TESE DE
MESTRADO

Soluções solitônicas nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda

H. Belich Jr.

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 1997.

Dedicatória

À minha mãe, minhas irmãs, e Tânia.

Agradecimentos

- Ao CNPq pela bolsa de Mestrado;
- Ao CFC e à Mirian, pela simpatia e atenção dispensados aos alunos;
- Aos Companheiros Guilhermo Cuba, e Marcelo (M. C. Lima) pelas agradáveis e esclarecedoras discussões em Física, e pelo apoio nas horas difíceis;
- Ao amigo Rodolfo Casana, pelos "pepinos"resolvidos com o LATEX;
- Ao Prof. José Abdalla Hellayël–Neto, por seu empenho na formação dos alunos do CBPF, particularmente, por seu constante apoio, e pela revisão de minha tese;
- A meu amigo e orientador Prof. Roman R. Paunov, pelos conhecimentos transmitidos, por seu incentivo e solidariedade, pela paciência, e pelas agradáveis discussões regadas por uma boa cerveja;
- Aos amigos do quinto andar: Renato, Guilherme; Vitório, Paulo, Ronaldo, Marta, Alexandre, Marco Flores, Marco Morales, Susana, Armando, Gino, German e Ada, pelo incentivo e amizade.
- Aos amigos do terceiro andar: Winder, Hugo, Daniel, Júlio, Cristine, Danilo, Felipe, Álvaro, e Carmen, pela atenção e amizade;
- Ao Prof. Duarte, pelas discussões do rumo da História;

- À minha mãe, Márcia e Luigi, Ilca e Renato, pelo apoio;

- À Tania, pelo amor, dedicação e paciência.

Resumo

Usando um procedimento alternativo ao método de Hirota, são construídas as soluções solitônicas nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda. Este método permite calcular as soluções do problema linear subjacente ligadas aos N–sólitons. Com isto obtêm-se expressões explícitas para o elemento, que através da ação do grupo de vestimento, cria uma solução geral com N sólitons. No caso particular de monossólitons, encontra–se a relação entre este formalismo e aquele dos operadores-de-vértice, usado por Olive, Turok e Underwood. Os resultados desta tese podem ser considerados, também, como uma generalização do procedimento usado por Babelon e Bernard para tratar sólitons no modelo de sine–Gordon.

Summary

We present an elementary derivation of the soliton–like solutions in the $A_n^{(1)}$ Toda models which is alternative to the previously used Hirota method. The solutions of the underlying linear problem corresponding to the N–solitons are calculated. This enables us to obtain explicit expression for the element which by dressing group action, produces a generic soliton solution. In the particular example of monosolitons we suggest a relation to the vertex operator formalism, previously used by Olive, Turok and Underwood. Our results can also be considered as generalization of the approach to the sine–Gordon solitons, proposed by Babelon and Bernard.

Índice

Introdução

Desde a intrigante descoberta de J. Scott Russell [1] de ondas solitárias que se propagam sem mudança de forma e velocidade num canal estreito, e a proposição de uma equação, por Korteweg e de Vries [2], para descrever este fenômeno, conseguiu-se evoluir até o conhecimento de uma ampla classe de equações de evolução não-lineares com soluções localizáveis e estáveis. Zabusky e Kruskal [3], no caso particular da equação de Korteweg e de Vries (KdV), observaram que a interação entre as ondas solitárias, a qual chamaram sólitons, é elástica: após a colisão, os sólitons separam-se sem mudança de velocidade. O marcante trabalho de Gardner, Greene, Kruskal e Miura [4] deu início a um método, atualmente conhecido como Método do Espalhamento Inverso (MEI), para análise de equações solitônicas. A idéia proposta na ref. [4] era a de se considerar a evolução dos dados de espalhamento de um certo operador, chamado de operador de Lax [5], cujo espectro não muda com o tempo. Observou-se que estes dados de espalhamento desempenham o papel de variáveis de ação – ângulo. A existência de tais variáveis é garantida, através do teorema de Liouville, pela presença de cargas conservadas mutuamente comutantes, no sentido dos parênteses de Poisson.

O MEI, originalmente desenvolvido para se tratar a equação KdV, foi, em seguida, aplicado ao modelo sine-Gordon (sG) no trabalho [6]. Seguindo idéias desenvolvidas anteriormente, Zakharov e Shabat aplicaram o MEI à equação não-linear de Schrödinger [7]. Desta maneira surgiu a noção das hierarquias integráveis de Ablowitz, Kaup, Newell e Segur (AKNS). Uma característica comum destas hierarquias é que todas elas admitem uma representação de curvatura nula para uma certa conexão na algebra de Lie $sl(2)$. Omitindo-se várias outras importantes contribuições na literatura existente, poder–se–ia mencionar que o MEI, aplicado às eq.s do tipo AKNS, encontra–se descrito em detalhes nas monografias [8, 10]. A observação importante neste procedimento é que, como conseqüência das equações de movimento admitirem a representaçãode Lax, as variáveis dinâmicas originais são transformadas, através da transformação espectral direta, no conjunto de dados de espalhamento do problema linear auxiliar. Graças à integrabilidade, a evolução temporal dos dados de espalhamento pode ser resolvida explicitamente. Para se recuperar as variáveis originais, utiliza–se a assim–dita transformação espectral inversa. Para dados de espalhamento gerais, esta transformação realiza–se através da resolução das equações de Gelfand–Levitan–Marchenko, ou do problema de fatorização de Riemann–Hilbert. No caso em que o coeficiente de reflexão se anula, a transformação espectral inversa reduz–se à solução de um sistema álgebrico linear. Na liguagem do MEI, os sólitons correspondem aos potenciais sem reflexão.

Na literatura física, existe uma noção mais ampla de sólitons [9, 11]. Substancialmente na teoria de campos, eles correspodem a excitações de campo localizáveis e que apresentam quantidades físicas finitas. Além disso, observa–se que são encontrados nas teorias onde o estado de energia mínima é degenerado. Uma outra característica notável dos sólitons em teorias físicas é que eles possuem propriedades topológicas não–triviais. O interesse das configurações solitônicas na teoria quântica de partículas surgiu devido a dificuldades encontradas no método perturbativo. Foram desenvolvidos vários procedimentos para se tratar os graus de liberdade não–perturbativos em diferentes dimensões [12, 14] (existe também uma série de artigos [15] que associam idéias da física matemática e conceitos adotados em teoria de campos). Em particular, Coleman [14] observou que, em duas dimensões, existe uma dualidade entre os sólitons do modelo sG e as partículas fundamentais do modelo massivo de Thirring. Omitindo-se uma série de importantes contribuições, nota-se o recente desenvolvimento dado por Seiberg e Witten [16] no âmbito da dualidade. A idéia básica destes autores foi propor uma transformação, chamada de dualidade, que mapeia as partículas perturbativas de um modelo nas partículas não perturbativas de outra teoria (chamada dual) , e vice–versa.

Voltando ao MEI, que considera os sólitons como solução de equações de evolução não–lineares integráveis que se espalham elasticamente, nota-se que este método possui uma generalização quântica. O Método do Espalhamento Inverso Quântico (MEIQ) foi desenvolvido pelo grupo de Leningrado [17]. Neste trabalho o MEIQ foi aplicado ao modelo sG para estabelecer a sua integrabilidade também a nível quântico. Uma descoberta importante catalizada pelo MEIQ foi a dos denominados grupos quânticos [18]. O modelo sG quântico foi analisado por Zamolodchicov e Zamolodchicov [19], do ponto–de–vista do método "bootstrap" , para se obter expressões exatas para as matrizes de espalhamento quânticas no caso de sólitons. Lembremos que graças à integrabilidade quântica, estas matrizes podem ser colocadas sob a forma de produto de fatores que descrevem a interação entre duas partículas. Um outro passo importante [20, 21] foi o de interpretar certos modelos quânticos integráveis em $(1+1)$ dimensões como deformações massivas dos modelos conformes minimais [22].

Nesta tese consideramos o estudo das soluções soliotônicas nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda. Estes modelos constituem exemplos de teorias de campo integráveis em $(1+1)$ dimensões. As equações de Toda [23] possuem representação de Lax [24] e, graças a existência da matriz r clássica, são integráveis. Nos trabalhos [24] uma outra idéia impotante foi proposta: usar matrizes de Cartan generalizadas para se obter equações de movimento integráveis. Em particular, as teorias de Toda afins correspodem às matrizes de Cartan estendidas das álgebras de Lie simples. As matrizes extendidas de Cartan são obtidas das matrizes de Cartan acrescentando–se a raiz estendida, que é igual ao oposto da raiz maximal. Drienfeld e Sokolov [25] propuseram um método alternativo, que se baseia no estudo das propriedades das conexões de Lax, que têm forma especial. As idéias de [25] foram usadas em [26] para construir hierarquias generalizadas de Drienfeld–Sokolov. A idéia crucial nos trabalhos [25, 26], foi que, após uma apropriada transformação de calibre, as componentes da conexão de Lax pertencem a uma sub–álgebra comutativa. Isto garante a existência de um número infinito de cargas conservadas. Um procedimento semelhante, aplicado aos modelos de Toda afins, foi realizado em [27].

O grupo de vestimento é uma simetria especial das equações de evolução integráveis [28], e admite uma interpretação muito elegante na linguagem das funções–tau [29]. As transformações de vestimento, como transformações de calibre, operam sobre as componentes da conexão de Lax, sem alterar a forma dos mesmos [30]. Por isto, o grupo de vestimento é uma simetria (não–local) do espaço de fase do modelo correspondente. Para assegurar a invariância dos parênteses de Poisson, é necessário se introduzir um parêntese não trivial (chamado de parêntese de Semenov–Tian–Shansky) no grupo de vestimento [30, 31]. Nesta tese, não se discutirá este problema, devido às dificuldades encontradas com os elementos do grupo de vestimento que geram monossólitons no modelo sG [32, 33]. Notemos, também, que o grupo de vestimento aparece como limite quase–clássico da simetria quântica do modelo integrável [31]. Recentemente, a simetria de vestimento foi usada [34] para se tratar uma ampla classe de hierarquias integráveis que possuem soluções correspondentes ao estado de vácuo.

As soluções solitônicas nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda foram descobertas por Hollowood [35]. Neste trabalho, o método de Hirota foi usado para se obter sólitons. Hollowood fez também uma outra observação importante: é necessário, para que as cargas topológicas e físicas sejam bem–definidas, que a constante de acoplamento seja imaginária. Mais tarde, ficou claro que o método de Hirota pode também ser usado para produzir soluções solitônicas nos modelos de Toda afins baseados numa álgebra de Lie simples arbitrária [36].

A relação entre sólitons e elementos especiais (chamados de operadores de vértice) das álgebras de Kac–Moody foi esclarecida nos trabalhos [37]. Uma propriedade interessante deste formalismo é a possibilidade de se poder generalizá–lo para se obter sólitons nos modelos de Toda baseados nas chamadas álgebras de Kac–Moody com twist [38]. O interesse atual dos sólitons nos modelos afins de Toda é justificado por sua relação com os modelos integráveis de N corpos com invariância relativística [39]. Foi observado na literatura [40] que as soluções solitônicas e quase–periódicas nos modelos afins de Toda são ligadas à teoria de dualidade de Seiberg e Witten [16]. Mais precisamente, a dinâmica das teorias de Yang–Mills com supersimetria $N = 2$ é determinada por uma superfície de Riemman. Por outro lado, esta superfície aparece como curva espectral que corresponde a uma solução quase–periódica num modelo de Toda afim apropriado.

A organização desta tese é dada a seguir: o Capítulo 1, além de uma introdução às álgebras de Lie $sl(n+1)$ às álgebras de laços $\widetilde{sl}(n+1)$ e à graduação principal, apresenta um método complementar ao método de Hirota para se construir soloções solitônicas. O nosso método generaliza o esquema adotado por Date [41]. Neste último trabalho, as soluções solitônicas foram obtidas para as equações KdV, KP, sG, Pohlmeyer–Lund–Regge e o modelo massivo de Thirring. A vantagem deste método é que permite uma generalização que produz soluções quase–periódicas.
O Capitulo 2 é dedicado ao cálculo do elemento do grupo de vestimento que gera uma solução solitônica geral a partir do vácuo. O nosso resultado generaliza o resultado obtido por Babelon e Bernard [42] no modelo de sG.

No capitulo 3 analisamos o problema da decomposição em fatores monossolitônicos de um elemento do grupo de vestimento que cria N–sólitons a partir do vácuo. Estabelecemos também a conexão com o formalismo dos operadores de vértice [37, 38]. Esta tese propõe–se a ser uma versão bastante detalhada do trabalho citado na ref. [44].

Capítulo 1

Soluções solitônicas em teorias $A_n^{(1)}$ de Toda

O problema de se encontrar soluções solitônicas nos modelos de Toda afins foi tratado anteriormente na literatura através do método de Hirota [35, 36], com o auxílio de técnicas de teoria dos grupos [37]. Soluções solitônicas somente existem para valores imaginários da constante de acoplamento. Contudo, esclareceu-se que, apesar da equação de movimento e a densidade de lagrangiano serem complexos, os sólitons carregam momentum e energia reais. As propriedades dos sistemas afins de Toda com constantes de acoplamento reais e imaginárias são estudadas pelo MEI [43]. O tratamento padrão do MEI encontra certas dificuldades, quando aplicado aos modelos afins de Toda baseados em álgebras de Lie simples. Em particular, isto acarreta que as soluções de Jost [9], e portanto os elementos da matriz de transição, perdem suas boas propriedades analíticas como funções do parâmetro espectral. Neste capítulo, generalizamos um elegante método [41] para se obter $A_n^{(1)}$–sólitons de Toda . São exploradas duas características importantes das soluções solitônicas: primeiro, devido ao anulamento dos coeficientes de reflexão do problema linear auxiliar, as soluções de Jost correspondentes são funções somente do parâmetro espectral, λ; segundo, as soluções solitônicas de Jost são determinadas univocamente pelos dados de espalhamento relacionados ao espectro discreto do operador de Lax subjacente. Aplicando –se as idéias desenvolvidas em [41] para os modelos $A_n^{(1)}$ de Toda, recuperamos as equações que descrevem o espectro discreto do problema linear correspondente, usando um automorfismo de ordem finita ,σ, de uma álgebra de Lie simples, A_n. Este automorfismo é de ordem $n+1$, e introduz a chamada *graduação principal* das álgebras de Lie Afins $A_n^{(1)}$ [45].

1.1 Álgebra de Lie $sl(n+1)$, álgebra dos laços $\widetilde{sl}(n+1)$. Graduação principal

As equações de Toda são equivalentes a uma condição de curvatura nula para uma determinada conexão, cujas componentes pertencem a uma álgebra dos laços, $\widetilde{sl}(n+1)$, na graduação principal. Começaremos introduzindo certas propriedades básicas das álgebras de Lie $sl(n+1)$, $\widetilde{sl}(n+1)$ e a noção de graduação [45, 46]. Como é bem conhecido, $sl(n+1)$ é a álgebra das matrizes $(n+1)\times(n+1)$ com traço nulo. Denotamos por E^{ij} as matrizes elementares de $E^{ij} = |i><j|$ $(i,j = 1\dots n+1)$ que satisfazem às regras de comutação da álgebra de Lie $gl(n+1)$

$$\left[E^{ij}, E^{kl}\right] = \delta^{jk}E^{il} - \delta^{il}E^{kj} \tag{1.1}$$

A subálgebra de Cartan, $\mathcal{H}$, é gerada pela combinação linear das matrizes diagonais E^{ii} $H_\xi = \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i E^{ii}$, $\sum_i \xi_i = 0$. O posto de $sl(n+1)$ é n. Para descrevar o sitema de raízes, fixamos uma base ortonormalizada, $\{e_i\}$, no espaço Euclideano n–dimensional. Então, as raízes são dadas por $\alpha_{ij} = e_i - e_j$, $i \neq j$. Como raízes simples, escolhemos o conjunto $\alpha_{ij} = e_i - e_{i+1}$, $i = 1, ..., n$. Os "step operators"satisfazem à seguinte relação de comutação:

$$
\begin{aligned}
\left[H_\xi, E^{\pm\alpha_i}\right] &= \pm\alpha_i.\xi E^{\pm\alpha_i} = \pm(\xi_i - \xi_{i+1})E^{\pm\alpha_i} \\
\left[E^{\alpha_i}, E^{-\alpha_j}\right] &= \delta_{ij} H_{\alpha_i}
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Os "step operators" restantes são obtidos tomando–se sucessivos comutadores dos "step operators" E^{α_i} e dos seus transpostos $E^{-\alpha_i}$. A raiz maximal é $\psi = \alpha_1 + ... + \alpha_n = e_1 - e_{n+1}$. Traduzindo para a linguagem dos "step operators": $\left[E^{\psi}, E^{\alpha}\right] = 0$, para qualquer "step operator"relacionado a uma raiz positiva α. Nota–se também que $E^{\psi} = E^{1n+1}$. Introduz–se ainda a raiz estendida, $\alpha_0 = -\psi$, e seu "step operator" , $E^{\alpha_0} = E^{n+11}$.

Relembremos alguns fatos sobre os automorfismos internos de ordem finita das álgebras de Lie simples. Há um teorema geral devido a Kac [45] (para uma rápida revisão, pode–se ver também [26]) afirmando que "automorfismos internos de ordem finita de uma álgebra de Lie simples, $\mathcal{G}$, são parametrizados por $(r+1)$ inteiros positivos primos entre si, em que r significa o posto da álgebra de Lie". Portanto, precisamos de um automorfismo interno especial σ, de $\mathcal{G} = sl(n+1)$, cuja ordem é $n+1$, $\sigma^{n+1} = 1$. Para defini–lo, convém recordar que os pesos fundamentais, λ_i, são duais às raízes simples $2\frac{\alpha_i \cdot \lambda_j}{\alpha_i \cdot \alpha_i} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, r$. Especificamente, para $\mathcal{G} = sl(n+1)$ obtem–se:

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= \sum_{k=1}^{i} e_k - \frac{i}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} e_k \\
i, j &= 1, .., n
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Considera-se também os vetores no espaço das raízes,

$$
\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.4}
$$

Usando as notações acima, define–se o seguinte automorfismo interno, $X \to \sigma(X)$, das álgebras de Lie $sl(n+1)$ [37, 38, 26, 45]:

$$
\sigma(X) = SXS^{-1}
$$

$$S = e^{2\pi i \frac{H_\rho}{n+1}} \tag{1.5}$$

onde a matriz diagonal que aparece no expoente acima, $H_\rho \in \mathcal{H}$, depende linearmente do vetor ρ dado em (1.4), $H_\rho = \sum_{k=1}^{n+1} \rho_k |k><k|$; ρ_k são as componentes de (1.4) na base $\{e_i\}$ (1.3). Levando em conta (1.2), σ age diagonalmente na correspondente base de Cartan:

$$\begin{aligned}
\sigma(H_\xi) &= H_\xi \\
\sigma(E^{\alpha_{kl}}) &= \omega^{\alpha_{kl}\cdot\rho} E^{\alpha_{kl}} = \omega^{l-k} E^{\alpha_{kl}} \\
\omega &= e^{\frac{2\pi i}{n+1}} \quad ,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

de onde se torna claro que σ tem ordem $n+1$. Note que a álgebra de Lie, $\mathcal{G} = sl(n+1)$, dotada deste automorfismo torna-se uma álgebra de Lie graduada:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \oplus_{k\in\mathbb{Z}_{n+1}} \mathcal{G}_k \\
\sigma(\mathcal{G}_k) &= \omega^k \mathcal{G}_k \\
[\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_l] &\subseteq \mathcal{G}_{k+l}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Nas equações acima e nas que seguem, adotamos a seguinte convenção: a soma dos índices que assumem os valores do grupo cíclico $\mathbb{Z}_{n+1}$ é entendido como módulo $n+1$.

Há uma base alternativa em $sl(n+1)$ intimamente ligada ao automorfismo (1.5). Faremos uma breve revisão de sua construção (para maiores detalhes ver [37]). Antes de tudo, observa-se que os geradores

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i &= \sum_{k=1}^{n+1-i} E^{kk+i} + \sum_{k=1}^{i} E^{n+1+k-ik} = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_{n+1}} E^{kk+i}, \;\; i = 1, \ldots n
\end{aligned} \tag{1.8}$$

comutam mutuamente. Portanto, formam uma nova sub-álgebra de Cartan, $\mathcal{H}'$. Na segunda igualdade da equação acima, o índice de adição, $1 \leq k \leq n+1$, é visto como módulo $n+1$. Devido a (1.6), os elementos (1.8) são autovetores do automorfismo σ [1]

$$\sigma(\mathcal{E}_i) \;=\; \omega^i \mathcal{E}_i \tag{1.9}$$

Fixada a representação $(n+1)$–dimensional, não é difícil verificar que a matriz com elementos

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \omega^{(i-1)(j-1)} \\ \Omega^{-1}_{ij} &= \frac{1}{n+1}\omega^{-(i-1)(j-1)}, \;\; 1 \leq i,j \leq n+1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

diagonaliza $\mathcal{H}'$

$$\Omega^{-1}\mathcal{E}_i\Omega \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} \omega^{i(k-1)} E^{kk} \tag{1.11}$$

Através da expressão

$$S \;=\; \omega^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} \omega^{1-k} E^{kk} \tag{1.12}$$

para o operador S que implementa o automorfismo (1.5), e levando em conta (1.11), obtemos as relações

$$\Omega^{\pm 1}\mathcal{E}_k\Omega^{\mp 1} \;=\; \omega^{\mp\frac{kn}{2}} S^{\pm k} \tag{1.13}$$

Para completarmos a base alternativa, precisamos adicionar os correspondentes "step operators" à sub–álgebra de Cartan $\mathcal{H}'$. Levando em conta a forma de (1.11), vemos que

$$F^{ij} \;=\; \Omega E^{ij} \Omega^{-1}, \;\; i \neq j \tag{1.14}$$

são autovetores da ação adjunta dos geradores (1.8). Combinando a última observação com (1.9), concluímos que o automorfismo (1.5) pemuta os "step operators" (1.14).

[1] Aqui, consideramos somente a álgebra de Lie $sl(n+1)$. Para álgebras de Lie simples gerais, os autovalores do correspondente automorfismo, restritos à sub–álgebra de Cartan alternativa, são relacionados aos números de Betti.

Podemos calcular explicitamente esta ação com o auxílio de (1.13)

$$\begin{aligned}\sigma(F^{ij}) &= S\Omega E^{ij}\Omega^{-1}S^{-1} = \Omega\mathcal{E}_1 E^{ij}\mathcal{E}_n\Omega^{-1} = \\ &= \Omega E^{i-1j-1}\Omega^{-1} = F^{i-1j-1} \\ i,j &= 1,\ldots,n+1 \bmod (\mathrm{n}+1) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Da expressão acima, podemos ver que σ age sobre a base alternativa como um elemento do grupo de Weyl (mais precisamente, é um elemento de Coxeter). Contudo, é claro que a ação de σ separa o conjunto dos "step operators" (1.14) em n órbitas que não se interceptam, parametrizadas pela diferença $i-j \neq 0 \mod(\mathrm{n}+1)$ (1.15), cada uma contendo $(n+1)$ elementos. Tomando um representativo de cada σ–órbita escolhemos o seguinte conjunto de partida:

$$F^i = \Omega E^{i+11}\Omega^{-1} = F^{i+11}, \quad i = 1,\ldots n \tag{1.16a}$$

$$\left[\mathcal{E}_i, F^j\right] = (\omega^{ij}-1)F^j \tag{1.16b}$$

Introduzindo as expansões graduadas (1.7) sobre os seguintes geradores

$$\begin{aligned} F^i &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_{n+1}} F^i_k \\ \sigma(F^i_k) &= \omega^k F^i_k \end{aligned} \tag{1.17}$$

observamos que os elementos restantes na σ–órbita de F^i (1.16a) são combinação linear de F^i_k. Portanto obtém–se uma base graduada que é formada por $\mathcal{E}_i$, $i = 1\ldots n$ (1.8) e F^i_k, $i = 1,\ldots n$; $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Note que, devido a (1.9), (1.16b) e (1.17), as relações de comutação ficam:

$$\left[\mathcal{E}_i, F^j_k\right] = (\omega^{ij}-1)F^j_{k+i} \tag{1.18}$$

Começando com uma dada álgebra, $\mathcal{G}$, associa–se à mesma uma álgebra dos laços $\tilde{\mathcal{G}} = \mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]\otimes\mathcal{G}$, isto é, o conjunto de séries de Laurent, construída com um parâmetro

λ, que fará o papel de parâmetro espectral do problema linear auxiliar , com coeficientes pertencendo a $\mathcal{G}$. Em outras palavras, $\tilde{\mathcal{G}}$ é formada por elementos do tipo $X_n = \lambda^n X$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $X \in \mathcal{G}$. O comutador fica

$$[X_m, Y_n] \;=\; [X, Y]_{m+n}$$

Vamos introduzir, agora, a álgebra de Lie $\widetilde{sl}(n+1)$ na graduação principal. É gerada pelas expansões $X(\lambda) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \lambda^l X_l$, com $X_l \in sl(n+1)$, junto com a restrição

$$X(\omega\lambda) \;=\; \sigma(X(\lambda)) \;, \tag{1.19}$$

onde o automorfismo σ age sobre os coeficientes X_n, como indicado por (1.5). O operador $d = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}$ introduz uma $\mathbb{Z}$–graduação em $\tilde{\mathcal{G}} = \widetilde{sl}(n+1)$:

$$\tilde{\mathcal{G}} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{G}_n}$$
$$\left[d, \tilde{\mathcal{G}}\right] = n\widetilde{\mathcal{G}_n} \tag{1.20}$$

Comparando (1.7) com (1.19), e levando em conta a decomposição acima, conclui–se que $\mathcal{G}_k \simeq \tilde{\mathcal{G}}_{k+l(n+1)}$, para $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$ e $l \in \mathbb{Z}$. Partindo da base alternativa de $sl(n+1)$ formada por (1.8), e (1.17), obtemos uma base $\widetilde{sl}(n+1)$ na graduação principal. É formada pelos elementos $\mathcal{E}_{i+l(n+1)}$, para $i = 1, \ldots n$, $l \in \mathbb{Z}$ e $F^j_{i+l(n+1)}$, para $j = 1, \ldots n$, $i \in \mathbb{Z}_{n+1}$, $l \in \mathbb{Z}$. A sub–álgebra gerada por $\mathcal{E}_k$, $k \neq 0 \bmod (n+1)$ é uma sub–álgebra maximal Abeliana. É conhecida na literatura como a sub–álgebra principal de Heisenberg [2] Introduzindo o elemento [37, 38]

$$F^i(\mu) \;=\; \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mu^{-l} F^i_l \tag{1.21}$$

e levando em conta o comutador (1.18) e a sua extensão na álgebra dos laços, obtém–se [3]

$$[\mathcal{E}_i, F^j(\mu)] \;=\; (\omega^{ij} - 1)\mu^i F^j(\mu) \tag{1.22}$$

[2] As sub–álgebras de Heisenberg das álgebras dos laços e as álgebras de Lie afins têm um papel crucial na construção de hierarquias integráveis [25, 26].

[3] A partir de agora, faremos um abuso de notações, ou seja, os índices inferiores serão, ambos,

1.2 Construção das soluções solitônicas

Para se introduzir as equações $A_n^{(1)}$ de Toda, primeiro definimos o seguinte elemento da sub–álgebra de Cartan

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i E^{ii} \qquad \sum_i \varphi_i = 0 \tag{1.23}$$

Então, as equações $A_n^{(1)}$–afins podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2\partial_+\partial_-\Phi &= m^2\left[e^{ad\Phi}\mathcal{E}_+, e^{-ad\Phi}\mathcal{E}_-\right] \\ x^\pm &= x \pm t, \qquad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial x^\pm} \\ & e^{adX}Y = e^X.Y.e^{-X} \end{aligned} \tag{1.24}$$

onde $\mathcal{E}_\pm$ são os elementos de grau ± 1 da sub–álgebra principal de Heisenberg de $\widetilde{sl}(n+1)$. Mais precisamente, eles são "liftings"de $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_n$ (1.8) na álgebra dos laços

$$\mathcal{E}_\pm = \lambda^{\pm 1} \sum_{k\in\mathbb{Z}_{n+1}} E^{kk\pm 1} \tag{1.25}$$

Substituindo a expressão acima nas equações de movimento (1.24), e levando em conta a notação (1.23), terminamos com o sistema

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_-\varphi_i &= m^2(e^{\varphi_i-\varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-1}-\varphi_i}) \\ i &\in \mathbb{Z}_{n+1} \end{aligned} \tag{1.26}$$

É tarefa fácil verificar–se que (1.24) é equivalente à condição de curvatura nula

$$\partial_+A_- - \partial_-A_+ + [A_+, A_-] = 0 \tag{1.27}$$

de uma conexão cujos componentes pertencem à álgebra dos laços $\widetilde{sl}(n+1)$ na graduação principal:

$$A_+(x,\lambda) = 2\partial_+\Phi(x) + m\mathcal{E}_+$$

usados para indicar parâmetros discretos $\mathbb{Z}_{n+1}$, e para parametrizar os que pertencem a $\mathbb{Z}$, como introduzido em (1.20).

$$A_-(x,\lambda) \;=\; me^{-2ad\Phi(x)}\mathcal{E}_- \quad , \tag{1.28}$$

onde adotamos as abreviações $x = (x^+, x^-)$. A dependência da expressão acima em relação ao parâmetro espectral vem da dependência dos elementos da sub–álgebra principal de Heisenberg $\mathcal{E}_\pm$ em relação a λ. A condição de curvatura nula (1.27) implica que existe um vetor covariantemente constante, $w(x,\lambda)$, em relação à derivada covariante $D_\pm = \partial_\pm + A_\pm$:

$$(\partial_\pm + A_\pm(x,\lambda))w(x,\lambda) = 0 \tag{1.29}$$

Daqui em diante, vamos trabalhar com a representação definitiva de $sl(n+1)$. Visto que as componentes $A_\pm$ estão na álgebra dos laços principal $\widetilde{sl}(n+1)$ e obedecem às relações (1.19), e fazendo–se ainda uma mudança de escala do parâmetro espectral $\lambda \to \omega^{-1}\lambda$, observa–se imediatamente que (1.29) permanece invariante. Daí verifica–se que,

$$\begin{aligned} w(x,\lambda) \;&\to\; (\mathcal{S}w)(x,\lambda) \\ (\mathcal{S}w)(x,\lambda) \;&=\; Sw(x,\omega^{-1}\lambda) \quad , \end{aligned} \tag{1.30}$$

onde a matriz S implementa o automorfismo (1.5), é uma simetria do sistema linear (1.29). Esta simetria da equação acima permite que se construa uma matriz das soluções, começando com a coluna $w(x,\lambda)$

$$W(x,\lambda) \;=\; \parallel w(x,\lambda), \omega^{\frac{n}{2}}(\mathcal{S}^{-1}w)(x,\lambda)\ldots\omega^{\frac{n^2}{2}}(\mathcal{S}^{-n}w)(x,\lambda) \parallel \tag{1.31}$$

Note que a última expressão justifica a nossa escolha para se trabalhar com a representação definitiva. Visto que a ordem do automorfismo σ (1.5) é $(n+1)$, é claro que a potência $(n+1)$ do operador S (e portanto de $\mathcal{S}$ (1.30)), que realiza este automorfismo, é proporcional ao operador identidade em qualquer representação irredutível de

$sl(n+1)$. Isto limita–nos a procurar a matriz das soluções de (1.29), começando com um único vetor e usando a simetria (1.9) na representação definida, até alcançar a dimensão $(n+1)$.

Para se obter soluções solitônicas, devemos procurar soluções especiais do sistema (1.29) que admitem a expansão

$$\begin{aligned} w(x,\lambda) &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^j w^{(j)}(x) e(x,-\lambda) \\ e(x,\lambda) &= exp\{m(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda})\} \ , \end{aligned} \tag{1.32}$$

onde N é um inteiro não negativo, que será identificado com o número de sólitons, e $w^{(j)}(x)$, $j = 1, \ldots, N$, são vetores λ–independentes. Devemos impor, também, que $w^{(N)}$ seja um vetor constante com componentes unitárias

$$\begin{aligned} w^{(N)} &= \sum_{k=1}^{n+1} |k) \\ \mathcal{E}_{\pm} w^{(N)} &= \lambda^{\pm 1} w^{(N)} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Para se fixar os coeficientes restantes da expansão (1.32), devemos impor as seguintes relações sobre $w(x,\lambda)$ [41]

$$\begin{aligned} (S^{-r_j} w)(x,\mu_j) &= \omega^{-\frac{r_j n}{2}} c_j w(x,\mu_j) \\ j &= 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{1.34}$$

para determinadas constantes c_j, μ_j e parâmetros discretos (chamados de "soliton species") r_j que assumem valores *não–nulos* no grupo cíclico $\mathbb{Z}_{n+1}$. Levando em conta (1.12) e (1.30), concluímos que a equação acima pode ser igualmente escrita como

$$w_k(x,\omega^{r_j}\mu_j) = \omega^{(1-k)r_j} c_j w_k(x,\mu_j) \tag{1.35}$$

onde w_k são os componentes do vetor w

$$w = \sum_{k=1}^{n+1} w_k |k>$$

De (1.34), vemos que a matriz $W(x,\lambda)$ (1.31) é degenerada para $\lambda = \omega^k \mu_j$, onde $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$ e $j = 1, \ldots, N$. Para estes valores do parâmetro espectral, as colunas com número $1-k$ mod $(n+1)$ e $r_j + 1 - k$ mod $(n+1)$ são proporcionais.

Para demonstrar que a expressão (1.32), juntamente com (1.33) e (1.34), satisfazem a (1.29), devemos fazer a seguinte observação: supondo que $U(x,\lambda) = P_{N-1}(x,\lambda)e(x,-\lambda)$, onde $P_{N-1}(\lambda)$ é um polinômio em λ de grau menor ou igual a $(N-1)$ com valores vetoriais é uma solução de (1.34), então $U(x,\lambda)$ anula-se identicamente. Para se compreender este fato, note que, devido a (1.34), os coeficientes do polinômio P_{N-1} satisfazem a um determinado sistema linear de N equações. Para valores genéricos de μ_j, o determinante deste sistema é diferente de zero. Portanto, existe somente a solução trivial nula, $U(x,\lambda) \equiv 0$. Vamos utilizar esta observação em

$$\begin{aligned} U_+(x,\lambda) &= \partial_+ w(x,\lambda) + 2\partial_+\Phi(x) w(x,\lambda) + m\mathcal{E}_+ w(x,\lambda) \\ U_-(x,\lambda) &= \partial_- w(x,\lambda) + m e^{-2ad\Phi(x)}\mathcal{E}_- w(x,\lambda) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Como conseqüência de (1.5), (1.6), (1.9) e visto que $w(x,\lambda)$ é a solução de (1.34), verifica-se imediatamente que a expressão acima também satisfaz a (1.34). Substituindo (1.32) em (1.36), obtemos:

$$\begin{aligned} e(x,\lambda)U_+(x,\lambda) &= \lambda^N \left(2\partial_+\Phi w^{(N)} - m(1-\frac{1}{\lambda}\mathcal{E}_+)w^{(N-1)}\right) + R_{N-1}(x,\lambda) \\ e(x,\lambda)U_-(x,\lambda) &= \frac{m}{\lambda}\left(\lambda e^{-2ad\Phi}\mathcal{E}_- - 1\right) w^{(0)}(x) + S_{N-1}(x,\lambda) \quad , \end{aligned}$$

onde R_{N-1} e S_{N-1} são polinômios em λ de grau não maior que $N-1$. Para se derivar a primeira das expansões acima, temos que também usar (1.33). Portanto, $U_\pm$ anula-se identicamente, fornecendo

$$\begin{aligned} 2\partial_+\Phi w^{(N)} &= m\left(1-\frac{1}{\lambda}\mathcal{E}_+\right) w^{(N-1)} \\ \lambda e^{-2ad\Phi}\mathcal{E}_- w^{(0)}(x) &= w^{(0)}(x) \end{aligned} \tag{1.37}$$

Este método de construção de sólitons nos modelos de Toda afins é uma generalização direta do enfoque aplicado por Date [41] para o modelo sG . Levando em conta (1.8) e (1.23), pode–se escrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} \partial_+\varphi_i &= m(w_i^{(N-1)} - w_{i+1}^{(N-1)}) \\ e^{2\alpha_i.\Phi} &= e^{\varphi_i-\varphi_{i+1}} = \frac{w_{i+1}^{(0)}}{w_i^{(0)}}, \quad i \in \mathbb{Z}_{n+1} \end{aligned} \tag{1.38}$$

1.3 Expressão explícita para os sólitons

Para se encontrar expressões explícitas de (1.38) para os campos φ_i, devemos resolver a equação linear (1.35), que pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{N} G_{jl}^{(k)}\; w_k^{(l-1)} = Z_j^{(k)} \\ &j = 1, ..., N, \quad k = 1, ..., n+1 \quad , \end{aligned} \tag{1.39}$$

onde $w_k^{(l-1)}$ são as componentes dos coeficientes w^{l-1} que aparecem na expansão (1.32). $\|G_{jl}^{(k)}\|$ é uma matriz $N \times N$ e $Z^{(k)}$ é um vetor de dimensão N. Os elementos da matriz $G^{(k)}$ e os componentes de $Z^{(k)}$ são dados por:

$$\begin{aligned} G_{jl}^{(k)} &= \mu_j^{l-1}(\omega_j^{l-1}e(-\omega_j\mu_j) - c_j\omega_j^{1-k}e(-\mu_j)) \\ Z_{jl}^{(k)} &= \mu_j^{N}(c_j\omega_j^{1-k}e(-\mu_j) - \omega_j^{N}e(-\omega_j\mu_j)) \\ \omega_j &= \omega^{r_j} \end{aligned} \tag{1.40}$$

A partir de agora, vamos omitir a dependência $x^{\pm}$ na exponencial $e(x, \lambda)$ em (1.32). Notemos, também, que se verificam as relações

$$\begin{aligned} G_{jl+1}^{(k)} &= \mu_j\omega_j G_{jl}^{(k+1)} \\ Z_j^{(k)} &= -G_{jN+1}^{(k)} = -\mu_j\omega_j A_{jN}^{(k+1)} \\ \partial_+ G_{jl}^{(k)} &= -mG_{jl+1}^{(k)} \end{aligned} \tag{1.41}$$

De (1.38), fica claro que, para se obter expressões explícitas para os campos de Toda φ_i, temos que calcular $w_i^{(0)}$ e $w_{i+1}^{(N-1)}$ no sistema algébrico linear (1.39). Pela fórmula de Kramer, obtemos

$$
\begin{aligned}
w_k^{(0)} &= (-)^{N-1} \frac{\det \begin{Vmatrix} G_{12}^{(k)} & \cdots & G_{1N}^{(k)} & Z_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{N1}^{(k)} & \cdots & G_{NN}^{(k)} & Z_N^{(k)} \end{Vmatrix}}{\det G^{(k)}} = \\
&= (-)^{N-1} \frac{\det \begin{Vmatrix} G_{12}^{(k)} & \cdots & G_{1N}^{(k)} & G_{1N+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{N1}^{(k)} & \cdots & G_{NN}^{(k)} & G_{NN+1}^{(k)} \end{Vmatrix}}{\det G^{(k)}} = \\
&= (-)^N \prod_{j=1}^{N} \mu_j \omega_j \frac{\det G^{(k+1)}}{\det G^{(k)}}
\end{aligned}
\tag{1.42a}
$$

observa–se que, na derivação das últimas duas identidades, usamos também (1.41). Da mesma maneira, combinando (1.40) com (1.41), chegamos a:

$$
\begin{aligned}
w_k^{(N-1)} &= \frac{\det \begin{Vmatrix} G_{11}^{(k)} & \cdots & G_{1N-1}^{(k)} & Z_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{N1}^{(k)} & \cdots & G_{NN-1}^{(k)} & Z_N^{(k)} \end{Vmatrix}}{\det G^{(k)}} = \\
&= -\frac{\det \begin{Vmatrix} G_{11}^{(k)} & \cdots & G_{1N-1}^{(k)} & \partial_+ G_{1N}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{N1}^{(k)} & \cdots & G_{NN-1}^{(k)} & \partial_+ G_{NN}^{(k)} \end{Vmatrix}}{\det G^{(k)}} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{m}\partial_+ ln(\det\, G^{(k)}) \tag{1.42b}$$

Substituindo as soluções (1.42a) e (1.42b) em (1.38), concluímos que os campos φ_k satisfazem às relações

$$e^{\varphi_k - \varphi_{k-1}} = \frac{\det\, G^{(k+2)} \det\, G^{(k)}}{\det\, {}^2 G^{(k+1)}} \tag{1.43a}$$

$$\partial_+ \varphi_k = \partial_+ ln \frac{\det\, G^{(k)}}{\det\, G^{(k+1)}} \tag{1.43b}$$

Para demonstrar a consistência das equações acima, integramos (1.43b) e a escrevemos na forma abaixo:

$$e^{\varphi_k} = e^{f_k(x_-)} \frac{\det\, G^{(k)}}{\det\, G^{(k+1)}} \quad , \tag{1.44a}$$

onde f_k são funções arbitrárias de x^-. Comparando (1.44a) com (1.43a), obtemos:

$$e^{f_k} = e^{f_{k+1}} \tag{1.44b}$$

Lembremos que o campo de Toda Φ (1.23) pertence à álgebra de Lie $sl(n+1)$: $\prod_k e^{\frac{\varphi}{2}} = 1$. Deste resultado, e de (1.44a) e (1.44b), obtemos

$$\prod_{k=1}^{n+1} e^{f_k} \frac{\det\, G^{(k)}}{\det\, G^{(k+1)}} = \prod_{k=1}^{n+1} e^{f_k} = e^{(n+1)f_1} = 1 \quad , \tag{1.44c}$$

de onde observamos que podemos tomar $f_k = 0$. Isto implica que, finalmente, chegamos à expressão:

$$e^{\varphi_k} = \frac{detG^{(k)}}{detG^{(k+1)}} \tag{1.44d}$$

Há uma expressão canônica para o determinante da matriz $G^{(k)}$ [41]. Para obtê-la, notemos que $G^{(k)}$ em (1.44a) admite a representação

$$\begin{aligned}
G^{(k)} &= D^{(k)}(M - C^{(k)}\widetilde{M}) \\
C^{(k)}_{jl} &= \frac{\omega_j^{k-1}}{c_j}\frac{e(-\omega_j\mu_j)}{e(-\mu_j)}\delta_{jl} \\
D^{(k)}_{jl} &= -c_j\omega_j^{1-k}e(-\mu_j)\delta_{jl} \\
M_{jl} &= \mu_j^{l-1}; \qquad \widetilde{M}_{jl} = (\omega_j\mu_j)^{l-1} \quad ,
\end{aligned} \tag{1.45}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
\det G^{(k)} &= \det D^{(k)}.\det\,(M - C^{(k)}\widetilde{M}) = \\
&= \det D^{(k)}.\det M.det(M - C^{(k)}\widetilde{M})\det M^{(-1)} = \\
&= \det D^{(k)}.\det M.\det\,(1 - C^{(k)}\widetilde{M}M^{(-1)}) = \\
&= (-)^N \prod_{j=1}^{N} c_j\omega_j^{1-k}e(-\mu_j).\det\,(\mu_j^{l-1}).\det\,(1 - C^{(k)}\widetilde{M}M^{(-1)})
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Como segue de (1.45), detM é o determinante de Van der Mond: $\det M = \prod_{a>b}(\mu_a - \mu_b)$. Prosseguimos, calculando os elementos da matriz $\widetilde{M}M^{-1}$. Do teorema para a inversa de uma matriz, temos

$$M^{-1}_{jl} = (-)^{j+l}\frac{\triangle_{lj}(M)}{detM} \tag{1.47}$$

onde $\triangle_{lj}(M)$ é a matriz dos cofatores de M. Assim, temos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{M}M^{-1})_{jl} = \sum_{k=1}^{N}\widetilde{M}_{jk}M^{-1}_{kl} &= \sum_{k=1}^{N}(-)^{k+l}\widetilde{M}_{jk}\triangle^{(M)}_{lk} = \\
&= \frac{\det\ M^{(jl)}}{\det\ M}
\end{aligned}$$

$$M^{(lj)}_{rs} = \begin{cases} M_{rs}, & \text{para} \quad r \neq l \\ \\ \widetilde{M}_{js} & \text{para} \quad r = l \end{cases} \tag{1.48a}$$

Em vista de (1.45), o determinante no numerador da última fração, é um determinante de Van-der-Mond também. Esta observação leva-nos ao seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{M}M^{(-1)}) &= -P\mathcal{M}Q \\
P_{jl} &= \delta_{jl}\prod_{p=1}^{N}(\mu_p - \omega_j\mu_j) \\
Q_{jl} &= \frac{\delta_{jl}}{\prod_{p\neq l}(\mu_p - \mu_l)} \\
\mathcal{M}_{jl} &= \frac{1}{\omega_j\mu_j - \mu_l}
\end{aligned}
\tag{1.48b}
$$

Substituindo-o em (1.46), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\det G^{(k)} &= (-)^N \prod_{j=1}^{N} c_j\omega_j^{1-k} e(-\mu_j)\prod_{a>b}(\mu_a - \mu_b)\tau_{k-1} \\
\tau_{k-1} &= \det \|1 + C^{(k)}P\mathcal{M}Q\| \\
&= \det \|1 + (C^{(k)}PQ)^{1/2}\mathcal{M}(C^{(k)}PQ)^{1/2}\|
\end{aligned}
\tag{1.49a}
$$

As funções τ_k , $k = 1, ..., n+1$, que apareceram na última equação são as famosas funções tau, introduzidas pela escola de Kyoto [29]. Levando em conta (1.45), (1.48b), e (1.49a), obtemos finalmente:

$$
\begin{aligned}
&\tau_k = \det(1 + \Omega^{\frac{k}{2}}.V.\Omega^{\frac{k}{2}}) \\
&\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1, ..., \omega_N) \\
&V_{jk} = \frac{\sqrt{X_j\, X_k}}{\mu_j^+ - \mu_k^-} \\
&X_j = \frac{1}{c_j}(\mu_j^- - \mu_j^+)\prod_{l\neq j}\frac{\mu_l^- - \mu_j^+}{\mu_l^- - \mu_j^-}\exp\{-2im\sin\frac{\pi r_j}{n+1}(\widetilde{\mu_j}\, x^+ - \frac{x^-}{\widetilde{\mu_j}})\} \\
&\widetilde{\mu_j} = \omega_j^{\frac{1}{2}}\mu_j, \qquad \mu_j^{\pm} = \omega_j^{\pm\frac{1}{2}}\widetilde{\mu_j}
\end{aligned}
\tag{1.49b}
$$

Substituindo (1.42b) em (1.38), obtemos a expressão dos campos de Toda em termos das funções tau:

$$e^{-\varphi_k} = \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}} = \frac{\det\left(1 + \Omega^{\frac{k}{2}}.V.\Omega^{\frac{k}{2}}\right)}{\det\left(1 + \Omega^{\frac{k-1}{2}}.V.\Omega^{\frac{k-1}{2}}\right)} \tag{1.49c}$$

A expressão acima para os N–sólitons nos modelos afins de Toda permite estabelecer uma relação com os sistemas integráveis de N corpos com invariância relativística, do tipo de Calogero–Moser [39]. De (1.49a) – (1.49c), vemos que as soluções (1.46) descrevem a propagação de N sólitons : as variáveis $\widetilde{\mu_j}$ são as "rapidities", enquanto que as quantidades

$$a_j = \frac{1}{c_j}(\mu_j^- - \mu_j^+) \prod_{l \neq j} \frac{\mu_l^- - \mu_j^+}{\mu_l^- - \mu_j^-} \tag{1.50}$$

são relacionados às posições de cada sóliton. Note que, mais do que pelos parâmetros contínuos $\widetilde{\mu_j}$ e a_j, os sólitons são caracterizados pelos parâmetros discretos r_j em (1.34).

Recentemente, foi estudada uma classe de soluções solitônicas nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda [47], que aparentemente não coincide com a expressão (1.49c). Estas soluções contem modos de oscilação em torno da solução padrão. Na verdade, as soluções descobertas em [47], estão contidas em (1.49c), quando $\mu_i^{n+1} = \mu_j^{n+1}$ para determinados $i \neq j$. Nesta tese nos limitaremos a considerar só o caso quando os parâmetros μ_i estão em "posição geral", ou seja, $\mu_i^{n+1} \neq \mu_j^{n+1}$ para $i \neq j$.

Capítulo 2

O problema de vestimento para soluções solitônicas nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda

O grupo do vestimento é uma simetria das equações não-lineares de evolução com representação de curvatura nula (ou representação de Lax). Foi mostrado em [30] que este grupo de simetria aparece como um limite semi–clássico da simetria do grupo quântico. O grupo de vestimento atua, por uma transformação de calibre, sobre as componentes da conexão de Lax, preservando sua forma. Portanto, é uma simetria do espaço de soluções do correspondente modelo integrável. O objetivo desta seção é apresentar uma derivação dos elementos do grupo de vestimento que geram N–sólitons em teorias $A_n^{(1)}$ de Toda. Este problema encontra–se resolvido em [42] para a equação sine–Gordon, que é o modelo $A_1^{(1)}$ de Toda. Expressões para os elementos do grupo de vestimento que criam N–sólitons a partir do vácuo foram conjecturadas em [34] para uma ampla classe de hierarquias integráveis.

Com a finalidade de compararmos nosso resultado às expressões de Babelon e Bernard [42], é conveniente realizar uma transformação de calibre, dependente do campo, nos componentes da conexão (1.28):

$$\begin{aligned} D_\pm &\rightarrow e^{\Phi} D_\pm e^{-\Phi} = \partial_\pm + \mathcal{A}_\pm \\ \mathcal{A}_\pm &= \pm\partial_\pm \Phi + m e^{\pm \mathrm{ad}\Phi} \mathcal{E}_\pm \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para a solução do vácuo $\Phi = 0$, as componentes da conexão acima assumem a seguinte forma

$$\mathcal{A}_\pm = m\mathcal{E}_\pm \tag{2.2}$$

De acordo com a definição geral, as transformações de vestimento são representadas pelos elementos do grupo dos laços $g(x, \lambda) \in \widetilde{SL}(n+1)$, que atuam em (2.1) como transformações de calibre: $\mathcal{A}_\pm \rightarrow \mathcal{A}^g_\pm$

$$\mathcal{A}^g_\pm = -\partial_\pm g g^{-1} + g\mathcal{A}_\pm g^{-1} \quad , \tag{2.3}$$

de tal modo que a conexão $\mathcal{A}^g_\pm$ tem a mesma forma que a original (2.1) com $\Phi \rightarrow \Phi^g$. Visto que, pelas transformações de calibre a curvatura transforma-se como $F_{+-} = [D_+, D_-] \rightarrow gF_{+-}g^{-1}$, vemos que as transformações de vestimento são simetrias das equações de movimento (1.26), (1.27).

2.1 A Solução do Problema do vestimento no grupo $\widetilde{GL}(n+1)$

Fizemos uma ilustração da simetria de vestimento aplicada aos modelos de Toda afins. Antes de tudo, introduzimos uma decomposição, chamada de decomposição de Cartan na álgebra dos laços $\widetilde{g} = \widetilde{sl}(n+1)$

$$\widetilde{g} = \widetilde{g}_+ \oplus \widetilde{g}_0 \oplus \widetilde{g}_- \tag{2.4}$$

onde $\widetilde{g}_{\pm}$ são as sub–álgebras de grau positivo (negativo), e $\widetilde{g}_0$ contém todos os elementos de grau igual a zero, conforme a expansão (1.20). Observamos, também, que junto à eq. (2.4), existe localmente a decomposição de Gauss no grupo de laços correspondente, $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{SL}(n+1)$:

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}_{+}\widetilde{\mathcal{G}}_{0}\widetilde{\mathcal{G}}_{-}$$
$$\widetilde{\mathcal{G}}\pm = e^{\widetilde{g}_{\pm}}, \widetilde{\mathcal{G}}_0 = e^{\widetilde{g}_0} \tag{2.5}$$

Note que a última equação é a versão exponencial de (2.4). Além disso, introduzimos as sub-álgebras (sub-grupos) de Borel da seguinte maneira:

$$\widetilde{b}_{\pm} = \widetilde{g}_0 \oplus \widetilde{g}_{\pm}$$
$$\widetilde{B}_{\pm} = e^{\widetilde{b}_{\pm}} \tag{2.6}$$

Voltando ao problema do vestimento para a conexão $\mathcal{A}_{\pm}$ (2.1), primeiramente observamos que $\mathcal{A}\pm \in \widetilde{b}_{\pm}$. Por isto, e porque $\widetilde{b}_{\pm}$ são duas sub–álgebras de $\widetilde{g}$, colocamos $g = g_{\pm} \in \widetilde{B}_{\pm}$ nas equações (2.3). Então, concluímos que a transformação de vestimento $\Phi \to \Phi^g$, realizada pelos elementos $g = (g_+, g_-)$, deve satisfazer às seguintes relações

$$\Phi^g = \Phi - X_+^0 \mod 2\pi i \Lambda_W$$
$$\Phi^g = \Phi + X_-^0 \mod 2\pi i \Lambda_W \tag{2.7}$$

A rede das raízes é composta das combinações lineares dos pesos fundamentais λ_i (1.3). Notemos, também, que a simetria das equações de Toda afins, $\Phi \to \Phi + \pi i \Lambda_W$, está intimamente ligada à existência de sólitons. Os elementos $g_{\pm}$ admitem a decomposição

$$g_{\pm} = e^{X_{\pm}^0} \ldots \quad , \tag{2.8}$$

onde os fatores omitidos em $g_{\pm}$ pertencem aos subgrupos $\widetilde{\mathcal{G}}_{\pm}$ (2.5).

Levando em conta (2.1), vemos que

$$\mathcal{T}(x,\lambda) \;=\; e^{\Phi(x)}W(x,\lambda) \;, \tag{2.9}$$

onde a matriz W, que foi introduzida por (1.31), é uma solução do problema linear

$$(\partial_{\pm} + \mathcal{A}_{\pm})\,\mathcal{T}(x,\lambda) \;=\; 0 \tag{2.10}$$

Devido à expansão (1.32), as componentes do vetor w (n+1–dimensional), w_k, admitem a seguinte representação

$$w_k(x,\lambda) \;=\; \prod_{j=1}^{N}(\lambda + \epsilon_{kj}(x)e(-\lambda)), \qquad 1 \le k \le n+1 \tag{2.11}$$

A dependência das variáveis ϵ_{kj} em relação a x^+ e x^- é fixada por (1.35), a qual levando em conta a expressão acima, conduz á

$$\prod_{l=1}^{N}\frac{\epsilon_{kl} + \omega^{r_j}\mu_j}{\epsilon_{kl} + \mu_j} \;=\; c_j\omega^{r_j(1-k)}\frac{e(\omega^{r_j}\mu_j)}{e(\mu_j)} \tag{2.12}$$

Em vista de (2.11), podemos expressar a matriz (1.31) como segue:

$$W(x,\lambda) \;=\; U(x,\lambda)E(x,\lambda) \tag{2.13a}$$

$$U_{kl}(x,\lambda) \;=\; \omega^{(k-1)(l-1)}\prod_{j=1}^{N}(\epsilon_{kj} + \omega^{l-1}\lambda) \tag{2.13b}$$

$$E_{kl}(x,\lambda) \;=\; \delta_{kl}e(-\omega^{k-1}\lambda), \qquad k,l = 1,\ldots,n+1 \tag{2.13c}$$

Como próximo passo, vamos calcular o determinante de (1.31). Antes de tudo, notemos que, devido às equações acima, as singularidades exponenciais dos elementos da matriz W desaparecem em seu determinante. Portanto, det W é uma função meromórfica sobre a esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1$. Além disso, devido a (1.35), det W anula–se sempre que $\lambda^{n+1} = \mu_j^{n+1}$, para $j = 1, \ldots, N$. Isto quer dizer que $\det \mathrm{W}$ tem ao menos $N(n+1)$ zeros. Este número é exato, já que temos a expansão,

$$\det \mathrm{W}(\mathrm{x}, \lambda) = (-)^{nN} \lambda^{(n+1)N} \det \Omega \left(1 + \mathrm{O}(\frac{1}{\lambda})\right), \quad \lambda \to \infty \tag{2.14}$$

onde a matriz Ω é dada por (1.10). É claro que $\det \mathrm{W}$ não apresenta outros pólos, e portanto, devido ao teorema de Cauchy, chegamos ao resultado:

$$\det \mathrm{W}(\mathrm{x}, \lambda) = (-)^{nN} \det \Omega \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} (\lambda^{\mathrm{n}+1} - \mu_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}+1}) \tag{2.15}$$

A partir de agora, será útil expressar os campos de Toda $A_n^{(1)}$, dados em (1.23) e (1.26), em termos das variáveis [1] ϵ_{kl} (2.11). Com esta finalidade, é suficiente comparar (1.32) com (2.11). O resultado é

$$w_k^{(0)} = \prod_{j=1}^{N} \epsilon_{kj} \tag{2.16}$$

que, juntamente com (1.38) e (1.40), produzem as expressões

$$e^{-\varphi_k} = (-)^N \prod_{j=1}^{N} \frac{\epsilon_{kj}}{\mu_j}, \qquad k = 1, \ldots, n+1 \tag{2.17}$$

Para se obter esta expressão, escolhemos $e^{f_k} = \prod_j \omega_j^{-1}$ em (1.44a)–(1.44c). Visto que o campo Φ (1.23) pertence à sub–álgebra de Cartan $sl(n+1)$, a restrição

$$\prod_{k=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{N} \epsilon_{kj} = (-)^{N(n+1)} \prod_{j=1}^{N} \mu_j^{n+1} \tag{2.18}$$

é obedecida. Voltando ao problema do vestimento, definimos a matriz de transporte normalizada [2]

$$T(x, \lambda) = \mathcal{T}(x, \lambda) \mathcal{T}^{-1}(0, \lambda) \tag{2.19}$$

[1] Estas variáveis aparecem no estudo de soluções periódicas da equação KdV e da cadeia periódica de Toda [48]

[2] Como ponto de referência, escolhemos aquele com coordenadas do cone–de–luz $x^+ = x^- = 0$

A matriz acima é "unimodular". Contudo, devido a (2.10), ela pertence ao grupo de laços $\widetilde{SL}(n+1)$ na graduação principal. Sejam $\mathcal{T}$ em (2.9) e T (2.19) as matrizes de transporte associadas a uma certa solução de N–sólitons (2.17) e $\mathcal{T}_0$, T_0 as matrizes de transporte correspondentes ao vácuo; pode–se, portanto, escrever

$$\begin{aligned}
T(x,\lambda) &= f(x,\lambda)T_0(x,\lambda)f^{-1}(0,\lambda) && (2.20a)\\
f(x,\lambda) &= \mathcal{T}(x,\lambda)\mathcal{T}_0^{-1}(x,\lambda) = e^{\Phi(x)}W(x,\lambda)W_0^{-1}(x,\lambda) = \\
&= e^{\Phi(x)}U(x,\lambda)U_0^{-1}(x,\lambda) && (2.20b)\\
T_0(x,\lambda) &= \mathcal{T}_0(x,\lambda)\mathcal{T}_0^{-1}(0,\lambda) = e^{-m(\mathcal{E}_+x^+ + \mathcal{E}_-x^-)} && (2.20c)
\end{aligned}$$

onde $W(x,\lambda)$ e $W_0(x,\lambda)$ são as matrizes (1.31) correspondentes a uma solução genérica de N–sólitons (2.17) e ao vácuo respectivamente; a matriz U, na última equação (2.20b), é dada por (2.13a)–(2.13c), enquanto que U_0 representa a solução análoga do vácuo. Devido a (2.13b), U_0 torna–se $U_0 = \Omega$ (1.10). Levando em conta estas observações, concluímos que:

$$f(x,\lambda) = e^{\Phi(x)}U(x,\lambda)\Omega^{-1}$$

Em vista de (2.20a), $f(x,\lambda)$ é uma transformação de calibre, que transforma a matriz de transporte solução do vácuo T_0 na matriz de transporte T, relacionada a uma solução de N–sólitons. Portanto, esta transformação de calibre gera uma transformação de vestimento. Note, também, que o elemento $f(x,\lambda)$ está na graduação principal:

$$f(x,\omega\lambda) = Sf(x,\lambda)S^{-1} \qquad (2.21)$$

Para se obter a equação acima, observamos que a matriz (2.13b) satisfaz à equação $U(x,\omega\lambda) = \lambda\omega^{-\frac{n}{2}}U(x,\lambda)\mathcal{E}_-$ que, combinada com as relações de comutação, produz (2.21). Devido a (1.13), vemos que $f(x,\lambda)$ pertence ao grupo de laços $\widetilde{GL}(n+1)$ na graduação principal. De (2.15), é visto que

$$\det \mathrm{f(x}, \lambda) \;=\; (-)^{nN} \prod_{j=1}^{N} (\lambda^{n+1} - \mu_j^{n+1}) \tag{2.22}$$

2.2 O vestimento no grupo $\widetilde{SL}(n+1)$

Note que a solução geral do problema do vestimento (2.20a), não é única. A razão é que existem matrizes $\theta(\lambda)$, independentes de $x^{\pm}$, que não são proporcionais à identidade, e comutam com T_0 (2.20c). Portanto, o elemento

$$g(x, \lambda) \;=\; f(x, \lambda)\theta(\lambda) \tag{2.23}$$

é a solução geral do problema do vestimento; na equação acima, $f(x, \lambda)$ (2.20b) é uma solução particular. Para se fixar a matriz não–conhecida $\theta(\lambda)$, impomos um conjunto de restrições

$$\theta(\lambda)\mathcal{E}_{\pm}\theta^{-1}(\lambda) \;=\; \mathcal{E}_{\pm} \tag{2.24a}$$

$$\theta(\omega\lambda) \;=\; S\theta(\lambda)S^{-1} \tag{2.24b}$$

$$\det\theta(\lambda) \;=\; \frac{(-)^N}{\prod_{j=1}^{N}(\lambda^{n+1} - \mu_j^{n+1})} \tag{2.24c}$$

(2.24d)

$$g(x, \lambda) \;=\; \begin{cases} e^{-\Phi}\,(1 + O(\lambda)) & \text{for} \quad \lambda \to 0 \\ \\ e^{\Phi}\left(1 + O(\frac{1}{\lambda})\right) & \text{for} \quad \lambda \to \infty \end{cases} \tag{2.24e}$$

Para justificar os requisitos acima, notamos que (2.24a) assegura a comutatividade de $\theta(\lambda)$ com T_0 (2.20c); levando em conta (2.21), vemos que (2.24b) garante que o elemento do grupo de vestimento $g(x, \lambda)$ está na graduação principal; (2.24c) vem do requisito de que $g(x, \lambda)$ deveria ser unimodular; finalmente, (2.24e) é uma conseqüência de uma análise de grau aplicada a (2.3). Note que está de acodo com (2.7) (para maiores detalhes, veja [30, 42]. É fácil se verificar que a solução geral (2.24a) é dada por

$$\theta(\lambda) \;=\; \theta_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{n} \theta_k(\lambda)\mathcal{E}_k \tag{2.25}$$

onde o gerador $\mathcal{E}_k$ da base de Cartan da sub–álgebra alternativa $\mathcal{H}'$ foi introduzido por (1.8). Inserindo a expansão acima em (2.24b), e levando em conta (1.9), terminamos com

$$\theta_k(\omega\lambda) \;=\; \omega^k \theta_k(\lambda), \quad k = 0, \ldots, n \tag{2.26}$$

Para se calcular o determinante de $\theta(\lambda)$, devemos usar (1.11)

$$\begin{aligned} \det \theta(\lambda) = \det \Omega^{-1}\theta(\lambda)\Omega = \prod_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n+1}} \left(\sum_{\mathrm{l=1}}^{\mathrm{n+1}} \Omega_{\mathrm{kl}} \theta_{\mathrm{l-1}}(\lambda) \right) = \\ = \prod_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \theta_{l-1}(\omega^{k-1}\lambda) \right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

além de (2.24a)–(2.24e) e de impor que os elementos da matriz (2.23) sejam funções meromorficas sobre $\mathbb{CP}^1$, com polos simples localizados nos pontos $\lambda = \omega^p \mu_j$, para $p = 0, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, N$. Em vista da última restrição, somente um número finito de soluções sobrevive.

Entre tais soluções, escolhemos a que satisfaz ao sistema

$$\sum_{l=1}^{n+1} \Omega_{kl}\theta_{l-1}(\lambda) \;=\; \frac{1}{\prod_{j=1}^{N}(\omega^{k-1}\lambda - \mu_j)}, \quad k = 1, \ldots, n+1 \tag{2.28}$$

É claro que (2.27), junto com a equação acima, garante a validade de (2.24c). Note também que (2.24c) é compatível com (2.26). Inserindo (2.25) e (2.28), em (2.23) obtemos

$$g^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda) \;=\; e^{\Phi}\Gamma^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda)\Omega^{-1} \;, \tag{2.29a}$$

onde o índice superior indica o número de sólitons e $\Gamma^{(N)}$ é uma matriz $(n+1)\times(n+1)$, com elementos

$$\Gamma^{(N)}_{kl}(\Phi,\{\mu\},\lambda) \;=\; \omega^{(k-1)(l-1)}\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda+\omega^{1-l}\epsilon_{kj}(x)}{\lambda-\omega^{1-l}\mu_j} \tag{2.29b}$$

Note que a dependência em relação às coordenadas do espaço tempo é ditada por (2.12) e (2.17). A expansão (2.24e) é satisfeita como uma conseüência de (2.17). Observamos que o método apresentado nesta seção foi previamente usado em [49] para resolver o problema do vestimento para as soluções geométrico–algébricas no modelo de sine–Gordon

Capítulo 3

O problema da fatorização e a relação com o tratamento do operador–de–vértice

Há uma maneira geral de se construir sólitons em teorias de Toda afins [37]. Substancialmente, baseia–se no tratamento em termos de toria de grupos para sistemas integráveis, desenvolvido por Lezenov e Saveliev [50]. Para se aplicar a análise de Leznov–Saveliev para as equações de Toda afins, primeiramente se considera as equações afins de Toda conformes (CaT) [51, 52] que aparecem como uma condição de curvatura nula com conexão da forma (1.28), cujas componentes pertencem à álgebra de Lie afim $\hat{\mathcal{G}}$, que é a extensão central da correspondente álgebra dos laços $\tilde{\mathcal{G}}$. A necessidade de se introduzir a extensão central à álgebra dos laços deve–se ao fato de que a análise de Leznov–Saveliev utiliza álgebras de Lie que admiten representações não–triviais de peso maximal. Tais representações somente existem se a carga central não é nula. No caso dos modelos CaT, o tratamento por teoria de grupos produz a solução geral da equação de movimento, parametrizada por um campo livre sem massa, e um elemento do grupo que pertence a um grupo de Lie afim, $\hat{G}$. Foi sugerido em [37] que os sólitons surgem quando o elemento do grupo se fatoriza em um produto de elementos especiais do grupo de Lie afim, que estão intimamente relacionados com os operadores–de–vértice. Estes elementos são exponenciais dos elementos da álgebra dos laços que diagonalizam a ação adjunta da sub–álgebra principal de Heisenberg. No formalismo de [37], a implementação de tal elemento resulta na criação de um sóliton simples. O tratamento algébrico para os sólitons na teoria afim de Toda foi posteriormente desenvolvido em [42]. No último artigo sobre o exemplo do modelo sinh–Gordon conformalmente estendido, foi mostrado que os sólitons podem ser obtidos do vácuo via uma transformação de vestimento específica. A forma explícita dos correspondentes elementos são usadas para estabelecer uma relação com o formalismo dos operadores–de–vértice [37]. Contudo, foi demonstrado que a solução do problema de vestimento no grupo afim difere daquelas no grupo de laços por um fator que está no centro [1]. Nesta seção, estendemos os resultados de [42] para os modelos $A_n^{(1)}$ de Toda, isto é, começando por (2.29a), (2.29b), mostramos primeiramente que se pode fatorizar um elemento genérico do grupo de vestimento em um produto de fatores monosolitônicos; em seguida, analisamos nossas expressões (2.29a), (2.29b) para $N = 1$, e obtemos a relação para a construção do operador–de–vértice das soluções solitônicas.

3.1 O inverso de um elemento de vestimento monossolitônico

O objetivo desta seção é o de calcular a matriz inversa que nos é apresentada em (2.29a), (2.29b), para o caso de $N = 1$. Como veremos, a solução deste problema está

[1] Os argumentos usados em [42] podem ser facilmente generalizados para se aplicar a uma arbitrária teoria de Toda afim.

ligada ao problema da fatorização de $g^{(1)}$, (2.29a)–(2.29b), em fatores monosolitônicos e desempenha um papel importante na relação com os operadores–de–vértice.

Antes de tudo, notemos que para $N = 1$, (2.29a) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} g^{(1)}(F,\mu,\lambda) &= \frac{1}{n+1}\sum_{r\in\mathbb{Z}_{n+1}} S^r|V_F(\mu,\omega^{-r}\lambda)><v_0|S^{-r} && (3.1a)\\ |V_F(\mu,\lambda)> &= e^F\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda-\mu e^{-f_i}}{\lambda-\mu}|i> && (3.1b)\\ <v_0| &= w^{(N)t} = \sum_{i=1}^{n+1}<i| && (3.1c)\\ e^{-f_j} &= -\frac{\epsilon_j}{\mu} && (3.1d)\end{aligned}$$

onde S é o operador apresentado em (1.5) e (1.12), e o transposto do covetor $< v_0|$ (3.1c) apareceu já em (1.33), num contexto diferente. Lembremos também que (3.1d) é a versão monosolitônica da expressão geral (2.17). Será útil observar que (3.1a) é um caso particular de

$$g(x,\lambda) = \sum_{r\in\mathbb{Z}_{n+1}} S^r\Psi(\omega^{-r}\lambda)\otimes\chi^t(\omega^{-r}\lambda)S^{-r} \tag{3.2}$$

que satisfaz (2.21) para cada dupla de vetores de dimensão $(n+1)$, Ψ e χ, e por isto pertence à graduação principal. Afirmamos que a matriz inversa de (3.1a) é dada por

$$\begin{aligned} g^{(1)-1}(F,\mu,\lambda) &= e^{K(F)}g^{(1)}(-F,\mu,\lambda)e^{-K(F)}\\ K(F) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(H_{\lambda_i}+H_{\lambda_{i+1}})f_i && (3.3a)\end{aligned}$$

onde λ_i para $i = 1,...,n$ são os pesos fundamentais de $sl(n+1)$ (1.3) e $\lambda_0 = \lambda_{n+1} = 0$; $\lambda \to H\lambda$ é a identificação natural do espaço de dimensão $(n+1)$–Euclideano com as matrizes $(n+1)\times(n+1)$ diagonais: $H_\lambda = \sum_i \lambda_i|i><i|$. Então, a última equação

(3.3a) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$K_i(F) - K_{i+1}(F) = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \tag{3.3b}$$

Além disso, graças ao fato de que o traço de F é nulo, temos também

$$K_i(F) = K_{i+n+1}(F) \tag{3.3c}$$

Notemos certas identidades úteis que envolvem as quantidades introduzidas acima. Primeiramente, temos

$$\frac{1}{n+1} \sum_{r \in \mathbf{Z}_{n+1}} S^r |v_0 >< v_0| S^{-r} = 1 \tag{3.4}$$

onde $|v_0>$ foi definido em (3.1c) . Além disso, vamos precisar dos resultados

$$\begin{aligned} \alpha_+^q - \alpha_-^q &= \pm(1 - w^{\pm q})\alpha_\pm^q \\ \alpha_\pm^q &= < v_0| S^q e^{K(F) \pm F} |v_0 >= \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{S^q e^{K(F) \pm F}}) \end{aligned} \tag{3.5a}$$

que são conseqüência de (3.1c), (3.3b), e (3.3c). Em particular para $q = 0$, das identidades acima segue que

$$< v_0| e^{K(F)} \mathrm{shF} |\mathrm{v_0} >= 0 \tag{3.5b}$$

De (3.1b) obtemos a expressão

$$|V_F(\mu, \lambda) >= (e^F + \frac{2\mu}{\lambda - \mu} \mathrm{shF}) |\mathrm{v_0}> \tag{3.6}$$

Prosseguimos com o cálculo do produto $g^{(1)} g^{(1)^{-1}}$. De (3.1a), (3.1b), (3.3a) e (3.6), obtemos:

$$g^{(1)} g^{(1)^{-1}} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{p,r} \alpha_{p-r}^- S^r e^F |v_0 >< v_0| S^{-p} e^{-K(F)} +$$

$$+\frac{\mu}{(n+1)^2}\sum_r \frac{\omega^r AdS^r}{\lambda-\omega^r\mu}\sum_p (2\alpha_p^- \mathrm{shF}|\mathrm{v_0}><\mathrm{v_0}|\mathrm{S^{-p}} -$$
$$-(\alpha_+^{-p}-\alpha_-^{-p})S^p e^F|v_0><v_0|)e^{-K(F)} -$$
$$-\frac{2\mu^2}{(n+1)^2}\sum_{p,r}\frac{\omega^{p+r}(\alpha_+^{p+r}-\alpha_-^{p-r})}{(\lambda-\omega^r\mu)(\lambda-\omega^p\mu)}S^r\mathrm{shF}|\mathrm{v_0}><\mathrm{v_0}|\mathrm{S^{-p}e^{-K(F)}} \tag{3.7}$$

Para simplificar esta expressão notemos que o primeiro termo é igual à identidade. Para demonstrar este fato, lembremos da notação (3.5a) e de (3.4):

$$\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p,r}\alpha_{p-r}^- S^r e^F|v_0><v_0|S^{-p}e^{-K(F)} =$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p,r} e^F S^r|v_0><v_0|S^{-r}e^{K(F)-F}S^p|v_0><v_0|S^{-p}e^{-K(F)} =$$
$$=\frac{1}{(n+1)}e^{K(F)}\sum_p S^p|v_0><v_0|S^{-p}e^{-K(F)} = 1 \tag{3.8}$$

Então, para se verificar que $g^{(1)}g^{(1)-1} = 1$, precisamos demonstrar que a contribuição dos últimos três termos em (3.7) é nula. Isto parece ser impossível, pois o último termo aparentemente apresenta pólos de ordem 2, devido ao termo para os quais $p = r$. Esta aparente contradição resolve-se graças a (3.5b), que garante a identidade $\alpha_+^0 = \alpha_-^0$ e, por causa disto, o último termo de (3.7), considerado como uma função de λ, só tem pólos simples. Então, podemos escrever este termo da seguinte maneira:

$$\mu\sum_{p\neq r}\frac{\omega^{p+r}(\alpha_+^{p-r}-\alpha_-^{p-r})}{(\lambda-\omega^r\mu)(\lambda-\omega^p\mu)}S^r\mathrm{shF}|\mathrm{v_0}><\mathrm{v_0}|\mathrm{S^{-p}e^{-K(F)}} =$$
$$=\sum_r\frac{\omega^r AdS^r}{\alpha-\omega^r\mu}\sum_{p\neq 0}\mathrm{shF}\left[\frac{\alpha_+^{\mathrm{p}}-\alpha_-^{\mathrm{p}}}{\omega^{-\mathrm{p}}-1}|\mathrm{v_0}>\right.$$
$$\left.<v_0|S^{-p}+\frac{\alpha_+^p-\alpha_-^p}{\omega^p-1}S^{-p}|v_0><v_0|\right]e^{-K(F)} \tag{3.9a}$$

Para se obter a última identidade, usamos a decomposição

$$\frac{1}{(\lambda-\omega^r\mu)(\lambda-\omega^p\mu)}=\frac{1}{\mu(\omega^r-\omega^p)}\left(\frac{1}{\lambda-\omega^r\mu}-\frac{1}{\lambda-\omega^p\mu}\right)$$

Levando em conta (3.5a) e (3.5b), podemos escrever o membro direito de (3.9a) como

$$\sum_r \frac{\omega^r AdS^r}{\alpha - \omega^r \mu} \sum_p \mathrm{shF} \left(\alpha_-^{\mathrm{p}} |\mathrm{v}_0 >< \mathrm{v}_0| \mathrm{S}^{-\mathrm{p}} + \alpha_+^{\mathrm{p}} - \mathrm{S}^{-\mathrm{p}} |\mathrm{v}_0 >< \mathrm{v}_0| \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{K(F)}} \tag{3.9b}$$

Substituímos (3.8), (3.9a) e (3.9b) em (3.7), e obtemos

$$\begin{aligned} & g^{(1)} g^{(1)^{-1}} = 1 - \frac{\mu}{n+1} \sum_r \frac{\omega^r AdS^r}{\lambda - \omega^r \mu} \mathcal{O} \\ & \mathcal{O} = \frac{1}{n+1} \sum_p \Big[(\alpha_+^{-p} - \alpha_-^{-p}) \\ & S^p e^F |v_0 >< v_0| - 2\alpha_+^p S^{-p} \mathrm{shF} |\mathrm{v}_0 >< \mathrm{v}_0| \Big] \, e^{-K(F)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

É fácil demonstrar que $\mathcal{O} = 0$. Na verdade, aplicando (3.4) e (3.5a), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_p (\alpha_+^{-p} - \alpha_-^{-p}) S^p e^F |v_0 >< v_0| e^{-K(F)} = \\ & = e^F \frac{1}{n+1} \sum_p S^p |v_0 >< v_0| S^{-p} e^{K(F)} (e^F - e^{-F}) |v_0 >< v_0| e^{-K(F)} = \\ & = e^{K(F)} (e^{2F} - 1) |v_0 >< v_0| e^{-K(F)} \end{aligned}$$

Da mesma maneira, calculamos

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n+1} \sum_p (\alpha_+^p S^{-p} \mathrm{shF} |\mathrm{v}_0 >< \mathrm{v}_0| \mathrm{e}^{-\mathrm{K(F)}} = \\ & = e^{K(F)} (e^{2F} - 1) |v_0 >< v_0| e^{-K(F)} \quad , \end{aligned}$$

de onde concluímos que a matriz (3.3a) é a inversa de (3.1a).

3.2 O problema da fatorização

O objetivo deste parágrafo é o de demonstrar que o elemento $g^{(N)}$, (2.29a)-(2.29b), admite representação em produto de fatores monossolitônicos. Cada um destes fatores é função meromórfica do parâmetro espectral, que só tem pólos simples nos pontos $\lambda = \mu\omega^r, r \in \mathbb{Z}_{n+1}$, onde μ é um dos números $\mu_1, ..., \mu_N$ (1.34), (2.29b). Além disso, vamos ver que os fatores monossolitônicos têm a seguinte forma: são o produto de um elemento que tem a forma (3.1a)–(3.1d) por uma matriz diagonal. Começaremos com uma observação simples: seja $g(\lambda)$ uma matriz que satisfaz a (2.21). Então, temos a relação:

$$\mathrm{res}_{\lambda=\omega^r\mu} g = \omega^r S^r \cdot \mathrm{res}_{\lambda=\mu} g \cdot S^{-r} \tag{3.11}$$

Em analogia com (3.1a)–(3.1d), escrevemos o elemento $g^{(N)}$, (2.29a)–(2.29b), que gera N–sólitons a partir do vácuo, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda) &= \frac{1}{n+1} \sum_{r\in \mathbb{Z}_{n+1}} S^r |v_\Phi(\{\mu\}, \omega^{-r}\lambda) >< v_0| S^{-r} && (3.12a)\\ |v_\Phi(\{\mu\}, \lambda)> &= \sum_{i=1}^{n+1} e^{\frac{\varphi_i}{2}} \prod_{a=1}^{N} \frac{\lambda+\epsilon_{ia}}{\lambda-\mu_a} |i> && (3.12b)\\ e^{-\varphi_j} &= (-)^N \prod_{j=1}^{N} \frac{\epsilon_{ja}}{\mu_a} \ , && (3.12c) \end{aligned}$$

onde o vetor $< v_0|$ foi introduzido em (3.1c) Demonstraremos que o elemento (3.12a)–(3.12c) admite a fatorização

$$g^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda) = e^{\mathcal{P}_N} g^{(1)}(F_N, \mu_N, \lambda) \cdot \ldots \cdot e^{\mathcal{P}_1} g^{(1)}(F_1, \mu_1, \lambda) \ , \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_l = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} p_{jl} E^{jj}, \qquad F_l = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} f_{jl} E^{jj} \\ &\sum_{j=1}^{n+1} p_{jl} = \sum_{j=1}^{n+1} f_{jl} = 0, \qquad l = 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{3.14}$$

são dois elementos da sub–álgebra de Cartan de $sl(n+1)$; os elementos $g^{(1)}$ foram introduzidos através de (3.1a)–(3.1d). Precisaremos da notação

$$\begin{aligned} &g_l^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda) = g^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda) g^{(1)-1}(F_1, \mu_1, \lambda) e^{-\mathcal{P}_1} \ldots \\ &g^{(1)-1}(F_l, \mu_l, \lambda) e^{-\mathcal{P}_l}, \qquad l = 0, \ldots, N \\ &g_0^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda) = g^{(N)}(\Phi, \{\mu\}, \lambda) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Observamos que, conforme (3.2), os elementos $g_l^{(N)}$, que pertencem a $\widetilde{SL}(n+1)$ na graduação principal, podem ser expressos como

$$g_l^{(N)}(\Phi,\{\mu\},\lambda) = \sum_{r\in\mathbf{Z}_{n+1}} S^r|v_\Phi(\{\mu\},\omega^{-r}\lambda)>< \rho_l(\omega^{-r}\lambda)|S^{-r}\cdot e^{-K(F_l)-\mathcal{P}_l}$$

$$<\rho_l(\lambda)| = \sum_{j=1}^{n+1} <j|\rho_{jl}(\lambda) \quad , \tag{3.16}$$

onde os covetores $<\rho_l|$ satisfazem à relação de recorrência

$$<\rho_{l+1}(\lambda)| = \frac{1}{n+1}\sum_p <\rho_l(\lambda)|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l}S^{\mathcal{P}}|v_{F_{l+1}}(\mu_{l+1},\omega^{-\mathcal{P}\lambda})>< v_0|S^{-P}$$

$$<\rho_0(\lambda)| = \frac{1}{n+1} < v_0| \tag{3.17a}$$

Escrita em componentes, a última relação assume a forma seguinte

$$\rho_{jl+1}(\lambda) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} e^{L_{kl+1}}\rho_{kl}(\lambda)\sum_{s\in\mathbf{Z}_{n+1}}\omega^{(j-k)s}\frac{\lambda-\omega^s\mu_{l+1}e^{f_{kl+1}}}{\lambda-\omega^s\mu_{l+1}}$$

$$L_{kl+1} = K_k(F_{l+1}) - K_k(F_l) - \frac{f_{kl+1}+p_{kl}}{2} \tag{3.17b}$$

Para determinar os elementos F_l e $\mathcal{P}_{l-1}$, vamos impor as seguintes exigências sobre o elemento $g_l^{(N)}$ (3.15):

(i) As únicas singularidades de $g_l^{(N)}$ são pólos simples nos pontos que satisfazem à relação $\lambda^{n+1} = \mu_j^{l+1}$ para $l < j \leq N$. Em particular, isto quer dizer que

$$\text{res}_{\mu_i} g_l^{(N)} = 0 \qquad 1 \leq i \leq l \tag{3.18}$$

(ii) O vetor $<\rho_l(\lambda)|$ (3.16) também tem somente pólos simples localizados nos pontos $\lambda = \omega^{r_i}\mu_i$ para $1 \leq i \leq l$. Os parâmetros discretos r_j foram introduzidos em (1.34). Em particular, obtemos

$$\text{res}_{\lambda=\omega^r\mu_i} <\rho_l(\lambda)| = 0$$

$$r \neq r_i,\; 1 \leq i \leq l \tag{3.19}$$

Levando em conta a representação (3.16), observamos que graças à segunda exigência mencionada acima, o elemento $g_l^{(N)}$ não pode apresentar pólos de ordem maior ou igual a dois. Notemos, também, que como conseqüência de (3.15), se $g_l^{(N)}$ não tem pólos para $\lambda^{n+1} = \mu_l^{n+1}$, as matrizes $g_k^{(N)}$ para $k > l$ também são regulares para estes valores de λ. É claro que o elemento $g^{(N)} = g_0^{(N)}$ e o covetor $< \rho_0| = \frac{1}{n+1} < v_0|$ satisfazem às restrições (i) e (ii). Suponhamos, por indução, que para um número inteiro positivo l, $g_l^{(N)}$ e $< \rho_l|$ satisfaçam a (i) e (ii). Em vista de (3.11), (3.16) e da restrição (ii), $g_{l+1}^{(N)}$ não tem pólos para $\lambda^{n+1} = \mu_{l+1}^{n+1}$, somente quando $\mathrm{res}_{\mu_{l+1}} g_{l+1}^{(N)} = 0$. Usando (3.16) e (ii), obtemos que

$$\mathrm{res}_{\mu_{l+1}} g_{l+1}^{(N)} = \mathrm{res}_{\mu_{l+1}} |v_\Phi(\lambda) >< \rho_{l+1}(\mu_{l+1})| + \\ + \omega^{-r_{l+1}} S^{-r_{l+1}} |v_\Phi(\omega^{r_{l+1}} \mu_{l+1}) >< \rho_{l+1}(\lambda)| S^{r_{l+1}} \tag{3.20}$$

Da expressão acima, fica claro que a restrição (i) pode ser escrita como

$$\mathrm{res}_{\mu_{l+1}} |v_\Phi(\{\mu\}, \lambda) >= \gamma_{l+1} S^{-r_{l+1}} |v_\Phi(\{\mu\}, \omega^{r_{l+1}} \mu_{l+1}) > \tag{3.21a}$$

$$< \rho_{l+1}(\mu_{l+1})| = -\frac{\omega^{-r_{l+1}}}{\gamma_{l+1}} \mathrm{res}_{\omega^{r_{l+1}} \mu_{l+1}} < \rho_{l+1}(\lambda)| S^{r_{l+1}} \quad , \tag{3.21b}$$

onde γ_{l+1} é um certo número. Substituímos (3.11) e (3.12b) em (3.21a), e obtemos

$$\gamma_{l+1} = \omega^{\frac{n r_{l+1}}{2} + r_{l+1}(1-k)} \frac{\prod_a (\omega^{r_{l+1}} \mu_{l+1} - \mu_a)}{\prod_{a \neq l+1} (\mu_{l+1} - \mu_a)} \prod_a \frac{\mu_{l+1} + \epsilon_{ka}}{\omega^{r_{l+1}} \mu_{l+1} + \epsilon_{ka}} \tag{3.22a}$$

de onde concluímos que (3.21a) possui solução somente se o membro direito da equação acima não depender de k. Isto é garantido por (2.12), que descreve a evolução do sistema com N sólitons. Combinando (3.22a) com (2.12), obtemos

$$\gamma_{l+1} = \omega^{n r_{l+1}/2} \frac{\prod_a (\omega^{r_{l+1}} \mu_{l+1} - \mu_a)}{\prod_{a \neq l+1} (\mu_{l+1} - \mu_a)} \prod_a \frac{\mu_{l+1} + \epsilon_{1a}}{\omega^{r_{l+1}} \mu_{l+1} + \epsilon_{1a}} \tag{3.22b}$$

Antes de se discutir (3.21b), notemos que, de (3.17a), segue a expressão

$$\mathrm{res}_{\omega^r \mu_{l+1}} < \rho_{l+1}| = -2\frac{\mu_{l+1}\omega^r}{n+1} < \rho_l(\omega^r \mu_{l+1})|$$
$$e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l}\mathrm{shF_{l+1}S^r|v_0>< v_0|S^{-r}} \tag{3.23}$$

Além disso, explorando a restrição (ii) para $< \rho_{l+1}(\lambda)|$, a relação de recorrência (3.17a), e a identidade (3.4), obtemos

$$< \rho_{l+1}(\mu_{l+1})| =< \rho_l(\mu_{l+1})|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l-F_{l+1}} -$$
$$-\frac{2\mu_{l+1}}{n+1} < \rho_l'(\mu_{l+1})|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l}\mathrm{shF_{l+1}|v_0>< v_0|} +$$
$$-\frac{2}{n+1} < \rho_l(\mu_{l+1})|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l}\mathrm{shF_{l+1}}$$
$$\sum_{p\neq 0}\frac{\omega^p}{1-\omega^p}S^p|v_0>< v_0|S^{-p} \tag{3.24}$$

Tendo em vista

$$\frac{1}{n+1}\sum_{r\in\mathbb{Z}_{n+1}}\frac{\omega^{rk}}{\lambda-\omega^{-r}\mu} = \frac{\lambda^{n-k}\mu^k}{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}}$$
$$0\leq \ k \ \leq n \tag{3.25a}$$

$\frac{\lambda}{\mu}\to 1$, obtém-se a identidade

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\omega^{rk}}{1-\omega^r} = \begin{cases} \frac{n}{2}+k & -n\leq k\leq 0 \\ \\ -\frac{n}{2}-1+k & 1\leq k\leq n+1 \end{cases} \tag{3.25b}$$

da qual se pode concluir que

$$\sum_{r\neq 0}^{n}\frac{\omega^{rK}}{1-\omega^r}S^r|v_0>< v_0|S^{-r} = \sum_{k\leq j}(-n/2+j-k)|k>$$
$$< j| + \sum_{k<j}(n/2+j-k)|k>< j| \tag{3.25c}$$

Substituímos a identidade acima em (3.24), e lembrando que $\mathrm{res}_{\mu_{l+1}}(\rho_{l+1}) = 0$, segundo a restrição (ii), obtemos

$$
\begin{aligned}
&< \rho_{l+1}(\mu_{l+1})| =< \rho_l(\mu_{l+1})|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l-F_{l+1}} - \\
&-\frac{2\mu_{l+1}}{n+1} < \rho_l'(\mu_{l+1})|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l}\mathrm{shF_{l+1}}|\mathrm{v_0}>< \mathrm{v_0}| + \\
&+\frac{2}{n+1}(\sum_{k,j}(k-j) + (n+1)\sum_{k\leq j}) \\
&< \rho_l(\mu_{l+1})|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l}\mathrm{shF_{l+1}}|\mathrm{k}>< \mathrm{j}|
\end{aligned}
\qquad (3.26)
$$

De (3.23), segue que o membro direito de (3.21b) é um covetor proporcional a $< v_0|$ (isto quer dizer que todas as componentes deste covetor são iguais). Então, concluímos que para (3.21b) ser consistente, as componentes de $< \rho_{l+1}(\mu_{l+1})|$ (3.26) têm que ser iguais. Usando (3.26) e a identidade $< \rho_l(\mu_{l+1})|e^{K(F_{l+1})-K(F_l)-\mathcal{P}_l}\mathrm{shF_{l+1}}|\mathrm{v_0} >= 0$, que resulta do fato de que $< \rho_{l+1}(\lambda)|$ é holomórfica para $\lambda = \mu_{l+1}$, concluímos que

$$
\rho_{jl+1}(\mu_{l+1}) - \rho_{j+1l+1}(\mu_{l+1}) = \rho_{jl}(\mu_{l+1})e^{L_{jl+1}} - \rho_{j+1l}(\mu_{l+1})e^{L_{j+1l+1}+f_{j+1l+1}} \qquad (3.27)
$$

Relembrando (3.17b), observamos que, para o anulamento do membro esquerdo da equação acima é preciso que

$$
\rho_{jl}(\mu_{l+1})e^{-K_j(F_l)-\mathcal{P}_{jl}/2} = c \qquad (3.28a)
$$

seja independente de j. Esta observação, juntamente com (3.14), leva–nos ao resultado:

$$
e^{P_j/2} = \frac{\rho_{jl}(\mu_{l+1})e^{-K_j(F_l)}}{\prod_j \rho_{jl(\mu_{l+1})}^{\frac{1}{n+1}}} \qquad (3.28b)
$$

Usando (3.3b) e (3.5b), verificamos que a solução acima satisfaz à restrição $\mathrm{res}_{\mu_{l+1}} < \rho_{l+1}(\lambda)| = 0$, sem a necessidade de se impor outras condições. Inserindo (3.28b) em (3.23), e levando em conta (3.3b), obtemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}_{\omega^r\mu_{l+1}} < \rho_{l+1}(\lambda)| = \frac{\omega^{\frac{rn}{2}+r}}{n+1}\mu_{l+1}c \sum_{j\in\mathbf{Z}_{n+1}} \omega^{r(1-j)} \\
&\left(\frac{\rho_{jl}(\omega^r\mu_{l+1})}{\rho_{jl}(\mu_{l+1})} - \omega^{-r}\frac{\rho_{j+1l}(\omega^r\mu_{l+1})}{\rho_{j+1l}(\mu_{l+1})}\right) \\
&e^{K_j(F_{l+1})-\frac{f_{jl+1}}{2}} < v_0|S^{-r} \qquad (3.29\mathrm{a}) \\
&< \rho_{l+1}(\mu_{l+1})| = \frac{c}{(n+1)}\sum_{j=1}^{n+1}(1+\mu_{l+1} \\
&\frac{d}{d\lambda}\ln\frac{\rho_{jl}(\mu_{l+1})}{\rho_{j+1l}(\mu_{l+1})}\bigg) e^{K_j(F_{l+1})-\frac{f_{jl+1}}{2}} \qquad (3.29\mathrm{b})
\end{aligned}$$

Combinamos estas expressões com (3.21b) e com (3.19), o que nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbf{Z}_{n+1}} \omega^{r(1-j)}\left(\frac{\rho_{jl}(\omega^r\mu_{l+1})}{\rho_{jl}(\mu_{l+1})} - \omega^{-r}\frac{\rho_{j+1l}(\omega^r\mu_{l+1})}{\rho_{j+1l}(\mu_{l+1})}\right) e^{K_j(F_{l+1})-\frac{f_{jl+1}}{2}} = \delta_{r,r_{l+1}}(1-\omega^r)\times \\
&\times \prod_{a\neq l+1}\frac{\omega^r\mu_{l+1}-\mu_a}{\mu_{l+1}-\mu_a}\prod_a\frac{\mu_{l+1}+\epsilon_{1a}}{\omega^r\mu_{l+1}+\epsilon_{1a}}\times \\
&\times \sum_{j\in\mathbf{Z}_{n+1}}\left(1+\mu_{l+1}\frac{d}{d\lambda}\ln\frac{\rho_{jl}}{\rho_{j+1l}}(\mu_{l+1})\right) e^{K_j(F_{l+1})-\frac{f_{jl+1}}{2}} \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Lembremos que, para $r = 0$, a equação acima é trivialmente satisfeita. Por isso, terminamos com um sitema de n equações para determinar as componentes do campo F_{l+1}. Como F_{l+1} tem n componentes independentes, concluímos que este sistema é suficiente para determinar F_{l+1}. Desta maneira, as equações (3.28a), (3.28b) e (3.30) apresentam um algoritmo para se obter a fatorização (3.13). Continuando este procedimento, chegamos à matriz $g_N^{(N)}$ (3.15) que, conforme as restrições (i) e (ii), não têm singularidades na esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1$ onde o parâmetro espectral assume seus valores. Portanto, $g_N^{(N)}$ não depende de λ. Devido ao fato de que $g_N^{(N)}$ é uma matriz constante (em λ) e pertence ao grupo $\widetilde{SL}(n+1)$ na graduação principal (2.21), concluímos que ela é diagonal. É claro que $\mathcal{P}_N$ em (3.13) fica arbitrária. Podemos usar esta liberdade para obter $g_N^{(N)} = 1$. Esta observação completa a demonstração de (3.14).

3.3 A relação com os operadores–de–vértice

Existe uma abordagem puramente algébrica para os sólitons nos modelos afins de Toda [37] que explora exclusivamente a teoria de representações das álgebras de Kac–Moody [45, 46]. Nesta seção, tentaremos reproduzir esta relação, no exemplo particular de monossólitons, usando o procedimento baseado na simetria de vestimento. Voltemos a (3.1a)–(3.1d). É claro que (3.1a) pode ser escrita como [2]

$$g(\lambda) = e^F + 2\frac{\mu}{\lambda - \mu}\mathrm{shF}\mathcal{R}(\mu, \lambda) \tag{3.31}$$

onde

$$\mathcal{R}(\mu, \lambda) = \frac{1}{n+1}\sum_{r\in \mathbf{Z}_{n+1}} \frac{\omega^r}{\lambda - \omega^r \mu} S^r |v_0 >< v_0| S^{-r} \tag{3.32}$$

Levando em conta (3.25a), obtemos uma expressão mais explícita

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mu, \lambda) &= \frac{1}{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}\mathcal{S}(\mu, \lambda) \\ \mathcal{S}(\mu, \lambda) &= \sum_{j<i} \lambda^{n+1+j-i}\mu^{i-j}|i >< j| + \sum_{i\leq j} \lambda^{j-1}\mu^{i-j+1}|i >< i| \end{aligned} \tag{3.33}$$

Além disso, temos as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial f_i} &= \frac{1}{2}e^F|i >< i| + \frac{1}{n+1}chF|i >< u_i| \\ &< u_i| =< i|\mathcal{S}(\mu, \lambda) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Levando em conta (3.25a) e (3.3b), não é difícil verificar a identidade

$$\mathcal{S}(\mu, \lambda)\mathrm{shFe^{K(F)}S}(\mu, \lambda) = \frac{\lambda^{\mathrm{n}+1} - \mu^{\mathrm{n}+1}}{2}(\mathcal{S}(\mu, \lambda)\mathrm{e^{K(F)-F}} - \mathrm{e^{K(F)+F}}\mathcal{S}(\mu, \lambda)) \tag{3.35}$$

Combinando (3.34) e (3.35), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} g^{(1)}(\Phi, \mu, \lambda) \cdot \left(g^{(1)}\right)^{-1}(\Phi, \mu, \lambda) &= e^{K(\Phi)}\left(B^i(\mu, \lambda) - B^{n+1}(\mu, \lambda)\right)e^{-K(\Phi)} \\ i = &\ 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.36a}$$

[2]Daqui em diante, vamos omitir os índices que especificam o número de sólitons.

onde $\mathcal{F}$ é uma solução de um–sóliton (1.49c), $K(\Phi)$ foi introduzido em (3.3b), (3.3a) e

$$\begin{aligned} B^i(\mu,\lambda) &= \sum_{l<i} \frac{\lambda^{n+1+l-i}\mu^{i-l}}{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}} E^{il} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^{n+1}+\mu^{n+1}}{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}} E^{ii} + \\ &+ \sum_{l>i} \frac{\lambda^{l-i}\mu^{n+1+i-l}}{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}} E^{il}, \qquad i = 1, \ldots, n+1 \end{aligned} \tag{3.36b}$$

Relembrando que F é uma matriz de traço nulo, um de seus elementos pode ser expresso em função dos outros. Ao se calcular a derivada do lado esquerdo de (3.36a), foi usado que $f_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} f_i$. As expressões em (3.36b) seguem de (3.12a), (3.12b), (3.6) e da fórmula do somatório (3.25a). Vamos introduzir o elemento do grupo dos laços

$$h^{(1)}(F,\mu,\lambda) = e^{-K(F)} g^{(1)}(F,\mu,\lambda) \tag{3.37}$$

Tomando (3.36a), segue que este elemento satisfaz ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f_i} h^{(1)}(F,\mu,\lambda) &= J^i(\mu,\lambda) h^{(1)}(F,\mu,\lambda) \\ i &= 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.38a}$$

$$\begin{aligned} J^i(\mu,\lambda) &= \left(\frac{\partial}{\partial f_{n+1}} - \frac{\partial}{\partial f_i}\right) K(F) + B^i(\mu,\lambda) - B^{n+1}(\mu,\lambda) \\ f_{n+1} &= -\sum_{i=1}^{n} f_i \end{aligned} \tag{3.38b}$$

Uma intrigante propriedade dos elementos J^i da álgebra dos laços é que eles não dependem do campo de Toda f_i para $i = 1, \ldots, n$. Combinando esta observação com a condição de integrabilidade do sistema linear diferencial (3.38a), concluímos que

$$\left[J^i(\mu,\lambda), J^j(\mu,\lambda)\right] = 0 \tag{3.39}$$

e, portanto, a seguinte representação

$$g^{(1)}(F,\mu,\lambda) = e^{K(F)} e^{\sum_{i=1}^{n} f_i J^i(\mu,\lambda)} \tag{3.40}$$

é válida. Note que para $n = 1$, que corresponde ao modelo sinh–Gordon, o fator diagonal no membro direito da equação acima desaparece, e terminamos com a forma exponencial do grupo de vestimento de um um–sóliton [42]. Prosseguimos com a seguinte observação, como foi notado em [30]: o problema geral do vestimento admite duas soluções dependentes das propriedades de analiticidade para $\lambda \to 0$ e $\lambda \to \infty$. Em outras palavras, as soluções (2.29a) e (2.29b) em particular, devido à decomposição de Gauss no grupo dos laços $\widetilde{SL}(n+1)$, representam dois elementos diferentes. Omitindo a dependência dos parâmetros do campo, podemos escrever

$$g(\lambda) \;=\; \begin{cases} g_+(\lambda) & \lambda \to 0 \\ \\ g_-(\lambda) & \lambda \to \infty \end{cases} \tag{3.41}$$

do que concluímos que o elemento $g(\lambda)$, que analisamos antes, é uma continuação analítica de dois elementos distintos do grupo de laços. Conforme [30] e [31], um elemento do grupo de vestimento é representado pelo par (g_+, g_-) havendo um difeomorfismo canônico entre estes elementos e o correspondente grupo dos laços:

$$(g_+, g_-) \to g_-^{-1} g_+ \tag{3.42}$$

Denotamos por $J_+^i(\mu,\lambda)$ e $J_-^i(\mu,\lambda)$ as expansões dos elementos (3.38b) em torno de $\lambda \to 0$ e $\lambda \to \infty$, e usando (3.38b), obtemos (3.40).

$$(g_-^{(1)})^{-1}(F,\mu,\lambda) g_+^{(1)}(F,\mu,\lambda) =: e^{\sum_{i=1}^{n} f_i I^i(\mu)} :$$

$$\begin{aligned} I^i(\mu) &= J_+^i(\mu,\lambda) - J_-^i(\mu,\lambda) = \\ &= -\sum_{l=1}^{n+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{E^{il}_{l-i+k(n+1)}}{\mu^{k(n+1)+l-i}} - \frac{E^{n+1\,l}_{l+k(n+1)}}{\mu^{k(n+1)+l}} \right), \quad i \in \mathbb{Z}_{n+1} \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde o produto normal : : significa escrever J_-^i à esquerda : $J_-^i J_+^j :=: J_+^j J_-^i := J_-^i J_+^j$ e os índices inferiores, como especificado no Capítulo 1 , incluem potências de λ. Para ser mais preciso, deve–se enfatizar que os elementos I^i não estão bem–definidos na álgebra dos laços. Para evitar esta dificuldade, considera-se a representação de nível 1 das correspondentes álgebras de Lie afins [37, 38, 45, 46]. Não é difícil calcular os comutadores dos elementos acima, com os elementos de grau ± 1 na sub–álgebra principal de Heisenberg (1.25). O resultado é

$$\begin{aligned} \left[I^i(\mu), \mathcal{E}_+\right] &= \mu\left(I^i(\mu) - I^{i-1}(\mu) + I^n(\mu)\right) \\ \left[I^i(\mu), \mathcal{E}_-\right] &= \frac{1}{\mu}\left(I^i(\mu) - I^{i+1}(\mu) + I^1(\mu)\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Comparando as expressões (3.43) com (1.16a), (1.16b) e (1.21), obtemos

$$I^i(\mu) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^l(\omega^{-il} - 1) F^l(\mu) \tag{3.45}$$

A identidade acima, junto com (1.22), (3.43) e (3.44) sugere uma relação com a abordagem dos operadores–de–vértice para os sólitons afins de Toda [37, 38].

Conclusões

Primeiramente, convém lembrar que há duas noções de sólitons que estão relacionadas, mas não são equivalentes [9, 11]. Um sóliton, do ponto–de–vista físico, é uma solução localizada das equações do campo, que apresenta quantidades físicas, como momentum, energia, etc. Há um outro conceito de sóliton adotado no MEI, segundo o qual os sólitons surgem quando o correspondente problema linear auxiliar não tem reflexão. Na presente, tese relaxamos as exigências físicas, e lidamos com os sólitons como se fossem tratados pelo MEI. A razão para utilizar esta abordagem é o fato de que o formalismo aqui desenvolvido pode ser repetido, sem qualquer modificação, na região física da constante de acoplamento. Devido a isto, para sermos mais concisos, preferimos trabalhar com um valor real da mesma, e apreciar a beleza álgebrica das soluções solitônicas.

Esta tese restringe–se somente ao estudo dos sólitons de Toda $A_n^{(1)}$. Uma razão disto, foi conservar a discussão o mais elementar possível. Por outro lado, nossa abordagem está baseada na observação de que a conexão (1.28) pertence à graduação principal. A graduação gera um automorfismo σ (1.5), produzindo uma simetria do sistema linear (1.29). Para álgebras de Lie gerais, pode–se repetir o procedimento do Capítulo 2 para se construir soluções solitônicas, mas em geral, não é possível construir uma expansão correspondente a (1.32). A razão disso é que a ordem de σ (1.5), exceto para as álgebras de Lie A_n e C_n, é sempre menor que a dimensão de qualquer representação irredutível.

Portanto para se generalizar o resultado dos Capítulos 2 e 3, temos que procurar uma simetria adicional do sistema linear (1.29). Este problema está sendo investigado.

Para finalizar, notemos que, em contraste com o artigo original [42], onde no caso particular do modelo de sinh–Gordon o problema da fatorização (3.15) foi tratado usando transformações de Bäcklund, preferimos a abordagem algébrico–recursiva descrita na última parte do Capítulo 3. Permanece uma questão em aberto relacionar estas duas abordagens. As transformações de Bäcklund para a equação $A_n^{(1)}$ de Toda é estudada em [53]. Como comentário final, ressaltamos que as expressões (3.43)–(3.45) fornecem a relação com o formalismo dos operadores–de–vértice, somente para as soluções de um sóliton. Esperamos voltar ao problema para N sólitons gerais mais tarde.

Referências

[1] J. Scott Russel, *Report on waves*, Proc. of the Britsh Association for the Advancement of Science, London, 1845, p. 311.

[2] D. J. Korteweg and G. de Vries, Phil. Mag. **39**(1895) 422.

[3] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15**(1965)240.

[4] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. Kruskal, R. M. Miura, Phys. Rev. Lett. **19**(1967)1095-1097.

[5] P. D. Lax, Commun. Pure Appl. Math. **21**(1968) 467-490.

[6] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Phys. Rev. Lett.**30** (1973)1262-1264.

[7] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Sov. Phys.**JETP 34** (1972)62-69.

[8] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Method*, SIAM, Philadelphia, 1981.

[9] L. D. Faddeev and L. A. Takhatajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer, 1986.

[10] S. Novikov, S. Manakov, L. P. Bitaevsky and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons*, Consultants Bureau, 1984.

[11] R. Rajaraman,*Solitons and Instantons*,Nort Holland, 1982.

[12] L. D. Faddeev and V. E. Korepin, Phys. Rep. **42** (1978) 1-87.

[13] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neven, Phys. Rev. **D11** (1975)3424.

[14] S. Coleman, Phys. Rev. **D11**(1975)2088.

[15] C. Rebbi and G. Soliani, *Solitons and Particles*, World Scientific.

[16] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426**(1994)19; Eratum **B430**(1994)485; Nucl. Phys. **B431**(1994)484.

[17] E. K. Sklyanin, L. A. Takhatajan and L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **40** (1980) 688-706.

[18] V. G. Drienfeld, Quantum Groups, in Proc. ICM, MSRI, Berkley, 1986, p. 708.

[19] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Ann. Phys. (M) **120**(1979)259.

[20] A. B. Zamolodchikov, Adv. Stud. Pure Math. **19**(1989)641.

[21] G. Mussardo, Phys. Rep. **218**(1992)215–319.

[22] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241**(1984)333–380.

[23] M. Toda, Phys. Rep. **18**(1978)1.

[24] D. Olive and N. Turok, Nucl.**B215**(1983)470; Nucl. Phys. **B220**(1983)491-507.

[25] V. G. Drinfeld and V. Sokolov, Sov. Math. Dokl. **23**(1981)457.

[26] N. Burroghs, M. de Groot, T. Hollowood and L. Miramontes, Phys. Lett. **B277**(1992)89–94

M. de Groot, T. Hollowood and L. Miramontes, Commun. Math. Phys. **145**(1992)57–84

N. Burroghs, M. de Groot, T. Hollowood and L. Miramontes,, Commun. Math. Phys. **153**(1993)187–215.

[27] D. Olive and N. Turok, Nucl. Phys. **B257**(1985)277–301; Nucl.Phys. **B265**(1986)469–484.

[28] V. Zakharov and A. Shabat, Funct. Anal. Appl. **13**(1979)166.

[29] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation Groups for Soliton Equations*, in: Non–linear integrable systems, eds M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983).

[30] O. Babelon, and D. Bernard, Phys. Lett. **B260** (1991) 81, Commun. Math. Phys. **149** (1992) 279.

[31] M. Semenov–Tian–Shansky, Publ. RIMS **21** (1985) 1237, hepth/9304042. M. Semenov–Tian–Shansky, *Poisson Lie Groups, Quantum Duality Principle, and the Quantum Double*, hep–th/9304042.

[32] G. Cuba and R. Paunov, Phys. Lett. **B381**(1996)255–261.

[33] G. Cuba, *Sólitons e a simetria de vestimento na equação de sine–Gordon*, Tese de Mestrado, CBPF, Rio de Janeiro, 1996.

[34] L. A. Ferreira, L. Miramontes and J. S. Guillén, *Tau–functions and Dressing Transformations for Zero–Curvature Affine Integrable Equations*, hep–th/9606066 and J. Math. Phys., to appear.

[35] T. Hollowood, Nucl. Phys. **B384**(1992)523-548.

[36] H. Aratyn, C. P. Constantinidis, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, Nucl. Phys. **B406**(1993)727

N. J. MacKay and W. A. McGhee, Int. J. Mod. Phys. **A8**(1993)2791–2807

Z. Zhu and D. G. Caldi, Nucl. Phys. **B436**(1995)659–678.

[37] D. I. Olive, M. W. Saveliev and J. W. Underwood, Phys. Lett **B311**(1993)117–122

D. I. Olive, N. Turok and J. W. Underwood, Nucl. Phys. **B401**(1993)663–697; Nucl. Phys. **B409**(1993)509–546

M. A. C. Kneipp and D. I. Olive, Nucl. Phys. **B408** (1993) 565–578

M. A. C. Kneipp, *Soliton and Vertex Operators in Affine Toda Field Theories,* Ph. D. thesis, Swansea, 1995.

[38] M. A. C. Kneipp and D. I. Olive, Commun. Math. Phys. **177** (1996)561–582.

[39] O. Babelon and D. Bernard, Phys Lett. **B317**(1993)363

H. Braden and A. N. W. Hone, Phys. Lett. **B380**(1996)296–302.

[40] E. Martinec and N. Warner, Nucl. Phys. **B459**(1996)97–112

R. Donagi and E. Witten, Nucl. Phys. **B460**(1996)299-334

I. M. Krichever and D. H. Phong, *On the Integrable Geometry of Soliton Equations and $N = 2$ Supersymmetric Gauge Theories*, hep-th/9604199

P. M. Sutclife, Phys. Lett **B381**(1996)130.

[41] E. Date, Osaka J. Math, **19**(1982)125.

[42] O. Babelon and D. Bernard, Int. J. Mod. Phy., **A8**(1993)507.

[43] M. Niedermaier, Commun. Math. Phys. **160** 391–429 (1994).

[44] H. Belich and R. Paunov, $A_n^{(1)}$ *Toda solitons and the dressing symmetry*, hep-th/9612029 and CBPF.NF059/96, submitted to J. Math. Phys.

[45] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras.*Third edition. Cambridge Univ. Press. 1990.

[46] G. G. A. Bäuerle and E. A. de Kerf, *Lie Algebras*, Part 1, Stud. in Math. Phys. **1**, North–Holland, Amsterdam.

[47] E. J. Beegs and P. R. Johnson, *Inverse Scattering and solitons in A_{n-1} affine Toda field theory*, `hep-th 9610104` and Nucl. Phys. **B**, to appear.

[48] H Flaschka and D. W. McLaughlin, Prog. Theor. Phys, **55**(1976)438.

[49] R. Paunov, Phys. Lett **B347**(1995)63.

[50] A. N. Leznov and M. V. Saveliev, Progress in Physics **15**, Birkhauser, Basel, 1992.

[51] O. Babelon and L. Bonora, Phys. Lett. **B244**(1990)220.

[52] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, Phys. Lett. **B254**(1991)372–380
C. P. Constantinidis, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, Phys. Lett. **B298**(1993)88–94.

[53] H. C. Liao, D. Olive and N. Turok, Phys. Lett. **B298**(1993)95–102.

"Solucões Solitônicas nos Modelos An(1) de Toda"

Humberto Belich Júnior

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Roman Raykov Paunov – Presidente/CBPF

Luis Agostinho Ferreira – USP

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Suplente: Marco Aurélio Cattacin Kneipp – CBPF

Rio de Janeiro, 21 de março de 1997