

Gabriel Camacho de Pinho

**Ruído multiplicativo num buraco negro  
Euclidiano**

Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2020

Gabriel Camacho de Pinho

## **Ruído multiplicativo num buraco negro Euclidiano**

Dissertação de mestrado apresentada ao curso de pós graduação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: Dr. Nami F. Svaiter

Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2020

Pinho, Gabriel Camacho de

P654r Ruído multiplicativo num buraco negro Euclidiano/ Gabriel Camacho de Pinho. – Rio de Janeiro, Brasil, Julho de 2020-

55 p. : 3 il. (color.); 30 cm.

Orientador: Dr. Nami F. Svaiter

Dissertação de Mestrado – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Julho de 2020.

1. Teoria de campos em espaços curvos. 2. Sistemas desordenados. 3. Método da função zeta distribucional. I. Svaiter, Nami Fux, orient. II. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. III. Coordenação de Física Teórica. IV. Ruído multiplicativo num buraco negro Euclidiano

Gabriel Camacho de Pinho

## **Ruído multiplicativo num buraco negro Euclidiano**

Dissertação de mestrado apresentada ao curso de pós graduação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Nami F. Svaiter

---

**Dr. Nami F. Svaiter** (Orientador)  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
(CBPF)/ Coordenação de Física Teórica

---

**Dr. Tobias Micklitz**  
Centro Brasileiro de Pesquisas  
Físicas(CBPF)/ Coordenação de Física  
Teórica

---

**Dra. Maria Emília Xavier Guimarães**  
Instituto de Física-UFF

Rio de Janeiro, Brasil  
Julho de 2020

*Este trabalho é dedicado a todos os que estão arriscando suas vidas na luta contra a COVID-19. Que esta dedicatória ajude a preservar a imagem de sua luta para gerações posteriores.*

# Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à minha Família (não os que se ligam a mim por sangue, mas por escolha!), que segurou junto a mim (e quando não mais pude segurar, seguraram por mim) as pesadas vigas desta trajetória incrível que teve como resultado este trabalho, que classifico como a experiência mais especial de toda minha vida. Em especial, meus pais e minha irmã Mariana se destacaram ao acompanharem cada passo desta caminhada ao meu lado! Agradeço também à Dra. Ana Carolina Dias Vieira e ao Dr. Leandro Baierl Melo, sem os quais jamais teria concluído este trabalho.

Gostaria de agradecer a meu orientador Professor Dr. Nami F. Svaiter por todos os ensinamentos e pela perseverança no meu trabalho. Gostaria também de agradecer ao grupo que conosco trabalhou por todo o suporte. Dentre estes, gostaria de prestar um agradecimento especial ao Professor Carlos Augusto Domingues Zarro pelo incrível apoio, não apenas técnico, mas também pessoal. Estes atributos me levaram a apelida-lo de “O anjo” nesta trajetória.

Gostaria de agradecer à CAPES pela bolsa de Mestrado que me deu a oportunidade de me dedicar a este trabalho. Finalmente, agradeço ao CBPF pela oportunidade de fazer parte do programa de Mestrado Acadêmico com auxílio de uma bolsa de Mestrado.

## Poema em Linha Reta

Nunca conheci quem tivesse levado porrada.

Todos os meus conhecidos têm sido campeões em tudo.

E eu, tantas vezes reles, tantas vezes porco, tantas vezes vil,

Eu tantas vezes irresponsavelmente parasita,

Indesculpavelmente sujo,

Eu, que tantas vezes não tenho tido paciência para tomar banho,

Eu, que tantas vezes tenho sido ridículo, absurdo,

Que tenho enrolado os pés publicamente nos tapetes das etiquetas,

Que tenho sido grotesco, mesquinho, submisso e arrogante,

Que tenho sofrido enxovalhos e calado,

Que quando não tenho calado, tenho sido mais ridículo ainda;

Eu, que tenho sido cômico às criadas de hotel,

Eu, que tenho sentido o piscar de olhos dos moços de fretes,

Eu, que tenho feito vergonhas financeiras, pedido emprestado sem pagar,

Eu, que, quando a hora do soco surgiu, me tenho agachado

Para fora da possibilidade do soco;

Eu, que tenho sofrido a angústia das pequenas coisas ridículas,

Eu verifico que não tenho par nisto tudo neste mundo.

Toda a gente que eu conheço e que fala comigo

Nunca teve um ato ridículo, nunca sofreu enxovalho,

Nunca foi senão príncipe - todos eles príncipes - na vida...

Quem me dera ouvir de alguém a voz humana

Que confessasse não um pecado, mas uma infâmia;

Que contasse, não uma violência, mas uma cobardia!

Não, são todos o Ideal, se os oiço e me falam.

Quem há neste largo mundo que me confesse que uma vez foi vil?  
Ó príncipes, meus irmãos,  
Arre, estou farto de semideuses!  
Onde é que há gente no mundo?  
Então sou só eu que é vil e errôneo nesta terra?  
Poderão as mulheres não os terem amado,  
Podem ter sido traídos - mas ridículos nunca!  
E eu, que tenho sido ridículo sem ter sido traído,  
Como posso eu falar com os meus superiores sem titubear?  
Eu, que venho sido vil, literalmente vil,  
Vil no sentido mesquinho e infame da vileza.

*Fernando Pessoa (Álvaro de Campos)*



## Despertar

Pela manhã, vi o sol nascer  
Vi o nascimento e glória de um deus  
Vi uma estrela se acender e reluzir  
Vi o infinito a minha frente

Pela tarde vi o Sol frouxo  
Vi um deus frágil e mortal  
Vi uma estrela se esvaír lentamente  
Vi metade do caminho

Pela noite já não via Sol algum  
Via um deus pendurado à forca  
Vi uma estrela se apagar à escuridão  
Nada mais vi além do que já tinha visto

Pela manhã, acordei e começo a ver tudo outra vez

Não tenho relógio e não sei quando vem a tarde ou a noite, mas creio como quem crê em  
deuses, que sempre hei de despertar novamente.

*Rafael Nogueira da Silva*

# Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal de promover uma revisão do artigo, “*Multiplicative Noise in Euclidean Schwarzschild Manifold,*”, dos autores M. Soares, N. F. Svaiter e C. A. D. Zarro, publicado na revista Classical and Quantum Gravity, **37** 065024 (2020). Neste artigo, foi estudado um campo escalar de interação  $\lambda\varphi^4(x) + \rho\varphi^6(x)$  na presença de um ruído multiplicativo do tipo *quenched*, acoplado ao termo quadrático do campo, que por sua vez está definido sobre a seção Euclidiana da solução de Schwarzschild. Nos Capítulos 2 e 3 foram apresentados alguns elementos fundamentais da teoria quântica de campos em espaços Euclidianos, teoria estatística de campos e sistemas desordenados necessários aos cálculos e interpretações subsequentes. Dentro destes elementos, é destacado o uso do método da função zeta distribucional, desenvolvido por N.F. Svaiter e B.F. Svaiter, “*The distributional zeta-function in disordered field theory,*”, International Journal of Modern Physics A, 31 1650144 (2016) para calcular a média do ruído *quenched* do funcional gerador das funções de correlação conexas. No Capítulo 4, foram utilizados os métodos apresentados nos capítulos anteriores para estudar a estrutura dos estados de vácuo e o comportamento da atividade do vácuo,  $\langle\varphi^2(x)\rangle$  na presença do ruído multiplicativo. Esta análise feita no capítulo 4 revelou dois importantes resultados: O primeiro é o de que pode haver uma estrutura de inúmeros vácuos, induzida pelo ruído multiplicativo. O segundo resultado é o da troca do sinal da atividade do vácuo, seja qual for a intensidade do ruído.

**Palavras Chave:** Teoria quântica de campos em espaços curvos, métodos funcionais em teoria quântica de campos Euclidiana, método da função zeta distribucional, ruído *quenched*.

# Abstract

The main objective of this thesis is to provide a review of the paper “*Multiplicative noise in Euclidean Schwarzschild Manifold,*” written by M. Soares, N. F. Svaiter and C. A. D. Zarro, published in *Classical and Quantum Gravity*, **37**, 065024 (2020). In this paper, the authors have investigated a scalar field with interaction  $\lambda\varphi^4(x) + \rho\varphi^6(x)$  in the presence of a multiplicative noise coupled to the quadratic term. The scalar field in this scenario is defined over the Euclidean section of the Schwarzschild solution of Einstein’s equations. In the Chapters 2 and 3 we presented the fundamental aspects about quantum field theory in spaces of Euclidean signature, statistical field theory and disordered systems, required to the subsequent calculations and interpretations. Among those elements, it is highlighted the use of the distributional zeta function, developed by N. F. Svaiter e B. F. Svaiter (“*The distributional zeta-function in disordered field theory,*”, *International Journal of Modern Physics A*, 31 1650144 (2016) in order to calculate the *quenched* average generating functional of the conected correlation functions. In Chapter 4, We used the methods presented in the later chapters to investigate the structure of the vacuum states and the behavior of the vacuum activity  $\langle\varphi^2(x)\rangle$  in the presence of multiplicative noise. This analysis made in Chapter 4 has revealed two important results: the former is that there may have a multivacuum structure induced by the multiplicative noise; the last one shows that the sign of the vacuum activity changes independently of the noise intensity.

**Keywords:** Quantum field theory in curved spaces, functional methods in Euclidean quantum field theory, zeta distributional method, quenched noise.

# Sumário

|            |  |            |
|------------|--|------------|
|            | <b>Sumário</b> . . . . .   | <b>xi</b>  |
|            | <b>Lista de ilustrações</b> . . . . .  | <b>xii</b> |
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .  | <b>1</b>   |
| <b>2</b>   | <b>MÉTODOS EUCLIDIANOS EM TEORIA QUÂNTICA DE CAM-<br/>POS E RELATIVIDADE GERAL</b> . . . . .               | <b>4</b>   |
| <b>2.1</b> | <b>Teoria quântica de campos Euclidiana e teoria estatística de campos</b>                                 | <b>4</b>   |
| 2.1.1      | Teoria quântica de campos Euclidiana . . . . .   | 4          |
| 2.1.2      | Teoria estatística de campos . . . . .   | 6          |
| 2.1.3      | Conexão entre TQC Euclidiana e teoria estatística de campos . . . . .                                      | 7          |
| <b>2.2</b> | <b>Análise da seção Euclidiana do espaço tempo clássico</b> . . . . .                                      | <b>8</b>   |
| 2.2.1      | Seção Euclidiana da solução de Schwarzschild . . . . .   | 8          |
| 2.2.2      | Seção Euclidiana da solução de Rindler . . . . .   | 9          |
| <b>2.3</b> | <b>Teoria Quântica de Campos Interagentes para o Campo escalar</b> . .                                     | <b>12</b>  |
| 2.3.1      | O funcional gerador para as funções de correlação . . . . .  | 12         |
| 2.3.2      | Expansão perturbativa da teoria . . . . .  | 13         |
| 2.3.3      | Aproximação de campo médio . . . . .   | 15         |
| 2.3.4      | Quebra espontânea de simetria . . . . .  | 16         |
| <b>2.4</b> | <b>Função de Schwinger com temperatura na seção Euclidiana da so-<br/>lução de Schwarzschild</b> . . . . . | <b>19</b>  |
| 2.4.1      | Função de Schwinger a temperatura finita . . . . .   | 19         |
| 2.4.2      | Modos de Schwarzschild Euclidiano . . . . .  | 20         |
| 2.4.3      | Modos de Rindler Euclidiano . . . . .  | 22         |
| <b>3</b>   | <b>SISTEMAS DESORDENADOS E O MÉTODO DA FUNÇÃO ZETA<br/>DISTRIBUCIONAL</b> . . . . .                        | <b>24</b>  |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Sistemas desordenados . . . . .   | 24 |
| 3.2 | Método da função zeta distribucional . . . . .  | 26 |
| 4   | RUÍDO NUM BURACO NEGRO DE SCHWARSCHILD EUCLIDI-<br>ANO . . . . .  | 30 |
| 4.1 | Definição do Problema . . . . .   | 30 |
| 4.2 | Cálculo de $\mathbb{E} [Z^k]$ para interação $\frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \frac{\rho}{6}\varphi^6$ . . . . .   | 30 |
| 4.3 | Aproximação de Campo médio na presença de ruído multiplicativo .  | 32 |
| 4.4 | Cálculo de $\langle \varphi^2 \rangle$ na presença de ruído multiplicativo . . . . .                            | 34 |
| 4.5 | Cálculo de $\langle \varphi^2 \rangle$ em Rindler Euclidiano na presença de ruído multi-<br>plicativo . . . . . | 36 |
| 5   | CONCLUSÃO . . . . .   | 39 |
| A   | A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD DAS EQUAÇÕES DE EINS-<br>TEIN . . . . .  | 41 |
| B   | ASPECTOS INTRODUTÓRIOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAM-<br>POS EM ESPAÇOS CURVOS . . . . .                            | 46 |
|     | Referências . . . . .   | 50 |

## Lista de ilustrações

|          |   |    |
|----------|---|----|
| Figura 1 | – Sistema de coordenadas de Rindler. Ilustramos a linha de mundo de<br>um observador com $\xi = \text{constante}$ . . . . . | 11 |
| Figura 2 | – Espaço de Rindler Euclidiano . Evidenciamos a curva $\rho = \xi = \text{constante}$ . . . . .                             | 12 |
| Figura 3 | – Potencial $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{6}\rho\phi^6$ . . . . .                   | 17 |

# 1 Introdução

O século passado foi marcado, sem sombra de dúvidas, por avanços científicos bastante notáveis, pelo menos no que diz respeito a Física fundamental. A elaboração das teorias da relatividade restrita e geral e da mecânica quântica trouxeram um novo cenário para a compreensão da natureza pelos físicos. Um dos grandes paradigmas que veio a seguir foi o de unificar as interações fundamentais a partir de um pequeno número de princípios. A teoria quântica de campos, versão relativística da mecânica quântica, acrescida do fato de trabalhar com infinitos graus de liberdade, obteve grande sucesso na descrição de interações fundamentais entre partículas elementares, principalmente no que diz respeito à interação eletromagnética e eletro-frac. Em meados da década de 70, foram intensificados vários esforços para incorporar a interação gravitacional ao formalismo de teoria quântica de campos. Uma abordagem que obteve bastante sucesso nesta direção é chamada de gravitação semi-clássica. Esta abordagem se baseia na quantização de campos de matéria definidos sobre um espaço-tempo clássico [1]. Este estudo evidenciou uma relação muito profunda entre a geometria dos horizontes de eventos e efeitos térmicos [2, 3, 4, 5, 6], tendo como seu principal resultado o de que um buraco negro, esfericamente simétrico e sem carga, emite radiação como se fosse um corpo negro à temperatura  $T = \frac{1}{8\pi M}$ , chamada de temperatura de Hawking, onde  $M$  é a massa do buraco negro. Recuperando o Sistema Internacional de unidades, é possível mostrar que a temperatura de Hawking é da ordem de  $T \sim 10^{-8} K \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)$ , onde  $M_{\odot}$  é a massa do Sol, o que é muito menor do que a temperatura da radiação cósmica de fundo de 3 K para buracos negros astrofísicos [7]. Importantes previsões acerca do paradigma da gravitação semi-clássica podem ser testadas com o auxílio dos recentes avanços acerca de medidas de ondas gravitacionais [8]. Nesta dissertação, utilizaremos uma abordagem chamada de gravitação Euclidiana, que consiste na rotação de Wick no parâmetro temporal, da gravitação semi-clássica. Nesta técnica, adicionalmente a condições periódicas adequadas associadas ao parâmetro temporal imaginário, é possível descrever um sistema de campos quânticos à temperatura

finita [9, 10].

Neste trabalho, fomos motivados por estudos que propõem que uma compreensão adequada da termodinâmica de buracos negros deve utilizar a ideia de que o buraco negro em si é um sistema aberto fora do equilíbrio. Portanto, precisamos de um tratamento de teoria quântica de campos nesta situação [11, 12]. Assim, um estudo profundo acerca de flutuações na temperatura de Hawking [13, 14] faz-se necessário. Esta discussão nos motiva a inserir em nossa teoria um parâmetro que incorpore as flutuações devidas ao fato do buraco negro ser analisado como um sistema aberto, levando em consideração flutuações à temperatura de Hawking. Em particular, para um modelo de Landau-Ginzburg tradicional,  $V(\varphi) = m^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4$ , o parâmetro  $m^2 = m^2(T)$  é dependente da temperatura [15], o que nos motiva a utilizar um parâmetro multiplicativo de desordem associado ao termo  $\varphi^2$  da densidade Lagrangiana do modelo que utilizaremos nesta dissertação. Este pode representar uma flutuação local da temperatura de Hawking. Queremos salientar que este método é essencialmente diferente da gravitação quântica estocástica, onde são induzidas flutuações estocásticas diretamente na métrica [16].

Nesta dissertação, estudaremos uma teoria quântica de campos definida sobre a seção Euclidiana do espaço de Schwarzschild, onde adicionaremos ao termo quadrático uma contribuição que leva em conta flutuações externas. O modelo mais simples possível consiste num campo escalar com auto-interação, chamado de modelo  $\lambda\varphi^4$ , porém, como veremos nos próximos capítulos, na presença do ruído, este modelo pode ser instável. Para garantir a estabilidade do vácuo, adicionaremos um termo  $\rho\varphi^6$  ao nosso modelo. Depois, considerando que o ruído é do tipo *quenched*, usaremos a técnica da função zeta distribucional introduzida por N. F. Svaiter e B. F. Svaiter na referência [17] para calcular a média *quenched*. Este método foi utilizado para investigar propriedades de sistemas físicos com desordem *quenched* na literatura [18, 19]. Após calcularmos a média *quenched*, usaremos métodos funcionais [15, 20, 21, 22] para obtermos a chamada atividade do vácuo definida, para um campo escalar real, por  $\langle\varphi^2(x)\rangle$ . Adicionalmente, calculamos, a partir da atividade do vácuo, o tensor energia-momento renormalizado da teoria.

A organização desta dissertação é a que segue: no Capítulo 2, apresentaremos os méto-

dos de teoria quântica de campos em variedades Euclidianas. Discutiremos também alguns aspectos sobre variedades de Schwarzschild e Rindler Euclidianas, que serão necessários no seguimento desta dissertação. No Capítulo 3, introduziremos o conceito de sistemas desordenados e de média *quenched*. O método da zeta distribucional será apresentado em detalhe. No Capítulo 4, utilizaremos os métodos já desenvolvidos nos capítulos anteriores para investigar o efeito do ruído *quenched* na atividade do vácuo. Os apêndices A e B apresentam elementos relevantes ao tema, porém, não fundamentais à compreensão desta dissertação. No apêndice A revemos a solução de Schwarzschild em relatividade geral e no apêndice B apresentamos um brevíssimo resumo de teoria quântica em espaços curvos.

Esta dissertação é fortemente baseada na referência [23]. Também fizemos  $k_B = c = \hbar = G = 1$ .



## 2 Métodos Euclidianos em Teoria Quântica de Campos e Relatividade Geral

### 2.1 Teoria quântica de campos Euclidiana e teoria estatística de campos

Nesta seção discutiremos alguns aspectos de teorias de campos definidas sobre seções Euclidianas de espaços-tempos. Começaremos definindo a chamada teoria quântica de campos Euclidiana. Depois apresentaremos a teoria estatísticas de campos e finalmente chegaremos a condição KMS (Kubo-Martin-Schwinger) que conecta estas duas abordagens.

Em teorias de campos é necessário sabermos como uma configuração inicial influencia em outra configuração num tempo posterior. Ou ainda como a probabilidade de encontrar o sistema num determinado estado é afetada pela probabilidade de encontrar o sistema em um outro estado, ou seja, a correlação entre estas quantidades. As chamadas funções de correlação, ou funções de dois ou mais pontos, representam o cerne das interpretações físicas destas teorias, tanto em estudos de interações de partículas fundamentais [21], relacionadas a elementos de matriz  $S$ , como em teoria estatística de campos [15], relacionadas a propriedades termodinâmicas, como expoentes críticos em transições de fase.

#### 2.1.1 Teoria quântica de campos Euclidiana

Numa teoria quântica de campos escalares reais, estas funções de correlação podem ser obtidas a partir de quantidades do tipo:

$$I = \int [d\varphi] e^{iS[\varphi]}, \quad (2.1)$$

onde  $[d\varphi]$  é uma medida funcional,  $S[\varphi]$  é o funcional ação definido por

$$S[\varphi] = \int_{x \in \mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}(\phi(x)), \quad (2.2)$$

onde  $\mathcal{L}(\phi)(x)$  é a densidade Lagrangiana de interesse, definida para o campo escalar real  $\varphi(x)$ . Na discussão acima  $\mathcal{M}$  é uma variedade com métrica de assinatura Lorentziana,

temos então  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . A integral funcional é feita sobre todas as possíveis configurações do campo  $\varphi(x)$  e  $x = (t, \vec{x})$ . Doravante, por brevidade, iremos omitir o argumento de  $\varphi$  sempre que não for relevante em nossas discussões. Devido ao caráter oscilatório do integrando, a integral acima, para campos reais, há problemas de convergência [20]. Para resolver este problema, fazemos a chamada rotação de Wick, que leva a variável temporal  $t$  numa variável imaginária  $\tau = -it$ . Dessa forma, a integral funcional  $I$  se torna  $\bar{I}$  definido por:

$$\bar{I} = \int [d\varphi] e^{-\bar{S}[\varphi]}, \quad (2.3)$$

onde  $x_E = (\tau, \vec{x})$  e  $\bar{S}(\varphi)$  é a ação nas novas coordenadas, chamada também de ação Euclidiana do campo. O nome Euclidiano deve-se ao fato de que após a rotação de Wick, o elemento de linha passa a ser positivo definido. Nesta formulação, para campos reais, o integrando é positivo e tende a convergir. Conforme comentado na referência [20], esta observação acerca da convergência das integrais como as realizadas na equação (2.3) revela que a teoria de campos deve ser definida sobre alguma seção Euclidiana do espaço-tempo original onde os campos quânticos são definidos. Porém, para melhor interpretar os resultados deveríamos desfazer a rotação de Wick, voltando para os resultados de assinatura Lorentziana.

Uma das mais importantes funções de correlação em teoria quântica de campos, chamada de propagador de Feynman ou causal, que para campos escalares, é definida por:

$$\langle 0 | \mathcal{T}(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle, \quad (2.4)$$

onde  $\mathcal{T}$  é o operador ordenamento temporal, que estabelece a ordem dos campos a partir das variáveis temporais  $x^0$  e  $y^0$ :

$$\mathcal{T}(\varphi(x)\varphi(y)) = \begin{cases} \varphi(x)\varphi(y), & \text{se } x^0 > y^0, \\ \varphi(y)\varphi(x), & \text{se } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Uma questão essencial é a de como este importante objeto se modifica (e até mesmo se é bem definido) numa rotação de Wick.

## 2.1.2 Teoria estatística de campos

Antes de apresentarmos as condições um pouco mais formais para que possamos efetuar e interpretar uma rotação de Wick implementada em uma variedade mais geral, comentaremos um pouco sobre uma teoria de campos que já é naturalmente formulada de forma a ter a equação (2.3) como quantidade fundamental: teoria estatística de campos para flutuações lentas de  $\beta \equiv \frac{1}{T}$ . Nesta formulação, similarmente à da mecânica estatística, definimos uma função de partição para um campo escalar  $\varphi(x_E)$  como [15, 24]:

$$Z = \int [d\varphi] e^{-H[\varphi]} \quad (2.6)$$

onde  $H[\varphi]$  é o hamiltoniano do campo e  $x_E$  é o conjunto de coordenadas espaciais. O termo usual  $\beta$  presente em  $Z$  foi implicitamente incorporado a  $H[\varphi]$ .

A função de correlação de  $n$  pontos, em teoria estatística de campos, também chamada de função de Schwinger de  $n$  pontos é dada por

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \rangle. \quad (2.7)$$

Por simplicidade, omitimos o índice  $E$  na variável  $x$ . Sempre que houver ambiguidade o utilizaremos explicitamente. A média representada em (2.7) é efetuada no ensemble canônico, portanto, pode ser escrita como:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = Z^{-1} \int [d\varphi] (\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)) e^{-H[\varphi]}. \quad (2.8)$$

Para que possamos calcular estas quantidades a partir da função de partição, inseriremos uma fonte fictícia no Hamiltoniano, que irá se acoplar linearmente com o campo. Sendo assim, definimos o funcional gerador das funções de correlação como:

$$Z[j] = \int [d\varphi] e^{-H[\varphi] + \int d^m x j(x) \varphi(x)}, \quad (2.9)$$

onde  $m$  é a dimensão do espaço do espaço Euclidianos. Usando técnicas de derivação funcional, é possível ver que [22]:

$$\frac{\delta}{\delta j(x_1)} Z[j] = \int [d\varphi] \varphi(x_1) e^{-H[\varphi] + \int d^m x j(x) \varphi(x)} \quad (2.10)$$

e:

$$\frac{\delta^n}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\dots\delta j(x_n)}Z[j] = \int [d\varphi] \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) e^{-H[\varphi] + \int d^m x j(x)\varphi(x)}. \quad (2.11)$$

Portanto, a partir do funcional gerador  $Z[j]$ , podemos calcular as funções de correlação a partir da seguinte expressão:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = Z^{-1}[j] \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\dots\delta j(x_n)} \Big|_{j=0}. \quad (2.12)$$

Para o caso de  $n = 1$ , a função de correlação de  $n$  pontos é o valor médio do campos no ponto  $x$ , que chamaremos de parâmetro de ordem:

$$q(x) \equiv \langle \varphi \rangle = \frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)} \Big|_{j=0}. \quad (2.13)$$

### 2.1.3 Conexão entre TQC Euclidiana e teoria estatística de campos

Vimos no início desta seção que a fim de que a equação (2.1) seja bem definida, efetuamos uma rotação de Wick, e que com isso, a teoria passa a se parecer, de certo modo, como uma teoria estatística de campos pois os funcionais geradores tem a mesma forma funcional. Até o presente momento, não há nenhuma menção a temperatura ou a qualquer outra quantidade termodinâmica. Vamos considerar agora que o sistema apresentado no início desta seção esteja em contato com um reservatório térmico de temperatura  $T = \beta^{-1}$ . Podemos calcular a média das flutuações térmicas de um determinado operador  $\hat{A}(t)$  usando os métodos padrão de teoria estatística de campos como:

$$\langle \hat{A}(t) \rangle_\beta = Z^{-1} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(t)] \quad (2.14)$$

onde  $Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}$  e  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano. Lembrando que o operador  $e^{-ia\hat{H}}$  é responsável por translações na coordenada temporal:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(t) \rangle_\beta &= Z^{-1} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(t)] \\ &= Z^{-1} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(t) e^{+\beta \hat{H}} e^{-\beta \hat{H}}] \\ &= Z^{-1} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(t) e^{+\beta \hat{H}}] \\ &= \langle \hat{A}(t + i\beta) \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Efetuada a rotação de Wick como no início da seção e ocultando  $i$  na notação, temos:

$$\langle \hat{A}(\tau) \rangle_\beta = \langle \hat{A}(\tau + \beta) \rangle_\beta. \quad (2.16)$$

Esta condição de periodicidade imposta sobre a coordenada temporal imaginária  $\tau$  é chamada de condição KMS (Kubo, Martin, Schwinger) [9, 10]. Assim, para um campo escalar, podemos descrever um sistema de teoria quântica de campos à temperatura finita  $T$  efetuando uma rotação de Wick na coordenada temporal e impondo a condição de periodicidade acima na teoria Euclidiana.<sup>1</sup>

## 2.2 Análise da seção Euclidiana do espaço tempo clássico

### 2.2.1 Seção Euclidiana da solução de Schwarzschild

Para discutir efeitos não triviais gerados pelo ruído aleatório definido sobre a seção Euclidiana de um buraco negro precisamos apresentar brevemente a solução de Schwarzschild discutida no apêndice A. A métrica pseudo-Riemanniana de Schwarzschild é definida pelo elemento de linha, válido para  $r > 2M$ :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.17)$$

Fazendo a rotação de Wick,  $\tau = it$ , obtemos uma métrica positiva definida Euclidiana para  $r > 2M$ . Introduzindo a coordenada radial

$$x = 4M \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (2.18)$$

o elemento de linha fica

$$ds^2 = \frac{x^2}{16M^2} d\tau^2 + \frac{r^4}{16M^4} dx^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.19)$$

Usando a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{\tau}{4M}, \\ x &= 2M \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2.20)$$

<sup>1</sup> Para o caso de um campo fermiônico, descreve-se uma teoria de campos à temperatura finita  $T$  implementando uma condição de anti-periodicidade na coordenada  $\tau$  [6]

o elemento de linha se torna:

$$ds^2 = 4M^2 (d\alpha^2 + \text{sen}^2\alpha d\tilde{\tau}^2) + r^2(\alpha) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.21)$$

Nesse sistema de coordenadas, é possível notar que se  $\tilde{\tau}$  tem periodicidade  $2\pi$ , então,  $4M^2 (d\alpha^2 + \text{sen}^2\alpha d\tilde{\tau}^2)$  é um elemento de linha de uma 2-esfera de raio  $2M$ . Sendo assim, este elemento de linha possui apenas uma singularidade de coordenada, nos pólos Norte ou Sul. Voltando às coordenadas originais (2.20),  $\tau$  deve ser periódica de período  $8\pi M$  e  $x$  deve estar confinado no intervalo  $0 \leq x \leq 4M$ , o que equivale, para coordenada  $r$ , ao intervalo  $2M \leq r \leq \infty$ .

Portanto, a singularidade em  $r = 2M$  ( $x = 0$ ) é removida se  $\tau$  é uma coordenada periódica de período  $8\pi M$ . Supondo que a coordenada  $\tau$  é periódica, obtemos uma métrica Euclidiana positiva definida livre de singularidades. Portanto, a variedade definida na região  $0 \leq x \leq 4M$  e  $0 \leq \tau \leq 8\pi M$  é a seção Euclidiana da solução de Schwarzschild. De acordo com a condição KMS, uma TQC Euclidiana nesta variedade descreve um sistema à temperatura finita  $T = \frac{1}{8\pi M}$

### 2.2.2 Seção Euclidiana da solução de Rindler

Analisaremos agora o comportamento da variedade de Schwarzschild nas proximidades do horizonte de eventos definido por  $r = 2M$ . Esta análise se mostrará bastante útil no seguimento dos cálculos. O procedimento que será executado aqui é intimamente baseado na referência [25]. Iniciaremos por definir a coordenada espacial  $\xi$  como:

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{2M}^r \sqrt{g_{00}(r')} dr' \\ &= \int_{2M}^r \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r'}\right)} dr' \\ &= \sqrt{r(r-2M)} + 2M \text{senh}^{-1} \left( \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Em termos das novas coordenadas  $(t, \xi, \theta, \phi)$ , o elemento de linha  $ds^2$  fica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r(\xi)}\right) dt^2 - d\xi^2 - r^2(\xi) d\Omega^2. \quad (2.23)$$

Nas proximidades do horizonte de eventos:

$$\xi \approx 2\sqrt{2M(r-2M)}. \quad (2.24)$$

Usando esta aproximação, o elemento de linha toma a forma:

$$ds^2 = \left( \frac{dt}{4M} \right)^2 - d\xi^2 - r^2(\xi)d\Omega^2. \quad (2.25)$$

Se considerarmos agora uma região de pequenos ângulos ( $\theta \ll 1$ ), podemos substituir as coordenadas angulares por coordenadas cartesianas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= 2M \theta \cos \phi, \\ y &= 2M \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Usando esta aproximação, e definindo uma nova coordenada temporal como:

$$\tau \equiv \frac{t}{4M}, \quad (2.27)$$

o elemento de linha nas coordenadas  $(\tau, \xi, x, y)$  fica:

$$ds^2 = \xi^2 d\tau^2 - d\xi^2 - dx^2 - dy^2. \quad (2.28)$$

Os coeficientes deste elemento de linha são chamados de métrica de Rindler. Fisicamente, a métrica de Rindler é usada para descrever o movimento de uma partícula livre num referencial uniformemente acelerado [26]. Existe ainda uma mudança de coordenadas útil a fim de elucidar algumas propriedades deste espaço:

$$\begin{aligned} T &= \xi \sinh \tau, \\ Z &= \xi \cosh \tau. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nestas coordenadas, o elemento de linha fica:

$$dS^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2, \quad (2.30)$$

que representa obviamente a métrica do espaço de Minkowski. Parece que estamos prontos então para abandonar as tais coordenadas de Rindler, na qual tivemos algum trabalho para derivar. A resposta a este dilema começa a ser respondida na figura 1, que compara as coordenadas de Rindler e Minkowski. O conjunto de transformações (2.29) cobre apenas uma parte do espaço de Minkowski, representado na figura acima como região R. O

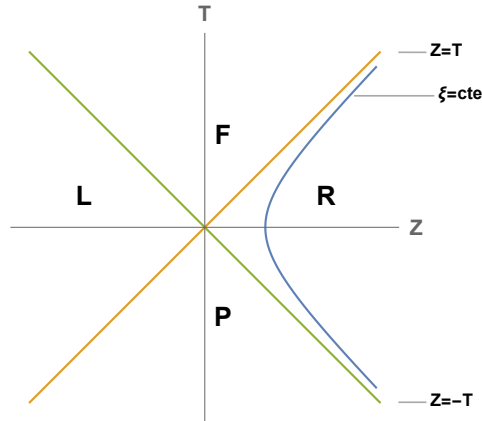


Figura 1 – Sistema de coordenadas de Rindler. Ilustramos a linha de mundo de um observador com  $\xi = \text{constante}$ .

interessante desta região do espaço tempo é a de que é exatamente a região que fica fora do horizonte de eventos de Schwarzschild [25].

Assim como feito para o espaço tempo de Schwarzschild, analisaremos as propriedades da seção Euclidiana do espaço tempo de Rindler. Para tal, lembramos que o espaço de Rindler (definido como a parte Rindler R do espaço de Minkowski), pode ser definido a partir de uma mudança de coordenadas como em (2.29). Portanto, podemos a princípio definir a seção Euclidiana do espaço de Rindler com uma única mudança de coordenadas a partir das coordenadas de Minkowski. Para isso, primeiro efetuaremos a rotação de Wick nas coordenadas de Rindler habituais como:

$$\begin{cases} \tau = i\bar{\tau}, \\ \xi = \rho. \end{cases} \quad (2.31)$$

A nova coordenada temporal  $\bar{\tau}$  será a partir de agora apenas de  $\tau$ , por simplicidade. Inserindo então as novas coordenadas (2.31) em (2.29), temos que a seção Euclidiana do espaço de Rindler pode ser definida a partir da seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{cases} T = \rho \text{sen } \tau, \\ Z = \rho \text{cos } \tau. \end{cases} \quad (2.32)$$

Nota-se pela figura 2 que este sistema de coordenadas varre todo o espaço Euclidiano, exceto a origem, ou seja, estas coordenadas pegam pontos fora da região causal delimitada por R. Outro ponto importante que merece destaque é o de que a coordenada imaginária temporal  $\tau$  é periódica de período  $2\pi$ , o que, pela condição KMS, deve representar uma



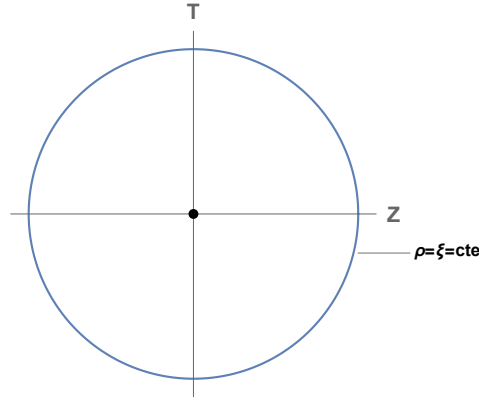


Figura 2 – Espaço de Rindler Euclidiano . Evidenciamos a curva  $\rho = \xi = \text{constante}$ .

temperatura no ensemble canônico igual a  $T = \frac{1}{2\pi}$ , que, recuperando as unidades originais da mudança de escala feita em (2.27), é igual a  $T = \frac{1}{8\pi M}$ , similarmente à seção Euclidiana do espaço de Schwarzschild.

## 2.3 Teoria Quântica de Campos Interagentes para o Campo escalar

### 2.3.1 O funcional gerador para as funções de correlação

Nesta seção, em complemento a seção 2.1, continuaremos as discussões acerca de teoria quântica de campos, onde discutiremos técnicas e interpretações físicas de sistemas representados por campos escalares auto-interagentes, mais especificamente, estamos interessados em campos com acoplamento  $\lambda\varphi^4 + \rho\varphi^6$ , apesar do formalismo ser mais geral. Assim como evidenciado na seção 2.1, estamos interessados no cálculo de funções de correlação, as quais calculamos a partir do funcional gerador  $Z[j]$ . Iniciaremos a discussão por definir a ação Euclidiana para um campo escalar  $\varphi(x)$  auto-interagente sobre uma métrica  $g_{\mu\nu}$  como:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi)(x), \quad (2.33)$$

onde a notação  $x = (\tau, \vec{x})$  representa o conjunto de coordenadas obtidas após a rotação de Wick nas coordenadas espaço-temporais originais e  $\mathcal{L}$  é a densidade lagrangiana, definida como:

$$\mathcal{L}(\varphi)(x) = \sqrt{g} \left[ \varphi \left( -\Delta + m^2 \right) \varphi + V(\varphi) \right], \quad (2.34)$$

onde, por brevidade, omitimos o argumento do campo  $\varphi(x)$ ,  $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \frac{\rho}{6}\varphi^6$  e  $\Delta$  é o operador Laplaciano, definido por

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi). \quad (2.35)$$

Assim como na seção 2.1, definimos para esta teoria um funcional gerador adicionando uma fonte fictícia  $j(x)$  acoplada linearmente a  $\varphi(x)$ . Desta forma, o funcional gerador de todas as funções de correlação pode ser escrito como:

$$Z[j] = \int [d\varphi] \exp \left[ - \int d^4x \mathcal{L}(\varphi) + \int d^4x \sqrt{g} j\varphi \right]. \quad (2.36)$$

A maneira de se obter as funções de correlação é sutilmente alterada em comparação ao caso Euclidiano plano, devido ao termo  $\sqrt{g}$  junto à fonte, colocado para que o elemento de volume quadri-dimensional seja um escalar. A função de correlação de  $n$  pontos pode então ser escrita como:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{g})^n} Z^{-1}[j] \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\dots\delta j(x_n)} \Big|_{j=0}. \quad (2.37)$$

### 2.3.2 Expansão perturbativa da teoria

Para compreender um pouco melhor a natureza matemática das funções de correlação, vamos olhar primeiro somente para a parte livre do funcional gerador, ou seja esqueceremos, por enquanto, o termo  $V(\varphi)$ . Definimos o funcional das funções de correlação livres, como:

$$Z_0[j] = \int [d\varphi] \exp \left[ - \int d^4x \sqrt{g} \left( \varphi(x) (-\Delta + m^2) \varphi(x) + j(x)\varphi(x) \right) \right]. \quad (2.38)$$

Neste momento, utilizaremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) + \int d^4x' \sqrt{g} H(x, x') j(x'), \quad (2.39)$$

onde  $H(x, x')$  satisfaz:

$$(-\Delta_x + m^2) H(x, x') = \delta(x - x'), \quad (2.40)$$

ou seja,  $H(x, x')$  é uma função de Green associada ao operador  $(-\Delta_x + m^2)$ . Introduzindo tal mudança de variáveis, se pode mostrar que [22]:

$$Z_0[j] = Z_0[0] \exp \left[ - \int d^4x d^4x' \sqrt{g(x)} \sqrt{g(x')} j(x) H(x, x') j(x') \right]. \quad (2.41)$$

Desta forma, conseguimos fatorar a fonte fictícia  $j(x)$  da integral funcional. De fato, se calcularmos a função de correlação de dois pontos, usando a equação (2.37), temos que:

$$G(x, y) = H(x, y), \quad (2.42)$$

o que evidencia o fato de que a função de correlação para a teoria sem interação é uma função de Green, e que sugere que outras funções de correlação da teoria livre são de alguma forma combinações da função de Green de dois pontos, que será chamada de  $G(x, y)$  a partir de agora. É possível mostrar também que o funcional gerador completo pode ser representado por [22]:

$$Z[j] = \exp \left[ - \int d^4x V \left( \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right] Z_0[j]. \quad (2.43)$$

A teoria de perturbação consiste na expansão em série de Taylor funcional da exponencial que depende das derivadas funcionais com respeito a fonte fictícia  $j(x)$ . Claramente, ordem zero de expansão em série, o funcional gerador é o próprio funcional gerador livre. Não é difícil ver que as funções de correlação da teoria completa, em qualquer ordem, dependem de alguma forma de combinações de  $G(x, y)$ . Algumas destas combinações são simplesmente produtos de duas ou mais funções de correlação de ordem mais baixa (o que representa uma soma de processos envolvendo menos pontos) [15, 21, 22]. Estes termos da série perturbativa são chamados de desconexos. Para que não tenhamos que subtrair estes termos manualmente, felizmente, é possível definir um novo funcional gerador que elimina automaticamente estes termos, o qual chamaremos de funcional gerador das funções de correlação conexas, definido como:

$$W[j] = \log Z[j]. \quad (2.44)$$

A partir dele, introduziremos as funções de correlação conexas por:

$$G_c(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{g})^n} \frac{\delta^n W[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x_2) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0}. \quad (2.45)$$

As observações feitas no parágrafo anterior se encontram detalhadas nas referências [15, 21, 22] para um espaço-tempo plano e aprofundam a discussão dos resultados apresentados acima.

### 2.3.3 Aproximação de campo médio

Nesta subseção, abordaremos uma técnica perturbativa para o funcional gerador das funções conexas  $W[j]$ , e conseqüentemente, para as funções de Green conexas. Por simplicidade, apresentaremos o formalismo adotado para uma teoria estatística de campos num espaço Euclidiano plano. É possível ver, a partir das definições dadas pelas equações (2.13) e (2.44) que o parâmetro de ordem associado a uma teoria estatística de campos pode ser definido como:

$$q(x) = \langle \varphi \rangle = \left. \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \right|_{j=0}. \quad (2.46)$$

Para que possamos implementar a aproximação proposta nesta seção, definiremos uma quantidade chamada de campo clássico [22], definida por:

$$\phi_c(x)[j] \equiv \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)}, \quad (2.47)$$

onde é possível notar que  $\phi_c(x)[j]$  é um funcional de  $j(x)$ . Vale notar também que  $\phi_c(x) \equiv \phi_c(x)[0]$  é justamente o parâmetro de ordem. Dadas estas definições, suponha que o funcional gerador de todas as funções de correlação são escritos como:

$$Z[j] = \int [d\varphi] e^{-a^{-1}S[\varphi,j]}, \quad (2.48)$$

onde  $a$  é uma constante positiva. Este forma funcional surge com frequência em modelos de teoria de campos [15, 21, 22]. A ideia por trás desta aproximação é a de analisar o limite em que o parâmetro  $a$  é muito pequeno. Esta aproximação é conhecida em análise complexa como o método da função estacionária [27]. Este método consiste em mostrar que esta integral pode ser aproximada pelo valor do integrando no seu ponto crítico. Na referência [22], é demonstrado que isto nos leva a equação diferencial funcional (em aproximação de ordem zero em  $a$ ), e é dada por:

$$\frac{\delta S[\phi_c(x)[j], j]}{\delta \phi_c(x)[j]} - j(x) = 0, \quad (2.49)$$

que é chamada de equação de Dyson-Schwinger em ordem zero para o caso particular  $a = \hbar$ . Fazendo  $j(x) = 0$ , temos uma equação diferencial para o parâmetro de ordem, que é justamente a equação clássica de para o campo. Esta equação é chamada de equação de campo médio e é escrita como:

$$\frac{\delta S[\phi_c(x)]}{\delta \phi_c(x)} = 0. \quad (2.50)$$

### 2.3.4 Quebra espontânea de simetria

Outro tema envolvendo teoria quântica de campos, extremamente relevante a este trabalho, é o de quebra espontânea de simetria, que está intimamente ligado ao conceito de vácuo. Este último conceito é um dos mais importantes em teoria quântica de campos. É necessário, para que se construa uma teoria consistente, que haja uma quantidade que se possa identificar como a energia do sistema e que esta possua um mínimo global. O estado quântico referente a este mínimo é chamado de vácuo quântico, e toda teoria é construída a partir dele. No formalismo funcional identificamos a ação Euclidiana como a energia, que tem dependência explícita nos campos  $\varphi(x)$ . Dizemos que uma simetria é quebrada espontaneamente, caso esta simetria continue sendo uma simetria da ação, mas não seja mais uma simetria de outros objetos físicos calculados no estado de vácuo. Por exemplo, a ação descrita pela equação (2.33) possui a simetria  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . É suficiente, neste caso, para que tenhamos uma quebra espontânea de simetria que  $\langle 0|\varphi|0\rangle \equiv \langle \varphi \rangle \neq 0$ , onde  $|0\rangle$  é o estado de vácuo.

Definimos como estado fundamental de nossa teoria um valor uniforme de  $\langle \varphi \rangle \equiv \phi$  que satisfaça a equação de campo médio (2.50). Dentro destas condições, e usando a ação definida na equação (2.33), temos<sup>2</sup>:

$$-\Delta\phi + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) \right) = 0. \quad (2.51)$$

Como  $\phi$  é uniforme, o primeiro termo do lado esquerdo da última equação se anula, e esta se resume a

$$\frac{dU(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.52)$$

<sup>2</sup> Em espaços curvos, esta hipótese não é em geral satisfeita, pois  $\varphi(x) = cte$  pode não ser solução das equações de movimento [28].

onde

$$U(\phi) \equiv \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{6}\rho\phi^6. \quad (2.53)$$

Restringindo nossa definição, o estado fundamental deve ser, não apenas um ponto crítico do potencial  $U(\phi)$ , mas um mínimo global. Para uma teoria com todas as constantes de acoplamento positivas, o único extremo é  $\phi(x) = 0$ , onde portanto, esta discussão não é relevante. Entretanto, analisaremos um caso mais geral onde o parâmetro  $\lambda$  pode ser negativo e portanto é possível que haja valores de  $\phi \neq 0$  que correspondam a mínimos globais. O problema se resume então a encontrar os mínimos globais do potencial  $U(\phi)$ , mantidas as condições de que  $m^2 > 0$  e  $\rho > 0$ . A última condição é necessária para que a energia possua um mínimo global.

Derivando a equação (2.53) com respeito a  $\phi$  e igualando a zero (cf. a equação (2.52)), temos:

$$m^2\phi + \lambda\phi^3 + \rho\phi^5 = 0 \Leftrightarrow \phi(m^2 + \lambda\phi^2 + \rho\phi^4) = 0. \quad (2.54)$$

Claramente,  $\phi = 0$  é uma das soluções, como previsto. Nos resta agora investigar os pontos críticos não triviais da equação (2.53). Antes disso, é ilustrativo analisar os gráficos deste potencial,  $U(\phi)$ , como mostrados na figura 3. Existem três casos interessantes apresentados

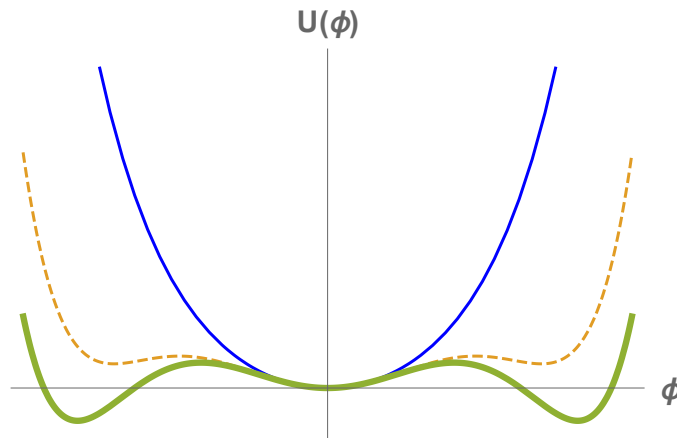


Figura 3 – Potencial  $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{6}\rho\phi^6$

na figura 3. O primeiro caso é representado pelo potencial representado por uma linha fina (em azul na versão colorida), onde  $m^2 > 0$ ,  $\lambda > 0$  e  $\rho > 0$ , possui apenas um mínimo local, portanto, global. O segundo caso, representado pela linha tracejada (em laranja na versão

colorida), mostra um cenário onde,  $m^2 > 0$ ,  $\rho > 0$  e  $\lambda$  embora negativo, é menor do que um valor crítico a ser discutido posteriormente. Nele existem outros dois pontos críticos que são mínimos locais, porém não são globais. De fato,  $\phi = 0$  é sempre uma solução e  $U(0) = 0$ . Portanto, a única forma de termos mínimos globais para valores de  $\phi \neq 0$  é impor a condição de que o potencial  $U(\phi) < 0$  para estes outros pontos extremos (situação ilustrada pela linha espessa na figura. Voltando à equação para os pontos extremos (2.54), a equação para raízes não triviais fica:

$$m^2 + \lambda\phi^2 + \rho\phi^4 = 0, \quad (2.55)$$

que possui 4 soluções, que são:

$$\phi_1^{(\pm)} = \sqrt{\frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\rho m^2}}{2\rho}}, \quad \phi_2^{(\pm)} = -\sqrt{\frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\rho m^2}}{2\rho}}. \quad (2.56)$$

Como a equação tem simetria de paridade, podemos usar a solução de sinal positivo, *i.e.*  $\phi_1^{(\pm)}$ . O argumento utilizado para escolher uma das duas raízes restantes é um pouco mais sutil. A partir de agora omitiremos o sub-escrito 1 na notação do  $\phi_1^{(\pm)}$ . Estamos supondo aqui que  $\lambda < 0$ , para que possamos ter quebra espontânea de simetria. Deste modo,  $U(\phi^{(-)}) < 0$  e  $U(\phi^{(-)}) < U(\phi^{(+)})$ , sendo portanto um mínimo global. Portanto, os valores dos novos vácuos devem ser:

$$\phi^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\rho m^2}}{2\rho}}, \quad (2.57)$$

tendo de satisfazer a condição  $U(\phi^{(\pm)}) < 0$ . Usando a equação (2.57) em (2.53), temos:

$$\lambda^2 > \frac{16m^2\rho}{3}, \quad (2.58)$$

Resolvendo esta inequação, temos a seguinte condição para  $\lambda$  a fim de que (2.57) seja um mínimo global:

$$\lambda < -4m\sqrt{\frac{\rho}{3}}. \quad (2.59)$$

Podemos agora expandir o campo em torno de seu novo vácuo, fazendo uma mudança no campo  $\varphi(x)$  do tipo:

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) + \phi. \quad (2.60)$$

Desta forma:

$$\langle \bar{\varphi}(x) \rangle = 0. \quad (2.61)$$

Portanto, temos que investigar o formato da Lagrangiana a fim de analisar os efeitos nos parâmetros de acoplamento. Este procedimento será feito com mais detalhes no capítulo 4 para este modelo na presença de um ruído multiplicativo acoplado ao quadrado do campo.

## 2.4 Função de Schwinger com temperatura na seção Euclidiana da solução de Schwarzschild

No decorrer deste capítulo, destacamos a importância das funções de correlação para uma teoria de campos. Na seção anterior, observamos que uma função de correlação de  $n$  pontos pode ser obtida a partir de funções de correlação de dois pontos, e que estas últimas são funções de Green do operador de campo, ou seja, satisfazem à equação (2.40). Estas constatações indicam que se faz necessário um estudo acerca de funções de Green para que possamos prosseguir.

O primeiro comentário que se faz relevante a esta discussão é que existe uma variedade de funções de Green associadas a um determinado operador hiperbólico de campo[6]. Estas funções de Green, por sua vez, podem ser univocamente determinadas a partir de condições implementadas sobre as funções de correlação. Portanto, para que possamos determinar a forma da função de Green de que temos interesse, temos de saber quais as condições que a definem.

### 2.4.1 Função de Schwinger a temperatura finita

Foi enfatizado no Capítulo 2 que uma das mais importantes funções de Green em teoria quântica de campos é o chamado propagador de Feynman dado pela equação (2.4). Inclusive, é esta função de Green que surge no funcional gerador da versão Lorentziana de teoria de campos. A versão Euclidiana desta quantidade é a chamada função de Schwinger [6] à temperatura zero. Nestas funções, é possível considerar a presença de temperatura utilizando condições de periodicidade na variável temporal imaginária (condições KMS).



Portanto, nesta dissertação, estamos interessados nas chamadas funções de Schwinger à temperatura finita  $T = \frac{1}{\beta}$ . Definiremos esta quantidade a partir do que chamaremos de *modos do campo*. Os modos do campo são um conjunto completo de funções  $u_n(x)$ , onde  $\{n\}$  representa o conjunto de índices necessários para definir  $u(x)$ . Eles satisfazem à equação

$$(-\Delta + m^2)u_n(x) = 0. \quad (2.62)$$

Esta equação pode ser resolvida, nos casos de interesse desta dissertação através da substituição de variáveis  $u_n(\tau, \vec{x}) = T_n(\tau)\psi_n(\vec{x})$ . Os passos desta solução serão omitidos, um leitor interessado deverá consultar as referências [29, 30, 31, 32]. Nestas referências é demonstrado que a função de Schwinger a temperatura  $T = \frac{1}{\beta}$  é dada por:

$$G_\beta(\tau, \vec{x}; \tau', \vec{x}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\psi_n(\vec{x})\psi_n(\vec{x}')}{2\omega_n} e^{-\omega_n|\tau-\tau'+m\beta|}. \quad (2.63)$$

## 2.4.2 Modos de Schwarzschild Euclidiano

Agora obteremos os modos do campo escalar livre com massa na seção Euclidiana de Schwarzschild. Com esta finalidade, partiremos da equação de campo para o campo escalar  $\varphi(x)$ :

$$(-\Delta + m^2)\varphi(x) = 0, \quad (2.64)$$

onde  $m^2$  é uma constante positiva e  $\Delta$  é o operador Laplaciano definido sobre o espaço de Schwarzschild Euclidiano. Definiremos este operador como o operador D'Alambertiano após a rotação de Wick e com o sinal trocado. Assim, usando um resultado obtido para o D'Alambertiano num espaço curvo [33], podemos escrever o operador Laplaciano como:

$$-\Delta\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}\partial^\mu\varphi(x)). \quad (2.65)$$

Usando esta última identidade para o caso do espaço de Schwarzschild Euclidiano nas coordenadas  $(\tau, r, \theta, \phi)$ , a equação (2.64) fica:

$$\left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r(r-2M) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\phi^2} \right] \varphi(x) = 0. \quad (2.66)$$

Para solucionar esta equação, será usado o método de separação de variáveis, onde será proposta a seguinte solução:

$$\varphi(\tau, r, \theta, \phi) = T(\tau)Y(\theta, \phi)R(r). \quad (2.67)$$

Substituindo a equação (2.67) na equação (2.66), temos as seguintes equações diferenciais :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{d\tau^2} &= -c_1 T, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} &= c_2 Y, \\ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r(r-2M) \frac{dR}{dr} \right) - V(r)R &= 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde  $V(r) = -\frac{c_2}{r^2} + c_1 \frac{r}{r-2M}$ . Usando o procedimento padrão de soluções de equações diferenciais separáveis e levando em conta que a variável  $\tau$  é periódica de período  $\beta = 8\pi M$ , a função  $T(\tau)$  pode ser escrita como uma série de termos  $T_n(\tau)$  dados por:

$$T_n(\tau) = \frac{1}{\beta} e^{i \frac{2\pi n}{\beta} \tau}, \quad (2.69)$$

onde  $n$  é inteiro e vai de menos a mais infinito. A função  $Y(\theta, \phi)$  obedece simplesmente uma equação de harmônicos esféricos, portanto pode ser expandido como  $Y_{lm}$ . A função  $R(r)$  não é trivial como as anteriores e requer bastante cuidado. Em resumo, não existe solução analítica para (2.68), portanto, analisaremos sua forma assintótica em alguns limites. Para isso, definiremos uma nova coordenada radial como:

$$r_* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (2.70)$$

Com algumas manipulações algébricas (vide [34]) e definido  $u_{nlm} = r R_{nlm}(r)$  e  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$  a equação (2.68) pode ser escrita como:

$$\left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega_n^2 + V_l(r) \right) u_{nlm}(r_*) = 0, \quad (2.71)$$

onde

$$V_l(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (2.72)$$

A equação acima é chamada de equação de Regge-Wheeler. Podemos observar que  $V_l$  possui zeros em  $r = 2M$  e  $r \rightarrow \infty$ . Desta forma, a solução nas proximidades do horizonte de eventos e no limite de longas distancias deve ser do tipo:

$$u \sim e^{\pm i\omega r_*}. \quad (2.73)$$

Devido ao fato de que as equações de Regge-Wheeler não terem solução numa forma fechada [5, 35], torna-se interessante discutir as propriedades das soluções nas proximidades do horizonte de eventos, onde é possível obter soluções numa forma fechada para os modos do campo. Isto será feito na subseção seguinte.

### 2.4.3 Modos de Rindler Euclidiano

Seguiremos então o caminho da seção anterior e determinaremos as soluções da equação  $(-\Delta + m^2)\varphi(x) = 0$ , desta vez, na seção Euclidiana do espaço de Rindler. Nas coordenadas de Rindler Euclidianas  $(\tau, \xi, x_\perp^i)$  temos:

$$\left( -\frac{1}{\xi^2} \partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - \frac{1}{\xi} \partial_\xi - \partial_i^2 + m^2 \right) \phi(\tau, \xi, x_\perp^i) = 0. \quad (2.74)$$

Para resolver esta equação, utilizaremos, mais uma vez, o método de separação de variáveis. Implementaremos então, uma solução do tipo:

$$\phi(\tau, \xi, x_\perp^i) = T(\tau) X(\xi) \prod_{i=2}^{d-1} X_\perp^i(x_\perp^i), \quad (2.75)$$

e utilizando a equação (2.74), temos as seguintes equações:

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} = \omega^2 T, \quad (2.76)$$

$$\frac{d^2 X_\perp^i}{dx_\perp^i{}^2} = -k^2 X_\perp^i, \quad (2.77)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} + \frac{\omega^2}{\xi^2} + \mu^2 \right) X = 0 \quad (2.78)$$

As duas primeiras equações tem soluções simples com:  $T(\tau) = e^{-\omega\tau}$  e  $X_\perp^i(x_\perp^i) = e^{ik^i x_\perp^i}$ . A última equação tem uma solução um pouco menos trivial chamada de função de MacDonald,

ou função de Bessel modificada de segundo tipo, denotada por  $K_\nu$  [36]. Podemos então escrever um conjunto completo de soluções a partir de combinações lineares de:

$$u_{\vec{k}_\perp, \omega}(\xi, \vec{x}_\perp) = K_{i\omega}(\mu\xi) e^{i\vec{x}_\perp \cdot \vec{k}_\perp} e^{-\omega\tau}. \quad (2.79)$$

Para estas soluções, utilizaremos uma normalização obtida em [37], onde os novos modos são escritos como:

$$u_{\vec{k}_\perp, \omega}(\xi, \vec{x}_\perp) = \frac{\sqrt{2\omega \sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^2} K_{i\omega}(\mu\xi) e^{i\vec{x}_\perp \cdot \vec{k}_\perp} e^{-\omega\tau}. \quad (2.80)$$

Utilizando as equações (2.80) e (2.63), é possível escrever a função de Schwinger à temperatura  $T = \frac{1}{2\pi}$  como [31, 32]:

$$\begin{aligned} G_{2\pi}(\tau, \tau'; \xi, \xi'; x_\perp, x'_\perp) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\omega \int d^2 k_\perp \frac{\sinh(\pi\omega)}{\pi^2(2\pi^2)} K_{i\omega}(\mu\xi) K_{i\omega}(\mu\xi') \\ &\times e^{ik_\perp \cdot (x_\perp - x'_\perp)} e^{-\omega|\tau - \tau' + 2\pi n|}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

## 3 Sistemas desordenados e o Método da função zeta distribucional

### 3.1 Sistemas desordenados

Nesta subseção discutiremos alguns aspectos gerais de sistemas desordenados, em especial, os do tipo *quenched*, que serão posteriormente definidos. Os sistemas desordenados começaram a ser estudados nos anos 70 no contexto de matéria condensada, onde lidavam com impurezas em cristais. Estas impurezas quebravam simetrias importantes, e por esta razão, tornou-se necessária a criação de um mecanismo para estudá-las, o que introduziu grande complexidade ao problema, mas por outro lado, revelou novos efeitos físicos não vistos em materiais “puros” [38]. O estudo de sistema desta natureza recebeu o nome de Sistemas Desordenados. Assim como em várias outras situações físicas, o mecanismo que descreve estes sistemas em matéria condensada, pode descrever situações físicas essencialmente diferentes, como é o caso da referência [16] e do trabalho apresentado nesta dissertação.

Assim como em mecânica estatística para sistemas puros, estamos interessados no cálculo da função de partição. Mais especificamente, estamos interessados no cálculo de quantidades formadas a partir da função de partição que possam, no limite termodinâmico, descrever as propriedades termodinâmicas do sistema em questão. Para o caso do *ensemble* canônico, esta quantidade é a chamada energia livre de Helmholtz, que para um sistema puro, está relacionada com a função de partição  $Z$  por:

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z \quad (3.1)$$

onde

$$Z = \sum_s e^{-\beta E_s}, \quad (3.2)$$

onde  $E_s$  são todos os possíveis valores de energia do sistema classificadas pelo índice  $s$  e  $T$  é a temperatura do reservatório em que o sistema está em equilíbrio térmico. Em teoria

quântica de campos  $Z$  é analogamente substituído pelo funcional gerador das funções de correlação dos campos e a energia livre de Helmholtz,  $F$ , é substituída pela  $W$ , e é chamada de funcional gerador das funções de correlação conexas, como descrito na seção anterior e em [15]. Até aqui, nada de novo. A função de partição depende de variáveis nas quais a dinâmica, seja clássica ou quântica, é bem conhecida. Introduziremos às nossas já conhecidas variáveis, uma variável  $\delta m^2$ , que é determinada a partir de uma distribuição de probabilidades  $P(\delta m^2)$ , ou seja, uma variável aleatória. Em linhas gerais, como uma nova variável, a função de partição deveria incorporar os novos graus de liberdade na expressão (3.2).

Neste ponto inicia-se uma análise um pouco mais minuciosa sobre a natureza da variável  $\delta m^2$ . Existem duas situações físicas envolvendo  $\delta m^2$  de bastante interesse. A primeira delas é de que as flutuações envolvendo  $\delta m^2$  mesmo que não determinísticas, sejam, em tempo, da ordem das flutuações das outras variáveis do sistema (as variáveis puras). Este caso é chamado de *annealed*. Na outra situação, chamada de *quenched*, as flutuações de  $\delta m^2$  são muito mais lentas que a do resto das variáveis, a ponto de podermos definir uma energia livre (ou funcional gerador das funções de correlação conexas) para cada valor desta variável, ao passo que, do ponto de vista das outras variáveis, esta “parece” estática. Portanto, podemos definir uma função energia livre que seja dependente de  $\delta m^2$  como:

$$F(\delta m^2) = -\frac{1}{\beta} \log \left( \sum_s e^{-\beta E_s(\delta m^2)} \right), \quad (3.3)$$

onde desta vez, não estamos somando sobre os índices de desordem. Mesmo que muito mais lentas que as flutuações das variáveis “puras”, espera-se que as flutuações inerentes a  $\delta m^2$  sejam muito mais rápidas do que eventuais medidas de laboratório, ou seja, o efeito medido num experimento de matéria condensada [39, 40, 41, 42], por exemplo, deve ser então a média na desordem da energia livre, ou seja, observa-se:

$$\mathbb{E}[F] = -\frac{1}{\beta} \int d\delta m_0^2 P(\delta m^2) \ln \left( \sum_s e^{-\beta E_s(\delta m^2)} \right), \quad (3.4)$$

onde  $\mathbb{E}[F]$  representa a média sobre a desordem da energia livre  $F$ .

Temos então, que para problemas físicos do tipo *quenched*, a chave para calcular as propriedades termodinâmicas é a determinação de (3.4). Analogamente, em teoria

estatística de campos, a chave para encontrar as funções de correlação conexas é determinar o a média do funcional gerador das funções conexas na variável aleatória como:

$$\mathbb{E}[W(J)] = -\frac{1}{\beta} \int [d\delta m^2] \log Z[J] \quad (3.5)$$

onde  $W[J]$  é o funcional gerador das funções de correlação conexas,  $Z[J]$  é o funcional gerador de todas as funções de correlação e  $[d\delta m^2]$  é uma medida de integral funcional usual. A integral funcional é feita sobre todas as possíveis configurações da variável de desordem  $\delta m^2$ . O cálculo de (3.5) é de grande dificuldade matemática. Uma proposta acerca de sua solução foi apresentada por [43, 44, 45, 46, 47] e consistia em transformar o logaritmo da função de partição numa expressão limite que dependia de uma potência da função de partição, o que introduzia grande simplicidade ao cálculo, e que recebeu o nome de truque da réplica. Posteriormente, foi aperfeiçoado por G. Parisi e foi usado para resolver problemas importantes em matéria condensada, como problemas de vidros de spin [48]. Não seguiremos a metodologia deste cálculo, tendo em vista que não será utilizada nesta dissertação, porém, vale a pena comentar que o método consistia na substituição da forma explícita do logaritmo da seguinte forma:

$$\log x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{n}. \quad (3.6)$$

Este procedimento, entretanto padece de problemas matemáticos [49, 50, 51, 52], o principal está ligado à interpretação da continuação analítica para obter o limite  $n \rightarrow 0$ . Um leitor interessando em uma discussão mais aprofundada sobre o limite  $n \rightarrow 0$  pode consultar as referências [53, 54]. Na seção seguinte, um método alternativo para o cálculo da equação (3.5) e que não apresenta os problemas matemáticos do truque da réplica será apresentado. Este método é chamada de função zeta distribucional. Este é o método que será empregado nesta dissertação.

## 3.2 Método da função zeta distribucional

Nesta seção, apresentaremos um método alternativo ao mencionado no fim da seção anterior, que foi desenvolvido por Svaiter e Svaiter [17] e posteriormente utilizado em

[18, 19, 23, 55, 56]. Como no truque da réplica (cf. equação (3.6)), o objetivo do método é o de estabelecer uma representação do logaritmo que dependa de potências do funcional gerador  $Z$ . O método consiste no uso de uma generalização da função zeta de Riemann, chama de função zeta distribucional, que será definida a seguir. Primeiro utilizaremos uma generalização da função zeta de Riemann chamada função zeta generalizada [57] a partir de uma integral de Lebesgue como:

$$\zeta_{\mu,f}(s) = \int_{\Omega} f(x)^{-s} d\mu(x), \quad (3.7)$$

considerando  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : \rightarrow (0, \infty)$  uma função mensurável. Na integral acima  $s \in \mathbb{C}$  e  $f^{-s} \in L^1(\mu)$ . Esta definição geral incorpora a função zeta de Riemann se  $X = \mathbb{N}$  e  $\mu$  for uma medida de contagem [58]. Tendo em vista o interesse no cálculo da média *quenched* da energia livre, Svaiter e Svaiter definiram a função zeta distribucional como:

$$\Phi(s; j) = \int [d\eta] P(\eta) [Z(\eta, j)]^{-s}, \quad (3.8)$$

para  $s \in \mathbb{C}$ , e esta função sendo definida sobre toda região onde esta integral converge. Para este caso,  $f = Z[\eta]$  e  $d\mu = [d\eta]P(\eta)$ . Note que  $\Phi(s; j)$  é um funcional de  $s$  e também da fonte externa  $j(x)$ , inserida por conveniência. Utilizaremos agora a identidade  $Z^{-s} = e^{-s \log Z}$  para provar a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{ds} \lim_{s \rightarrow 0^+} e^{-s \log Z} = \lim_{s \rightarrow 0^+} [-\log Z] e^{-s \log Z} = -\log Z. \quad (3.9)$$

Desta forma, a média do funcional gerador das funções conexas  $W(j)$ , pode então ser escrita como:

$$W(j) = -(d/ds)\Phi(s; j)|_{s=0^+}, \quad \text{Re}(s) \geq 0, \quad (3.10)$$

onde  $\Phi(s; j)$  é bem definido. Para prosseguir, utilizaremos a representação integral de Euler para a função gama, dada por:

$$\frac{1}{Z(\eta, j)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-Z(\eta, j)t}, \quad \text{Re}(s) > 0. \quad (3.11)$$

Apesar de a integral acima convergir apenas para  $\text{Re}(s) > 0$ , pois  $Z(\eta, j) > 0$ , mostraremos como obter uma forma para o funcional gerador para  $\text{Re}(s) \geq 0$ . Substituindo a equação



(3.11) na equação (3.8) temos:

$$\Phi(s; j) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int [d\eta] P(\eta) \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-Z(\eta, j)t}. \quad (3.12)$$

Já sabemos que a função zeta distribucional  $\Phi(s; j)$  é definida para  $\text{Re}(s) \geq 0$ . Utilizaremos a expressão acima para calcular sua derivada em  $s = 0^+$  a partir de ferramentas analíticas. Caso necessário, assumimos a comutação dos operadores média na desordem, derivação e integração.

Para continuarmos, assumamos  $a > 0$  e escreva  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , onde:

$$\Phi_1(s; j) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int [d\eta] P(\eta) \int_0^a dt t^{s-1} e^{-Z(\eta, j)t} \quad (3.13)$$

e

$$\Phi_2(s; j) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int [d\eta] P(\eta) \int_a^\infty dt t^{s-1} e^{-Z(\eta, j)t}, \quad (3.14)$$

onde  $a$  é um parâmetro adimensional e sua interpretação será discutida posteriormente. O funcional gerador médio pode ser então escrito como:

$$W(j) = - \left. \frac{d}{ds} \Phi_1(s; j) \right|_{s=0^+} - \left. \frac{d}{ds} \Phi_2(s; j) \right|_{s=0}. \quad (3.15)$$

Vamos definir o momento inteiro do funcional gerador como:

$$\mathbb{E} [(Z(\eta, j))^k] \equiv \mathbb{E} [Z^k] \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbb{E} [(Z(\eta, j))^k] = \int [d\eta] P(\eta) (Z(\eta, j))^k. \quad (3.17)$$

A integral  $\Phi_2(s, j)$  define uma função analítica definida em todo plano complexo. A contribuição de  $\Phi_1(s; j)$  fica:

$$\Phi_1(s; j) = \frac{a^s}{\Gamma(s+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{k+s}}{k!(k+s)} \mathbb{E} [Z^k], \quad (3.18)$$

uma expressão válida para  $\text{Re}(s) \geq 0$ . A função  $\Gamma(s)$  tem um pólo em  $s = 0$  com resíduo 1, portanto:

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi_1(s; j) \right|_{s=0^+} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k! k} \mathbb{E} [Z^k] + f(a), \quad (3.19)$$

onde

$$f(a) = \left. \frac{d}{ds} \left( \frac{a^s}{\Gamma(s+1)} \right) \right|_{s=0} = (\log a + \gamma) \quad (3.20)$$

e  $\gamma = 0,577 \dots$  é a constante de Euler. A derivada de  $\Phi_2$  na equação (3.14) é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_2(s; j)|_{s=0} &= \int [d\eta] P(\eta) \int_a^\infty \frac{dt}{t} e^{-Z(\eta, j)t} \\ &= -R(a, j). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Conseqüentemente, usando ferramentas analíticas e integrando sobre o ruído, obtemos uma nova representação para a média no ruído funcional gerador  $W(j)$ , dada por:

$$W(j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k! k} \mathbb{E} [Z^k] - \log a - \gamma + R(a, j). \quad (3.22)$$

Note que  $R(a, j)$  tende a zero a medida que  $a \rightarrow \infty$ . A seguir, discutiremos o comportamento assintótico de  $R(a)$ , que está relacionada com a função gama incompleta [36], definida como:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (3.23)$$

A representação assintótica de  $|x| \rightarrow \infty$  e  $-\pi/2 < \arg x < \pi/2$  fica:

$$\Gamma(\alpha, x) \sim x^{\alpha-1} e^{-x} \left[ 1 + \frac{\alpha-1}{x} + \mathcal{O}(x^{-2}) + \dots \right]. \quad (3.24)$$

Por simplicidade, podemos assumir que o parâmetro  $a$  é grande. Portanto, esta contribuição pode ser absorvida na medida funcional de cada momento inteiro do funcional gerador de todas as funções correlação.

No capítulo seguinte, utilizaremos este método para analisar as propriedades de um modelo de campo escalar com interação  $\lambda\phi^4 + \rho\phi^6$  nas proximidades do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild Euclidiano.

# 4 Ruído num buraco negro de Schwarzschild Euclidiano

## 4.1 Definição do Problema

Este capítulo é o que representa o cerne desta dissertação, e é fortemente baseado na referência [23]. Nele, utilizaremos os métodos apresentados nos Capítulos 2 e 3 para investigar propriedades de um campo escalar na presença de ruído nas proximidades de um buraco negro de Schwarzschild. Mais especificamente, calcularemos a atividade do vácuo,  $\langle \varphi^2(x) \rangle$ , para um sistema cuja Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} \varphi(x) \left( -\Delta + m^2 - \delta m^2(x) \right) \varphi(x) + \frac{\lambda}{4} \varphi^4(x) + \frac{\rho}{6} \varphi^6(x) \right], \quad (4.1)$$

onde  $m^2$ ,  $\lambda$  e  $\rho$  são constantes positivas. As quantidades  $\Delta$  e  $g$  são, respectivamente, o operador Laplaciano definido a partir da métrica de Rindler Euclidiano e o determinante desta métrica (que é a métrica que representa a parte externa de um buraco negro de Schwarzschild nas proximidades do horizonte de eventos, como discutido no Capítulo 2). A função  $\delta m^2(x)$  é uma variável de ruído, cuja distribuição de probabilidades é dada por:

$$P(\delta m^2) = p_0 \exp \left( -\frac{1}{4\sigma} \int d^4x \left( \delta m^2(x) \right)^2 \right), \quad (4.2)$$

e correlação dada por:

$$\mathbb{E} \left[ \delta m^2(x) \delta m^2(y) \right] = \sigma \delta^4(x - y). \quad (4.3)$$

Tendo apresentado formalmente o problema, utilizaremos as próximas seções para discutir alguns efeitos físicos relevantes a esta discussão, que passam pelo cálculo da média do funcional gerador das funções de correlação conexas.

## 4.2 Cálculo de $\mathbb{E} \left[ Z^k \right]$ para interação $\frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \frac{\rho}{6} \varphi^6$

Como apresentado na seção 3.2, para que possamos obter o funcional gerador médio das funções de correlação conexas na presença de uma desordem do tipo *quenched* precisamos

calcular  $\mathbb{E} [Z^k]$ , segundo a distribuição de probabilidades apresentada na seção anterior.

Temos então, de calcular a seguinte quantidade:

$$\mathbb{E} [Z^k] = \int [d\delta m^2] P(\delta m^2) Z^k \quad (4.4)$$

e usando a definição funcional de  $Z$ , que é a integral funcional em todas as configurações de campo do negativo da exponencial da ação Euclidiana, temos:

$$\begin{aligned} Z^k &= \left( \int [d\varphi] \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{1}{2} \varphi(x) (-\Delta + m^2 - \delta m^2(x)) \varphi(x) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{\lambda}{4} \varphi^4(x) + \frac{\rho}{6} \varphi^6(x) \right) \right] \right)^k \\ &= \int \prod_{i=1}^k [d\varphi_i] \exp \left[ - \sum_{i=1}^k \int d^4x \left( \frac{1}{2} \varphi_i(x) (-\Delta + m^2 - \delta m^2(x)) \varphi_i(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda}{4} \varphi_i^4(x) + \frac{\rho}{6} \varphi_i^6(x) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Desta forma, utilizando (4.2), podemos escrever a média no ruído de  $Z^k$  como:

$$\mathbb{E} [Z^k] = \int \prod_{i=1}^k [d\varphi] e^{-S_0[\varphi]} \int [d\delta m^2] \exp \left[ - \frac{1}{4\sigma} \int d^4x \left( (\delta m^2)^2 - 2\sigma \sum_{i=1}^k \delta m^2 \phi_i^2(x) \right) \right], \quad (4.6)$$

onde  $e^{-S_0[\varphi]}$  é a parte que independe do ruído. Completando quadrados, a parte que depende do ruído (que chamaremos de  $R$ ) pode ser escrita como:

$$R = \exp \left[ \frac{\sigma}{4} \int d^4x \left( \sum_{i=1}^k \varphi_i^2(x) \right)^2 \right] \int [d\delta m^2] \exp \left[ - \frac{1}{4\sigma} \int d^4x \left( \delta m^2 - \sum_{i=1}^k \varphi_i^2(x) \right)^2 \right]. \quad (4.7)$$

Resolvendo a integral Gaussiana e levando em conta sua propriedade de translação, a parte que depende do ruído fica:

$$R = N \exp \left[ \frac{\sigma}{4} \int d^4x \sum_{ij} \varphi_i^2(x) \varphi_j^2(x) \right], \quad (4.8)$$

onde a dependência explícita na variável  $\delta m^2(x)$  desaparece e dá lugar à constante  $\sigma$ , que guarda consigo a informação da desordem. A constante  $N$ , pelo motivo comentado acima, não depende de  $\varphi(x)$ , e portanto, pode ser incorporada à medida funcional  $[d\varphi(x)]$ .

Podemos, então, escrever a média da  $k$ -ésima potência do funcional gerador  $Z$  como:

$$\int \prod_{i=1}^k [d\varphi_i] \exp \left[ - \sum_{i,j=1}^k \int d^4x \left( \frac{1}{2} \varphi_i(x) (-\Delta + m^2) \varphi_j(x) + \frac{B_{ij}}{4} \varphi_i^2(x) \varphi_j^2(x) + \frac{\rho}{6} \varphi_i^6(x) \right) \right], \quad (4.9)$$

onde  $B_{ij} = (\lambda \delta_{ij} - \sigma)$ .

### 4.3 Aproximação de Campo médio na presença de ruído multiplicativo

Nesta seção, utilizaremos a aproximação de campo médio para discutir possíveis efeitos de quebra espontânea de simetria nos momentos  $\mathbb{E}[Z^k]$ . Isto basicamente significa que utilizaremos uma aproximação (que faz parte de um procedimento perturbativo chamado de expansão em *loops*) onde analisamos os mínimos da energia potencial, tal como definida em (2.53) (para uma discussão mais detalhada, veja [22]). Utilizaremos os mínimos da energia potencial clássica para fundamentar a teoria de campos que estamos investigando. Definimos a energia potencial efetiva como a parte sem derivadas (cf. a equação (2.53)):

$$U(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i,j=1}^k \left( \frac{1}{2} m^2 \varphi_i^2(x) + \frac{B_{ij}}{4} \varphi_i^2(x) \varphi_j^2(x) + \frac{\rho}{6} \varphi_i^6(x) \right). \quad (4.10)$$

Utilizaremos aqui uma hipótese crucial para o prosseguimento da análise dos pontos de mínimo desta teoria: a de que  $\varphi_i(x) = \varphi_j(x) \equiv \varphi(x)$ . Nesta hipótese, a energia potencial efetiva toma a forma:

$$U(\varphi(x)) = k \left( \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \frac{\lambda_{eff}}{4} \varphi^4(x) + \frac{\rho}{6} \varphi^6(x) \right), \quad (4.11)$$

onde

$$\lambda_{eff} = \lambda - k\sigma. \quad (4.12)$$

Antes de prosseguir com a teoria de campo médio, continuaremos com a seguinte escolha para os campos em  $\mathbb{E}[Z^l]$ :

$$\begin{cases} \varphi_i^{(l)}(x) = \varphi^{(l)}(x) & \text{for } l = 1, 2, \dots, N, \\ \varphi_i^{(l)}(x) = 0 & \text{for } l > N. \end{cases} \quad (4.13)$$

Portanto, o funcional gerador médio das funções de correlação conexas é escrito como:

$$W_N(j) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a^{k+1}}{k! k} \mathbb{E}[Z^k] + \dots \quad (4.14)$$

Na expressão (3.22)  $W_N(j)$  é independente de  $a$ . Entretanto, todo este formalismo se baseia no fato de que  $a$  possa ser escolhido grande o suficiente de tal forma que  $R(a)$  possa ser desprezado. Neste caso,  $W_N(j)$  é descrito por uma série que é dependente de  $a$ . O

fator  $a$  é incorporado na medida funcional de cada um dos momentos inteiros do funcional gerador das funções de correlação.

Voltamos agora à discussão apresentada na subseção 2.3.4. Temos um potencial clássico onde  $\lambda_{eff}$  a princípio pode ser negativo dependendo dos valores de  $k$  e  $\sigma$ . Isto indica que, para valores de  $N$  suficientemente grandes na expressão (4.14), teremos na expressão do funcional gerador médio das funções de correlação conexas uma soma que envolve duas parcelas essencialmente diferentes: uma delas se referindo à situação sem quebra espontânea de simetria e, a partir de um  $k$  suficientemente grande ( $k > k_c$ ), uma outra parcela na situação de simetria quebrada espontaneamente. Para obtermos  $k = k_c$  utilizaremos a inequação (2.59), onde para este modelo:

$$\lambda_{eff} < -4m\sqrt{\frac{\rho}{3}}, \quad (4.15)$$

e, usando a expressão explícita de  $\lambda_{eff}$  (4.12), temos que:

$$k > \frac{1}{\sigma} \left( \lambda + 4m\sqrt{\frac{\rho}{3}} \right) \quad (4.16)$$

corresponde a uma situação de simetria quebrada espontaneamente. Portanto,

$$k_c = \left\lfloor \frac{1}{\sigma} \left( \lambda + 4m\sqrt{\frac{\rho}{3}} \right) \right\rfloor \quad (4.17)$$

onde  $\lfloor x \rfloor$  corresponde ao maior número inteiro menor ou igual a  $x$ . Desta forma, o funcional gerador médio das funções de correlação conexas é escrito como:

$$W_N(j) = \sum_{k=1}^{k_c} \frac{(-1)^{k+1}}{k!k} \mathbb{E} [Z^k] + \sum_{k=k_c+1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k!k} \mathbb{E} [Z^k], \quad (4.18)$$

lembrando que os campos são diferentes para cada momento inteiro do funcional gerador das funções de correlação, ao passo que cada um deles possui uma constante de acoplamento quártica diferente dependente da ordem  $k$  como  $\lambda_{eff} = (\lambda - k\sigma)$ .

Completaremos nossa discussão sobre o ruído multiplicativo neste modelo discutindo o trabalho de Hawking [59] e nossos novos resultados. Muitos autores tem discutido efeitos de flutuação na temperatura de Hawking. A abordagem destes autores é a de que a massa do buraco negro é o parâmetro que flutua [13, 14]. Veja também [60]. Aqui, estamos desenvolvendo uma abordagem alternativa e mais simples. Usando o fato

de que uma simetria quebrada espontaneamente pode ser restaurada a temperaturas suficientemente altas, Hawking afirma que um sistema descrito por  $\lambda\varphi^4$  pode ir de uma fase de simetria quebrada espontaneamente para uma fase desordenada perto de um buraco negro suficientemente quente [59]. A suposição mais simples que podemos fazer para modelos de flutuação na temperatura de Hawking é a de acoplar o ruído com o termo  $\varphi^2(x)$ . Portanto, temos um modelo para flutuações na temperatura de Hawking. Usando o método da função zeta distribucional, obtemos uma representação em série para o funcional gerador médio das funções de correlação conexas. Interpretando cada termo da série como um subsistema diferente, pois o parâmetro de ordem é diferente em cada um deles, obtemos um resultado interessante: flutuações na temperatura de Hawking são capazes de gerar transições de estados desordenados para estados ordenados. Portanto, para um ruído suficientemente forte, é esperado que o sistema possa ir de uma fase desordenada para uma ordenada por uma transição de fase de primeira ordem.

#### 4.4 Cálculo de $\langle\varphi^2\rangle$ na presença de ruído multiplicativo

O objetivo desta seção é o de calcular a seguinte quantidade:

$$\langle\varphi(x)^2\rangle = \frac{1}{(\sqrt{g})^2} \left. \frac{\delta^2 W_N[j]}{\delta j(x)^2} \right|_{j=0}. \quad (4.19)$$

A partir da expressão (4.18), a primeira soma se refere a termos onde o estado fundamental é  $\varphi^{(k)} = 0$  e a segunda soma, a valores de  $k$  onde o estado fundamental ocorre em  $\varphi^{(k)} \neq 0$ . O valor  $k_c$  representa o número  $k$  para qual o estado fundamental vai de  $\varphi^{(k)} = 0$  para  $\varphi^{(k)} \neq 0$ . A partir da discussão acima,  $k_c > \frac{\lambda}{\sigma} + 4\frac{m}{\sigma}\sqrt{\frac{\rho}{3}}$ . Da seção anterior, temos  $\lambda_{eff}(k) = \lambda - k\sigma$ . Por simplicidade, escreveremos  $\lambda_{eff}(k) = \lambda_{eff}$ . O potencial do campo é:

$$U(\varphi^{(k)}) = \frac{1}{2}m^2(\varphi^{(k)})^2 + \frac{1}{4}\lambda_{eff}(\varphi^{(k)})^4 + \frac{1}{6}\rho(\varphi^{(k)})^6. \quad (4.20)$$

Para o caso onde  $k > k_c$ , o estado fundamental, calculado em (2.57),  $\varphi_0^{(k)}$ , após substituir  $\lambda$  por  $\lambda_{eff}$  é:

$$\varphi_0^{(k)} = \sqrt{\frac{-\lambda_{eff} + \sqrt{\lambda_{eff}^2 - 4\rho m^2}}{2\rho}}. \quad (4.21)$$

Nós expandiremos o potencial do campo em torno do novo estado fundamental. Definindo o campo  $\phi^{(k)} = \varphi^{(k)} - \varphi_0^{(k)}$ , onde omitiremos o índice  $k$  para não carregar a notação, temos:

$$U(\phi + \varphi_0) = \frac{m^2}{2} (\phi + \varphi_0)^2 + \frac{\lambda_{eff}}{4} (\phi + \varphi_0)^4 + \frac{\rho}{6} (\phi + \varphi_0)^6. \quad (4.22)$$

Antes de expandir esta expressão em potências de  $\phi(x)$ , vamos restringir o potencial para termos até  $\phi^2(x)$ , que é equivalente à aproximação em ordem zero em teoria de perturbação, como discutido na subsecção 2.3.2. Sendo assim, o potencial toma a seguinte forma:

$$U(\phi + \varphi_0) = U(\varphi_0) - \phi \left( m^2 \varphi_0 + \varphi_0 \lambda_{eff} + \varphi_0^5 \rho \right) + \frac{\phi^2}{2} \left( m^2 + 3\lambda_{eff} \varphi_0^2 + 5\rho \varphi_0^4 \right) + \mathcal{O} \left[ \phi^3 \right]. \quad (4.23)$$

O primeiro termo do lado direito é imediatamente nulo pois  $\varphi_0$  satisfaz à equação (2.54) trocando  $\lambda$  por  $\lambda_{eff}$ . Usando a equação (4.21) encontramos:

$$U_{eff}(\phi^{(k)}) = U(\varphi_0^{(k)}) + \frac{m_{eff}^2(k)}{2} \left( \phi^{(k)} \right)^2 + \mathcal{O} \left[ \left( \phi^{(k)} \right)^3 \right], \quad (4.24)$$

onde o quadrado da massa, dependente do ruído, é:

$$m_{eff}^2(k) = \frac{\lambda_{eff}^2 - 4m^2\rho - \lambda_{eff}\sqrt{\lambda_{eff}^2 - 4m^2\rho}}{\rho} \geq 0. \quad (4.25)$$

Vamos escrever uma representação em série para a atividade do vácuo,  $\langle \varphi^2 \rangle$ , (que nada mais é que a função de correlação de dois pontos em pontos coincidentes) como:<sup>1</sup>

$$\langle \varphi(x)^2 \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k!k} \frac{1}{(\sqrt{g})^2} \frac{\delta^2}{(\delta j(x))^2} \mathbb{E} \left[ Z^k \right], \quad (4.26)$$

obtemos:

$$\langle \varphi(x)^2 \rangle = \sum_{k=1}^{k_c} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} G_1^{(k)}(x, x; m) + \sum_{k=k_c+1}^N \frac{(-1)^k}{(k-1)!} G_2^{(k)}(x, x; m_{eff}) \quad (4.27)$$

onde

$$G_1^{(k)}(x, x; m) = \left\langle \varphi^{(k)}(x) \varphi^{(k)}(x) \right\rangle \quad (4.28)$$

é a função de correlação de dois pontos associada ao campo  $\varphi^{(k)}(x)$  que tem massa  $m$ . Da mesma forma,

$$G_2^{(k)}(x, x; m_{eff}) = \left\langle \phi^{(k)}(x) \phi^{(k)}(x) \right\rangle \quad (4.29)$$

<sup>1</sup> A partir de agora, por razões de abreviação, utilizaremos  $m_{eff}(k) = m_{eff}$ .



é a mesma quantidade para  $\phi^{(k)}(x)$  em pontos coincidentes, obtida através do  $k$ -ésimo momento inteiro do funcional gerador das funções de correlação do modelo. Lembremos que o campo  $\phi^{(k)}$  tem massa  $m_{eff}$  dada por (4.25). Portanto, estamos generalizando os resultados obtidos por Fawcett [61], calculando  $\langle \varphi(x)^2 \rangle$  modificado pela presença do ruído multiplicativo.

## 4.5 Cálculo de $\langle \varphi^2 \rangle$ em Rindler Euclidiano na presença de ruído multiplicativo

Nesta seção, utilizaremos alguns dos métodos apresentados no Capítulo 2 e os resultados obtidos nas referências [32, 62] para encontrar  $\langle \varphi(x)^2 \rangle$  na presença de ruído multiplicativo, próximo ao horizonte de eventos .

A partir da expressão (4.27), temos que  $\langle \varphi(x)^2 \rangle$  tem dois tipos de contribuição, construídas a partir de  $G_1(x, x)$  e  $G_2(x, x)$ . As funções de Green  $G_1(x, x)$  e  $G_2(x, x)$  podem ser encontradas a partir dos modos (2.80) [31]. Como ambas as contribuições são divergentes, as regularizaremos seguindo as referências [31, 63, 64]. Definimos a função de correlação de dois pontos em pontos coincidentes renormalizada como:

$$\left[ G_i^{(k)}(x, x) \right]_{ren} = \left( G_{2\pi}^{(k)}(x, x_0; m_i) - G_{\infty}^{(k)}(x, x_0; m_i) \right) \Big|_{x=x_0}, \quad (4.30)$$

onde  $G_{2\pi}^{(k)}(x, x_0; m_i)$  é a função de Schwinger no espaço de Rindler à temperatura finita,  $T = 1/2\pi$ , e  $G_{\infty}^{(k)}(x, x_0; m_i)$  é a função de Schwinger em Rindler à temperatura zero. A massa  $m_i$  pode ser  $m$ , para  $i = 1$ , ou  $m_{eff}$ , para  $i = 2$ , onde  $m_{eff}$  é definida em (4.25) . A quantidade acima pode ser escrita como [31]:

$$\left[ G_i^{(k)}(x, x) \right]_{ren} = \frac{m_i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\infty} du \frac{K_1[2m_i\rho \cosh(u/2)]}{(\pi^2 + u^2) \cosh(u/2)}. \quad (4.31)$$

Finalmente, a nível árvore, usando as equações (4.27) e (4.31), obtemos o valor esperado renormalizado do campo  $\varphi^2$  na presença de ruído:

$$\langle \varphi(x)^2 \rangle_{ren} = \left( \sum_{k=1}^{k_c} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \right) \left[ G_1^{(k)}(x, x) \right]_{ren} + \sum_{k=k_c+1}^N \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \left[ G_2^{(k)}(x, x) \right]_{ren}. \quad (4.32)$$

Vamos utilizar agora o fato de que truncamos a série (4.32) para um valor limite  $N$ . Isto nos leva à seguinte interpretação: caso o ruído não seja suficientemente forte,  $k_c > N$ , e portanto, a soma envolveria apenas a primeira parcela representada em (4.32) e todas os  $N$  momentos estariam na fase simétrica e teriam mesma massa  $m$ . Se o ruído for suficientemente intenso, a ponto de  $k_c < N$ , temos duas somas de funções de correlação em situações distintas: a primeira na fase simétrica de massa  $m$  e a segunda na fase com simetria quebrada espontaneamente de massa  $m_{eff}$ .

Agora, para concluirmos, tomaremos o limite onde a massa não aleatória é zero,  $m = 0$ . Neste caso, alguns resultados exatos podem ser obtidos. A equação (4.31) pode ser simplificada (veja referência [31])

$$\left[G_1^{(k)}(x, x)\right]_{ren} = \frac{1}{8\pi^2\rho^2} \int_0^\infty du \frac{1}{(\pi^2 + u^2) \cosh^2(u/2)} = \frac{1}{48\pi^2\rho^2}. \quad (4.33)$$

Usando a expressão (4.25) temos  $m_{eff} = 0$  e  $\left[G_1^{(k)}(x, x)\right]_{ren} = \left[G_2^{(k)}(x, x)\right]_{ren}$ . A atividade do vácuo para o campo escalar sem massa pode ser obtida como:

$$\langle\varphi(x)^2\rangle_{ren} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\right) \frac{1}{48\pi^2\rho^2}. \quad (4.34)$$

Esta série converge muito rapidamente para  $-e^{-1}$  e a atividade do vácuo é escrita como:

$$\langle\varphi(x)^2\rangle_{ren} = -\frac{1}{48e\pi^2\rho^2}. \quad (4.35)$$

Portanto, a presença de ruído muda muito drasticamente a natureza da atividade do vácuo de um campo escalar perto do horizonte de um buraco negro de Schwarzschild Euclidiano. Esta quantidade se torna negativa na presença do ruído, ao contrário da positiva, para o sistema puro. Para  $m \neq 0$ , é necessário que sejam feitos cálculos numéricos, tendo em vista que a integral (4.31) não pode ser resolvida de uma forma fechada. Entretanto, vemos que esta integral é sempre positiva, e portanto, o efeito do ruído é o de mudar a atividade do vácuo para um valor negativo, não importa quão fraco seja o ruído.

Uma vez calculada a atividade do vácuo renormalizada, podemos ir além e obter o tensor de energia-momento renormalizado no caso com desordem. O tensor energia-momento

renormalizado pela técnica de *point-splitting* é dado por [31]

$$\begin{aligned}\langle T_\mu^\nu \rangle &= \mathcal{T}_\mu^\nu \left[ G_i^{(k)}(x, x) \right]_{ren} = \mathcal{T}_\mu^\nu \left( G_{2\pi}^{(k)}(x, x_0; m_i) - G_\infty^{(k)}(x, x_0; m_i) \right) \Big|_{x=x_0}, \\ &= \mathcal{T}_\mu^\nu \langle \varphi(x)^2 \rangle_{ren},\end{aligned}\tag{4.36}$$

onde

$$\mathcal{T}_\mu^\nu = \nabla_\mu \nabla^{\nu_0} - \frac{1}{2} \delta_\mu^{\nu_0} (m^2 + \nabla_\alpha \nabla^{\alpha_0}),\tag{4.37}$$

onde os índices  $\nu_0$  e  $\alpha_0$  indicam atuação sobre o conjunto de coordenadas  $x_0$ . Note que o tensor-energia momento renormalizado é exatamente a aplicação de um operador diferencial à atividade de vácuo renormalizada. Notemos que a diferença entre a atividade de vácuo obtida para um campo escalar sem massa na seção Euclidiana do espaço de Rindler, sem desordem e com desordem, é apenas um fator constante  $-e^{-1}$ . Assim, o operador diferencial não o afeta, e temos trivialmente o seguinte resultado:

$$\langle T_\nu^\mu \rangle = -\frac{1}{1440e\pi^2\rho^4} \text{diag.}(-3, 1, 1, 1),\tag{4.38}$$

onde usamos que as componentes do tensor-energia momento renormalizado para um campo escalar na seção Euclidiana do espaço de Rindler sem os efeitos da desordem são [31]

$$\langle T_\nu^\mu \rangle = \frac{1}{1440\pi^2\rho^4} \text{diag.}(-3, 1, 1, 1).\tag{4.39}$$

A mudança de sinal presente também nas componentes do tensor energia-momento sugere a presença de uma interação confinante induzida pela desordem, como por exemplo no efeito Casimir sem desordem.

## 5 Conclusão

Nesta dissertação abordamos um assunto multidisciplinar, num cenário que envolve teoria da relatividade geral, teoria quântica de campos Euclidiana e sistemas desordenados. Nos Capítulos 2 e 3 apresentamos o conteúdo teórico necessário à compreensão do problema abordado.

Motivados pelo uso na literatura de ruído multiplicativo em equações estocásticas [65, 66], propusemos um modelo  $\lambda\varphi^4 + \rho\varphi^6$  definido sobre a seção Euclidiana da solução de Schwarzschild na presença de um ruído multiplicativo acoplado ao termo quadrático do campo escalar. O procedimento abordado nesta dissertação segue a linha padrão de calcular a média do logaritmo do funcional gerador das funções de correlação em sistemas desordenados com ruído *quenched*, utilizando o método da função zeta distribucional, proposto por [17]. Este procedimento evidencia resultados físicos interessantes. Um deles é o de que a função de correlação de dois pontos em pontos coincidentes pode ser representada por dois termos essencialmente distintos, onde o primeiro é uma soma de funções de Green com vácuo  $\phi^{(k)} = 0$  (cenário sem quebra espontânea de simetria) e o segundo termo é uma soma de funções de Green com  $\phi^{(k)} \neq 0$  (cenário de simetria quebrada espontaneamente). Na parte final, calculamos a função de correlação de dois pontos em pontos coincidentes e um resultado exato pôde ser obtido para o caso em que  $m = 0$ . Mostramos que a presença de ruído altera completamente o comportamento da atividade do vácuo de um campo escalar, e conseqüentemente, do tensor energia-momento, perto do horizonte de um buraco negro de Schwarzschild Euclidiano.

Uma continuação natural deste trabalho é a seguinte. A partir da expressão (4.14) é possível calcular a função de correlação de dois pontos  $G(x, x')$ . Então nós continuamos analiticamente ela à métrica Lorentziana para obter a função de Wightman de frequência positiva. A transformada de Fourier desta quantidade fornecerá a função resposta de um detector Unruh-Dewitt interagindo com o campo escalar com a presença de ruído multiplicativo. Outro ponto relacionado diz respeito a possibilidade de construir um

---

modelo análogo para a temperatura de Hawking flutuante.

# A A Solução de Schwarzschild das equações de Einstein

Neste apêndice estamos interessados em uma métrica que represente o campo gravitacional no vácuo de uma distribuição de massa esfericamente simétrica, estática e sem carga elétrica. Para isso, utilizaremos as equações de Einstein definidas abaixo e as condições sobre a métrica mencionadas anteriormente. Temos então:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.1})$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia momento,  $T$  é seu traço e  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci, que guarda em si as informações referentes a métrica e será definido precisamente após o seguinte comentário: O lado direito da equação (A.1) só possui termos referentes ao tensor energia momento, que no vácuo, vale zero. Portanto, nos resta resolver a equação:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Explicitaremos então a forma com que  $R_{\mu\nu}$  depende da métrica com a seguinte definição:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad (\text{A.3})$$

e  $R_{\mu\alpha\nu}^{\gamma}$  é o chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann, que por sua vez é definido como:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (\text{A.4})$$

Precisamos de mais um passo para que possamos então expressar a dependência de  $R_{\mu\nu}$  com a métrica, que passa pela definição do objeto  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ , chamado de *Símbolo de Christoffel*. É chamado de símbolo pelo fato de não ser um tensor (ou seja, sua lei de transformação sob mudanças de coordenadas não é a mesma de um tensor). Sua definição é:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.5})$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico e  $g^{\mu\nu}$  seu inverso. O conjunto de definições apresentado nas últimas equações evidencia uma dependência de  $R_{\mu\nu}$  com a métrica e suas derivadas

primeiras e segundas. Temos então um conjunto de 16 equações de 2ª ordem não lineares para resolver, o que costuma ser uma tarefa bastante complexa. Usaremos então, as condições impostas no início desta seção para que possamos encontrar uma solução para (A.2) que contenha as propriedades desejadas.

Definiremos uma métrica estática de tal forma que seus elementos não dependam explicitamente da coordenada temporal e de que não haja termos cruzados  $g_{0i}$ . Esta segunda imposição é necessária para que a métrica tenha simetria de inversão temporal. Definir simetria esférica em relatividade geral é uma tarefa um pouco mais sutil, devido ao fato de que esta é uma teoria invariante sob transformações de coordenadas (Ou seja, o que se parece esfericamente simétrico num sistema de coordenadas pode não parecer em outro). Usaremos a seguinte definição: Uma métrica é dita esfericamente simétrica se em algum sistema de coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  o elemento de linha pode ser escrito como:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.6})$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  e lembrando que  $ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Basta na verdade que os fatores que multiplicam as diferenciais sejam funções apenas da coordenada  $r$  e que o termo angular seja da forma usual de uma 2-esfera. O uso da exponencial garante que será preservada a assinatura da métrica. Antes de resolver as equações de Einstein, podemos fazer ainda uma mudança de coordenadas conveniente:

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r. \quad (\text{A.7})$$

A diferencial da nova coordenada toma a seguinte forma:

$$d\bar{r} = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr, \quad (\text{A.8})$$

e o elemento de linha fica:

$$ds^2 = -e^{\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.9})$$

onde  $r = r(\bar{r})$ . Como  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes sem definição a priori, podemos redefini-las sem nenhum problema. Redefiniremos primeiramente a coordenada  $r$  como:

$$\bar{r} \rightarrow r, \quad (\text{A.10})$$

e a constante  $\beta$  como:

$$\left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \rightarrow e^{\beta(r)}. \quad (\text{A.11})$$

Desta forma, o elemento de linha fica:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.12})$$

sem perda de generalidade, pois fizemos simplesmente uma mudança de coordenadas. Estamos prontos agora para inserir esta proposta de métrica em (A.2) a fim de determinar a forma das funções  $\beta(r)$  e  $\alpha(r)$ . O processo para a solução de (A.2) passa primeiro pela determinação dos símbolos de Christoffel e, posteriormente, dos elementos do tensor de curvatura, para que enfim possamos obter a forma de  $R_{\mu\nu}$ . Este procedimento está feito em detalhes na referência [7]. Após concluído, temos as seguintes equações não triviais:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] = 0 \\ R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta = 0 \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando  $R_{tt}$  por  $e^{2(\beta-\alpha)}$  e somando a  $R_{rr}$ , temos:

$$\frac{2}{r} [\partial_r (\alpha + \beta)] = 0. \quad (\text{A.14})$$

A solução desta equação é simplesmente  $\alpha(r) = -\beta(r) + c$ . A constante  $c$  de integração implementaria apenas um fator multiplicativo positivo no termo  $g_{00}$  e pode ser absorvida por uma mudança de escala simples na variável  $t$ . Temos então:

$$\alpha(r) = -\beta(r). \quad (\text{A.15})$$

Substituindo este resultado em  $R_{\theta\theta} = 0$ , temos:

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1, \quad (\text{A.16})$$

que nada mais é que:

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1. \quad (\text{A.17})$$

Integrando os dois lados desta equação, temos a seguinte relação:

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{C}{r}, \quad (\text{A.18})$$



onde  $C$  é uma constante de integração. Para determinar esta constante, utilizaremos um resultado conhecido da relatividade geral, que pode ser encontrado, por exemplo, na referência [33]. Usaremos que no limite Newtoniano (limite de campo gravitacional fraco), a métrica pode ser relacionada com o potencial gravitacional  $\phi$  da seguinte forma:

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (\text{A.19})$$

Para o caso de uma distribuição esférica de massa  $M$ ,  $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$ , e portanto:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \quad (\text{A.20})$$

tendo assim, univocamente determinado a constante  $C = -2GM$ , onde  $M$  é identificado a priori como a massa de uma distribuição esférica e  $G$  é a constante gravitacional, que valerá  $G = 1$  em nossas unidades. A forma final do elemento de linha fica então:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{A.21})$$

Vale salientar que a solução acima é válida de tal forma que  $e^{2\alpha}$  seja positivo (por consistência). Portanto, é válida para  $r > 2M$ . Esta solução é conhecida como solução de Schwarzschild das equações de Einstein. Uma pergunta pertinente é: esta solução é a única que satisfaz às propriedades impostas no início desta seção? A resposta é sim, devido ao chamado teorema de Birkoff, que está demonstrado na referência [7]: Dado um espaço-tempo esféricamente simétrico (na ausência de campo eletromagnético), a única solução das equações de Einstein é a solução de Schwarzschild. Repare que não é necessário impor que o espaço tempo seja estático (a condição de estaticidade surge como uma consequência do teorema de Birkoff).

Tendo em mãos a métrica, é possível discutir algumas de suas propriedades. Uma das mais emblemáticas é de que ela possui (aparentemente) singularidade em 2 pontos:  $r = 0$  e  $r = 2M$ . Esta é uma parte delicada da discussão, pois como já foi comentado, podemos usar outros sistemas de coordenadas quaisquer e a forma da métrica é diferente em cada um deles (em geral). Portanto, como determinar se uma singularidade persiste sob uma transformação de coordenadas? A idéia mais intuitiva seria procurar um sistema de coordenadas onde não haja a tal singularidade. Uma outra alternativa é calcular funções

escalares, uma vez que estas são invariantes por mudanças de coordenadas. Uma função escalar de grande importância é o escalar de Kretschmann [7], definido por:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (\text{A.22})$$

que evidencia uma singularidade em  $r = 0$ , qualquer que seja o sistema de coordenadas utilizado. O ponto  $r = 2M$  é uma singularidade que aparece devida a uma má escolha do sistema de coordenadas. De fato, existe um sistema de coordenadas, chamadas de coordenadas de Kruskal, (chamada também de solução de Schwarzschild maximalmente estendida) onde a métrica não apresenta singularidades no ponto  $r = 2M$  e é válida também para  $0 < r < 2M$  (para mais detalhes, vide referência [7]). Este fato indica explicitamente que a singularidade no ponto  $r = 2M$  em (A.21) decorre apenas de uma má escolha de coordenadas, e que apesar de termos proposto uma solução válida para  $r > 2M$ , a região  $r < 2M$  é fisicamente acessível.

## B Aspectos introdutórios de teoria quântica de campos em espaços curvos

Neste apêndice apresentaremos alguns conceitos fundamentais sobre quantização de um campo escalar num espaço-tempo curvo de assinatura Lorentziana. A análise feita aqui é fortemente baseada na referência [1].

Assumiremos que os estados pertençam a um espaço de Hilbert definido sobre uma variedade diferenciável pseudo-Riemanniana de classe  $C^\infty$  e que seja globalmente hiperbólica (para mais detalhes, ver referência [67]). Estas condições não são necessárias para a construção de uma teoria de campos [68], porém, a diferenciabilidade garante a existência de equações diferenciais para os campos e a segunda condição garante a existência da existência de hipersuperfícies de Cauchy. Hipersuperfícies de Cauchy são aquelas do tipo espaço em que só são interceptadas por curvas tipo tempo uma única vez. Isso permite a parametrização do espaço em função de um parâmetros ordenados temporalmente. Esta condição é importante para que se definam os comutadores a tempos iguais dos campos num espaço curvo.

Assim como na teorema quântica de campos (TQC) em espaços de Minkowski, os observáveis são definidos como operadores que atuam num espaço de Hilbert. Por simplicidade e por necessidade, quantizaremos apenas o campo escalar neste texto. A quantização do campos escalar num espaço curvo se inicia de forma similar a da TQC em espaços de Minkowski. Começamos por definir uma densidade Lagrangiana, utilizando o princípio da covariância geral, como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} \left( \nabla_\mu \phi(x) \nabla^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x) \right).^1 \quad (\text{B.1})$$

Temos então, a ação para o campo definida por:

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi) d^n x, \quad (\text{B.2})$$

---

<sup>1</sup> Estamos utilizando aqui o chamado acoplamento mínimo, onde as componentes do tensor de curvatura de Riemann e suas contrações não se acoplam diretamente com o campo.

onde  $n$  é a dimensão do espaço tempo. O primeiro passo para a quantização do campo escalar é o de encontrar a solução da equação de movimento gerada pela extremização da ação B.2:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\square$  é o operador D'Alambertiano  $\nabla^\mu \nabla_\mu$ . A solução formal da equação (B.3) é:

$$\phi(x) = \sum_i (a_i u_i(x) + a_i^* u_i^*(x)), \quad (\text{B.4})$$

onde  $u_i(x)$  e  $u_i^*(x)$  são os modos que são solução da equação de campo (B.3) e o índice  $i$  indexa os modos.

Definiremos o produto escalar de dois campos como:

$$(\phi_1(x), \phi_2(x)) = -i \int_\Sigma \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2(x) d\Sigma^\mu, \quad (\text{B.5})$$

onde  $\Sigma$  é a superfície de Cauchy escolhida,  $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$ ,  $n^\mu$  é o vetor que aponta na direção futura de  $\Sigma$  e  $d\Sigma$  é o elemento de área da superfície de Cauchy e

$$\phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2(x) = \phi_1(x) \partial_\mu \phi_2^*(x) - \phi_2^*(x) \partial_\mu \phi_1(x). \quad (\text{B.6})$$

Usando o teorema de Gauss, chega-se ao resultado de que o produto interno não depende da superfície de Cauchy escolhida (vide, pode exemplo [67]).

Usando esta definição, os modos  $u_i(x)$  e  $u_i^*(x)$  são ortonormais, ou seja:

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0. \quad (\text{B.7})$$

O próximo passo para a quantização do campos escalar é o de promover os coeficientes  $a_i$  e  $a_i^*$  a operadores  $\hat{a}_i$  e  $\hat{a}_i^\dagger$ . Desta forma, o campo é também promovido a um operador e é escrito como:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i (\hat{a}_i u_i(x) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(x)), \quad (\text{B.8})$$

e analogamente ao espaço de Minkowski, temos as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij}, \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

A construção do espaço de Fock segue tal que:

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0 \quad (\text{B.10})$$

e

$$|n_{k_1}, n_{k_2} \dots n_{k_j}\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_{k_1}}}{n_{k_1}!} \dots \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_{k_j}}}{n_{k_j}!} |0\rangle. \quad (\text{B.11})$$

Até o dado ponto, tudo parece seguir de forma similar ao espaço de Minkowski. A partir de agora, teremos alguns problemas na formulação da teoria. Um deles é de que os modos  $u_i, u_i^*$  não são unívocos [37] e tampouco se pode definir em geral modos de frequência positiva e negativa, ou seja, há problemas na definição de partícula. Isso ocorre porque no espaço de Minkowski as transformações de simetria que deixam  $ds^2$  invariante se traduzem em transformações unitárias no espaço de Hilbert, o que não acontece para um espaço curvo geral, ou seja, para álgebras gerais em sistemas de infinitos graus de liberdade [69].

Precisamos então criar um mecanismo para diferenciar modos de frequências positivas e negativas, o que é bastante importante para a definição dos estados. O espaço deve possuir um vetor de Killing  $\xi$  tal que

$$\mathcal{L}_\xi u_j = -i\omega u_j, \quad (\text{B.12})$$

com  $\omega > 0$ . O fato de os modos serem não unívocos pode introduzir consequências físicas. Uma delas é a de na definição dos estados, que está diretamente ligado a ideia de partícula. Imagine que outro conjunto ortonormal completo  $\bar{u}_j$  seja escolhido. Podemos então, escrever  $\phi(x)$  de uma segunda forma, como:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i \left( \hat{a}_i \bar{u}_i(x) + \hat{a}_i^\dagger \bar{u}_i^*(x) \right), \quad (\text{B.13})$$

e

$$\hat{\bar{a}}_i |\bar{0}\rangle = 0. \quad (\text{B.14})$$

Como os dois conjuntos são completos, um deles pode ser escrito como combinação linear do outro, e então:

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) \quad (\text{B.15})$$

e

$$u_i = \sum_j \left( \alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^* \right). \quad (\text{B.16})$$

Tais relações são conhecidas como transformações de Bogoliubov e podem ser escritas como:

$$\alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*). \quad (\text{B.17})$$

Podemos então escrever os antigos operadores de aniquilação em função dos novos e vice-versa, como:

$$\hat{a}_i = \sum_j \left( \alpha_{ji} \hat{a}_j + \beta_{ji}^* \hat{a}_j^\dagger \right) \quad (\text{B.18})$$

e

$$\hat{a}_j = \sum_i \left( \alpha_{ji}^* \hat{a}_i + \beta_{ji} \hat{a}_i^\dagger \right). \quad (\text{B.19})$$

Pressupondo que os modos são modos de energia positiva  $(u_i, \bar{u}_i)$  e negativa  $(u_i^*, \bar{u}_i^*)$ , é possível afirmar que os vácuos para cada uma das escolhas são em geral diferentes. O operador  $\hat{a}_i$  não aniquila o estado  $|\bar{0}\rangle$  e  $\hat{a}_i^\dagger$  não aniquila o estado  $|0\rangle$ . O número de partículas no modo  $u_i$  no estado  $|\bar{0}\rangle$  pode ser calculado como a média do operador  $N_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  descrita por:

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \sum_{ji} |\beta_{ji}|^2. \quad (\text{B.20})$$

Os vácuos serão equivalentes se os coeficientes  $\beta_{ji}$  forem nulos. Desta forma, as transformações de Bogoliubov levariam operadores de aniquilação a outros operadores de aniquilação (não necessariamente normalizados).

# Referências

- [1] Birrell, N. D. e P. C. W. Davies: *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1984.
- [2] Bekenstein, J. D.: *Black holes and the second law*. Lett. Nuovo Cim., 4(737):113, 1972.
- [3] Bekenstein, J. D.: *Black holes and entropy*. Physical Review D, 7(8):2333, 1973.
- [4] Hawking, S. W.: *Particle creation by black holes*. Communications in Mathematical Physics, 43(3):199–220, 1975.
- [5] Sciama, D. W., P. Candelas e D. Deutsch: *Quantum field theory, horizons and thermodynamics*. Advances in Physics, 30(3):327–366, 1981.
- [6] Fulling, S. A. e S. N. M. Ruijsenaars: *Temperature, periodicity and horizons*. Physics Reports, 152(3):135–176, 1987.
- [7] Carroll, S. M.: *Spacetime and geometry*. Addison-Wesley, San Francisco, 2004.
- [8] Corda, C.: *Interferometric detection of gravitational waves: the definitive test for General Relativity*. International Journal of Modern Physics D, 18(14):2275–2282, 2009.
- [9] Kubo, R.: *Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems*. Journal of the Physical Society of Japan, 12(6):570–586, 1957.
- [10] Martin, P. C. e J. Schwinger: *Theory of many-particle systems I*. Physical Review, 115(6):1342, 1959.
- [11] Davies, P. C. W.: *Quantum vacuum noise in physics and cosmology*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 11(3):539–547, 2001.

- 
- [12] Calzetta, E. A. e B. L. Hu: *Nonequilibrium quantum field theory*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 2008.
- [13] York Jr., J. W.: *Dynamical origin of black-hole radiance*. Physical Review D, 28(12):2929, 1983.
- [14] Barrabes, C., V. Frolov e R. Parentani: *Metric fluctuation corrections to Hawking radiation*. Physical Review D, 59(12):124010, 1999.
- [15] Le Bellac, M.: *Quantum and statistical field theory*. Clarendon Press Oxford, Oxford, 1991.
- [16] Hu, B. L. e E. Verdaguer: *Stochastic gravity: A primer with applications*. Classical and Quantum Gravity, 20(6):R1, 2003.
- [17] Svaiter, B. F. e N. F. Svaiter: *The distributional zeta-function in disordered field theory*. International Journal of Modern Physics A, 31(25):1650144, 2016.
- [18] Acosta-Díaz, R., G. Menezes, N. F. Svaiter e C. A. D. Zarro: *Spontaneous symmetry breaking in replica field theory*. Physical Review D, 96(6):065012, 2017.
- [19] Acosta-Díaz, R., N. F. Svaiter, G. Krein e C. A. D. Zarro: *Disordered  $\lambda\varphi^4 + \rho\varphi^6$  Landau-Ginzburg model*. Physical Review D, 97(6):065017, 2018.
- [20] Hawking, S. W.: *Euclidean quantum gravity*. Em *Recent developments in gravitation*, páginas 145–173. Springer, Berlim, 1979.
- [21] Hatfield, B.: *Quantum field theory of point particles and strings*. Westview Press, Boulder, 1998.
- [22] Das, A.: *Field theory: a path integral approach*, volume 52. World Scientific, Singapura, 1993.
- [23] Soares, M. S., N. F. Svaiter e C. A. D. Zarro: *Multiplicative noise in Euclidean Schwarzschild manifold*. Classical and Quantum Gravity, 37(6):065024, 2020.



- 
- [24] Itzykson, C. e J. M. Drouffe: *Statistical field theory*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1991.
- [25] Susskind, L. e J. Lindesay: *An introduction to black holes, information and the string theory revolution: The holographic universe*. World Scientific, Singapura, 2005.
- [26] Misner, C. W., K. S. Thorne e J. A. Wheeler: *Gravitation*. Freeman, Nova Iorque, 1973.
- [27] Ablowitz, M. J. e A. S. Fokas: *Complex variables: Introduction and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 2003.
- [28] Fawcett, M. S. e B. F. Whiting: *Spontaneous symmetry breaking near a black Hole*. Em *Nuffield Workshop on quantum structure of space and time*, páginas 131–154, 1981.
- [29] Gibbons, G. W. e M. J. Perry: *Black holes and thermal Green functions*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 358(1695):467–494, 1978.
- [30] Fulling, S. A. e S. N. M. Ruijsenaars: *Temperature, periodicity and horizons*. Physics Reports, 152(3):135–176, 1987.
- [31] Linet, B.: *Euclidean scalar and spinor Green's functions in Rindler space*. ArXiv:gr-qc/9505033, 1995.
- [32] Svaiter, N. F. e C. A. D. Zarro: *A comment on Schwinger functions in Euclidean Rindler space*. Classical and Quantum Gravity, 25(9):095008, 2008.
- [33] Weinberg, S.: *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, Nova Iorque, 1972.
- [34] Raine, D. J. e E. G. Thomas: *Black holes: an introduction*. Imperial College Press, Londres, 2010.
- [35] DeWitt, B. S.: *Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. Physics Reports, 19:295–357, 1975.

- [36] Abramowitz, M. e I. A. Stegun: *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications Inc., Nova Iorque, 1972.
- [37] Fulling, S. A.: *Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time*. Physical Review D, 7(10):2850, 1973.
- [38] Ziman, J. M. *et al.*: *Models of disorder: the theoretical physics of homogeneously disordered systems*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1979.
- [39] Orlandini, E., M. C. Tesi e S. G. Whittington: *Self-averaging in the statistical mechanics of some lattice models*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 35(19):4219, 2002.
- [40] Orlandini, E, MC Tesi e Stuart G Whittington: *A self-avoiding walk model of random copolymer adsorption*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 32(3):469, 1999.
- [41] Orlandini, E., M. C. Tesi e S. G. Whittington: *Self-averaging in models of random copolymer collapse*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 33(2):259, 2000.
- [42] Martin, R., M. S. Causo e S. G. Whittington: *Localization transition for a randomly coloured self-avoiding walk at an interface*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 33(44):7903, 2000.
- [43] Kac, M.: *Trondheim theoretical physics seminar*. Nordita Publi. No. 286, 1968.
- [44] Lin, T. F.: *Problem of the disordered chain*. Journal of Mathematical Physics, 11(5):1584–1590, 1970.
- [45] Edwards, S. F. Em Douglass, R. W. e B. Ellis (editores): *Proceedings of the Third International Conference on Amorphous Materials*, Nova Iorque, 1972. Wiley.
- [46] Grinstein, G. e A. Luther: *Application of the renormalization group to phase transitions in disordered systems*. Physical Review B, 13(3):1329, 1976.
- [47] Emery, V. J.: *Exactly solvable model for tricritical phenomena*. Physical Review B, 11(9):3397, 1975.

- [48] Parisi, G.: *A sequence of approximated solutions to the SK model for spin glasses*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 13(4):L115, 1980.
- [49] Verbaarschot, J. J. M. e M. R. Zirnbauer: *Critique of the replica trick*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 17:1093, 1985.
- [50] Zirnbauer, M. R.: *Another critique of the replica trick*. ArXiv:cond-mat/9903338, 1999.
- [51] Parisi, G.: *Field theory and the physics of disordered systems*. Em Bergstrom, Lars (editor): *Proceedings of the Quarks, Strings, and the Cosmos — Hector Rubinstein Memorial Symposium*, volume 109, 2010.
- [52] Fytas, N. G., V. Martín-Mayor, M. Picco e N. Surlas: *Restoration of dimensional reduction in the random-field Ising model at five dimensions*. Physical Review E, 95(4):042117, 2017.
- [53] Ma, S. K.: *Modern theory of critical phenomena*. Perseus Publishing, Cambridge, Inglaterra, 1973.
- [54] Gaspari, G. e J. Rudnick:  *$n$ -vector model in the limit  $n \rightarrow 0$  and the statistics of linear polymer systems: A Ginzburg-Landau theory*. Physical Review B, 33(5):3295, 1986.
- [55] Svaiter, B. F. e N. F. Svaiter: *Disordered Field Theory in  $d = 0$  and Distributional Zeta-Function*. ArXiv:1606.04854, 2016.
- [56] Acosta-Díaz, R. J., C. D. Rodríguez-Camargo e N. F. Svaiter: *Directed polymers and interfaces in disordered media*. Polymers, 12(5):1066, setembro 2020.
- [57] Lemos, N. A.: *Convite à física matemática*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2013.
- [58] Ingham, A. E.: *The distribution of prime numbers*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1990.

- 
- [59] Hawking, S. W.: *Interacting quantum fields around a black hole*. Communications in Mathematical Physics, 80(3):421–442, 1981.
- [60] Takahashi, T. e J. Soda: *Hawking radiation from fluctuating black holes*. Classical and Quantum Gravity, 27(17):175008, 2010.
- [61] Fawcett, M. S.: *The energy-momentum tensor near a black hole*. Communications in Mathematical Physics, 89(1):103–115, 1983.
- [62] Christensen, S. M. e M. J. Duff: *Flat space as a gravitational instanton*. Nuclear Physics B, 146(1):11–19, 1978.
- [63] Guimarães, M. E. X. e B. Linet: *Self-interaction and quantum effects near a point mass in three-dimensional gravitation*. Classical and Quantum Gravity, 10(8):1665, 1993.
- [64] Guimarães, M. E. X. e B. Linet: *Scalar Green's functions in an Euclidean space with a conical-type line singularity*. Communications in Mathematical Physics, 165(2):297–310, 1994.
- [65] Calzetta, E. e B. L. Hu: *Noise and fluctuations in semiclassical gravity*. Physical Review D, 49(12):6636, 1994.
- [66] Hu, B. L. e A. Roura: *Metric fluctuations of an evaporating black hole from backreaction of stress tensor fluctuations*. Physical Review D, 76(12):124018, 2007.
- [67] Hawking, S. W. e G. F. R. Ellis: *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1973.
- [68] Avis, S. J., C. J. Isham e D. Storey: *Quantum field theory in anti-de Sitter space-time*. Phys. Rev. D, 18:3565, 1978.
- [69] Neumann, J. von: *Quantum mechanics of infinite systems*. Em *John von Neumann and the foundations of quantum physics*, páginas 249–268. Springer, Berlim, 2001.