

TESE DE  
MESTRADO

# Estudo do Amortecimento Radiativo no Formalismo de Tempo Real

Albert Carlo Rodrigues Mendes

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 1997

ESTUDO DO AMORTECIMENTO RADIATIVO  
NO FORMALISMO DO TEMPO REAL



1997/14

M538

\*020269\*

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como parte dos créditos para a obtenção do título de *Mestre em Física* por ALBERT CARLO RODRIGUES MENDES.

# Dedicatória

À minha esposa Stella.

# Agradecimentos

Aos que contribuíram para a minha formação profissional e pessoal, meus sinceros agradecimentos, e especialmente:

- Ao meu orientador, **Flávio Iassuo Takakura** pela dedicação na sua tarefa como orientador.
- A **Francisco Caruso Neto** pela co-orientação e ao **CBPF**, que propiciou condições para a conclusão deste trabalho.
- Aos meus pais, que sempre apoiaram a minha escolha pela Física, aos meus amigos e professores do Departamento de Física da **UFJF**, cujo apoio e incentivo foram fundamentais.
- Ao **CNPq** pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nós estudamos a dinâmica de uma carga acelerada interagindo com o próprio campo de radiação dando origem ao amortecimento radiativo. Para isto, utilizamos a Teoria Quântica de Campos fora do equilíbrio no formalismo de integrais de trajetória, usando a representação de estados coerente para o campo. Calculamos o funcional gerador integrando sobre os graus de liberdade do campo obtendo a ação efetiva de não equilíbrio da carga, e daí a equação de movimento em tempo real e a equação de Langevin associada. Encontramos o coeficiente de amortecimento não-Markoviano e a função correlação de ruído, discutindo o seu limite clássico.

# Summary

We study the dynamics of a charge interacting with its own radiation, which originates the radiation damping. For this purpose, we use the Non-equilibrium Quantum Field Theory in the Path Integral formalism.

The radiation field is treated in Coherent States representation. We compute the generating functional integrating over the field degrees of freedom obtaining the effective action for the charge. From this action we get the real-time equation of motion and the Langevin equation, the damping coefficient, which is Non-Markovian and we discuss its classical limit.

# Índice

• Capítulo 1	
Introdução	1
• Capítulo 2	
Histórico	3
• Capítulo 3	
Teoria Quântica de Campos em Tempo Real	5
• Capítulo 4	
Estados Coerente	14
• Capítulo 5	
Hamiltoniana do Sistema	20
• Capítulo 6	
O Funcional Gerador em Tempo Real	24
• Capítulo 7	
Conclusões	38
• Referências	39

# Capítulo 1

## Introdução

O problema da dinâmica quântica de um sistema físico dissipativo, onde o procedimento padrão de quantização não é satisfatório, é uma questão ainda em aberto na física.

Dentre as várias tentativas de se resolver este problema existe uma que é muito satisfatória, isto é, a aproximação partícula mais reservatório proposta por Feynman e Vernon [19]. Esta aproximação foi muito apropriada para se responder questões relacionadas com o tunelamento quântico dissipativo [20], transição de fase [21] e particularmente no estudo da dinâmica quântica de uma partícula Browniana [18].

Um outro sistema importante com as características apropriadas para este tipo de abordagem é o estudo da dinâmica quântica de uma carga acelerada. Trata-se de um sistema dissipativo devido as perdas representadas pelas quantidades de energia, momento linear e momento angular transportados pelo campo. O efeito destas perdas sobre o movimento da carga é conhecido como amortecimento radiativo.

Existem vários trabalhos dedicados ao estudo da equação de movimento da carga acelerada. No limite clássico temos o trabalho de Abraham e Lorentz [2, 3], um dos mais importantes, e o de Dirac [6] no limite relativístico, entre outros.

Recentemente foi feito um trabalho onde se obteve uma formulação quântica não-relativística para um elétron acelerado, aplicando esta formulação a um problema de interferência eletrônica [24]. Este trabalho é baseado no modelo partícula-reservatório considerando o campo de radiação como o reservatório, onde os graus de liberdade do campo são integrados conduzindo a uma ação efetiva do elétron.



Nosso objetivo é aplicar ao caso particular de uma carga acelerada a técnica conhecida como Teoria Quântica de Campos fora do equilíbrio no formalismo de integrais de trajetória com tempo real e usando a representação de estados coerentes para o campo de radiação, isto é, procuramos a ação efetiva da carga obtendo a partir dela a equação de movimento em tempo real e a correspondente equação de Langevin.

Esta equação de Langevin contém um termo proporcional a velocidade da carga que incorpora os efeitos de dissipação e um termo estocástico que reflete a interação da carga com o campo de radiação. Esses dois termos estão relacionados pelo teorema de flutuação-dissipação.

No capítulo dois, apresentaremos brevemente os dois trabalhos mais importantes feitos sobre o amortecimento radiativo, o caso clássico com Lorentz e o relativístico com Dirac. No capítulo três, introduzimos os elementos essenciais para estudarmos Teoria Quântica de Campos fora do equilíbrio no formalismo de integrais de trajetória. No capítulo quatro introduzimos a representação de estados coerente com suas propriedades e aplicamos ao modelo simples do oscilador harmônico. Na sequência, no capítulo cinco, iniciamos o estudo do acoplamento carga-campo de radiação, encontramos a Hamiltoniana do sistema composto e em seguida a expandimos em termos dos modos normais do campo. No capítulo seis, apresentamos a formulação quântica de não-equilíbrio do sistema carga-campo, integramos sobre os graus de liberdade do campo obtendo uma ação efetiva de não-equilíbrio para a carga e conseqüentemente a equação de movimento em tempo real e a equação de Langevin. E finalmente, no capítulo sete as conclusões.

# Capítulo 2

## Histórico

O estudo de uma expressão exata para a força de amortecimento radiativo é um dos problemas mais antigos da física. Quando uma carga é submetida a uma força externa e acelerada, ela irradia energia eletromagnética [1] e o momento de recuo dos fótons emitidos durante este processo é equivalente com uma força de reação correspondente com a auto-interação da carga com seu campo próprio. A primeira equação de movimento não relativística do elétron foi obtida por Lorentz [2, 3] considerando o elétron como um corpo rígido de extensão finita, onde toda a sua massa é de origem eletromagnética.

Este modelo apresentado por Lorentz mostrou-se válido considerando-se o movimento e radiação de elétrons em certos domínios.

Este modelo, contudo, tem soluções para a equação de movimento que não são fisicamente aceitáveis, já que implicam em acelerações infinitamente grandes sem uma força externa [1, 4], entre outras complicações.

A equação relativística foi obtida por Dirac [5]. Este trabalho é anterior a invenção da renormalização, e por não ser capaz de tratar com quantidades infinitas Dirac utilizou um argumento indireto. Ele considerou as equações de Maxwell válidas em todo o espaço exceto sobre a worldline do elétron. A partir daí, então, aplicou as leis de conservação da energia e do momento para um pequeno tubo que envolve a worldline do elétron, e mostra que elas determinam a equação de movimento do elétron. Há ainda outras deduções da força de amortecimento radiativo [6].

Com base no que foi feito e discutido até o momento sobre o amortecimento radiativo

propomos um novo tratamento para o problema através de uma técnica utilizada para estudar fenômenos desta natureza que é a Teoria Quântica de Campos fora do equilíbrio no formalismo de integrais de trajetória com tempo real, que apresentaremos no próximo capítulo.

## Capítulo 3

# Teoria Quântica de Campos em Tempo Real

Nosso objetivo é estudar a dinâmica de uma carga em movimento acelerada, interagindo com o seu próprio campo de radiação. Para isto, obtemos a equação de movimento da carga considerando o campo de radiação como o "banho" e obtemos o funcional de influência [18, 19] calculando o traço sobre os graus de liberdade do campo, generalizando técnicas de mecânica estatística para processos fora do equilíbrio em Teoria Quântica de Campos [7, 8].

A condição de não-equilíbrio de um sistema é determinado pela evolução no tempo da matriz densidade que descreve o sistema, definida como

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| \quad (3.1)$$

onde  $|\Psi(t)\rangle$  é dada por

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle. \quad (3.2)$$

O operador da transformação linear na equação (3.2),  $U(t, t_0)$ , é conhecido como operador evolução temporal que de forma equivalente a  $|\Psi(t)\rangle$  satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_s(t)U(t, t_0) \quad (3.3)$$

onde  $H_s(t)$  é a Hamiltoniana dependente do tempo na representação de Schrödinger. A solução

de (3.3) é

$$U(t, t_0) = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_s(t') dt' \right\} \quad (3.4)$$

onde  $T$  é o operador de ordenamento-temporal. No caso em que  $H_s$  não depende explicitamente do tempo a solução é

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_s(t-t_0)} \quad (3.5)$$

Podemos, então, escrever a matriz densidade como

$$\rho(t) = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \langle \Psi(t_0)| U^{-1}(t, t_0)$$

ou

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^{-1}(t, t_0) \quad (3.6)$$

onde  $U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t)$  e  $\rho(t_0)$  a matriz densidade em um instante inicial  $t_0$  que determina a condição inicial para a evolução.

A expressão para a matriz densidade, dada em (3.6), é a solução formal da equação de Liouville,

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)], \quad (3.7)$$

que dá a evolução no tempo da matriz densidade. Na mecânica estatística de equilíbrio a matriz densidade não depende do tempo, isto é, ela deve ser função apenas de quantidades conservativas que comutam com  $H$ . Contudo, na mecânica estatística de não-equilíbrio a matriz densidade depende do tempo explicitamente, logo ela não comuta com  $H$  em (3.7).

A matriz densidade inicial para um estado puro ou um estado térmico é dada por

$$\rho(t_0) = e^{-\beta H_i},$$

correspondendo ao estado fundamental de alguma Hamiltoniana inicial. Introduzindo a Hamiltoniana dependente do tempo  $H(t)$  tal que  $H(t) = H_i$  para  $-\infty < t < t_0$  e  $H(t) = H_{evol}(t)$  para  $t > t_0$ , onde  $H_{evol}(t)$  é a Hamiltoniana de evolução que determina a dinâmica do sistema. Esta condição corresponde a situação em que o sistema se encontra em equilíbrio térmico até  $t_0$  e evolui fora de equilíbrio a partir deste instante.

Podemos escrever o valor médio de um operador  $\hat{O}$  como

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{tr}[\hat{O}\rho] \quad (3.8)$$

Em sistemas em equilíbrio este resultado é invariante sob translação temporal, neste caso a matriz densidade é independente do tempo.

Por outro lado em sistemas fora do equilíbrio a matriz densidade depende do tempo, ficando

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \frac{\text{tr}[\hat{O}\rho(t)]}{\text{tr}\rho(t_0)} \quad (3.9)$$

Podemos escrever  $\langle \hat{O} \rangle(t)$  de uma forma mais conveniente em termos dos operadores evolução temporal. Para isto, consideremos um tempo arbitrário  $T < 0$  onde  $U(T) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}HT\}$  e  $\rho(t_0) = e^{-\beta H_i} = \exp\{-\frac{i}{\hbar}H_i(T - i\hbar\beta - T)\} = U(T - i\hbar\beta, T)$ .

Temos, então, inserindo  $U^{-1}(T, 0)U(T, 0) = 1$  no traço em (3.9), comutando  $U^{-1}(T, 0)$  com  $\rho(0)$  e usando a propriedade de composição do operador evolução temporal, que

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \frac{\text{tr}[\hat{O}U(t, 0)U^{-1}(T, 0)U(T, 0)\rho(0)U^{-1}(T, 0)U(T, 0)U^{-1}(t, 0)]}{\text{tr}\rho(0)}$$

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{tr}[\hat{O}U(t, T)\rho(0)U(T, t)]/\text{tr}\rho(0)$$

ou

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{tr}[U(T - i\hbar\beta, T)U(T, t)\hat{O}U(t, T)]/\text{tr}U(T - i\hbar\beta, T) \quad (3.10)$$

Estendendo o numerador para um tempo arbitrário grande  $T'$  inserindo  $U^{-1}(T', t)U(T', t) = 1$  a esquerda de  $\hat{O}$  em (3.10)

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{tr}[U(T - i\hbar\beta, T)U(T, T')U(T', t)\hat{O}U(t, T)]/\text{tr}U(T - i\hbar\beta, T) \quad (3.11)$$

No plano de tempo complexo, o numerador representa o processo de evolução a partir de  $T < 0$  até  $t$ , inserindo o operador  $\hat{O}$ , evolui para  $T'$ , e volta a partir  $T'$  para  $T$ , e finalmente para baixo no eixo imaginário até  $T - i\hbar\beta$ . O denominador evolui no eixo imaginário negativo de  $T$  para  $T - i\hbar\beta$ .

A função correlação de  $n$ -pontos, isto é  $\langle 0|T[\phi(t_1)\phi(t_2)\dots\phi(t_n)]|0\rangle$ , que é o valor esperado no vácuo do produto ordenado no tempo de  $n$  operadores, pode ser calculada a partir do funcional gerador tomando derivadas com relação as fontes e então fazendo  $J = 0$

$$\langle 0|T[\phi(t_1)\phi(t_2)\dots\phi(t_n)]|0\rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{(-i)^n \delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)\dots\delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \quad (3.12)$$

onde  $Z[0]$  é o funcional gerador com  $J = 0$ .

Somos, então, levados a considerar o seguinte funcional gerador  $Z[J]$ , obtido a partir da representação da função de partição  $Z = \text{tr} \exp[-\beta H]$  em termos de integrais de trajetória. Inserindo  $U^{-1}(T', T)U(T', T) = 1$  na função de partição temos

$$Z = \text{tr}[e^{-\beta H} U(T, T') U(T', T)]$$

ou

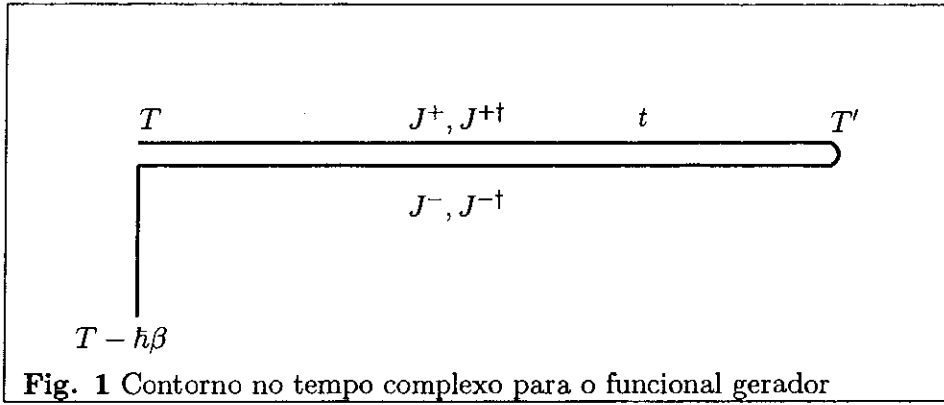
$$Z = \text{tr}[U(T - i\hbar\beta, T) U(T, T') U(T', T)] \quad (3.13)$$

Permitindo-nos inserir termos de fontes em (3.13), podemos escrever

$$Z[J^+, J^-, J^\beta] = \text{tr}[U_{J^\beta}(T - i\hbar\beta, T) U_{J^-}(T, T') U_{J^+}(T', T)] \quad (3.14)$$

onde  $J^\pm$  são os termos de fonte ao longo dos seguimentos  $(T \rightarrow T')^+$  e  $(T' \rightarrow T)^-$ , e  $J^\beta$  ao longo do seguimento imaginário negativo do contorno (fig.1), e o denominador em (3.11) é dado por  $Z[0, 0, J^\beta]$ . Introduzindo um conjunto completo de auto-estados de campo entre os operadores evolução,  $Z[J^+, J^-, J^\beta]$  pode ser escrito como

$$Z[J^+, J^-, J^\beta] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \langle \phi | U_{J^\beta}(T - i\hbar\beta, T) | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | U_{J^-}(T, T') | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | U_{J^+}(T', T) | \phi \rangle \quad (3.15)$$



Identificamos em (3.15) os propagadores de Feynman ou elemento de matriz de transição,  $K_J(\phi_f, t_f; \phi_i, t_i)$ , com um termo de fonte  $J$ . Este elemento de matriz é interpretado como a amplitude de probabilidade para uma transição de  $\phi_i$  no instante  $t_i$  para  $\phi_f$  no instante  $t_f$ , e definida em termos do operador evolução  $U_J(t_f, t_i)$  como

$$K_J(\phi_f, t_f; \phi_i, t_i) = \langle \phi_f | U_J(t_f, t_i) | \phi_i \rangle \quad (3.16)$$

onde

$$U_J(t_f, t_i) = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_f}^{t_i} dt' [H(t') + \hbar J(t') \phi(t')] \right\}$$

O propagador  $K_J(\phi_f, t_f; \phi_i, t_i)$  pode ser representado em termos de integrais de trajetória. Para isto, dividimos o intervalo de tempo  $[t_f, t_i]$  em  $N$  subintervalos iguais de largura  $\varepsilon$  e inserimos  $N - 1$  relações de completeza, ficando

$$\begin{aligned} \langle \phi_f | U_J(t_f, t_i) | \phi_i \rangle &= \int d\phi_{N-1} \dots \int d\phi_1 \langle \phi_f | U_J(t_f, t_{N-1}) | \phi_{N-1} \rangle \\ &\quad \langle \phi_{N-1} | U_J(t_{N-1}, t_{N-2}) | \phi_{N-2} \rangle \dots \langle \phi_1 | U_J(t_1, t_i) | \phi_i \rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

Expandindo a exponencial em  $U_J(t_f, t_i)$  até a primeira ordem em  $\varepsilon$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi_f | U_J(t_f, t_i) | \phi_i \rangle &\simeq \int d\phi_{N-1} \dots \int d\phi_1 \langle \phi_f | 1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \varepsilon | \phi_{N-1} \rangle \\ &\quad \langle \phi_{N-1} | 1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \varepsilon | \phi_{N-2} \rangle \dots \langle \phi_1 | 1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H} \varepsilon | \phi_i \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\langle \phi_f | U_J(t_f, t_i) | \phi_i \rangle &\simeq \int d\phi_{N-1} \dots \int d\phi_1 \langle \phi_f | \phi_{N-1} \rangle \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H}[\phi_f, \phi_{N-1}] \varepsilon \right\} \\
&\langle \phi_{N-1} | \phi_{N-2} \rangle \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H}[\phi_{N-1}, \phi_{N-2}] \varepsilon \right\} \dots \\
&\dots \langle \phi_1 | \phi_i \rangle \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \tilde{H}[\phi_1, \phi_i] \varepsilon \right\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde  $\tilde{H} = H + \hbar J \phi$ .

Finalmente, aplicando os auto-estados  $|\phi_j\rangle$  na Hamiltoniana  $\tilde{H}$ , reescrevendo os termos entre os auto-estados novamente na forma exponencial e somando sobre todas as trajetórias possíveis entre  $\phi_i, t_i$  e  $\phi_f, t_f$  no limite em que  $\varepsilon \rightarrow 0$  ou  $N \rightarrow \infty$

$$K_J(\phi_f, t_f; \phi_i, t_i) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\mathcal{L}[\phi] + \hbar J \phi) \right\} \tag{3.19}$$

Finalmente  $Z[J^+, J^-, J^\beta]$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
Z[J^+, J^-, J^\beta] &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \mathcal{D}\phi^\beta \\
&\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} \langle \mathcal{L}[\phi^+, J^+] - \mathcal{L}[\phi^-, J^-] \rangle dt \right\} \\
&\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T-i\hbar\beta} \mathcal{L}[\phi^\beta, J^\beta] dt \right\}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde  $\mathcal{L}[\phi, J] = \mathcal{L}[\phi] + \hbar J \phi$ , e com as seguintes condições de contorno  $\phi^+(T) = \phi^\beta(T - i\hbar\beta) = \phi$ ;  $\phi^+(T) = \phi^-(T) = \phi_2$ ;  $\phi^-(T) = \phi^\beta(T) = \phi_1$ .

A expressão acima para o funcional gerador  $Z[J^+, J^-, J^\beta]$  de um sistema fora do equilíbrio pode ser escrito de uma forma mais compacta, como

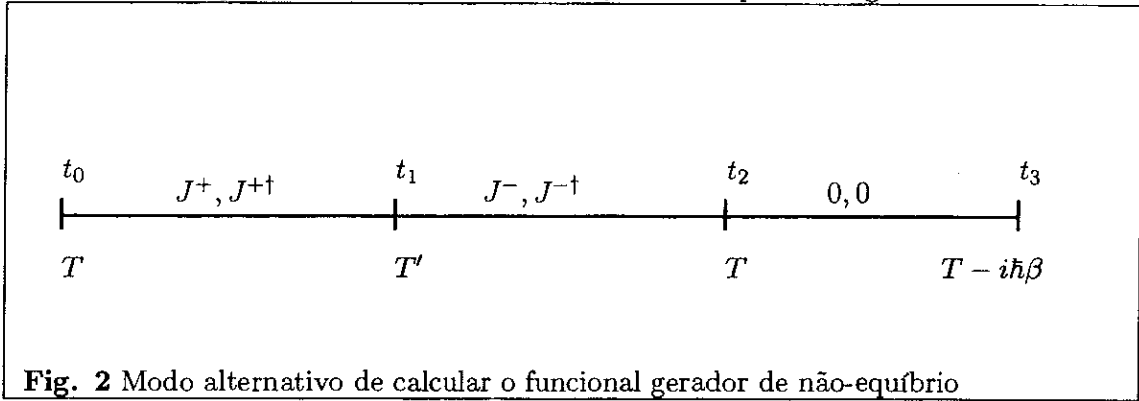
$$Z[J^+, J^-, J^\beta] = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi | U_{J_c}(T - i\hbar\beta, T) | \phi \rangle \tag{3.21}$$

ou

$$Z[J^+, J^-, J^\beta] = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi_c \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_c \mathcal{L}[\phi_c, J_c] dt \right\} \tag{3.22}$$

onde  $U_{J_c}(T - i\hbar\beta, T)$  é o operador evolução ao longo do contorno mostrado na fig.(1) com

$J_c = J^+$  no ramo superior  $J_c = J^-$  no inferior e  $J_c = J^\beta$  na parte imaginária.



**Fig. 2** Modo alternativo de calcular o funcional gerador de não-equilíbrio

De forma equivalente, o traço em (3.22) pode ser calculado para o operador evolução  $U_{J_c}(t_3, t_0)$  ao longo do contorno da fig.(2), com  $t_3 > t_2 > t_1 > t_0$

$$J_c(t) = \begin{cases} J^+(t), & \text{se } t_0 < t < t_1 \\ J^-(t), & \text{se } t_1 < t < t_2 \\ J^\beta(t), & \text{se } t_2 < t < t_3 \end{cases} \quad (3.23)$$

Após o cálculo podemos identificar  $t_0 = T, t_1 = T', t_2 = T$  e  $t_3 = T - i\hbar\beta$ .

Podemos, também, considerar o caso em que além do termo de fonte em  $\mathcal{L}$  haja também um termo de interação,  $\mathcal{L}_{int}$ , tal que

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_c (\mathcal{L}[\phi] + \mathcal{L}_{int}[\phi] + \hbar J\phi) dt \right\} \quad (3.24)$$

Agora, façamos a seguinte consideração

$$-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(t)} e^{\frac{i}{\hbar} \int J(t')\phi(t') dt'} = \phi(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int J(t')\phi(t') dt'},$$

que generalizando fica

$$F \left[ -i\hbar \frac{\delta}{\delta J(t)} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int J(t')\phi(t') dt'} = F[\phi(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int J(t')\phi(t') dt'}. \quad (3.25)$$

Aplicando a condição (3.25) para o funcional gerador  $Z[J]$ , equação (3.24), encontramos

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int_c \mathcal{L}_{int}[-i\hbar\delta/\delta J_c] dt} e^{\frac{i}{\hbar} \int_c \mathcal{L}[\phi_c, J_c] dt} \quad (3.26)$$

As integrais de trajetória sobre as formas quadráticas podem ser calculadas ao longo do contorno dado na fig.(1), ficando

$$\begin{aligned}
Z[J^+, J^-, J^\beta] &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} [\mathcal{L}_{int}(-i\hbar\delta/\delta J^+) - \mathcal{L}_{int}(i\hbar\delta/\delta J^-)] dt \right\} \\
&\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T-i\hbar\beta} \mathcal{L}_{int}(-i\hbar\delta/\delta J^\beta) dt \right\} \\
&\exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int_c dt_1 \int_c dt_2 J_c(t_1) J_c(t_2) G_c(t_1, t_2) \right\} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

onde  $J_c$  e  $G_c$  são, respectivamente, as correntes e as funções de Green no contorno [9], onde os argumentos espaciais foram omitidos.

Quando tomamos o limite  $T \rightarrow \infty$ , as contribuições dos termos em que temos uma combinação das correntes  $J^+$  ou  $J^-$  com  $J^\beta$  zeram quando calculamos as funções correlações em que as pernas externas estão num tempo real finito, como uma consequência do lema de Riemann-Lesbegue. Quando calculamos a função correlação de tempo real, não há contribuição dos termos  $J^\beta$  que se cancelam entre numerador e denominador. Neste caso, para o cálculo de funções correlações em tempo real, o funcional gerador pode ser escrito como [17]

$$\begin{aligned}
Z[J^+, J^-] &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} [\mathcal{L}_{int}(-i\hbar\delta/\delta J^+) - \mathcal{L}_{int}(i\hbar\delta/\delta J^-)] dt \right\} \\
&\exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int_T^{T'} dt_1 \int_T^{T'} dt_2 J_a(t_1) J_b(t_2) G_{ab}(t_1, t_2) \right\} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

com  $a, b = +, -$ .

As funções de Green que entram nas integrais de caminho ao longo dos contornos nas equações (3.27) e (3.28) são escritas em termos das soluções homogêneas da forma quadrática,  $G^>$  e  $G^<$  com condições de contorno periódicas, como [10, 11]

$$\begin{aligned}
G^{++}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) &= G^>(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2)\theta(t_1 - t_2) + G^<(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2)\theta(t_2 - t_1) \\
G^{--}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) &= G^>(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2)\theta(t_2 - t_1) + G^<(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2)\theta(t_1 - t_2) \\
G^{+-}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) &= -G^<(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) \\
G^{-+}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) &= -G^>(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = -G^<(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$G^>(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \langle \Phi(\vec{r}_1, t_1) \Phi(\vec{r}_2, t_2) \rangle \quad (3.30)$$

$$G^<(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = G^>(\vec{r}_1, T - i\beta; \vec{r}_2, t_2). \quad (3.31)$$

A equação (3.31) é a condição de periodicidade no tempo imaginário, consequência da condição de equilíbrio para  $t < 0$ .

## Capítulo 4

# Estados Coerente

Uma base extremamente apropriada do espaço de Fock é a base dos estados coerente, adequada quando se trabalha com os operadores de criação e aniquilação.

Os estados coerente são definidos como auto-estados do operador aniquilação

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|a^\dagger = \alpha^*\langle\alpha| \quad (4.1)$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  é um vetor complexo com um número infinito de componentes e os operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0$$

e

$$|\alpha\rangle = N_\alpha e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle.$$

A constante de normalização,  $N_\alpha$ , pode ser determinada considerando que

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

ficando

$$N_{\alpha} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2},$$

logo

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^{\dagger}} |0\rangle. \quad (4.2)$$

Estes estados não são ortogonais já que para dois estados coerente quaisquer  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\beta\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \langle 0|e^{\beta a} e^{\alpha a^{\dagger}}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta^* \alpha}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Contudo, estes estados formam um conjunto super completo e satisfazem a relação de completeza dada por

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi N} |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \quad (4.4)$$

onde  $d^2\alpha = \prod_i d(\text{Re } \alpha_i) d(\text{Im } \alpha_i)$ .

Uma outra forma conveniente de escrevermos os estados coerente é na representação de número de ocupação,  $|n\rangle$ , que representa um estado com  $n$  partículas. Expandindo  $e^{\alpha a^{\dagger}}$  em (4.2) em uma série, temos

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{n!} (a^{\dagger})^n |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

recordando que

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (4.6)$$

Uma outra relação apropriada dos estados coerente é

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi N} e^{-\xi|\alpha|^2 + \lambda\alpha^* + \mu\alpha} = \frac{1}{\xi} e^{\lambda\mu/\xi}. \quad (4.7)$$

Vamos calcular o funcional gerador de não-equilíbrio do oscilador harmônico na presença de fontes como exemplo da representação de estados coerente. A Hamiltoniana do oscilador harmônico é dada por

$$H \equiv \hbar(\omega a^\dagger a + J^\dagger a + J a^\dagger) \quad (4.8)$$

A partir da definição do funcional gerador, equação (3.14), podemos escrever na representação de estados coerente que

$$\mathcal{Z}[J^+, J^-] = \frac{1}{\text{tr} e^{-\beta H}} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \langle \gamma | U_{J^+, J^{++}}(T, T) e^{-\beta H} U_{J^-, J^{-+}}(T, T) | \gamma \rangle. \quad (4.9)$$

Inserindo duas vezes a relação (4.4) na equação acima e usando que  $U^{-1}(T, T) = U(T, T)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J^+, J^-] &= \frac{1}{\text{tr} e^{-\beta H}} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \frac{d^2 \gamma}{\pi} \frac{d^2 \delta}{\pi} \langle \gamma | U_{J^+, J^{++}}(T, T) | \alpha \rangle \\ &\quad \langle \alpha | e^{-\beta H} | \delta \rangle \langle \delta | U_{J^-, J^{-+}}(T, T) | \gamma \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

Rearranjando os propagadores em (4.10) e considerando que  $\exp\{-\beta H\} = U(T - i\hbar\beta, T)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J^+, J^-] &= \frac{1}{\text{tr} e^{-\beta H}} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \frac{d^2 \gamma}{\pi} \frac{d^2 \delta}{\pi} \langle \alpha | U_{0,0}(T - i\hbar\beta, T) | \delta \rangle \\ &\quad \langle \delta | U_{J^-, J^{-+}}(T, T) | \gamma \rangle \langle \gamma | U_{J^+, J^{++}}(T, T) | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

que pode ser escrita de uma forma mais compacta utilizando novamente a relação (4.4),

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J^+, J^-] &= \frac{1}{\text{tr} e^{-\beta H}} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \langle \alpha | U_{J_c, J_c^\dagger}(t_3, t_0) | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{\text{tr} e^{-\beta H}} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} K_{J_c, J_c^\dagger}(\alpha^*, t_3; \alpha, t_0) \\ &= \frac{1}{\text{tr} e^{-\beta H}} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \mathcal{D}^2 \gamma e^{i \int_c dt (\mathcal{L}[\gamma, \gamma^*] - J_c \gamma^* - J_c^\dagger \gamma)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

como em (3.22) mas com

$$J_c(t), J_c^\dagger(t) = \begin{cases} J^+(t), J^{+\dagger}(t) & \text{se } t_0 < t < t_1 \\ J^-(t), J^{-\dagger}(t) & \text{se } t_1 < t < t_2 \\ 0, 0 & \text{se } t_2 < t < t_3 \end{cases} \quad (4.13)$$

onde  $t_0 = T, t_1 = T', t_2 = T$  e  $t_3 = T - i\hbar\beta$ .

O propagador na presença de fontes,  $K_{J_c, J_c^\dagger}(\alpha^*, t_3; \alpha, t_0)$ , pode ser calculado aplicando-se o mesmo procedimento usado no cálculo de (3.19). Dividindo o intervalo de tempo  $[T', T]$  em  $N$  subintervalos iguais de largura  $\varepsilon$  e inserindo  $N - 1$  relações de completudeza, equação (4.4), podemos escrever

$$K_{J_c, J_c^\dagger} = \int \frac{d^2\alpha_{N-1}}{\pi} \dots \frac{d^2\alpha_1}{\pi} \langle \alpha | e^{-i\varepsilon(\omega a^\dagger a + J_{N-1}^\dagger a + J_{N-1} a^\dagger)} | \alpha_{N-1} \rangle \\ \langle \alpha_{N-1} | e^{-i\varepsilon(\omega a^\dagger a + J_{N-2}^\dagger a + J_{N-2} a^\dagger)} | \alpha_{N-2} \rangle \dots \langle \alpha_1 | e^{-i\varepsilon(\omega a^\dagger a + J_0^\dagger a + J_0 a^\dagger)} | \alpha \rangle \quad (4.14)$$

Expandindo as exponenciais acima até a primeira ordem em  $\varepsilon$  e usando a definição de estados coerente (4.1), obtemos

$$K_{J_c, J_c^\dagger} = \int \frac{d^2\alpha_{N-1}}{\pi} \dots \frac{d^2\alpha_1}{\pi} \langle \alpha | \alpha_{N-1} \rangle \{ 1 - i\varepsilon(\omega \alpha^* \alpha_{N-1} + J_{N-1}^\dagger \alpha_{N-1} + J_{N-1} \alpha^*) \} \\ \langle \alpha_{N-1} | \alpha_{N-2} \rangle \{ 1 - i\varepsilon(\omega \alpha_{N-1}^* \alpha_{N-2} + J_{N-2}^\dagger \alpha_{N-2} + J_{N-2} \alpha_{N-1}^*) \} \dots \\ \dots \langle \alpha_1 | \alpha \rangle \{ 1 - i\varepsilon(\omega \alpha_1^* \alpha + J_0^\dagger \alpha + J_0 \alpha_1^*) \}.$$

Os termos entre colchetes podem ser escritos novamente na forma exponencial e usando a relação (4.3) encontramos

$$K_{J_c, J_c^\dagger} = \int \frac{d^2\alpha_{N-1}}{\pi} \dots \frac{d^2\alpha_1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_{N-1}|^2 + \alpha^* \alpha_{N-1} - i\varepsilon(\alpha^* \alpha_{N-1} + J_{N-1}^\dagger \alpha_{N-1} + J_{N-1} \alpha^*)} \\ e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{N-1}|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_{N-2}|^2 + \alpha_{N-1}^* \alpha_{N-2} - i\varepsilon(\omega \alpha_{N-1}^* \alpha_{N-2} + J_{N-2}^\dagger \alpha_{N-2} + J_{N-2} \alpha_{N-1}^*)} \dots \\ \dots e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha_1^* \alpha - i\varepsilon(\omega \alpha_1^* \alpha + J_0^\dagger \alpha + J_0 \alpha_1^*)}. \quad (4.15)$$



Usando a equação (4.7), podemos calcular a seguinte integral

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^2\alpha_{N-1}}{\pi} \exp\{i|\alpha_{N-1}|^2 + \alpha_{N-1}[\alpha^*(1 - i\varepsilon\omega) - i\varepsilon J_{N-1}^\dagger] + \\
& + \alpha_{N-1}^*[\alpha_{N-2}(1 - i\varepsilon\omega) - i\varepsilon J_{N-2}]\} \\
& = \exp\{[\alpha^*(1 - i\varepsilon\omega) - i\varepsilon J^\dagger(t_{N-1})][\alpha_{N-2}(1 - i\varepsilon\omega) - i\varepsilon J(t_{N-2})]\}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Similarmente, podemos calcular as integrais sobre  $\alpha_{N-2}, \dots, \alpha_2$  e  $\alpha_1$ . O propagador, então, tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
K_{J_c, J_c^\dagger} & = e^{-|\alpha|^2} \exp\{-i\varepsilon J(t_{N-1})\alpha^* - i\varepsilon J(t_{N-2})[\alpha^*(1 - i\varepsilon\omega) - i\varepsilon J^\dagger(t_{N-1})] + \\
& - i\varepsilon J(t_{N-3})[\alpha^*(1 - i\varepsilon\omega)^2 - i\varepsilon(1 - i\varepsilon\omega)J^\dagger(t_{N-1}) - i\varepsilon J^\dagger(t_{N-2})] + \dots + \\
& - i\varepsilon J(0)[\alpha^*(1 - i\varepsilon\omega)^{N-1} - i\varepsilon(1 - i\varepsilon\omega)^{N-2}J^\dagger(t_{N-2}) - \dots - i\varepsilon J^\dagger(t_1)]\} \\
& \exp\{\beta[\alpha^*(1 - i\varepsilon\omega)^N - i\varepsilon(1 - i\varepsilon\omega)^{N-1}J^\dagger(t_{N-1}) + \dots \\
& \dots - i\varepsilon(1 - i\varepsilon\omega)J^\dagger(t_1) - J^\dagger(0)]\}. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Tomando o limite em que  $N \rightarrow \infty$  ou  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o funcional gerador pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J^+, J^-] & = \frac{1}{tr e^{-\beta H}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp\{-|\alpha|^2(1 - e^{-i\omega(t_3-t_0)})\} \\
& \exp\left\{-i\alpha^* e^{-i\omega t_3} \int_{t_3}^{t_0} J_c(t') e^{i\omega t'} dt' - i\alpha e^{i\omega t_0} \int_{t_0}^{t_3} J_c^\dagger(t') e^{-i\omega t'} dt'\right\} \\
& \exp\left\{-\int_{t_0}^{t_3} dt' \int_{t_0}^{t_3} dt'' J_c^\dagger(t') J_c(t'') e^{-i\omega(t'-t'')} \theta(t'-t'')\right\} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Aplicando novamente a equação (4.7), podemos calcular a integral em  $\alpha$ , ficando

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J^+, J^-] & = \frac{1}{tr e^{-\beta H}} \frac{1}{1 - e^{-i\omega(t_3-t_0)}} \\
& \exp\left\{-\int_{t_0}^{t_3} dt' \int_{t_0}^{t_3} dt'' J_c^\dagger(t') J_c(t'') e^{-i\omega(t'-t'')} \right. \\
& \left. \left(\theta(t'-t'') + \frac{e^{-i\omega(t_3-t_0)}}{1 - e^{-i\omega(t_3-t_0)}}\right)\right\}. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

As integrais sobre  $t'$  e  $t''$  em  $\mathcal{Z}[J^+, J^-]$  podem ser divididas em quatro integrais, isto é

$\int_{t_0}^{t_1} dt' \int_{t_0}^{t_1} dt'' + \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_{t_1}^{t_2} dt'' + \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{t_0}^{t_1} dt'' + \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{t_1}^{t_2} dt''$ , considerando o modo alternativo de calcularmos o funcional gerador (fig.2) e a equação (4.13) sabendo que para o oscilador harmônico

$$tr e^{-\beta H} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \alpha | e^{-\beta \hbar \omega a^\dagger a} | \alpha \rangle = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}, \quad (4.20)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J^+, J^-] = & \exp\left\{-\int_T^{T'} dt' \int_T^{T'} dt'' e^{-i\omega(t'-t'')} [J^{+\dagger}(t') J^+(t'') (\theta(t' - t'') + \eta_\beta) + \right. \\ & + J^{-\dagger}(t') J^-(t'') (\theta(t'' - t') + \eta_\beta) - J^{+\dagger}(t') J^-(t'') \eta_\beta + \\ & \left. - J^{-\dagger}(t') J^+(t'') (1 + \eta_\beta)\right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\eta_\beta = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad (4.22)$$

é o número de ocupação médio.

## Capítulo 5

# Hamiltoniana do Sistema

Apresentaremos neste capítulo, a Hamiltoniana do sistema no qual aplicaremos o formalismo apresentado nos capítulos anteriores para estudarmos a dinâmica de não-equilíbrio da carga.

Vamos expandir a Hamiltoniana do sistema carga-campo em modos normais e em seguida a escreveremos em termos dos operadores de criação e aniquilação.

A Hamiltoniana do sistema carga-campo pode ser escrita como

$$H = H_e + H_c \quad (5.1)$$

onde

$$H_e = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \quad (5.2)$$

é a Hamiltoniana de uma carga  $e$  e massa  $m$  em movimento em um campo eletromagnético [12], considerando o gauge  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  e  $\phi = 0$ , interagindo com o campo através do potencial vetor e

$$H_c = \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (5.3)$$

a Hamiltoniana do campo eletromagnético [1]. Vale lembrar que  $\vec{p}$  em  $H_e$  é o momento conjugado a coordenada da partícula.

Passemos agora a expansão de  $\vec{A}$  e do seu momento conjugado  $\vec{P}$  em modos normais [13]

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{k\lambda} q_{k\lambda}(t) \vec{u}_{k\lambda}(\vec{x}) \quad (5.4)$$

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = \sum_{k\lambda} p_{k\lambda}(t) \vec{u}_{k\lambda}(\vec{x}) \quad (5.5)$$

onde escolhemos os modos como sendo

$$\vec{u}_{k\lambda}(\vec{x}) = L^{-3/2} \hat{e}_{k\lambda} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (5.6)$$

ondas planas em uma caixa de dimensões grande com volume  $L^3$  e em que  $\hat{e}_{k\lambda}$  ( $\lambda = 1, 2$ ) são os versores das direções de polarização que satisfazem a

$$\vec{k} \cdot \hat{e}_{k\lambda} = 0 \quad (5.7)$$

e

$$\hat{e}_{k\lambda} \cdot \hat{e}_{k\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (5.8)$$

A ortonormalidade dos modos  $\vec{u}_{k\lambda}(\vec{x})$  é dada por

$$\int \vec{u}_{k\lambda}^*(\vec{x}) \cdot \vec{u}_{k'\lambda'}(\vec{x}) d^3\vec{x} = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (5.9)$$

Substituindo as expansões (5.4) e (5.5) nas Hamiltonianas da carga e do campo temos [13]

$$H_e = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - e \sum_{k\lambda} q_{k\lambda}(t) \vec{u}_{k\lambda}(\vec{x}) \right]^2 \quad (5.10)$$

e

$$H_c = \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} [p_{k\lambda}^2(t) + k^2 q_{k\lambda}^2(t)]. \quad (5.11)$$

Este resultado nos mostra que o campo de radiação da carga se comporta como uma soma infinita de osciladores harmônicos desacoplados.

Definindo agora  $q_{k\lambda}(t)$  e  $p_{k\lambda}(t)$  em função dos operadores criação e aniquilação, temos

$$q_{k\lambda}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2k}} [a_{k\lambda}^\dagger(t) + a_{k\lambda}(t)] \quad (5.12)$$

$$p_{k\lambda}(t) = i\sqrt{\frac{\hbar k}{2}} [a_{k\lambda}^\dagger(t) - a_{k\lambda}(t)], \quad (5.13)$$

que satisfazem a seguinte relação de comutação usual

$$[q_{k\lambda}(t), p_{k',\lambda'}^\dagger(t)] = i\hbar\delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad (5.14)$$

sendo  $q_{k\lambda}^\dagger(t) = q_{-k\lambda}(t)$  e  $p_{k\lambda}^\dagger(t) = p_{-k\lambda}(t)$  já que o potencial vetor e o seu momento conjugado são reais.

Tiramos desta relação de comutação as seguintes relações para  $a_{k\lambda}$  e  $a_{k\lambda}^\dagger$

$$[a_{k\lambda}(t), a_{k',\lambda'}^\dagger(t)] = \delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} \quad (5.15)$$

enquanto todos os outros operadores comutam um com outro

$$[a_{k\lambda}^\dagger(t), a_{k',\lambda'}^\dagger(t)] = [a_{k\lambda}(t), a_{k',\lambda'}(t)] = 0. \quad (5.16)$$

Voltando para as equações (5.10) e (5.11), levando em consideração as definições (5.12) e (5.13), finalmente temos

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - h[a_{k\lambda}^\dagger, a_{k\lambda}] \right)^2 + H_c[a_{k\lambda}^\dagger, a_{k\lambda}] \quad (5.17)$$

onde

$$h[a_{k\lambda}^\dagger, a_{k\lambda}] = e \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2k}} [a_{k\lambda}^\dagger(t) + a_{k\lambda}(t)] \vec{u}_{k\lambda}(\vec{x}) \quad (5.18)$$

$$H_c[a_{k\lambda}^\dagger, a_{k\lambda}] = \hbar \sum_{k\lambda} \omega_k (a_{k\lambda}^\dagger(t) a_{k\lambda}(t) + 1/2) \quad (5.19)$$

É oportuno notarmos neste momento a semelhança entre a Hamiltoniana do sistema que estamos tratando, equação (5.17), por exemplo, com as Hamiltonianas utilizadas para se estudar

a dinâmica de polarons [14] e solitons [15], entre outras.

## Capítulo 6

# O Funcional Gerador em Tempo Real

Neste capítulo, aplicaremos o formalismo apresentado no capítulo três, muito usado no estudo de efeitos dissipativos em mecânica quântica [11, 18] e no tratamento do movimento Browniano quântico [4].

Existem algumas diferenças entre o trabalho que iremos apresentar para o problema da interação entre uma carga e o seu próprio campo de radiação em comparação com os trabalhos sobre o movimento Browniano quântico e sistemas dissipativos. No tratamento do movimento Browniano, por exemplo, assume-se uma densidade particular de estados para o banho.

A matriz densidade que tráz toda a evolução no tempo do sistema é dada por

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{-1}(t), \quad (6.1)$$

com  $U(t)$  o operador evolução no tempo.

Como mencionado anteriormente, nosso principal interesse é estudar a dinâmica da carga interagindo com o campo de radiação. Fisicamente estamos interessados nas funções correlações da carga, e não sobre qualquer propriedade do campo. Para isto, vamos aplicar o formalismo de integrais de trajetória em tempo real, considerando os fótons oriundos da radiação como um banho e obtendo um funcional de influência fazendo o traço parcial sobre os graus de liberdade dos fótons encontrando uma teoria efetiva para a carga.

Mas, como campos de radiação surgem somente quando a carga esta acelerada, vamos introduzir um campo externo clássico com o objetivo de acelerar a carga, tal acoplamento é da forma  $\vec{j}(t) \cdot \vec{x}(t)$  onde  $\vec{j}(t) \propto \vec{E}(t)$ , tal que a contribuição para a Lagrangeana é do tipo

$$\mathcal{L}_{ext} = -\vec{j}(t) \cdot \vec{x}(t) \quad (6.2)$$

onde supomos que o campo é ligado em  $t = 0$ , isto é,

$$\vec{j}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ \vec{j}, & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Temos, portanto a Lagrangeana total dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\vec{x}, a_{k\lambda}^\dagger, a_{k\lambda}] &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{x}} \cdot e \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2k}} [a_{k\lambda}^\dagger(t) + a_{k\lambda}(t)] \vec{u}_{k\lambda}(\vec{x}) + \\ &\quad - \hbar \sum_{k\lambda} \omega_k (a_{k\lambda}^\dagger(t) a_{k\lambda}(t) + 1/2) - \vec{j}(t) \cdot \vec{x}(t). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Antes de iniciarmos com o cálculo do funcional gerador, vamos primeiramente discutir a condição particular relacionada com a condição inicial de interação entre o sistema de interesse(carga) e o reservatório(fótons). Esta condição inicial é dada por  $\rho(0) = e^{-\beta H}$ . Existem diferentes formas de condição inicial, por exemplo, condição inicial ligada, onde sistema e reservatório estão interagindo [22] ou condição em que inicialmente não há interação [18, 19], sistema e reservatório estão em equilíbrio, entre outras [23].

Assumindo que em  $t_i = 0$ , a carga encontra-se em equilíbrio térmico com o banho de fótons e que a matriz densidade para o sistema carga-fótons está desacoplada no instante de tempo inicial  $t_i$ , isto é,

$$\rho(t_i) = \rho_e(t_i) \otimes \rho_c(t_i) \quad (6.5)$$

onde  $\rho_e(t_i)$  é a matriz densidade do sistema que é tomada como sendo uma partícula livre,  $\rho_e(t_i) = |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|$  e  $\rho_c(t_i)$  é a matriz densidade do banho de fótons em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , dada por

$$\rho_c(t_i) = \frac{e^{-\beta H_c}}{\mathbb{Z}}, \quad (6.6)$$



com

$$\mathcal{Z} = \text{tr}_c(e^{-\beta H_c}). \quad (6.7)$$

$H_c$  é a Hamiltoniana do campo livre dada por (5.19).

A relação de completeza do sistema carga-campo é dada por

$$\int \frac{d^2 \alpha}{\pi^N} \int d\vec{x} |\vec{x}, \alpha\rangle \langle \vec{x}, \alpha| = 1 \quad (6.8)$$

onde, usaremos a representação de coordenadas para a partícula

$$\vec{x}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle,$$

e a representação de estados coerente para o campo de radiação

$$|\alpha\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle$$

onde  $N$  é infinito.

O funcional gerador na representação de estados coerente, equação (4.9), fica

$$Z[j] = \frac{1}{\text{tr} \rho(t_i)} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi^N} \langle \alpha, \vec{x} | U_{j+}(t, -\infty) \rho(t_i) U_{j-}^{-1}(t, -\infty) | \vec{y}, \alpha \rangle. \quad (6.9)$$

Inserindo a relação de completeza (6.8) entre os operadores de evolução e  $\rho(0)$ , temos

$$Z[j] = \frac{1}{\text{tr} \rho(t_i)} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi^N} \frac{d^2 \gamma}{\pi^N} \frac{d^2 \delta}{\pi^N} d\vec{x} d\vec{y}' \langle \vec{x}, \alpha | U_{j+}(t, -\infty) | \vec{x}', \gamma \rangle \langle \vec{x}', \gamma | \rho(t_i) | \vec{y}', \delta \rangle \langle \vec{y}', \delta | U_{j-}^{-1}(-\infty, t) | \vec{y}, \alpha \rangle. \quad (6.10)$$

Identificamos em (6.10) os propagadores de Feynman, equação (3.16), como

$$K_{j+}(\vec{x}, \alpha^*, t; \vec{x}', \gamma, -\infty) = \langle \vec{x}, \alpha | U_{j+}(t, -\infty) | \vec{x}', \gamma \rangle \quad (6.11)$$

$$K_{j-}^*(\vec{y}, \alpha, t; \vec{y}', \delta^*, -\infty) = \langle \vec{y}', \delta | U_{j-}^{-1}(t, -\infty) | \vec{y}, \alpha \rangle, \quad (6.12)$$

podemos escrever, considerando (6.5), que

$$Z[j] = \frac{1}{\text{tr}\rho(t_i)} \int d\vec{x} \int d\vec{y} \rho_e(\vec{x}, \vec{y}, t_i) \int \frac{d^2\alpha}{\pi^N} \frac{d^2\gamma}{\pi^N} \frac{d^2\delta}{\pi^N} \langle \gamma | \rho_c(t_i) | \delta \rangle K_{j+}(\vec{x}, \alpha^*, t; \vec{x}, \gamma, -\infty) K_{j-}^*(\vec{y}, \alpha, t; \vec{y}, \delta^*, -\infty) \quad (6.13)$$

com

$$\rho_e(\vec{x}, \vec{y}; t_i) = \langle \vec{x} | \rho_e(t_i) | \vec{y} \rangle,$$

e

$$\langle \gamma | \rho_c(t_i) | \delta \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{k=1}^N \exp \left\{ -\frac{|\gamma_k|^2}{2} - \frac{|\delta_k|^2}{2} + \gamma_k^* \delta_k e^{-\beta \hbar \omega_k} \right\}, \quad (6.14)$$

$$Z(t) = \prod_{k=1}^N [1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k)]^{-1} e^{\frac{\beta \hbar \omega_k}{2}}. \quad (6.15)$$

Para calcularmos os propagadores de Feynman  $K_{j+}$  e  $K_{j-}^*$ , aplicaremos o procedimento adotado para calcular o propagador (4.14) do oscilador harmônico. Dividindo o intervalo de tempo  $[-\infty, t]$  em  $N$  subintervalos iguais de largura  $\varepsilon$  e inserindo  $N - 1$  relações de completudeza, equação (6.8), podemos escrever

$$K_{j+} = \int \frac{d^2\alpha_1}{\pi^N} \dots \int \frac{d^2\alpha_{N-1}}{\pi^N} \int d\vec{x}_1 \dots \int d\vec{x}_{N-1} \langle \vec{x}_N, \alpha_N | U_{j+}(t_N, t_{N-1}) | \vec{x}_{N-1}, \alpha_{N-1} \rangle \dots \langle \vec{x}_1, \alpha_1 | U_{j+}(t_1, t_0) | \vec{x}_0, \alpha_0 \rangle \quad (6.16)$$

onde  $|\vec{x}, \gamma\rangle = |\vec{x}_0, \alpha_0\rangle$  e  $\langle \vec{x}, \alpha| = \langle \vec{x}_N, \alpha_N|$ .

Generalizando os resultados encontrados no capítulo quatro para o oscilador harmônico, encontramos

$$Z[j, J] = \frac{1}{\text{tr}\rho(t_i)} \int d\vec{x} d\vec{y} \rho_e(\vec{x}, \vec{y}, t_i) \int D\vec{x}^+(\tau) D\vec{x}^-(\tau) e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[\vec{x}^+] - S_0[\vec{x}^-])} Z[J^+, J^-] \quad (6.17)$$

onde

$$D\vec{x}(\tau) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \left( \frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{x}_j \right\} \quad (6.18)$$

e

$$S_0[\vec{x}] = \int_{-\infty}^t d\tau \left\{ \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2(\tau) - \vec{j}(\tau) \cdot \vec{x}(\tau) \right\} \quad (6.19)$$

é a ação da carga quando ela não está acoplada ao campo de radiação. O termo  $Z[J^+, J^-]$  em (6.17), que faz o papel do funcional de influência [18], é equivalente ao funcional gerador do oscilador harmônico (4.21),

$$\begin{aligned} Z[J^+, J^-] = & \exp\left\{-\sum_{k\lambda} \sum_{\lambda'} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau' [J_{k\lambda}^{+\dagger}(\tau) J_{k\lambda'}^+(\tau')(\theta(\tau - \tau') + \eta_k) + \right. \\ & + J_{k\lambda}^{-\dagger}(\tau) J_{k\lambda'}^-(\tau')(\theta(\tau' - \tau) + \eta_k) - J_{k\lambda}^{+\dagger}(\tau) J_{k\lambda'}^-(\tau')\eta_k + \\ & \left. - J_{k\lambda}^{-\dagger}(\tau) J_{k\lambda'}^+(\tau')(1 + \eta_k)] e^{-i\omega_k(\tau - \tau')}\right\}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

fazendo

$$J_{k\lambda}(t) = J_{k\lambda}^\dagger(t) = -\frac{e}{\sqrt{2\hbar k}} \dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{u}_{k\lambda}(\vec{x}) \quad (6.21)$$

no segundo termo em (6.4). Omitimos em (6.21) a dependência espacial.

A partir do funcional gerador  $Z[J^+, J^-]$  e da definição (3.12), podemos calcular as funções de Green do sistema,

$$G_k^{++}(t-t') = -\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J^+, J^-]}{\delta J_{k\lambda}^{+\dagger}(t) \delta J_{k\lambda}^+(t')} \Big|_{J^{\pm\dagger}, J^{\pm}=0} = e^{-i\omega_k(t-t')}(\theta(t-t') + \eta_k), \quad (6.22)$$

$$G_k^{--}(t-t') = -\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J^+, J^-]}{\delta J_{k\lambda}^{-\dagger}(t) \delta J_{k\lambda}^-(t')} \Big|_{J^{\pm\dagger}, J^{\pm}=0} = e^{-i\omega_k(t-t')}(\theta(t'-t) + \eta_k), \quad (6.23)$$

$$G_k^{+-}(t-t') = -\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J^+, J^-]}{\delta J_{k\lambda}^{+\dagger}(t) \delta J_{k\lambda}^-(t')} \Big|_{J^{\pm\dagger}, J^{\pm}=0} = -e^{-i\omega_k(t-t')}\eta_k \quad (6.24)$$

e

$$G_k^{-+}(t-t') = -\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J^+, J^-]}{\delta J_{k\lambda}^{-\dagger}(t) \delta J_{k\lambda}^+(t')} \Big|_{J^{\pm\dagger}, J^{\pm}=0} = -e^{-i\omega_k(t-t')}(1 + \eta_k) \quad (6.25)$$

sendo

$$G_k^{++}(t-t') + G_k^{--}(t-t') + G_k^{+-}(t-t') + G_k^{-+}(t-t') = 0 \quad (6.26)$$

Até este momento não há qualquer aproximação, o funcional gerador em (6.20) é um resultado exato.

Agora, escrevendo (6.20) em termos da coordenada da partícula, substituindo (6.21), obtemos o funcional de influência

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\vec{x}^+, \vec{x}^-] = & \exp\left\{-\int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' \sum_{k\lambda} \sum_{\lambda'} \frac{e^2}{2\hbar k L^3} \times \right. \\
& [(\dot{\vec{x}}^+(\tau) \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau)} (\theta(\tau - \tau') + \eta_k) (\dot{\vec{x}}^+(\tau') \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda'}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau')} + \\
& (\dot{\vec{x}}^-(\tau) \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau)} (\theta(\tau' - \tau) + \eta_k) (\dot{\vec{x}}^-(\tau') \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda'}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau')} + \\
& -(\dot{\vec{x}}^-(\tau) \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau)} (1 + \eta_k) (\dot{\vec{x}}^+(\tau') \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda'}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau')} + \\
& \left. -(\dot{\vec{x}}^+(\tau) \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau)} (\eta_k) (\dot{\vec{x}}^-(\tau') \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda'}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau')} \right] e^{-i\omega_k(\tau - \tau')} \}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

que carrega toda a informação do efeito do campo de radiação sobre a carga.

Usando a identidade vetorial  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$ , a condição (5.8) e sabendo que  $\sum_{\lambda\lambda'} (\hat{\epsilon}_{k\lambda} \times \hat{\epsilon}_{k\lambda'}) = 0$ , encontramos

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\lambda'} (\dot{\vec{x}}^\pm(\tau) \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda}) (\dot{\vec{x}}^\pm(\tau') \cdot \hat{\epsilon}_{k\lambda'}) &= \sum_{\lambda\lambda'} \dot{\vec{x}}^\pm(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^\pm(\tau') \delta_{\lambda\lambda'} \\
&= \sum_{\lambda} \dot{\vec{x}}^\pm(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^\pm(\tau') \\
&= 2 \dot{\vec{x}}^\pm(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^\pm(\tau')
\end{aligned} \tag{6.28}$$

onde  $\sum_{\lambda} = 2$ , já que as polarizações são equivalentes. Podemos, então, escrever  $\mathcal{F}[\vec{x}^+, \vec{x}^-]$  como

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\vec{x}^+, \vec{x}^-] = & \exp\left\{-\int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' \sum_k \frac{e^2}{\hbar k L^3} \times \right. \\
& [\dot{\vec{x}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^+(\tau') e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau) + i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau')} G_k^{++}(\tau - \tau') + \\
& \dot{\vec{x}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^-(\tau') e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau) + i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau')} G_k^{--}(\tau - \tau') + \\
& \dot{\vec{x}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^+(\tau') e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau) + i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau')} G_k^{-+}(\tau - \tau') + \\
& \left. \dot{\vec{x}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^-(\tau') e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}^+(\tau) + i\vec{k} \cdot \vec{x}^-(\tau')} G_k^{+-}(\tau - \tau') \right] \}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

considerando (6.22),(6.23),(6.24) e (6.25).

As funções de Green em (6.29) podem ser escritas como as que foram apresentadas no final do capítulo três, com

$$G_k^<(\tau - \tau') = \frac{i}{2\omega_k} [e^{i\omega_k(\tau - \tau')}(1 + \eta_k) + e^{-i\omega_k(\tau - \tau')}\eta_k], \quad (6.30)$$

$$G_k^>(\tau - \tau') = \frac{i}{2\omega_k} [e^{-i\omega_k(\tau - \tau')}(1 + \eta_k) + e^{i\omega_k(\tau - \tau')}\eta_k] \quad (6.31)$$

sendo  $\eta_k = (e^{\beta\hbar\omega_k} - 1)^{-1}$  o número de ocupação. Logo, o funcional gerador  $Z[j]$  fica

$$Z[j] = \frac{1}{tr\rho(t_i)} \int d\vec{x} d\vec{y} \rho_e(\vec{x}, \vec{y}, t_i) \tilde{Z}[j] \quad (6.32)$$

onde

$$\tilde{Z}[j] = \int \mathcal{D}\vec{x}^+(\tau) \mathcal{D}\vec{x}^-(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}^+, \vec{x}^-]} \quad (6.33)$$

com

$$\begin{aligned} S[\vec{x}^+, \vec{x}^-] &= \int_{-\infty}^t d\tau \left\{ \frac{m}{2} [\dot{\vec{x}}^{+2}(\tau) - \dot{\vec{x}}^{-2}(\tau)] - \vec{j}(\tau) \cdot [\dot{\vec{x}}^+(\tau) - \dot{\vec{x}}^-(\tau)] \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^t d\tau' \sum_k \frac{e^2}{L^3} [\dot{\vec{x}}^a(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^b(\tau')] e^{i\vec{k} \cdot [\vec{x}^a(\tau) + \vec{x}^b(\tau')]} G_k^{ab}(\tau - \tau') \right\} \end{aligned} \quad (6.34)$$

com  $a, b = +, -$ .

Para estudarmos a dinâmica da carga interagindo com o seu campo de radiação, precisamos encontrar a equação de movimento que rege o seu movimento após computado a interação. Isto é feito extremizando-se à ação (6.34) em relação a  $\vec{x}^\pm(\tau)$ , obtendo equações de movimento acopladas entre  $\vec{x}^+(\tau)$  e  $\vec{x}^-(\tau)$ .

Para evitarmos este tipo de equação de movimento, vamos considerar a seguinte aproximação

$$e^{i\vec{k} \cdot [\vec{x}^a(\tau) + \vec{x}^b(\tau')]} \approx 1 \quad (6.35)$$

Neste caso, o funcional de influência (6.29) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vec{x}^+, \vec{x}^-] = & \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' \sum_k \frac{e^2}{L^3} [\dot{\vec{x}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^+(\tau') G_k^{++}(\tau - \tau') + \right. \\ & + \dot{\vec{x}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^-(\tau') G_k^{+-}(\tau - \tau') + \dot{\vec{x}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^-(\tau') G_k^{--}(\tau - \tau') + \\ & \left. + \dot{\vec{x}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{x}}^+(\tau') G_k^{-+}(\tau - \tau')\right\}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

A equação de movimento da carga pode ser obtida fazendo  $\vec{x}^\pm(t) = \vec{q}(t) + \vec{\xi}^\pm(t)$  e considerando  $\langle \vec{\xi}^\pm(t) \rangle = 0$  em todas as ordens em teoria de perturbação. Fazendo a mudança em  $\vec{x}^\pm(t)$  no funcional de influência,  $\mathcal{F}[\vec{x}^+, \vec{x}^-]$ , fica

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vec{q} + \vec{\xi}^\pm] = & \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' \sum_k \frac{2e^2}{L^3} [\dot{\vec{\xi}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{q}}(\tau') G_k^{++}(\tau - \tau') + \right. \\ & + \dot{\vec{\xi}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{q}}(\tau') G_k^{+-}(\tau - \tau') + \dot{\vec{\xi}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{q}}(\tau') G_k^{--}(\tau - \tau') + \\ & \left. + \dot{\vec{\xi}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{q}}(\tau') G_k^{-+}(\tau - \tau')\right\} \\ & \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' \sum_k \frac{2e^2}{L^3} [\dot{\vec{\xi}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{\xi}}^+(\tau') G_k^{++}(\tau - \tau') + \right. \\ & + \dot{\vec{\xi}}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{\xi}}^-(\tau') G_k^{+-}(\tau - \tau') + \dot{\vec{\xi}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{\xi}}^-(\tau') G_k^{--}(\tau - \tau') + \\ & \left. + \dot{\vec{\xi}}^-(\tau) \cdot \dot{\vec{\xi}}^+(\tau') G_k^{-+}(\tau - \tau')\right\} \end{aligned} \quad (6.37)$$

considerando (6.26) e sabendo que  $G_k^{+-}(\tau - \tau') = G_k^{-+}(\tau' - \tau)$ . Agora, impondo a condição  $\langle \xi^+(t) \rangle$  considerando até a segunda ordem na teoria de perturbação, obtemos a seguinte equação de movimento

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t d\tau' \langle \vec{\xi}^+(\tau) \cdot \dot{\vec{\xi}}^+(\tau') \rangle \{m \dot{\vec{q}}(\tau) + \int_{-\infty}^t d\tau'' \Gamma(\tau' - \tau'') \dot{\vec{q}}(\tau'')\} + \\ + \langle \vec{\xi}^+(\tau) \dot{\vec{\xi}}^+(\tau') \rangle \vec{j}(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau' - \tau'') = & \frac{2e^2}{L^3} \sum_k [G_k^{++}(\tau' - \tau'') + G_k^{+-}(\tau' - \tau'')] \\ = & \frac{2e^2}{L^3} \sum_k \frac{\sin[\omega_k(\tau' - \tau'')]}{\omega_k} \theta(\tau' - \tau''), \end{aligned} \quad (6.39)$$

de acordo com (6.22) e (6.24).

Calculando a integral em  $\tau'$  por partes em (6.38), obtemos

$$m \dot{\vec{V}}(\tau) + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \Sigma(\tau - \tau') \vec{V}(\tau') = \vec{j}(\tau) \quad (6.40)$$

onde

$$\Sigma(\tau - \tau') = \frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma(\tau - \tau'). \quad (6.41)$$

Usando a equação (6.39) encontramos para  $\Sigma$

$$\Sigma(\tau - \tau') = \frac{2e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \cos[\omega_{\mathbf{k}}(\tau - \tau')] \theta(\tau - \tau') + \frac{\sin[\omega_{\mathbf{k}}(\tau - \tau')]}{\omega_{\mathbf{k}}} \delta(\tau - \tau') \right\}. \quad (6.42)$$

Agora, integrando  $\Sigma$  para  $t < 0$  temos

$$\int_{-\infty}^t dt' \Sigma(t - t') = 0, \quad (t < 0) \quad (6.43)$$

na aproximação adiabática.

Como consequência deste fato, ao ligarmos um campo elétrico externo uniforme em  $t = 0$ , e supondo que a carga esteja viajando com uma velocidade constante  $\vec{v}_0$  para  $t < 0$ , após ligarmos o campo elétrico externo, a carga será acelerada, porém irá também irradiar transferindo energia para os fótons irradiados, levando ao processo de dissipação. Escrevendo a velocidade da carga como  $\vec{V}(t) = \vec{v}_0 + \vec{v}(t)$ , temos

$$m \dot{\vec{v}}(\tau) + \int_0^{\tau} d\tau' \Sigma(\tau - \tau') \vec{v}(\tau') = \vec{j}(\tau) \quad (6.44)$$

considerando (6.43).

A solução da equação de movimento pode ser encontrada via transformada de Laplace da velocidade, auto energia do kernel e da corrente em termos da variável de Laplace  $s$ ,  $\tilde{\vec{v}}(s)$ ,  $\tilde{\Sigma}(s)$  e  $\tilde{\vec{j}}(s)$  respectivamente, e cuja solução é

$$\tilde{\vec{v}}(s) = \frac{\vec{v}_0 + (\tilde{\vec{j}}(s)/m)}{s + \frac{1}{m} \tilde{\Sigma}(s)} \quad (6.45)$$

A evolução de tempo real pode ser encontrada por meio da transformada de Laplace inversa

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{st} \vec{v}(s) ds \quad (6.46)$$

onde a curva  $c$  é o contorno de Bromwich, que se situa no eixo imaginário à direita de todas as singularidades de  $\vec{v}(s)$  no plano complexo  $s$ . Precisamos então entender a estrutura analítica de  $G(s) \equiv \left(s + \frac{1}{m} \tilde{\Sigma}(s)\right)^{-1}$  para obter a dinâmica em tempo real. De (6.39) e (6.41) temos

$$\tilde{\Sigma}(s) = s\tilde{\Gamma}(s) \quad (6.47)$$

$$\tilde{\Gamma}(s) = \frac{2e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{s^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2} \quad (6.48)$$

onde  $\tilde{\Gamma}(s)$  é a transformada de Laplace de  $\Gamma(\tau - \tau')$ .

A presença de um coeficiente de amortecimento estático é revelado por um polo em  $G(s)$  com uma parte real negativa, pois isto se transforma em uma exponencial de relaxação da velocidade, como ocorre por exemplo no caso do oscilador harmônico amortecido.

Na ausência de interação,  $G(s)$  tem um polo simples em  $s = 0$ , ou seja o coeficiente de amortecimento estático anula-se ( $\tilde{\Sigma}(s) = 0$ ), o que equivale ao comportamento do sistema, equação (6.46), para tempos muito grandes ( $t \rightarrow \infty$ ). Isto é consistente com as discussões de Jackson [1] sobre um elétron acelerado, onde ele conclui que o efeito do amortecimento é relevante para intervalos curtos de tempo ( $\sim 10^{-24}$ s para o elétron).

Uma outra forma importante e muito utilizada no estudo da dinâmica de não equilíbrio de uma partícula acoplada a um meio dissipativo, consiste em encontrarmos uma equação de movimento tipo equação de Langevin para a partícula que incorpore os efeitos do meio. Esta interação introduz um termo de dissipação e um termo estocástico na equação de movimento, ambos relacionados pelo teorema de flutuação-dissipação.

A descrição da dinâmica de não-equilíbrio de um sistema por meio da equação de Langevin pode ser visto nos trabalhos apresentados por Caldeira e Leggett [18], Lee e Boyanovsky [21], entre outros. Nestes casos o ponto de partida é a aplicação do método de Feynman e Vernon [19] para o cálculo do funcional gerador obtendo naturalmente a equação de Langevin semi-clássica.

O primeiro passo já foi dado, calculamos o funcional gerador para as coordenadas da carga



integrando sobre os graus de liberdade dos fótons e encontramos (6.33) e, se considerarmos novas coordenadas, as coordenadas do centro de massa e relativas,  $\vec{r}$  e  $\vec{R}$  respectivamente, definidas como

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}[\vec{x}^+(t) + \vec{x}^-(t)], \quad (6.49)$$

$$\vec{R}(t) = \vec{x}^+(t) - \vec{x}^-(t), \quad (6.50)$$

encontramos

$$\tilde{Z}[j] = \int D\vec{r}(t) D\vec{R}(t) e^{i\tilde{S}[\vec{r}, \vec{R}]} \mathcal{F}[\vec{r}, \vec{R}] \quad (6.51)$$

com

$$\tilde{S}[\vec{r}, \vec{R}] = \int_{-\infty}^t \{m \dot{\vec{R}}(\tau) \cdot \dot{\vec{r}}(\tau) - \vec{j}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)\} d\tau \quad (6.52)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vec{r}, \vec{R}] = & \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' \sum_k \frac{e^2}{L^3} \times \right. \\ & \left[ \frac{\dot{\vec{R}}(\tau) \cdot \dot{\vec{R}}(\tau')}{4} (G_k^{++}(\tau) + G_k^{--}(\tau) - G_k^{+-}(\tau) - G_k^{-+}(\tau)) \right. \\ & + \frac{\dot{\vec{R}}(\tau) \cdot \dot{\vec{r}}(\tau')}{2} (G_k^{++}(\tau) - G_k^{--}(\tau) + G_k^{+-}(\tau) - G_k^{-+}(\tau)) \\ & \left. \left. + \frac{\dot{\vec{r}}(\tau) \cdot \dot{\vec{R}}(\tau')}{2} (G_k^{++}(\tau) - G_k^{--}(\tau) - G_k^{+-}(\tau) + G_k^{-+}(\tau)) \right] \right\}, \quad (6.53) \end{aligned}$$

onde  $G_k^{ab}(\tau) = G_k^{ab}(\tau - \tau')$  e considerando (6.26). De acordo com (6.30), (6.31) e as funções de Green  $G_k^{ab}$  dadas no final do capítulo três, encontramos

$$\begin{aligned} G_k^{++}(\tau) + G_k^{--}(\tau) - G_k^{+-}(\tau) - G_k^{-+}(\tau) &= 2[G_k^>(\tau) + G_k^<(\tau)], \\ G_k^{++}(\tau) - G_k^{--}(\tau) + G_k^{+-}(\tau) - G_k^{-+}(\tau) &= 2[G_k^>(\tau) - G_k^<(\tau)]\theta(\tau), \\ G_k^{++}(\tau) - G_k^{--}(\tau) - G_k^{+-}(\tau) + G_k^{-+}(\tau) &= 2[G_k^<(\tau) - G_k^>(\tau)]\theta(-\tau). \quad (6.54) \end{aligned}$$

onde

$$G_k^>(\tau) + G_k^<(\tau) = \frac{i \cos[\omega_k(\tau - \tau')]}{\omega_k} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2}\right) \quad (6.55)$$

e

$$G_k^>(\tau) - G_k^<(\tau) = \frac{\sin[\omega_k(\tau - \tau')]}{\omega_k}. \quad (6.56)$$

Agora, trocando  $\tau \longleftrightarrow \tau'$  no terceiro termo em (6.53) considerando (6.55) e (6.56), o funcional de influência fica

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vec{r}, \vec{R}] = & \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' [\vec{R}(\tau) \cdot \gamma_I(\tau - \tau') \dot{\vec{r}}(\tau') + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \ddot{\vec{R}}(\tau) \cdot \gamma(\tau - \tau') \ddot{\vec{R}}(\tau')\right\} \end{aligned} \quad (6.57)$$

com

$$\gamma_I(\tau - \tau') = \frac{2e^2}{L^3} \sum_k \frac{\sin[\omega_k(\tau - \tau')]}{\omega_k} \theta(\tau - \tau') \quad (6.58)$$

e

$$\gamma(\tau - \tau') = \frac{e^2}{L^3} \sum_k \frac{\cos[\omega_k(\tau - \tau')]}{\omega_k} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2}\right). \quad (6.59)$$

Integrando por partes o termo em  $\ddot{\vec{R}}$  uma vez e o termo quadrático duas vezes em  $\mathcal{F}[\vec{r}, \vec{R}]$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vec{r}, \vec{R}] = & \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^t d\tau' [\vec{R}(\tau) \cdot K_I(\tau - \tau') \dot{\vec{r}}(\tau') + \right. \\ & \left. - \frac{i}{2} \vec{R}(\tau) \cdot K(\tau - \tau') \vec{R}(\tau')\right\} \end{aligned} \quad (6.60)$$

onde

$$K_I(\tau - \tau') = \frac{\partial}{\partial \tau} \gamma_I(\tau - \tau') \quad (6.61)$$

$$K(\tau - \tau') = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \gamma(\tau - \tau'). \quad (6.62)$$

Em função das novas variáveis definidas em (6.49) e (6.50), podemos ver facilmente que o funcional de influência (6.57) tem a mesma forma obtida no caso do movimento Browniano quântico [18], exceto que o coeficiente  $\gamma_I$  apresenta efeito de memória (não-Markoviano).

Finalmente, o funcional gerador encontrado é

$$\tilde{Z}[j] = \int \mathcal{D}\vec{r}(t) \mathcal{D}\vec{R}(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}, \vec{R}]} \quad (6.63)$$

com a ação efetiva de não-equilíbrio

$$\begin{aligned} S[\vec{r}, \vec{R}] &= \int d\tau \vec{R}(\tau) \cdot [-m \ddot{\vec{r}}(\tau) - \int d\tau' K_I(\tau - \tau') \dot{\vec{r}}(\tau') + \\ &\quad + \frac{i}{2} \int d\tau' K(\tau - \tau') \vec{R}(\tau') - \vec{j}(\tau)] \end{aligned} \quad (6.64)$$

onde  $K_I(\tau - \tau')$  e  $K(\tau - \tau')$ , de acordo com (6.58) e (6.59), é dado por

$$\begin{aligned} K_I(\tau - \tau') &= \frac{2e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \cos[\omega_{\mathbf{k}}(\tau - \tau')] \theta(\tau - \tau') + \frac{\sin[\omega_{\mathbf{k}}(\tau - \tau')]}{\omega_{\mathbf{k}}} \delta(\tau - \tau') \right\} \\ &= \Sigma(\tau - \tau') \end{aligned} \quad (6.65)$$

onde o segundo termo anula-se em (6.64), e

$$K(\tau - \tau') = \frac{e^2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \cos[\omega_{\mathbf{k}}(\tau - \tau')] \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2}\right). \quad (6.66)$$

Dando uma interpretação probabilística para a integral funcional em (6.63), temos

$$e^{-\frac{1}{2\hbar} \int d\tau \int d\tau' \vec{R}(\tau) \cdot K(\tau - \tau') \vec{R}(\tau')} = C(t) \int \mathcal{D}\zeta e^{-\frac{\hbar}{2} \int d\tau \int d\tau' \vec{\zeta}(\tau) \cdot K^{-1}(\tau - \tau') \vec{\zeta}(\tau')} + \frac{i}{\hbar} \int d\tau \vec{\zeta}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau) \quad (6.67)$$

onde  $C(t)$  é um fator multiplicativo irrelevante, podendo escrever o funcional gerador em uma formulação probabilística, como

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[j] &= \int \mathcal{D}\vec{r}(\tau) \mathcal{D}\vec{R}(\tau) \mathcal{D}\vec{\zeta}(\tau) P[\vec{\zeta}] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d\tau \vec{R}(\tau) \cdot [-m \ddot{\vec{r}}(\tau) + \right. \\ &\quad \left. - \int d\tau' K_I(\tau - \tau') \dot{\vec{r}}(\tau') + \vec{\zeta}(\tau) - \vec{j}(\tau)] \right\}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

onde a distribuição de probabilidade do ruído estocástico,  $P[\vec{\zeta}]$ , é dada por

$$P[\vec{\zeta}] = \int \mathcal{D}\vec{\zeta} \exp\left\{ -\frac{\hbar}{2} \int d\tau \int d\tau' \vec{\zeta}(\tau) \cdot K^{-1}(\tau - \tau') \vec{\zeta}(\tau') \right\}. \quad (6.69)$$

Nesta aproximação encontramos que o ruído é Gaussiano e aditivo com a função correlação dada por

$$\langle \vec{\zeta}(\tau) \cdot \vec{\zeta}(\tau') \rangle = \hbar K(\tau - \tau'). \quad (6.70)$$

A equação de Langevin semi-clássica é obtida extremizando-se a ação em (6.68) em relação a  $\vec{R}(\tau)$

$$m \ddot{\vec{r}}(\tau) + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \Sigma(\tau - \tau') \dot{\vec{r}}(\tau') + \vec{j}(\tau) = \vec{\zeta}(\tau). \quad (6.71)$$

Esta é uma típica equação de Langevin. Porém, não é a única equação de evolução para a carga, podemos por exemplo fazer derivadas funcionais em relação a  $\vec{r}(\tau)$  e ao termo de ruído  $\vec{\zeta}(\tau)$ .

Podemos ver a partir de (6.65) e (6.66) que  $K_I(\tau - \tau')$  é não-Markoviano, isto é, tem efeito de memória e a função correlação  $K(\tau - \tau')$ , assim como no caso do movimento Browniano quântico [18], não é uma função delta. Como consequência deste fato a função correlação do ruído sob certas condições pode ser escrita como a função correlação de forças clássicas

$$\langle \vec{\zeta}(\tau) \cdot \vec{\zeta}(\tau') \rangle \equiv 2\eta kT \delta(\tau - \tau'),$$

no limite clássico de  $kT \gg \hbar\omega_k$ , mostrado por Caldeiras e Leggett [18]. E finalmente vemos que se tomarmos a média de (6.71) com a distribuição de probabilidade  $P[\vec{\zeta}]$  obtemos a equação de movimento (6.40) na coordenada da partícula.

## Capítulo 7

# Conclusões

Calculamos o funcional gerador para a carga fazendo o traço parcial sobre os graus de liberdade dos fótons sem qualquer aproximação, obtendo as funções de Green da carga fazendo derivadas em relação as fontes. Uma característica importante deste funcional gerador é a equivalência com o funcional gerador do oscilador harmônico com fontes.

Com uma aproximação em primeira ordem nos modos do campo, para evitarmos equações de movimento acopladas, obtemos a equação de movimento em tempo real envolvendo um kernel de auto-energia não-Markoviano e um coeficiente de amortecimento estático relevante apenas em intervalos curtos de tempo.

A equação de Langevin é obtida definindo novas variáveis para o funcional gerador, que passa a ter a mesma forma obtida para o movimento Browniano. Nós obtemos a função correlação do ruído que satisfaz o limite clássico, um coeficiente de amortecimento não-Markoviano que não depende da temperatura do campo e um ruído Gaussiano e aditivo.

# Bibliografia

- [1] J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica* (Guanabara Dois, Rio, 1983).
- [2] R. Becker, *Eletromagnétic Fields and Interactions* (Blaisdell Publishing Co., new York, 1965).
- [3] H.A. Lorentz, *The theory of electrons* (Dover, New York, 1952).
- [4] J.L. Jiménez and I. Campos, *Am.J.Phys.* **55**, 1017 (1987).
- [5] P.A.M. Dirac, *Proc.Roy.Soc. London* **A167**, 148 (1938).
- [6] F.V. Hatermann and N.C. Luhmann, *Phys.Rev.Lett.* **74**, 1107 (1995).
- [7] J.Schwinger, *J.Math.Phys.* **2**, 407 (1961).
- [8] N.P. Landsman and C.G. van Weert, *Phys.Rep.* **145**, 141 (1987).
- [9] A. Niemi and G. Semenoff, *Ann.of Phys.* **152**, 105 (1984);
- [10] E. Calzetta, *Ann.of Phys.* **190**, 32 (1989).
- [11] E. Calzetta and B.L. Hu, *Phys.Rev.* **D35**, 195 (1987); *Phys.Rev.* **D37**, 2878 (1988); *Phys. Rev.* **D40**, 656 (1989).
- [12] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass, 1950).
- [13] L.I. Schiff, *Quantum mechanics* (Mc Graw-Hill, New York, 1968).
- [14] A.H. Castro Neto and A.O. Caldeira, *Phys.Rev.* **B46**, 8858 (1992).
- [15] A.H. Castro Neto and A.O. Caldeira, *Phys.Rev.* **E48**, 4037 (1993).

- [16] A.H. Castro Neto and A.O. Caldeira, *Phys.Rev.Lett.* **67**, 1960 (1991).
- [17] A.H. Castro Neto and A.O. Caldeira, *Phys.Rev.* **A42**, 6884 (1990).
- [18] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, *Physica* **A121**, 587 (1983).
- [19] R.P. Feynman and F.L. Vernon, Jr., *Ann. of Phys.* **24**, 118 (1963).
- [20] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, *Ann. of Phys.* **149**, 374 (1985).
- [21] Da-Shin Lee and Daniel Boyanovsky, *Nucl. Phys.* **B406**[FS], 631 (1993).
- [22] V. Hakin and V. Ambegaokar, *Phys. Rev.* **A32**, 423 (1985).
- [23] C.M. Smith and A.O. Caldeira, *Phys. Rev.* **A36**, 3509 (1987).
- [24] P.M.V.B. Barone and A.O. Caldeira, *Phys. Rev.* **A43**, (1991).

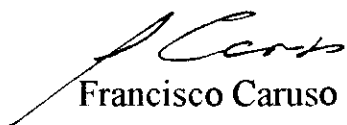
**“ESTUDO DO AMORTECIMENTO RADIATIVO NO  
FORMALISMO DE TEMPO REAL ”**

*Albert Carlo Rodrigues Mendes*

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Flávio Iassuo Takakura - Presidente



Francisco Caruso Neto



José Abdalla Helayël-Neto

Rio de Janeiro, 03 de Dezembro de 1998