



**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**

HELEN DE LEMOS BRAGA

UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE  
GERAÇÃO DE PROCESSOS  $1/f$  VIA PROCESSAMENTO DIGITAL  
DE SINAIS

Rio de Janeiro - RJ  
2020



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE  
GERAÇÃO DE PROCESSOS  $1/f$  VIA PROCESSAMENTO DIGITAL  
DE SINAIS

Helen de Lemos Braga

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador:** Marcelo Portes de Albuquerque

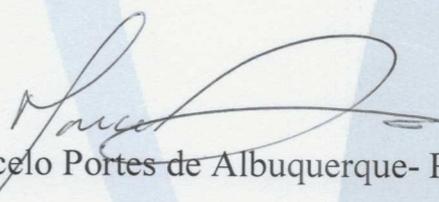
Rio de Janeiro - RJ

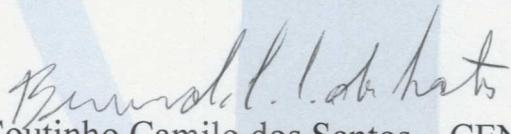
2020

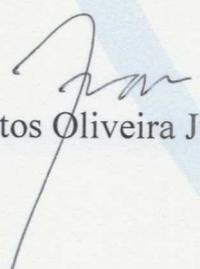
**“UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE  
GERAÇÃO DE PROCESSOS 1/f VIA PROCESSAMENTO  
DIGITAL DE SINAIS”**

***HELEN DE LEMOS BRAGA***

Dissertação de Mestrado em Física, apresentada  
no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e  
Comunicações. Fazendo parte da banca  
examinadora os seguintes professores:

  
Marcelo Portes de Albuquerque- Presidente/Orientador/CBPF

  
Bernardo Coutinho Camilo dos Santos – CENPES/PETROBRÁS

  
Ivan dos Santos Oliveira Junior - CBPF

Rio de Janeiro, 14 de fevereiro de 2020.

Dedico este trabalho aos meus pais, que me encorajaram a voar para longe, mas sem nunca esquecer o caminho de volta pra casa.

## Agradecimentos

Aos meus pais, pelo eterno suporte que me manteve de pé nesses últimos anos,

Aos meus irmãos, que fizeram da distância um mero detalhe e me acompanharam durante todos os meus passos dados,

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas,

Ao meu orientador, por ter me acolhido todos esses anos atrás e me guiado nessa estrada que hoje percorro,

Aos meus amigos, por me lembrarem constantemente que existe um mundo lá fora repleto de coisas novas a serem vivenciadas,

E, por fim, ao André Persechino e Marcos Costa e Silva, meus amigos e companheiros de laboratório, pelo incessante companheirismo do meu dia-a-dia. A vocês, meu mais profundo carinho. Em especial, agradeço ao André pela paciência, pelos inúmeros conselhos, pelos puxões de orelha, pelas constantes risadas, por todas as horas que passou debruçado sobre contas e mais contas ao meu lado, por todo o novo conhecimento que adquiri desde que começamos a trabalhar juntos e, acima de tudo isso, agradeço pela compreensão.

## Resumo

Nesta dissertação é apresentado um estudo aprofundado sobre técnicas lineares de geração de ruídos com características  $1/f^\alpha$ . São revistos conceitos de Processamento Digital de Sinais, bem como de Processos Estocásticos, de forma a dar substrato aos desenvolvimentos computacionais. Metodologias baseadas em filtros de resposta finita e infinita – FIR e IIR, respectivamente – são desenvolvidas e intercomparadas. É mostrado que ambas estratégias permitem geração de ruídos  $1/f$  com robustez e confiabilidade, permitindo inclusive que se administre os intervalos de frequências em que o comportamento desejado se manifesta. Análise sobre tempos de processamento computacional foram realizadas, mostrando que a menos de implementação recursiva, todas as estratégias foram capazes de gerar processos com  $N \sim 10^7$  entradas em menos de 3 segundos, em adição a uma oscilação máxima relativa do expoente  $\alpha$  de  $\pm 4\%$ .

**Palavras-chave:** processos  $1/f$ , Processamento Digital de Sinais, Processos Estocásticos, filtros digitais.

## Abstract

This work presents an in-depth study of linear process generation techniques with  $1/f^\alpha$ . Concepts of Digital Signal Processing, as well as Stochastic Processes, are reviewed in order to support the computational developments. Methodologies based on finite and infinite response filters - FIR and IIR, respectively - are developed and intercompared. It is shown that both strategies allow robust and reliable  $1/f$  process generation, including allowing to manage the frequency range in which the desired behavior manifests itself. Analysis of computational processing times was performed, showing that minus the recursive implementation, all strategies were able to generate processes with  $N \sim 10^7$  entries in less of 3 second, in addition to a  $\pm 4\%$  relative maximum oscillation of the  $\alpha$  exponent.

**Keywords:**  $1/f$  processes, Digital Signal Processing, Stochastic Processes, digital filters.

# Sumário

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 1       | INTRODUÇÃO . . . . .   | 2  |
| 2       | PROCESSOS $1/f$ . . . . .                                      | 4  |
| 2.1     | Introdução . . . . .   | 4  |
| 2.2     | Abrangência . . . . .  | 4  |
| 2.3     | Interpretações e modelos matemáticos . . . . .                 | 5  |
| 2.4     | Geração de modelos . . . . .                                   | 7  |
| 3       | PROCESSAMENTO DE SINAIS . . . . .                              | 8  |
| 3.1     | Introdução . . . . .   | 8  |
| 3.2     | Sistemas lineares em domínio contínuo . . . . .                | 9  |
| 3.2.1   | Representação . . . . .  | 9  |
| 3.2.1.1 | Síntese e análise de Fourier . . . . .                         | 13 |
| 3.2.1.2 | Transformada de Laplace . . . . .                              | 15 |
| 3.3     | Sistemas lineares em domínio discreto . . . . .                | 16 |
| 3.3.1   | Amostragem de sinais contínuos . . . . .                       | 16 |
| 3.3.2   | Transformada Z . . . . .                                       | 17 |
| 3.3.3   | Transformada discreta de Fourier . . . . .                     | 19 |
| 3.3.4   | Filtros lineares . . . . .                                     | 22 |
| 3.3.4.1 | Invariância ao impulso . . . . .                               | 25 |
| 3.3.4.2 | Transformação bilinear . . . . .                               | 27 |
| 3.3.5   | Filtros FIR . . . . .  | 28 |
| 3.4     | Processos estocásticos . . . . .                               | 31 |
| 3.4.1   | Sinais aleatórios e ruído . . . . .                            | 31 |
| 3.4.2   | Conceitos fundamentais de Teoria de Probabilidade . . . . .    | 33 |
| 3.4.3   | Definição e caracterização de processos estocásticos . . . . . | 39 |
| 3.4.4   | Análise e estimação espectral . . . . .                        | 41 |
| 4       | MÉTODOS DE GERAÇÃO . . . . .                                   | 44 |
| 4.1     | Caso unidimensional . . . . .                                  | 44 |
| 4.1.1   | Abordagem via filtros lineares . . . . .                       | 44 |
| 4.1.2   | Filtros FIR . . . . .  | 45 |
| 4.1.3   | Filtros IIR . . . . .  | 46 |
| 4.1.4   | Filtro generalizado . . . . .                                  | 53 |
| 4.2     | Aplicação computacional . . . . .                              | 55 |
| 4.2.1   | Gerador de números aleatórios . . . . .                        | 55 |
| 4.2.2   | Estimação espectral: o método de Welch . . . . .               | 56 |
| 4.2.3   | Algoritmos . . . . .   | 57 |
| 4.3     | Caso bidimensional . . . . .                                   | 62 |

---

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 4.3.1 | Algoritmo . . . . .                           | 64 |
| 5     | METODOLOGIA E RESULTADOS . . . . .            | 66 |
| 5.1   | Investigação de performance . . . . .         | 66 |
| 5.1.1 | Recursos computacionais . . . . .             | 66 |
| 5.1.2 | Comportamento espectral . . . . .             | 66 |
| 5.1.3 | Tempo de execução . . . . .                   | 71 |
| 5.1.4 | Número de filtros . . . . .                   | 73 |
| 6     | CONCLUSÃO . . . . .                           | 75 |
|       | APÊNDICE A – TEOREMA DA AMOSTRAGEM UNIFORME . | 78 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .                         | 80 |

# 1 Introdução

A recorrente presença de processos com espectro de frequência do tipo  $1/f$  na natureza fez com que estes se tornassem alvo de grande curiosidade e, conseqüentemente, tenham sido estudados por décadas na busca de uma explicação para sua recorrência. Ruídos em dispositivos eletrônicos [38, 12, 77, 86], movimento de partículas em suspensão [66, 56], nanotubos de carbono [20] e modos de vibração sísmica [29] são apenas alguns exemplos dos diversos sistemas em que se observa – dentro de algum limite – um comportamento espectral que obedece a uma dada lei de potência. Frente a tal abrangência, parte da Física se ocupa das investigações necessárias para compreensão, controle e reprodução de fenômenos  $1/f$ . Dentro deste cenário, a abordagem computacional é fundamental: simulação, análise e processamento de sinais cujos espectros seguem leis de potência permitem que se formem juízos – ainda que parciais – sobre as origens e manifestações destes fenômenos complexos.

Em função da universalidade dos processos  $1/f$  e da importância da computação em sua investigação, a presente dissertação traz um desenvolvimento detalhado sobre métodos de geração de ruídos do tipo  $1/f$  em uma dimensão. A frente de trabalho escolhida consiste na teoria de Processamento Digital de Sinais e Imagens, pouco familiar para os físicos brasileiros. Nesse sentido, em adição às investigações propriamente ditas, uma apresentação detalhada da Teoria Linear de Sinais é realizada.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, é apresentada uma visão geral sobre processos  $1/f$  e alguns dos diversos fenômenos na natureza em que este comportamento se mostra presente. Áreas diversas como Física da Matéria Condensada [79, 22], Geofísica [29, 49] e Física Médica [32, 14, 85] apresentam ocorrências deste processo. Em função disto, são discutidas algumas interpretações físicas para sua ocorrência e cenários de aplicação, dando ênfase ao trabalho que vem sendo realizado pelo grupo de pesquisa do Laboratório de Instrumentação Tecnológica e Computacional - Sinais e Imagens (LitCOMP/SI) do CBPF.

No Capítulo 3, é feita uma revisão de conceitos de processamento de sinais com o intuito de auxiliar na compreensão do desenvolvimento do texto. Tendo em vista a vasta quantidade de material na literatura sobre o assunto, a revisão é feita de maneira robusta, apresentando apenas os conceitos básicos das principais ferramentas que serão importantes no decorrer do trabalho. De maneira geral, são discutidos sistemas no domínio de tempo contínuo e discreto, suas propriedades, possíveis formas de representação de sinais e, em particular, é feita uma breve discussão sobre filtros lineares. Para um curso completo de processamento de sinais, a autora recomenda os livros de Oppenheim [53] e Diniz *et al.* [21]. Além disso, o tópico de processos estocásticos também é abordado neste capítulo, dando foco aos conceitos básicos de probabilidade, variáveis aleatórias, classificação de processos e estimação espectral [55].

No Capítulo 4, são apresentados diferentes métodos de geração de processos  $1/f$  através da implementação de filtros lineares de resposta ao impulso finita (FIR) e infinita (IIR) para o caso unidimensional, fazendo uso das ferramentas introduzidas no Capítulo 3. Estes filtros são então implementados computacionalmente e seus respectivos resultados são apresentados. Por fim, o

estudo realizado é expandido para o caso bidimensional utilizando filtros FIR.

No Capítulo 5, diferentes experimentos computacionais são propostos com o intuito de avaliar a qualidade dos geradores em se tratando do comportamento espectral dos seus respectivos resultados quando comparados ao caso ideal e seus tempos de processamento, principalmente em função do tamanho dos vetores gerados. Propostos estes experimentos, seus respectivos resultados são apresentados e discutidos, avaliando a viabilidade da utilização dos geradores para diferentes tipos de problemas. As conclusões e perspectivas futuras do trabalho, junto com o apêndice, fecham o texto.

Um dos principais obstáculos atuais no desenvolvimento científico do Brasil é a carência de investimento na área de instrumentação científica. Sendo um dos principais pilares para o avanço tecnológico do país, é indiscutível sua relevância, tornando-a indispensável para o crescimento do cenário científico atual, não só na área industrial como dentro dos centros nacionais de pesquisa. A área de computação está diretamente relacionada com instrumentação; na Física, a presença imperativa da computação em todas as áreas de pesquisa impulsionam o desenvolvimento de novas ferramentas para o auxílio do progresso científico. A autora espera que, com os métodos e resultados apresentados neste trabalho, tenha sido feita uma contribuição relevante para a instrumentação computacional, auxiliando em futuras pesquisas onde estes tipos de processos estejam presentes na modelagem computacional.

## 2 Processos $1/f$

### 2.1 Introdução

A Física lida com fenômenos nas mais variadas escalas. Buscam-se modelos que expliquem desde a aceleração de galáxias até o transporte elétrico em interfaces de dimensões nanométricas. Cada contexto carrega consigo, ou apresenta, um arcabouço que melhor lhe descreve. Assim, a Física tenta, por meio de aparatos variados, modelar e representar minimamente uma gama imensa de fenômenos. Dentro deste conjunto, há aqueles fenômenos que chamam a atenção devido a sua manifestação consistente em diversas escalas, do micro ao macro. Tais fenômenos aguçam a curiosidade simplesmente por serem capazes de se manifestar em diversos cenários, sugerindo que uma busca por uma universalidade na natureza não é completamente utópica. Uma classe representante de tais fenômenos dados à universalidade compreende os chamados processos  $1/f$ . De modo geral, existem na natureza processos estocásticos cujas densidades espectrais obedecem a uma certa lei de potência da forma

$$S(f) = \frac{c}{f^\alpha}, \quad (2.1)$$

em que  $c$  e  $\alpha$  são constantes. Atualmente, quase um século após sua primeira aparição [38] em publicações científicas, é surpreendente a quantidade de trabalhos publicados relacionados a estes fenômenos em áreas além da Física.

Tendo sido objetos de estudo tanto no aspecto teórico quanto experimental, foram desenvolvidos diversos modelos que tentavam explicar sua origem; entre eles, um dos exemplos mais relevantes foi a abordagem feita através da teoria de fractais [47, 5] que será discutida mais detalhadamente nas próximas seções. Entretanto, mesmo com diversas tentativas de sistematização, ainda não há uma teoria consolidada que explique o porquê de eles aparecerem com tanta frequência ou a própria afinidade da natureza por estes tipos de processos.

Este capítulo tem como foco principal expor de forma abrangente a presença de processos do tipo  $1/f$  na natureza, desde sua primeira aparição documental, visto que o fenômeno veio antes da ciência em si, até os dias atuais. Tendo em vista que já se passaram décadas de estudos sendo feitos sobre estes, sua relevância se encontra principalmente na vasta quantidade de fenômenos que apresentam esse tipo de comportamento, alguns dos quais serão apresentados a seguir.

### 2.2 Abrangência

Como grande parte dos estudos iniciais foram feitos em dispositivos eletrônicos, uma primeira tentativa de sistematização aconteceu com J. B. Johnson em 1925 quando este estudava o chamado efeito Schottky em circuitos de baixa frequência utilizando válvulas termiônicas [38, 67]. Este comportamento espectral não era exclusivo apenas para válvulas termiônicas, no entanto; posteriormente, foi constatado que outros componentes eletrônicos tais como semicondutores [33], diodos Zener [12], diodos Schottky [77] e transistores de junção bipolar [86], dentre muitos outros também apresentam comportamento espectral que obedecem a lei de potência dada pela

Equação (2.1). Tendo em vista que, para este caso, estes processos se apresentam na forma de ruídos, tornou-se necessário uma melhor compreensão sobre este tipo de processo para melhorar não só a instrumentação, mas também um entendimento geral sobre os sistemas físicos em si.

A presença de processos  $1/f$  em dispositivos eletrônicos foi apenas o ponto de partida e novas descobertas logo se estenderam para áreas além da Eletrônica. Houve diversas contribuições também em áreas como a Biofísica e Física Médica, por exemplo; não se limitando apenas a sistemas puramente físicos, foram estudados casos de processos  $1/f$  que estão relacionados ao comportamento humano. Por fins de ilustração, tome como exemplo a cognição [28, 72]. Uma assinatura  $1/f$  foi detectada na realização de pequenos experimentos relacionados a produção de intervalos temporais e espaciais onde, ao receber exemplos de tais intervalos, era exigido que pessoas tentassem reproduzi-los repetidamente. Realizando o experimento para diferentes intervalos e tomando os erros de repetição como uma série temporal, foi verificado através da análise de Fourier dos resultados que todos os espectros apresentaram comportamento  $1/f$ , tanto para o caso de intervalos temporais quanto para o caso de intervalos espaciais [28]. Ainda dentro destas áreas de pesquisa, foram também realizados estudos em sequenciamento de DNA [73], no período de batimento cardíaco [50], atividades cerebrais [51, 11], em membranas celulares [45] e em imagens mamográficas [32, 14, 85].

Mas para realmente compreender como é grande a diversidade de processos na natureza que apresentam esse tipo de comportamento, tem-se que ele também é encontrado no som [74] – tanto em certas composições musicais como na própria fala –, no fluxo de carros no trânsito [84] e em grandes fenômenos naturais como terremotos [29] e até mesmo relacionado a rotação da Terra [49]. Estudos mais recentes estão sendo feitos em áreas como a de Nanotecnologia [44, 23], em especial voltados para o grafeno [31, 6]. Visto que este tem se manifestado como uma ferramenta promissora relacionada a biossensores, é preciso lidar com estes processos  $1/f$  que se manifestam em forma de ruído nas baixas componentes de frequência [23].

Tamanho a quantidade de trabalhos sendo desenvolvidos, foi organizada em Tóquio em 1977 a primeira conferência internacional sobre processos  $1/f$ . Desde então, a ICNF (do inglês *International Conference on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuation*) tem sido realizada com frequência bianual e tem como objetivo reunir diversos especialistas sobre o assunto, impulsionando a interação e discussão destes processos em diferentes áreas de aplicação. Se o leitor deseja estudar um conteúdo mais sintetizado, os artigos científicos aceitos nas conferências foram separados por área de pesquisa e estão disponíveis nas referências [8, 18] e naquelas ali contidas.

## 2.3 Interpretações e modelos matemáticos

Em quase um século de estudo, foram diversas as tentativas de modelagem matemática para diferentes processos  $1/f$ . Por mais que não tenha sido consolidada uma teoria universal que explique a recorrência destes tipos de processos na natureza, alguns dos modelos teóricos específicos que surgiram no estudo de diferentes fenômenos na Física obtiveram considerável sucesso e merecem ser mencionados [82].

A presença de ruídos com este comportamento espectral para baixas frequências em componentes eletrônicos fez com que, para o caso de metais homogêneos e materiais semicondutores, surgisse com Hooge uma relação empírica para a magnitude do ruído na presença de um fluxo

de corrente elétrica [34, 35]. Esta relação é dada pela fórmula:

$$\frac{S_X(f)}{X^2} \approx \frac{C_{1/f}}{f}, \quad (2.2)$$

em que  $X$  pode representar a corrente, a voltagem ou a condutividade do material e que a constante  $C_{1/f}$  está diretamente relacionada a um fator empírico adimensional cujo valor foi estimado ser  $\alpha_H \approx 2 \times 10^{-3}$  [34]. Entretanto, não há evidências de que este fator calculado  $\alpha_H$  venha a ser uma constante universal [82]. Esta relação foi então investigada e verificada para diversos tipos de metais tais como prata (Ag), cobre (Cu), chumbo (Pb) e platina (Pt) [34], para filmes metálicos de prata, ouro (Au), cobre e estanho (Sn) [75] e também para materiais semicondutores [71, 41]. Porém, quando realizado o estudo para estruturas mais complexas (não-homogêneas), a relação de Hooge não foi verificada [82]. Com isso, o aparente sucesso das investigações iniciais fez com que fossem surgindo novos modelos. Ainda no assunto de componentes eletrônicos, um exemplo de tentativa de modelagem que surgiu posteriormente foi apresentada por Clark e Voss relacionando a presença de ruído  $1/f$  em filmes metálicos com flutuações térmicas do material [75, 76]. Ainda mais adiante, a análise destes primeiros modelos impulsionou o surgimento de abordagens alternativas via Mecânica Quântica [30].

Sucessos e falhas à parte, a discussão sobre a origem dos processos  $1/f$  vai muito além destes casos específicos, abordando questões mais fundamentais dentro da Física. Sua propriedade de invariância à escala, por exemplo, fez com que estes fossem ligados a teoria de fractais [47, 52, 81]. Tendo como sua principal propriedade a auto-similaridade – o que significa que o sistema é invariante sob transformações de escala –, estes conjuntos surgiram como uma forma alternativa de geometria para a natureza, abandonando a usual busca por formas regulares como solução de problemas que apresentam padrões extremamente irregulares. Na tentativa de explicar a origem de ambos os fenômenos – fractais e processos  $1/f$  –, Bak *et al.* criaram o conceito de criticalidade auto-organizada [5] (SOC, do inglês *self-organized criticality*). Em seu artigo, foi definido o que os autores chamaram de estado crítico auto-organizado, que seria um estado para o qual certos sistemas dinâmicos com grande número de graus de liberdade evoluiriam de forma espontânea. Em outras palavras, para a dinâmica desses sistemas, este estado crítico seria um atrator. Caracterizado principalmente por leis de escala, Bak acreditava que fractais e processos  $1/f$  ditavam as manifestações temporal e espacial de um estado crítico auto-organizado [3]. O conceito de SOC foi e ainda é utilizado em pesquisas de áreas como sísmica [4, 83] e redes neurais [42, 48], mas uma rápida sucessão de artigos [39, 37, 36] rebatendo os resultados apresentados em [5] fez com que a ideia proposta como explicação para a presença de processos  $1/f$  na natureza perdesse credibilidade e a questão se manteve em aberto.

Em relação a fenômenos irregulares na natureza, um dos problemas clássicos da Física que está ligado a processos  $1/f$  é o movimento Browniano. Este fenômeno de importância histórica relacionado à Teoria Atômica da Matéria descreve a trajetória irregular de uma partícula dentro de um fluido. Para verificar rapidamente esta relação, considere a equação de Langevin unidimensional sem a presença de força externa:

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -\beta v(t) + f_a(t), \quad (2.3)$$

em que  $v$  é a velocidade da uma partícula de massa  $m$ ,  $\beta$  é o coeficiente de atrito viscoso do fluido e  $f_a$  é uma força aleatória devido a colisões com moléculas. Sendo  $V(f)$  e  $F_a(f)$

as transformadas de Fourier de  $v$  e  $f_a$ , respectivamente, e fazendo uso das propriedades de linearidade e diferenciação, a Equação (2.3) pode ser reescrita como

$$2\pi m(\gamma + if)V(f) = F_a(f), \quad (2.4)$$

em que  $\gamma = \beta/2\pi m$ . Tirando seu módulo quadrado, obtém-se, então, que a densidade espectral da velocidade  $S_v$  é dada por

$$S_v(f) = \frac{S_f(f)}{4\pi^2 m^2 (\gamma^2 + f^2)}, \quad (2.5)$$

sendo  $S_f$  a densidade espectral da força aleatória. Portanto, o movimento browniano obedece à uma lei de potência para o caso específico em que  $\alpha = 2$ .

## 2.4 Geração de modelos

Identificada a dificuldade de se modelar universalmente processos  $1/f$ , em adição à necessidade de se manipular tais objetos, fica claro que deve-se buscar arcabouços teóricos que: (1) gerem processos  $1/f^\alpha$ , pelo menos em uma largura de banda pré-determinada; e (2) permitam a extração de dados e informações diversos oriundos dos processos outrora gerados. Estratégias básicas podem consistir em simulações, por exemplo (note que o problema de caminhadas aleatórias leva a uma assinatura  $1/f^2$ ), ou em manipulação espectral. Este último parte de certos pressupostos (linearidade, invariância ao deslocamento) para que sejam permitidas etapas de filtragem de espectros uniformes ou de ruído branco. Com isso, faz-se imperativa a adoção de técnicas de Processamento Digital de Sinais [53, 21]. Embora poderosa, esta teoria não é usualmente dominada pelos físicos, de forma que suas potencialidades são sub-utilizadas por eles. Em direção contrária, adota-se neste trabalho o paradigma de Processamento Digital de Sinais para a geração e análise de processos  $1/f$ . Para tanto, o próximo capítulo introduzirá uma revisão profunda sobre Processamento de Sinais e Processos Estocásticos, assuntos que serão a base do desenvolvimento teórico-computacional deste trabalho. São discutidos conceitos básicos de sinais e sistemas em domínios contínuo e discreto (representação, amostragem) com foco em sistemas lineares invariantes no tempo. Além disso, tendo em vista a estratégia abordada que faz uso recorrente de ruídos, são também abordados conceitos fundamentais de Teoria de Probabilidade, parâmetros de caracterização estatística e métodos de estimação espectral.

## 3 Processamento de Sinais

### 3.1 Introdução

Grosso modo, um sinal é uma grandeza que varia de acordo com uma ou mais variáveis independentes. Na grande maioria dos casos, estas são o tempo e espaço<sup>1</sup>. Podendo ser matematicamente representado por funções, o sinal pode ser contínuo, discreto ou misto, dependendo da natureza das variáveis<sup>2</sup> [54]. Desse modo, tem-se que um sistema pode ser definido como um processo que mapeia um sinal de entrada em um sinal de saída através de uma determinada operação realizada sobre o primeiro. Este processo pode ser descrito, de maneira geral, como uma transformação

$$y(t) = H\{x(t)\}, \quad (\text{caso contínuo}) \quad (3.1)$$

podendo esta ser linear ou não. Este processo está visualmente representado na Figura (1).



Figura 1 – Representação genérica do diagrama em blocos de um sistema.

Existem algumas propriedades básicas de sistemas que devem ser mencionadas, tais como:

1. **Linearidade:** os sistemas obedecem ao princípio de superposição, ou seja,

$$H\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = ay_1(t) + by_2(t), \quad (3.2)$$

em que  $a, b \in \mathbb{C}$ ;

2. **Memória:** referente à dependência do sinal de saída com valores passados do sinal de entrada;
3. **Causalidade:** a saída do sistema depende apenas de valores atuais ou de instantes passados do sinal de entrada;
4. **Invertibilidade:** relacionada à capacidade de recuperar completamente um sinal de entrada através do sinal de saída, ou seja,

$$x(t) = H^{-1}\{y(t)\} = H^{-1}\{H\{x(t)\}\}; \quad (3.3)$$

5. **Invariância ao deslocamento:** as características e o comportamento do sistema não se alteram quando se introduz um atraso ou avanço ( $\pm t_0$ ) no sinal de entrada, *i.e.*, um deslocamento temporal na entrada gera um deslocamento idêntico na saída:

$$H\{x(t \pm t_0)\} = y(t \pm t_0) \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> Contudo, os domínios de um sinal multidimensional podem ser muito mais diversos, como, por exemplo, em espectroscopia no regime óptico, cujas variáveis independentes são dadas pelo comprimento de onda e ângulo de polarização [61].

<sup>2</sup> Comumente, deve-se lidar com variáveis aleatórias, o que inviabiliza este tipo de representação.

No caso de sistemas em domínios contínuos, estes também costumam receber o nome de invariantes no tempo.

Levando em consideração as propriedades citadas acima, os sistemas lineares possuem considerável relevância na área de Processamento de Sinais e serão o foco de estudo das próximas seções para ambos os casos contínuo e discreto. Em especial, sistemas lineares que também são invariantes no tempo (LTI, do inglês *linear time invariant*) são utilizados para modelar diversos processos físicos tais como circuitos elétricos, por exemplo [7]. O entendimento da representação e manipulação deste tipo de sistema serão imprescindíveis para o desenvolvimento dos filtros que serão apresentados no próximo capítulo. Para um aprofundamento nos tópicos que aqui serão apresentados, cursos completos de Processamento Digital de Sinais podem ser encontrado em [54, 53, 21].

## 3.2 Sistemas lineares em domínio contínuo

### 3.2.1 Representação

Tendo em vista que, como já foi dito, um sinal pode ser descrito através de funções, algumas observações devem ser feitas para auxiliar a análise da informação sendo transmitida por ele. Objetivamente, um sinal é, dentro deste escopo, uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cuja imagem compreende a informação de interesse e, de modo intuitivo, utilizar este tipo de representação viabiliza toda uma operacionalidade matemática (integração, deslocamentos na variável independente, etc.) sobre ele. Porém, questões formais à parte – *e.g.* integrabilidade –, há uma certa inconveniência nesse tipo de representação, ligada, em última instância, à quantidade de informação necessária para uma representação fidedigna.

Para uma melhor exemplificação do problema, considere a seguinte analogia: sendo  $f$  uma função, a quantidade de “memória” necessária para armazenar uma representação íntegra do sinal seria basicamente infinita, dado o caráter contínuo da variável independente. Mais do que isso, ainda que essa memória hipotética fosse infinita, uma possível necessidade de lidar com seu caráter discreto exigiria processos de amostragem do sinal original, o que conseqüentemente degrada a representação final (assunto este que será abordado na Seção (3.3)). Em resumo: representar um sinal por uma função implica na admissão de que este possui resolução *infinita*, não condizendo com as limitações de qualquer sistema físico.

Uma alternativa intuitiva para se contornar a questão da resolução infinita consiste em se adotar representações de sinais em bases de funções<sup>3</sup>. Ainda se tratando de funções em última instância, a representação fica completamente descrita pelos coeficientes na base escolhida. Em outras palavras, busca-se então representar sinais como

$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t), \quad (3.5)$$

em que  $a_k \in \mathbb{C}$  e  $\phi_k$  correspondem, respectivamente, aos coeficientes e vetores de base na expansão. Pode parecer que a Equação (3.5) é simplesmente uma releitura de representação por funções, visto a presença dos vetores  $\phi_k$ . Embora correta, essa análise não contempla o

<sup>3</sup> Para adotar este tipo de representação, o sinal deve necessariamente existir num espaço de Hilbert.

verdadeiro ganho: ao invés da necessidade de infinitos pontos de um conjunto denso [43] para uma representação fiel, lida-se agora com um conjunto enumerável, ainda que eventualmente infinito. Relacionado à analogia sobre armazenamento feita anteriormente, por exemplo, uma abordagem baseada em expansões sobre uma base exigiria o registro dos coeficientes. Já sobre a finitude deste conjunto, considerações acerca de largura de banda – ou de resolução máxima atingível – devem ser estabelecidas. A Seção (3.3) também traz uma discussão sobre este tópico.

Surge agora a questão da escolha de quais vetores de base  $\phi_k$  devem ser utilizados nesta expansão. A opção de tomar esses vetores como funções ortogonais – ou seja, utilizar bases cujo produto interno entre seus vetores é dado por

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = C\delta_{m,n}, \quad (3.6)$$

em que  $C$  é uma constante e  $\delta_{m,n}$  é a delta de Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.7)$$

– tem como grande atrativo a simplificação do formalismo matemático. Existem inúmeras bases nas quais sinais podem ser representados; processos como a Ortogonalização de Gram-Schmidt são utilizados para estabelecer, de maneira generalizada, a existência dessas bases. Um exemplo prático é a representação de sinais através de polinômios ortogonais [1]: os polinômios de Legendre, cuja função geradora é dada por

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - k)^l \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

formam uma base ortonormal – tomando sua forma normalizada e sob possíveis transformações de escala – e não há nada que impeça o sinal de ser descrito pela combinação linear:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(t), \quad (3.9)$$

em que o limite de  $t$  depende da escala sendo utilizada; outros exemplos de polinômios conhecidos como os de Laguerre e de Hermite também são possíveis bases que podem ser utilizadas [15].

Porém, mesmo com toda a variedade de possíveis bases que podem ser utilizadas, duas formas específicas são frequentemente escolhidas devido a sua praticidade de aplicação em se tratando de sistemas LTI: a superposição de impulsos e as exponenciais complexas.

Descrever sinais contínuos como uma combinação de impulsos deslocados no tempo é uma aproximação extremamente útil devido ao fato de que, fazendo uso de suas propriedades, é possível derivar a representação do sinal por uma integral de convolução. Esta será fundamental para o futuro desenvolvimento e análise de sistemas LTI. Porém, antes de desenvolver esta forma de representação, é importante discutir o porquê da escolha de impulsos deslocados como funções base. Na verdade, tendo em vista o problema de resolução infinita dado o domínio contínuo do tempo, esta escolha está diretamente relacionada com o que futuramente será apresentado como o processo de amostragem na Seção (3.3); dada a impossibilidade de discretizar todos os infinitos pontos de um sinal contínuo, uma aproximação que pode ser feita é através de pulsos retangulares de largura  $\epsilon$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\epsilon)\delta_{\epsilon}(t - k\epsilon)\epsilon, \quad (3.10)$$

em que

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t < \epsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.11)$$

é uma função normalizada que modela um pulso retangular de área unitária. Sua representação para diferentes valores de  $\epsilon$  está ilustrada na Figura (2).

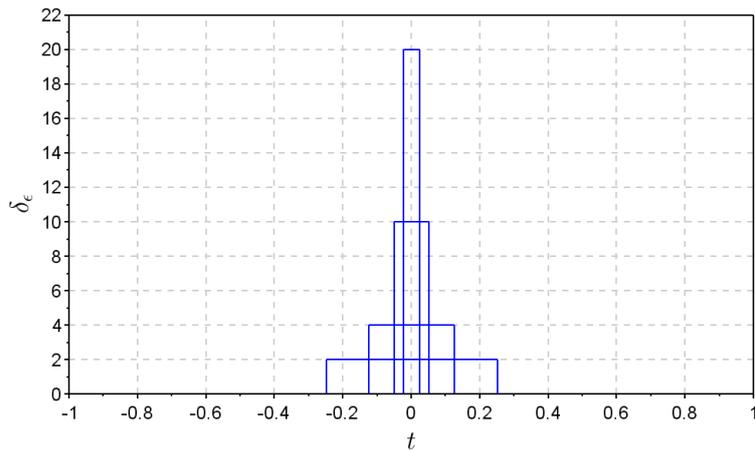


Figura 2 – Gráfico de funções de pulso retangulares para diferentes valores de  $\epsilon$ .

Assim, em um cenário idealizado, minimizar a quantidade de informação perdida significa diminuir ao máximo a largura dos pulsos. Ao tomar o limite da largura  $\epsilon \rightarrow 0$ , a definição do sinal dada pela Equação (3.10) passa a ser descrita pela integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t - t')dt', \quad (3.12)$$

em que o impulso  $\delta(t)$  é agora a delta de Dirac. A Figura (3) ilustra este tipo de representação.

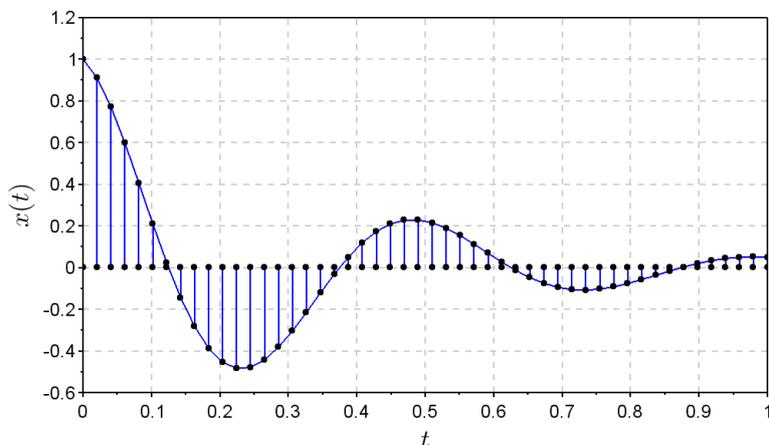


Figura 3 – Ilustração de um sinal contínuo sendo representado através de impulsos deslocados uniformemente no tempo.

Se o sistema for linear, pode-se derivar da Equação (3.1) a relação para o sinal de saída

$$\begin{aligned} y(t) &= H \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t-t') dt' \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') H \{ \delta(t-t') \} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt'. \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que  $h(t)$  é conhecida como a resposta ao impulso do sistema<sup>4</sup>. Observando a Equação (3.13), nota-se que ela é a definição de uma operação de convolução entre o sinal de entrada e a resposta ao impulso. Portanto, simbolicamente, pode-se descrever este processo como sendo

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (3.14)$$

Como sistemas lineares fazem uso da convolução, isso lhes proporciona algumas propriedades exclusivas como a comutatividade,

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') x(t-t') dt'. \quad (3.15)$$

o que mostra que o sinal de saída também pode ser calculado utilizando  $h(t)$  como entrada e  $x(t)$  como a resposta ao impulso do sistema. Sistemas LTI também possuem as propriedades distributiva,

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t), \quad (3.16)$$

e associativa,

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t). \quad (3.17)$$

Estas tratam dos casos de sistemas em série e paralelo, tal como ilustrado na Figura (4).

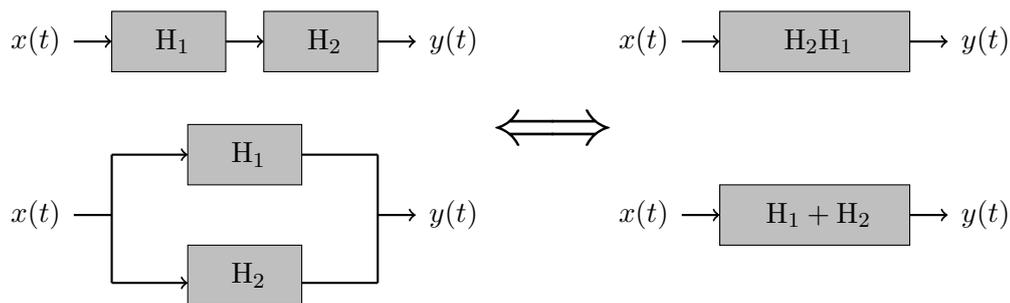


Figura 4 – Representação em diagrama de blocos de sistemas série e paralelo.

Em relação às propriedades gerais citadas na seção anterior, torna-se necessário prestar atenção a alguns detalhes. No caso da propriedade de causalidade, por exemplo, é preciso que não haja dependência do sinal de saída com nenhum termo do sinal de entrada para  $t' > t$ , ou seja,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t') h(t-t') dt' = \int_0^{\infty} h(t') x(t-t') dt'. \quad (3.18)$$

Discutida a primeira forma de representação através da sobreposição de impulsos, será apresentada outra forma muito utilizada na análise de sistemas: a síntese de Fourier. Além de

<sup>4</sup> Para sistemas LTI:  $h(t) \equiv H\{\delta(t)\}$

simplificar a manipulação matemática devido ao fato desta trabalhar com exponenciais complexas como base, seus coeficientes de série possuem interpretação clara, facilitando a leitura do comportamento do sistema. Além disso, existem vantagens de sua utilização em áreas como a computacional, onde diversos algoritmos já foram implementados e otimizados para auxiliar o processamento deste tipo de sinais. A discussão desta representação será feita a seguir.

### 3.2.1.1 Síntese e análise de Fourier

No caso da síntese de Fourier, são utilizadas como base as exponenciais complexas do tipo

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik\omega t} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.19)$$

sendo sua ortonormalidade verificada através do produto interno:

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \frac{1}{T} \langle e^{im\omega t}, e^{in\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(m-n)\omega t} dt = \delta_{mn}. \quad (3.20)$$

Este tipo de representação se aproveita da limitação do domínio das exponenciais ao eixo imaginário para representar sinais periódicos no tempo como combinações lineares de senos e cossenos. Sendo a frequência fundamental relacionada ao período da função por  $\omega_0 = 2\pi/T$ , um sinal periódico pode então ser escrito como:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{ik\omega_0 t} \quad (\text{série de Fourier}) \quad (3.21)$$

sendo  $a_k$  os coeficientes espectrais do sinal que são calculados através de

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt. \quad (3.22)$$

Em se tratando de análise de sistemas, repare que, a partir da Equação (3.15), dado um sinal de entrada descrito por uma série de Fourier, obtém-se como sinal de saída

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \left\{ \sum_k a_k e^{ik\omega_0(t-t')} \right\} dt' \\ &= \sum_k a_k e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-ik\omega_0 t'} dt' \\ &= \sum_k a_k H(ik\omega_0) e^{ik\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que  $H(ik\omega_0)$  é uma constante complexa. A Equação (3.23) mostra que exponenciais complexas são, na verdade, autovetores de sistemas LTI. Com isso, o interesse principal de representar sinais como séries de Fourier parte da possibilidade de representar ambos os sinais de entrada e saída através da mesma base de funções. Isso significa que não só a saída também é um sinal periódico, mas esta possui a mesma frequência fundamental do sinal de entrada. A diferença que se deve notar está nos coeficientes espectrais da série: para a saída, o sistema modifica cada coeficiente da entrada  $a_k$  através de uma multiplicação por um número complexo dado por  $H(ik\omega)$ . Isso introduz a ideia de que o comportamento da frequência de certos sinais pode ser manipulado dependendo da resposta em frequência do sistema. Em outras palavras, este processo de manipulação introduz a ideia de filtragem de sinais.

Para sinais que não são periódicos, a representação em somatório passa a ser inviável porque surgem valores de frequência que não são múltiplos da frequência fundamental. Torna-se necessária, portanto, uma generalização da representação [54] e os sinais passam a ser descritos por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.24)$$

sendo

$$X(i\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{transformada de Fourier}), \quad (3.25)$$

que também recebe o nome de espectro de  $x$ .

Dado que a síntese de Fourier pode ser utilizada na representação de ambos os sinais finitos e infinitos, torna-se importante discutir os critérios de convergência deste tipo de transformada. Já que a exponencial é complexa, cai sobre a função que está sendo transformada a análise que deve ser feita. A condição que normalmente é imposta é a de que esta seja absolutamente integrável [15], ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (3.26)$$

Em relação às propriedades desta representação, alguns exemplos básicos são a linearidade, o deslocamento no tempo e na frequência, a relação de diferenciação, entre outros. Sendo uma ferramenta matemática de extrema importância, é possível encontrar facilmente provas e exemplificações de cada propriedade na literatura [15, 2].

Apresentada a representação de sinais aperiódicos através da transformada de Fourier, é possível se utilizar de suas propriedades para uma melhor análise no caso de sistemas LTI. Da Equação (3.13), pode-se determinar o espectro do sinal de saída – fazendo uso da propriedade de deslocamento temporal – ao calcular:

$$\begin{aligned} Y(i\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt' \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') H(i\omega) e^{-i\omega t'} dt' \\ &= H(i\omega) X(i\omega). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Esta é uma das propriedades mais importantes e que será utilizada com frequência durante este trabalho: a propriedade da convolução. A Equação (3.27) revela a seguinte relação entre os domínios do tempo e da frequência para sistemas LTI:

$$y(t) = h(t) * x(t) \iff Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega), \quad (3.28)$$

ou seja, a partir do momento que o sistema pode ser descrito como uma convolução de sua resposta ao impulso com o sinal de entrada, seu comportamento é descrito pela multiplicação direta das suas respectivas transformadas de Fourier no domínio da frequência. Pode-se, portanto, relacionar a entrada e a saída de um sistema LTI pela chamada função de transferência:

$$H(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}. \quad (3.29)$$

Este será um dos conceitos fundamentais que serão utilizados no desenvolvimento analítico do trabalho.

### 3.2.1.2 Transformada de Laplace

Até este ponto, a representação de sinais via síntese de Fourier foi discutida em detalhes já que esta oferece ferramentas matemáticas muito úteis na análise de sistemas lineares. A dualidade tempo-frequência introduzida pela abordagem de transformadas auxilia na interpretação da informação sendo transmitida dentro destes sistemas, viabilizando uma melhor compreensão sobre o modo como estes se comportam. No entanto, certas condições de convergência que já foram discutidas nas seções anteriores devem ser respeitadas para que este tipo de representação possa ser utilizada, limitando o número de diferentes tipos de sinais que podem ser estudados através desta abordagem. Tomando como motivação a possibilidade de aumentar esta classe limitada de sinais, pode ser feita uma generalização da transformada de Fourier onde a variável de integração não precisa, necessariamente, ser puramente imaginária.

No caso contínuo, esta generalização leva à transformada de Laplace. Definida por

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (3.30)$$

esta também recebe o nome de transformada bilateral devido aos seus limites de integração.

Ao reescrever  $s$  em função de suas componentes real e imaginária, tem-se que a Equação (3.30) se torna

$$X(\alpha + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\alpha t}] e^{-i\omega t} dt. \quad (3.31)$$

Uma comparação entre as duas transformadas pode ser feita mais claramente através da Equação (3.31). Note que a transformada de Laplace pode ser interpretada como a transformada de Fourier do sinal  $x(t)$  multiplicado por uma exponencial real cujo comportamento depende diretamente da componente  $\alpha = \Re\{s\}$ . É exatamente a presença desta exponencial que faz com que uma gama maior de sinais possa desfrutar deste tipo de representação já que as condições de convergência deixam de ser impostas exclusivamente sobre o sinal e passam a ser impostas sobre o produto  $x(t)e^{-\alpha t}$ . Conseqüentemente, a presença desta exponencial modulando o sinal pode forçar a convergência de sinais que sozinhos não são absolutamente integráveis, viabilizando a representação via síntese de Fourier para casos onde antes esta não era possível ser realizada.

Assim sendo, a transformada de Laplace exige uma análise mais rigorosa sobre o problema sendo estudado dado que somente sua expressão algébrica não é o suficiente para descrevê-la de forma completa. É preciso também especificar a chamada região de convergência ROC (do inglês *region of convergence*), sendo esta a região no plano complexo que contém os valores de  $s$  para os quais a transformada de Fourier de  $x(t)e^{-\alpha t}$  converge. Com esta informação completa, um sinal contínuo pode ser descrito pela transformada inversa de Laplace de modo que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X(s)e^{st} ds, \quad (3.32)$$

em que o contorno de integração é uma reta paralela ao eixo imaginário que obrigatoriamente deve estar contida na ROC. Discussões mais aprofundadas sobre o tópico e suas propriedades podem ser facilmente encontradas na literatura [15, 2].

Já para a análise de sistemas LTI, é possível derivar a propriedade de convolução tal como apresentada na Equação (3.28) também para o caso de Laplace. Com isso, o sistema pode ser descrito pela relação

$$Y(s) = H(s)X(s). \quad (3.33)$$

Devido às propriedades desta transformada, é muito útil utilizá-la principalmente porque, através de manipulações algébricas no domínio da frequência, é possível reorganizar termos de modo a facilitar a interpretação do comportamento do sistema [54].

### 3.3 Sistemas lineares em domínio discreto

#### 3.3.1 Amostragem de sinais contínuos

Em se tratando de processamento digital, a utilização dos conceitos para sinais e sistemas tais como foram retratados no caso contínuo se torna inviável devido ao fato de que computadores simplesmente não são capazes de interpretar esta forma de representação. Torna-se necessário, portanto, que seja feita uma tradução dos sinais que são contínuos por natureza para o domínio discreto quando existe o interesse de que estes sejam processados computacionalmente. Assim, para que a perda de informação e os erros que são inevitavelmente introduzidos sejam minimizados, é preciso ter uma boa compreensão deste processo de transição entre os domínios.

Como é usualmente utilizada a variável independente  $t$  em domínio contínuo, será utilizada a variável  $n$  – identificando a ligação direta com a posição dentro de uma representação vetorial – para o caso de sinais discretos. Portanto, a Equação (3.1) se torna:

$$y_n = y[n] = H\{x_n\} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.34)$$

em que  $x_n$  e  $y_n$  são agora sequências numéricas infinitas, *i.e.*,  $x_n \equiv [\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots]$ .

Dado o grande interesse em sistemas LTI no presente estudo, tem-se também que as propriedades de linearidade e invariância ao deslocamento mostradas nas Equações (3.2) e (3.4), respectivamente, podem ser reescritas como

$$H\{ax_{1n} + bx_{2n}\} = ay_{1n} + by_{2n} \quad \text{e} \quad H\{x_{n \pm n_0}\} = y_{n \pm n_0}, \quad (3.35)$$

em que  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Retoma-se, portanto, a questão da representação de sinais de natureza contínua dado que estes são grande maioria em sistemas físicos reais. Tal como foi discutido na Seção (3.2), o processo de amostragem será o responsável pela comunicação entre as representações contínua e discreta. Neste caso, considerando um sinal  $x_a(t)$ <sup>5</sup>, é possível derivar um sinal discreto a partir de amostras deste sinal original por meio de

$$x_n = x_a(nT_s), \quad (3.36)$$

ou seja, o sinal é discretizado periodicamente por um determinado intervalo de tempo  $T_s$  que recebe o nome de período de amostragem. De forma recíproca, tem-se que a frequência de amostragem do sinal é dada por

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad \text{ou} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s, \quad (3.37)$$

sendo a primeira dada em amostras por segundo e a segunda em radianos por segundo [53].

<sup>5</sup> A letra  $a$ , neste caso, vem de analógico. Este termo é comumente utilizado para descrever um sinal que é contínuo no tempo.

Dada esta comunicação entre representações, surge a dúvida em relação à invertibilidade deste tipo de processo. Em outras palavras, questiona-se a possibilidade de recuperar o sinal contínuo original a partir de um sinal amostrado já que, dependendo da frequência de amostragem escolhida, é possível derivar um mesmo sinal discreto a partir de diversos sinais contínuos diferentes. Além disso, num cenário prático do ambiente computacional, o processamento digital exige um número finito de amostras, o que gera um dos principais problemas na discretização de sinais: tomar um número muito pequeno de pontos na amostragem pode resultar em uma representação pobre do sinal original. Conseqüentemente, torna-se impossível recuperá-lo a partir do sinal discretizado. Para tratar destes problemas, será apresentado o Teorema da Amostragem, porém, é preciso que antes o seguinte conceito seja discutido para uma melhor compreensão do teorema: o conceito de largura de banda. Em suma, esta é a faixa de frequência dos componentes espectrais de um sinal que contém a maior parte de sua energia [69]. Isso faz com que determinar o limite dessa faixa seja um tanto subjetivo; por fins de exemplificação, tome o caso da largura de banda de 3dB [53] em que as frequências que limitam a largura  $B$  da banda são os pontos em que a densidade espectral do sinal atinge a metade do valor seu máximo. Além disso, ela é diretamente relacionada com a resolução do sinal no domínio do tempo.

Considerando a discussão acima, o Teorema da Amostragem (vide Apêndice A) dita que, dado um sinal contínuo limitado em banda onde o espectro é  $X(i\omega)=0$  para todo  $|\omega| > \omega_B$  pode ser recuperado de forma completa após sua discretização se

$$\omega_s \geq 2\omega_B. \quad (3.38)$$

No caso em que  $\omega_s = 2\omega_B$ , esta é chamada de frequência de Nyquist [53, 54]. Com isso, este teorema é de extrema importância na determinação da frequência de amostragem que deve ser utilizada na discretização, tornando possível uma tradução fidedigna entre estes sinais de naturezas diferentes. Repare que existe apenas um limite inferior na Equação (3.38); a inexistência de um limite superior oferece uma liberdade de escolha que deve ser discutida. De forma direta, quanto maior for o número de pontos sendo utilizado na representação (maior frequência), mais próximo do sinal original se chega e, conseqüentemente, maior é a quantidade de informação que se recupera do sinal. Porém, deve-se também levar em conta as limitações físicas dos computadores, especialmente no caso da memória necessária para o armazenamento destes sinais. Repare que a análise do Teorema de Amostragem foi toda feita no domínio da frequência e, como foi mostrado no estudo de sinais no domínio contínuo, isto está diretamente ligado com a síntese de Fourier e Laplace. Dessa forma, será discutido a seguir como esta análise pode ser estendida para o caso de sinais discretizados.

### 3.3.2 Transformada Z

Para sinais discretos  $x_n$ , a transformada de Laplace dá lugar à transformada Z sendo esta definida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.39)$$

em que, assim como no caso de Laplace, esta forma é conhecida como transformada bilateral [53]. Para observar sua relação com a síntese de Fourier, pode-se escrever  $z$  em sua forma polar

de modo que a Equação (3.39) se torna

$$X(re^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n r^{-n}) e^{-i\omega n}. \quad (3.40)$$

Através dessa notação é possível observar que a transformada discreta de Fourier que será discutida a seguir é o caso específico onde  $|z| = 1$ , ou seja, quando  $z$  está limitado ao círculo unitário.

Assim como foi discutido para sinais em domínio contínuo, a questão da convergência da transformada passa a depender não somente do sinal, mas sim de que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n r^{-n}| < \infty. \quad (3.41)$$

Porém, diferentemente do caso contínuo onde a dependência de uma possível convergência estava relacionada com a parte real da transformada de Laplace contínua, agora esta dependência se encontra relacionada com a magnitude  $r$  da variável  $z$ . Do ponto de vista do plano complexo, os valores de  $r$  em que a transformada  $Z$  converge formam a chamada região de convergência ROC – assim como acontece para os valores de  $s$  no caso de Laplace. Esta região está ilustrada na Figura (5) de forma generalizada para o caso da transformada  $Z$  bilateral.

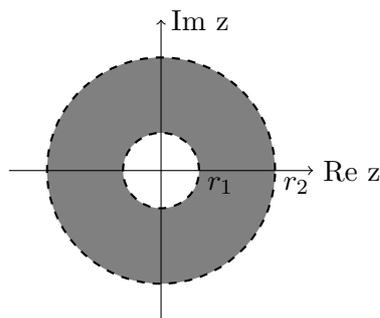


Figura 5 – Gráfico da região de convergência da transformada  $Z$  bilateral.

De maneira geral, a série converge dentro dos limites  $r_1 < |z| < r_2$ . Identificando que a definição dada pela Equação (3.39) é na verdade uma série de Laurent, pode-se fazer uso de suas propriedades para determinar os raios  $r_1$  e  $r_2$  da região de convergência [21]. Em se tratando do caso bilateral, tem-se que estes raios são dados por:

$$r_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \quad \text{e} \quad r_2 = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|. \quad (3.42)$$

Assim, faz-se necessário que a ROC seja bem definida para determinar a transformada de qualquer sequência. Dado que sequências diferentes podem apresentar resultados algébricos idênticos, é através de suas ROCs que elas podem ser diferenciadas umas das outras. As propriedades da ROC e da transformada  $Z$  em geral estão listadas em [53].

Formalmente, a transformada  $Z$  inversa pode ser calculada através de

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (3.43)$$

em que  $C$  é um contorno fechado dentro da ROC. Contudo, este método não é único. Em se tratando da análise de sistemas lineares, saber transitar entre os domínios tempo-frequência é

de extrema importância, independentemente do tipo de transformada sendo utilizada. No caso da transformada Z, existem métodos alternativos de maior simplicidade que podem ser usados; entre eles, o que aparecerá de forma recorrente durante o desenvolvimento do trabalho será a expansão em frações parciais [53]. Assumindo que o espectro discreto do sinal pode ser escrito como uma razão de polinômios da forma:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad (3.44)$$

é possível determinar sua transformada inversa ao expandi-la algebricamente em frações parciais, gerando assim termos individuais mais simples de transformadas inversas já conhecidas.

Por fim, relacionado a sistemas LTI, o interesse na utilização desta representação aparece principalmente quando o sistema sendo estudado pode ser caracterizado por uma equação de diferenças onde os sinais de entrada e saída estão relacionados por:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} - \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k} = 0. \quad (3.45)$$

Fazendo uso das propriedades de linearidade e deslocamento no tempo, a aplicação da transformada Z na equação acima resulta em

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{Z}\{y_{n-k}\} - \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} - X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = 0, \quad (3.46)$$

de onde se encontra a relação para a função de transferência do sistema:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (3.47)$$

O resultado apresentado na Equação (3.47) é o motivo pelo qual esta forma de representação é tão importante. Note que o sistema é caracterizado inteiramente pelos coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  da equação de diferenças. Estes coeficientes não apenas ditam a forma como os sinais de entrada e saída se relacionam; manipula-los e aplicar a transformada inversa sobre a função de transferência resultante significa que sistemas com comportamentos específicos podem ser projetados. Esta é a base utilizada na projeção de filtros de resposta ao impulso infinita que serão discutidos futuramente.

### 3.3.3 Transformada discreta de Fourier

Tal como foi feito na Seção anterior, é possível representar sinais periódicos através de uma combinação linear de exponenciais complexas. Porém, como agora se tratam de sinais cuja variável independente é discreta, a necessidade de representá-los através de séries infinitas desaparece. Assim, ao utilizar sinais-base do tipo

$$\phi_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik(2\pi/N)n} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.48)$$

sendo  $N$  o período fundamental, um sinal periódico  $x_n$  pode ser descrito pela série

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{ik(2\pi/N)n} \quad (3.49)$$

de modo que, fazendo uso da ortonormalidade da base, os coeficientes da série são determinados através de

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-ik(2\pi/N)n}. \quad (3.50)$$

Também de forma análoga, estes são conhecidos como os coeficientes espectrais do sinal. É preciso, contudo, chamar a atenção para o seguinte detalhe desta representação:

$$a_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i(k+N)(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x_n e^{-ik(2\pi/N)n}) e^{-2\pi in} = a_k. \quad (3.51)$$

Ou seja, dada a periodicidade de um sinal em tempo discreto, seus coeficientes espectrais também apresentam um comportamento periódico. Isso significa que, para valores de  $k$  maiores que o período, os coeficientes  $a_k$  passam a se repetir. Portanto, ao representar o sinal através da Equação (3.49), são obtidos exatamente  $N$  coeficientes espectrais distintos e, dado que ambas são sequências periódicas, surge então uma dualidade entre os domínios do tempo e da frequência do sinal representado [53].

Já para as propriedades da representação por séries de Fourier, grande parte das que foram citadas na Seção anterior continuam sendo válidas tais como a linearidade e deslocamentos no tempo e na frequência. Existem, porém, propriedades que diferem os casos entre si; um exemplo importante que ilustra esta distinção é a propriedade de multiplicação. Esta diz que, dado dois sinais periódicos em tempo discreto  $x_1$  e  $x_2$ , ambos com mesmo período fundamental  $N$  e coeficientes espectrais  $a_k$  e  $b_k$ , respectivamente, o produto entre eles também é periódico em  $N$  e seus coeficientes espectrais  $c_k$  são dados pela convolução dos coeficientes dos sinais originais, ou seja,

$$x_{1n} x_{2n} \longleftrightarrow c_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l}. \quad (3.52)$$

Esta relação entre os coeficientes que já foi introduzida na Equação (3.28) acontece devido a propriedade da convolução. A diferença é que agora o somatório é limitado a um intervalo de tamanho  $N$  e, por isso, recebe o nome de convolução periódica [53].

Seguindo o desenvolvimento, esta representação pode ser generalizada de modo que sinais em tempo discreto que não são periódicos também possam ser descritos como combinação linear de exponenciais complexas. Forçando a periodicidade do sinal e tomando o limite de  $N \rightarrow \infty$ , o sinal passa a ser escrito como:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (3.53)$$

em que seu espectro

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega n}, \quad (3.54)$$

é calculado através da chamada transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT, do inglês *discrete-time Fourier transform*). Assim como era desejado, o sinal apresentado pela Equação

(3.53) é uma combinação linear de exponenciais complexas infinitesimalmente espaçadas. Outro detalhe importante que deve ser mencionado é o limite de integração do sinal que deve ser sempre um intervalo na frequência de tamanho  $2\pi$ ; isso se dá devido ao fato de que

$$X(e^{i(\omega+2\pi)}) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega n} \right) e^{-2\pi i n} = X(e^{i\omega}), \quad (3.55)$$

ou seja, a DTFT é sempre periódica com período de  $2\pi$  e toda a informação sobre os componentes de frequência do sinal está contida dentro deste intervalo. Esta restrição no limite de integração é que diferencia a DTFT da definição usual da transformada apresentada na Equação (3.25). O resultado da Equação (3.53) pode também ser derivado através da transformada Z [21]. Como foi citado anteriormente, a DTFT é um caso especial onde  $z = e^{i\omega}$ . Com isso, ao calcular a transformada inversa de um sinal discreto  $x_n$  dada pela Equação (3.43) e limitar seu contorno ao círculo unitário, deriva-se o resultado

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{z=e^{i\omega}} X(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega(n-1)} i e^{i\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega, \end{aligned} \quad (3.56)$$

concordando com o resultado já apresentado.

Contudo, mesmo que o sinal esteja discretizado no tempo, a representação por DTFT ainda é inviável num ambiente computacional. Isso se dá devido ao seguinte fato: para ser processado digitalmente, o sinal deve ser necessariamente discreto e finito em todos os aspectos. A representação apresentada nas Equações (3.53) e (3.54) falha em ambas as exigências já que o domínio da frequência permanece contínuo e a presença da integral implica diretamente em um número infinito de termos. Existe, entretanto, uma solução prática para este problema: discretizar uniformemente a frequência do sinal.

Levando em consideração sua periodicidade, a discretização no domínio da frequência pode ser feita de maneira direta através de  $X(e^{i\omega})$ , de modo que é possível reescrever sua definição utilizando as frequências discretas

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.57)$$

Assim, o espectro discreto do sinal passa a ser dado por:

$$X(e^{i(2\pi/N)k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i(2\pi/N)kn} \quad (3.58)$$

em que  $0 \leq k \leq N-1$  tem que ser limitado devido ao fato de que  $x_n$  é finito. Analogamente, a inversa da transformada discreta (IDFT) é dada por

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{i(2\pi/N)k}) e^{i(2\pi/N)kn}. \quad (3.59)$$

Relacionado ao número de elementos da DFT, tem-se que quanto maior for  $N$ , mais próxima esta fica da Transformada de Fourier [21]. Por outro lado, em se tratando de recursos

computacionais para a realização do processo, isso também faz com que este seja mais custoso. Mais uma vez, é preciso sempre levar em consideração o peso computacional que a exigência de qualidade inevitavelmente gera no processo.

O efeito da discretização resulta em algumas particularidades que devem ser tratadas com atenção. Assim como foi discutido no início da Seção onde se tem o Teorema da Amostragem para garantir a recuperação completa de um sinal contínuo a partir de um sinal amostrado, o mesmo cuidado deve existir para a DFT. Métodos como o de *zero-padding*<sup>6</sup> – que deve ser utilizado quando o número de elementos do sinal e da DFT não são iguais [21] –, por exemplo, surgem devido a estas particularidades. Outra situação que deve ser considerada quando se utiliza a versão completamente discretizada da transformada de Fourier é sua propriedade de convolução periódica herdada da DTFT; o produto de duas DFTs no domínio da frequência é equivalente a uma convolução periódica no domínio do tempo circular, ou seja,

$$\sum_{l=0}^{N-1} x_{1l} x_{2(n-l)_N} = \sum_{l=0}^{N-1} x_{1(n-l)_N} x_{2l} \iff X_1(k) X_2(k). \quad (3.60)$$

Porém, é preciso que esta convolução seja linear para que seja feita a análise de sistemas LTI; devem ser aplicados, portanto, métodos para a implementação da convolução linear para a DFTs [21].

Mesmo sendo uma ferramenta poderosa, a DFT em si não é um método eficiente. Dado o fato de que seu algoritmo tem complexidade  $O(N^2)$ , seu limite prático fez necessário que surgisse a chamada FFT (do inglês *fast Fourier transform*) cuja complexidade  $O(N \log_2 N)$  viabilizou a implementação da DFT em diversas aplicações [21]. Hoje, existem vários tipos diferentes de algoritmos para a implementação da FFT, os quais podem ser encontrados na literatura [21].

### 3.3.4 Filtros lineares

Em um cenário de aplicações práticas, muitas vezes se tem interesse em alterar o conteúdo de frequência de sinais, seja isto através de atenuações, amplificações ou até mesmo em eliminar por completo uma determinada faixa de frequência. Este processo de modelagem do perfil espectral de sinais recebe o nome de filtragem.

Como foi mostrado nas seções anteriores, utilizar representações via transformadas – sejam estas Fourier, Laplace ou Z – em sistemas lineares introduz diretamente a ideia de filtragem, além de oferecer as ferramentas necessárias para determinar a resposta ao impulso que resulta no comportamento desejado do sistema. Com isso, serão introduzidos agora os conceitos básicos e a estrutura de dois tipos de filtros lineares que serão implementados no próximo Capítulo: os filtros de resposta ao impulso finita (FIR, do inglês *finite impulse response*) e os filtros de resposta ao impulso infinita (IIR, do inglês *infinite impulse response*).

Filtros de resposta ao impulso finita, também conhecidos como filtros não-recursivos, tem como característica principal o fato de que seus valores de saída são calculados utilizando apenas valores de entrada. Fazendo uso da representação através de equações de diferenças, a Equação

<sup>6</sup> Ação de completar com zeros as entradas de um vetor de forma que a DFT passe a ter  $M$  elementos, dos quais  $M - N$  são deliberadamente nulos.

(3.45) para filtros FIR se torna

$$y_n = \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k}. \quad (3.61)$$

Dessa forma, segundo as propriedades de sistemas lineares, a resposta ao impulso deste sistema está relacionado diretamente com os coeficientes  $b_k$  da entrada, ou seja,

$$h(k) = b_k. \quad (3.62)$$

Sendo assim, a função de transferência que relaciona os espectros de entrada e saída do filtro é dada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^M h_k z^{-k}. \quad (3.63)$$

Já o segundo tipo de filtros que será discutido abrange filtros de resposta ao impulso infinita. Diferente dos filtros FIR, estes dependem tanto de valores de entrada quanto de valores de saída anteriores. Reescrevendo a Equação (3.47) por motivos de conveniência, a função de transferência para este caso é dada por:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}.$$

Naturalmente, a presença de zeros e pólos em  $H(z)$  deve ser analisada já que estes desempenham papel relevante na estrutura do sistema modelado, especialmente relacionado com a estabilidade do filtro sendo projetado [53].

Em termos práticos, implementar filtros lineares pode ser feito de diversas formas. Por exemplo, filtros não-recursivos podem ser implementados por técnicas analíticas ou diretamente por janelamento no domínio da frequência. Já para o caso de filtros IIR, existem métodos diretos e indiretos usando funções densidades espectrais e filtros contínuos ideais [70].

O design “analítico” se dá através da inversão de uma transformada Z; isto é, se a função de transferência  $H(z)$  for conhecida, basta, em princípio, realizar uma inversão para que os coeficientes do filtro sejam obtidos. Embora direta, esta abordagem não é das mais simples, visto que:

- a relação entre os sinais de entrada e saída pode não ser conhecida *a priori*; ou
- a expressão de  $H(z)$  pode ser rebuscada o suficiente para que se desencoraje o processo de inversão.

Como exemplo dessa abordagem, suponhamos que se queira projetar um filtro passa-altas com magnitude da resposta em frequência  $|H(e^{j\omega})|^2$  dada por

$$|H(e^{j\omega})|^2 = 4 \sin^2 \left( \frac{\omega}{2} \right), \quad (3.64)$$

cujo perfil é mostrado na Figura (6).

Deve-se notar que a resposta em frequência dada pela Equação (3.64) não traz informação alguma sobre a fase do sistema. Para uma completa descrição do filtro, a forma com que as

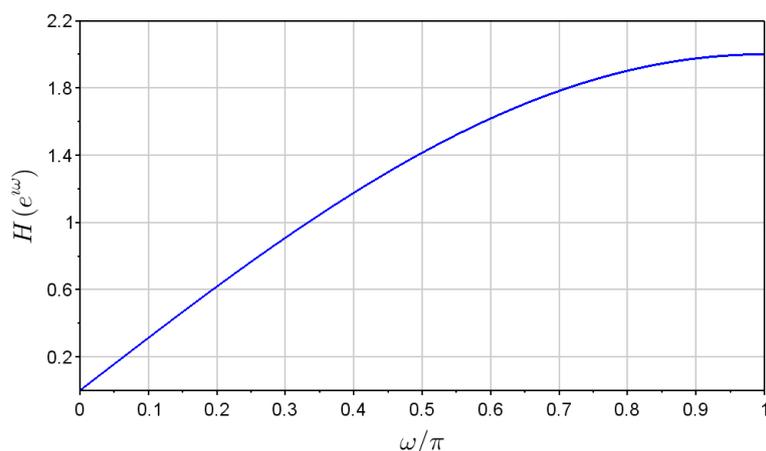


Figura 6 – Resposta em frequência do filtro passa-altas considerado.

componentes espectrais são defasadas também é relevante. Tal informação é dada pela fase  $\phi(\omega)$  e será arbitrada<sup>7</sup> nesse exemplo como

$$\phi(\omega) = -\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}. \quad (3.65)$$

De posse das Equações (3.64) e (3.65), tem-se que

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}, \quad (3.66)$$

o que nos informa imediatamente a função de transferência do sistema:

$$H(e^{j\omega}) \equiv H(z)|_{z=e^{j\omega}} \Rightarrow H(z) = 1 - z^{-1}. \quad (3.67)$$

Devido à propriedade de deslocamento da transformada Z e do fato de que  $H(z) = Y(z)/X(z)$ , tem-se finalmente que

$$y_n = x_n - x_{n-1}, \quad (3.68)$$

que corresponde a um diferenciador causal de primeira ordem.

Conforme dito no início da Seção, o que se chama aqui de “design analítico” de um filtro é, no final das contas, a adaptação de um filtro analógico para o cenário digital, de modo que o procedimento padrão, omitido no exemplo considerado, parte do estabelecimento da Transformada de Laplace para o sistema considerado [46]. A função de transferência associada a esta Transformada de Laplace é denominada *protótipo de filtro* [46] e pode ser usada de mais de uma maneira para fins de design, tais como via método de invariância ao impulso e transformação bilinear [21, 46], a serem discutidos a seguir.

<sup>7</sup> A aparente arbitrariedade na escolha da fase nesse exemplo reflete o fato de que, corriqueiramente, considera-se mais importante o efeito da filtragem sobre a magnitude do sinal do que propriamente sobre a fase. De fato, uma gama enorme de processos de medida simplesmente ignora a questão da fase: detectores CCD, CMOS, o olho humano etc. não respondem a alterações na fase. De todo modo, esta carrega consigo informação relevante em certos contextos, tais como em imageamento de super-resolução [27]. Por fim, a escolha por uma fase linear também é realizada buscando-se uma distorção mínima no sinal de saída, já que o retardo de grupo nesse caso é constante [21, 53].

### 3.3.4.1 Invariância ao impulso

O método da invariância ao impulso é bastante direto: busca-se amostrar a resposta ao impulso do protótipo contínuo [21, 46]:

$$y(t) = \int x(t')h(t-t')dt' \quad \Rightarrow \quad y_n = T_s \sum_m x_m h_{n-m}. \quad (3.69)$$

Vê-se pela Eq. (3.69) que, na prática, lida-se no método de invariância ao impulso com a amostragem da resposta ao impulso  $h(t)$ . Note que esta pode ser uma estratégia inapropriada, a depender do filtro. A exemplo do filtro diferenciador tratado acima, tem-se que sua resposta ao impulso é dada por

$$h(t) \equiv -\frac{d\delta}{dt}(t), \quad (3.70)$$

pois

$$y(t) = \frac{dx}{dt}(t) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = -\int x(t')\frac{d\delta}{dt'}(t-t')dt'. \quad (3.71)$$

As derivadas da delta de Dirac envolvidas nas Equações (3.70) e (3.71) só podem ser tratadas no sentido de distribuição [15, 2], tornando abstrato um problema razoavelmente concreto. Ademais, questões acerca da amostragem em si devem ser consideradas: se a resposta  $h$  possuir uma energia considerável nas altas frequências, a replicação espectral (vide Apêndice A) poderá levar ao mascaramento do sinal<sup>8</sup>.

É construtivo considerar mais um exemplo: o filtro integrador. Uma vez que este é um dos pontos centrais deste trabalho – fato que será discutido em maiores detalhes no próximo capítulo –, faz-se necessário detalhar sua obtenção pelo método de invariância ao impulso. O sistema em questão tem a forma

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t')dt', \quad (3.72)$$

que pode ser posto na forma convolucional

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')u(t-t')dt', \quad (3.73)$$

em que  $u(t)$  é a função degrau-unitário ou de Heaviside. Por meio da Equação (3.73), vê-se que a resposta ao impulso do sistema é justamente a função degrau. Procedendo agora com a amostragem dessa função, esta leva a uma representação da forma

$$h_n = \sum_{m=0}^n \delta_{n-m}, \quad (3.74)$$

em que  $\delta$  remete agora à Delta de Kronecker. Nota-se na Equação (3.74) uma analogia clara com a versão contínua da função degrau, já que esta pode ser aproximada, à luz da Teoria de Distribuições [15, 2], à integral da Delta de Dirac.

<sup>8</sup> O *aliasing* é, na prática, uma ocorrência no método de invariância ao impulso, uma vez que muito dificilmente a função de transferência de um sinal contínua terá largura de banda estritamente finita; ou, alternativamente, os sinais considerados terão duração *ilimitada*.

O passo seguinte consiste em se tomar a transformada Z de  $h$ , o que leva a

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n \delta_{n-m} \right) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
 &= \frac{z}{z - 1},
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

cuja ROC é o conjunto  $\text{ROC}(z) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$ , mostrada na Figura (7). Isto pode ser verificado pelo fato de que  $H(z)$  é, no final das contas, uma série geométrica em que são somados termos da forma  $(z^{-1})^n$ .

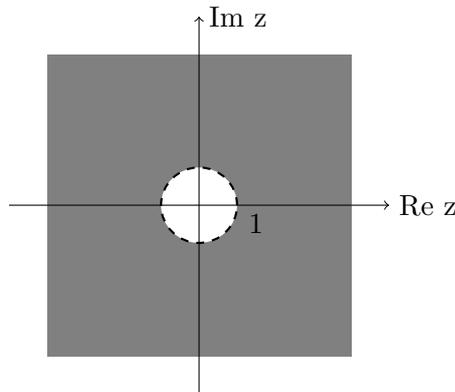


Figura 7 – Região de convergência do integrador  $\{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$ , destacada em azul.

De fato, os coeficientes do filtro já foram determinados prontamente após a amostragem da função degrau (vide Equação (3.74)). Resta, portanto, verificar a resposta em frequência do sistema. Para tanto, avalia-se a Equação (3.75) em  $z = e^{i\omega}$ . Nesse caso, obtém-se

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{2} \csc\left(\frac{\omega}{2}\right) \exp\left[i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{3.76}$$

cujas representações gráficas é mostrada na Figura (8).

De acordo com o desenvolvimento nesse exemplo, deve-se chamar atenção a dois detalhes relevantes:

1. o filtro integrador é um passa-baixas suave, cujo comportamento se assemelha a um sistema do tipo  $1/\omega$ ; e
2. há na origem uma descontinuidade de segunda espécie, violando frontalmente os requisitos de um sistema estável.

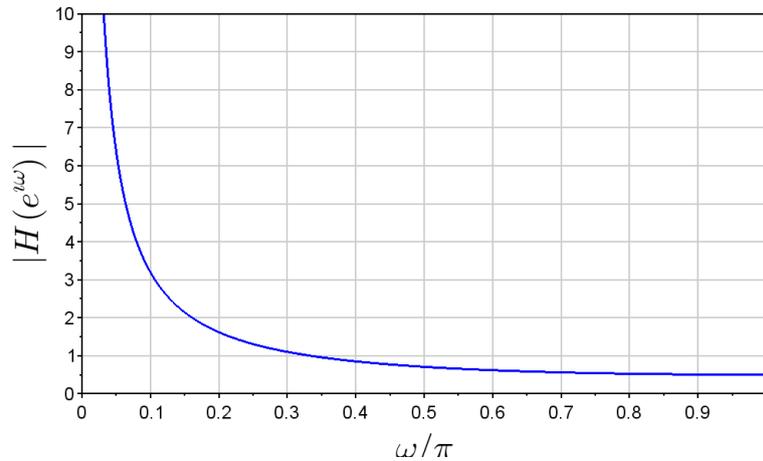


Figura 8 – Resposta em frequência do filtro integrador.

Sobre a segunda observação, deve ser notado que a ROC do filtro integrador não contempla o círculo de raio unitário, de modo que não se assegura a estabilidade do sistema <sup>9</sup>. Com isso, a resposta em frequência não deveria ser obtida sempre, já que demanda a avaliação da função sobre  $z = 1$ . De todo modo, uma vez que o sistema não é necessariamente instável, a resposta em frequência ajuda a entender como o espectro do sinal de entrada seria modulado, em caso de estabilidade condicional.

### 3.3.4.2 Transformação bilinear

A idéia do método da transformação bilinear [53, 21, 46] consiste em se mapear o plano complexo onde reside a ROC de  $H(s)$  para o plano em que reside  $H(z)$ . Isto é, busca-se um mapeamento de um semi-plano ao círculo de raio unitário, de forma que sejam preservadas as características de estabilidade e de resposta em frequência. Resumidamente, busca-se uma transformação que mapeie

$$\Omega \in (-\infty, \infty) \quad \Rightarrow \quad \omega \in (-\pi, \pi], \quad (3.77)$$

em que  $\Omega$  é o que se costuma chamar *frequência analógica*. O mapeamento mostrado na Equação (3.77) deve ser claramente não-linear, de forma que são esperadas distorções no eixo das frequências (*frequency warping*) [53, 21, 46]. De fato, mostra-se [62] que  $s$  e  $z$  devem ser relacionadas por

$$s \mapsto \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (3.78)$$

em que o fator  $T_s$  foi inserido como um reminescente das aplicações em métodos de integração numérica viabilizadas pela transformada Z [62, 57].

Embora pouco visual, a relação mostrada na Equação (3.78) mapeia o eixo imaginário no plano  $s$  ao perímetro do círculo de raio unitário no plano  $z$ . Para verificar isso, basta desenvolver

<sup>9</sup> Mesmo frente a esta questão da não-garantia de estabilidade, não seria certo concluir que o sistema é instável. De fato, o integrador é um filtro *marginalmente estável*, cuja evolução pode ser marcada por fortes oscilações e divergências, a depender das condições impostas ao sistema. Por fim, saliente-se que *estratégias de estabilização* [10] podem ser empregadas para se controlar o sistema.

a equação em questão usando  $z = \exp(i\omega)$  e  $s = i\Omega$  [21, 62]:

$$\Omega \mapsto \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (3.79)$$

cuja representação gráfica pode ser vista na Figura (9).

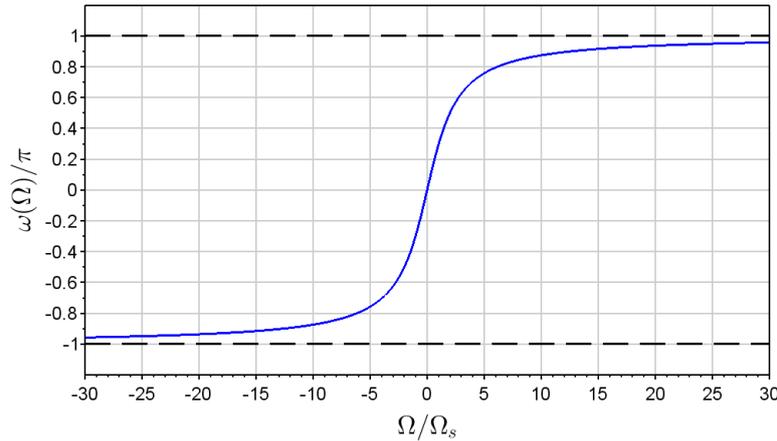


Figura 9 – Distorção entre as frequências  $\Omega$  e  $\omega$ . Note que para baixas frequências, ainda é possível manter uma relação quase-linear entre as duas grandezas.

### 3.3.5 Filtros FIR

Conforme mostrado anteriormente, o design de filtros IIR pode ser bastante envolvente do ponto de vista matemático. Contudo, o controle sobre diversos parâmetros do filtro ainda tornam essa abordagem competitiva quando comparada ao design de filtros FIR. Será visto que o design com resposta ao impulso finita é muito mais direto, embora carregue inconveniências importantes sobre frequência de corte e oscilações.

A técnica básica para design de filtros FIR é o janelamento [53, 21, 46, 62], em que o intervalo que se queira preservar é delimitado por uma frequência de corte ou de admissão, no caso de passa-baixas e passa-altas, respectivamente. Assim, se desejamos um filtro passa-baixas, por exemplo, tudo o que necessitamos é que seja especificada uma frequência de corte (em Hz). Para tanto, é preciso lembrar que a  $k$ -ésima entrada de  $H$  está relacionada à frequência de amostragem por meio da relação [46]

$$k \longleftrightarrow \frac{k}{N} f_s, \quad (3.80)$$

em que  $N$  e  $f_s$  correspondem ao número de entradas do sinal e à frequência de amostragem, respectivamente. Uma vez especificada a frequência de corte, constrói-se um sinal cuja expressão é dada por

$$H_k^{LP} = \begin{cases} 1; & \text{se } k < k_c, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.81)$$

Na Equação (3.81),  $k_c$  é um índice relacionado à frequência de corte.

De posse da expressão de  $H^{LP}$ , calcula-se sua IDFT, dada por

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H^{LP}[k] \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} nk \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k_c-1} \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} n k \right] \\ &= \frac{1}{N} \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} \left( \frac{k_c - 1}{2} \right) n \right] \frac{\sin \left( \frac{\pi}{N} k_c n \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{N} n \right)}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

A porção real da Equação (3.82),  $\sin \left( \frac{\pi}{N} k_c n \right) / \sin \left( \frac{\pi}{N} n \right)$  é denominada Núcleo de Dirichlet [21, 46]. Uma visualização desse núcleo para  $N = 51$  e  $k = 11$  é mostrado na Figura (10).

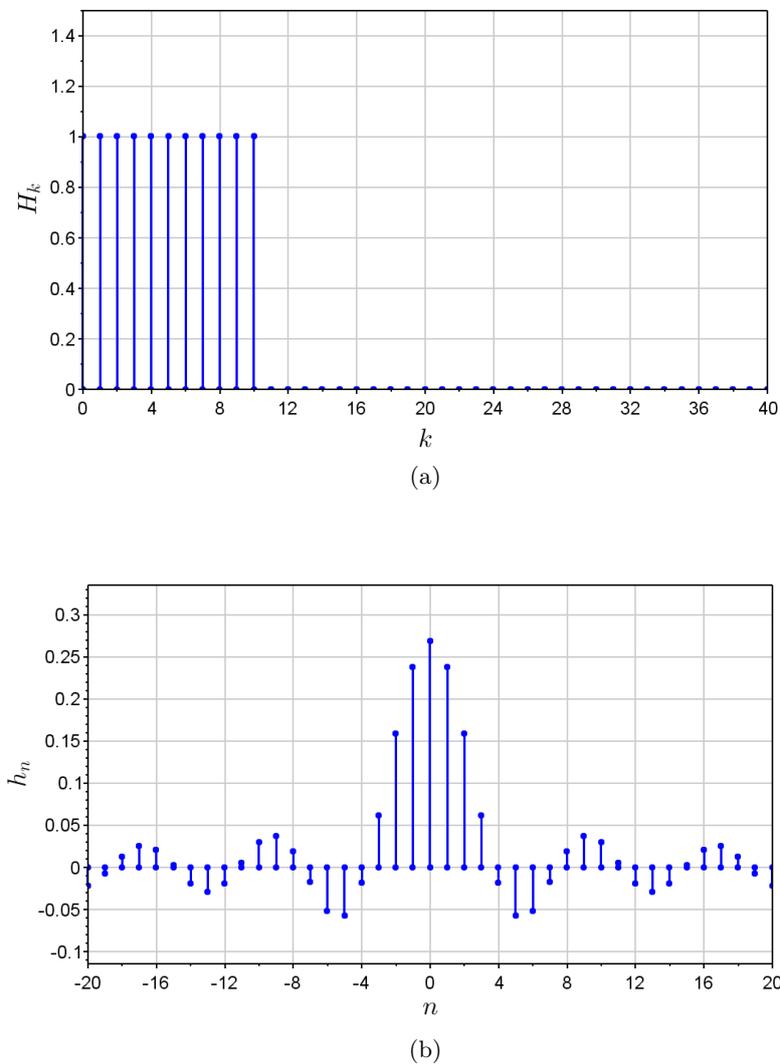


Figura 10 – Filtro passa-baixas ideal no domínio da frequência (a) e seu núcleo de Dirichlet associado (b) para  $N = 41$  e  $k_c = 11$ . Para melhor visualização,  $h_n$  foi centralizada por meio de uma transformação dos índices  $n$ .

Há algumas considerações acerca do desenvolvimento anterior: uma vez que o janelamento é simplesmente o produto, no domínio da frequência, entre o filtro e o espectro do sinal a ser filtrado, temos que no domínio do tempo é realizada uma operação de convolução. Este é um

detalhe natural, mas quando associado à forma do Núcleo de Dirichlet (vide Eq. (3.81)) traz à tona a indesejável ocorrência do fenômeno de Gibbs [53, 21, 46]. Abaixo, elaboramos melhor este ponto.

A expressão do Núcleo de Dirichlet, dada por

$$D_{n;k_c} \equiv \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} k_c n\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)}, \quad (3.83)$$

guarda forte semelhança com a função  $\text{sinc}(\xi) \equiv \sin(\pi\xi)/\pi\xi$ . De fato, para  $N$  muito grande, o denominador da Equação (3.83) pode ser aproximado em primeira ordem por  $\pi n/N$ , levando à aproximação

$$\frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} k_c n\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)} \approx \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} k_c n\right)}{\frac{\pi}{N} n} = \frac{k_c}{N} \text{sinc}\left(\frac{k_c}{N} n\right). \quad (3.84)$$

Assim, o método de janelamento por filtros ideais (neste caso, passa-baixas) leva a uma convolução entre o sinal original e uma sinc, cujo efeito sobre bordas e descontinuidades é devastador, já que as descontinuidades em questão serão moduladas pelo perfil da própria sinc. A Figura 11 ilustra esta ocorrência.

A ocorrência do fenômeno de Gibbs é, obviamente, indesejável, e reflete a impossibilidade de se realizar uma filtragem completamente abrupta de um sinal. Ou, alternativamente, evidencia a incapacidade de obter uma representação fidedigna quando se trunca o número de harmônicos numa expansão. Frente a esta limitação, a saída consiste em se definir janelas de modo a minimizar as ondulações (*ripples*). O único detalhe acerca desse procedimento é que o janelamento é realizado no domínio do tempo [53, 21, 46], ao invés de diretamente no domínio das frequências. De fato, é exatamente um janelamento sobre a resposta ao impulso que ocasiona o fenômeno de Gibbs (vide núcleos de Dirichlet interrompidos nas Figuras (10) e (11)).

Objetivamente, o design agora deve incorporar uma janela  $w_n$  a ser multiplicada ponto-a-ponto com a resposta ao impulso ideal (não causal). Desse modo, obtém-se

$$h_n \leftarrow h_n w_n \quad \Leftrightarrow \quad (H * W)_k. \quad (3.85)$$

Algumas expressões para janelas consagradas na teoria de processamento de sinais [53, 21, 46] são mostradas na Tabela 1:

| Janela     | Expressão [53]  |
|------------|---|
| Retangular | $w_n = \begin{cases} 1; & n \leq N \\ 0; & \text{c.c} \end{cases}$  |
| Triangular | $w_n = \begin{cases} \frac{2}{M}n; & n \in [0, \frac{M}{2}] \\ 2 - \frac{2}{M}n; & n \in (\frac{M}{2}, M] \\ 0; & \text{c.c} \end{cases}$             |
| Blackman   | $w_n = \begin{cases} 0,42 - 0,50 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right); & n \leq N \\ 0; & \text{c.c} \end{cases}$ |

Tabela 1 – Algumas funções-janela consagradas na teoria de sinais.

Uma maneira de se comparar a supressão dos ripples das janelas consiste em se avaliar os espectros destas [53, 46], em decibéis. Em princípio, deve ser observada a frequência que os lobos caem a um nível aceitável, por exemplo -20 dB. A Figura (12) compara as funções-janela mostradas na Tabela 1.

Para encerrar a discussão sobre métodos de janelamento, cabe ressaltar que as janelas aqui consideradas não permite controle sobre suas larguras ou frequências centrais (para passabandas) ou de admissão (para passa-altas). Uma possibilidade seria a de usar uma janela Gaussiana, já que com esta se controla a largura (desvio-padrão):

$$w_n = C \exp \left[ - \left( \frac{n - \frac{N}{2}}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right], \quad (3.86)$$

em que  $C$  e  $\sigma$  são uma constante de normalização e o desvio-padrão, respectivamente. Mais consagradas na literatura especializada são as janelas de Chebyshev e Kaiser [46], que permitem controlar a largura do lobo central e sua proporção em relação aos lobos auxiliares.

## 3.4 Processos estocásticos

### 3.4.1 Sinais aleatórios e ruído

Foi feita nas seções anteriores uma discussão sobre modelos matemáticos para representação de sinais e sistemas nos domínios contínuo e discreto. Tomando como ponto de partida as limitações relacionadas à densidade de informação sendo transmitida, foi apresentada uma forma alternativa de sintetizá-la através de séries, o que posteriormente viabilizou a representação via transformadas (contínuas e discretas) com o intuito de facilitar a análise e interpretação do fenômeno sendo estudado. Porém, quando se trata de problemas físicos reais, limitações relacionadas à necessidade de amostragem do sinal estão longe de serem os únicos obstáculos que devem ser superados; será agora abordado o caso onde a variável independente da função passa a ser aleatória. Neste caso, o processamento do sinal deve ser flexibilizado e métodos estatísticos devem ser utilizados para interpretar as informações a serem transmitidas.

Surge, sobretudo quando se trata de um cenário prático, a presença de ruídos nos sinais. Estes, comumente vistos no sentido pejorativo, são flutuações aleatórias<sup>10</sup> que aparecem junto ao sinal e que dificultam a leitura e processamento dos dados “reais”. Por mais que sua presença seja por muitas vezes indesejada, ela é inevitável; seja devido a limitações do equipamento, a interferências de fatores externos oriundos do ambiente ou até mesmo devido à própria natureza do fenômeno, o ruído se faz presente em todos os sistemas físicos – dispositivos e circuitos eletrônicos, materiais, sistemas biológicos, entre outros [13] – e, conseqüentemente, torna-se necessário debater como este deve ser tratado na análise do sinal. Em Processamento de Sinais, existe uma área de estudo específica para desenvolver métodos cujo objetivo é atenuar o efeito

<sup>10</sup> De todo modo, concebem-se também interferências sistemáticas.

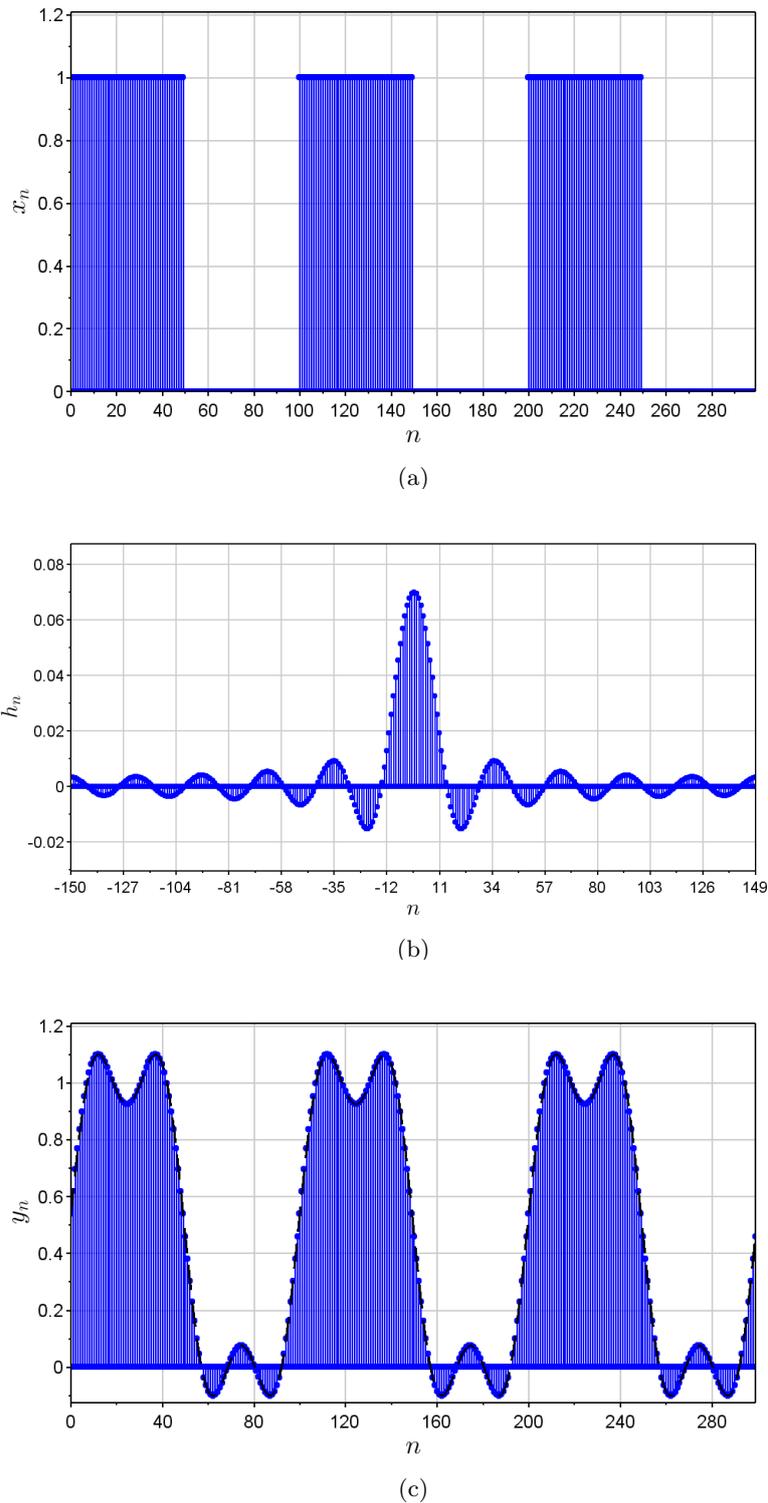


Figura 11 – Ilustração do fenômeno de Gibbs. Em (a) é mostrado o sinal de entrada,  $x_n$ , que corresponde a uma onda quadrada de periodicidade  $M = 100$ . Em (b) é mostrada a resposta ao impulso do filtro passa-baixas ideal  $h_n$ , com  $k_c = 21$ . Por fim, em (c) é mostrado o resultado da filtragem, evidenciando o efeito da sinc sobre as bordas. A linha preta tracejada serve para evidenciar a ocorrência. Para melhor visualização,  $h_n$  foi centralizado no gráfico por meio de uma transformação de índices.

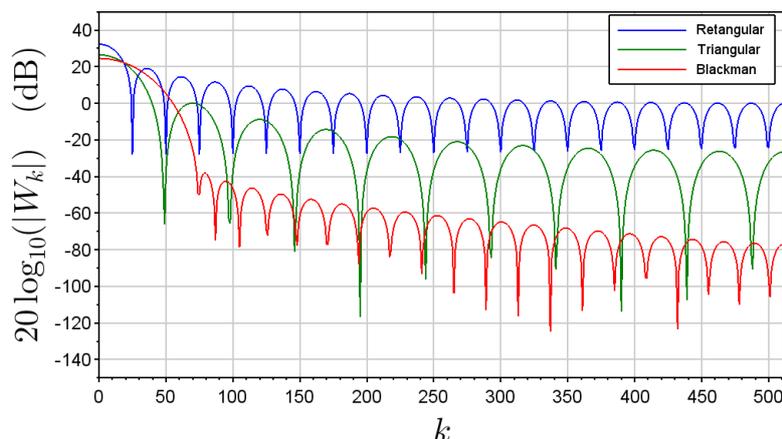


Figura 12 – Resposta em frequência das funções-janela mostradas na Tabela 1. Vê-se, claramente, que a janela de Blackman, dentre as três testadas, é a que possui lobo central mais largo, significando que sua representação temporal é mais estreita, de forma que os lobos auxiliares da função sinc são suprimidos com maior eficiência.

do ruído no sinal considerado degradado [53], com vistas à melhora de sua qualidade. Para áreas como a de Sistemas de Comunicação, por exemplo, estes métodos são imprescindíveis. Porém, nem sempre o ruído deve ser considerado como algo ruim; afinal, caótico ou não, este também é fonte de informações sobre o sistema.

Para ter acesso a estas informações, é necessária uma forma de descrição matemática diferente da utilizada até este ponto. Note que a forma de representação através de séries já apresentada não deve ser de forma alguma descartada; sinais de naturezas diferentes exigem ferramentas diferentes, portanto deve-se considerar as várias formas de análise apresentadas como complementares entre si. Para o caso de sinais aleatórios, o método de análise será feita através da Teoria de Probabilidade. Para discutir a análise estatística de processos estocásticos dentro de Processamento de Sinais, sendo este o principal objetivo desta seção, toma-se como ponto de partida a introdução de alguns dos conceitos fundamentais.

### 3.4.2 Conceitos fundamentais de Teoria de Probabilidade

Experimentos como o lançamento de uma moeda ou o rolar de um dado são exemplos clássicos dos chamados experimentos aleatórios. Isso se dá devido ao fato de que os resultados obtidos nesses experimentos não podem ser determinados de maneira preditiva, ou seja, são processos não-determinísticos, de forma que reproduzi-los sob as mesmas condições iniciais não proporciona necessariamente os mesmos resultados. Assim, em se tratando de experimentos aleatórios, alguns conceitos fundamentais devem ser expostos para estruturar futuras discussões. Como ponto de partida, recebe o nome de espaço amostral o conjunto completo de possíveis resultados de um experimento aleatório e recebe o nome de evento um subconjunto qualquer deste espaço. Para associar uma probabilidade  $P$  a um evento de um espaço amostral  $\Omega$ , cada experimento aleatório deve obedecer a uma certa lei de probabilidade onde, para que esta seja válida, os seguintes axiomas devem ser satisfeitos [17]:

1.  $P\{A\} \geq 0$  para todo evento  $A \in \Omega$ ;
2.  $P\{\Omega\} = 1$ ;
3. Para qualquer dois eventos  $A$  e  $B$  mutuamente exclusivos, tem-se que

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}. \quad (3.87)$$

Apresentados estes conceitos introdutórios, é possível então elaborar uma descrição para as variáveis aleatórias. De maneira geral, pode-se definir uma variável aleatória (VA) como sendo uma função cujo domínio é o espaço amostral  $\Omega$  de um experimento aleatório e que associa a cada resultado  $\xi$  deste experimento um número  $x$  (real ou complexo) [17]. Portanto,

$$\begin{aligned} x : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longrightarrow x(\xi). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Na prática, pode-se fazer uso de casos simples como a associação de 0 (cara) e 1 (coroa) no lançamento de uma moeda ou números naturais de 1 a 6 no rolar de um dado<sup>11</sup> para exemplificar a definição proposta. Já no âmbito da Física, uma variável aleatória pode ser, por exemplo, um valor de voltagem associado ao ruído em componentes eletrônicos num circuito.

Dado que usualmente a leitura das medições é feita através de valores numéricos, é comum esquecer que, por definição, VAs são na verdade funções e não realmente variáveis. Uma forma de evitar a confusão na sua interpretação é fazer a análise do experimento em termos de densidade de probabilidade. Uma forma conveniente de caracterizar estatisticamente variáveis aleatórias é através da chamada função distribuição de probabilidade  $F_x$  (PDF, do inglês *probability distribution function*) – também chamada de função distribuição cumulativa –, dada por:

$$F_x(\alpha) = P\{x \leq \alpha\} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.89)$$

de modo que

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} F_x(\alpha) = 0 \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F_x(\alpha) = 1. \quad (3.90)$$

Esta descreve de maneira completa a distribuição de probabilidades de uma variável. Note que a definição dada acima está limitada aos reais, mas o conceito pode ser estendido também para variáveis complexas. Assim, observar o comportamento da PDF traz informações sobre a natureza das variáveis aleatórias, podendo estas serem separadas em três categorias distintas: discretas, contínuas ou mistas.

Para variáveis discretas, a PDF pode ser escrita na forma

$$F_x(\alpha) = \sum_{k=1}^K P\{x = \alpha_k\} u(\alpha - \alpha_k) = \sum_{k=1}^K p_x(\alpha_k) u(\alpha - \alpha_k) \quad K \in \mathbb{N}, \quad (3.91)$$

em que  $p_x$  é conhecida como a função massa de probabilidade (PMF) e  $u$  representa a função degrau. Exemplos onde este tipo de análise pode ser utilizada são em sistemas de dois estados;

<sup>11</sup> Uma curiosidade da variável aleatória gerada no rolar de um dado é que esta pode ser vista apenas como a função identidade já que, naturalmente, o número inteiro relacionado a cada resultado é o próprio encontrado em sua respectiva face do dado.

na situação onde o primeiro estado  $E_1$  tem probabilidade  $p$  de ocorrer e, de maneira direta, o segundo estado  $E_2$  tem probabilidade  $q = 1 - p$ , é possível definir uma variável aleatória  $x$  do tipo:

$$x(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi = E_1 \\ 1, & \xi = E_2. \end{cases} \quad (3.92)$$

Portanto, tomando a Equação (3.91), sua PDF é dada por

$$\begin{aligned} F_x(\alpha) &= P\{x = 0\}u(\alpha) + P\{x = 1\}u(\alpha - 1) \\ &= pu(\alpha) + (1 - p)u(\alpha - 1). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Já para o caso contínuo, a infinidade de possíveis ocorrências dificulta trabalhar com valores pontuais, assim inviabilizando uma análise feita através da PMF. É preciso, portanto, fazer um ajuste na forma como é feita a análise da distribuição de probabilidade, *i.e.*, sendo a PDF contínua e derivável, surge a chamada função densidade de probabilidade (DPF), que é definida por

$$f_x(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}F_x(\alpha) \quad (3.94)$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\alpha)d\alpha = 1 \quad \text{e} \quad P\{a \leq \alpha \leq b\} = \int_a^b f_x(\alpha)d\alpha. \quad (3.95)$$

Expande-se, portanto, a análise pontual para dentro de um certo intervalo do domínio e com isso aparecem outros fatores que caracterizam a distribuição. Repare que, dada a definição da Equação (3.91), a PDF do caso discreto é a soma de  $K$  sucessivos degraus entre o intervalo  $[0, 1]$  de  $P$ ; a largura e a altura destes degraus dependem das probabilidades de cada evento, mas a PDF ainda sustenta uma forma quase “padronizada”. Quando se passa a representá-la através de densidade de probabilidade, esse padrão desaparece e então surge a questão de como esta probabilidade está distribuída no intervalo. Isso pode ser ilustrado pelo seguinte exemplo [17]: dado um circuito elétrico, é medida a tensão  $x$  de ruído em um determinado ponto dentro deste. Sabendo que este valor de tensão é uma variável aleatória, existe uma faixa de tensão  $[-V, V]$  de modo que

$$P\{|x| \leq V\} = 1, \quad (3.96)$$

ou seja, a probabilidade de encontrar um valor de tensão fora desta faixa é nula. Até este ponto, nada foi especificado sobre como esta probabilidade está distribuída dentro dos valores de tensão do intervalo, apenas para valores fora dele; portanto, dado que existem inúmeras formas como a probabilidade pode estar distribuída, se faz necessário mais informação sobre o sistema para que seja possível determinar a sua PDF. Tomando o caso onde a distribuição é uniforme, por exemplo, dentro do intervalo de tensão onde a probabilidade não é nula, tem-se que

$$P\{-V \leq x \leq \alpha\} = \int_{-V}^{\alpha} \frac{d\alpha'}{2V} = \frac{\alpha + V}{2V}. \quad (3.97)$$

No caso onde  $\alpha = V$ , obtém-se que  $P = 1$ , como já era esperado. Assim, se a distribuição é uniforme, a sua PDF é dada por:

$$F_x(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < -V \\ \frac{\alpha + V}{2V}, & -V \leq \alpha \leq V \\ 1, & \alpha > V. \end{cases} \quad (3.98)$$

Comparado com caso discreto e sua soma de degraus sucessivos, a Equação (3.98) representa uma reta com coeficiente angular  $(2V)^{-1}$ . A distribuição uniforme empregada no exemplo é uma das mais simples; outro tipo que poderia ter sido utilizado é a distribuição normal (ou gaussiana), por exemplo, o que geraria uma PDF diferente para o mesmo sistema físico.

Por fim, a terceira categoria de variáveis aleatórias é o caso generalizado onde a PDF pode ser decomposta na soma

$$F_x(\alpha) = F_x^{(c)}(\alpha) + F_x^{(d)}(\alpha), \quad (3.99)$$

em que o primeiro e segundo termo representam, respectivamente, a parte contínua e a parte discreta da função de distribuição. Caso algum desses termos seja nulo, retoma-se a análise feita anteriormente para seu tipo específico de variável. Já para o caso onde estas não são nulas, obtém-se uma PDF com um número finito de descontinuidades e que deve ser contínua em pelo menos um intervalo dentro de seu domínio. Assim, dada as definições para ambos os casos, tem-se que a relação da probabilidade para variáveis aleatórias mistas é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\alpha) d\alpha + \sum_k p_x(\alpha_k) = 1. \quad (3.100)$$

Ainda que PDFs sejam capazes de caracterizar uma variável aleatória de maneira completa, existem também outras formas de caracterização que, embora não ofereçam a mesma quantidade de informações sobre a variável, podem ainda ser muito úteis para a análise. Por fins de simplificação de notação, os próximos conceitos serão apresentados apenas para VAs contínuas, mas uma análise análoga pode ser feita para o caso discreto; embora ela não seja apresentada neste desenvolvimento, é possível encontrá-la facilmente na literatura [55, 17]. Portanto, no sentido de obter mais informações importantes sobre a variável aleatória, o cálculo dos momentos de ordem  $k$  dado por

$$m_x^{(k)} = E\{x^k\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^k f_x(\alpha) d\alpha \quad (3.101)$$

é uma maneira alternativa de obtê-las. Na Equação (3.101), o operador  $E\{\cdot\}$  é conhecido como esperança ou valor esperado da variável. O momento de primeira ordem ( $k = 1$ ), um dos mais utilizados para caracterização, é conhecido como o valor esperado ou valor médio da variável. Da Equação (3.101), a partir da definição

$$m_x^{(1)} = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f_x(\alpha) d\alpha, \quad (3.102)$$

pode ser fazer uma analogia direta desta grandeza à Mecânica Clássica onde o cálculo do valor médio aponta para o centro de massa de probabilidade da variável. Por fins de ilustração, tome, por exemplo, o caso generalizado de uma variável contínua com distribuição uniforme limitada a um intervalo  $[a, b]$ , sendo  $a, b \in \mathbb{R}$ , em que

$$m_x^{(1)} = \int_b^a \frac{\alpha}{b-a} d\alpha = \frac{a+b}{2}. \quad (3.103)$$

Este resultado pode ser aplicado diretamente ao exemplo anterior sobre a medida de tensão de ruído num circuito elétrico. Como o intervalo de tensão era  $[-V, V]$ , o valor médio desta variável é nulo, tal como já era esperado devido ao caráter uniforme da distribuição. Para que  $m_x^{(1)} \neq 0$ , neste caso, é preciso que o intervalo seja anti-simétrico.

No tópico de variáveis com valores médios não-nulos, observe que é sempre possível derivar a partir dela uma segunda variável  $y = x - m_x^{(1)}$  de modo que seu momento de primeira ordem sempre será

$$m_y^{(1)} = E \{x - m_x^{(1)}\} = 0. \quad (3.104)$$

Isto gera uma nova família de momentos – os chamados momentos centrais (ou centrados)  $\mu_x^{(k)}$  – onde, obrigatoriamente, o valor esperado da variável aleatória é nulo. Com isso, é possível generalizar de maneira direta o conceito de modo que o momento central de ordem  $k$  da variável pode ser calculado através de:

$$\mu_x^{(k)} = E \{(x - m_x)^k\}. \quad (3.105)$$

Assim como no caso do valor médio, o momento central que tem grande importância e é utilizado de maneira recorrente no cenário prático é o momento de segunda ordem ( $k = 2$ )

$$\sigma_x^2 = \mu_x^{(2)} = E \{(x - m_x^{(1)})^2\} = E \{x^2\} - (m_x^{(1)})^2 \quad (3.106)$$

sendo este também conhecido como a variância da variável aleatória. Mais uma vez, é possível fazer uma analogia direta à Mecânica Clássica onde a variância representaria o momento de inércia da distribuição de massa de probabilidade da variável. Em outras palavras, a variância está relacionada à dispersão dessa massa em torno do valor médio, este que pode ser visto, como já foi citado anteriormente, como o centro de massa de probabilidade.

Por mais que só tenham sido citados o valor médio e a variância, os outros momentos também podem ser utilizados dependendo da análise sendo feita sobre a VA. Problemas específicos podem exigir momentos de ordem mais altas, mas os dois que foram discutidos até este ponto serão os mais utilizados futuramente no desenvolvimento desta dissertação, por isso foi dada certa ênfase a estes métodos de caracterização estatística. Sintetizando o que foi discutido, foram apresentadas formas de descrever e extrair informações de diferentes tipos de variáveis aleatórias; ainda assim, apenas estes conceitos não são suficientes devido ao fato de que sinais aleatórios no contexto prático não são feitos apenas de uma variável. Torna-se necessário expandi-los para o caso onde se deve lidar com duas ou mais VAs.

Ao lidar com várias variáveis simultaneamente – ou com um vetor de variáveis –, as mesmas formas de caracterização podem ser utilizadas; por exemplo, a função distribuição de probabilidade para um vetor de  $N$  variáveis é dado por

$$F_{x_1 x_2 \dots x_N}(\alpha, \beta, \dots, \gamma) = P \{x_1 \leq \alpha, x_2 \leq \beta, \dots, x_N \leq \gamma\} \quad \alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (3.107)$$

O mesmo pode ser feito para as funções massa e densidade de probabilidade, sendo esta última agora uma derivada parcial da PDF do vetor.

Por mais que possa ser feita esta adaptação para o caso de múltiplas variáveis, a grande quantidade de parâmetros pode deixar a representação um tanto sobrecarregada. Para exemplificar de forma mais clara a análise que está sendo feita, será tomado o caso mais simples com apenas duas variáveis (distribuição bivariada). Assim, a PDF da Equação (3.107) passa a ser

$$F_{x_1 x_2}(\alpha, \beta) = P \{x_1 \leq \alpha, x_2 \leq \beta\} \quad (3.108)$$

em que a probabilidade agora está associada a um plano dentro do domínio  $D$ , não apenas a um intervalo como no caso unidimensional. De maneira análoga, outras definições poderiam ser derivadas [55] tais como

$$f_{x_1x_2} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} F_{x_1x_2}(\alpha, \beta) \quad P\{D\} = \int \int_D f_{x_1x_2}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{caso contínuo}) \quad (3.109)$$

e, através destas, é possível encontrar outros parâmetros de caracterização estatística de grande importância que serão utilizados de forma recorrente nas futuras análises: os momentos conjuntos. Mais especificamente, tem-se interesse em especial em dois momentos específicos que fornecem informações referentes a interdependência entre as VAs em questão; tal como foi feito no estudo de uma única variável com o valor médio e a variância, serão aqui apresentados os conceitos de correlação e de covariância para o caso de duas ou mais variáveis.

De forma geral, os momentos conjuntos podem ser calculados através de [17]

$$E\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{k_1} \beta^{k_2} \dots \gamma^{k_n} f_{x_1x_2\dots x_n}(\alpha, \beta, \dots, \gamma) d\alpha d\beta \dots d\gamma \quad (3.110)$$

em que  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  determina a ordem do momento. Como estão sendo utilizadas apenas duas variáveis para ilustrar a aplicação dos conceitos, o primeiro momento conjunto que será discutido – a correlação – é matematicamente representado por

$$R_{x_1x_2} = E\{x_1x_2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\beta f_{x_1x_2}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (3.111)$$

Este é o momento conjunto de segunda ordem ( $k_1 = k_2 = 1$ ) que muitas vezes é visto como um sinônimo de dependência estatística. Por mais que esta seja uma definição informal, a correlação pode ser considerada como uma ferramenta capaz de medir quantitativamente o grau de “dependência” entre as variáveis. Já a covariância faz parte da família de momentos centrados, sendo este também de segunda ordem, onde

$$C_{x_1x_2} = E\left\{\left(x_1 - m_{x_1}^{(1)}\right)\left(x_2 - m_{x_2}^{(1)}\right)\right\} = R_{x_1x_2} - m_{x_1}^{(1)}m_{x_2}^{(1)}. \quad (3.112)$$

Dado que ambos são relacionados a medidas de dependência, é possível que uma certa confusão seja gerada em relação ao que esses momentos medem exatamente. Enquanto que a covariância mede como as variáveis variam de forma conjunta, a correlação mede o quão fortemente estas estão relacionadas estatisticamente<sup>12</sup>. Ambas são ferramentas importantes na análise global das variáveis, auxiliando em demasia a interpretação do comportamento de sinais aleatórios, principalmente no cenário prático.

Feita esta introdução dos conceitos fundamentais da Teoria de Probabilidade, o próximo assunto a ser discutido são os processos estocásticos. Sendo estes modelos probabilísticos muito utilizados no estudo de sistemas físicos reais, é necessário entender e saber manipular este tipo de representação para obter, junto com as ferramentas matemáticas apresentadas, uma descrição geral para sinais aleatórios.

<sup>12</sup> Discutir estes conceitos traz à tona o debate sobre como estes parâmetros estão relacionados à independência estatística das variáveis aleatórias sendo analisadas por eles. Em outras palavras, é possível afirmar que variáveis não-correlacionadas são sempre estatisticamente independentes? A resposta para essa pergunta é não, mas a recíproca é verdadeira [55].

### 3.4.3 Definição e caracterização de processos estocásticos

Grosso modo, um processo estocástico é uma família (ou *ensemble*) de funções que associa a cada resultado  $\xi$  de um experimento aleatório com espaço amostral  $\Omega$  uma função  $x(t, \xi)$  onde, na maioria dos casos, a variável  $t \in \mathbb{R}$  está associada ao tempo [17]. Note que, ao ser fixado apenas  $t$ ,  $x$  é uma variável aleatória; ao ser fixado apenas  $\xi$ ,  $x$  é uma única função no tempo chamada de função amostra; e ao serem fixadas ambas as variáveis,  $x$  resulta em um número. A fins de simplificar a notação, a variável  $\xi$  será omitida e os processos serão representados apenas por  $x(t)$ .

Sobre o estudo de sinais aleatórios, é através de processos estocásticos que estes são modelados como conjuntos (finitos ou infinitos) de variáveis aleatórias. O movimento browniano, por exemplo, é um processo físico estocástico onde o *ensemble* completo  $x(t)$  descreve o movimento de todas as partículas em um fluido.

As caracterizações estatísticas discutidas anteriormente também podem ser estendidas para processos estocásticos. Por exemplo, tomando o tempo como uma variável contínua, as funções de distribuição e densidade de probabilidade são, respectivamente,

$$F_x(\alpha; t) = P\{x(t) \leq \alpha\} \quad f_x(\alpha; t) = \frac{d}{d\alpha} F_x(\alpha; t) \quad (3.113)$$

e o momento de primeira ordem (valor esperado) é definido por:

$$\eta_x(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f_x(\alpha; t) d\alpha. \quad (3.114)$$

Continuando com os métodos de caracterização, os conceitos de momentos conjuntos para processos estocásticos também podem ser derivados a partir da Equação (3.110). Sendo este um dos conceitos centrais que serão utilizados para a estimação espectral de um sinal aleatório, a autocorrelação de um processo estocástico  $x(t)$  pode ser calculada através de:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1 \alpha_2 f_x(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.115)$$

Note que  $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2, t_1)$  e que, no caso onde  $t_1 = t_2 = t$ ,

$$R_{xx}(t, t) = E\{x^2(t)\} \quad (3.116)$$

é conhecido como valor médio quadrático do processo. De maneira análoga, é possível calcular também a autocovariância do processo através de

$$\begin{aligned} C_{xx}(t_1, t_2) &= E\{[x(t_1) - \eta_x(t_1)][x(t_2) - \eta_x(t_2)]\} \\ &= R_{xx}(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Processos estocásticos podem ser separados em diferentes classes, dada a presença de certas propriedades estatísticas. Entre estas classes, dois tipos específicos terão grande impacto em futuras análises e, por isso, devem ser discutidos em detalhes: processos estacionários e processos ergódicos. São chamados de processos estocásticos estacionários aqueles que têm suas propriedades estatísticas invariantes a um deslocamento no tempo [55]. Isso significa que sua função densidade de probabilidade de ordem  $n$ , dado um deslocamento  $\tau$ , deve obedecer a

$$f_x(\alpha_1, \dots, \alpha_n; t_1, \dots, t_n) = f_x(\alpha_1, \dots, \alpha_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau). \quad (3.118)$$

O processo recebe o nome de estritamente estacionário quando, para qualquer ordem  $n$ , sua DPF é invariante no tempo. Esta condição, entretanto, é excessivamente restritiva. Uma definição mais fraca de estacionariedade é a chamada estacionariedade no sentido amplo, a qual exige que a média do processo seja constante, isto é,

$$E\{x(t)\} = \eta_x, \quad (3.119)$$

e que a sua autocorrelação dependa apenas da diferença  $\tau = t_1 - t_2$  entre quaisquer instantes  $t_1$  e  $t_2$  do processo, ou seja,

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau). \quad (3.120)$$

Note que, se um processo é estritamente estacionário, este também é estacionário em sentido amplo. Porém, a recíproca não é verdadeira.

A necessidade da segunda classe de processos estocásticos que será discutida surge devido ao fato de que estimar certos parâmetros de processos estocásticos nem sempre é uma tarefa fácil de ser realizada dentro de um cenário prático. A ergodicidade, portanto, é utilizada para obter respostas sobre a estatística do processo baseado apenas em uma única observação temporal. Assim, sendo  $x(t)$  um processo estacionário e ergódico, sua média temporal é dada por

$$\eta_x(T) = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (3.121)$$

de modo que

$$E\{\eta_x(T)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E\{x(t)\} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \eta_x dt = \eta_x. \quad (3.122)$$

Ou seja, se o processo satisfaz as condições restritivas impostas, calcular  $\eta_x(T)$  fornece uma boa estimativa de sua média. De maneira geral, quando se trata de processos ergódicos, é possível calcular os momentos de ordem  $n$  do processo através de

$$E\{x^n(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^n dt. \quad (3.123)$$

Observa-se, então, que a caracterização estatística pode ser feita não através de cálculos sobre o *ensemble*, mas sim “ao longo” de uma única função-amostra  $x(t)$  do processo.

Acima, foram apresentadas as principais ferramentas que serão utilizadas para a análise de sistemas cujas entradas são sinais aleatórios. A partir da caracterização estatística do sinal de entrada, é possível obter informações sobre o sinal de saída fazendo uso das propriedades do sistema. Por exemplo, dado que o sinal de saída pode ser calculado através da integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t-t') dt', \quad (3.124)$$

é possível calcular seu valor esperado como:

$$\begin{aligned} \eta_y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)E\{x(t-t')\} dt' \\ &= h(t) * \eta_x(t). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Propriedades e exemplos de aplicação deste tipo de sistema podem ser encontrados em [55, 25, 59].

Como foi visto nas seções anteriores, a relação dual tempo-frequência de um sinal é extremamente útil, especialmente quando se trata filtros lineares. Porém, ter acesso ao espectro dos sinais não é exclusividade de processos determinísticos. Será agora discutido o método de estimação espectral para o caso de sinais aleatórios.

### 3.4.4 Análise e estimação espectral

Ao se tratar de sinais determinísticos contínuos no tempo, foi visto anteriormente que uma forma alternativa de descrição do sinal é através de suas componentes de frequência onde ambas representações estão ligadas por meio de transformadas. Já para o caso de sinais estocásticos, é pertinente questionar se esta análise dual pode ser feita dado que transformadas como a de Fourier usualmente não são definidas para este tipo de processo. Dentro das possíveis formas de interpretação do espectro de um sinal aleatório, será discutida a abordagem feita através da aplicação de transformadas sobre médias que caracterizam o sinal [55]. Como a análise espectral é a principal ferramenta que foi utilizada neste trabalho já que o comportamento  $1/f$  que caracteriza esta importante classe de processos aqui sendo estudados se encontra em suas respectivas densidades espectrais, é fundamental que este conceito fique bem esclarecido.

No caso de sinais determinísticos, sendo  $x$  um sinal integrável e de energia finita, tem-se que a sua densidade espectral dada por

$$S(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (3.126)$$

descreve a distribuição de energia do sinal em função da frequência. Isso pode ser verificado utilizando a definição de DTFT dada pela Equação (3.54)<sup>13</sup> de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* e^{-i\omega(n-m)} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* \delta_{n,m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Esta relação conhecida como o Teorema de Parseval valida a conservação de energia entre os domínios do tempo e da frequência, mostrando com isso que a densidade espectral dada pela Equação (3.126) realmente representa uma distribuição da energia [58].

Já para o caso de sinais aleatórios, estes não são absolutamente integráveis e, conseqüentemente, não possuem representação via transformadas de Fourier. Devido a isto, suas densidades espectrais são então calculadas através de médias da potência distribuída no domínio da frequência visto que estas sim são finitas. Mesmo que os valores calculados sejam, na verdade, os valores esperados, esta função é conhecida apenas como densidade espectral de potência (PSD). Uma primeira forma de representação para esta função, sendo  $x$  um processo estocástico estacionário

<sup>13</sup> Por fins de simplificação, será utilizada a notação  $X(\omega) = X(z)|_{z=e^{i\omega}}$ .

no sentido amplo, é dada por:

$$S_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{xx,\tau}\} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xx,\tau} e^{-i\omega\tau}, \quad (3.128)$$

em que  $R_{xx,\tau} = R_{xx}[\tau]$  é a função de autocorrelação do sinal. Esta representação é conhecida como o Teorema de Wiener-Khinchin [25, 58]. De forma direta, é possível determinar a autocorrelação de  $x$  através da DTFT inversa

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.129)$$

Ou seja, isso significa que a autocorrelação e a densidade espectral de potência de um sinal aleatório formam pares de transformadas de Fourier.

Agora, uma segunda forma de possível representação para a SPD é dada pela própria definição do método, ou seja, pelo valor esperado das potências do sinal [58]. Assim, tem-se que a densidade espectral também pode ser escrita como:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-i\omega n} \right|^2 \right\}. \quad (3.130)$$

É a partir desta representação dada pela Equação (3.130) que será introduzido o método de estimação espectral utilizado nas análises numéricas que serão futuramente feitas neste trabalho.

Em se tratando de estimação espectral, existem dois tipos mais usuais normalmente utilizados: os métodos paramétricos, que resumem o problema de estimação a encontrar parâmetros de uma dada modelagem feita sobre os dados, e os métodos não-paramétricos, que nada assumem sobre os dados do sinal previamente e estimam a densidade espectral através de médias feitas tais como mostra a Equação (3.130) [58]. Serão discutidos aqui apenas métodos não-paramétricos.

Entre as formas mais comuns de estimação espectral para sinais aleatórios está o periodograma [62, 25]. Levando em consideração que sinais reais são finitos no tempo, o periodograma estima a PSD de maneira direta por

$$S_{xx}^P(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-i\omega n} \right|^2. \quad (3.131)$$

Este método, entretanto, mesmo que seja simples e direto, não produz boas estimativas [62, 58]. Um dos problemas principais surge logo na definição dada pela Equação (3.130); desenvolvendo o cálculo do valor esperado, tem-se que [62]:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-i\omega n} \right|^2 \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E \{ x_n x_m^* \} e^{-i\omega(n-m)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} (N - |\tau|) R_{xx,\tau} e^{-i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Identifica-se neste resultado a presença de um *bias* na estimação da função de autocorrelação. Isso significa que, para o método do periodograma, o valor esperado de sua função de autocorrelação é dado por:

$$E \{ R_{xx,\tau}^P \} = \left( 1 - \frac{|\tau|}{N} \right) R_{xx,\tau}. \quad (3.133)$$

Tomando o limite  $N \rightarrow \infty$ , tem-se que a função de autocorrelação tende ao valor real e que sua variância tende à zero [62]. Com isso, o periodograma é dito assintoticamente sem *bias* e, conseqüentemente, pode ser considerado como um método consistente [62]. Porém, para valores de  $N$  pequenos, a presença desse *bias* se torna relevante.

Com o objetivo de melhorar os resultados estimados, o método do periodograma foi então modificado por Bartlett [9] e, posteriormente, por Welch [80], obtendo melhoras significativas [62]. Como o método de estimação escolhido para a análise numérica deste trabalho foi o método de Welch, este será discutido em maiores detalhes no Capítulo 4.

Por fim, para fechar esta revisão sobre Processamento de Sinais e Processos Estocásticos, falta discutir as propriedades da densidade espectral de potência em sistemas LTI. Portanto, considerando uma dada resposta ao impulso do sistema, é possível relacionar as funções de autocorrelação dos sinais de entrada e saída através de:

$$\begin{aligned}
 R_{yy,\tau} &= E \{y_n y_{n+\tau}\} \\
 &= E \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_{n-l} h_l \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{t+\tau-r} h_r \right\} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_l h_r E \{x_{n-l} x_{t+\tau-r}\} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_l h_r R_{xx,\tau+l-r}
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

de modo que, dada a definição da Equação (3.128), deriva-se que

$$\begin{aligned}
 S_{yy}(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{yy,\tau} e^{-i\omega\tau} \\
 &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_l h_r R_{xx,u} e^{-i\omega(u-l+r)} \\
 &= H^*(i\omega) H(i\omega) S_{xx}(\omega).
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

Portanto,

$$S_{yy}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \tag{3.136}$$

é a densidade espectral do sinal de saída dado o sinal de entrada aleatório  $x(t)$  [17].

A relação dada pela Equação (3.136) é de extrema importância e será o ponto de partida de todos os filtros lineares que serão projetados no próximo capítulo dado que o sinal de entrada que será utilizado em todos os métodos de geração de processos  $1/f$  são, na verdade, ruídos.

# 4 Métodos de geração de processos

## 1/f

### 4.1 Caso unidimensional

#### 4.1.1 Abordagem via filtros lineares

Para o desenvolvimento de métodos de geração de processos cuja densidade espectral obedece a lei de potência

$$S(f) = \frac{c}{f^\alpha}, \quad (4.1)$$

sendo  $c$  uma constante, serão utilizados os conceitos e ferramentas matemáticas revisados no Capítulo 3 para encontrar sistemas cujos sinais de saída possuem o comportamento espectral desejado. Adotando a abordagem via filtros digitais lineares, serão implementados analiticamente diferentes filtros – para ambos os casos FIR e IIR – seguindo as estratégias propostas na Seção (3.3). Posteriormente, os resultados analíticos encontrados para cada caso serão utilizados no desenvolvimento de algoritmos para a implementação computacional de todos os métodos apresentados neste capítulo.

Já que o comportamento espectral esperado do sinal de saída para todos os filtros está bem definido, o desafio real para cada método é encontrar as suas respectivas funções de transferência discretizadas. Para isso, é preciso também definir de antemão o comportamento espectral do sinal de entrada do sistema visto que a função de transferência dita a relação entre os dois. Para todos os casos que serão desenvolvidos a seguir, será utilizado como sinal de entrada o ruído branco; com aplicações práticas em áreas além de Processamento de Sinais – é muito comum a utilização deste tipo de ruídos em músicas, por exemplo –, o motivo desta escolha se dá devido ao fato de que, considerando  $\eta_x(t) = 0$ , este tipo de sinal estocástico possui como função de autocorrelação

$$R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau). \quad (4.2)$$

Isto significa que quaisquer valores  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  do ruído em instantes  $t_1 \neq t_2$  são completamente não-correlacionados. Conseqüentemente, sua densidade espectral dada por

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \sigma_x^2 \quad (4.3)$$

é constante para todo domínio da frequência [53]. Respeitadas estas características estatísticas, esta particular classe de ruídos pode ter diferentes tipos de distribuição de probabilidade (gaussiana, uniforme, laplaciana, Cauchy, etc.). Neste trabalho, foram utilizados apenas ruídos com distribuição uniforme.

Com este resultado e derivando da Equação (3.136) a relação entre as densidades espectrais dos sinais de entrada e saída, o objetivo conjunto de todos os métodos será projetar filtros cuja função de transferência ideal é do tipo:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{C}{\omega^\alpha}, \quad (4.4)$$

em que todas as constantes estão compreendidas em  $C$ .

#### 4.1.2 Filtros FIR

O primeiro método que será desenvolvido utiliza a abordagem via filtros de resposta ao impulso finita. Assim como foi discutido anteriormente, este tipo de filtro é não-recursivo e, conseqüentemente, os seus coeficientes são determinados diretamente pela resposta ao impulso do sistema. A estratégia escolhida para esta implementação foi utilizar o método de janelamento [53, 70] que inicialmente descreve a resposta ao impulso desejada  $h^{(d)}$  do filtro como:

$$h_n^{(d)} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_d(i\omega) e^{i\omega n} d\omega. \quad (4.5)$$

Os maiores detalhes desta forma de implementação de filtros já foram discutidos na Seção 3.3 do capítulo anterior. O que se tem, portanto, é uma função de transferência  $H_d$  (desejada) em frequência contínua que deve ser retratada no ambiente computacional discreto. Este processo de discretização é realizado de maneira direta de forma que, derivados a partir da Equação (4.4), os valores do vetor que descrevem a função de transferência discretizada do filtro serão calculados por meio de:

$$H_k = \frac{c}{k^{\alpha/2}} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.6)$$

em que os valores de frequência de  $k$  se encontram em um vetor linearmente espaçado em um intervalo de  $2\pi/N$ .

Considerando que o sinal de entrada é um ruído branco e fazendo uso das ferramentas computacionais já disponibilizadas [68], é possível gerar este sinal no domínio do tempo e, através de uma FFT, obter seu espectro  $X_k$  de forma direta. Com isso, o espectro e, conseqüentemente, o próprio sinal de saída já podem ser calculados visto que, devido às propriedades do próprio filtro (convolução), os espectros se relacionam por

$$Y_k = H_k X_k. \quad (4.7)$$

Feita a multiplicação ponto-a-ponto, o sinal no domínio do tempo pode ser encontrado através do uso de uma IFFT.

Porém, ainda que esta aparente ser uma forma simples e direta de implementar o filtro, algumas observações em relação à natureza das ferramentas sendo utilizadas devem ser feitas. Mais especificamente, deve-se chamar atenção para o fato de que a DFT possui a propriedade de simetria conjugada [53]. Isso significa que, para sinais reais  $x$  de tamanho  $N$  – como é o caso do ruído branco sendo utilizado –, aplicar uma DFT gera um vetor de  $N$  pontos em que

$$X(k) = X^*(N - k). \quad (4.8)$$

Como consequência desta propriedade, apenas os primeiros  $N/2$  pontos da transformada são independentes. Isso influencia diretamente na forma como o sinal de saída do filtro deve ser calculado: devem ser considerados apenas os termos independentes de  $X$  na Equação (4.7). Conseqüentemente, os tamanhos dos vetores devem ser alterados. Após a multiplicação ponto-a-ponto, o espectro do sinal de saída pode ser completado ao fazer a inversão do vetor resultante e tirando seu complexo conjugado. Outro detalhe que deve ser levado em consideração é a

descontinuidade de  $H$  na origem. Computacionalmente falando, uma forma de contornar este problema é ilustrado no algoritmo implementado.

Todos os algoritmos dos geradores aqui apresentados estão disponíveis no corpo do trabalho e se encontram na Seção (4.2). Para o caso da abordagem via filtros FIR exposta acima, esta pode ser visualizada no Código (4.1).

### 4.1.3 Filtros IIR

Para a abordagem via filtros de resposta ao impulso infinita, dada a dependência sobre seus valores de saída anteriores, é inviável utilizar a estratégia direta aplicada para filtros FIR. Neste caso, será apresentado o desenvolvimento analítico de um método indireto cujo objetivo é determinar os coeficientes de filtro via equação de diferenças. Os métodos baseados na implementação de filtros IIR que serão apresentados a seguir foram originalmente propostos no trabalho de Plaszczynski [60].

Assim como o método via filtros FIR, o objetivo principal desta implementação é desenvolver um filtro que seja capaz de gerar processos cuja densidade espectral obedece a lei de potência do tipo  $1/f^\alpha$ , sendo  $\alpha$  um parâmetro arbitrário. Intuitivamente, a forma mais direta seria tomar como ponto de partida a função de transferência idealizada

$$H(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^{\alpha/2}}. \quad (4.9)$$

Essa escolha, entretanto, apresenta diversos problemas [60]. Para demonstrar a não-trivialidade deste problema, basta aplicar a transformada inversa de Fourier na Equação (4.9) buscando a resposta ao impulso ideal no domínio do tempo

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(i\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^{\alpha/2}} d\omega. \quad (4.10)$$

Uma maneira de calcular este tipo de integral é por meio do Teorema de Resíduos [15]. Segundo o teorema, se uma função  $f(z)$  é analítica dentro de um certo contorno fechado  $C$  – e também sobre este –, excluindo os pontos onde se encontram seus pólos  $z_k$  no interior do contorno, sua integral resulta em:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\{f(z_k)\}. \quad (4.11)$$

Se não houver pólos dentro do contorno, segundo o teorema de Cauchy,

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (4.12)$$

No caso da Equação (4.10), a tentativa de resolver este tipo de integral levanta questões pertinentes sobre a natureza plurívoca desta função complexa, sobre sua multiplicidade dado o pólo na origem e, conseqüentemente, como deve ser efetuado o cálculo do seu resíduo. Levando tudo isso em consideração, a complexidade matemática elevada do problema motivou a busca por outra maneira de gerar estes processos via implementação de filtros IIR.

Assim, visando contornar este problema, Plaszczynski propôs em seu trabalho um método indireto de geração de processos  $1/f^\alpha$  que faz o uso de filtros mais simples de forma sucessiva

para obter uma aproximação do comportamento espectral desejado dado pela Equação (4.10). Como ponto de partida, foi proposto o desenvolvimento do caso específico em que  $\alpha = 2$ . Em se tratando de solução analítica, este é o caso mais simples – não levando em consideração o caso trivial em que  $\alpha = 0$  (ruído branco) –, pois se passa a lidar com uma função analítica unívoca. Busca-se, portanto, a resposta ao impulso ideal do filtro cuja função ode transferência é dada por

$$H(i\omega) = \frac{1}{i\omega}. \quad (4.13)$$

Visto que este resultado é utilizado de forma recorrente em futuros passos do desenvolvimento teórico deste método de geração, será calculada a transformada inversa da função generalizada

$$h_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega + \omega_0)} d\omega. \quad (4.14)$$

em que  $\omega_0 \geq 0$  é uma constante. Para o caso inicial, será utilizado o resultado final em que  $\omega_0 = 0$ .

Tal como foi mencionado anteriormente, é feito o uso da teoria de resíduos para resolver este problema analiticamente. Levando em consideração a definição já apresentada, a integral da Equação (4.14) deve ser tratada com parte de uma integral complexa – a parte situada sobre o eixo real – que será calculada sobre um contorno fechado a ser determinado. Considere, portanto, a função complexa

$$f(z) = \frac{e^{izt}}{iz + z_0}, \quad (4.15)$$

é possível determinar de forma direta o pólo simples (multiplicidade 1) em

$$\omega = iz_0. \quad (4.16)$$

Portanto, considerando o Teorema de Resíduos, tem-se que

$$\oint_C \frac{e^{izt}}{iz + z_0} dz = \left\{ \int_{C_R} + \int_{-R}^R \right\} \frac{e^{izt}}{iz + z_0} dz = 2\pi i \text{Res} \quad f(z = i\omega_0) \quad (4.17)$$

separa o contorno fechado  $C$  em duas partes: sobre a reta  $\text{Re}(z)$  entre  $[-R, R]$  – será tomado o limite em que  $R \rightarrow \infty$  posteriormente – e um arco que liga as duas extremidades. Agora, para determinar o semiplano do arco, deve-se analisar a condição de convergência do integrando. Ao separar o argumento da exponencial em suas partes real e imaginária,

$$\exp(izt) = \exp[i\text{Re}(z)t - \text{Im}(z)t], \quad (4.18)$$

é necessário que, para garantir a convergência, o argumento da parte real mantenha-se negativo. Isso faz com que o problema tenha que ser dividido em duas partes, já que, quando  $t > 0$ , deve-se impor que  $\text{Im}(z) > 0$  (contorno fechado no semiplano superior) e, de maneira análoga, se  $t < 0$ , então  $\text{Im}(z) < 0$  (contorno fechado no semiplano inferior). Ambos os contornos podem ser observados na Figura (13).

Para ambos os casos –  $t > 0$  e  $t < 0$  –, ao tomar o limite em que  $R \rightarrow \infty$ , o Lema de Jordan [15] garante que

$$\int_{C_R} \frac{e^{izt}}{iz + z_0} dz \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

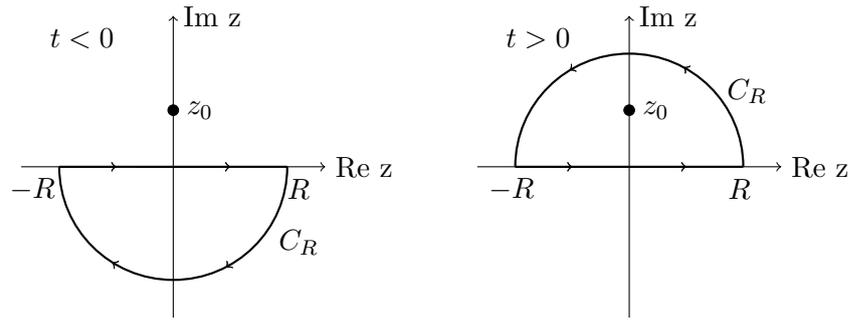


Figura 13 – Gráfico dos contornos fechados para os casos de  $t > 0$  e  $t < 0$ .

e, conseqüentemente, somente a integral sobre o eixo real – que é a parte desejada – tem contribuição para o resultado. Sendo o pólo localizado na parte positiva do eixo imaginário ( $\omega_0 \geq 0$ ), cujo resíduo<sup>1</sup> é dado por

$$\text{Res}_{z=iz_0} \left[ \frac{e^{izt}}{iz + z_0} \right] = \frac{e^{-z_0t}}{i}. \quad (4.20)$$

Utilizando as definições dadas pelas Equações (4.11) e (4.12), é possível calcular as integrais finais. Para o caso em que  $t < 0$ , como não existe pólo dentro do contorno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \omega_0} d\omega = 0 \quad t < 0. \quad (4.21)$$

Já para o outro caso, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \omega_0} d\omega = 2\pi i \frac{e^{-\omega_0 t}}{i} = 2\pi e^{-\omega_0 t} \quad t < 0. \quad (4.22)$$

Portanto, a resposta ao impulso é dada por

$$h_g(t) = \begin{cases} e^{-\omega_0 t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

e, com o intuito de sintetizar o resultado, pode-se reescrevê-lo como

$$h_g(t) = e^{-\omega_0 t} u(t), \quad (4.24)$$

em que  $u(t)$  é a função degrau.

Retornando ao caso inicial com  $\omega_0 = 0$ , a resposta ao impulso desejada no espaço contínuo do tempo é dada por

$$h(t) = u(t) \quad (\alpha = 2). \quad (4.25)$$

O filtro que possui esta resposta característica é chamado de filtro integrador. De maneira geral, o integrador pode ser aproximado pela soma

$$y_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l. \quad (4.26)$$

<sup>1</sup> Existem diversos métodos práticos para realizar o cálculo de resíduos. Para um estudo mais aprofundado sobre o assunto, indica-se [15].

Para tornar a Equação (4.26) causal, isto é, considerar apenas termos passados, multiplica-se a sequência inicial,  $x_l$ , ao sinal degrau unitário definido por

$$u_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

em tempo reverso, isto é,  $u(-n)$ . Com isso, obtém-se finalmente a soma acumulada

$$y_n = \sum_{l=-\infty}^n x_l. \quad (4.28)$$

Analogamente ao caso contínuo, a transformada Z da função degrau unitário contém um termo  $1/z$ , pois é da forma

$$\mathcal{Z}[u](z) = \mathcal{H}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad (4.29)$$

em que sua ROC é dada por  $|z| > 1$ .

Para melhor visualizar o comportamento dessa função, é possível fazer a substituição  $z = e^{i\omega}$  de forma a se lidar nesse caso com a transformada de Fourier, como já foi discutido previamente no Capítulo 3. Feita esta substituição, estima-se o espectro:

$$\begin{aligned} |H(e^{i\omega})|^2 &= \frac{1}{1 - e^{-i\omega}} \cdot \frac{1}{1 - e^{i\omega}} \\ &= \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad \text{com } \omega \in ]0, \pi]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A densidade espectral do integrador pode ser visualizada na Figura (14).

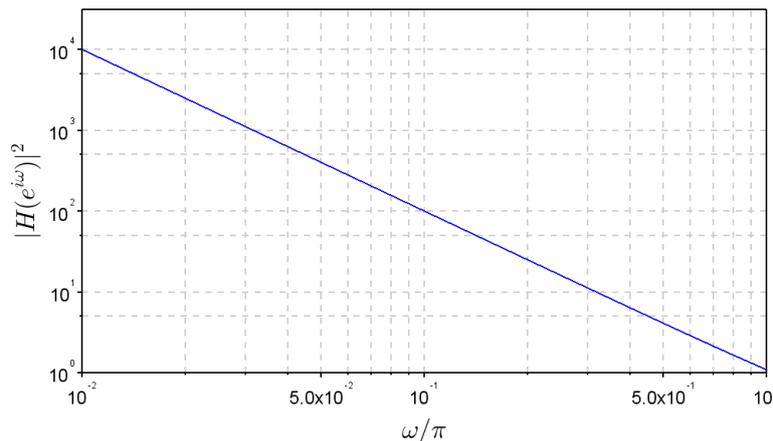


Figura 14 – Gráficos da densidade espectral do integrador dado pela Equação (4.30) em escala logarítmica.

Na prática, o integrador poderia ser obtido por meio do produto de convolução das transformadas Z do sinal de entrada (ruído branco) e do degrau unitário, pois tal como mostrado na Equação (4.28), há no domínio do tempo um produto usual, de forma que no espaço Z haveria uma convolução [53]. Entretanto, o caminho mais natural é buscar a equação de diferenças que

leva ao espectro desejado. Reescrevendo a definição da função de transferência para facilitar o desenvolvimento, esta é definida por:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}. \quad (4.31)$$

Lembrando que um atraso  $n_0$  nos sinais de entrada leva a uma multiplicação por  $z^{-n_0}$  no plano complexo, é simples verificar pelas Equações (4.29) e (4.31) que a equação de diferenças é dada por

$$y_n = y_{n-1} + x_n. \quad (4.32)$$

A Equação (4.32) representa um filtro auto-regressivo, ou seja, a saída depende não somente do sinal de entrada, mas também do valor de saída anterior. Este processo de filtragem ilustra a geração de processos com densidade espectral  $1/f^2$  e sua implementação pode ser observada no Código (4.2) da próxima seção.

Tendo em vista a aplicação dos métodos aqui sendo apresentados no estudo de fenômenos físicos reais, é de grande interesse que alguns novos parâmetros sejam introduzidos. O primeiro parâmetro está relacionado a um dos problemas fundamentais em se tratando de processos  $1/f$ : a divergência que ocorre conforme a frequência se aproxima da origem. Especialmente relacionado a dispositivos eletrônicos [16, 19], foram realizados experimentos que buscavam encontrar um valor mínimo de frequência para o qual este comportamento espectral desaparecesse visto que, na ausência de tal limite, o processo teria energia infinita, o que é fisicamente impossível. Portanto, levando em consideração esta necessidade básica, foi adicionado ao filtro integrador apresentado um limite inferior de frequência de modo que, para valores menores, a densidade espectral volta a ser constante (ruído branco).

Começando com a implementação de um limite inferior

$$\omega_{min} = 2\pi f_{min}, \quad (4.33)$$

busca-se agora uma resposta com densidade espectral da forma:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{\omega_{min}^2}{\omega^2 + \omega_{min}^2}. \quad (4.34)$$

Para observar que a densidade espectral dada pela Equação acima se comporta da forma desejada conforme a frequência diminui, é possível reescrevê-la como

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega/\omega_{min})^2 + 1} \rightarrow 1, \quad (4.35)$$

quando  $\omega \ll \omega_{min}$ . Ou seja, quando a frequência está abaixo do limite inferior estipulado, a densidade espectral tende a ser constante, tal como era desejado. No caso contrário, onde  $\omega \gg \omega_{min}$ , o comportamento  $1/\omega^2$  é predominante.

Dado (4.34), a resposta ao impulso ideal do filtro é da forma

$$H(i\omega) = \frac{\omega_{min}}{i\omega + \omega_{min}}. \quad (4.36)$$

Repare que, sendo a resposta ao impulso ideal para este caso dada por

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(i\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{min}}{i\omega + \omega_{min}} e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.37)$$

esta é exatamente a transformada inversa já calculada para o caso geral de  $h_g$  dada pela Equação (4.24). Dessa forma, é possível determinar o resultado ideal em tempo contínuo de forma direta de modo que

$$h(t) = \omega_{min} e^{-\omega_{min} t} u(t). \quad (4.38)$$

A presença da exponencial faz com que a transição para seu análogo discreto não possa ser feita da forma direta tal como foi feito para o caso do integrador simples. Para determinar sua equação de diferenças aplicando a transformada  $Z$  na resposta ao impulso discretizada, deve ser introduzido antes um período de amostragem  $T_s$  de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{h\}(z) = H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nT_s) z^{-n} \\ &= \frac{\omega_{min}}{1 - e^{-\omega_{min} T_s} z^{-1}}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

em que, para garantir a convergência da série,  $|z| > e^{-\omega_{min} T_s}$  (série geométrica). Novamente, fazendo uso da propriedade de deslocamento temporal no sinal e, ao inverter a transformada usando o resultado de (4.39), encontra-se uma equação de diferenças dada por

$$y_n = e^{-\omega_{min} T_s} y_{n-1} + \omega_{min} x_n. \quad (4.40)$$

Ainda se tratando de simulações de fenômenos físicos reais, apenas o limite inferior não é suficiente. O próximo parâmetro que deve ser introduzido neste método de geração sendo desenvolvido é o limite de frequência superior, viabilizando, assim, a possibilidade de geração de processos que possuem este comportamento espectral apenas dentro de uma determinada faixa de frequência  $[f_{min}, f_{max}]$ . Para isso, busca-se então uma resposta com densidade espectral da forma:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2 + \omega_{max}^2}{\omega^2 + \omega_{min}^2}, \quad (4.41)$$

em que  $\omega_{max} = 2\pi f_{max}$ . Esta forma, além de manter o comportamento no limite onde  $\omega \ll \omega_{min}$  apresentado no caso anterior, também tende a ser constante no limite onde  $\omega \gg \omega_{max}$ .

A partir deste ponto, existem duas rotas que podem ser tomadas para determinar os coeficientes da equação de diferença deste filtro: a primeira segue os passos que foram tomados nos dois filtros anteriores – encontrar a solução ideal analiticamente através da transformada inversa de Fourier (IFT), discretizar o resultado no domínio do tempo e aplicar a transformada  $Z$  – e a segunda se dá através da aplicação direta da transformada bilateral. Repare que, por mais que esteja sendo feita a restrição  $s = i\omega$  na função de transferência, esta ainda se encontra no domínio de Laplace; portanto, tal como foi discutido no Capítulo 3, é possível mapear diretamente  $H(s)$  em  $H(z)$ .

Com o intuito de conservar a linha de raciocínio sendo utilizada, será desenvolvida a primeira abordagem tal como foi feita até este ponto; porém, para a implementação do filtro em si, foram utilizados os coeficientes derivados através da transformação bilinear, esta que também será desenvolvida em seguida. O motivo para esta escolha será discutido adiante.

Dada a abordagem original, busca-se uma resposta ao impulso do filtro da forma

$$H(i\omega) = \frac{i\omega + \omega_{max}}{i\omega + \omega_{min}}. \quad (4.42)$$

Com o intuito de facilitar os cálculos,  $H(i\omega)$  pode ser separada em dois termos, levando em consideração a linearidade da transformada de Fourier. De forma direta, o segundo termo com a constante  $\omega_{max}$  no numerador pode ser calculado de maneira análoga à integral da Equação (4.14) de modo que

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\omega_{max}}{i\omega + \omega_{min}} \right\} (t) = \omega_{max} e^{-\omega_{min}t} u(t). \quad (4.43)$$

Já o primeiro termo que aparenta maior complexidade devido a presença de  $\omega$  não só no denominador como também no numerador pode ser simplificado através da seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \omega_{min}} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega}{i\omega + \omega_{min}} e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.44)$$

Com isso, é possível também utilizar o resultado da Equação (4.14) para este termo. Note que a derivada sendo aplicada é *temporal* e não frequencial. Assim, obtém-se para a transformação inversa o seguinte resultado:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i\omega}{i\omega + \omega_{min}} \right\} (t) = \frac{d}{dt} [e^{-\omega_{min}t} u(t)]. \quad (4.45)$$

Agora, deve ser discutido brevemente a questão da relação

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t). \quad (4.46)$$

Muito encontrada na literatura da Física relacionada a teoria de distribuições [15, 2], esta não está completamente correta dado que, mesmo sendo

$$\frac{d}{dt} u(t) = 0 \quad x \neq 0, \quad (4.47)$$

esta derivada não existe na origem, ponto este em que deveria se encontrar o pico da função  $\delta(t)$  [15]. Ainda assim, é possível utilizar o resultado da Equação (4.46) como uma aproximação válida, tendo sempre em vista suas limitações.

Portanto, após esta discussão sobre a validade de tomar a delta de Dirac como derivada da função degrau, a transformada inversa dada pela Equação (4.45) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i\omega}{i\omega + \omega_{min}} \right\} (t) = e^{-\omega_{min}t} [\delta(t) - \omega_{min}u(t)] \quad (4.48)$$

e, ao juntar os resultados de (4.43) e (4.48), obtém-se

$$h(t) = (\omega_{max} - \omega_{min}) e^{-\omega_{min}t} u(t) + e^{-\omega_{min}t} \delta(t). \quad (4.49)$$

Mais uma vez, é possível separar  $h$  em dois termos para facilitar o cálculo na aplicação da transformada  $Z$  após introduzir o período de amostragem  $T_s$  no processo de discretização da resposta ao impulso ideal encontrada. Fazendo uso da propriedade de filtragem da delta de Dirac, encontra-se, por fim, a função de transferência da forma:

$$H(z) = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min} + 1) - e^{-\omega_{min}T_s} z^{-1}}{1 - e^{-\omega_{min}T_s} z^{-1}}, \quad (4.50)$$

onde  $|z| > e^{-\omega_{min}T_s}$  para garantir a convergência da série. Diferentemente dos casos anteriores, a presença da delta em  $h(t)$  fez com que aparecesse um termo com  $z^{-1}$  também no numerador. Isso implica na existência de um deslocamento temporal não só no sinal de saída do filtro, mas também no sinal de entrada. Assim, ao inverter a transformada Z, a equação de diferenças para o caso com limite superior é dada por:

$$y_k = ax_k - bx_{k-1} + by_{k-1}, \quad (4.51)$$

onde  $a = \omega_{max} - \omega_{min} + 1$  e  $b = e^{-\omega_{min}T}$ .

O filtro dado pela Equação (4.51), entretanto, não apresentou bons resultados quando implementado computacionalmente. Mais especificamente, o limite inferior ditado na frequência não apresentou o comportamento desejado (constante). Com isso, a presença deste erro fez com que surgisse o questionamento sobre a efetividade da aproximação feita na Equação (4.45) para este caso específico.

Assim, considerando as irregularidades encontradas no resultado da primeira forma de implementação, foi utilizada a segunda rota para, novamente, determinar os coeficientes da equação de diferenças do filtro. Tal como foi visto na Seção 3.3, a transformada bilinear faz um mapeamento de modo que  $s$  e  $z$  se relacionam através da Equação (3.78). Fazendo esta substituição na função de transferência ideal dada por (4.42), este se torna um problema algébrico que pode ser simplificado até que se encontre

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1}}{1 - b_1z^{-1}}, \quad (4.52)$$

em que  $a_0 = (f_s + \pi f_{max}) / (f_s + \pi f_{min})$ ,  $a_1 = -(f_s - \pi f_{max}) / (f_s + \pi f_{min})$  e  $b_1 = (f_s - \pi f_{min}) / (f_s + \pi f_{min})$  sendo  $f_s = 1/T_s$  a frequência de amostragem. Portanto, a equação de diferenças acima resulta no filtro

$$y_k = a_0x_k + a_1x_{k-1} + b_1y_{k-1}. \quad (4.53)$$

Como no resultado anterior dado pela Equação (4.51), existe a dependência também no valor anterior da saída e sua implementação computacional pode ser analisada no Código (4.3).

#### 4.1.4 Filtro generalizado

Até este ponto, foram discutidos apenas filtros capazes de gerar processos  $1/f^2$ . Por mais que inclusão de limites na frequência conceda um controle maior sobre os processos gerados, o objetivo original era implementar filtros capazes de gerar processos do tipo  $1/f^\alpha$ . Portanto, é preciso generalizar os resultados obtidos até aqui.

Busca-se, agora, uma resposta ao impulso com densidade espectral da forma:

$$|H(i\omega)|^2 = \left| \frac{\omega^2 + \omega_{max}^2}{\omega^2 + \omega_{min}^2} \right|^{\alpha/2}. \quad (4.54)$$

Marvin Keshner apresentou em seu trabalho um método baseado no *modelo RC infinito* [40] para gerar processos  $1/f^\alpha$  através de uma soma de filtros  $1/f^2$  igualmente espaçados no eixo logarítmico da frequência. Com isso, Plaszczynski sugere em [60] uma variação do modelo

original de Keshner em que a densidade espectral da Equação (4.54) pode ser aproximada através de:

$$|H(i\omega)|^2 \approx \prod_{i=0}^{N_f-1} \frac{\omega^2 + z_i^2}{\omega^2 + p_i^2}, \quad (4.55)$$

onde  $z_i$  são os zeros da resposta ao impulso do filtro e  $p_i$  são seus pólos. Note que há agora um número  $N_f$  de filtros já apresentados anteriormente. Portanto, como já se sabe trabalhar com esse tipo de filtro, o que se deve determinar para gerar o processo são apenas os zeros e os pólos de cada um deles, além da quantidade de filtros utilizados para uma boa aproximação [64].

O primeiro passo é determinar o valor de  $\alpha$  desejado. Os extremos  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2$  são os casos mais simples, já que a saída do primeiro é exatamente o ruído branco de entrada e o segundo é a aplicação de uma unidade do filtro já projetado. Em escala logarítmica, os pólos e zeros ficam distribuídos de maneira regular no eixo da frequência [60]. Ou seja, cada  $p_i$  está localizado a uma distância

$$\Delta p = \frac{\log(\omega_{max}) - \log(\omega_{min})}{N_f} \quad (4.56)$$

do pólo do filtro anterior, de modo que

$$\log p_{i+1} = \log p_i + \Delta p. \quad (4.57)$$

Para os zeros do filtro, a posição de cada um é calculada levando em consideração a geometria do problema, visando argumentos de simetria [64, 65]. Assim,

$$\log z_i = \log p_i + \frac{\alpha \Delta p}{2}. \quad (4.58)$$

Portanto, a última informação necessária para a geração utilizando esse tipo de filtro é a posição do primeiro polo. Com isso, a posição dos outros polos e de todos os zeros podem ser calculados através das Equações (4.57) e (4.58). Também considerando a geometria do problema [60],

$$\log p_0 = \log \omega_{min} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\Delta p}{2}. \quad (4.59)$$

Do ponto de vista de programação, aparece quase um processo recursivo – por mais que se esteja realimentando filtros integradores, os coeficientes dos filtros não são idênticos visto que estes dependem de seus respectivos polos e zeros – na implementação desse filtro. Há uma sequência de filtros já implementados anteriormente no caso de  $\alpha = 2$  onde seus parâmetros de frequências mínima e máxima são determinados pelas posições dos polos e zeros discutidos acima. Assim, a saída do primeiro filtro se torna a entrada do segundo, sendo sua saída, de maneira análoga, a entrada do terceiro, e assim sucessivamente para os  $N_f$  filtros. Sua implementação pode ser observada no Código (4.4).

Foram, portanto, desenvolvidos quatro diferentes filtros, sendo apenas dois deles capazes de gerar processos  $1/f^\alpha$  para valores de  $\alpha$  gerais. Com o desenvolvimento analítico finalizado, surge agora a discussão relacionada a parte computacional do problema. Esta será abordada na próxima Seção, sendo também mostrados os resultados numéricos obtidos através da implementação dos filtros aqui apresentados.

## 4.2 Aplicação computacional

Finalizado o desenvolvimento analítico dos filtros, pode-se dar prosseguimento na sua implementação computacional. Para isso, tópicos importantes diretamente relacionados com o processo de geração dos sinais de saída devem ser discutidos tais como geradores de números aleatórios, métodos de estimação espectral e os respectivos códigos dos métodos em si. Todo o desenvolvimento relacionado ao ambiente computacional foi feito utilizando o *software* livre Scilab e, caso interessado, maiores informações sobre a plataforma e suas bibliotecas podem ser encontradas em [68].

### 4.2.1 Gerador de números aleatórios

Dado que o sinal de entrada de todos os sistemas implementados é um ruído branco, ou seja, é uma sequência numérica de valores aleatórios completamente não-correlacionados (neste caso, com distribuição uniforme), torna-se necessário abordar o tópico da geração de números aleatórios. Existem duas abordagens principais para gerar números aleatórios computacionalmente: os chamados geradores de números pseudo-aleatórios (PRNG, do inglês *pseudorandom number generator*) e os geradores de números aleatórios verdadeiros (TRNG, do inglês *true random number generator*). Os TRNGs dependem da aleatoriedade de fenômenos físicos para gerar seus números [24, 63], enquanto os PRNGs são algoritmos que produzem uma sequência de números que aparenta ser aleatória, porém ainda são processos determinísticos e periódicos [26].

Estes processos de geração possuem papel central em diversas áreas de pesquisa e entre elas está a Física Computacional. Para o caso do ruído branco utilizado como sinal de entrada nos filtros aqui implementados, foi utilizado em todos os testes numéricos o próprio gerador do Scilab `rand()`. Quando selecionada a distribuição uniforme<sup>2</sup> (*default*), este PRNG gera matrizes de número pseudo-aleatórios através da fórmula de recorrência:

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod m \quad 0 \leq x_i < m, \quad (4.60)$$

em que  $a$ ,  $c$  e  $m$  são constantes chamadas de multiplicador, incremento e módulo, respectivamente, junto com a chamada semente (*seed*)  $x_0$  que é o valor inicial fornecido. Este é conhecido como gerador congruente linear e, dependendo de qual for sua finalidade, tem-se que suas constantes devem ser escolhidas com cuidado pois elas estão relacionadas com o período do gerador [26]. Um exemplo do ruído branco gerado utilizado neste trabalho pode ser observado na Figura (15).

O modo como os números aleatórios do sinal de entrada devem ser gerados depende da situação com a qual se esteja trabalhando, podendo torna-se necessária uma análise matemática mais cautelosa para se certificar que a aleatoriedade da sequência de entrada seja suficientemente boa.

<sup>2</sup> Em se tratando do trabalho sendo desenvolvido, apenas a distribuição uniforme dentro do intervalo [0,1) foi necessária para a geração dos processos. Na necessidade de gerar uma matriz de números pseudo-aleatórios com diferentes distribuições, sugere-se como opção a função `grand()` também disponível nas bibliotecas do Scilab [68].

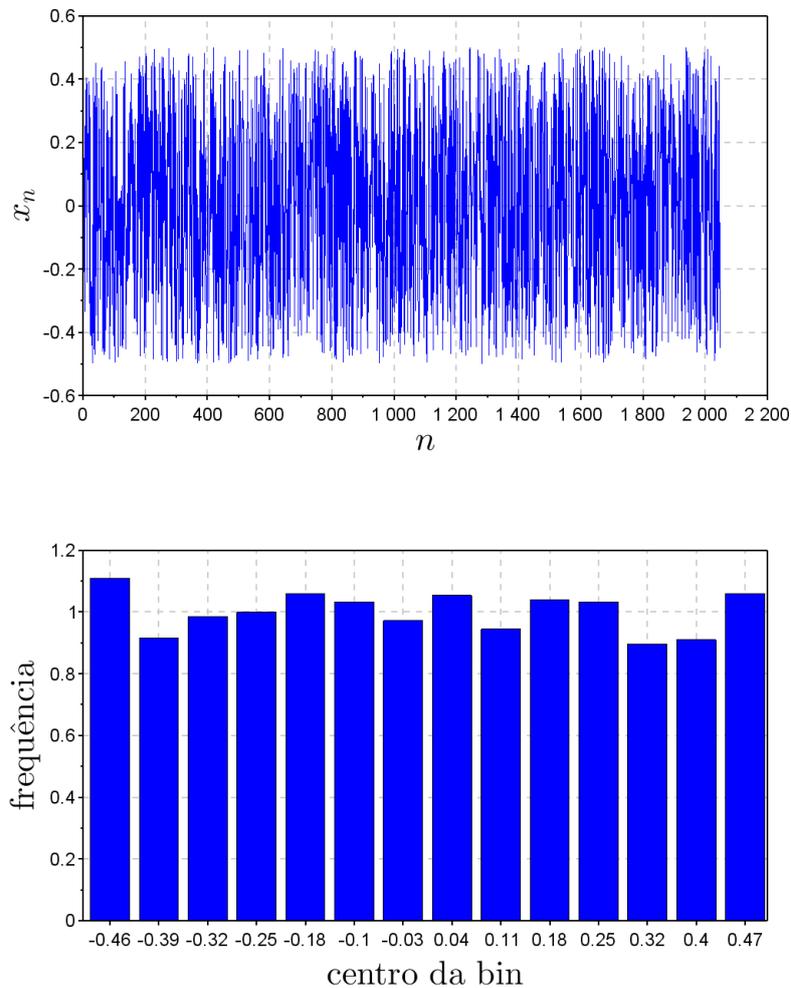


Figura 15 – Ruído branco com média nula e  $N = 2048$  realizações e seu respectivo histograma.

#### 4.2.2 Estimação espectral: o método de Welch

Tomando a revisão de processos estocásticos feita no Capítulo 3, foi exposto o problema da impossibilidade de utilização da análise usual tempo-frequência tal como é feita para sinais determinísticos visto que a transformada de Fourier não é definida para esta classe de processos. Toma-se, portanto, que uma das formas de interpretação do espectro de um sinal aleatório é feita através da aplicação de transformadas sobre médias estatísticas [55].

Levando em consideração que os sinais de entrada e, conseqüentemente, também os de saída para todos os métodos de geração projetados neste trabalho são sinais aleatórios, torna-se necessário escolher um método de estimação espectral para que possa ser feita a análise necessária sobre o comportamento espectral dos processos gerados pelos filtros. Como já mencionado, para o caso unidimensional foi utilizado o método de Welch [62, 80].

Este método não-paramétrico que visa diminuir a variância da abordagem de estimação espectral via periodograma discutido na Seção 3.4 é, na verdade, uma variação do método de Bartlett [62, 9]. No caso de Bartlett, sua estratégia se baseia em dividir a sequência  $x$  de

tamanho  $N$  analisada em  $K$  segmentos menores de tamanho  $M$  de modo que

$$x_n^{(i)} = x_{n+iM} \quad (4.61)$$

em que  $i = 0, \dots, K - 1$  e  $n = 0, \dots, M - 1$ . Assim, a densidade espectral da sequência  $x$  é então calculada através de uma média sobre as densidades das sequências menores

$$S_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} S_{xx}^{(i)}(f) \quad (4.62)$$

sendo  $S_{xx}^{(i)}$  calculados através da Equação (3.131). Levando em consideração esta abordagem, Welch a alterou introduzindo as seguintes mudanças: na divisão em  $K$  segmentos menores, ficou permitido que acontecesse *overlap* entre eles e, antes de estimar  $P_{xx}^{(i)}$  das sequências para o cálculo da média, foi introduzido um processo de janelamento de modo que a Equação (3.131) para cada sequência passa a ser escrita como

$$S_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_n^{(i)} w_n e^{-2\pi i f n} \right|^2, \quad (4.63)$$

em que  $U$  é um fator de normalização da janela sendo utilizada [62]. Ambos os métodos de estimação são consistentes, podendo a estimativa dada pelo método de Welch ser um pouco melhor dependendo dos parâmetros – janelamento e *overlap* – escolhidos [62].

Em se tratando da implementação computacional, este método é dado pela função `pspect()` do Scilab [68]. Para as análises feitas sobre os processos unidimensionais gerados neste trabalho, foi utilizada a janela de Hamming com 512 pontos e um *overlap* de 50%.

### 4.2.3 Algoritmos

Dada a fundamentação matemática dos métodos de geração de processos  $1/f^\alpha$  feita, serão aqui apresentados seus respectivos códigos. Como já foi mencionado, todos os algoritmos foram escritos em linguagem Scilab; tendo a vantagem de ser gratuito e *open source*, este foi escolhido devido a sua linguagem de fácil entendimento e a disponibilidade de sua biblioteca de ferramentas de processamento de sinais. Mesmo que o leitor não esteja familiarizado, esta é uma linguagem de fácil interpretação e todos os códigos foram comentados visando auxiliar a sua compreensão.

A primeira abordagem feita utilizando design de filtros FIR está demonstrada no Código (4.1). Neste caso, assumiu-se que a constante presente na função de transferência é igual à 1. Em relação aos parâmetros que devem ser introduzidos, fica sobre o controle do usuário determinar tanto o tamanho  $N$  dos vetores para os sinais de entrada  $x$  e saída  $y$  quanto o parâmetro  $\alpha$  que caracteriza o processo.

```

pi = %pi;

x = rand(N,1,"uniform");
x = x - mean(x); // anula o valor medio da sequencia

X = fft(x);

indN = N/2 + 1; // numero de pontos independentes da FFT

```

```

X = X(1:indN);
w = linspace(0,pi,indN)';           // cria vetor dos indices de frequencia

H = 1.0 ./ sqrt(w .^ alpha);       // funcao de transferencia

bIsInf = find(isinf(H));           // remove singularidades e substitui por 1
H(bIsInf) = 1.0;

Y = H .* X;                         // calcula a saida no espaco reciproco

Y = [Y;conj(Y(indN-1:-1:2))];      // reconstroi o espectro completo da saida

y = real(fft(Y, 1.));              // inverte para obter a saida no dominio do
                                   // tempo mantendo apenas sua parte real

```

Código 4.1 – Código SCILAB para geração de processo  $1/f^\alpha$  utilizando a abordagem via filtros FIR.

Observa-se na Figura (16) quatro tipos diferentes de processos gerados pelo Código (4.1) para os casos em que  $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5$  e  $2$ . À esquerda se encontram as saídas dos sistemas no domínio do tempo e à direita suas respectivas densidades espectrais em função da frequência normalizada. Para que seja visualizado o comportamento  $1/f$ , os gráficos das densidades foram plotados em escala logarítmica visto que

$$\log [S_y(f)] = \log \left( \frac{1}{f^\alpha} \right) = -\alpha \log(f). \quad (4.64)$$

Portanto, ao utilizar esta escala, fica evidente a relação linear entre a frequência e a densidade espectral dos processos.

Para a abordagem feita utilizando filtros IIR, o ponto de partida foi implementar um filtro integrador cuja equação de diferenças levou na relação entre os sinais de entrada e saída apresentada na Equação (4.32). Como foi mencionado na seção anterior, este é na verdade um filtro auto-regressivo e sua implementação pode ser observada no Código (4.2) abaixo. Para os parâmetros que podem ser controlados, visto que este filtro gera apenas processos cujo espectro são do tipo  $1/f^2$ , pode-se apenas alterar o tamanho do vetor  $N$  que será gerado pela algoritmo.

```

y = zeros(N,1);

x = rand(N,1,"uniform");

x = x - mean(x);                     // anula o valor medio da sequencia

for i = 2:N
    y(i) = x(i) + y(i-1);
end

```

Código 4.2 – Código SCILAB para geração de processo  $1/f^2$  utilizando a abordagem de filtros IIR (filtro integrador).

Um exemplo de sinal gerado por este algoritmo pode ser observado na Figura (17).

Dado o filtro integrador, foram então introduzidos outros fatores relacionados ao controle do sistema sendo gerado. Obedecendo à Equação (4.53), foi desenvolvido um segundo filtro

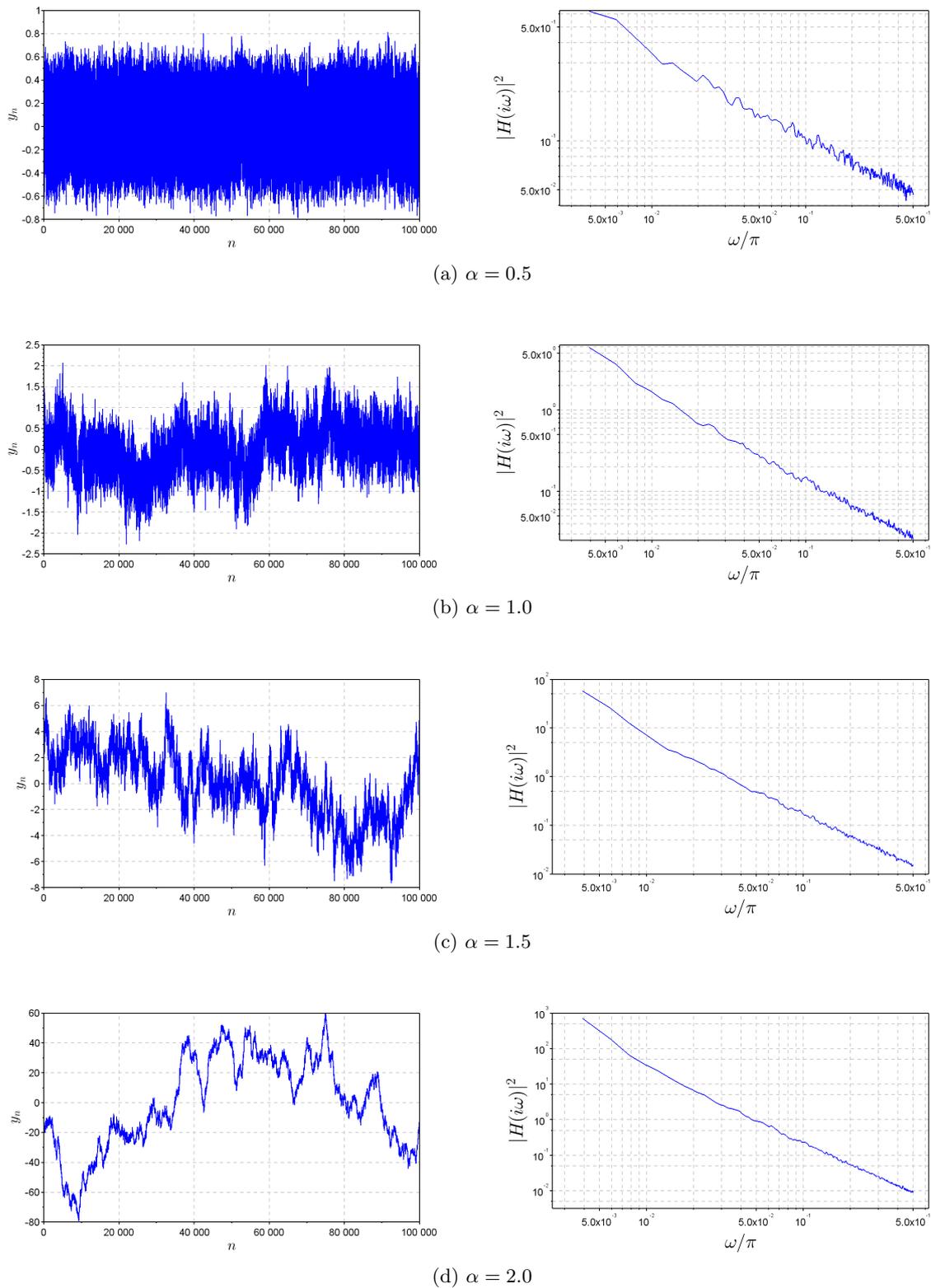


Figura 16 – Gráficos de processos gerados via abordagem de filtros FIR dada pelo Código (4.1) (esquerda) e suas respectivas densidades espectrais (direita) em escala logarítmica calculadas utilizando o método de Welch. Através de uma regressão linear, foram calculados os respectivos coeficientes angulares: (a) -0.515, (b) -1.034, (c) -1.559 e (d) -2.096.

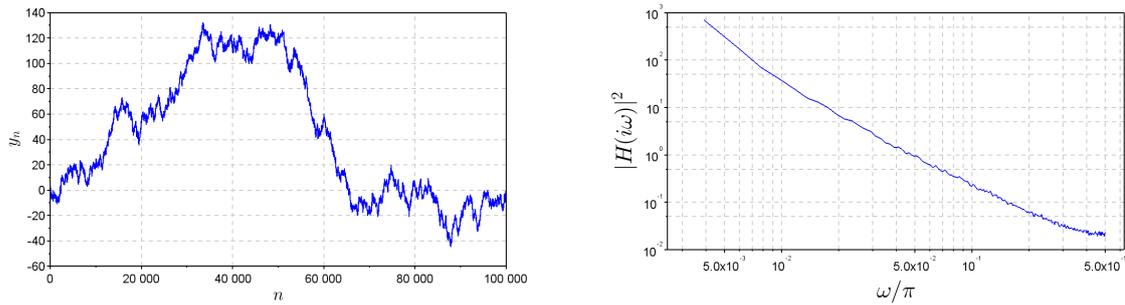


Figura 17 – Gráfico do processo gerado via abordagem de filtros IIR dada pelo Código (4.2) (esquerda) e sua respectiva densidade espectral (direita) em escala logarítmica calculada utilizando o método de Welch. Através de regressão linear, foi calculado o coeficiente angular  $\alpha = -1.984$ .

baseado na abordagem de filtros IIR que modificava o sistema anterior de modo que o comportamento  $1/f^2$  (filtro integrador) do sinal de saída esteja limitado a uma dada faixa de frequência  $[f_{min}, f_{max}]$  e que, para valores de frequência fora desta faixa, a densidade espectral do sinal de saída deve ser aproximadamente constante (ruído branco). No aspecto computacional do problema sendo lidado, a implementação do seu algoritmo pode ser feita de forma direta; esta pode ser observada no Código (4.3). Deve-se chamar atenção, entretanto, para o fato de que novos parâmetros foram introduzidos e devem ser definidos previamente: os limites da faixa de frequência `fmin` e `fmax` e o período de amostragem `tsample`. Para este caso, um exemplo de sinal gerado pode ser observado na Figura (18).

```

y = zeros(N,1);

x = rand(N,1,"uniform");           // anula o valor medio da sequencia

x = x - mean(x);

fsample = 1.0 / tsample;
pi = %pi;

rmin = (pi * fmin) / fsample;      // calcula as frequencias reduzidas
rmax = (pi * fmax) / fsample;

a0 = (1.0 + rmax) / (1.0 + rmin);  // calcula os coeficientes do filtro
a1 = -(1.0 - rmax) / (1.0 + rmin);
b1 = (1.0 - rmin) / (1.0 + rmin);

for i = 2:N
    y(i) = a0 * x(i) + a1 * x(i-1) + b1 * y(i-1);
end

```

Código 4.3 – Código SCILAB para geração de processo  $1/f^2$  utilizando a abordagem de filtros IIR (filtro integrador) entre uma dada faixa de frequência  $[f_{min}, f_{max}]$ .

Por último, foi apresentado o método generalizado visto que o objetivo do desenvolvimento destes filtros era gerar processos do tipo  $1/f^\alpha$ . Baseado no modelo de Kershner [40] cuja aproximação da função de transferência é dada pela Equação (4.55), foi visto que é possível gerar estes tipos de processos fazendo uso de sucessivos filtros  $1/f^2$  mais simples. Do ponto de vista

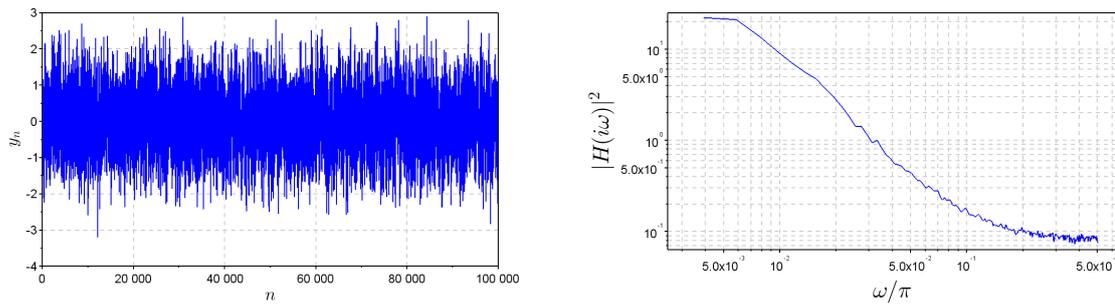


Figura 18 – Gráfico do processo gerado via abordagem de filtros IIR dada pelo Código (4.3) (esquerda) e sua respectiva densidade espectral (direita) em escala logarítmica calculada utilizando o método de Welch dentro do limite de frequências  $f_{min} = 5 \times 10^{-3}$  e  $f_{max} = 10^{-1}$ . Através de regressão linear, foi calculado o coeficiente angular  $\alpha = -2.001$ .

de programação, tem-se um processo de natureza quase recursiva na implementação deste filtro. O que se tem, na verdade, é uma sequência de filtros já implementados pelo Código (4.3) onde seus parâmetros de frequências mínima e máxima são determinados pelas posições dos polos e zeros discutidos na seção anterior. Assim, a saída do primeiro filtro se torna a entrada do segundo, sendo sua saída, de maneira análoga, a entrada do terceiro, e assim sucessivamente para os  $N_f$  filtros determinados pelo usuário. Assim, é necessário determinar, além dos parâmetros do código anterior (limite de frequência e período de amostragem), o número de filtros que será utilizado. Um detalhe que deve ser apontado neste método é que os valores anteriores de entrada e saída utilizados na Equação (4.53) deve ser armazenado para cada filtro durante o processo de filtragem. Isto pode ser observado no Código (4.4) abaixo.

```

y = zeros(N,1);

x = rand(N,1,"uniform");

x = x - mean(x);           // anula o valor medio da sequencia

fsample = 1.0 / tsample;
pi = %pi;

wmin = 2.0 * pi * fmin;
wmax = 2.0 * pi * fmax;

logWmin = log10(wmin);    // encontra a posicao das frequencias
logWmax = log10(wmax);    // em escala logaritmica

dp = (logWmax - logWmin) / Nf; // calcula a distancia entre os polos

logP = zeros(Nf,1);      // calcula as posicoes dos polos e zeros
logZ = zeros(Nf,1);

logP(1) = logWmin + dp * (1.0 - alpha / 2.0) / 2.0;
logZ(1) = logP(1) + (alpha * dp) / 2.0;

for i = 2:Nf
    logP(i) = logP(i-1) + dp;
    logZ(i) = logZ(i-1) + (alpha * dp) / 2.0;

```

```

end

pole = zeros(Nf,1);           // retorna as frequencias para a escala
zero = zeros(Nf,1);          // linear

for i = 1:Nf
    pole(i) = 10.0 ^ logP(i);
    zero(i) = 10.0 ^ logZ(i);
end

yF = zeros(Nf,1);           // cria vetores para armazenar os valores
xF = zeros(Nf,1);           // anteriores de entrada e saida e os
a = zeros(Nf,1);            // coeficientes para cada filtro Nf
b = zeros(Nf,1);

for i = 1:Nf
    rmin = pole(i) / (2 * fsample);
    rmax = zero(i) / (2 * fsample);

    a0(i) = (1.0 + rmax) / (1.0 + rmin);
    a1(i) = -(1.0 - rmax) / (1.0 + rmin);
    b1(i) = (1.0 - rmin) / (1.0 + rmin);
end

for i = 1:N
    x2 = x(i);

    for j = 1:Nf
        y2 = a0(j) * x2 + a1(j) * xF(j) + b1(j) * yF(j);

        xF(j) = x2;           // atualiza os valores das variaveis
        yF(j) = y2;
        x2 = y2;
    end

    y(i) = y2;
end

```

Código 4.4 – Código SCILAB para geração de processo  $1/f^\alpha$  utilizando a abordagem de filtros IIR (filtro integrador) entre uma dada faixa de frequência  $[f_{min}, f_{max}]$ .

Assim como foi feito para filtros FIR, foram gerados e plotados sinais com  $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5$  e  $2$ , porém agora com o comportamento  $1/f^\alpha$  limitado a uma faixa de frequência  $f_{min} = 5 \times 10^{-3}$  e  $f_{max} = 10^{-1}$  tal como visto na Figura (18). Os processos gerados e suas respectivas densidades espectrais podem ser visualizados na Figura (19).

### 4.3 Caso bidimensional

A abordagem através de processamento de sinais não se limita ao caso unidimensional. Os conceitos utilizados no desenvolvimento matemático e computacional apresentado nas Seções 4.1 e 4.2 podem ser expandidos para simulações de processos com mais de uma dimensão. Por mais que filtros IIR elucidem melhor a dinâmica de geração do processo, a praticidade quase natural da implementação dos filtros FIR torna este o método mais viável, principalmente levando em consideração a grande complexidade das ferramentas matemáticas necessárias para a projeção

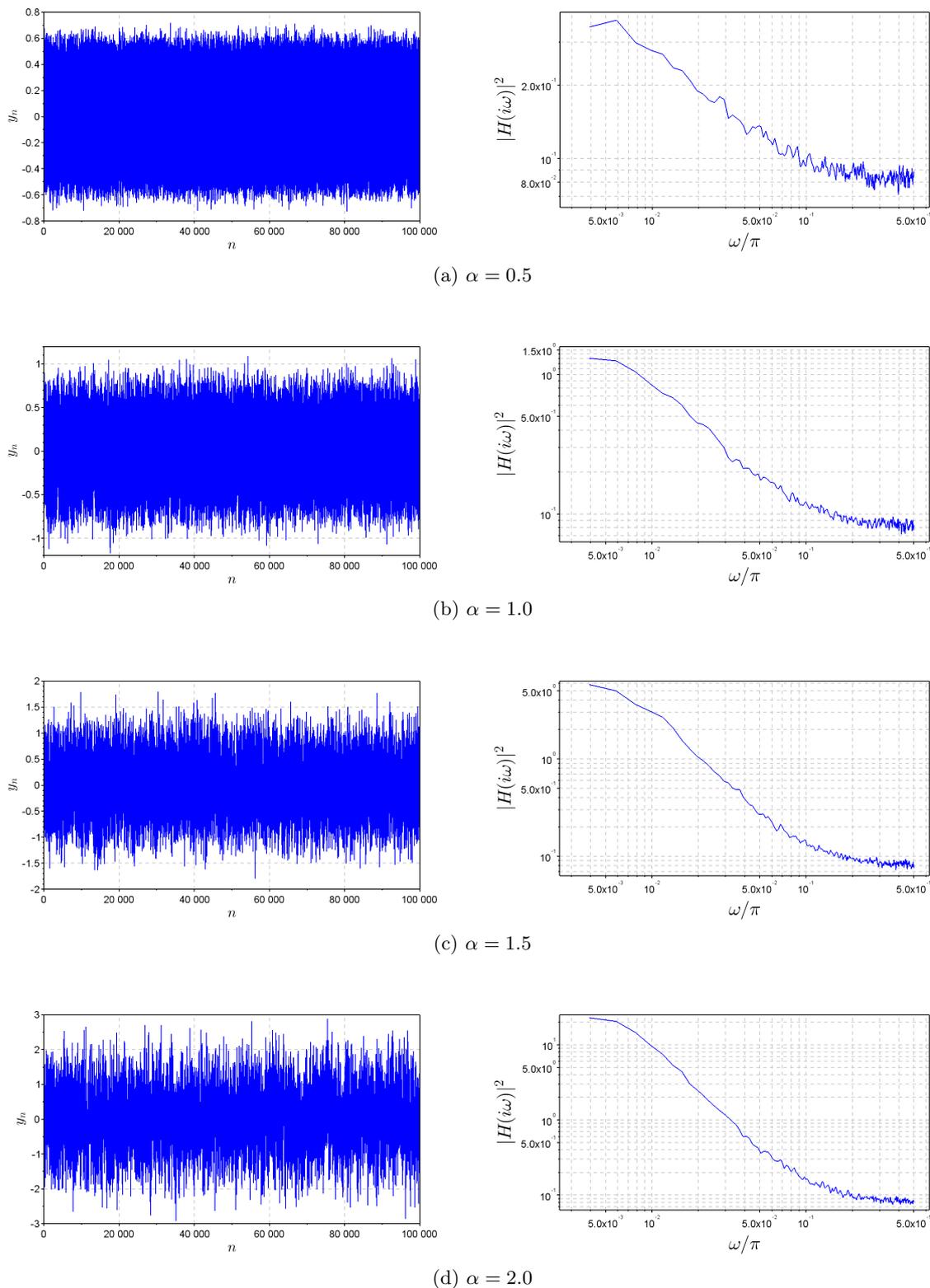


Figura 19 – Gráficos de processos gerados via abordagem de filtros IIR dada pelo Código (4.4) (esquerda) e suas respectivas densidades espectrais (direita) em escala logarítmica calculadas utilizando o método de Welch. Com  $N_f = 6$  e dentro dos limites de frequência  $f_{min} = 5 \times 10^{-3}$  e  $f_{max} = 10^{-1}$ , foram calculados, aproximadamente, os respectivos coeficientes angulares: (a) -0.499, (b) -1.01, (c) -1.510 e (d) -1.989.

deste tipo de filtros quando se eleva o número de dimensões com as quais se está trabalhando. Portanto, para o caso de imagens, foi utilizada a mesma abordagem da implementação do Código (4.1).

### 4.3.1 Algoritmo

Assim como no caso unidimensional da seção anterior, toma-se como base a discretização da resposta ao impulso do filtro ideal seguido da multiplicação ponto-a-ponto com o espectro de um sinal aleatório. Porém, algumas mudanças fundamentais devem ser feitas; como agora está se lidando com imagens, deve ser gerado um campo aleatório que aqui será representado através de uma matriz. Já para a função de transferência, ela neste caso será determinada levando em consideração uma simetria radial em que é tomada como origem o centro da imagem.

No caso unidimensional, a propriedade de simetria conjugada dada pela Equação (4.8) teve papel fundamental na implementação computacional para a abordagem via filtros FIR. Surge, portanto, a questão de como este problema deve ser tratado para o caso bidimensional.

```

pi = %pi;

x = rand(N,N,"uniform");
x = x - mean(x); // anula o valor medio da matriz

X = fft2(x);

w = linspace(-pi, pi, N); // cria vetor dos indices de frequencia
[wx,wy] = meshgrid(w);

r = sqrt(wx .^ 2.0 + wy .^ 2.0); // muda para coordenada polar

H = 1.0 ./ sqrt(r .^ alpha); // gera a funcao de transferencia

bIsInf = find(isinf(H)); // elimina qualquer descontinuidade
H(bIsInf) = 1.0; // e substitui por 1

Y = H .* fftshift(X); // calcula o espectro de y

y = abs(fft(Y,1)); // inverte para obter imagem simulada
// mantendo apenas a parte real

```

Código 4.5 – Código SCILAB para geração de imagens com comportamento espectral do tipo  $1/f^\alpha$  utilizando a abordagem via filtros FIR 2D.

Foram geradas imagens através do Código (4.5) para ilustrar os resultados que são obtidos com variados valores de  $\alpha$ . Estas podem ser observadas na Figura (20).

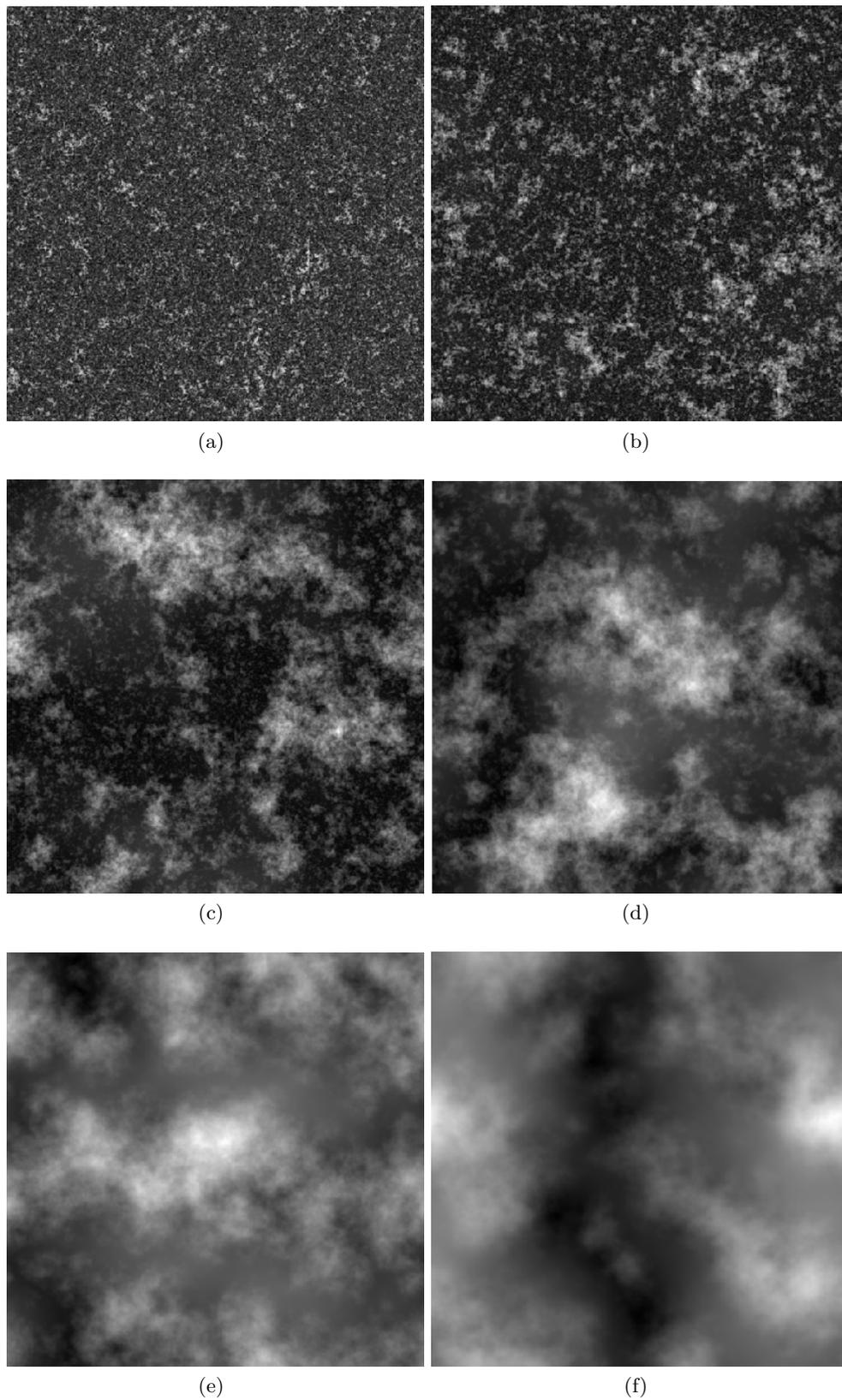


Figura 20 – Imagens de processos gerados via abordagem de filtros FIR dada pelos Código (4.5) para diferentes valores de  $\alpha$ . As imagens foram simuladas com os respectivos coeficientes: (a) 0.75, (b) 1.0, (c) 1.25, (d) 1.5, (e) 1.75 e (f) 2.0.

# 5 Metodologia e Resultados

Apresentados os diferentes algoritmos de geração de processos  $1/f$  e dada a vasta aplicabilidade destes processos em modelagens computacionais (vide Capítulo 2), foram propostos neste capítulo experimentos computacionais com o objetivo de avaliar o desempenho dos métodos, analisando fatores como a confiabilidade dos resultados gerados e suas respectivas performances com foco especialmente em tempo de execução.

## 5.1 Investigação de performance

### 5.1.1 Recursos computacionais

Em relação à capacidade de processamento, a máquina utilizada na realização dos experimentos numéricos possui 128 GB de RAM e duas GPU's RTX 2080 TI com 12 núcleos de processamento operando com sistema operacional Linux Xubuntu versão 16.4.

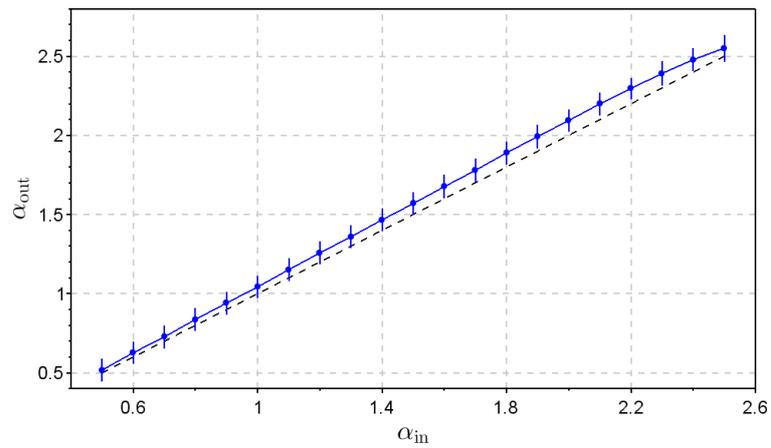
### 5.1.2 Comportamento espectral

Entre os fatores que devem ser avaliados a fim de verificar a qualidade dos resultados sendo gerados pelos métodos implementados, o mais relevante é a sua confiabilidade. Em outras palavras, deve ser feita uma análise sobre os processos sendo gerados para comprovar que suas respectivas densidades espectrais possuem, de fato, o comportamento  $1/f^\alpha$  com o valor exato de  $\alpha$  predeterminado em sua geração.

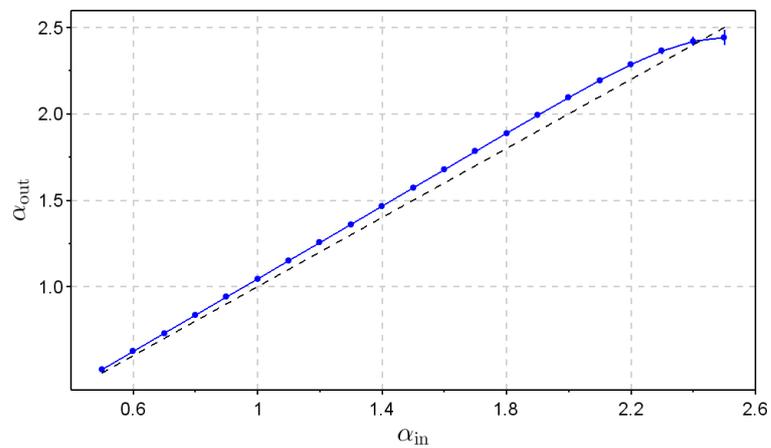
Levando esta necessidade em consideração, foi elaborado o primeiro experimento computacional realizado:

**Experimento 1:** Fixar o tamanho  $N$  dos vetores e gerar, para ambos os métodos FIR e IIR, processos com valores de  $\alpha$  variando entre uma dada faixa  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ . Calcular e armazenar os coeficientes angulares que caracterizam a densidade espectral dos sinais de saída e comparar com os valores de  $\alpha$  predeterminados.

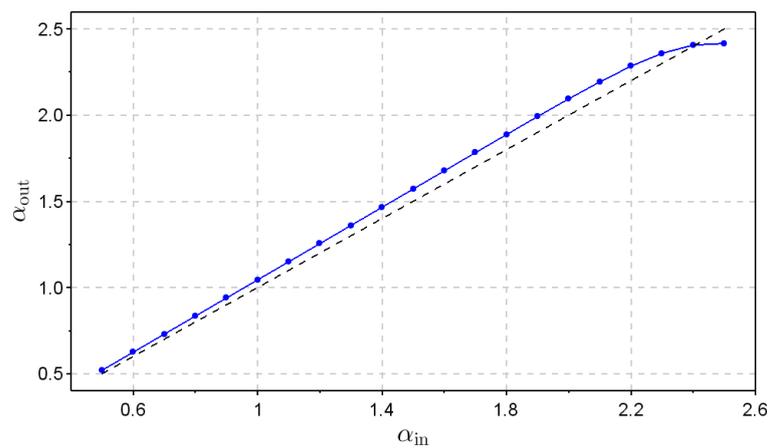
Partindo do primeiro código cuja abordagem se baseia na técnica de janelamento para filtros FIR, foi então realizado o experimento para diferentes tamanhos  $N$  do vetor. Dado o valor de  $\alpha$  predeterminado, este foi então comparado ao valor estimado através de uma regressão linear na reta resultante da densidade espectral dos processos gerados. Este comportamento linear já foi explicitado na Equação (4.64). Em se tratando de sinais estocásticos, deve-se levar em consideração o fato que haverá flutuações nos valores de  $\alpha$  estimados visto que cada novo processo gerado tem sinal de entrada diferente, mesmo que todos sejam, aproximadamente, ruído branco; com isso, o experimento foi realizado múltiplas vezes para cada ponto de modo que, ao final, os valores sendo comparados são médias com seus respectivos desvios padrões. Os resultados do experimento para o caso de  $N = 10^3, 10^4$  e  $10^5$  podem ser observados nas Figuras (21).



(a)



(b)



(c)

Figura 21 – Gráfico do Experimento 1 para o gerador dado pelo Código (4.1) implementado via filtros FIR. Neste caso, foram utilizadas (a)  $N = 10^3$ , (b)  $N = 10^4$  e (c)  $N = 10^5$  entradas com  $10^3$  repetições, sendo os desvios padrões representados pelas barras de erro e a reta identidade pela linha preta tracejada.

Observa-se que há um desvio entre os valores de  $\alpha$  predeterminados  $\alpha_{\text{in}}$  e estimados  $\alpha_{\text{out}}$ . Idealmente falando, o tamanho do vetor não deveria afetar o comportamento espectral do processo gerado pelo método e esperava-se obter o mesmo resultado – ou o mesmo desvio, neste caso – para os três casos. Nota-se que, de fato, os três resultados concordam até  $\alpha \approx 2.2$ . Foi feita uma sobreposição destas curvas e encontrou-se que os pontos coincidem com considerável rigorosidade até este ponto, a partir do qual elas passam a divergir. Como este desvio cresce de forma aproximadamente uniforme, foi feita uma regressão linear para determinar a inclinação com qual resultados se afastam da reta identidade (resultado ideal) e o coeficiente angular calculado foi de, aproximadamente,  $a = 1.034$ , o que implica em um desvio relativo de 3,4% na inclinação.

Um comportamento que não era esperado, entretanto, aconteceu para pontos  $\alpha \geq 2$ , onde é possível notar um decaimento abrupto da curva. Esta divergência do comportamento quase linear do desvio fica ainda mais evidente nos gráficos (b) e (c). Uma possível explicação para esta divergência se encontra na resolução máxima da malha do Scilab que é da ordem de  $\sim 10^{-16}$ . Ao discretizar o eixo da frequência, obtém-se a função de transferência da forma:

$$H_k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{N}k\right)^{\alpha/2}}. \quad (5.1)$$

Quando se aumenta o tamanho  $N$  dos vetores, isso implica simultaneamente que os intervalos entre  $H_k$  e  $H_{k+1}$  diminuem tal já que

$$N \longrightarrow \infty \quad \implies \quad \Delta k = \frac{\pi}{N}k \longrightarrow 0. \quad (5.2)$$

É possível, portanto, que ao aumentar o tamanho dos vetores, o refinamento das malhas necessária para a discretização correta não seja alcançável devido às limitações do *software* escolhido. Consequentemente, erros numéricos são inseridos no processo, resultando na divergência observada. Se correta, esta explicação elimina a possibilidade da divergência acontecer devido a erros do algoritmo e, sendo este comportamento relacionado ao processo de discretização utilizado na implementação via filtros FIR, esperava-se que o mesmo não ocorresse para o caso de filtros IIR.

Tratando primeiramente dos geradores generalizados – já que estes são o interesse principal do trabalho visto que possuem maior aplicabilidade –, observe na Figura (22) o resultado do mesmo experimento para o gerador recursivo dado pelo Código (4.4). Nesta primeira análise, não foram impostos limites e, com isso, foram gerados processos iguais aos estudados no caso dos gráficos da Figura (21). Curiosamente, foi mais uma vez observado o fenômeno de divergência para valores de  $\alpha > 2$ , contrariando as expectativas citadas anteriormente.

A primeira observação que deve ser feita é que este método também apresenta um desvio que cresce quase linearmente com  $\alpha$  e independe do tamanho dos vetores. Portanto, os mesmos passos do caso anterior foram tomados para estimar a inclinação desta reta (até  $\alpha = 2$ ) e foi encontrado um desvio relativo de 4,1% ( $a = 1.041$ ). Não levando em consideração a faixa em que ocorrem as divergências, notou-se que, para o menor tamanho de vetores ( $N = 10^3$ ) em ambos os casos, o desvio padrão, para os poucos pontos em que não engloba, chega muito próximo da reta identidade, o que significaria que foram gerados processos cujos comportamentos espectrais estão mais próximos do desejado. E, conforme este vetor foi aumentado (em potências de 10), este desvio diminuiu consideravelmente também em ambos os casos, o que significaria que os geradores erram consistentemente para cima, ainda que com baixo desvio.

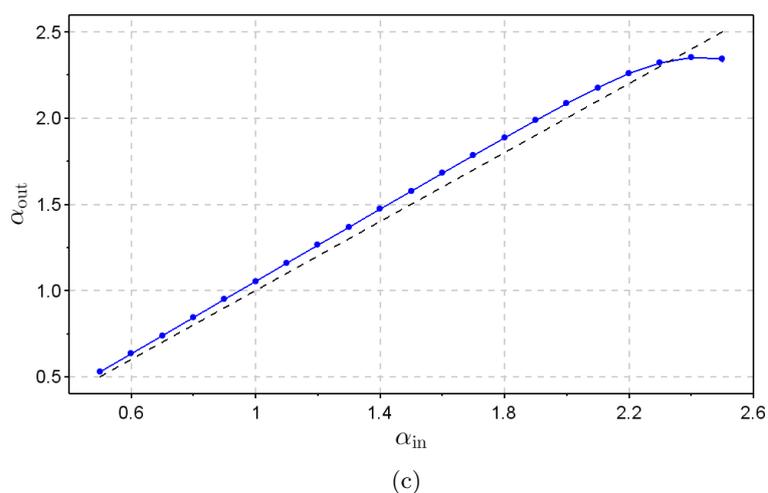
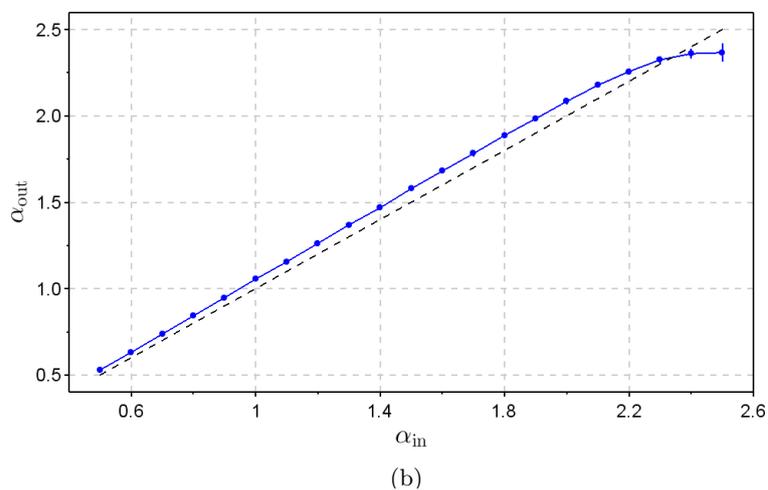
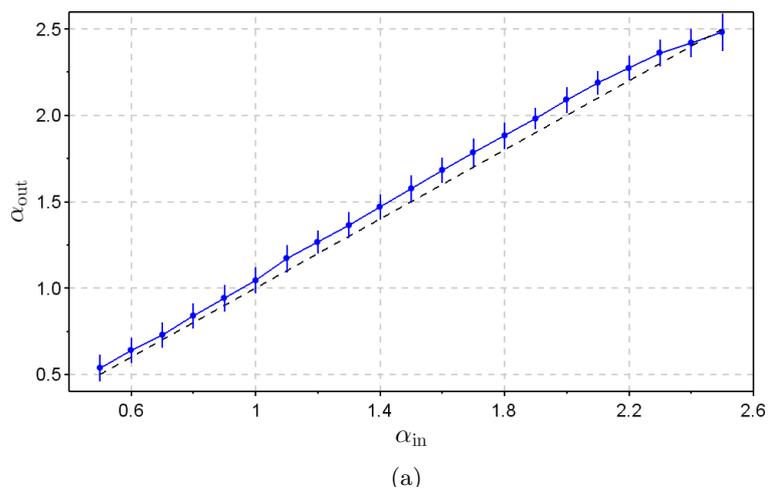


Figura 22 – Gráfico do Experimento 1 para o gerador dado pelo Código (4.4) implementado via filtros IIR. Neste caso, foram utilizadas (a)  $N = 10^3$ , (b)  $N = 10^4$  e (c)  $N = 10^5$  entradas com  $10^3$  repetições, sendo os desvios padrões representados pelas barras de erro e a reta identidade pela linha preta tracejada.

Em se tratando da divergência para valores de  $\alpha > 2$  observada, sua presença no caso dos filtros IIR abala a suposição feita anteriormente de que esta estaria relacionada com o processo de discretização. Porém, visto que os dois métodos são baseados em técnicas muito diferentes, surge a possibilidade de estarem ocorrendo dois erros distintos que acarretam divergências visual e numericamente parecidas. Não excluindo a sugestão anterior da sua relação com o processo de discretização do filtro FIR implementado, um provável motivo para a presença desta divergência no caso dos filtros IIR se encontra na própria geometria do problema. Mais especificamente, o valor de  $\alpha$  influencia diretamente as posições dos zeros e pólos espaçados pelo eixo da frequência tal como pode ser observado nas Equações (4.58) e (4.59) e os casos em que  $\alpha > 2$  implicam na localização do primeiro pólo abaixo do limite mínimo de frequência  $f_{min}$ . Porém, estes resultados apresentados nos gráficos da Figura (22) possuem  $f_{min} \approx 0$ , inevitavelmente introduzindo erros nos resultados.

Uma forma de investigar a validade desta suposição é realizar este mesmo experimento implementando limites na frequência. Observe os resultados da Figura (23) para o caso de  $N = 10^5$  em que foram selecionados  $f_{min} = 5 \times 10^{-3}$  e  $f_{max} = 10^{-1}$ .

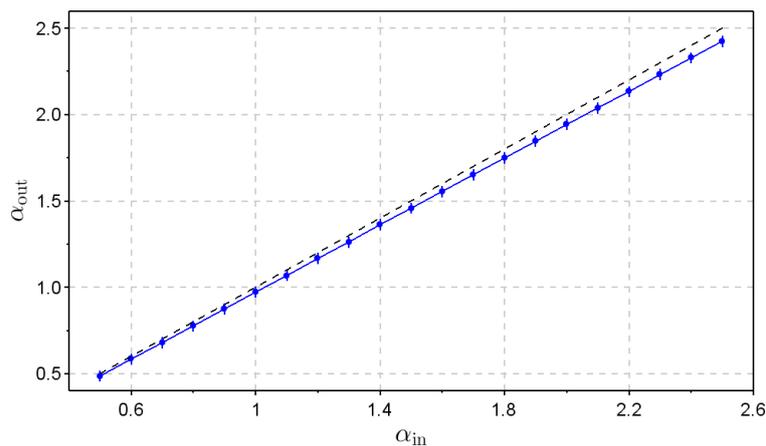


Figura 23 – Gráfico do Experimento 1 para o gerador dado pelo Código (4.4) implementado via filtros IIR com limites  $f_{min} = 5 \times 10^{-3}$  e  $f_{max} = 10^{-1}$  e  $N = 10^5$ . Foram repetidos os processos  $10^3$  vezes, sendo os desvios padrões representados pelas barras de erro.

Nota-se prontamente a ausência da divergência do comportamento linear. Curiosamente, este desvio relativo de 3,2% ( $a=0.968$ ) indica que o gerador continua errando consistentemente, porém agora para valores abaixo do ideal.

O Experimento 1 também foi realizado para os filtros integrador clássico e limitado dados pelos Códigos (4.2) e (4.3), respectivamente. Sabendo que estes geram processos com  $\alpha = 2$ , os resultados podem ser encontrados na Tabela (2). Em se tratando de divergência do resultado esperado, ambos os geradores tiveram a média de  $\alpha$  estimada consistentemente para valores menores do que o resultado ideal. Comparando diretamente os dois resultados, é evidente que o integrador clássico se aproxima mais do comportamento espectral esperado. Deve-se levar em consideração que o segundo gerador possui o comportamento  $1/f^2$  limitado e esta pequena diferença pode estar ligada, possivelmente, a pontos dos “joelhos” – pontos próximos aos limites da faixa em que a curva da densidade começa a se tornar constante – sendo considerados na

regressão linear. Porém, uma segunda particularidade evidenciada por este experimento deve ser apontada: a grande variação dos valores do desvio padrão em função do tamanho  $N$  dos vetores de entrada. Note que, conforme o tamanho do vetor aumenta, o desvio padrão diminui. Isso pode ser observado tanto nos resultados tabelados quanto nos gráficos já apresentados. Esse efeito acontece devido ao método de estimação escolhido; métodos não-paramétricos tais como o método de Welch calculam a estimação da densidade espectral através de médias janeladas de seguimentos menores do sinal (vide Seções 3.4 e 4.2). Isso implica que, para melhorar a qualidade da estimativa, é preciso um grande número de pontos.

| $N$    | $\alpha_C$ | $\delta\alpha_C$ | $\alpha_L$ | $\delta\alpha_L$ |
|--------|------------|------------------|------------|------------------|
| $10^3$ | 1.977      | 0.084            | 1.925      | 0.462            |
| $10^4$ | 1.983      | 0.017            | 1.939      | 0.105            |
| $10^5$ | 1.983      | 0.005            | 1.943      | 0.032            |

Tabela 2 – Resultados do Experimento 1 para os métodos integrador ( $\alpha_C$ ) clássico e limitado ( $\alpha_L$ ) com seus respectivos desvios  $\delta\alpha$ .

### 5.1.3 Tempo de execução

Verificado o comportamento espectral dos processos sendo gerados através de uma análise feita sobre os parâmetros  $\alpha$  estimados por meio de regressões lineares, o próximo fator a ser analisado é o tempo de execução.

**Experimento 2:** Fixar o valor de  $\alpha$  e compilar cada método de geração com tamanhos de vetor variando em potências de 10. Monitorar e armazenar o tempo total levado para gerar os sinais de saída com os diferentes tamanhos de vetores.

O interesse principal do experimento independe do parâmetro  $\alpha$  visto que este tem papel fundamental no aspecto final do processo, mas não influencia o tempo que este leva para ser gerado. Com isso, foi escolhido o valor específico de  $\alpha = 2$  para que todos os métodos apresentados pudessem ser incluídos e que, no caso dos filtros IIR, uma comparação pudesse ser feita para analisar a forma como a característica recursiva do filtro generalizado custa em tempo computacional quando comparado aos filtros mais simples.

Os resultados para os filtros FIR e IIR podem ser observado nas Figuras (26) e (24), respectivamente.

Começando pelos resultados da Figura (24) para o caso dos métodos baseados em filtros IIR, uma rápida análise nos Códigos (4.2) e (4.3) aponta para uma complexidade da ordem  $O(N)$  visto que há a somente a presença de um *loop* em  $N$  contendo uma única operação simples. Portanto, o crescimento linear em escala logarítmica no tempo apresentado no gráfico é consistente com esta análise. Outro ponto é que não esperava-se uma diferença significativa em relação aos tempos destes geradores, tal como pode ser observado no gráfico (linhas verde e vermelha). Já para o caso do filtro recursivo, dado que este é formado por uma sucessão

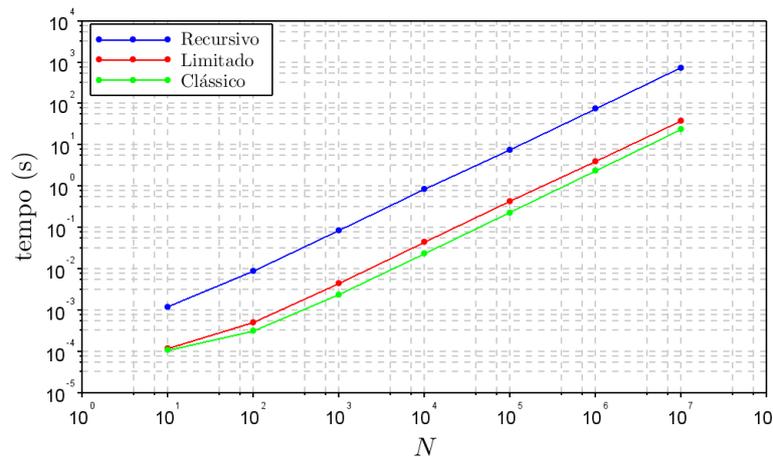


Figura 24 – Gráfico do Experimento 2 para os geradores implementados via filtros IIR. Neste caso, foi variado o tamanho de vetor de  $N = 10$  até  $N = 10^7$  em potências de 10. Ambos os eixos se encontram em escala logarítmica.

de filtros integradores limitados, não deveria existir uma mudança no comportamento linear do crescimento do tempo, mas sim um aumento no tempo proporcional ao número de filtros utilizados. No resultado apresentado, foram utilizados 5 filtros.

Tem-se, portanto, que a quantidade de filtros sendo utilizada atinge diretamente o tempo de execução do filtro recursivo. Tendo isto em mente, o mesmo experimento foi realizado novamente com o objetivo de analisar o tempo de processamento também levando este parâmetro em consideração. A superfície resultante pode ser observada na Figura (25). O que se pode observar com esta segunda versão do experimento é que a dependência relativa ao número de filtros também é linear, assim como havia sido sugerido.

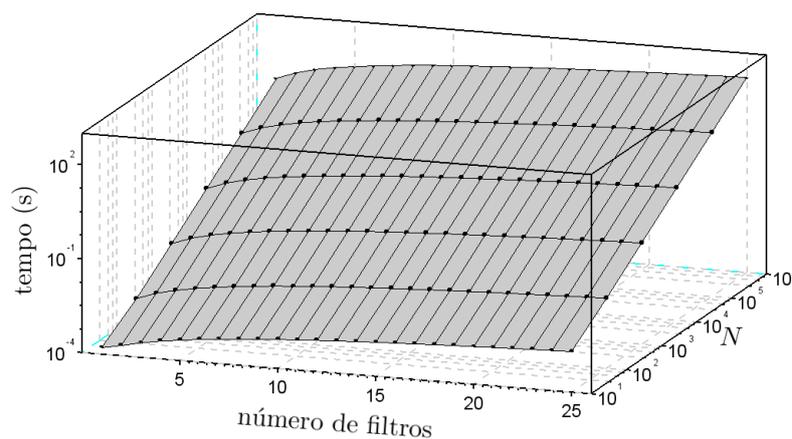


Figura 25 – Gráfico do resultado do Experimento 2 para o Código (4.4) levando em consideração o número de filtros sendo utilizado com os eixos do tempo e do tamanho  $N$  dos vetores em escala logarítmica.

Verificado seu impacto no tempo de execução, ainda resta analisar o peso deste fator (número de filtros) no comportamento espectral dos resultados. Visto que este pode ser modificado, surge

a questão sobre a existência de um número mínimo para o qual o comportamento espectral desejado convirja e, dado o acréscimo do número de filtros no sistema, se existe alguma melhora no resultado obtido. Essas questões são trabalhadas no próximo experimento proposto.

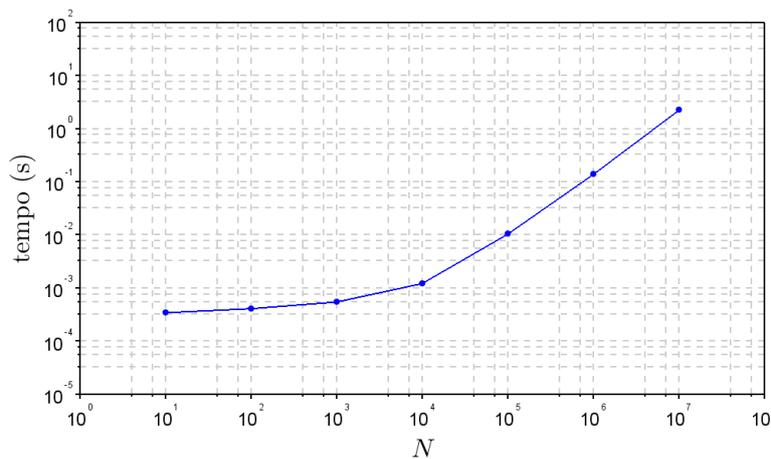


Figura 26 – Gráfico do Experimento 2 para o gerador dado pelo Código (4.1) implementado via filtros FIR. Neste caso, foi variado o tamanho de vetor de  $N = 10$  até  $N = 10^7$  em potências de 10. Ambos os eixos se encontram em escala logarítmica.

Por fim, para os resultados apresentados na Figura (26), já se esperava um comportamento não-linear tendo em vista que este código faz uso de algoritmos de FFT (direta e inversa) e, assim como foi discutido na Seção 3.3, este possui complexidade  $O(N \log_2 N)$ . Além disso, ainda há a presença de uma multiplicação vetorial ponto-a-ponto ( $N$  operações) que deve ser levada em consideração. Numericamente, observa-se que não há uma grande variação nos tempos de execução entre  $10^1 \sim 10^3$ , sendo estes processos gerados com menos de  $10^{-3}$ s e, após este ponto, nota-se um crescimento mais contundente. Ainda assim, este método gera processos com  $N = 10^7$  em pouco mais de 3s.

#### 5.1.4 Número de filtros

Como discutido anteriormente, tendo em vista que o número de filtros no método recursivo dado pelo Código (4.4) é um parâmetro que pode ser variado, deve ser feita uma última análise sobre sua relação com o  $\alpha$  dos sinais de saída. Com isso, foi proposto um último experimento computacional com o intuito de comparar os valores de  $\alpha$  do processo gerado aos valores de  $\alpha$  predeterminados levando em consideração o número de filtros *setado*. Deseja-se observar qual se há algum efeito notável (melhora ou piora) que acontece conforme mais filtros são utilizados.

**Experimento 3:** Ao fixar o valor de  $\alpha$ , estimar e armazenar este parâmetro através da regressão linear do espectro do processo sendo gerado (em escala logarítmica) com o número de filtros  $N_f$  sendo uniformemente incrementado.

Para este experimento, foram selecionados três diferentes valores de  $\alpha$ , sendo executado o código com o número de filtros variando uniformemente de 1 até 50. O resultado obtido se

encontra na Figura (27).

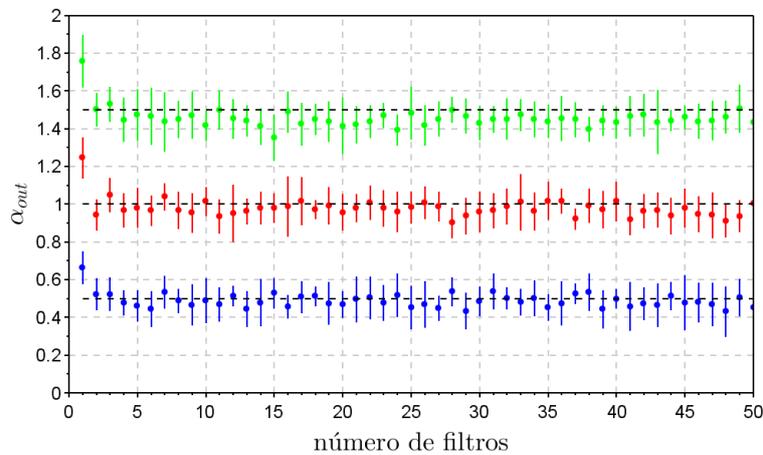


Figura 27 – Gráfico do resultado do Experimento 3 para o Código (4.4). Neste caso, as barras de erro representam os respectivos desvios padrões calculados.

Analisando o gráfico acima, nota-se que, com a exceção do primeiro ponto cuja divergência já era esperada – utilização de um único filtro integrador –, não existe um ponto mínimo a partir do qual os valores de  $\alpha$  calculados se aproximem (ou se afastem) do valor ideal de forma consistente ou um número máximo a partir do qual a técnica comece a falhar. Na verdade, o que acontece é uma flutuação em torno do valor ideal. Isso significa que não é necessário um grande número de filtros para obter um sinal cujo comportamento espectral seja aproximadamente fiel ao esperado.

## 6 Conclusão

O trabalho teve por finalidade conduzir um estudo detalhado sobre técnicas de geração de processos cujo comportamento espectral apresenta característica  $1/f^\alpha$  à luz da Teoria Linear de Processamento Digital de Sinais, implementando-as analítica e computacionalmente com foco principal em valores de  $\alpha \in (0, 2]$ . Apresentadas as técnicas e seus respectivos códigos em linguagem *Scilab*, foram feitas análises numéricas sobre fatores pertinentes tais como a confiabilidade dos processos sendo gerados e o tempo de execução dos códigos.

Fazendo uma análise exclusivamente analítica do problema de implementação de filtros, a abordagem baseada em filtros de resposta ao impulso infinita (IIR) mostrou-se matematicamente mais trabalhosa. Comparada à abordagem via filtros de resposta ao impulso finita (FIR), foi preciso uma análise mais cautelosa sobre os passos sendo tomados em sua implementação; em contrapartida, fica evidente o quão mais sofisticada é a técnica quando se compara o número de termos necessários para gerar os elementos dos sinais de saída de cada filtro: no caso IIR, foram necessários apenas dois (um do sinal de entrada e o outro de realimentação), enquanto que o caso FIR, que faz uso de discretização direta da função de transferência, necessitou de  $N$  termos, onde  $N$  é o número de elementos do vetor de entrada. Outro ponto de comparação entre as duas técnicas é a forma como as singularidades são tratadas; devido às diversas manipulações matemáticas presentes na metodologia do caso IIR, esta questão é bastante elucidada dada a análise necessária sobre singularidades e zonas de convergência, enquanto que o caso FIR simplesmente contorna este problema, não tendo grandes impactos em sua metodologia de implementação. Ainda sobre o desenvolvimento analítico dos filtros, deve ser feita uma última observação relacionada à aproximação da delta de Dirac como solução da derivação da função degrau. Foram mostradas duas rotas diferentes na implementação de limites de frequência ao comportamento espectral dos sinais, porém apenas a rota que utilizou transformada bilinear obteve bons resultados, num cenário alheio à teoria de distribuições. Sobre esta discordância, supõe-se como possível motivo que esta aproximação esteja acarretando erros numéricos e, neste caso em particular, não deva ser utilizada.

No que diz respeito aos sinais de saída sendo gerados, foi verificado o comportamento espectral correto para todos os filtros nos casos de  $\alpha \leq 2$ . Através do experimento que analisava a relação  $\alpha_{in}/\alpha_{out}$  com o intuito de testar a confiabilidade dos métodos, foi encontrado um desvio com crescimento linear em  $\alpha$  para ambos os casos generalizados. Ao analisar as suas inclinações quando comparadas à reta identidade (resultado ideal), foi calculado um erro relativo de 3,4% (FIR) e 4,1% (IIR), ambos para valores acima do ideal, sendo estes resultados verificados para diferentes tamanhos de vetores. Com isso, conclui-se que, para ambos os métodos, valores menores de  $\alpha$  geram melhores resultados. Por outro lado, por mais que as médias tenham coincidido de forma aproximada em ambos os casos, o modo como os desvios padrão variaram para diferentes tamanhos de vetores trouxe à tona uma discussão relativa a maneira como  $N$  influencia os resultados. Idealmente, não deveria haver influência alguma, mas os dados apresentados na Seção 5.1 discordam do resultado idealizado. Porém, visto que esta variação é um efeito resultante do métodos não-paramétrico de estimação espectral utilizado que necessita de

grande volume de dados para melhorar a estimação, o que se conclui é que os casos de  $N = 10^3$  erram da mesma forma que  $N = 10^4$  e  $10^5$  e estes desvios dos resultados que aproximam (ou afastam) os pontos da reta identidade resultam da dificuldade de estimar com qualidade vetores de poucos pontos. Há de se colocar que *frequency-warping* (no caso de transformada bilinear) e resolução numérica podem ter desempenhado papel relevante na geração dos erros numéricos. Contudo, tais fatores não foram considerados.

Outro efeito que gerou discussão foi a divergência de ambos os casos generalizados para valores de  $\alpha > 2$ . Na ausência de limites – o que implica em processos com comportamento  $1/f^\alpha$  em todo o intervalo  $(0, \pi]$  –, concluiu-se que, por mais que seja válida a hipótese de que esteja ocorrendo um erro que englobe ambos os métodos, seja este relacionado à natureza numérico-computacional, existem justificativas para explicar esta divergência tratando do problema separadamente para cada métodos. Para filtros FIR, esta pode ser consequência do processo de discretização direta utilizado, e, para filtros IIR, esta pode estar relacionada à geometria do problema. Um fato que apoia a ideia de serem dois problemas distintos que curiosamente geram efeitos parecidos é a ausência desta divergência na presença de limites na frequência (filtro IIR).

Já para a questão de tempo de execução, foi verificado uma diferença significativa entre os geradores generalizados. Para todos os tamanhos testados, o método IIR se apresentou consistentemente mais lento quando comparado ao método FIR. Porém, tal avaliação sobre o tempo de execução feita desta forma direta não implica no julgamento de um ser melhor que o outro visto que diversos fatores devem ser considerados: primeiramente, o método FIR faz uso de algoritmos já otimizados (FFT e manipulação de matrizes) oriundos da linguagem utilizada e, além disso, o método IIR possui outros parâmetros além de  $N$  que influenciam no tempo de processamento. Portanto, este experimento teve como objetivo apenas apresentar números para a realização de uma análise individual dos métodos, não para viabilizar uma intercomparação direta entre eles. Com isso, obteve-se que o método FIR consegue gerar sinais com tamanhos de até  $10^5$  em menos de  $10^{-2}$  s, tendo um aumento considerável para vetores de tamanhos  $10^6 \sim 10^7$ , este último sendo gerado em pouco mais de 1s. Levando em consideração estes dados, considerou-se os tempos obtidos bastante razoáveis. Já para os métodos IIR, o tempo de execução para o integrador clássico variou linearmente com  $N$ , gerando vetores de tamanhos  $N = 10^7$  em menos de 4 s. Deve-se levar isto em consideração já que este valor aumenta proporcionalmente ao número de filtros sendo utilizados no gerador recursivo tal como visto nos gráficos do Capítulo 5. Para  $N = 10^7$ , este gerador levou um pouco mais de 1 minuto para gerar o sinal de saída, o que não é um resultado insatisfatório ao se levar em consideração o número de entradas.

Por mais que não tenha sido feita nenhuma análise sobre, foi apresentado no final do Capítulo 4 um gerador de processos  $1/f$  em duas dimensões. Abordando o assunto da extensão dos métodos para dimensões superiores, vê-se na possibilidade da implementação via filtros FIR uma transição feita de forma suave. Por mais que implementar filtros IIR seja uma técnica mais poderosa, empecilhos no desenvolvimento matemático devem ser levados em consideração tais como, principalmente, a transformada Z bidimensional. Neste caso, este balanço entre elegância e simplicidade que surge entre estas duas técnicas devem ser novamente discutidas.

Como propostas futuras, pode-se investigar formas de diminuir o desvio evidenciados no Experimento 1 com o intuito de melhorar a qualidade dos processos sendo gerados. Uma primeira

tentativa deve envolver a utilização de um método de estimação espectral diferente para que seja realizada uma comparação. Outro problema que pode ser abordado é a divergência encontrada para maiores valores de  $\alpha$  na ausência de limites para o comportamento espectral no domínio da frequência, com isso expandindo o número de possíveis aplicações dos métodos discutidos no trabalho. Por fim, uma última proposta compreende um estudo detalhado da extensão para dimensões superiores que foi brevemente mencionada, agregando conhecimento sobre estes métodos de geração também para a área de processamento de imagens.

# APÊNDICE A – Teorema da Amostragem Uniforme

Seja  $x(t)$  um sinal com largura de banda  $2\omega_{\max}$ , cuja transformada de Fourier é  $X(\omega)$ . O processo de amostragem uniforme consiste em se coletar amostras de  $x$  a cada instante de tempo múltiplo inteiro de um certo período  $T_s$ , isto é, a versão amostrada  $x_s(t)$  do sinal original é dada por

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \frac{1}{T_s} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

em que  $\omega_s \equiv \frac{2\pi}{T_s}$ . A representação em termos de exponenciais complexas na Equação (A.1) é possível pois a função

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

é  $T_s$ -periódica, cujos coeficientes da série de Fourier são constantes e iguais a  $\frac{1}{T_s}$ .

No domínio da frequência, a Equação (A.1) se torna um produto de convolução:

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= X(\omega) * \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \right\} \\ &= \frac{1}{T_s} X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega - n\omega_s)t] dt \right\} \\ &= \frac{2\pi}{T_s} X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Conforme mostra a Equação (A.2), a amostragem leva a uma replicação dos espectros originais, de modo que cada réplica está centrada em múltiplos inteiros de  $\omega_s$ . A Figura (28) ilustra esta ocorrência.

De acordo com o exposto e de acordo com a Figura (28), verifica-se que pode haver superposição entre réplicas espectrais. Efetivamente, haverá superposição caso  $\omega_s - \omega_{\max}$  seja menor que  $\omega_{\max}$ . Alternativamente, a seguinte desigualdade garante a não-ocorrência do mascaramento espectral, ou *aliasing*:

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}. \quad (\text{A.3})$$

A Equação (A.3) apresenta o propalado Critério de Nyquist. A Figura (29) ilustra um caso sobre o qual o critério de Nyquist não é respeitado, levando a um mascaramento do sinal.

Caso não ocorra superposição entre réplicas espectrais, o sinal original – analógico – pode ser recuperado sem perdas de informação, ou degradações devido ao processo de amostragem

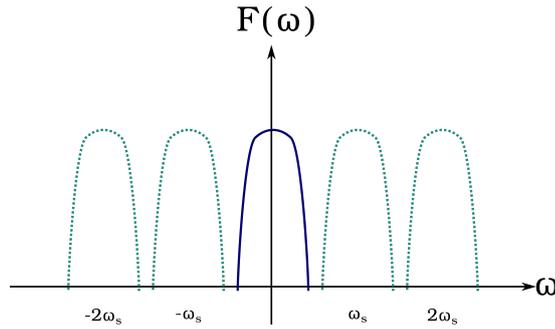


Figura 28 – Ilustração da replicação espectral causada pelo processo de amostragem uniforme. O espectro original (linha azul contínua) é replicado em versões centralizadas em múltiplos inteiros da frequência de amostragem,  $\omega_s$ .

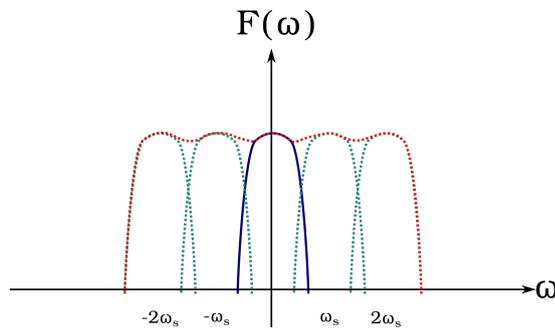


Figura 29 – Ilustração da replicação espectral com mascaramento. Uma vez que o critério de Nyquist não é atendido, as réplicas se superpõem (linha vermelha pontilhada), levando a uma distorção do espectro do sinal amostrado.

em si. De fato, basta submeter o espectro  $X_s(\omega)$  a um filtro passa-baixas cuja frequência de corte  $\omega_c$  é tal que  $\omega_{\max} \leq \omega_c \leq \omega_s$ .

Suponha que sobre  $X_s(\omega)$  seja aplicado um passa-baixas ideal,  $H_{LP}(\omega)$  dado por

$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \frac{\omega_{\max}}{2}; \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

O sinal resultante é dado por  $Y(\omega) = X_s(\omega) \cdot H_{LP}(\omega)$ . No domínio do tempo tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= x_s(t) * h_{LP}(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) * \frac{\sin\left(\frac{\omega_{\max}}{2}t\right)}{\pi t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin\left[\frac{\omega_{\max}}{2}(t - nT_s)\right]}{\pi(t - nT_s)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n S(t - nT_s), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

em que  $S(t)$  é chamado polinômio interpolador de Shannon-Whitaker. Por meio da modulação de versões deslocadas deste polinômio segundo as amostras  $x_n$ , recupera-se o conteúdo original do sinal. Isto é,  $y(t) = x(t)$ . Deve-se notar, contudo, que a expressão mostrada na Equação (A.5) foi obtida assumindo-se o uso de um passa-baixas ideal, não sendo realizável na prática. Tal inviabilidade se faz notar pela não-causalidade de  $y(t)$ .

# Referências

- [1] ANDRADE, E. BRACCIALI, C. RAFAELI, F. Introdução aos polinômios ortogonais - Notas em Matemática Aplicada. São Carlos: Sociedade de Matemática Aplicada e Computacional, 2012.
- [2] APPEL, W. *Mathematics for Physics and Physicists*. Nova Jersey: Princeton University Press, 2007.
- [3] BAK, P. CHEN, K. *The physics of fractals*. **Physica D** 38 (1989), 5-12.
- [4] BAK, P. TANG, C. *Earthquakes as a self-organized critical phenomenon*. **Journal of Geophysical Research** 94 (1989), 15635-15637.
- [5] BAK, P. TANG, C. WIESENFELD, K. *Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise*. **Physical Review Letters** 59 (1987), 381-384.
- [6] BALADIN, A. *Low-frequency 1/f noise in graphene devices*. **Nature Nanotechnology** 8 (2013), 549-555.
- [7] BARBOSA, A. Eletrônica analógica essencial para instrumentação científica (Coleção CBPF - Tópicos de Física). Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2010.
- [8] BAREIKIS, V. KATILIUS, R. *Noise in physical systems and 1/f fluctuations: Proceedings of the 13th International Conference*. Singapura: World Scientific, 1995.
- [9] BARTLETT, M. *Smoothing periodograms from time-Series with continuous spectra*. **Nature** 161 (1948), 686-687.
- [10] BAUMEISTER, J. LEITÃO, A. Introdução à teoria de controle e programação dinâmica (Projeto Euclides), 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Impa, 2014. 399 p.
- [11] BÉDARD, C. KROGER, H. DESTEXHE, A. *Does the 1/ frequency scaling of brain signals reflect self-organized critical states?* **Physical Review Letters** 97 (2006), (118102)1-4.
- [12] BOEHM, T. BILGER, H. TANDON, J. *Experimental results on the nature of the 1/f noise process-long term measurements of Zener diode excess noise*. **Proceedings of symposium of 1/f fluctuations** (1977), 62-67.
- [13] ICNF 2001. *Noise in physical systems and 1/f fluctuations*. Danvers: World Scientific Publishing, 2001.
- [14] BURGESS, A. JACOBSON, F. JUDY, P. *Human observer detection experiments with mammograms and power-law noise*. **Medical Physics** 28 (2001), 419-437.
- [15] BUTKOV, E. Física matemática. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1988.

- [16] CALOYANNIDES, M. *Microcycle spectral estimates of  $1/f$  noise in semiconductors*. **Journal of Applied Physics** 45 (1974), 307-316.
- [17] CATALDO, E. *Introdução aos processos estocásticos - Notas em Matemática Aplicada*. São Carlos: Sociedade de Matemática Aplicada e Computacional, 2012.
- [18] CLAEYS, C. SIMOEN, E. *Noise in physical systems and  $1/f$  fluctuations: Proceedings of the 14th International Conference*. Singapura: World Scientific, 1997.
- [19] CLARKE, J. HSIANG, T. *Low-frequency noise in tin and lead films at the superconducting transition*. **Physical Review B** 13 (1976), 4790-4800.
- [20] COLLINS, P. FUHRER, M. ZETTL, A.  *$1/f$  noise in carbon nanotubes*. **Applied Physics Letters** 76 (2000), 894-896.
- [21] DINIZ, P. DA SILVA, E. NETTO, S. *Digital signal processing: system analysis and design*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [22] DUTTA P. HORN, P. *Low-frequency fluctuations in solids:  $1/f$  noise*. **Reviews of Modern Physics** 53 (1981), 497-516.
- [23] FRAGASSO, A. PUD, S. DEKKER, C.  *$1/f$  noise in solid-state nanopores is governed by access and surface regions*. **Nanotechnology** 30 (2019), 1-7.
- [24] GABRIEL, C. WITTMANN, C. SYCH, D. DONG, R. MAUERER, W. ANDERSEN, U. MARQUARDT, C. LEUCHS, G. *A generator for unique quantum random numbers based on vacuum states*. **Nature Photonics** 4 (2010), 711-715.
- [25] GARDNER, W. *Introduction to random processes with applications to signals and systems*. Nova York: Macmillan Publishing Company, 1986.
- [26] GENTLE, J. *Random number generation and Monte Carlo methods*, 2<sup>a</sup> ed. New York: Springer, 2003.
- [27] GERCHBERG, R. W. *Super-resolution through Error Energy Reduction*. **Optica Acta: International Journal of Optics** 21 (1974), 709-720.
- [28] GILDEN, D. THORNTON, T. MALLON, M.  *$1/f$  noise in human cognition*. **Science, Washington** 267 (1995), 1837-1839.
- [29] GUTENBERG, B. RICHTER, F. *The energy of earthquakes*. **Quarterly Journal of the Geological Society** 112 (1956), 1-14.
- [30] HANDEL, P. *Quantum approach to  $1/f$  noise*. **Physical Review A** 22 (1980), 745-757.
- [31] HEEREMA, S. SCHNEIDER, G. ROZEMULLER, M. VICARELLI, L. ZANDBERGEN, H. DEKKER, C.  *$1/f$  noise in graphene nanopores*. **Nanotechnology** 26 (2015), 1-7.
- [32] HEINE, J. DEANS, S. VELTHUIZEN, R. CLARKE, L. *On the statistical nature of mammograms*. **Medical Physics** 26 (1999), 2254-2265.

- [33] HOOGE, F. N.  $1/f$  noise. **Physica B** 83 (1976), 14–23.
- [34] HOOGE, F. N.  $1/f$  noise is no surface effect. **Physics Letters** 29 (1969), 139-140.
- [35] HOOGE, F. N. Discussion of recent experiments on  $1/f$  noise. **Physica** 60 (1972), 130-144.
- [36] JAEGER, H. LIU, C. NAGEL, S. Relaxation at the angle of repose. **Physical Review Letters** 40 (1989), 40-43.
- [37] JENSEN, H. CHRISTENSEN, K. FOGEDBY, H.  $1/f$  noise, distribution of lifetimes, and a pile of sand. **Physical Review B** 40 (1989), 7425-7427.
- [38] JOHNSON, J. B. The Schottky effect in low frequency circuits. **Physical Review** 26 (1925), 71-85.
- [39] KADANOFF, L. NAGEL, S. WU, L. ZHOU, S. Scaling and universality in avalanches. **Physical Review A** 39 (1989), 6524-6537.
- [40] KESHNER, M.  $1/f$  noise. **Proceedings of the IEEE** 70 (1982) 212-2018.
- [41] KLEINPENNING, T. Electrical conduction and  $1/f$  noise in Li-DOPED MnO. **Journal of Physics and Chemistry of Solids** 37 (1976), 925-928.
- [42] LEVINA, A. HERRMANN, M. GEISEL, T. Dynamical synapses causing self-organized criticality in neural networks. **Nature Physics** 3 (2007), 857–860.
- [43] LIMA, E. Curso de Análise VI, 15<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Impa, 2019.
- [44] LIN, Y. AVOURIS, P. Strong suppression of electrical noise in bilayer graphene nanodevices. **Nano Letters** 8 (2008), 2119-2125.
- [45] LUNDSTROM, I. MCQUEEN, D. A proposed  $1/f$  noise mechanism in nerve cell membranes. **Journal of Theoretical Biology** 45 (1974), 405-409.
- [46] LYONS, R. *Understanding digital signal processing*. Nova Jersey: Prentice Hall, 2001.
- [47] MANDELBROT, B. *The fractal geometry of nature*. Nova York: W. H. Freeman, 1983.
- [48] MILLMAN, D. MIHALAS, S. KIRKWOOD, A. NIEBUR, E. Self-organized criticality occurs in non-conservative neuronal networks during ‘up’ states. **Nature Physics** 6 (2010), 801–805.
- [49] MUNK, W. MACDONALD, G. *The rotation of the Earth: a Geophysical discussion*. Nova York: Cambridge University Press, 1960.
- [50] MUSHA, T. KOBAYASHI, M.  $1/f$  fluctuation of heartbeat period. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering** BME-29 (1982), 456-457.
- [51] NOVIKOV, E. NOVIKOV, A. SHANNAHOFF-KHALSA, D. SCHWARTZ, B. WRIGHT, J. Scale-similar activity in the brain. **Physical Review E** 56 (1997), R2387-R2389.

- [52] NUSSENZVEIG, M. *Complexidade e Caos*, 3<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ/Copea, 2008.
- [53] OPPENHEIM, A. SCHAFFER, R. *Discrete-time signal processing*, 2<sup>a</sup> ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
- [54] OPPENHEIM, A. WILLSKY, A. *Signals and systems*, 2<sup>a</sup> ed. Nova Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [55] PAPOULIS, A. *Probability, random variables and stochastic processes*, 3<sup>a</sup> ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [56] PÉCSELI, H. *Fluctuations in physical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [57] PERSECHINO, A. *An introduction to fractional calculus: Numerical methods and application to HF dielectric response*. Submetido em Maio/2019 para **Advanced Electromagnetics** (2019).
- [58] PETRE, S. MOSES, R. *Spectral analysis of signals*. Nova Jersey: Prentice Hall, 2005.
- [59] PICINBONO, B. *Random signals and systems*. Nova Jersey: Prentice-Hall, 1993.
- [60] PLASZCZYNSKI, S. *Generating long streams of  $1/f^\alpha$  noise*. **Fluctuation and Noise Letters** 7 (2007), 1-13.
- [61] POPP, J.; KIEFER, W. *Raman scattering, fundamentals. Encyclopedia of Analytical Chemistry: applications, theory and instrumentation*. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [62] PROAKIS, J. MANOLAKIS, D. *Digital signal processing: principles, algorithms, and applications*, 3<sup>a</sup> ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [63] ROJAS, W. MCMORROW, J. GEIER, M. TANG, Q. KIM, C. MARKS, T. HERSAM, M. *Solution-processed carbon nanotubes true random number generator*. **Nano Letters** 17 (2017), 4976-4981.
- [64] SALETTI, R. *A comparison between two methods to generate  $1/f^\gamma$  noise*. **Proceedings of the IEEE** 74 (1986) 1595-1596.
- [65] CORSINI, G. SALETTI, R. *A  $1/f^\gamma$  power spectrum noise sequence generator*. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement** 37 (1988) 615-619.
- [66] SALINAS, S. *Introdução à Física Estatística*, 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.
- [67] SCHOTTKY, W. *Small-Shot effect and Flicker effect*. **Physical Review** 28 (1926), 74.
- [68] SCILAB Enterprises (2012). *Scilab: Free and Open Source software for numerical computation* (Version 6.0.1) [Software]. Available from: <http://www.scilab.org>.

- [69] SUNDARARAJAN, D. *A practical approach to signals and systems*. Noida: John Wiley & Sons, 2008.
- [70] TERRELL, T. *Introduction to digital filters*, 2<sup>a</sup> ed. Londres: MacMillan Education LTD, 1988.
- [71] VANDAMME, L. *1/f noise in homogeneous single crystals of III-V compounds*. **Physics Letters A** 49 (1974), 233-234.
- [72] VAN ORDEN, G. HOLDEN, J. TURVEY, M. *Human cognition and 1/f scaling*. **Journal of Experimental Psychology: General** 134 (2005), 117-123.
- [73] VOSS, R. F. *Evolution of long-range fractal correlations and 1/f noise in DNA base sequences*. **Physical Review Letters** 68 (1995), 3805.
- [74] VOSS, R. F. *"1/f noise" in music: Music from 1/f noise* **The Journal of the Acoustical Society of America** 63 (1978), 258-163.
- [75] VOSS, R. CLARK, J *Flicker (1/f) noise: Equilibrium temperature and resistance fluctuations*. **Physics Review B** 13 (1976), 556-573.
- [76] VOSS, R. CLARK, J *1/f noise from thermal fluctuations in metal films*. **Physical Review Letters** 33 (1974), 24-27.
- [77] WALL, E. *Edge injection currents and their effects on 1/f noise in planar Schottky diodes*. **Solid-State Electronics** 19 (1976), 389-396.
- [78] WEISS, G. *Aspects and applications of the random walk*. Amsterdam: North-Holland, 1994.
- [79] WEISSMAN, M. B. *1/f noise and other slow, nonexponential kinetics in condensed matter*. **Reviews of Modern Physics** 60 (1988), 537-571.
- [80] WELCH, P. *The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms*. **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics** 15 (1967) 70-73.
- [81] WEST, B. SHLESINGER, M. *The noise in natural phenomena*. **American Scientist** 78 (1990), 40-45.
- [82] WOLF, D. *Noise in physical systems: Proceedings of the Fifth International Conference on Noise*. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [83] YANG, X. DU, S. MA, J. *Do earthquakes exhibit self-organized criticality?* **Physical Review Letters** 92 (2004), 228501.
- [84] YANG, M. DE COENSEL, B. KANG, J. *Presence of 1/f noise in the temporal structure of psychoacoustic parameters of natural and urban sounds*. **The Journal of the Acoustical Society of America** 138 (2015), 916-927.

- 
- [85] YOUN, H. HAN, J. CHO, M. JANG, S. KIM, H. KIM, J. TANGUAY, J. CUNNINGHAM, I. *Numerical generation of digital mammograms considering imaging characteristics of an imager*. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A** 652 (2011), 810-814.
- [86] VAN DER ZIEL, A. *Noise in solid-state devices and lasers*. **Proceedings of the IEEE** 58 (1970), 1178-1206.