\rho z} \left(\overline{\xi}_\mu, \overline{\psi}_\mu \right) \Gamma_{\nu} \partial_{\rho} \hat{\Psi}_z + \epsilon^{\mu z\rho\sigma} \left(\overline{\xi}_\mu, \overline{\psi}_\mu \right) \Gamma_z \partial_\rho \hat{\Psi}_\sigma \; . \tag{3.29}$$

Assim, a ação (3.28) fica

$$\hat{S} = \int d^4x \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho z}\left(\overline{\xi}_\mu, \overline{\psi}_\mu\right)\Gamma_\nu \partial_\rho \hat{\Psi}_z + \epsilon^{\mu z\rho\sigma}\left(\overline{\xi}_\mu, \overline{\psi}_\mu\right)\Gamma_z \partial_\rho \hat{\Psi}_\sigma + \epsilon^{z\nu\rho\sigma}\left(\overline{\xi}, \overline{\psi}\right)\Gamma_\nu \partial_\rho \hat{\Psi}_\sigma \right\} \quad (3.30)$$

Fazendo novamente a multiplicação entre todas as matrizes envolvidas, ficamos com

$$\hat{S} = \int d^4x \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho z}\left(\overline{\xi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \psi - \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \xi\right) + i\epsilon^{\mu z\rho\sigma}\left(\overline{\psi}_\mu \partial_\rho \psi_\sigma + \overline{\xi}_\mu \partial_\rho \xi_\sigma\right) \right.$$
$$\left. + \epsilon^{z\nu\rho\sigma}\left(\overline{\xi}\gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma - \overline{\psi}\gamma_\nu \partial_\rho \xi_\sigma\right)\right\} . \quad (3.31)$$

A convenção que vamos adotar para escrever o tensor de Levi-Civita em três dimensões é

$$\epsilon^{\mu\nu\rho z} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho} \quad (3.32)$$

Desse modo, vemos que $\epsilon^{z\nu\rho\sigma} \equiv -\epsilon^{\nu\rho\sigma}$ e que $\epsilon^{\mu z\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\rho\sigma}$. Com estas definições, a ação (3.31) pode ser reescrita como

$$\hat{S} = \int d^4x \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\xi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \psi - \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \xi\right) + i\epsilon^{\mu\rho\sigma}\left(\overline{\psi}_\mu \partial_\rho \psi_\sigma + \overline{\xi}_\mu \partial_\rho \xi_\sigma\right) \right.$$
$$\left. - \epsilon^{\nu\rho\sigma}\left(\overline{\xi}\gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma - \overline{\psi}\gamma_\nu \partial_\rho \xi_\sigma\right)\right\} . \quad (3.33)$$

Além disso, vamos fazer a seguinte troca de índices na equação (3.33): $\nu \to \mu$, $\rho \to \nu$ e $\sigma \to \rho$. Logo,

$$\hat{S} = \int d^4x \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\xi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \psi - \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \xi\right) + i\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\rho + \overline{\xi}_\mu \partial_\nu \xi_\rho\right) \right.$$
$$\left. - \epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\xi}\gamma_\mu \partial_\nu \psi_\rho - \overline{\psi}\gamma_\mu \partial_\nu \xi_\rho\right)\right\} . \quad (3.34)$$

Desta forma, a redução dimensional da ação (3.26) do gravitino fica dada por

$$\hat{S} = \int dz \int d^3x \left\{ 2\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\xi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \psi - \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \xi\right) + i\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\rho + \overline{\xi}_\mu \partial_\nu \xi_\rho\right)\right\} . \quad (3.35)$$

Assim, a ação (3.35) fica toda escrita em termos de objetos 3-dimensionais. Em uma redução dimensional via compactificação, a coordenada z é integrada ao longo desta dimensão compacta, resultando num fator $2\pi R$. No entanto, como não estamos compactificando a dimensão, vamos integrá-la entre 0 e um certo comprimento L, o qual não é necessariamente pequeno, podendo tender ao infinito. Com isso, a ação fica dada por

$$S = L \int d^3x \left\{ 2\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\xi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \psi - \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \partial_\rho \xi\right) + i\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\rho + \overline{\xi}_\mu \partial_\nu \xi_\rho\right)\right\} . \quad (3.36)$$

Note que a ação (3.36) não está dimensionalmente correta, pois a dimensão de seus termos é de $[massa]^4$. Para resolver este problema, vamos fazer uma redefinição nos campos de spin-1/2 e no gravitino, de modo a incluir este comprimento oriundo da redução dimensional. Consequentemente, vamos redefinir os campos, tal que $\psi \equiv \sqrt{L}\psi$ e $\psi_\mu \equiv \sqrt{L}\psi_\mu$. Com isso, vemos que a dimensão extra impacta diretamente na dimensão canônica que os campos possuem e, assim, a ação em três dimensões fica dada por

$$\boxed{S = \int d^3x \left\{ 2\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\xi}_\mu\gamma_\nu\partial_\rho\psi - \overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\partial_\rho\xi\right) + i\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\overline{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\rho + \overline{\xi}_\mu\partial_\nu\xi_\rho\right)\right\}} \, . \tag{3.37}$$

Um dos artifícios que utilizaremos no próximo Capítulo será o truncamento de alguns campos que aparecerão ao longo da redução. Assim, para ilustrar este processo, vamos fazer os seguintes truncamentos na equação (3.37): $\xi_\mu = 0$ e $\xi = 0$. Com isso, a ação truncada fica

$$S = i\int d^3x \; \epsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\rho \; . \tag{3.38}$$

Assim, encerramos a redução dimensional da ação do gravitino (3.26). Agora, o próximo passo é fazer a redução da ação de Super Yang-Mills, a qual contém outros tipos de campos, como os campos vetoriais e escalares.

3.2.3 Ação de Super Yang-Mills

A próxima ação que iremos fazer a redução dimensional é uma teoria de gauge supersimétrica $\mathcal{N} = 1$. O modelo é constituído de um campo vetorial de gauge A^a_μ, em que, neste caso, a é um índice da representação adjunta de um grupo não-abeliano de gauge, do seu parceiro fermiônico chamado de gaugino, λ^a, e também de um campo auxiliar pseudo-escalar, P^a, o qual é necessário para garantir a equivalência dos graus de liberdade na ação. Com isso, a ação deste modelo é dada por

$$\hat{S} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}a}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}a} - \frac{1}{2}\hat{\overline{\lambda}}^a\Gamma^{\hat{\mu}}D_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}^a + \frac{1}{2}\hat{P}^a\hat{P}^a\right] \, . \tag{3.39}$$

O tensor $\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}a}$ desta ação é o field-strength do campo vetorial $\hat{A}^a_\mu$ e é dado por

$$\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}^a = \partial_{\hat{\mu}}\hat{A}^a_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\hat{A}^a_{\hat{\mu}} + gf_{bc}{}^a\hat{A}^b_{\hat{\mu}}\hat{A}^c_{\hat{\nu}} \; , \tag{3.40}$$

em que $f_{bc}{}^a$ é a constante de estrutura da álgebra. Por sua vez, a derivada covariante que aparece nesta ação é dada por

$$D_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}^a = \partial_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}^a + gf_{bc}{}^a\hat{A}^b_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}^c \; . \tag{3.41}$$

Como o objetivo desta subseção é apenas ilustrar o método da redução dimensional, não nos alongaremos na discussão desta teoria supersimétrica. As referências **[58]**[**64**][**68**] trazem mais detalhes a respeito deste modelo, como as transformações de Supersimetria que cada campo possui.

Para realizarmos a redução dimensional, vamos fazê-la termo a termo. Desta forma, vamos iniciar pelo primeiro termo, que é o field-strength do campo vetorial $\hat{A}^a_{\hat{\mu}}$. É importante destacar que, como a um índice interno, não será afetado pela redução dimensional, a qual ocorre apenas nos índices do espaço-tempo. Abrindo este termo em componentes, temos

$$-\frac{1}{4}\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}a}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}a} = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu a}\hat{F}^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu za}\hat{F}^{\mu za} - \frac{1}{4}\hat{F}_{z\nu a}\hat{F}^{z\nu a} - \frac{1}{4}\hat{F}_{zza}\hat{F}^{zza} \ . \tag{3.42}$$

O primeiro termo da equação (3.42) já está automaticamente reduzido, uma vez que o termo $\hat{F}_{\mu\nu a}$ não possui índices espaço-temporais somados. Além disso, o último termo desta equação é zero, pois o field-strength é um objeto antissimétrico. Por fim, o segundo e o terceiro termos combinam-se em um só, de modo que a redução deste termo fica

$$-\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu za}\hat{F}^{\mu za} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\hat{A}^a_z - \partial_z A^a_\mu + g f_{bc}{}^a A^b_\mu \hat{A}^c_z\right)\left(\partial^\mu\hat{A}^{za} - \partial^z A^{\mu a} + g f_{bc}{}^a A^{\mu b}\hat{A}^{zc}\right) . \tag{3.43}$$

Em $(1+2)$ dimensões, $\hat{A}^a_z$ comporta-se como um escalar. Portanto, vamos identificar $\hat{A}^{za} \equiv \varphi^a$ e $\hat{A}^a_z \equiv -\varphi^a$. Além disso, lembrando que $\partial_z A^a_\mu = 0$, temos

$$-\frac{1}{2}F_{\mu za}F^{\mu za} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi^a + g f_{bc}{}^a A^b_\mu\varphi^c\right)\left(\partial^\mu\varphi^a + g f_{bc}{}^a A^{\mu b}\varphi^c\right) = \frac{1}{2}D_\mu\varphi^a D^\mu\varphi^a \ . \tag{3.44}$$

Tendo isso em vista, a redução dimensional do primeiro termo da ação (3.39) fica

$$-\frac{1}{4}\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}a}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}a} \Longrightarrow -\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}D_\mu\varphi^a D^\mu\varphi^a \ . \tag{3.45}$$

Dando continuidade à nossa redução, vamos tomar o segundo termo da equação (3.39) e abrir suas componentes

$$-\frac{1}{2}\bar{\hat{\lambda}}^a\Gamma^{\hat{\mu}}D_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}^a = -\frac{1}{2}\bar{\hat{\lambda}}^a\Gamma^\mu D_\mu\hat{\lambda}^a - \frac{1}{2}\bar{\hat{\lambda}}^a\Gamma^z D_z\hat{\lambda}^a \ . \tag{3.46}$$

Utilizando a definição (3.41) e lembrando da condição $\partial_z(\cdots) = 0$, temos

$$-\frac{1}{2}\bar{\hat{\lambda}}^a\Gamma^{\hat{\mu}}D_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}^a = -\frac{1}{2}\bar{\hat{\lambda}}^a\Gamma^\mu(\partial_\mu\hat{\lambda}^a + g f_{bc}{}^a A^b_\mu\hat{\lambda}^c) - \frac{1}{2}g f_{bc}{}^a\bar{\hat{\lambda}}^a\Gamma^3\hat{A}^b_3\hat{\lambda}^c \ . \tag{3.47}$$

O campo λ^a será escrito tal qual a equação (3.25), isto é,

$$\hat{\lambda}^a = \begin{pmatrix} \lambda^a_1 \\ \lambda^a_2 \end{pmatrix} . \tag{3.48}$$

Com esta definição, podemos fazer a multiplicação das matrizes na equação (3.47) utilizando a álgebra definida na seção *Convenções*. Assim, lembrando que $\hat{A}_3^a = \hat{A}_z^a \equiv -\varphi^a$, a redução dimensional do segundo termo fica dada por

$$-\frac{1}{2}\overline{\hat{\lambda}}^a\Gamma^{\hat{\mu}}D_{\hat{\mu}}\hat{\lambda}^a \Longrightarrow -\frac{1}{2}\overline{\lambda}_1^a\gamma^\mu D_\mu\lambda_1^a - \frac{1}{2}\overline{\lambda}_2^a\gamma^\mu D_\mu\lambda_2^a + \frac{i}{2}gf_{bc}{}^a\Big(-\overline{\lambda}_2^a\varphi^b\lambda_1^c + \overline{\lambda}_1^a\varphi^b\lambda_2^c\Big)\,. \quad (3.49)$$

Por fim, restaria a redução do terceiro termo. No entanto, como P é um pseudo-escalar, sua redução torna-se trivial. Desta forma, unindo as equações (3.45) e (3.49), a ação de Super Yang-Mills em $(1+2)$ dimensões fica dada por

$$S = \int dz\int d^3x\Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}D_\mu\varphi^a D^\mu\varphi^a - \frac{1}{2}\overline{\lambda}_1^a\gamma^\mu D_\mu\lambda_1^a - \frac{1}{2}\overline{\lambda}_2^a\gamma^\mu D_\mu\lambda_2^a \quad (3.50)$$
$$+\frac{i}{2}gf_{bc}{}^a\Big(-\overline{\lambda}_2^a\varphi^b\lambda_1^c + \overline{\lambda}_1^a\varphi^b\lambda_2^c\Big) + \frac{1}{2}P^aP^a\Big]\,.$$

Note que esta ação também não está dimensionalmente correta, uma vez que todos os termos têm dimensão $[massa]^4$. Assim, vamos fazer uma redefinição dos campos, novamente incluíndo o comprimento L, oriundo da integração na coordenada z. Logo, faremos a seguinte redefinição: $\varphi \equiv \varphi\sqrt{L}$, $A_\mu^a \equiv A_\mu^a\sqrt{L}$, $\lambda_1^a \equiv \lambda_1^a\sqrt{L}$, $\lambda_2^a \equiv \lambda_2^a\sqrt{L}$, $P^a \equiv P^a\sqrt{L}$ e $g \equiv g/\sqrt{L}$. Desta forma, corrigimos as dimensões dos campos e da constante de acoplamento envolvidos na ação (3.50), de modo que a ação de Super Yang-Mills em $(1+2)$ dimensões é

$$S = \int d^3x\Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}D_\mu\varphi^a D^\mu\varphi^a - \frac{1}{2}\overline{\lambda}_1^a\gamma^\mu D_\mu\lambda_1^a - \frac{1}{2}\overline{\lambda}_2^a\gamma^\mu D_\mu\lambda_2^a \quad (3.51)$$
$$+\frac{i}{2}gf_{bc}{}^a\Big(-\overline{\lambda}_2^a\varphi^b\lambda_1^c + \overline{\lambda}_1^a\varphi^b\lambda_2^c\Big) + \frac{1}{2}P^aP^a\Big]\,.$$

Com isso, concluímos este Capítulo, cujo principal objetivo foi introduzir de forma mais clara o método da redução dimensional que será utilizado no próximo Capítulo, onde iremos obter a ação da Supergravidade em três dimensões, partindo de sua correspondente ação em 4 dimensões.

Capítulo 4

A Supergravidade em Três Dimensões

Como o objetivo desta Dissertação é investigar o caráter topológico da Supergravidade em um espaço 3-dimensional, este Capítulo será dedicado à obtenção da ação da Supergravidade em $(1+2)$ dimensões, a partir de uma redução dimensional da ação 4-dimensional. Para tanto, iremos utilizar o método de Scherk-Schwarz que foi ilustrado no Capítulo anterior. Assim, a primeira seção do Capítulo será uma breve apresentação do modelo *on-shell* em quatro dimensões e das suas transformações de Supersimetria. Na sequência, abordaremos a redução dimensional das transformações supersimétricas. Esta será uma seção importante, pois a redução dimensional gerará, como vimos no Capítulo anterior, campos extras, que não devem aparecer na versão mínima $\mathcal{N}=1$ da Supergravidade tridimensional da supergravidade e, portanto, devem ser truncados. No entanto, este truncamento precisa satisfazer uma certa condição para que ele possa ser realizado. Assim, a segunda seção será dedicada ao estudo de como ficarão as reduções dimensionais das transformações de supersimetria e os truncamentos dos campos indesejados. Por fim, a terceira seção do Capítulo será propriamente a redução dimensional da ação de Supergravidade. Este conteúdo não se encontra em livros-texto e está disperso, bem como sem os devidos detalhes, em artigos. E, mesmo assim, a construção da Supergravidade em 3 dimensões é feita diretamente neste espaço-tempo. A nossa preocupação aqui é realizar, de forma sistemática e pedagógica, o procedimento de redução dimensional, de modo que vamos partir da SUGRA $\mathcal{N}=1, D=4$ e obter a SUGRA $\mathcal{N}=2, D=3$; com os truncamentos devidos, constrói-se, finalmente, a versão $\mathcal{N}=1-D=3$ da Supergravidade.

Esta contribuição é original e é parte de uma colaboração de pesquisa que está sendo iniciada e que se desenvolverá após a apresentação desta Dissertação; pode ser visto como um Projeto para o início do Doutorado.

4.1 A Supergravidade On-Shell em 4 Dimensões

Ao longo da seção *2.2.2* do Capítulo *Supersimetria e Supergravidade*, apresentamos uma descrição detalhada da Supergravidade, incluindo suas transformações de simetria e equações de campo. Além disso, também mencionamos o seu papel na unificação com outros campos através de supersimetrias estendidas e a sua relação com a *Teoria-M*. Ao longo desta seção, vamos abordar as características da ação e das transformações que pretendemos reduzir nas próximas seções.

Neste Capítulo, vamos continuar trabalhando com a Supergravidade *on-shell*. Isto significa que usaremos as equações de movimento para eliminar graus de liberdade da ação e, portanto, a ação que iremos trabalhar será a mesma apresentada anteriormente, dada pela equação (2.66). Conforme resumido na seção *Convenções* no início deste trabalho, índices com chapéu, ˆ , pertencem ao espaço-tempo 4-dimensional e índices sem o chapéu pertencem ao espaço-tempo 3-dimensional. A componente z representa a coordenada curva de índice 3, que é a componente que iremos reduzir e os índices gregos e latinos continuam representando índices curvos e planos, respectivamente. Assim, tendo em vista a discussão desta seção mencionada, a ação *on-shell* é dada por

$$\hat{S} = \int d^4x \bigg\{ -\frac{1}{2\kappa^2}\hat{e}\hat{R}(e,\omega) - \frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\bar{\Psi}}_{\hat{\mu}}\Gamma_5\Gamma_{\hat{\nu}}D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} \bigg\} \ . \tag{4.1}$$

Na ação (4.1), a derivada covariante é dada por

$$D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} = \partial_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} + \frac{i}{8}\hat{\omega}_{\hat{\rho}}{}^{\hat{m}\hat{n}}[\Gamma_{\hat{m}},\Gamma_{\hat{n}}]\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} \ . \tag{4.2}$$

A representação que iremos utilizar para as matrizes Γ's é a mesma que utilizamos no Capítulo anterior e está definida na seção *Convenções*. As transformações de supersimetria que os campos da ação (4.1) possuem são dadas por

$$\delta\hat{e}^{\hat{a}}{}_{\hat{\mu}} = \frac{\kappa}{2}\hat{\bar{\epsilon}}\Gamma^{\hat{a}}\hat{\Psi}_{\hat{\mu}} \ , \tag{4.3}$$

$$\delta\hat{\Psi}_{\hat{\mu}} = \frac{1}{\kappa}D_{\hat{\mu}}\hat{\epsilon} \ . \tag{4.4}$$

Com isso, finalizamos a apresentação da Supergravidade em 4 dimensões. Na próxima seção, apresentaremos o *ansatz* que utilizaremos para a vielbein e faremos a redução dimensional destas transformações (4.3) e (4.4), bem como os truncamentos necessários.

4.2 Redução Dimensional das Transformações de Supersimetria

Para fazermos a redução dimensional da Supegravidade em 4 dimensões, é necessário definirmos um *ansatz* para as vielbeins e sua inversa, da mesma forma que fizemos nas equações (2.97) e (2.98). No entanto, como naquele momento estávamos apresentando a redução dimensional como uma possível forma de unificação de campos, a dimensão extra induzia o aparecimento de um campo vetorial e de um campo escalar. Agora, como não queremos que apareçam campos extras no espaço-tempo de 3 dimensões, uma vez que a Supegravidade 3-dimensional *on-shell* não requer a introdução de campos extras, vamos tomar o seguinte *ansatz*

$$\hat{e}^{\hat{a}}{}_{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{e}^{a}{}_{\mu} & \hat{e}^{a}{}_{z} \\ \hat{e}^{y}{}_{\mu} & \hat{e}^{y}{}_{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a}{}_{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.5}$$

Isto é, a vielbein das 3 dimensões tem a mesma forma que a das 4 dimensões, de modo que o *ansatz* matricial que havíamos utilizado anteriormente não é mais necessário. Logo, a redução da vielbein é simplesmente $\hat{e}^{\hat{a}}{}_{\hat{\mu}} \to e^{a}{}_{\mu}$, de modo que a redução da inversa fica $\hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{a}} \to e^{\mu}{}_{a}$.

Com isto estabelecido, podemos passar para a definição da conexão de spin. Da mesma forma que no caso da equação (2.71), a conexão de spin é dada por

$$\hat{\omega}_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} = -\hat{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} + \hat{\Omega}_{\hat{b}\hat{c}\hat{a}} + \hat{\Omega}_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} + \frac{\kappa^2}{4}\left(\hat{\bar{\Psi}}_{\hat{c}}\Gamma_{\hat{b}}\hat{\Psi}_{\hat{a}} + \hat{\bar{\Psi}}_{\hat{b}}\Gamma_{\hat{a}}\hat{\Psi}_{\hat{c}} - \hat{\bar{\Psi}}_{\hat{a}}\Gamma_{\hat{c}}\hat{\Psi}_{\hat{b}}\right) , \tag{4.6}$$

em que $\hat{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{a}}\hat{e}^{\hat{\nu}}{}_{\hat{b}}\partial_{[\hat{\mu}}\hat{e}^{\hat{d}}{}_{\hat{\nu}]}\hat{\eta}_{\hat{d}\hat{c}}$. Para os termos envolvendo o coeficiente de rotação de Ricci, Ω, podemos repetir o mesmo cálculo que fizemos anteriormente para obter as expressões (2.106). No entanto, neste caso precisamos considerar também os termos envolvendo os gravitinos. Como estamos interessados em obter a SUGRA $\mathcal{N} = 1$,$D = 3$, vamos usar o truncamento dado pela equação (4.19). A verificação da consistência deste truncamento e a discussão sobre a razão para usá-lo será discutida ao longo das próximas seções.

Portanto, as conexões de spin ficam dadas por

$$\hat{\omega}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\omega}_{abc} = \omega_{abc}, \\ \hat{\omega}_{ab3} = 0, \\ \hat{\omega}_{3ab} = 0, \\ \hat{\omega}_{3a3} = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Desta forma, ω_{cab} é a única conexão de spin que não se anula, cuja expressão é dada por

$$\omega_{cab} = -\Omega_{abc} + \Omega_{bca} + \Omega_{cab} + \frac{\kappa^2}{4}\left(\overline{\psi}_c\gamma_b\psi_a + \overline{\psi}_b\gamma_a\psi_c - \overline{\psi}_a\gamma_c\psi_b\right) . \tag{4.8}$$

Com essas quantidades definidas, podemos iniciar a redução dimensional das transformações de Supersimetria (4.3) e (4.4) e verificar a consistência da escolha da parametrização das vielbeins (4.5). Ao longo destas reduções, vamos usar a mesma álgebra para as matrizes Γ que utilizamos no Capítulo anterior e que foi definida na seção *Convenções*. Assim, lembrando que o espinor $\hat{\Psi}_{\hat{\mu}}$ tem a forma (3.25) e que o parâmetro $\hat{\epsilon}$ pode ser escrito de modo análogo à equação (3.48), vamos tomar primeiramente o caso da expressão (4.3) onde $\hat{\mu} = \mu$ e $\hat{a} = a$

$$\delta\hat{e}^a{}_\mu = \frac{\kappa}{2}\hat{\bar{\epsilon}}\Gamma^a\hat{\Psi}_\mu . \tag{4.9}$$

Substituindo as devidas decomposições de $\hat{\Psi}_{\hat{\mu}}$ e $\hat{\epsilon}$, a redução dimensional desse termo fica

$$\delta e^a{}_\mu = \frac{\kappa}{2}\left(\bar{\epsilon}_1\gamma^a\psi_\mu + \bar{\epsilon}_2\gamma^a\xi_\mu\right) , \tag{4.10}$$

que resulta no aparecimento de dois gravitinos em três dimensões e dois parâmetros de Supersimetria. No entanto, como queremos obter a Supergravidade $\mathcal{N} = 1, D = 3$ precisamos truncar um destes gravitinos e um dos parâmetros supersimétricos. Deste modo, tomando o seguinte truncamento: $\xi_\mu = 0$ e $\epsilon_2 = 0$, ficamos com

$$\delta e^a{}_\mu = \frac{\kappa}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^a\psi_\mu . \tag{4.11}$$

Tomando agora $\hat{\mu} = \mu$ e $\hat{a} = 3$ na equação (4.3), temos

$$\delta\hat{e}^3{}_\mu = \frac{\kappa}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^3\Psi_\mu = i\frac{\kappa}{2}\left(- \bar{\epsilon}_2\psi_\mu + \bar{\epsilon}_1\xi_\mu\right) . \tag{4.12}$$

Veja que, repetindo este mesmo truncamento, $\xi_\mu = 0$ e $\epsilon_2 = 0$, na equação (4.12), teremos o cancelamento dos dois termos, isto é,

$$\delta\hat{e}^3{}_\mu = 0 . \tag{4.13}$$

Assim, lembrando que havíamos tomado $\hat{e}^3{}_\mu = 0$, vemos que a sua transformação, $\delta\hat{e}^3{}_\mu$, também é zero, o que indica que esta escolha é consistente. Podemos repetir este mesmo procedimento para as outras duas quantidades da vielbein e constatar que elas também são zero, devido ao truncamento $\hat{\Psi}_z = 0$, que terá sua consistência mostrada a seguir. Assim, podemos observar que os truncamentos escolhidos anteriormente são consistentes.

Operando agora com a outra transformação de Supersimetria (4.4), vamos começar tomando $\hat{\mu} = \mu$. Assim,

$$\delta\hat{\Psi}_\mu = \frac{1}{\kappa} D_\mu \hat{\epsilon} = \frac{1}{\kappa}\left(\partial_\mu\hat{\epsilon} + \frac{i}{8}\hat{\omega}_\mu{}^{\hat{a}\hat{b}}[\Gamma_{\hat{a}}, \Gamma_{\hat{b}}]\hat{\epsilon}\right) . \tag{4.14}$$

Utilizando a definição das conexões de spin (4.7) e a decomposição do Ψ_μ, ficamos com

$$\begin{pmatrix} \delta\psi_\mu \\ \delta\xi_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa}\left\{\partial_\mu \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} + \frac{i}{8}\omega_\mu{}^{ab}[\gamma_a, \gamma_b]\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} .\right\} \tag{4.15}$$

Assim, tomando o truncamento de um dos parâmetros supersimétricos, $\epsilon_2 = 0$, a redução da componente $\hat{\mu} = \mu$ da lei de transformação fica dada por

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{\kappa}\left(\partial_\mu\epsilon_1 + \frac{i}{8}\omega_\mu{}^{ab}[\gamma_a, \gamma_b]\epsilon_1\right) = \frac{1}{\kappa} D_\mu\epsilon_1 . \tag{4.16}$$

Por fim, vamos analisar o caso em que $\hat{\mu} = z$. Logo,

$$\delta\hat{\Psi}_z = \frac{1}{\kappa} D_z \hat{\epsilon} = \frac{1}{\kappa}\left(\underbrace{\partial_z\hat{\epsilon}}_{0} + \frac{i}{8}\underbrace{\hat{\omega}_z{}^{\hat{a}\hat{b}}}_{0}[\Gamma_{\hat{a}}, \Gamma_{\hat{b}}]\hat{\epsilon}\right) = 0 . \tag{4.17}$$

Assim, como a equação (4.17) mostra que $\delta\hat{\Psi}_z = 0$, concluímos que o truncamento $\hat{\Psi}_z = 0$ é estável e será aplicado na redução dimensional da Supergravidade, que será feito na próxima seção. Portanto, concluímos que as leis de transformações de Supersimetria da Supergravidade tridimensional são dadas pelas expressões (4.11) e (4.5) e que os outros objetos podem ser tomados como zero.

4.3 Redução Dimensional da Ação de Supergravidade

Após a redução dimensional das transformações de Supersimetria e a verificação da estabilidade do truncamento dos campos, a última etapa deste Capítulo será a redução da ação de Supergravidade em 4 dimensões, dada pela equação (4.1), a qual repetiremos abaixo

$$\hat{S} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\kappa^2}\hat{e}\hat{R}(e,\omega) - \frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\mu}}\Gamma_5\Gamma_{\hat{\nu}}D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} \right\} . \tag{4.18}$$

Vamos iniciar a redução dimensional pelo segundo termo, que é o termo do gravitino. Nesta redução, vamos utilizar a mesma álgebra das matrizes Γ's que utilizamos no Capítulo anterior e que está definida na seção *Convenções*. Além disso, vamos tomar o truncamento $\hat{\Psi}_z = 0$, cuja estabilidade foi demonstrada na equação (4.17). Este truncamento é necessário, pois o gravitino e a vielbein tridimensionais contêm, *on-shell*, o mesmo número de graus de liberdade, de modo que a ação da Supergravidade *on-shell* em três dimensões não requer a introdução de outros campos. Por fim, como a redução dimensional levaria a uma Supegravidade $\mathcal{N} = 2$, precisamos truncar uma das supersimetrias. Desta forma, a decomposição do gravitino será dada por

$$\hat{\Psi}_\mu = \begin{pmatrix} \psi_\mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\Psi}_z = 0 . \tag{4.19}$$

A partir dessas condições, vamos abrir a soma do termo do gravitino em $\hat{\mu}, \hat{\nu}$ e tomar apenas os termos não-nulos, de modo que obtemos

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\overline{\hat{\Psi}}_{\hat{\mu}}\Gamma_5\Gamma_{\hat{\nu}}D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_\nu D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu z\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_z D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} . \tag{4.20}$$

Vamos começar trabalhando com o primeiro termo do lado direito da equação (4.20). Abrindo as somas em $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$, temos

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_\nu D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} = -\frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}_{0}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_\nu D_\rho\hat{\Psi}_\sigma - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu z\sigma}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_\nu \underbrace{D_z\hat{\Psi}_\sigma}_{0} \tag{4.21}$$

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho z}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_\nu \underbrace{D_\rho\hat{\Psi}_z}_{0} - \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{\mu\nu zz}}_{0}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_\nu D_z\hat{\Psi}_z = 0 .$$

Desta forma, vemos que o primeiro termo da equação (4.20) é nulo. Assim vamos passar ao segundo termo desta mesma equação. Como um dos termos já é o índice z, ρ e σ necessariamente precisam ser diferentes de z. Fazendo a multiplicação das matrizes Γ's com o gravitino, podemos reescrever esse termo como

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu z\rho\sigma}\hat{\Psi}^\dagger_\mu\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_z D_\rho\hat{\Psi}_\sigma = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu z\rho\sigma}\Big(\overline{\psi}_\mu, 0\Big)\Big(\partial_\rho\hat{\Psi}_\sigma + \frac{i}{8}\hat{\omega}_\rho{}^{\hat{m}\hat{n}}[\Gamma_{\hat{m}},\Gamma_{\hat{n}}]\hat{\Psi}_\sigma\Big) . \tag{4.22}$$

Usando as conexões de spin definidas na equação (4.7), temos

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu z\rho\sigma}\hat{\Psi}^{\dagger}_{\mu}\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_z D_\rho\hat{\Psi}_\sigma = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu z\rho\sigma}\left(\overline{\psi}_\mu, 0\right)\left\{\partial_\rho\begin{pmatrix}\psi_\sigma\\0\end{pmatrix} + \frac{i}{8}\omega_\rho{}^{mn}[\gamma_m,\gamma_n]\begin{pmatrix}\psi_\sigma\\0\end{pmatrix}\right\} . \tag{4.23}$$

Assim sendo, fazendo os produtos matriciais, encontramos

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu z\rho\sigma}\hat{\Psi}^{\dagger}_{\mu}\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_z D_\rho\hat{\Psi}_\sigma = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu z\rho\sigma}\overline{\psi}_\mu D_\rho\psi_\sigma \ , \tag{4.24}$$

em que $D_\rho\psi_\sigma = \partial_\rho\psi_\sigma + \frac{i}{8}\omega_\rho{}^{mn}[\gamma_m,\gamma_n]\psi_\sigma$. Aqui, vamos utilizar a seguinte convenção: $\epsilon^{\mu\rho\sigma z} = \epsilon^{\mu\rho\sigma}$, de modo que $\epsilon^{\mu z\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\rho\sigma}$. Com isso, o termo do gravitino, dado pela equação (4.20), fica

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\overline{\Psi}}_{\hat{\mu}}\Gamma_5\Gamma_{\hat{\nu}}D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\mu D_\nu\psi_\rho \ . \tag{4.25}$$

Voltando à ação (4.18), podemos realizar o mesmo procedimento de integração que comentamos no Capítulo anterior. Assim,

$$-\int d^4x\ \frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\overline{\Psi}}_{\hat{\mu}}\Gamma_5\Gamma_{\hat{\nu}}D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} = -\int dy\int d^3x\ \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\mu D_\nu\psi_\rho = -L\int d^3x\ \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\mu D_\nu\psi_\rho \ . \tag{4.26}$$

Conforme ilustrado no Capítulo anterior, para ajustarmos as dimensões canônicas dos campos, precisamos fazer uma redefinição envolvendo o parâmetro L. Assim, ajustamos a dimensão da ação $\psi_\rho \equiv \sqrt{L}\psi_\rho$. Desse modo, a redução do termo do gravitino fica dada por

$$-\int d^4x\ \frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{\overline{\Psi}}_{\hat{\mu}}\Gamma_5\Gamma_{\hat{\nu}}D_{\hat{\rho}}\hat{\Psi}_{\hat{\sigma}} = -\int d^3x\ \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\mu D_\nu\psi_\rho \ . \tag{4.27}$$

Para encerrarmos a redução dimensional, e consequentemente o Capítulo, iremos realizar a redução dimensional do termo de Einstein-Hilbert da ação (4.18), isto é,

$$-\int d^4x\frac{1}{2\kappa^2}\hat{e}\hat{R}(e,\omega) = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\ \hat{e}\ \hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{a}}\hat{e}^{\hat{\nu}}{}_{\hat{b}}\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}^{\hat{a}\hat{b}} \ . \tag{4.28}$$

Substituindo a forma do tensor de Riemann, lembrando que a redução da conexão de spin é dada por (4.7) e que a inversa da vielbein é dada por $\hat{e}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{a}} \to e^\mu{}_a$, ficamos com

$$= -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\ e\ e^\mu{}_a e^\nu{}_b\Big(\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^a\omega_\nu{}^b - \omega_\mu{}^b\omega_\nu{}^a\Big) = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\ e\ e^\mu{}_a e^\nu{}_b R_{\mu\nu}{}^{ab} \ . \tag{4.29}$$

Usando que $R_{\mu\nu}{}^{ab} = \epsilon^{ab}{}_c R_{\mu\nu}{}^c$ e a seguinte expressão $e^\mu{}_a e^\nu{}_b\epsilon^{abc} = \epsilon^{\mu\nu\rho}e^c{}_\rho e^{-1}$, podemos escrever a redução dimensional do termo de Einstein-Hilbert como

$$-\int d^4x\ \frac{1}{2\kappa^2}\hat{e}\hat{R}(e,\omega) = -\frac{1}{2\kappa^2}\int dz\int d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\rho}e_{\mu a}R_{\nu\rho}{}^a \ . \tag{4.30}$$

Fazendo a integração em relação a coordenada z e redefinindo a constante de acoplamento como $\kappa^2 \equiv \kappa^2/L$, encontramos que a redução do termo de Einstein-Hilbert é dada por

$$-\int d^4x \, \frac{1}{2\kappa^2}\hat{e}\hat{R}(e,\omega) = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^3x \, \epsilon^{\mu\nu\rho}e_{\mu a}R_{\nu\rho}{}^{a} \ . \tag{4.31}$$

Desta forma, unindo as equações (4.27) e (4.31), encontramos que a Supergravidade *on-shell* em três dimensões é dada por

$$\boxed{S = \int d^3x \, \epsilon^{\mu\nu\rho}\Big\{ -\frac{1}{2\kappa^2}e_{\mu a}R_{\nu\rho}{}^{a} - \frac{1}{2}\overline{\psi}_\mu D_\nu \psi_\rho \Big\}} \ . \tag{4.32}$$

Para encerrar o Capítulo, vamos obter as equações de movimento que são geradas a partir desta ação. Variando em relação a vielbein, obtemos

$$\delta_e S : R_{\nu\rho}{}^{a} = 0 \ . \tag{4.33}$$

Variando em relação a conexão de spin, obtemos

$$\delta_\omega S : D_\mu e_{\nu a} - D_\nu e_{\mu a} = \overline{\psi}_\mu \gamma_a \psi_\nu \ , \tag{4.34}$$

em que $D_\mu e_{\nu a} = \partial_\mu e_{\nu a} + \epsilon_{abc}\omega_\mu{}^{b}e^{c}{}_{\nu}$ é a derivada covariante. O lado esquerdo da equação (4.34) é identificado como a torção, o que nos mostra que ela está diretamente relacionada à presença de férmions no modelo, isto é,

$$T_{\mu\nu}{}^{a} = \overline{\psi}_\mu \gamma^a \psi_\nu \ . \tag{4.35}$$

Finalmente, variando em relação ao gravitino, obtemos que

$$\delta_\psi S : \epsilon^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho = 0 \ . \tag{4.36}$$

Assim, obtivemos neste Capítulo a ação de Supergravidade em três dimensões, dada pela equação (4.32), e as equações de movimento que são originadas dela. Estes resultados serão importantes no próximo Capítulo, cujo objetivo será recuperar esta mesma ação (4.32) partindo da ação de Chern-Simons.

Capítulo 5

A Supergravidade como uma Teoria Topológica

Ao longo dos Capítulos desta Dissertação, estudamos diversos temas que culminaram no desenvolvimento deste Capítulo final. Assim, o objetivo do presente Capítulo é utilizar os conteúdos apresentados nos Capítulos anteriores para verificar se a Supergravidade em três dimensões, cuja ação foi obtida no Capítulo precedente (equação (4.32)), mantém o caráter topológico que a ação de Einstein-Hilbert apresenta (e que foi verificado no Capítulo 1) neste mesmo espaço-tempo. O fato do gráviton que emerge da ação de Einstein-Hilbert em três dimensões não possuir graus de liberdade on-shell é um indicativo deste resultado. Mas, é preciso que isto seja efetivamente demonstrado. Desse modo, este Capítulo consistirá apenas neste tema e, portanto, não haverá divisões em seções, como foi feito anteriormente. No que se refere à notação, é importante ressaltar que adotaremos a notação Ψ para representar o gravitino em três dimensões, diferentemente do que fizemos no Capítulo anterior.

O procedimento que realizaremos ao longo do presente Capítulo será similar ao que foi desenvolvido no Capítulo *Relatividade Geral Como uma Teoria Topológica*, isto é, vamos partir da ação de Chern-Simons (1.47) e utilizar uma álgebra proposta para os geradores de tal modo que ela nos conduza ao nosso objetivo final. A álgebra que utilizaremos é uma extensão da que foi utilizada anteriormente, dada pela equação (1.57), pois precisamos introduzir a contribuição que os termos fermiônicos geram. Deste modo, a álgebra dos geradores de Supersimetria que iremos utilizar ao longo do Capítulo é dada por

$$\begin{cases} [J_a, Q_\alpha] = (\gamma_a)_{\alpha\beta} Q_\beta, \\ [J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu, \\ [P_a, Q_\alpha] = [P_a, P_b] = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Nestas equações, J_a é o gerador de Lorentz, P_a é o gerador das translações e Q_α o gerador espinorial das transformações de supersimetria. Além disso, tal como feito anteriormente, precisamos escolher a forma para o bilinear invariante do grupo. Assim, vamos usar as seguintes relações

$$\begin{cases} \langle J_a, P_b \rangle = -\eta_{ab}, \\ \langle Q_\alpha, Q_\beta \rangle = \lambda_2 \epsilon_{\alpha\beta}, \\ \langle J_a, J_b \rangle = \langle P_a, P_b \rangle = 0, \\ \langle Q_\alpha, J_a \rangle = \langle Q_\alpha, P_a \rangle = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Nestas equações, λ_2 é apenas um fator númerico que será ajustado posteriormente e $\epsilon_{\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita bidimensional, no espaço espinorial. Com estas relações estabelecidas, podemos tomar a ação de Chern-Simons (1.47), a qual reescrevemos abaixo

$$S = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} Tr \left\{ A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right\} , \tag{5.3}$$

e escrever o campo de gauge A desta ação em termos dos geradores do grupo de simetria, tal como feito em (1.59). Logo,

$$A_\mu(x) = e^a{}_\mu(x) P_a + \omega_\mu{}^a(x) J_a + \lambda_1 \overline{\Psi}^\alpha_\mu(x) Q_\alpha \ . \tag{5.4}$$

Note que o campo de gauge A tem dimensão de massa, $[A] = [massa]^1$, de modo que cada termo do lado direito da equação (5.4) também deve ter dimensão de massa. Porém, em três dimensões o gravitino e o gerador têm, respectivamente, as seguintes dimensões: $[\Psi] = [massa]^1$ e $[Q] = [massa]^{1/2}$. Com isso, vemos que o termo $\overline{\Psi}^\alpha_\mu Q_\alpha$ não possui a correta dimensão que o campo de gauge A exige na equação (5.4). Logo, introduzimos um parâmetro λ_1, de dimensão $[\lambda_1] = [massa]^{-1/2}$ para garantir que esta equação esteja dimensionalmente consistente. A forma exata deste parâmetro será estabelecida ao final do cálculo.

Dando sequência ao desenvolvimento do cálculo, vamos utilizar as propriedades (1.60) e (1.61) para escrever a ação como

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{A_\rho dx^\rho \wedge \frac{1}{2}\Bigg(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\Bigg)dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{2}{3}A_\rho dx^\rho \wedge \Bigg(\frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu\Bigg)\Bigg\}\ . \tag{5.5}$$

Vamos trabalhar inicialmente com o primeiro termo da equação (5.5). Lembrando que uma *1-forma* pode ser escrita como $A = A_\mu dx^\mu$, substituindo a relação (5.4) nesta equação e reorganizando os termos, temos

$$= \int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\Bigg(e^a P_a + \omega^a J_a + \lambda_1 \overline{\Psi}^\alpha Q_\alpha\Bigg) \wedge \Bigg(de^b P_b + d\omega^b J_b + \lambda_1 d\overline{\Psi}^\beta Q_\beta\Bigg)\Bigg\}\ . \tag{5.6}$$

Lembrando do passo descrito na equação (1.70), vamos abrir o produto exterior da equação (5.6) e utilizar as relações (5.2), de modo que obtemos

$$= \int_{\mathcal{M}} \Bigg(- e^a \wedge d\omega^b\ \eta_{ab} - \omega^a \wedge de^b\ \eta_{ab} - \lambda_1^2 \lambda_2 \overline{\Psi}^\alpha \wedge d\overline{\Psi}^\beta \epsilon_{\alpha\beta}\Bigg)\ . \tag{5.7}$$

Portanto, o primeiro termo da equação (5.5) é dado por

$$\int_{\mathcal{M}} A_\rho dx^\rho \wedge \frac{1}{2}\Bigg(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\Bigg)dx^\mu \wedge dx^\nu = \int_{\mathcal{M}} \Bigg(- 2e^a \wedge d\omega_a - \lambda_1^2 \lambda_2 \overline{\Psi}^\alpha \wedge d\overline{\Psi}^\beta \epsilon_{\alpha\beta}\Bigg) \tag{5.8}$$

Finalizado este primeiro cálculo, vamos passar ao segundo termo da equação (5.5), ou seja,

$$\frac{1}{3}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{A_\rho dx^\rho \wedge \Bigg([A_\mu, A_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu\Bigg)\Bigg\}\ . \tag{5.9}$$

Inicialmente, vamos trabalhar com o comutador desta equação (5.9). Substituindo a relação do campo de gauge (5.4) e utilizando as relações de comutação (5.1), podemos escrevê-los como

$$[A_\mu, A_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu = \Bigg\{ {e^a}_\mu {\omega_\nu}^b \epsilon_{abc} P^c + {\omega_\mu}^a {e^b}_\nu \epsilon_{abc} P^c + {\omega_\mu}^a {\omega_\nu}^b \epsilon_{abc} J^c \tag{5.10}$$

$$+\ \lambda_1 {\omega_\mu}^a \overline{\Psi}^\beta_\nu (\gamma_a)_{\beta\alpha} Q_\alpha - \lambda_1 \overline{\Psi}^\alpha_\mu {\omega_\nu}^b (\gamma_b)_{\alpha\beta} Q_\beta + 2\lambda_1^2 \overline{\Psi}^\beta_\nu \overline{\Psi}^\alpha_\mu (\gamma^\sigma C)_{\alpha\beta} P_\sigma \Bigg\} dx^\mu \wedge dx^\nu\ .$$

Note que a equação (5.10) pode ser simplificada. Fazendo uma simples manipulação de índices, podemos unir os termos que possuem os mesmos geradores, de modo que

$$[A_\mu, A_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu = \Bigg(2{e^a}_\mu {\omega_\nu}^b \epsilon_{abc} P^c +\ 2\lambda_1 {\omega_\mu}^a \overline{\Psi}^\beta_\nu (\gamma_a)_{\beta\alpha} Q_\alpha \tag{5.11}$$

$$+\ {\omega_\mu}^a {\omega_\nu}^b \epsilon_{abc} J^c + 2\lambda_1^2 \overline{\Psi}^\beta_\nu \overline{\Psi}^\alpha_\mu (\gamma^\sigma C)_{\alpha\beta} P_\sigma \Bigg) dx^\mu \wedge dx^\nu\ .$$

Uma vez que calculamos a relação (5.11), podemos realizar o produto exterior da relação (5.9), isto é,

$$= \frac{1}{3}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{\Bigg(e^{a}{}_{\rho}P_a + \omega_{\rho}{}^{a}J_a + \lambda_1\overline{\Psi}^{\alpha}_{\rho}Q_{\alpha}\Bigg)dx^{\rho}\wedge \tag{5.12}$$

$$\Bigg[\Bigg(2e^{b}{}_{\mu}\omega_{\nu}{}^{c}\epsilon_{bcd}P^{d} + 2\lambda_1\omega_{\mu}{}^{b}\overline{\Psi}^{\beta}_{\nu}(\gamma_b)_{\beta\gamma}Q_{\gamma} + \omega_{\mu}{}^{b}\omega_{\nu}{}^{c}\epsilon_{bcd}J^{d} + 2\lambda_1^2\overline{\Psi}^{\beta}_{\nu}\overline{\Psi}^{\gamma}_{\mu}(\gamma^{\sigma}C)_{\gamma\beta}P_{\sigma}\Bigg)dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\Bigg]\Bigg\}\ .$$

Novamente, vamos utilizar o passo (1.70) para realizar o cálculo da equação (5.12). Além disso, também é importante destacar que Ψ e Q são quantidades anti-comtutantes, o que significa que ganharemos em um sinal negativo cada vez que trocarmos suas posições. Com isso, ficamos com

$$\frac{1}{3}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{A_{\rho}dx^{\rho}\wedge\Bigg([A_{\mu},A_{\nu}]dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\Bigg)\Bigg\} = \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{3}\Bigg(-3e^{a}\wedge\omega^{\ b}\wedge\omega^{\ c}\epsilon_{abc} + 2\lambda_1^2\omega^{a}\wedge\overline{\Psi}^{\gamma}\wedge\overline{\Psi}^{\beta}(\gamma_a C)_{\gamma\beta} - 2\lambda_1^2\overline{\Psi}^{\alpha}\wedge\omega^{b}\wedge\overline{\Psi}^{\beta}(\gamma_b)_{\beta\gamma}\ \lambda_2\epsilon_{\alpha\gamma}\Bigg)\ .$$

Vamos considerar inicialmente o último termo da equação (5.13) para trabalhar em sua simplificação. Usando $\epsilon_{\alpha\gamma} = -iC_{\alpha\gamma}$ e lembrando das seguintes propriedades da álgebra fermiônica: $(\gamma_b C)_{\beta\gamma} = (\gamma_b C)_{\gamma\beta}$ e $\Psi_{\alpha} = -\overline{\Psi}_{\beta}C_{\beta\alpha}$, podemos reescrevê-lo como

$$-2\lambda_1^2\overline{\Psi}^{\alpha}\wedge\omega^{b}\wedge\overline{\Psi}^{\beta}(\gamma_b)_{\beta\gamma}\ \lambda_2\epsilon_{\alpha\gamma} = -2i\lambda_1^2\lambda_2\overline{\Psi}^{\gamma}\wedge\omega^{b}\wedge\Psi^{\alpha}(\gamma_b)_{\gamma\alpha}\ . \tag{5.14}$$

Assim, vamos fazer uma renomeação nos índices e definir o parâmetro numérico como sendo $\lambda_2 = -\frac{i}{2}$. A partir disso, encontramos que o último termo da equação (5.13) pode ser escrito como

$$-2\lambda_1^2\overline{\Psi}^{\alpha}\wedge\omega^{b}\wedge\overline{\Psi}^{\beta}(\gamma_b)_{\beta\gamma}\ \lambda_2\epsilon_{\alpha\gamma} = -\lambda_1^2\overline{\Psi}^{\alpha}\wedge\omega^{a}\wedge\Psi^{\beta}(\gamma_a)_{\alpha\beta}\ . \tag{5.15}$$

Além disso, também podemos reescrever o segundo termo da equação (5.13). Usando: $\Psi_{\lambda} = -\overline{\Psi}_{\beta}C_{\beta\lambda}$, $\omega^{a}\wedge\overline{\Psi}^{\gamma} = -\overline{\Psi}^{\gamma}\wedge\omega^{a}$ e fazendo uma renomeação de índices, ficamos com

$$2\lambda_1^2\omega^{a}\wedge\overline{\Psi}^{\gamma}\wedge\overline{\Psi}^{\beta}(\gamma_a C)_{\gamma\beta} = -2\lambda_1^2\overline{\Psi}^{\alpha}\wedge\omega^{a}\wedge\Psi^{\beta}(\gamma_a)_{\alpha\beta}\ . \tag{5.16}$$

Substituindo os resultados (5.15) e (5.16) na equação (5.13), encontramos que o termo (5.9) é dada por

$$\frac{1}{3}\int_{\mathcal{M}} Tr\Bigg\{A_{\rho}dx^{\rho}\wedge\Bigg([A_{\mu},A_{\nu}]dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\Bigg)\Bigg\} = -e^{a}\wedge\omega^{\ b}\wedge\omega^{\ c}\epsilon_{abc} - \lambda_1^2\overline{\Psi}^{\alpha}\wedge\omega^{a}\wedge\Psi^{\beta}(\gamma_a)_{\alpha\beta}\ . \tag{5.17}$$

Por fim, substituindo as expressões finais (5.8) e (5.17) na equação (5.5), temos

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}}\Bigg(- 2e^a \wedge d\omega_a - \lambda_1^2\lambda_2\overline{\Psi}^\alpha \wedge d\overline{\Psi}^\beta\epsilon_{\alpha\beta}$$

$$- e^a \wedge \omega^{\ b} \wedge \omega^{\ c}\epsilon_{abc} - \ \lambda_1^2\overline{\Psi}^\alpha \wedge \omega^a \wedge \Psi^\beta(\gamma_a)_{\alpha\beta}\Bigg) \ . \tag{5.18}$$

Na equação (5.18), os termos bosônicos, isto é, os termos ligados a vielbein e à conexão de spin já indicam a formação do termo de Einstein-Hilbert da ação de Supergravidade em três dimensões, dada pela equação (4.32). Tomando apenas estes termos, podemos reescrevê-los como

$$S_{bos} = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}}\Bigg\{ - e^a_{\ \rho}\Big[\partial_\mu(\omega_a)_\nu - \partial_\nu(\omega_a)_\mu\Big] - \epsilon_{abc}\ e^a_{\ \rho}\omega_\mu^{\ b}\omega_\nu^{\ c}\Bigg\}\ \underbrace{dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu}_{\epsilon^{\rho\mu\nu}d^3x} \ . \tag{5.19}$$

Assim, o lado bosônico fica

$$S_{bos} = -\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\rho}e_{a\mu}\Bigg\{\partial_\nu\omega_\rho^{\ a} - \partial_\rho\omega_\nu^{\ a} + \epsilon^a_{\ bc}\ \omega_\nu^{\ b}\omega_\rho^{\ c}\Bigg\} \ . \tag{5.20}$$

$$S_{bos} = -\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\rho}e_{\mu a}R_{\nu\rho}^{\ \ a} \ , \tag{5.21}$$

que é justamente o primeiro termo da equação (4.32), a menos da constante de acoplamento a qual será introduzida mais adiante.

Do ponto de vista fermiônico, precisamos trabalhar com o segundo termo da expressão (5.18) para recuperarmos o termo do gravitino da equação (4.32). Novamente, usando que $\epsilon_{\alpha\beta} = -iC_{\alpha\beta}$ e que $\lambda_2 = -i/2$, podemos reescrever este segundo termo como

$$-\lambda_1^2\lambda_2\overline{\Psi}^\alpha \wedge d\overline{\Psi}^\beta\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\lambda_1^2\overline{\Psi}^\alpha_\rho\Big(\partial_\mu\Psi_{\nu\alpha} - \partial_\nu\Psi_{\mu\alpha}\Big)\underbrace{dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu}_{\epsilon^{\rho\mu\nu}d^3x} \ , \tag{5.22}$$

$$-\lambda_1^2\lambda_2\overline{\Psi}^\alpha \wedge d\overline{\Psi}^\beta\epsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\lambda_1^2\overline{\Psi}^\alpha_\mu\partial_\nu\Psi_{\rho\alpha}\epsilon^{\mu\nu\rho}d^3x \ . \tag{5.23}$$

Por fim, ainda podemos reescrever o último termo da equação (5.18) como

$$-\lambda_1^2\overline{\Psi}^\alpha \wedge \omega^a \wedge \Psi^\beta(\gamma_a)_{\alpha\beta} = -\lambda_1^2\overline{\Psi}^\alpha_\mu\omega_\nu^{\ a}\Psi^\beta_\rho(\gamma_a)_{\alpha\beta}\ \epsilon^{\mu\nu\rho}d^3x \ . \tag{5.24}$$

Com isso, tomando os termos (5.23) e (5.24), a parte fermiônica da ação (5.18) fica escrita como

$$S_{fer} = -\lambda_1^2\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\rho}\ \left(\frac{1}{2}\overline{\Psi}^\alpha_\mu\partial_\nu\Psi_{\rho\alpha} + \overline{\Psi}^\alpha_\mu\omega_\nu^{\ a}\Psi^\beta_\rho(\gamma_a)_{\alpha\beta}\ \right) \ . \tag{5.25}$$

Omitindo os índices fermiônicos, podemos reescrever a expressão (5.25) como

$$S_{fer} = -\lambda_1^2 \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \ \frac{1}{2} \overline{\Psi}_\mu \Big(\partial_\nu + 2\omega_\nu{}^a \gamma_a \ \Big) \Psi_\rho \ . \tag{5.26}$$

Fazendo a seguinte definição para a derivada covariante que atua no gravitino

$$D_\nu \equiv \partial_\nu + 2\omega_\nu{}^a \gamma_a \ , \tag{5.27}$$

podemos finalmente escrever a parte fermiônica da ação (5.18) como

$$S_{fer} = -\lambda_1^2 \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \ \frac{1}{2} \overline{\Psi}_\mu D_\nu \Psi_\rho \ . \tag{5.28}$$

Unindo a parte bosônica, dada pela equação (5.21), com a parte fermiônica, dada pela equação (5.28), a ação de Chern-Simons em três dimensões fica escrita como

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \Big(- e_{\mu a} R_{\nu\rho}{}^a - \frac{1}{2} \lambda_1^2 \overline{\Psi}_\mu D_\nu \Psi_\rho \Big) \ . \tag{5.29}$$

Por fim, para realizar a completa identificação da ação de Chern-Simons com a Supergravidade em três dimensões, precisamos ajustar a constante de acoplamento $\frac{k}{4\pi}$ que acompanha esta ação. Vamos tomar essa constante k, tal que

$$k = \frac{4\pi}{2\kappa^2} \ . \tag{5.30}$$

Em três dimensões, a constante de acoplamento gravitacional, κ, tem dimensão $[\kappa] = (massa)^{-1/2}$, de modo que $[\kappa]^2 = (massa)^{-1}$. Tento em vista esta observação, devemos lembrar que, no início deste Capítulo, havíamos introduzido o parâmetro λ_1 para tornar a equação (5.4) dimensionalmente consistente, e que este parâmetro deveria ter dimensão de $[\lambda_1] = [massa]^{-1/2}$. Com isso, o termo ligado ao gravitino na equação (5.29) fica adimensional. Por fim, para obtermos o mesmo coeficiente à frente do termo do gravitino, reescalonamos esta constante $\lambda_1^2 \longrightarrow 2\lambda_1^2$, de modo que encontramos

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^3x \ \epsilon^{\mu\nu\rho} \Big(- \frac{1}{2\kappa^2} e_{\mu a} R_{\nu\rho}{}^a - \frac{1}{2} \overline{\Psi}_\mu D_\nu \Psi_\rho \Big) \ , \tag{5.31}$$

que é justamente a ação da Supergravidade em três dimensões que havíamos encontrado ao final do Capítulo passado, dada pela equação (4.32). Portanto, partindo da ação de Chern-Simons, obtivemos diretamente a ação desejada, o que mostra que a Supergravidade em três dimensões é uma teoria topológica.

Desta forma, este modelo não tem dependência da métrica da variedade e seu tensor de energia-momento é nulo. Isso significa que, por ser um modelo topológico, não descreve ondas que se propagam e que carregam energia e momento. Em paralelo a esta visão ondulatória, podemos nos colocar no cenário corpuscular e, por não haver transporte de energia e momento, o modelo não deve propagar excitações que sejam identificadas com partículas físicas, já que estas excitações seriam expressão de energia e momento propagados. Isto é plenamente compatível com o fato de que tanto o gráviton quanto o gravitino não possuem graus de liberdade *on-shell*. As quantidades que aparecem na equação (5.31) são campos sem densidade de energia definida e sem partículas associadas. Também vale ressaltar que esta ação não reage a deformações contínuas da geometria (métrica) do espaço-tempo, o que significa que podemos passar de uma determinada métrica para outra sem alterar o tensor de energia-momento da teoria. O tensor de energia-momento é uma resposta a variações da métrica do espaço-tempo.

Note que já possuíamos indícios de que este resultado seria obtido. No Capítulo anterior, havíamos encontrado que uma das equações de movimento mostrava que o tensor de Ricci e o tensor de energia-momento são nulos, as quais são características dos modelos topológicos. Além disso, também podemos observar que não há dependência da métrica na própria ação, nem de seu determinante.

Por fim, podemos novamente proceder de modo análogo ao realizado no Capítulo *Relatividade Geral Como uma Teoria Topológica* e obtermos as transformações infinitesimais associadas aos campos de gauge. Tendo em vista a equação (1.76) e escolhendo o seguinte parâmetro de transformação infinitesimal

$$\lambda = \rho^a P_a + \tau^a J_a + \overline{\xi}^\alpha Q_\alpha \ , \tag{5.32}$$

podemos reescrever a equação (1.76) como

$$\delta A_\mu =$$

$$-\partial_\mu\left(\rho^a P_a + \tau^a J_a + \overline{\xi}^\alpha Q_\alpha\right) - \left[e^a{}_\mu P_a + \omega_\mu{}^a J_a + \overline{\Psi}^\alpha_\mu Q_\alpha, \rho^b P_b + \tau^b J_b + \overline{\xi}^\beta Q_\beta\right] . \tag{5.33}$$

Repetindo os mesmos procedimentos feitos no caso da Relatividade Geral, encontramos que as transformações de gauge são dadas por

$$\begin{cases} \delta e^c{}_\mu = -\partial_\mu \rho^c - \epsilon_{ab}{}^c e^a{}_\mu \tau^b - \omega_\mu{}^a \rho^b \epsilon_{abc} - 2\overline{\xi}^\beta \overline{\Psi}^\alpha_\mu (\gamma^c C)_{\alpha\beta}, \\ \delta\omega_\mu{}^c = -\partial_\mu \tau^c - \omega_\mu{}^a \tau^b \epsilon_{abc}, \\ \delta\overline{\Psi}^\beta_\mu = -\partial_\mu \overline{\xi}^\beta - \omega_\mu{}^a \overline{\xi}^\alpha (\gamma_a)_{\alpha\beta} + \overline{\Psi}^\alpha_\mu \tau^b (\gamma_b)_{\alpha\beta}. \end{cases} \tag{5.34}$$

É importante destacar que este caso possui uma diferença fundamental em relação ao caso da Relatividade Geral, que foi estudado no Capítulo *Relatividade Geral como uma Teoria Topológica*. No primeiro Capítulo, mediante a ausência de torção e a álgebra de ISO(2,1), mostramos que havia uma conexão entre as transformações de gauge com as transformações locais de Lorentz e as translações locais, que são as transformações contidas na Relatividade Geral. No entanto, como no contexto da Supergravidade existe a presença de torção, dada pela equação (4.35), fica a ser demonstrado, o que não é feito neste trabalho, a equivalência entre as transformações.

Com isso, concluímos este último Capítulo da Dissertação, no qual nos propusemos a investigar mais a fundo o caráter topológico da Supergravidade em três dimensões: sem acoplamento à matéria, a Supergravidade pura é uma teoria topológica em 3 dimensões. Elaboraremos um pouco mais sobre este resultados em nossas Discussões Conclusivas, em que apresentaremos novos encaminhamentos sobre os quais pretendemos continuar trabalhando após a apresentação desta Dissertação. Ressaltamos que este presente trabalho de conclusão do Mestrado foi instrutivo para a minha entrada no campo da Gravidade Quântica e, além de me trazer o instrumental para atuar na área, abriu questões de pesquisa que serão desenvolvidas como parte inicial do Projeto de Doutorado.

Capítulo 6

Discussões Conclusivas e Encaminhamentos

Nesta Dissertação, foram discutidos temas estudados durante o Mestrado, dentre eles: Supersimetria e alguns de seus modelos supersimétricos, Supergravidade em várias dimensões, modelo de Chern-Simons e Relatividade Geral, além do esquema de redução dimensional de Scherk-Schwarz e do processo de compactificação. A seguir, apresentaremos uma análise mais geral do que foi abordado em cada Capítulo. Relembrando que este trabalho teve caráter de revisão para preparação a um Projeto de Doutorado na área da Gravidade Quântica. Como ilustraremos ao final, duas questões de pesquisa, que já estão sendo desenvolvidas em uma colaboração, foram delimitadas a partir dos estudos realizados nesta Dissertação.

No Capítulo 1, apresentamos uma breve revisão do formalismo das vilbeins e da conexão de spin da Relatividade Geral. Este formalismo foi fundamental ao longo de todo o nosso trabalho, pois nos permite a introdução de férmions em um contexto de gravitação. Além disso, manipulamos as equações de modo a escrever o tensor de Riemann e a ação de Einstein-Hilbert para um espaço-tempo em três dimensões. Na segunda parte deste Capítulo, obtivemos a ação de Einstein-Hilbert diretamente da ação de Chern-Simons mediante introdução do grupo ISO(1,2) e do uso de algumas relações adicionais. Esta abordagem torna claro o caráter topológico da Relatividade Geral em três dimensões. Assim, podemos reinfatizar que a Relatividade Geral em três dimensões não depende da métrica do espaço-tempo, ou seja, é uma teoria topológica, o que lhe confere estabilidade frente a deformações da métrica que seja imposta à variedade tridimensional. Outro fato relevante é a total ausência de perturbações que se configuram como partículas livres.

No Capítulo 2, introduzimos uma abordagem alternativa para a obtenção da Supersimetria. Na primeira seção deste Capítulo, demonstramos o caráter fundamental que os espinores têm na constituição do espaço-tempo, dando base para o estabelecimento da estrutura de cones-de-luz, para os vetores, tensores e escalares que vivem no espaço-tempo. Desta forma, isto motivou que desenvolvêssemos o formalismo da teoria de campos para um parâmetro fermiônico, o que nos levou diretamente à Supersimetria e suas principais características. Assim, mostramos que as transformações de Supersimetria estão na base do grupo conforme e, consequentemente, dos cones-de-luz do espaço-tempo. Esta abordagem é importante, pois evidencia que a Supersimetria pode ser vista como uma simetria do espaço-tempo e que ela não depende da existência dos parceiros supersimétricos para ser considerada, tal qual acontece com a simetria conforme. Isso difere do que os livros-base apresentam, uma vez que eles abordam apenas a eventual participação da Supersimetria em um cenário de Física de Partículas, atrelando a validade da Supersimetria à detecção dos parceiros supersimétricos em experimentos com aceleradores. Portanto, verificamos que não é crucial para a Supersimetria providenciar uma representação de partículas nas baixas energias para que se possa imaginá-la como descrevendo parte dos processos da Natureza; pode vir a ser apenas uma simetria das altas energias, no mesmo status que tem a simetria conforme. Associar a Supersimetria à existência dos "inos"é apenas um (importante, claro!) expediente que se encontra para se resolver algumas das limitações do Modelo-Padrão da Física de Partículas.

Posteriormente, neste mesmo Capítulo, introduzimos a Supersimetria num cenário de gravitação - a Supergravidade - e apresentamos as principais características que são necessárias para construir a ação da Supersimetrica local. Em seguida, discutimos a necessidade e a utilização de considerarmos Supergravidades estendidas, comentamos que a versão 11-dimensional é o limite máximo em que uma teoria de Supergravidade pode ser escrita e que ela pode dar origem a outras SUGRAs em dimensões inferiores, formando assim a base para as Supergravidades. Por fim, ao discutirmos o método da redução dimensional, evidenciamos como obter uma versão desta teoria nas dimensões inferiores. Assim, finalizamos este Capítulo calculando um dos termos da Supergravidade em dez dimensões, o que reforça a ideia da obtenção das demais Supergravidades a partir da versão 11-dimensional.

Uma vez que o objetivo desta Dissertação foi trabalhar com a Supergravidade em três dimensões, iniciamos o Capítulo 3 fazendo a mesma descrição para a Supersimetria que fizemos para as quatro dimensões, no Capítulo anterior. Com isso, mostramos que o formalismo é idêntico ao das quatro dimensões e que a Supersimetria é consistente também em três dimensões. Na sequência, a fim de descrever o procedimento de redução dimensional que fizemos no Capítulo 4, via método de Scherk-Schwarz, realizamos a redução dimensional dos campos de Rarita-Schwinger e Super-Yang-Mills, os quais envolviam campos de diferentes naturezas, mas que ao mesmo tempo simplificou a demonstração do processo. Neste Capítulo, também verificamos que o método da compactificação pode ser relacionado ao de Scherk-Schwarz, e que ambos produzem a mesma redução dimensional ao considerarmos os modos-zero.

Na sequência, o Capítulo 4 teve por objetivo obter a forma da Supergravidade *on-shell*, que foi recuperada no Capítulo final, a partir da ação de Chern-Simons. Além disso, encontramos a versão reduzida das leis de transformação dos campos e, assim, verificamos que os truncamentos que realizamos ao longo da redução são consistentes. Foram necessárias também redefinições multiplicativas nos campos e na constante de acoplamento. Com isto, asseguramos que a ação encontrada estava correta, inclusive do ponto de vista dimensional.

Por fim, o Capítulo 5 teve como proposta mostrar a ligação entre Supergravidade e teorias topológicas, que são dois possíveis cenários teóricos para o estudo da Gravidade Quântica. Partindo da ação topológica de Chern-Simons e usando o grupo de transformções supersimétricas, recuperamos a ação que havíamos obtido via redução dimensional no Capítulo anterior. Desta forma, asseguramos que, em três dimensões, a Supergravidade é uma teoria naturalmente topológica, estendendo o resultado de Witten da gravidade pura para a Supergravidade pura.

A partir dos estudos aqui realizados, duas questões de pesquisa puderam ser elaboradas e serão o objeto de uma colaboração com o Dr. Diego Julio Cirillo-Lombardo da Universidad Nacional de La Plata: buscar identificar anisotropias em sistemas planares como efeitos gerados pela condensação de gravitinos, quando se adota um cenário de associar defeitos geométricos à curvatura e à torção. Nesta proposta, adotando um cenário de modelos análogos, traremos os nossos resultados da Supergravidade em três dimensões para aplicação em sistemas de Matéria Condensada em dimensões mais baixas. Com o objetivo de adotar a linha de modelos análogos, fica claro que a gravidade pura não pode responder pela condensação que gera anisotropias. Mas, a dinâmica da Supergravidade pode fazer com que um férmion parceiro - neste caso, o gravitino - possa se condensar e ser identificado com anisotropias. Esta proposta estende, introduzindo a Supersimetria, a linha de trabalhos que se encontra nos dois volumes de Hagen Kleinert que formam a coleção "Gauge Fields in Condensed Matter"[**101**]. Vemos na Supergravidade planar um possível cenário para abordar a discussão das anisotropias em sistemas de baixa dimensionalidade. O segundo aspecto que pode ser estudado é enquadrar a chamada teoria de gauge quiral para o grafeno, introduzida por Roman Jackiw [**102**], no ambiente da Supergravidade e verificar se a origem do escalar de Kekulé, que descreve as ondulações nas folhas de grafeno, pode ser vista como um modo escalar, também condensado fermiônico, da Supergravidade em 3 dimensões. Concluindo, estamos vislumbrando a possibilidade de concretizar uma abordagem baseada em Supersimetria para estudar defeitos geométricos em sistemas de baixa dimensionalidade. Afinal, resultados recentes apontam para Supersimetrias emergentes em sistemas planares da Matéria Condensada [**103**][**104**]. Outros trabalhos que incluem a gravitação e Teoria Quântica de Campos em modelos análogos de Matéria Condensada podem ser encontrados, respectivamente, nas referências [**105**][**106**].

Apêndice A

Teorias de Campos Topológicas

As teorias de campos topológicas são caracterizadas por ações que não dependem da métrica, o que implica que a noção de distância entre pontos não é exigida. Desta forma, a teoria é naturalmente invariante sob difeomorfismos e apenas a topologia da variedade, isto é, as características globais da variedade passam a ser relevantes para a ação. O exemplo mais simples de uma teoria topológica é o da ação de Chern-Simons

$$S = \frac{1}{2}\kappa \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \ , \tag{A.1}$$

em que A_μ é um campo de gauge $U(1)$ que toma valores na álgebra de Lie e κ é uma constante.

Como comparação, podemos tomar a ação de um campo escalar, φ, em espaço curvo, a qual é dada por

$$S(\varphi) = \int d^Dx \sqrt{-g} \Big(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \Big) \ , \tag{A.2}$$

em que ∇_μ é a derivada covariante. Assim, podemos notar que todas as quantidades da ação (A.2) dependem da métrica, diferentemente da ação (A.1).

Classicamente, o tensor energia-momento descreve a forma com a qual a ação de uma teoria depende da métrica da variedade. Desta forma, como nas teorias de campos topológicas a ação não depende da métrica da variedade, o seu tensor energia-momento é nulo

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_T}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \ , \tag{A.3}$$

em que S_T é uma ação topológica e $g_{\mu\nu}$ a métrica da variedade. Assim, como a Hamiltoniana é a componente T^{00} do tensor energia-momento da equação (A.3), então uma característica fundamental das teorias de campos topológicas é que sua Hamiltoniana é nula, $H = 0$!

Do ponto de vista quântico, a dependência da ação em relação a métrica é dada pelo valor esperado do tensor energia-momento. Assim, seja $\{\varphi\}$ um conjunto de campos, $S(\varphi)$ um funcional real desses campos, o qual corresponde à ação da teoria e $\hat{\mathcal{O}}(\varphi)$ operadores que correspondem a funcionais dos campos, o valor esperado do tensor energia-momento é dado por

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\varphi \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} e^{-\frac{1}{\hbar}S(\varphi)} \ , \tag{A.4}$$

onde Z é a função partição, a qual é dada por

$$Z = \int D \ \varphi e^{-\frac{1}{\hbar}S(\varphi)} \tag{A.5}$$

Portanto, podemos caracterizar uma teoria de campo topológica como uma classe especial das teorias quânticas de campos, em que o valor esperado do tensor energia-momento é nulo, isto é,

$$\boxed{\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle = 0} \tag{A.6}$$

Por fim, podemos destacar que, de modo geral, existem dois tipos de teorias quânticas de campos topológicas. O primeiro deles é chamado de *tipo-Schwarz*, a qual consiste em encontrar (classicamente) uma ação que seja independente da métrica. Um exemplo bastante famoso deste tipo de teoria topológica é a ação de *Chern-Simons*. Detalhes e outras informações a respeito deste tipo de teorias topológicas podem ser encontrados nas referências [**107**][**108**]. O outro tipo de teoria topológica é chamado *tipo-Cohomológica* e tem como principal exemplo a teoria de *Donaldson-Witten* [**8**]. Conforme discutido na referência [**109**], uma característica importante destes modelos é que os observáveis topológicos são independentes da constante de acoplamento, ou seja, eles podem ser calculados nos limites de acoplamento fraco e forte, sendo estes os regimes onde aparecem as maiores divergências das teorias de campos. Uma introdução às Teorias Cohomológicas também pode ser encontrado nas referências [**107**][**110**].

Bibliografia

[1] S. Deser and B. Zumino, "Consistent supergravity," *Phys. Lett.*, vol. 62B, p. 335, (1976).

[2] P. v. N. D.Z. Freedman and S. Ferrara, "Progress toward a theory of supergravity," *Phys. Rev.*, vol. D13, p. 3214, (1976).

[3] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, "Supergravity theory in 11 dimensions," *Physics Letters*, vol. B76, p. 409, (1977).

[4] S. Carlip, "Quantum gravity in 2+1 dimensions: The case of a closed universe," *Living Rev.Rel.*, vol. 8, p. 1, (2005).

[5] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions.* Cambridge Press University, 1998.

[6] E. Witten, "Quantum field theory and the jones polynomial," *Commun.Math. Phys.*, vol. 121, p. 351, (1989).

[7] E. Witten, "Topological sigma models," *Commun.Math. Phys.*, vol. 118, p. 411, (1988).

[8] E. Witten, "Topological quantum field theory," *Commun.Math. Phys.*, vol. 117, p. 353, (1988).

[9] E. Witten, "2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system," *Nuclear Physics*, vol. B311, p. 46, (1988).

[10] A. Chamseddine, "Topological gravity and supergravity in various dimensions," *Nuclear Physics B*, vol. 346, p. 213, (1990).

[11] A. Starodubtsev, *Topological methods in quantum gravity.* PhD thesis, University of Waterloo, 2005.

[12] M. Weis, *Topological Aspects of Quantum Gravity.* PhD thesis, Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, 1997.

[13] J. W. Barrett, "Quantum gravity as topological quantum field theory," *J. Math. Phys.*, vol. 36, p. 6161, (1995).

[14] L. Freidel and A. Starodubtsev, "Quantum gravity in terms of topological observables," *arXiv:hep-th/0501191.*

[15] R. D. Pietri, "Canonical loop quantum gravity and spin foam models," in *"Recent Developments in General Relativity* (B. Casciaro, D. Fortunato., M. Francaviglia, and A.Masiello, eds.), p. 43, Springer, 2000.

[16] A. Perez, "Spin foam models for quantum gravity," *Class.Quant.Grav.*, vol. 20, p. R43, (2003).

[17] E. Witten, "Ads/cft correspondence and topological field theory," *JHEP*, vol. 12, p. 012, (1998).

[18] M. Gasperini, *Theory of Gravitational Interactions.* Springer, 2013.

[19] A. Das, *Lectures On Gravitation.* World Scientific Publishing, 2011.

[20] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1. Cambridge University Press, 1995.

[21] H. Gies and S. Lippoldt, "Fermions in gravity with local spin-base invariance," *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 064040, (2014).

[22] H. A. Weldon, "Fermions without vierbeins in curved space-time," *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 104010, (2001).

[23] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory.* Oxford University Press, 2005.

[24] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's relativity.* Oxford University Press, 1992.

[25] M. Gasperini, *Elements of String Cosmology.* Cambridge University Press, 2011.

[26] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory.* World Scientific Publishing, 2008.

[27] A. Das and S. Okubo, *Lie Groups and Lie Algebras for Physicists.* World Scientific, 2014.

[28] C. Kiefer, "Conceptual problems in quantum gravity and quantum cosmology," *ISRN Math.Phys.*, vol. 2013, (2013).

[29] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, "Black hole in three-dimensional spacetime," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, p. 1849, (1992).

[30] S. Carlip, "The (2+1)-dimensional black hole," *Class.Quant.Grav.*, vol. 12, p. 2853, (1995).

[31] A. A. García-Díaz, *Exact Solutions in Three-Dimensional Gravity.* Cambridge University Press, 2017.

[32] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, "Three-dimensional massive gauge theories," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 48, p. 975, (1982).

[33] G. V. Dunne, "Aspects of chern-simons theory," *arXiv:hep-th/9902115.*

[34] M. Hassaine and J. Zanelli, *Chern-Simons (Super)Gravity*, vol. 2 of *100 Years of General Relativity.* World Scientific Publishing, 2016.

[35] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetry.* High Energy Physics, Cosmology and Gravitation, Institute of Physics Publishing, 2002.

[36] W. Merbis, *Chern-Simons-like Theories of Gravity.* PhD thesis, University of Groningen, arXiv:1411.6888v1 [hep-th], 2014.

[37] M. Gell-Mann, "Symmetries of baryons and mesons," *Phys.Lett.*, vol. 125, p. 1067, (1962).

[38] Y.Ne'eman, "Derivation of strong interactions from a gauge invariance," *Nuclear Physics*, vol. 26, no. 2, p. 222, 1961.

[39] E.Wigner, "On the consequences of the symmetry of the nuclear hamiltonian on the spectroscopy of nuclei," *Phys. Rev.*, vol. 51, p. 106, (1937).

[40] R. Mann, *An Introduction to Particle Physics and the Standard Model.* CRC Press, 2009.

[41] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley and Sons Inc, 2 ed., 2008.

[42] M. Gell-Mann, “A schematic model of baryons and mesons,” *Phys.Lett.*, vol. 8, p. 214, (1964).

[43] G. Zweig, “An su(3) model for strong interaction symmetry and its breaking,” in *Developments in the Quark Theory of Hadrons, Volume 1* (D. Lichtenberg and S. Rosen, eds.), p. 22, Hadronic Press, 1980.

[44] B.Sakita, “Lorentz Violation: Motivation and new constraints,” *Phys. Rev.*, vol. 136, p. B 1756, (1964).

[45] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 3. Cambridge University Press, 2000.

[46] S. R. Coleman and J. Mandula, “All possible symmetries of the s matrix,” *Phys.Rev.*, vol. 159, p. 1251, (1967).

[47] H. Năstase, *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015.

[48] P. Nath, *Supersymmetry, Supergravity, and Unification*. Cambridge University Press, 2017.

[49] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*. World Scientific Publishing Company, 2 ed., 1990.

[50] S. Ferrara, R.Gatto, and A. Grillo, *Springer Tracts in Modern Physics*, vol. 67. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1973.

[51] S. Calegari, “Invariância conforme na física,” Master’s thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2017.

[52] W. Siegel, “Fields,” *hep-th/9912205*.

[53] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2 ed., 2009.

[54] A. M. Steane, “An introduction to spinors,” *arXiv:1312.3824 [math-ph]*.

[55] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. Cambridge University Press, 2 ed., 2007.

[56] D. D. Vvedensky and T. S. Evans, *Symmetry, Groups, And Representations In Physics*. World Scientific Europe, 2019.

[57] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics: An Introduction*, vol. 1. Academic Press, 1997.

[58] D. Z. Freedman and A. V. Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.

[59] P. B. Pal, "Dirac, majorana and weyl fermions," *Am. J. Phys.*, vol. 79, p. 485, (2011).

[60] J. B. Neto, *Teoria de Campos e a Natureza - Parte Quântica*. Livraria da Física, 2017.

[61] A.Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.

[62] S. G. Jr, M. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, "Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry," *Front.Phys.*, vol. 58, p. 1, (1983).

[63] A. Bilal, "Introduction to supersymmetry," *arXiv:hep-th/0101055*.

[64] I. J. Aitchison, *Supersymmetry in Particle Physics: An Elementary Introduction*. Cambridge University Press, 2007.

[65] E. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group," *Annals of Mathematics*, vol. 40, p. 149, (1939).

[66] P. Binétruy, *Supersymmetry: Theory, Experiment, and Cosmology*. Oxford University Press, 2006.

[67] Y. Tanii, *Introduction to Supergravity*. Springer, 2014.

[68] J. Terning, *Modern Supersymmetry Dynamics and Duality*. Oxford University Press, 2006.

[69] H. J. W. Muller-Kirsten and A. Wiedemann, *Introduction To Supersymmetry*. World Scientific Publishing Company, 2 ed., 2010.

[70] J. Ellis, "Outstanding questions: Physics beyond the standard model," *Phil.Trans.Roy.Soc.Lond.*, vol. A 370, p. 818, (2012).

[71] D. I. Kazakov, "Prospects of elementary particle physics," *Physics-Uspekhi*, vol. 62, no. 4, p. 364, (2019).

[72] L. Brink, O. Lindgren, and B. E. Nilsson, "The ultra-violet finiteness of the $n = 4$ yang-mills theory," *Physics Letters*, vol. B 123, p. 323, (1983).

[73] M. Bertolini, "Lectures on supersymmetry," *https://people.sissa.it/bertmat/susycourse.pdf*.

[74] P. Nieuwenhuizen, "Supergravity," *Physics Reports*, vol. 68, p. 189, (1981).

[75] H.P.Nilles, "Supersymmetry, supergravity and particle physics," *Physics Reports*, vol. 110, p. 1, (1984).

[76] F. Brandt, "Lectures on supergravity," *Fortsch.Phys*, vol. 50, p. 1126, (2002).

[77] S. Ferrara, J. Scherk, and P. van Nieuwenhuizen, "Locally supersymmetric maxwell-einstein theory," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 37, p. 1035, (1976).

[78] S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, "Consistent supergravity with complex spin-3/2 gauge fields," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 37, p. 1669, (1976).

[79] M. T. Grisaru, P. van Nieuwenhuizent, and J. A. M. Vermaserent, "One-loop renormalizability of pure supergravity and of maxwell-einstein theory in extended supergravity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 37, p. 1662, (1976).

[80] D. Freedman, "So(3)-invariant extended supergravity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 38, p. 105, (1977).

[81] S. Ferrara, J. Scherk, and B. Zumino, "Supergravity and local extended supersymmetry," *Phys. Lett.*, vol. B66, p. 35, (1977).

[82] E. Cremmer, J. Scherk, and S. Ferrara, "U(n) invariance in extended supergravity," *Phys. Lett.*, vol. B68, p. 234, (1978).

[83] A. Das, "So(4)-invariant extended supergravity," *Phys. Rev.*, vol. D15, p. 2805, (1977).

[84] B. de Wit and D. Z. Freedman, "On so(8) extended supergravity," *Nuclear Physics*, vol. B130, p. 105, (1977).

[85] E. Cremmer and B. Julia, "The so(8) supergravity," *Nucl. Phys.*, vol. B159, p. 141, (1979).

[86] M. J. Duff, "M-theory (the theory formerly known as strings)," *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A11, p. 5623, (1996).

[87] W. Nahm, "Supersymmetries and their representations," *Nucl.Phys.*, vol. B135, p. 149, (1978).

[88] J. A. Strathdee, "Extended poincare supersymmetry," *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A2, p. 273, (1987).

[89] T. Ortín, *Gravity and Strings.* Cambridge University Press, 2004.

[90] F. Giani and M. Pernici, "N=2 supergravity in ten-dimensions," *Phys. Rev.*, vol. D30, p. 325, (1984).

[91] I. C. G. Campbell and P. C. West, "N=2, d=10 nonchiral supergravity and its spontaneous compactification," *Nucl. Phys.*, vol. B243, p. 112, (1984).

[92] M. Huq and M. Namazie, "Kaluza-klein supergravity in ten dimensions," *Class. Quantum Grav*, vol. 2, p. 293, (1985).

[93] P.S.Howe and P.C.West, "The complete n =2, d = 10 supergravity," *Nuclear Physics*, vol. B238, p. 181, (1984).

[94] D. Bailin and A. Love, "Kaluza-klein theories," *Rep. Prog. Phys.*, vol. 50, p. 1087, (1987).

[95] O. Klein, "The atomicity of electricity as a quantum theory law," *Nature*, vol. 118, p. 516, (1926).

[96] J. Scherk and J. H. Schwarz, "How to get masses from extra dimensions," *Nucl.Phys.*, vol. B153, p. 61, (1979).

[97] A. Passias, "Aspects of supergravity in eleven dimensions," Master's thesis, Imperial College London, 2010.

[98] R. Blumenhagen, D. Lüst, and S. Theisen, *Basic Concepts of String Theory.* Springer, 2013.

[99] M. Graña and H. Triendl, *String Theory Compactifications.* Springer, 2017.

[100] L. O. P. Rosas, *Efeitos de Spin, Velocidade e Dimensionalidade em Potenciais Interpartículas Associados a Modelos de Gauge.* PhD thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2017.

[101] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter.* World Scientific, 1989.

[102] R. Jackiw and S.-Y. Pi, "Chiral gauge theory for graphene," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 266402, (2007).

[103] E. M. Abreu, M. A. D. Andrade, L. P. D. Assis, J. A. Helayël-Neto, and A. Nogueira, "Vortex solutions and a novel role for r-parity in an n=2 -supersymmetric extension of jackiw-pi's chiral gauge theory," *Annals Phys.*, vol. 354, p. 618, (2015).

[104] E. M. Abreu, M. A. D. Andrade, L. P. D. Assis, J. A. Helayël-Neto, and A. Nogueira, "A supersymmetric model for graphene," *JHEP*, vol. 05, p. 001, (2011).

[105] A. A. Vargas-Paredes, *Campos de Yang Mills e a Teoria de Einstein-Cartan: da Gravitação Quântica à Supercondutividade.* PhD thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2012.

[106] E. Arias, A. R. Hernández, and C. Lewenkopf, "Gauge fields in graphene with nonuniform elastic deformations: A quantum field theory approach," *Phys. Rev. B*, vol. 92, p. 245110, (2015).

[107] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, and G. Thompson, "Topological field theory," *Physics Reports*, vol. 209, p. 129, (1991).

[108] A. Schwarz, "Topological quantum field theories," *arXiv:hep-th/0011260v1 [hep-th]*, (2000).

[109] J. M. F. Labastida and C. Lozano, "Lectures on topological quantum field theory," *arXiv:hep-th/9709192v1[hep-th]*, (1997).

[110] E. Witten, "Introduction to cohomological field theories," *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A 6, p. 2775, (1991).