

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
LAFEX - Coordenação de Física Experimental
de Altas Energias

Gilson Correia Silva

Dissertação de Mestrado

**Prescrição para o cálculo da energia potencial
interpartículas em modelos eletromagnéticos com
termo de mixing**

Rio de Janeiro
2015

Gilson Correia Silva

**Prescrição para o cálculo da energia potencial interpartículas
em modelos eletromagnéticos com termo de mixing**



Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Antônio José Accioly

Rio de Janeiro
2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares pelo apoio dado a mim durante todos esses anos, entre eles Adailson Correia, Larissa Quirino, Tatiane Silva, Thaís Patrício e principalmente aos meus pais Glaciete Correia e José da Costa, que sempre se esforçaram para garantir que eu continuasse meus estudos, respeitando e apoiando minhas decisões.

Agradeço a todos os professores que tive durante minha carreira acadêmica, entre eles: Luís Fernando, Maria de Fátima, Marcelo Chiapparini, Daniel Barci, José Roberto Mahon, Rudnei Ramos, James Skea, José Abdalla Helayel e Sebastião Alves. E um agradecimento especial ao professor Antônio José Accioly que me orientou durante este trabalho.

Agradeço a todos meus amigos que proporcionam alegria e diversão a minha vida, em especial a Carlos Alexandre, Ana Luiza, Lauro Fares, Leonardo Brasil, Allan Lima, Michel Pereira, Fábio Costa, André Luiz, Karolyne Roberta, Walter Silva, João Gustavo, Rodrigo Genzo, Flávio Santiago, Vinicius Marques e Victor Maio.

Por fim, agradeço ao CNPq pela bolsa concedida durante o primeiro ano do mestrado e a FAPERJ pela concessão da Bolsa Nota 10 durante o segundo ano.

The effort to understand the universe is one of the very few things which lifts human life
a little above the level of farce and gives it some of the grace of tragedy.

Steven Weinberg

RESUMO

Um método para o cálculo da energia potencial interpartículas em modelos eletromagnéticos com mixing, que se apoia fortemente na integral de caminho de Feynman, é construído. A prescrição resultante é então utilizada na obtenção do potencial para o modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond e para uma extensão do modelo padrão na qual a eletrodinâmica $U(1)_{\text{QED}}$ é acoplada a um setor escondido $U(1)_h$.

Palavras-chave: modelos eletromagnéticos com mixing; eletrodinâmica de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond; para-fóton.

ABSTRACT

A method for computing the interparticle potential energy related to electromagnetic models with a mixing, which greatly relies on Feynman path integral, is built up. The resulting prescription is then utilized for obtaining the potential for Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond model and for an extension of the standard model in which the massless electrodynamics $U(1)_{\text{QED}}$ is coupled to a hidden sector $U(1)_h$.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	7
1	ENERGIA POTENCIAL INTERPARTÍCULAS	10
1.1	Energia potencial interpartículas e \mathcal{M}_{NR}	10
1.2	Eletrodinâmica de Maxwell	11
1.2.1	<u>Cálculo do propagador de Maxwell</u>	12
1.2.2	<u>Cálculo da energia potencial interpartículas</u>	14
1.3	Eletrodinâmica de Proca	16
1.3.1	<u>Cálculo do propagador de Proca</u>	16
1.3.2	<u>Cálculo da energia potencial interpartículas</u>	17
1.4	Eletrodinâmica de Kalb-Ramond	18
1.4.1	<u>Cálculo do propagador de Kalb-Ramond</u>	19
1.4.2	<u>Cálculo da energia potencial interpartículas</u>	21
2	ENERGIA POTENCIAL INTERPARTÍCULAS EM MODELOS COM TERMO DE MIXING	23
2.1	Energia potencial interpartículas e \mathcal{M}_{NR} em modelos com termo de mixing	23
2.2	Eletrodinâmica de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond	25
2.2.1	<u>Cálculo do propagador de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond</u>	25
2.2.2	<u>Energia potencial interpartículas no modelo CSKR</u>	28
2.3	Eletrodinâmica de Maxwell-Parafóton	30
2.3.1	<u>Cálculo do propagador de Maxwell-Parafóton</u>	30
2.3.2	<u>Energia potencial interpartículas no modelo Maxwell-Parafóton</u>	33
3	PRESCRIÇÃO PARA O CÁLCULO DA ENERGIA POTEN- CIAL INTERPARTÍCULAS EM MODELOS ELETRODINÂMICOS	35
3.1	Modelos compostos por um campo	35
3.2	Modelos com termo de mixing	36
3.2.1	<u>Álgebra entre os projetores e o operador de mixing</u>	37
3.2.2	<u>Cálculo do propagador</u>	39
3.2.3	<u>Prescrição para a energia potencial interpartículas</u>	41
4	CONCLUSÃO	43
	APÊNDICE A – Maxwell \times Kalb-Ramond	45
	REFERÊNCIAS	47

Introdução

De tempos em tempos, novos modelos eletromagnéticos surgem na literatura. As razões para estudar esses sistemas são muitas e de diferentes espécies: (i) controlar as divergências ultravioleta que geralmente estão presentes em modelos eletromagnéticos [1-23]; (ii) obter um sistema onde uma carga pontual tenha uma autoenergia finita (a eletrodinâmica de Born e Infeld é um exemplo típico [24-37]); (iii) encontrar um sistema que, além de possuir uma carga pontual com autoenergia finita, exiba também birrefringência (a eletrodinâmica logarítmica é um exemplo deste fato [38]); (iv) analisar modelos com violação de Lorentz [39-50]; e assim por diante.

No entanto, como é bem conhecido, esses modelos eletromagnéticos devem em geral reproduzir a energia potencial coulombiana no limite não relativístico mais uma correção a esta energia. Consequentemente, é de importância fundamental se ter um método simples para encontrar este potencial de modo que seu comportamento em baixas energias possa ser analisado pronta e eficientemente.

Existem, evidentemente, muitos métodos poderosos na literatura para a obtenção desse potencial no limite não relativístico. Infelizmente, todos esses métodos exigem cálculos algébricos excessivos e, como consequência, são processos que consomem muito tempo.

Por outro lado, foi construída recentemente uma prescrição bastante simples para o cômputo da energia potencial interpartículas para modelos eletromagnéticos D -dimensionais que se baseia fortemente na integral de trajetória de Feynman [54-56]. No caso de uma ‘corrente’ $J^\mu(x)$ dada por $J^\mu(x) = J_1^\mu(x) + J_2^\mu(x)$, onde $J_i^\mu(x) = Q_i \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i)$, $i = 1, 2$; ou seja, em que $J^\mu(x)$ é a soma de duas fontes que são espigões independentes do tempo e infinitamente pontudos localizados em \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 , a energia potencial D -dimensional pode ser computada através da expressão [51]

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}), \quad (0.1)$$

na qual $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ é o ‘propagador’ no espaço dos momentos obtido negligenciando-se todos os termos do propagador usual de Feynman no espaço dos momentos que sejam ortogonais às correntes externas conservadas, $\mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{P}_{\mu\nu}(k)|_{k^0=0}$ e $\mathbf{r} \equiv \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$.

A física desse modelo é bastante simples. A fonte existente na região 1 (vide Fig. 1) envia uma ‘perturbação do campo’ que é mais tarde absorvida pelo sorvedouro situado na região 2. Considerando um valor arbitrário de k , podemos dizer, apelando para o jargão usual da teoria quântica de campos, que uma ‘partícula virtual’ de momento k propaga-se da fonte para o sorvedouro.

No caso de duas massas localizadas M_1 e M_2 , pode-se mostrar, por outro lado, que

a energia potencial gravitacional D -dimensional obedece à equação [59]

$$E_D(r) = \kappa_D \frac{M_1 M_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}), \quad (0.2)$$

com

$$\kappa_D = \left(\frac{D-2}{D-3} \right) G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}, \quad (0.3)$$

em que κ_D é a constante de Einstein em D dimensões para $D > 3$, sendo G_D a constante de Newton em D dimensões e Γ a função gama. A constante de Einstein em $D = 3$, por sua vez, ao contrário da crença popular, não pode ser relacionada a G_3 , uma vez que a relatividade geral em $D = 3$, que é trivial, não possui limite newtoniano.

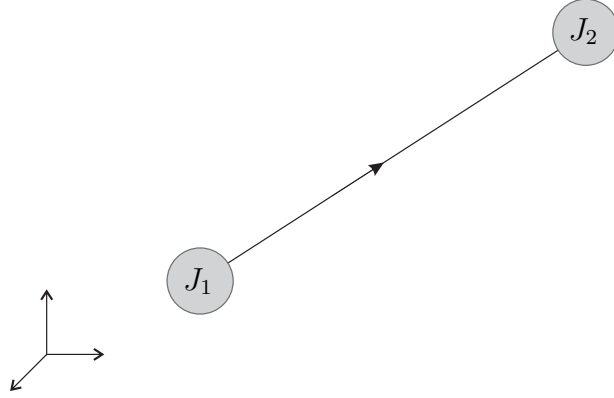


Figura 1 - Duas fontes localizadas nas regiões 1 e 2.

É possível também demonstrar que no caso de duas cargas escalares localizadas σ_1 e σ_2 , o potencial D -dimensional pode ser calculado via a expressão [60]

$$E_D(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}(\mathbf{k}). \quad (0.4)$$

No entanto, existem modelos eletromagnéticos, como o de Kalb-Ramond, por exemplo, onde a fonte e o sorvedouro não são cargas. E mais, sistemas com campos eletromagnéticos com um termo de mixing têm sido explorados com relativa frequência na literatura física. Nessas situações, a prescrição, a qual nos referimos anteriormente, não pode ser aplicada. Isto nos levou à elaboração deste trabalho, onde construímos um método para a obtenção da energia potencial interpartículas de modelos como os acima citados. Como os sistemas que analisaremos são quadridimensionais, a nossa prescrição será construída no espaço-tempo usual.

No Capítulo 1, utilizando a nossa experiência no trato com os modelos onde a fonte e o sorvedouro são cargas localizadas, elaboramos uma prescrição para o cálculo do potencial de Kalb-Ramond. Antes de calcular esse potencial, aplicamos o método,

como um teste preliminar, no cálculo dos potenciais associados às eletrodinâmicas de Maxwell e de Proca. Chamamos atenção para o fato que os citados potenciais podem ser calculados muito mais facilmente via a prescrição (1); na verdade, queríamos testar à ‘nova’ prescrição em modelos simples antes de nos aventurarmos em ‘águas mais agitadas’.

O Capítulo 2 é devotado ao cálculo da energia potencial interpartículas em modelos formados por dois campos eletromagnéticos mais um termo de mixing [61]. Em particular, abordamos os modelos de Cremmer-Scherk- Kalb-Ramond [53] e o do parafóton [63].

No Capítulo 3 é exibida a prescrição geral para o cálculo da energia potencial interpartículas em sistemas com dois campos eletromagnéticos acoplados por um termo de mixing [62].

Terminamos esse trabalho, apresentado alguns comentários sobre os resultados encontrados, assim como possíveis continuações dessas investigações.

1 ENERGIA POTENCIAL INTERPARTÍCULAS

Neste capítulo expomos o método que concebemos para calcular a energia potencial interpartículas. Tendo como objetivo mostrar a eficácia do mesmo, vamos aplicá-lo na obtenção da energia interpartículas relativa às teorias de Maxwell, Proca e Kalb-Ramond.

1.1 Energia potencial interpartículas e \mathcal{M}_{NR}

A prescrição que vamos construir para calcular a energia potencial, devida à presença de uma corrente externa conservada, apoia-se fortemente na conhecida relação entre o funcional gerador dos diagramas de Feynman conexos, $W(J)$, e o funcional gerador, $Z(J)$, de uma teoria eletromagnética cuja interação é transmitida por bósons descarregados [54-56],

$$Z(J) = e^{iW(J)} = \langle 0 | e^{-iHT} | 0 \rangle = e^{-iET},$$

em que

$$W(J) = -\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y J^{(\mu)}(x) D_{(\mu)(\nu)}(x-y) J^{(\nu)}(y).$$

Aqui, $D_{(\mu)(\nu)}(x-y)$ é o propagador e os parênteses nos índices representam a estrutura de índices da teoria (por exemplo, no caso da eletrodinâmica de Maxwell $(\mu) = \mu$, já na eletrodinâmica de Kalb-Ramond teremos $(\mu) = \mu\nu$, com μ e ν antissimétricos), enquanto que $J^{(\mu)}(x)$ é a corrente externa conservada. Agora, tendo em conta que

$$D_{(\mu)(\nu)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} D_{(\mu)(\nu)}(k),$$

e considerando uma configuração de corrente independente do tempo, $J^{(\mu)}(\mathbf{x})$, podemos escrever

$$W(J) = -\frac{T}{2} \int \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^0) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} J^{(\mu)}(\mathbf{x}) D_{(\mu)(\nu)}(k) J^{(\nu)}(\mathbf{y}),$$

em que o intervalo de tempo T é produzido pelo fator $\int dx^0$. Simples manipulações algébricas, por outro lado, permitem escrever essa equação como se segue

$$W(J) = -T \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} D_{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}) \Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}),$$

de maneira que, $\Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k})$ é definido como

$$\Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}) \equiv \int \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{J^{(\mu)}(\mathbf{x}) J^{(\nu)}(\mathbf{y})}{2}. \quad (1.1)$$

A vantagem em escrever a expressão de $W(J)$ dessa maneira, é que a separamos num objeto dependente apenas da estrutura da teoria em questão, o propagador $\mathcal{D}_{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k})$; e outro que depende apenas da forma da corrente conservada, $\Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k})$, que nos referiremos a partir de agora por “delta da corrente”. A expressão da energia potencial assume então a seguinte forma

$$E = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}) \Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}). \quad (1.2)$$

Ao casarmos, no entanto, a mecânica quântica com o limite não-relativístico da teoria quântica de campos, concluímos que [57,58],

$$E = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{M}_{\text{NR}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.3)$$

sendo $\mathbf{r} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{x}$ e \mathcal{M}_{NR} o limite não-relativístico da amplitude de Feynman. Consequentemente, utilizando (1.2) e (1.3), obtemos uma expressão para o cálculo de \mathcal{M}_{NR} ,

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{D}_{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}) \Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}). \quad (1.4)$$

No estudo dos modelos a seguir, seremos metódicos. Primeiramente, obteremos a amplitude de Feynman no limite não-relativístico através da equação (1.4), e em seguida, utilizando a expressão (1.3), calcularemos a energia potencial interpartículas.

1.2 Eletrodinâmica de Maxwell

Começamos analisando a eletrodinâmica de Maxwell, uma vez que é a teoria de gauge mais simples e faz parte do atual modelo padrão da física de partículas. Alguns desenvolvimentos apresentados nesta seção servirão também para o estudo da eletrodinâmica de Proca na seção seguinte, e delinearão a forma como abordaremos os modelos que serão estudados nesta dissertação. Trabalharemos sempre no sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$ e no sistema eletromagnético de unidades de Lorentz-Heaviside. Isto posto, escrevemos a lagrangeana de Maxwell na presença de uma corrente externa conservada,

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\nu A_\nu, \quad (1.5)$$

em que $F^{\mu\nu}(x)$ é o tensor de intensidade de campo. Ele é antissimétrico e definido por

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x).$$

A eletrodinâmica de Maxwell é invariante perante a transformação de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.6)$$

sendo $\alpha(x)$ uma função escalar arbitrária. A presença de uma corrente mantém a invariância de gauge devido ao fato da corrente satisfazer a relação, $\partial_\mu J^\mu = 0$, ou seja, ser conservada.

O tensor dual de $F^{\mu\nu}$ é definido por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Assim, pelas equações de movimento da lagrangeana (1.5) e pela propriedade do tensor dual, as equações covariantes da eletrodinâmica de Maxwell são escritas como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu,$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Elas descrevem um sistema dinâmico com dois graus de liberdade. Logo, o campo bosônico A^μ , responsável por transmitir a interação eletromagnética de Maxwell, possui apenas dois graus de liberdade físicos (on shell).

1.2.1 Cálculo do propagador de Maxwell

Para calcular a energia potencial interpartículas na eletrodinâmica de Maxwell, devemos primeiramente obter o propagador dessa teoria. Tratando-se de uma teoria de gauge, precisamos adicionar um termo fixador de gauge à lagrangeana. No gauge de Lorentz, esse termo assume a forma

$$\mathcal{L}_{\text{fg}} = -\frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu).$$

Podemos então escrever a lagrangeana de Maxwell no gauge de Lorentz da seguinte forma,

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell+fg}} = \frac{1}{2} A_\mu \left[\eta^{\mu\nu} \square + \frac{1-\lambda}{\lambda} \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu - A_\nu J^\nu,$$

e com isso identificamos o operador de onda da teoria no espaço dos momentos como sendo,

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) = -\eta^{\mu\nu}k^2 - \frac{1-\lambda}{\lambda}k^\mu k^\nu. \quad (1.7)$$

Definiremos agora os operadores de projeção úteis no cálculo do propagador de uma teoria formada por campos de rank-1, como é o caso do campo A^μ . Nessas teorias, o operador de onda no espaço dos momentos pertence ao grupo dos operadores de rank-2 simétricos. Os operadores $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ formam um conjunto completo de operadores de projeção de rank-2 e são definidos por

$$\omega^{\mu\nu} \equiv \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad \text{e} \quad \theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \quad (1.8)$$

Chamamos $\omega^{\mu\nu}$ de operador longitudinal, visto que ao aplicarmos em um quadrivetor qualquer, ele fornece a componente desse vetor paralela à direção de k , ou seja, paralela à direção de propagação da partícula que transmite a interação. Por outro lado, $\theta^{\mu\nu}$ é denominado operador transversal, já que quando aplicado em um quadrivetor qualquer, ele nos dá a componente desse vetor ortogonal à direção de k^μ . Segue diretamente dessa definição que contraindo os operadores de projeção com k^μ obtemos

$$\omega^{\mu\nu}k_\nu = k^\mu \quad \text{e} \quad \theta^{\mu\nu}k_\nu = 0.$$

Sendo projetores, eles são idempotentes e ortogonais, de modo que

$$\theta_{\mu\alpha}\theta^\alpha{}_\nu = \theta_{\mu\nu},$$

$$\omega_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu = \omega_{\mu\nu},$$

$$\theta_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu = 0.$$

Essas relações são representadas na tabela abaixo.

	θ	ω
θ	θ	0
ω	0	ω

Tabela 1 - Tabela multiplicativa dos operadores de projeção θ e ω .

Por fim, uma propriedade básica de operadores de projeção é que a identidade, $I^{\mu\nu}$, do grupo é dada pela soma dos operadores de projeção,

$$I^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu},$$

de modo que $I^\mu_\alpha \theta^{\alpha\nu} = \theta^{\mu\nu}$ e $I^\mu_\alpha \omega^{\alpha\nu} = \omega^{\mu\nu}$, como é fácil observar.

Visto que $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ formam um conjunto completo de operadores de projeção, podemos escrever o operador de onda no espaço dos momentos em termos deles, obtendo

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) = -k^2 \theta^{\mu\nu} - \frac{k^2}{\lambda} \omega^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Escrever o operador de onda dessa maneira facilita o cálculo do propagador definido por $D^{\mu\nu}(k) \equiv (\mathcal{O}^{-1})^{\mu\nu}(k)$. Escrevendo o operador \mathcal{O} e seu inverso \mathcal{O}^{-1} genericamente como

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = A\omega^{\mu\nu} + B\theta^{\mu\nu},$$

$$(\mathcal{O}^{-1})^{\mu\nu} = C\omega^{\mu\nu} + D\theta^{\mu\nu},$$

e lembrando que $\mathcal{O}^\mu_\alpha (\mathcal{O}^{-1})^{\alpha\nu} = I^{\mu\nu}$, encontramos que $C = 1/A$ e $D = 1/B$. Portanto, segue-se que o propagador de Maxwell é dado por

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \theta^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2} \omega^{\mu\nu},$$

e conseqüentemente,

$$D^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} I^{\mu\nu} - \frac{1-\lambda}{\mathbf{k}^2} \omega^{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Devido ao propagador aparecer no cálculo da energia potencial contraído com as correntes conservadas, os termos do propagador que contém k^μ ou k^ν não contribuirão. Isso ocorre em virtude da conservação da corrente no espaço dos momentos ser expressa por $k_\mu J^\mu = 0$, que implica k^μ e J^μ serem ortogonais. Assim, definimos $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ como o “propagador” no qual foram excluídos os termos ortogonais à corrente. Na eletrodinâmica de Maxwell, isso resulta em

$$\mathcal{P}_M^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{P}_M(\mathbf{k}) I^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

com

$$\mathcal{P}_M(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2}. \quad (1.12)$$

Pela definição de $\mathcal{P}^{\mu\nu}$, ele será sempre expresso por uma função de \mathbf{k} vezes a identidade associada aos projetores usados, por isso escrevemos a eq.(1.11) dessa maneira.

1.2.2 Cálculo da energia potencial interpartículas

Para calcular a energia potencial interpartículas, propomos uma configuração de corrente independente do tempo que represente duas partículas carregadas de cargas q_1 e q_2 , localizadas nos pontos \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 respectivamente. Tal configuração está representada

na figura 2. Assim, temos que

$$J^\mu(\mathbf{x}) = \eta^{0\mu} [q_1 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + q_2 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)]. \quad (1.13)$$

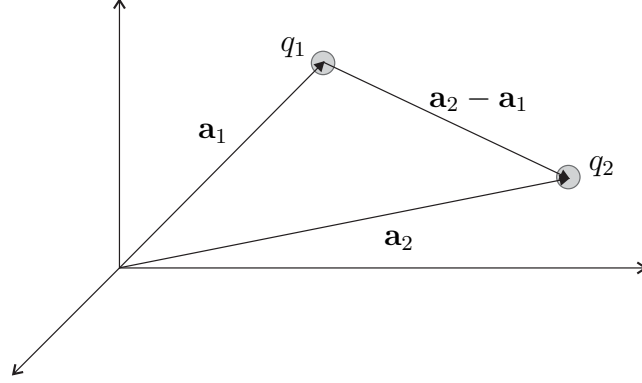


Figura 2 - Duas partículas de cargas q_1 e q_2 localizadas nos pontos \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 .

Estamos interessados na energia de interação entre as duas partículas, de modo que, ao fazermos o produto das correntes, consideramos apenas os termos de interação entre as cargas q_1 e q_2 , o que leva a

$$[J^\mu(\mathbf{x})J^\nu(\mathbf{y})]_{\text{int.}} = 2q_1q_2\eta^{0\mu}\eta^{0\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_2).$$

Com isso, obtemos o delta das correntes para a corrente proposta em (1.13),

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}) &= q_1q_2 \int \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} \eta^{0\mu}\eta^{0\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_2) \\ &= q_1q_2\eta^{0\mu}\eta^{0\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

em que definimos $\mathbf{r} \equiv \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$.

O produto do propagador com o delta das correntes resulta em

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{k})\Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_M(\mathbf{k})\Delta^\mu{}_\mu(\mathbf{k}) = \frac{q_1q_2}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.15)$$

Conseqüentemente, temos que a amplitude de Feynman no limite não-relativístico, segundo a eletrodinâmica de Maxwell, é igual a

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \frac{q_1q_2}{\mathbf{k}^2}, \quad (1.16)$$

e conseqüentemente a energia potencial interpartículas assume a forma

$$E(r) = q_1q_2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} = \frac{q_1q_2}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad (1.17)$$

sendo $r \equiv |\mathbf{r}|$ a distância entre as duas partículas. Chegamos, portanto, à energia potencial de Coulomb, o que mostra a eficiência do método.

1.3 Eletrodinâmica de Proca

A eletrodinâmica de Proca, na presença de uma corrente conservada, é descrita pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - J^\nu A_\nu. \quad (1.18)$$

Essa eletrodinâmica é uma versão modificada da eletrodinâmica de Maxwell. Ela é obtida inserindo um termo de massa na lagrangeana de Maxwell. As equações de movimento resultantes são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu. \quad (1.19)$$

Tomando a divergência da equação (1.19) encontramos

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0,$$

e como, por hipótese, $m^2 \neq 0$, temos que $\partial_\nu A^\nu = 0$. Dessa forma, na eletrodinâmica de Proca, a condição de Lorentz é sempre válida. A condição de Lorentz implica apenas três graus de liberdade para A^μ , o que caracteriza um campo de spin 1 massivo (on shell). Substituindo-a na equação (1.19), obtemos

$$(\square + m^2)A^\nu = J^\nu,$$

mostrando que na eletrodinâmica de Proca, as partículas bosônicas que transmitem a interação apresentam massa m .

1.3.1 Cálculo do propagador de Proca

O cálculo do propagador da eletrodinâmica de Proca é uma tarefa fácil, visto que o procedimento é idêntico ao realizado no cálculo do propagador de Maxwell. Primeiramente, escrevemos a lagrangeana de Proca na forma abaixo,

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = \frac{1}{2}A_\mu [(\square + m^2)\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu - A_\nu J^\nu, \quad (1.20)$$

de modo que identificamos diretamente o operador de onda no espaço dos momentos da teoria como sendo

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) = -(k^2 - m^2)\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu.$$

Para obtermos o propagador fazemos uso novamente dos operadores de projeção $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$. Escrevendo o operador de onda em termos deles, obtemos

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) = -(k^2 - m^2)\theta^{\mu\nu} - m^2\omega^{\mu\nu}.$$

Feito isso, o propagador $D^{\mu\nu}(k)$ é facilmente obtido invertendo as componentes dos operadores de projeção, resultando em

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2}\theta^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\omega^{\mu\nu}.$$

Fazendo $k^0 = 0$ e desprezando os termos ortogonais às correntes conservadas, chegamos à expressão de $\mathcal{P}_P^{\mu\nu}(\mathbf{k})$ na eletrodinâmica de Proca,

$$\mathcal{P}_P^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{P}_P(\mathbf{k})I^{\mu\nu}, \quad (1.21)$$

com

$$\mathcal{P}_P(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (1.22)$$

1.3.2 Cálculo da energia potencial interpartículas

Encontramos uma expressão diferente para $\mathcal{P}^{\mu\nu}(\mathbf{k})$, visto que ele depende da forma da lagrangeana da teoria. Porém, $\Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k})$ é igual ao encontrado na teoria de Maxwell, uma vez que ainda estamos calculando a energia de interação entre duas partículas carregadas descritas pela corrente (1.13). Assim, o produto do propagador com o delta das correntes fica

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{k})\Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_M(\mathbf{k})\Delta^\mu{}_\mu(\mathbf{k}) = \frac{q_1q_2}{\mathbf{k}^2 + m^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.23)$$

Portanto, a amplitude de Feynman no limite não-relativístico na eletrodinâmica de Proca é dada por

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \frac{q_1q_2}{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (1.24)$$

e a energia potencial interpartículas assume a forma

$$E(r) = q_1q_2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{q_1q_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (1.25)$$

que é a forma bem conhecida da energia potencial de Yukawa em que a partícula que transmite a interação é massiva.

1.4 Eletrodinâmica de Kalb-Ramond

Trataremos agora de uma teoria de gauge conhecida como eletrodinâmica de Kalb-Ramond, cuja interação é transmitida por um campo de rank-2 antissimétrico, $B^{\mu\nu}(x)$. A lagrangeana dessa teoria, na presença de uma corrente externa conservada, é dada por [52]

$$\mathcal{L}_{\text{KR}} = \frac{1}{6} G^{\mu\nu\alpha} G_{\mu\nu\alpha} + B_{\nu\alpha} J^{\nu\alpha}, \quad (1.26)$$

sendo $G^{\mu\nu\alpha}$ o tensor intensidade de campo, definido como

$$G^{\mu\nu\alpha} \equiv \partial^\mu B^{\nu\alpha} + \partial^\nu B^{\alpha\mu} + \partial^\alpha B^{\mu\nu}.$$

Segundo essa definição, esse tensor é completamente antissimétrico. Ele é análogo a $F^{\mu\nu}$ na eletrodinâmica de Maxwell. A teoria de Kalb-Ramond é também invariante sob a transformação de gauge

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_\mu(x), \quad (1.27)$$

sendo $\Lambda_\mu(x)$ um quadrivetor arbitrário. A corrente $J^{\nu\alpha}(x)$ é um tensor de rank-2 antisimétrico que satisfaz a condição de conservação $\partial_\mu J^{\mu\nu} = 0$, mantendo assim a invariância de gauge da lagrangeana (1.26).

Devido à sua antissimetria, as componentes não nulas de $B^{\mu\nu}$ são B^{i0} e B^{ij} . Podemos, dessa maneira, associar a esse campo dois potenciais vetoriais, os quais denotaremos por $\mathbf{X}(x)$ e $\mathbf{Y}(x)$, cujas componentes são definidas por $B^{i0} \equiv X^i$ e $B^{ij} \equiv \epsilon^{0ijk} Y_k$. Em virtude também da antissimetria de $G^{\mu\nu\alpha}$, suas componentes não nulas são da forma G^{0ij} e G^{ijk} . Assim, associamos ao tensor intensidade de campo, os campos escalar $\mathcal{B}(x)$ e vetorial $\mathcal{E}(x)$ definidos por $G^{ijk} \equiv \epsilon^{0ijk} \mathcal{B}$ e $G^{0ij} \equiv -\epsilon^{0ijk} \mathcal{E}_k$. Eles são análogos ao campo elétrico $\mathbf{E}(x)$ e magnético $\mathbf{B}(x)$ da eletrodinâmica de Maxwell. No apêndice A, fazemos uma exposição comparativa da estrutura das eletrodinâmicas de Maxwell e Kalb-Ramond.

O dual do tensor intensidade de campo, na eletrodinâmica de Kalb-Ramond, é um tensor de rank-1, definido como

$$\tilde{G}^\mu = \frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\nu\alpha\beta}.$$

Partindo das equações de movimento da lagrangeana (1.26) e apelando para a propriedade do tensor dual, chegamos às equações que descrevem a eletrodinâmica de Kalb-Ramond no formalismo covariante,

$$\begin{aligned} \partial_\mu G^{\mu\nu\alpha} &= J^{\nu\alpha}, \\ \partial_\mu \tilde{G}^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Temos portanto um sistema dinâmico com apenas um grau de liberdade. Logo, o campo bosônico $B^{\mu\nu}$, que transmite a interação na teoria de Kalb-Ramond, possui apenas um grau de liberdade físico (on shell).

1.4.1 Cálculo do propagador de Kalb-Ramond

Vamos agora calcular o propagador da eletrodinâmica de Kalb-Ramond. Em primeiro lugar, adicionamos à lagrangeana desse modelo o termo fixador de gauge

$$\mathcal{L}_{\text{fg}} = \frac{1}{2\beta} \partial_\mu B^{\mu\nu} \partial_\alpha B^\alpha{}_\nu,$$

o que permite escrever lagrangeana de Kalb-Ramond, nesse gauge, como se segue

$$\mathcal{L}_{\text{KR+fg}} = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} \mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + B_{\mu\nu} J^{\mu\nu}.$$

O operador de onda é constituído de uma parte relativa à lagrangeana (1.26) e outra relativa ao termo fixador de gauge, $\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta} = \mathcal{O}_{\text{KR}}^{\mu\nu,\alpha\beta} + \mathcal{O}_{\text{fg}}^{\mu\nu,\alpha\beta}$, as quais são dadas por

$$\mathcal{O}_{\text{KR}}^{\mu\nu,\alpha\beta} = -\frac{\square}{2} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\beta} \partial^\alpha \partial^\nu - \eta^{\mu\alpha} \partial^\beta \partial^\nu + \eta^{\nu\alpha} \partial^\beta \partial^\mu - \eta^{\nu\beta} \partial^\alpha \partial^\mu),$$

$$\mathcal{O}_{\text{fg}}^{\mu\nu,\alpha\beta} = -\frac{1}{4\beta} (\eta^{\nu\beta} \partial^\mu \partial^\alpha - \eta^{\nu\alpha} \partial^\mu \partial^\beta + \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta - \eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha).$$

Os componentes do operador de onda foram escritos desse modo a fim de manter a simetria dos índices. Escrevendo-os no espaço dos momentos, obtemos

$$\mathcal{O}_{\text{KR}}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = \frac{k^2}{2} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) + \frac{1}{2} (\eta^{\mu\beta} k^\alpha k^\nu - \eta^{\mu\alpha} k^\beta k^\nu + \eta^{\nu\alpha} k^\beta k^\mu - \eta^{\nu\beta} k^\alpha k^\mu), \quad (1.28)$$

$$\mathcal{O}_{\text{fg}}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = \frac{1}{4\beta} (\eta^{\nu\beta} k^\mu k^\alpha - \eta^{\nu\alpha} k^\mu k^\beta + \eta^{\mu\alpha} k^\nu k^\beta - \eta^{\mu\beta} k^\nu k^\alpha). \quad (1.29)$$

Seguindo a mesma linha utilizada no cálculo do propagador de Maxwell, definiremos os operadores de projeção a serem usados no cálculo do propagador da teoria de Kalb-Ramond, formada por campo antissimétrico de rank-2. O operador de onda no espaço dos momentos, nesse caso, é um operador de rank-4 antissimétrico nos dois primeiros e dois últimos índices, e simétrico na troca dos dois primeiros com os dois últimos. De maneira similar a $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$, faremos uso dos operadores $(P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $(P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}$, que são os operadores de projeção transversal e longitudinal respectivamente, definidos por

$$(P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\theta^{\mu\alpha} \theta^{\nu\beta} - \theta^{\mu\beta} \theta^{\nu\alpha}), \quad (1.30)$$

$$(P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta^{\mu\alpha}\omega^{\nu\beta} + \theta^{\nu\beta}\omega^{\mu\alpha} - \theta^{\mu\beta}\omega^{\nu\alpha} - \theta^{\nu\alpha}\omega^{\mu\beta}). \quad (1.31)$$

Eles são obviamente idempotentes e ortogonais, como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} (P_b)^{\mu\nu,\sigma\rho}(P_b)_{\sigma\rho}{}^{\alpha\beta} &= (P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta}, \\ (P_e)^{\mu\nu,\sigma\rho}(P_e)_{\sigma\rho}{}^{\alpha\beta} &= (P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}, \\ (P_e)^{\mu\nu,\sigma\rho}(P_b)_{\sigma\rho}{}^{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Essas relações estão representadas na tabela 2.

	P_b	P_e
P_b	P_b	0
P_e	0	P_e

Tabela 2 - Tabela multiplicativa dos operadores de projeção P_b e P_e .

Usando a propriedade de que o operador identidade é igual à soma dos operadores de projeção, temos que a identidade $\mathbb{I}^{\mu\nu,\alpha\beta}$, nesse grupo, é

$$\mathbb{I}^{\mu\nu,\alpha\beta} = (P_b + P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}),$$

que implica $\mathbb{I}^{\mu\nu,\sigma\rho}(P_b)_{\sigma\rho}{}^{\alpha\beta} = (P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $\mathbb{I}^{\mu\nu,\sigma\rho}(P_e)_{\sigma\rho}{}^{\alpha\beta} = (P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}$. Por fim, sendo os operadores de projeção formados por um projetor transversal e um longitudinal à direção de k^μ , quando contraídos com k^μ , resultam em

$$(P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}k_\beta = \mathbb{I}^{\mu\nu,\alpha\beta}k_\beta \quad \text{e} \quad (P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta}k_\beta = 0.$$

Portanto, escrevendo o operador de onda no espaço dos momentos em termos dos operadores de projeção, obtemos

$$\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = k^2(P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{k^2}{2\beta}(P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}.$$

Identicamente ao caso de Maxwell, devido à relação $\mathcal{O}^{\mu\nu,\sigma\rho}(\mathcal{O}^{-1})_{\sigma\rho}{}^{\alpha\beta} = \mathbb{I}^{\mu\nu,\alpha\beta}$, o propagador é obtido facilmente invertendo as componentes de cada operador de projeção. Assim, o propagador de Kalb-Ramond é dado por

$$D^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{k^2}(P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\beta}{k^2}(P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}.$$

Logo, chegamos à seguinte expressão para $\mathcal{P}_{\text{KR}}^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})$,

$$\mathcal{P}_{\text{KR}}^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{P}_{\text{KR}}(\mathbf{k}) \mathbb{I}^{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (1.32)$$

em que

$$\mathcal{P}_{\text{KR}}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\mathbf{k}^2}. \quad (1.33)$$

1.4.2 Cálculo da energia potencial interpartículas

Uma vez que a corrente de Kalb-Ramond deve satisfazer a equação de conservação $\partial_\mu J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = 0$, ela pode ser escrita da forma mais geral como

$$J^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu V_\nu(\mathbf{x}), \quad (1.34)$$

sendo $V_\nu(\mathbf{x})$ um quadrivetor genérico. Propomos uma configuração de corrente independente do tempo que represente dois quadrivetores constantes V_1^μ e V_2^μ , localizadas nos pontos \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 respectivamente, como segue

$$J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{\mu\nu\rho i} \partial_i [(V_1)_\rho \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + (V_2)_\rho \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)]. \quad (1.35)$$

O que representam esses quadrivetores será discutido na conclusão.

No cálculo do produto das correntes, como estamos interessados na energia de interação entre as partículas, consideraremos apenas os termos de interação entre os quadrivetores V_1^μ e V_2^μ , resultando em

$$[J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) J^{\alpha\beta}(\mathbf{y})]_{\text{int.}} = (V_1)_\rho (V_2)_\gamma \epsilon^{\mu\nu\rho i} \epsilon^{\alpha\beta\gamma j} \partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) \partial_j \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_2).$$

Tendo obtido a expressão do produto entre as correntes, $\Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})$ fica

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) &= \frac{(V_1)_\rho (V_2)_\gamma}{2} \int \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \epsilon^{\mu\nu\rho i} \epsilon^{\alpha\beta\gamma j} [\partial_i^{(x)} \partial_j^{(y)} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}] \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_2) \\ &= \frac{(V_1)_\rho (V_2)_\gamma}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho i} \epsilon^{\alpha\beta\gamma j} k_i k_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

em que foi utilizada a propriedade das funções delta para atuarmos com as derivadas em $e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}$.

Com isso, obtemos prontamente que o produto do propagador com o delta das

correntes na eletrodinâmica de Kalb-Ramond pode ser escrito como

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})\Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_M(\mathbf{k})\Delta^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = - \left[V_1^0 V_2^0 - \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2)}{\mathbf{k}^2} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.37)$$

Conseqüentemente, a amplitude de Feynman no limite não-relativístico assume a forma

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = -V_1^0 V_2^0 + \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2)}{\mathbf{k}^2}, \quad (1.38)$$

sendo a energia potencial interpartículas dada por

$$E(\mathbf{r}) = (-V_1^0 V_2^0 + \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2)}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.39)$$

A primeira integral de (1.39) é nula para o caso em questão no qual $\mathbf{r} \neq 0$. Segue-se então que a energia potencial é expressa por

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{4\pi r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}_2)}{4\pi r^5}. \quad (1.40)$$

Notemos que a componente temporal dos quadri-vetores não contribui para a energia potencial. Podemos dizer que, efetivamente, estamos tratando da interação entre dois vetores \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 localizados nos pontos \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 respectivamente, conforme representado na figura 3. Discutiremos uma possível interpretação para esses vetores na parte final deste trabalho.

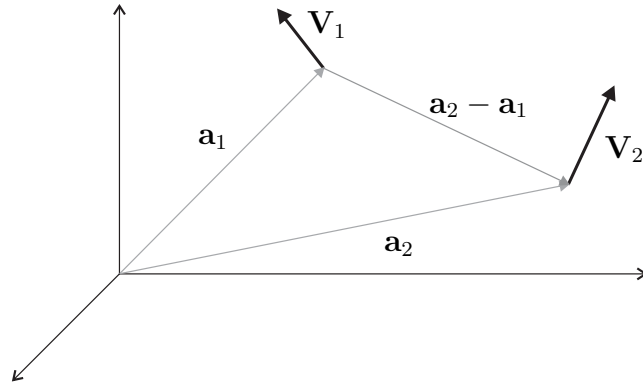


Figura 3 - Dois vetores \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 localizadas nos pontos \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 .

2 ENERGIA POTENCIAL INTERPARTÍCULAS EM MODELOS COM TERMO DE MIXING

Calcularemos a energia potencial interpartículas em modelos formados por dois campos acoplados por um termo de mixing. Primeiramente desenvolveremos o método que construímos para tratar esses tipos de teorias. Em seguida, aplicaremos esta prescrição a duas teorias conhecidas, o modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR) que acopla as teorias de Maxwell e Kalb-Ramond, e o modelo Maxwell-Parafóton que acopla a teoria de Maxwell com o setor do fóton escondido.

2.1 Energia potencial interpartículas e \mathcal{M}_{NR} em modelos com termo de mixing

Propomos um modelo genérico formado por um sistema de dois campos que interagem entre si. Denotaremos os campos por $A^{(\mu)}$ e $B^{[\nu]}$, de modo que os parênteses nos índices representem a estrutura de índices do campo A e os colchetes representem a estrutura de índices do campo B . A forma geral da lagrangeana de um modelo desse tipo é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B + A_{(\mu)} S^{(\mu)[\alpha]} B_{[\alpha]} + A_{(\mu)} J_A^{(\mu)} + B_{[\alpha]} J_B^{[\alpha]}. \quad (2.1)$$

Os dois primeiros termos correspondem aos modelos livres \mathcal{L}_A e \mathcal{L}_B , o terceiro é o termo de mixing que acopla os campos, e os dois últimos são os termos de interação com correntes externas conservadas.

Queremos escrever a lagrangeana (2.1) de uma forma mais apropriada a nosso objetivo de calcular a energia potencial interpartículas. Assim, a colocamos numa forma “simétrica” entre os campos A e B , isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} A_{(\nu)} \mathcal{O}_A^{(\mu)(\nu)} A_{(\mu)} + \frac{1}{2} B_{[\alpha]} \mathcal{O}_B^{[\alpha][\beta]} B_{[\beta]} + \frac{1}{2} A_{(\mu)} S^{(\mu)[\alpha]} B_{[\alpha]} \pm \frac{1}{2} B_{[\alpha]} S^{[\alpha](\mu)} A_{(\mu)} + \\ & + A_{(\mu)} J_A^{(\mu)} + B_{[\alpha]} J_B^{[\alpha]}. \end{aligned}$$

A indeterminação do sinal no quarto termo decorre da possível presença de derivadas no operador de mixing, $S^{(\mu)[\nu]}$, que caracteriza a forma do acoplamento entre os campos $A^{(\mu)}$ e $B^{[\nu]}$. Na ausência de derivadas ou presença de um número par de derivadas o sinal será positivo, caso o número de derivadas seja ímpar o sinal será negativo. A lagrangeana

“simetrizada” pode ser expressa na forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_{(\mu)} & B_{[\alpha]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{(A)}^{(\mu)(\nu)} & S^{(\mu)[\beta]} \\ (\pm)S^{[\alpha](\nu)} & \mathcal{O}_{(B)}^{[\alpha][\beta]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{(\nu)} \\ B_{[\beta]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{(\mu)} & B_{[\alpha]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_A^{(\mu)} \\ J_B^{[\alpha]} \end{pmatrix},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{X}}_{(\mu),[\alpha]} \mathbf{O}^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]} \mathbf{X}_{(\nu),[\beta]} + \tilde{\mathbf{X}}_{(\mu),[\alpha]} \mathbf{J}^{(\mu),[\alpha]}, \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{X}^{(\mu),[\alpha]}$, $\mathbf{J}^{(\mu),[\alpha]}$ e $\mathbf{O}^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}$ são definidos por

$$\mathbf{X}^{(\mu),[\alpha]} \equiv \begin{pmatrix} A_{(\mu)} \\ B_{[\alpha]} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{(\mu),[\alpha]} \equiv \begin{pmatrix} J_A^{(\mu)} \\ J_B^{[\alpha]} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{(A)}^{(\mu)(\nu)} & S^{(\mu)[\beta]} \\ (\pm)S^{[\alpha](\nu)} & \mathcal{O}_{(B)}^{[\alpha][\beta]} \end{pmatrix},$$

e $\tilde{\mathbf{X}}^{(\mu),[\alpha]}$ é a transposta de $\mathbf{X}^{(\mu),[\alpha]}$.

Consequentemente a energia potencial pode ser calculada como se segue

$$E = \frac{1}{2} \int \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \tilde{\mathbf{J}}^{(\mu),[\alpha]}(\mathbf{x}) \mathbf{O}_{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}^{-1}(\mathbf{k}) \mathbf{J}^{(\nu),[\beta]}(\mathbf{y}),$$

sendo $(\mathbf{O}^{-1})^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(k)$ o propagador da teoria. A energia potencial também pode ser colocada sob a forma

$$E = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P}_{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k}) \Delta^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k}), \quad (2.3)$$

em que $\mathcal{P}_{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k})$ é o propagador no espaço dos momentos, no qual são desprezados os termos ortogonais às correntes conservadas e $k^0 = 0$. O delta das correntes, $\Delta^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k})$, é então definido como

$$\Delta^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k}) \equiv \int \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{\tilde{\mathbf{J}}^{(\mu),[\alpha]}(\mathbf{x}) \mathbf{J}^{(\nu),[\beta]}(\mathbf{y})}{2}. \quad (2.4)$$

Por fim, a expressão para a amplitude de Feynman no limite não-relativístico nesses modelos assume a forma

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k}) \Delta^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k}). \quad (2.5)$$

2.2 Eletrodinâmica de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond

A eletrodinâmica de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond é uma versão modificada da eletrodinâmica de Maxwell na qual o campo A^μ se acopla ao campo tensorial de rank-2, $B^{\mu\nu}$, da eletrodinâmica de Kalb-Ramond. A correspondente lagrangeana é dada por [53],

$$\mathcal{L}_{\text{CSKR}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{6}G_{\mu\nu\alpha}G^{\mu\nu\alpha} + \frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu\partial_\nu B_{\alpha\beta} + A_\mu J^\mu + B_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

cujas equações de movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\mu B_{\alpha\beta} + J^\nu = -\sqrt{2}m\tilde{G}^\nu + J^\nu, \quad (2.7a)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\alpha\beta} = \frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu}\partial_\nu A_\mu + J^{\alpha\beta} = \frac{m}{\sqrt{2}}\tilde{F}^{\alpha\beta} + J^{\alpha\beta}. \quad (2.7b)$$

Observa-se que o acoplamento é feito através dos tensores duais das teorias que atuam como uma “corrente” na dinâmica do outro campo.

2.2.1 Cálculo do propagador de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond

Vamos agora calcular o propagador do modelo CSKR. Como visto na seção 2.1 devemos colocar a lagrangeana (2.6) na forma “simetrizada”, resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CSKR}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{6}G_{\mu\nu\alpha}G^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2}A_\mu \left[\frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\partial_\nu \right] B_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{1}{2}B_{\alpha\beta} \left[-\frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\nu \right] A_\mu + A_\mu J^\mu + B_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

que também pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{CSKR}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & B_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_M^{\mu\nu} & S^{\mu\lambda\sigma} \\ -S^{\alpha\beta\nu} & \mathcal{O}_{KR}^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu \\ B_{\lambda\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_\mu & B_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^\mu \\ J^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

sendo $S^{\mu\alpha\beta} \equiv \frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\partial_\nu$ o operador de mixing; $\mathcal{O}_M^{\mu\nu}$ é o operador de onda da eletrodinâmica de Maxwell e $\mathcal{O}_{KR}^{\alpha\beta,\lambda\sigma}$ é operador de onda da eletrodinâmica de Kalb-Ramond. O campo $\mathbf{X}^{\mu,\alpha\beta}$ e a corrente $\mathbf{J}^{\mu,\alpha\beta}$, no modelo CSKR, por sua vez têm a forma

$$\mathbf{X}^{\mu,\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} A^\mu \\ B^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}^{\mu,\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} J^\mu \\ J^{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

O operador de onda generalizado, $\mathbf{O}^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}$, que identificamos na lagrangeana (2.8), escrito no espaço dos momentos é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{O}^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(k) &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}_M^{\mu\nu}(k) & \hat{S}^{\mu\lambda\sigma} \\ -\hat{S}^{\alpha\beta\nu} & \mathcal{O}_{KR}^{\alpha\beta,\lambda\sigma}(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k^2\theta^{\mu\nu} - \frac{k^2}{\lambda}\omega^{\mu\nu} & \frac{im}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\gamma}k_\gamma \\ -\frac{im}{\sqrt{2}}\epsilon^{\alpha\beta\nu\gamma}k_\gamma & k^2(P_b)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} + \frac{k^2}{2\beta}(P_e)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Colocamos um chapéu em S para designar o operador de mixing no espaço dos momentos.

As relações dos projetores $\theta^{\mu\nu}$, $\omega^{\mu\nu}$, $(P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $(P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}$ com o operador de mixing no espaço dos momentos, $\hat{S}^{\mu\alpha\beta}$, as quais serão necessárias no cálculo do propagador, são mostradas abaixo.

- Álgebra entre $\hat{S}^{\mu\alpha\beta}$, $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$:

$$\hat{S}^{\mu\alpha\beta}\hat{S}_{\alpha\beta\nu} = m^2k^2\theta^\mu{}_\nu, \quad (2.10a)$$

$$\hat{S}^{\mu\nu\alpha}\theta_{\alpha\beta} = \hat{S}^{\mu\nu}{}_\beta, \quad (2.10b)$$

$$\hat{S}^{\mu\nu\alpha}\omega_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.10c)$$

- Álgebra entre $\hat{S}^{\mu\alpha\beta}$, $(P_b)^{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $(P_e)^{\mu\nu,\alpha\beta}$:

$$\hat{S}^{\mu\nu\lambda}\hat{S}_{\lambda\alpha\beta} = m^2k^2(P_b)^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}, \quad (2.11a)$$

$$\hat{S}^{\lambda\mu\nu}(P_b)_{\mu\nu\alpha\beta} = \hat{S}^\lambda{}_{\alpha\beta}, \quad (2.11b)$$

$$\hat{S}^{\lambda\mu\nu}(P_e)_{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (2.11c)$$

O cálculo do propagador implica em inverter a matriz do operador de onda (2.9). Com essa finalidade, escrevemos o operador de onda e sua inversa genericamente por,

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{X} \\ \mathbb{Y} & \mathbb{B} \end{pmatrix}.$$

Agora, fazemos uso da relação,

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbb{I}_{CSKR} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{X} \\ \mathbb{Y} & \mathbb{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

em que I e \mathbb{I} são as identidades correspondentes aos projetores θ e ω e aos projetores P_b e P_e respectivamente. Resolvendo o sistema resultante, encontramos as expressões dos

operadores \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{X} e \mathbb{Y} em termos de A , B , X e Y .

$$\begin{cases} A\mathbb{A} + X\mathbb{Y} = I \\ A\mathbb{X} + X\mathbb{B} = 0 \\ Y\mathbb{A} + B\mathbb{Y} = 0 \\ Y\mathbb{X} + B\mathbb{B} = \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{A} = (A - XB^{-1}Y)^{-1} \\ \mathbb{B} = (B - YA^{-1}X)^{-1} \\ \mathbb{X} = -A^{-1}X(B - YA^{-1}X)^{-1} = -A^{-1}X\mathbb{B} \\ \mathbb{Y} = -B^{-1}Y(A - XB^{-1}Y)^{-1} = -B^{-1}Y\mathbb{A} \end{cases}$$

Fazendo os cálculos explicitamente, utilizando as álgebras (2.10) e (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{\mu\nu} &= [A^{\mu\nu} - X^{\mu\alpha\beta}(B^{-1})_{\alpha\beta,\lambda\sigma}Y^{\lambda\sigma\nu}]^{-1} = [\mathcal{O}_M^{\mu\nu}(k) + \hat{S}^{\mu\alpha\beta}(\mathcal{O}_{KR}^{-1})_{\alpha\beta,\lambda\sigma}(k)\hat{S}^{\lambda\sigma\nu}]^{-1} \\ &= -\frac{1}{k^2 - m^2}\theta^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}\omega^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^{\alpha\beta,\lambda\sigma} &= [B^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - Y^{\alpha\beta\mu}(A^{-1})_{\mu\nu}X^{\nu\lambda\sigma}]^{-1} = [\mathcal{O}_{KR}^{\alpha\beta,\lambda\sigma}(k) + \hat{S}^{\alpha\beta\mu}(\mathcal{O}_M^{-1})_{\mu\nu}(k)\hat{S}^{\nu\lambda\sigma}]^{-1} \\ &= \frac{1}{k^2 - m^2}(P_b)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} + \frac{2\beta}{k^2}(P_e)^{\alpha\beta,\lambda\sigma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^{\mu\lambda\sigma} &= -(A^{-1})^{\mu\nu}X_{\nu\alpha\beta}\mathbb{B}^{\alpha\beta,\lambda\sigma} = -(\mathcal{O}_M^{-1})^{\mu\nu}(k)\hat{S}_{\nu\alpha\beta}\mathbb{B}^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{k^2(k^2 - m^2)}\hat{S}^{\mu\lambda\sigma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}^{\alpha\beta\nu} &= -(B^{-1})^{\mu\nu,\lambda\sigma}Y_{\lambda\sigma\beta}\mathbb{A}^{\beta\alpha} = -(\mathcal{O}_{KR}^{-1})^{\mu\nu,\lambda\sigma}(k)(-\hat{S}_{\lambda\sigma\beta})\mathbb{A}^{\beta\alpha} \\ &= -\frac{1}{k^2(k^2 - m^2)}\hat{S}^{\alpha\beta\nu}. \end{aligned}$$

Logo, o propagador do modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond, $(\mathbf{O}^{-1})^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}$, é dado por,

$$(\mathbf{O}^{-1})^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(k) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2 - m^2}\theta^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}\omega^{\mu\nu} & \frac{1}{k^2(k^2 - m^2)}\hat{S}^{\mu\lambda\sigma} \\ -\frac{1}{k^2(k^2 - m^2)}\hat{S}^{\alpha\beta\nu} & \frac{1}{k^2 - m^2}(P_b)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} + \frac{2\beta}{k^2}(P_e)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}.$$

Podemos ver assim que, como no caso do operador de onda, os termos fora da diagonal principal do propagador, $(\mathbf{O}^{-1})^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(k)$, diferem apenas pelo sinal. Isso decorre do fato das álgebras (2.10) e (2.11) apresentarem a mesma estrutura como será mostrado no capítulo seguinte. Por fim, não considerando os termos que são ortogonais às correntes conservadas pelo fato deles quando contraídos com as mencionadas correntes levarem a

um resultado nulo, e fazendo $k^0 = 0$, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_A(\mathbf{k})I^{\mu\nu} & \mathcal{P}_S(\mathbf{k})\hat{S}^{\mu\lambda\sigma}(\mathbf{k}) \\ -\mathcal{P}_S(\mathbf{k})\hat{S}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{k}) & \mathcal{P}_B(\mathbf{k})\mathbb{I}^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}I^{\mu\nu} & \frac{1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + m^2)}\hat{S}^{\mu\lambda\sigma}(\mathbf{k}) \\ -\frac{1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + m^2)}\hat{S}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{k}) & -\frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m^2)}\mathbb{I}^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2.2 Energia potencial interpartículas no modelo CSKR

Vamos determinar a energia potencial interpartículas utilizando as correntes independentes do tempo abaixo,

$$J^\mu(\mathbf{x}) = \eta^{0\mu}[q_1\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + q_2\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)],$$

$$J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\rho i}\partial_i[(V_1)_\rho\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + (V_2)_\rho\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)].$$

Fazendo o produto do propagador com o delta das correntes obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(\mathbf{k})\Delta^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} \int \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}[\mathcal{P}_A(\mathbf{k})J^\mu(\mathbf{x})J_\mu(\mathbf{y}) + \\ &+ J^\mu(\mathbf{x})(\mathcal{P}_S)_{\mu\lambda\sigma}(\mathbf{k})J^{\lambda\sigma}(\mathbf{y}) + \mathcal{P}_B(\mathbf{k})J^{\alpha\beta}(\mathbf{x})J_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) \\ &- J^{\alpha\beta}(\mathbf{x})(\mathcal{P}_S)_{\alpha\beta\nu}(\mathbf{k})J^\nu(\mathbf{y})]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O segundo e quarto termos se cancelam, assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(\mathbf{k})\Delta^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(\mathbf{k}) &= \mathcal{P}_A(\mathbf{k})(\Delta_M)^\mu{}_\mu(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_B(\mathbf{k})(\Delta_{KR})^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \\ &= \left[\frac{q_1q_2 + (-V_1^0V_2^0 + \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2)}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que Δ_M e Δ_{KR} são os mesmo obtidos anteriormente (veja as equações (1.14) e (1.36)). A amplitude de Feynman no limite não-relativístico no modelo CSKR é então dada por

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \frac{q_1q_2 + (-V_1^0V_2^0 + \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2)}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.15)$$

No entanto, para encontrarmos a forma da energia potencial interpartículas devemos resolver as integrais

$$E(\mathbf{r}) = q_1 q_2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + (-V_1^0 V_2^0 + \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2)}{\mathbf{k}^2 + m^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.16)$$

Chegamos então à seguinte expressão para a energia potencial

$$E(\mathbf{r}) = \left[\frac{q_1 q_2}{r} + (-V_1^0 V_2^0 + \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) \frac{m^2}{r} - \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{r^2} \left(m + \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{m^2}{r^3} + \frac{3m}{r^4} + \frac{3}{r^5} \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}_2) \right] \frac{e^{-mr}}{4\pi}. \quad (2.17)$$

É interessante observar da equação acima que V_1^0 e V_2^0 , apesar de não contribuírem para a energia potencial da eletrodinâmica de Kalb-Ramond, no caso do modelo de CSKR, ao qual adicionamos um acoplamento com o setor de Maxwell, eles contribuem para a energia potencial entre as partículas. Obviamente, fazendo m igual a zero em (2.17), obtemos a soma dos resultados obtidos nas eletrodinâmicas de Maxwell e Kalb-Ramond.

Supondo agora, que o campo de Kalb-Ramond não interaja com o setor fermiônico, ou seja, invés de consideramos a corrente (1.35), propomos $J^{\alpha\beta} = 0$. Os resultados desse caso são facilmente obtidos fazendo $V_1^\mu = V_2^\mu = 0$ em (2.15) e (2.17). A amplitude de Feynman no limite não-relativístico pode então ser escrita como

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \frac{q_1 q_2}{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (2.18)$$

sendo a energia interpartículas dada por

$$E(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (2.19)$$

Essa é a mesma expressão que encontramos na eletrodinâmica de Proca. Além disso, a equação (2.7b) torna-se

$$\partial_\mu G^{\mu\alpha\beta} = \frac{m}{\sqrt{2}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu A_\nu,$$

que implica

$$\tilde{G}^\nu = \frac{m}{\sqrt{2}} A^\nu \Rightarrow \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (2.20)$$

Portanto, assim como em Proca, o gauge de Lorentz é fixado automaticamente. Substituindo (2.20) em (2.7a) chegamos a

$$(\square + m^2)A^\mu = 0,$$

o que mostra uma equivalência entre a eletrodinâmica de Proca e a eletrodinâmica de CSKR quando supomos que o apenas o campo A^μ interage com a matéria.

2.3 Eletrodinâmica de Maxwell-Parafóton

Este modelo é uma extensão do Modelo Padrão na qual a eletrodinâmica de Maxwell $U(1)_{\text{QED}}$ está acoplada ao campo do parafóton, B^μ . O setor escondido carrega a mesma simetria $U(1)$ do campo de Maxwell. Esse modelo é descrito pela lagrangeana [63]

$$\mathcal{L}_{\text{MP}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2B^\mu B_\mu - \frac{\chi}{2}F^{\mu\nu}H_{\mu\nu} - A_\mu J_A^\mu - B_\mu J_B^\mu, \quad (2.21)$$

na qual $H^{\mu\nu}$ é o tensor intensidade de campo relativo ao campo B^μ ,

$$H^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu.$$

Calculando as equações de movimento da lagrangeana (2.21), obtemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \chi(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)B_\mu = J_A^\nu, \quad (2.22a)$$

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} + m^2B^\nu + \chi(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)A_\mu = J_B^\nu. \quad (2.22b)$$

Tomando a divergência em (2.22b) obtemos que $\partial_\nu B^\nu$ é identicamente nula. Levando esse resultado em (2.22) as equações de movimento ficam

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \chi\square B^\nu = J_A^\nu, \quad (2.23a)$$

$$(\square + m^2)B^\nu + \chi(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)A_\mu = J_B^\nu. \quad (2.23b)$$

2.3.1 Cálculo do propagador de Maxwell-Parafóton

Realizaremos o mesmo procedimento usado no modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond. Começamos escrevendo a lagrangeana de Maxwell-Parafóton na forma “simetrizada”,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MP}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2B^\mu B_\mu + \frac{1}{2}A_\mu[\chi(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)]B_\nu + \\ & + \frac{1}{2}B_\nu[\chi(\square\eta^{\nu\mu} - \partial^\nu\partial^\mu)]A_\mu + A_\mu J_A^\mu + B_\mu J_B^\mu. \end{aligned}$$

Podemos então reescrevê-la como

$$\mathcal{L}_{\text{MP}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & B_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_M^{\mu\nu} & S^{\mu\beta} \\ S^{\alpha\nu} & \mathcal{O}_P^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu \\ B_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_\mu & B_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_A^\mu \\ J_B^\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

em que $S^{\mu\beta} \equiv \chi(\square\eta^{\mu\beta} - \partial^\mu\partial^\beta)$, $\mathcal{O}_M^{\mu\nu}$ é o operador de onda da eletrodinâmica de Maxwell e $\mathcal{O}_P^{\alpha\beta}$ é operador de onda da eletrodinâmica do Parafóton. O campo $\mathbf{X}^{\mu,\alpha}$ e a corrente $\mathbf{J}^{\mu,\alpha}$ são dados por

$$\mathbf{X}^{\mu,\alpha} \equiv \begin{pmatrix} A^\mu \\ B^\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}^{\mu,\alpha} \equiv \begin{pmatrix} J_A^\mu \\ J_B^\alpha \end{pmatrix}.$$

O operador de onda generalizado $\mathbf{O}^{\mu,\alpha;\nu,\beta}$, oriundo da lagrangeana (2.24) e escrito no espaço dos momentos, tem a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{O}^{\mu,\alpha;\nu,\beta}(k) &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}_M^{\mu\nu}(k) & \hat{S}^{\mu\beta} \\ \hat{S}^{\alpha\nu} & \mathcal{O}_P^{\alpha\beta}(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k^2\theta^{\mu\nu} - \frac{k^2}{\lambda}\omega^{\mu\nu} & -\chi k^2\theta^{\mu\beta} \\ -\chi k^2\theta^{\alpha\nu} & (m^2 - k^2)\theta^{\alpha\beta} + m^2\omega^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

sendo $\hat{S}^{\mu\beta} = -\chi(k^2\eta^{\mu\beta} - k^\mu k^\beta) = -\chi k^2\theta^{\mu\beta}$. Expomos agora as relações dos projetores $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ com o operador de mixing $\hat{S}^{\mu\nu}$, as quais usaremos no cálculo do propagador do modelo de Maxwell-Parafóton.

- Álgebra entre $\hat{S}^{\mu\nu}$, $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$:

$$\hat{S}^{\mu\lambda}\hat{S}_{\lambda\nu} = \chi^2 k^4 \theta^\mu{}_\nu, \quad (2.26a)$$

$$\hat{S}^{\mu\lambda}\theta_{\lambda\nu} = \hat{S}^\mu{}_\nu, \quad (2.26b)$$

$$\hat{S}^{\mu\lambda}\omega_{\lambda\nu} = 0. \quad (2.26c)$$

Vemos então, que diferentemente do caso anterior, nesse modelo temos apenas uma álgebra de operadores, uma vez que ambos os campos são do mesmo tipo (rank-1).

Para calcular o propagador, escrevemos o operador de onda e sua inversa genericamente como

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{X} \\ \mathbb{Y} & \mathbb{B} \end{pmatrix},$$

e fazemos uso da relação

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbb{I}_{PM} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{X} \\ \mathbb{Y} & \mathbb{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

em que I é a identidade correspondente aos projetores θ e ω . Com isso, chegamos às expressões dos operadores \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{X} , e \mathbb{Y} ,

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= (A - XB^{-1}Y)^{-1} \\ \mathbb{B} &= (B - YA^{-1}X)^{-1} \\ \mathbb{X} &= -A^{-1}X(B - YA^{-1}X)^{-1} = -A^{-1}X\mathbb{B} \\ \mathbb{Y} &= -B^{-1}Y(A - XB^{-1}Y)^{-1} = -B^{-1}Y\mathbb{A}.\end{aligned}$$

Os cálculos explícitos utilizando a álgebra (2.26) são mostrados abaixo,

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{\mu\nu} &= [A^{\mu\nu} - X^{\mu\alpha}(B^{-1})_{\alpha\beta}Y^{\beta\nu}]^{-1} = [\mathcal{O}_M^{\mu\nu}(k) - \hat{S}^{\mu\alpha}(\mathcal{O}_P^{-1})_{\alpha\beta}(k)\hat{S}^{\beta\nu}]^{-1} \\ &= \frac{k^2 - m^2}{\chi^2 k^4 + k^2(m^2 - k^2)}\theta^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}\omega^{\mu\nu},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^{\alpha\beta} &= [B^{\alpha\beta} - Y^{\alpha\mu}(A^{-1})_{\mu\nu}X^{\nu\beta}]^{-1} = [\mathcal{O}_P^{\alpha\beta}(k) - \hat{S}^{\alpha\mu}(\mathcal{O}_M^{-1})_{\mu\nu}(k)\hat{S}^{\nu\beta}]^{-1} \\ &= \frac{1}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)}\theta^{\alpha\beta} + \frac{1}{m^2}\omega^{\alpha\beta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^{\mu\beta} &= -(A^{-1})^{\mu\nu}X_{\nu\alpha}\mathbb{B}^{\alpha\beta} = -(\mathcal{O}_M^{-1})^{\mu\nu}(k)\hat{S}_{\nu\alpha}\mathbb{B}^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{\chi}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)}\theta^{\mu\beta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}^{\alpha\nu} &= -(B^{-1})^{\alpha\beta}Y_{\beta\mu}\mathbb{A}^{\mu\nu} = -(\mathcal{O}_P^{-1})^{\alpha\beta}(k)(-\hat{S}_{\beta\mu})\mathbb{A}^{\mu\nu} \\ &= -\frac{\chi}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)}\theta^{\alpha\nu}.\end{aligned}$$

Assim, o propagador do modelo de Maxwell-Parafóton, $(\mathbf{O}^{-1})^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}$, é

$$(\mathbf{O}^{-1})^{\mu,\alpha;\nu,\beta}(k) = \begin{pmatrix} \frac{k^2 - m^2}{\chi^2 k^4 + k^2(m^2 - k^2)}\theta^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}\omega^{\mu\nu} & -\frac{\chi}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)}\theta^{\mu\beta} \\ -\frac{\chi}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)}\theta^{\alpha\nu} & \frac{1}{m^2 - k^2(1 - \chi^2)}\theta^{\alpha\beta} + \frac{1}{m^2}\omega^{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Nota-se que, assim como o operador de onda, os termos fora da diagonal principal do propagador, $(\mathbf{O}^{-1})^{\mu,\alpha;\nu,\beta}(k)$, são idênticos. Desprezando os termos que são ortogonais às

correntes conservadas, e fazendo $k^0 = 0$, chegamos à expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_A(\mathbf{k})I^{\mu\nu} & \mathcal{P}_S(\mathbf{k})I^{\mu\beta} \\ \mathcal{P}_S(\mathbf{k})I^{\alpha\nu} & \mathcal{P}_B(\mathbf{k})I^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{\chi^2}{1 - \chi^2 \mathbf{k}^2 + M^2} \right] I^{\mu\nu} & -\frac{\chi}{1 - \chi^2 \mathbf{k}^2 + M^2} I^{\mu\beta} \\ -\frac{\chi}{1 - \chi^2 \mathbf{k}^2 + M^2} I^{\alpha\nu} & \frac{1}{1 - \chi^2 \mathbf{k}^2 + M^2} I^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

na qual definimos $M^2 \equiv m^2/(1 - \chi^2)$. No operador de mixing, a parte ortogonal às correntes conservadas não contribui, assim como nos elementos da diagonal principal.

2.3.2 Energia potencial interpartículas no modelo Maxwell-Parafóton

Seja a configuração de corrente independente do tempo

$$J^\mu(\mathbf{x}) = \eta^{0\mu} [q_1 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + q_2 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)],$$

$$J^\alpha(\mathbf{x}) = \eta^{0\alpha} [\rho_1 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + \rho_2 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)],$$

sendo q a carga relativa à eletrodinâmica de Maxwell e ρ a relativa à eletrodinâmica do Parafóton. O produto do propagador com o delta das correntes resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbf{k}) \Delta^{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} \int \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} [\mathcal{P}_A(\mathbf{k}) J^\mu(\mathbf{x}) J_\mu(\mathbf{y}) + \\ &+ \mathcal{P}_S(\mathbf{k}) J^\mu(\mathbf{x}) J_\mu(\mathbf{y}) + \mathcal{P}_B(\mathbf{k}) J^\alpha(\mathbf{x}) J_\alpha(\mathbf{y}) \\ &+ \mathcal{P}_S(\mathbf{k}) J^\alpha(\mathbf{x}) J_\alpha(\mathbf{y})]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

O segundo e quarto termos se somam, de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbf{k}) \Delta^{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbf{k}) &= \mathcal{P}_A(\mathbf{k}) (\Delta_A)^\mu{}_\mu(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_B(\mathbf{k}) (\Delta_B)^\mu{}_\mu(\mathbf{k}) \\ &+ 2\mathcal{P}_S(\mathbf{k}) (\Delta_S)^\mu{}_\mu(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

de maneira que os deltas das correntes são dados por

$$\Delta_A^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = q_1 q_2 \eta^{0\mu} \eta^{0\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.30)$$

$$\Delta_B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \rho_1 \rho_2 \eta^{0\alpha} \eta^{0\beta} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.31)$$

$$\Delta_S^{\mu\beta}(\mathbf{k}) = \frac{q_1 \rho_2 + q_2 \rho_1}{2} \eta^{0\mu} \eta^{0\beta} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.32)$$

Consequentemente, temos que

$$\mathcal{P}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbf{k})\Delta^{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbf{k}) = \left[\frac{q_1 q_2}{\mathbf{k}^2} + \frac{\chi^2 q_1 q_2 + \rho_1 \rho_2 - \chi(q_1 \rho_2 + q_2 \rho_1)}{(1 - \chi^2)(\mathbf{k}^2 + M^2)} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.33)$$

A amplitude de Feynman no limite não-relativístico no modelo de Maxwell-Parafóton fica

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = \frac{q_1 q_2}{\mathbf{k}^2} + \frac{\chi^2 q_1 q_2 + \rho_1 \rho_2 - \chi(q_1 \rho_2 + q_2 \rho_1)}{(1 - \chi^2)(\mathbf{k}^2 + M^2)}. \quad (2.34)$$

E resolvendo as integrais

$$E = q_1 q_2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left[\frac{\chi^2 q_1 q_2 + \rho_1 \rho_2 - \chi(q_1 \rho_2 + q_2 \rho_1)}{1 - \chi^2} \right] \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + M^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

encontramos a energia potencial interpartículas no modelo de Maxwell-Parafóton,

$$E(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\chi^2 q_1 q_2 + \rho_1 \rho_2 - \chi(q_1 \rho_2 + q_2 \rho_1)}{1 - \chi^2} \right] \frac{e^{-Mr}}{r}. \quad (2.35)$$

Vemos que o primeiro termo corresponde à teoria de Maxwell sozinha e o segundo termo surge do acoplamento com a eletrodinâmica do Parafóton.

3 PRESCRIÇÃO PARA O CÁLCULO DA ENERGIA POTENCIAL INTERPARTÍCULAS EM MODELOS ELETRODINÂMICOS

Mostramos nos capítulos anteriores o procedimento para se obter a energia potencial interpartículas em modelos eletrodinâmicos. Neste capítulo, construímos uma prescrição que facilite essa tarefa. No caso de modelos com apenas um campo, ela é facilmente obtida e será exposta na seção 3.1. Porém, em teorias com dois campos acoplados por um termo de mixing, faz-se necessária uma análise mais detalhada, que realizaremos na seção 3.2. A prescrição para o cálculo da energia potencial interpartículas para esses modelos será então abordada na subseção 3.2.3.

3.1 Modelos compostos por um campo

A informação que necessitamos do modelo eletrodinâmico está contida no operador de onda. Escrevendo o operador de onda, no espaço dos momentos, relativo a uma teoria associada ao campo genérico $A^{(\mu)}$, temos

$$O_A^{(\mu)(\nu)}(k) = a_t(k)T_A^{(\mu)(\nu)} + a_l(k)L_A^{(\mu)(\nu)}, \quad (3.1)$$

onde $T_A^{(\mu)(\nu)}$ e $L_A^{(\mu)(\nu)}$ são os operadores de projeção transversal e longitudinal respectivamente. Entre os coeficientes $a_t(k)$ e $a_l(k)$, apenas o primeiro contribui, como foi mostrado. O “propagador”, excluindo os termos ortogonais às correntes e com $k^0 = 0$, assume a forma $\mathcal{P}^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}(\mathbf{k})\mathbb{I}^{(\mu)(\nu)}$, sendo

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \frac{1}{a_t(\mathbf{k})}. \quad (3.2)$$

O delta das correntes, $\Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k})$, é expresso por

$$\Delta^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}) = \int \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} J^{(\mu)}(\mathbf{x})J^{(\nu)}(\mathbf{y}). \quad (3.3)$$

Estamos interessados em calcular a energia potencial interpartículas. Assim no caso de teorias formadas por um campo de rank-1, como nas eletrodinâmicas de Proca e Maxwell, o delta ds correntes assume a forma (1.14). Na teoria de Kalb-Ramond, propomos uma corrente no qual o delta das correntes resulta em (1.36).

A energia potencial interpartículas em modelos compostos por um campo é calculada facilmente através da expressão

$$E = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P}(\mathbf{k}) \Delta_{(\mu)}^{(\mu)}(\mathbf{k}). \quad (3.4)$$

No caso de modelos eletrodinâmicos, cujo mediador da interação seja um campo de rank-1, o delta das correntes vale

$$\Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = q_1 q_2 \eta^{0\mu} \eta^{0\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

que resulta numa expressão simplificada para a amplitude de Feynman no limite não-relativístico

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \Delta^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = q_1 q_2 \mathcal{P}_{00}(\mathbf{k}) = q_1 q_2 \mathcal{P}(\mathbf{k}). \quad (3.5)$$

Entre esses modelos temos a eletrodinâmica de Maxwell e as eletrodinâmicas de Proca e Lee-Wick [1,2].

3.2 Modelos com termo de mixing

Desenvolveremos agora uma prescrição para o cálculo da energia potencial interpartículas no caso de modelos formados por dois campos bosônicos acoplados entre si, denotados por $A^{(\mu)}$ e $B^{[\mu]}$, tal como a lagrangeana (2.1), que reescrevemos abaixo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B + A_{(\mu)} S^{(\mu)[\alpha]} B_{[\alpha]} + A_{(\mu)} J_A^{(\mu)} + B_{[\alpha]} J_B^{[\alpha]}, \quad (3.6)$$

sendo $S^{(\mu)[\alpha]}$ o operador de mixing que caracteriza o acoplamento entre os campos.

Nesse ponto é válido dizer que estamos tratando o operador de mixing como simétrico na troca das duas estruturas de índices. De fato, operadores de mixing de teorias usuais são sempre simétricos nessa troca. Podemos ver isso explicitamente nos modelos apresentados na capítulo anterior:

- Eletrodinâmica de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond: $(\mu) = \mu$ e $[\alpha] = \alpha\beta$, com α e β antissimétricos,

$$S^{(\mu)[\alpha]} = \frac{m}{\sqrt{2}} \epsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \partial_\nu = \frac{m}{\sqrt{2}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\nu = S^{[\alpha](\mu)}.$$

- Eletrodinâmica de Maxwell-Parafóton: $(\mu) = \mu$ e $[\alpha] = \alpha$,

$$S^{(\mu)[\alpha]} = \chi(\square\eta^{\mu\alpha} - \partial^\mu\partial^\alpha) = \chi(\square\eta^{\alpha\mu} - \partial^\alpha\partial^\mu) = S^{[\alpha](\mu)}.$$

Na determinação do propagador são realizados cálculos que envolvem os operadores

de projeção das teorias e o operador de mixing, sendo assim começaremos desenvolvendo a álgebra entre esses operadores.

3.2.1 Álgebra entre os projetores e o operador de mixing

No capítulo 2, ao trabalharmos em dois modelos com termos de mixing, pudemos perceber que a álgebra dos operadores de projeção e mixing apresentavam determinado padrão. Mostraremos agora que esse padrão surge da necessidade de que o termo de mixing seja invariante de gauge.

O termo de acoplamento pode ser escrito como o campo $A^{(\mu)}$ acoplado a um vetor, $V_S^{(\mu)}$,

$$A_{(\mu)} S^{(\mu)[\alpha]} B_{[\alpha]} = A_{(\mu)} V_S^{(\mu)},$$

que deve ser conservado de modo a manter a lagrangeana invariante sob a transformação de gauge do campo $A^{(\mu)}$, logo $\partial_\mu V_S^{(\mu)} = 0$. O índice μ , na derivada, está contraído com um dos índices contidos na estrutura de índices (μ) . Definimos os operadores de projeção referentes ao campo $A^{(\mu)}$ como sendo $L_A^{(\mu)(\nu)}$ o operador de projeção longitudinal à direção de propagação da partícula mediadora da interação, e $T_A^{(\mu)(\nu)}$ o operador de projeção transversal à direção de propagação da partícula. Temos que, no espaço dos momentos, o operador de mixing deve satisfazer a relação

$$k_\mu \hat{S}^{(\mu)[\alpha]} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{A(\nu)(\mu)} \hat{S}^{(\mu)[\alpha]} = 0. \quad (3.7)$$

O mesmo raciocínio pode ser feito para o campo $B^{[\alpha]}$. Assim, escrevemos o termo de mixing em termos do campo $B^{[\alpha]}$ acoplado ao vetor, $V_S^{[\alpha]}$,

$$B_{[\alpha]} S^{[\alpha](\mu)} A_{(\mu)} = B_{[\alpha]} V_S^{[\alpha]}.$$

Note que $V_S^{(\mu)}$ e $S^{[\alpha]}$ são vetores diferentes. Definimos assim os operadores de projeção longitudinal, $L_B^{[\alpha][\beta]}$, e transversal, $T_B^{[\alpha][\beta]}$, referentes ao campo $B^{[\alpha]}$. Devido à conservação do vetor, $\partial_\alpha V_S^{[\alpha]} = 0$, estando o índice α , na derivada, contraído com um dos índices contidos na estrutura de índices $[\alpha]$, temos

$$k_\alpha \hat{S}^{[\alpha](\mu)} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{B[\beta][\alpha]} \hat{S}^{[\alpha](\mu)} = 0. \quad (3.8)$$

Logo, a contração dos operadores de mixing com os projetores longitudinais é igual a zero; veremos que o restante da álgebra resulta dessa relação.

Sendo $\mathbb{I}^{(\mu)(\nu)}$ o operador identidade do grupo de operadores $O^{(\mu)(\nu)}$, e lembrando

que a identidade pode ser escrita como a soma dos operadores de projeção, temos

$$\hat{S}^{(\mu)[\alpha]} = \mathbb{I}^{(\mu)(\nu)} \hat{S}_{(\nu)}^{[\alpha]} = (T_A^{(\mu)(\nu)} + L_A^{(\mu)(\nu)}) \hat{S}_{(\nu)}^{[\alpha]} = T_A^{(\mu)(\nu)} \hat{S}_{(\nu)}^{[\alpha]}, \quad (3.9)$$

que é a segunda relação da álgebra. Para obtermos a última relação, computamos $\hat{S}_{[\alpha]}^{(\mu)} \hat{S}^{[\alpha](\nu)}$, isto resultará em um operador genérico $O^{(\mu)(\nu)}$ que pode ser expresso em termos dos operadores de projeção da seguinte forma

$$\hat{S}_{[\alpha]}^{(\mu)} \hat{S}^{[\alpha](\nu)} = x_t(k) T_A^{(\mu)(\nu)} + x_l(k) L_A^{(\mu)(\nu)},$$

porém, usando a relação (3.9) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{S}_{[\alpha]}^{(\mu)} \hat{S}^{[\alpha](\nu)} &= T_A^{(\mu)(\lambda)} \hat{S}_{(\lambda)[\alpha]} \hat{S}^{[\alpha](\nu)} = T_A^{(\mu)(\lambda)} [x_t(k) T_{A(\lambda)}^{(\nu)} + x_l(k) L_{A(\lambda)}^{(\nu)}] \\ &= x_t(k) T_A^{(\mu)(\nu)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Logo o coeficiente $x_l(k)$ é igual a zero por consistência. Realizando o mesmo procedimento para os projetores referentes ao operador $O^{[\alpha][\beta]}$ encontramos

$$\hat{S}^{[\alpha](\mu)} = T_B^{[\alpha][\beta]} \hat{S}_{[\beta]}^{(\mu)}, \quad (3.11)$$

$$\hat{S}_{(\mu)}^{[\alpha]} \hat{S}^{(\mu)[\beta]} = y_t(k) T_B^{[\alpha][\beta]}. \quad (3.12)$$

Por fim, utilizando as equações (3.8) e (3.10) obtemos

$$\hat{S}_{[\alpha]}^{(\mu)[\alpha]} \hat{S}_{[\alpha](\mu)} = \hat{S}^{[\alpha](\mu)} \hat{S}_{(\mu)[\alpha]} \Rightarrow x_t(k) T_A^{(\mu)}_{(\mu)} = y_t(k) T_B^{[\alpha]}_{[\alpha]}. \quad (3.13)$$

Vimos que tanto nos modelos CSKR e Maxwell-Parafóton, os coeficientes $x_t(k)$ e $y_t(k)$ são iguais. Isso deve-se ao fato de que o traço dos projetores transversais são iguais, $\theta_{\mu}^{\mu} = (P_b)_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = 3$. Portanto, no âmbito das teorias eletromagnéticas, os projetores de $A^{(\mu)}$ e $B^{[\alpha]}$ formam duas álgebras, dadas por

$$\hat{S}^{(\mu)[\alpha]} \hat{S}_{[\alpha](\nu)} = x(k) T_A^{(\mu)}_{(\nu)}, \quad (3.14a)$$

$$\hat{S}^{[\alpha](\nu)} T_{A(\nu)(\mu)} = \hat{S}_{(\mu)}^{[\alpha]}, \quad (3.14b)$$

$$\hat{S}^{[\alpha](\nu)} L_{A(\nu)(\mu)} = 0; \quad (3.14c)$$

e

$$\hat{S}^{[\alpha](\mu)} \hat{S}_{(\mu)[\beta]} = x(k) T_B^{[\alpha]}{}_{[\beta]}, \quad (3.15a)$$

$$\hat{S}^{(\mu)[\beta]} T_{B[\beta][\alpha]} = \hat{S}^{(\mu)}{}_{[\alpha]}, \quad (3.15b)$$

$$\hat{S}^{(\mu)[\beta]} L_{B[\beta][\alpha]} = 0. \quad (3.15c)$$

Essas álgebras apresentam exatamente a mesma estrutura das álgebras (2.10) e (2.11), como queríamos mostrar.

3.2.2 Cálculo do propagador

Uma vez obtidas as álgebras (3.14) e (3.15) podemos realizar o cálculo do propagador para uma teoria eletrodinâmica genérica. Conforme foi mostrado no capítulo 2, o operador de onda é dado por

$$\mathbf{O}^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(k) = \begin{pmatrix} A^{(\mu)(\nu)} & X^{(\mu)[\beta]} \\ Y^{[\alpha](\nu)} & B^{[\alpha][\beta]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_A^{(\mu)(\nu)}(k) & \hat{S}^{(\mu)[\beta]} \\ \pm \hat{S}^{[\alpha](\nu)} & \mathcal{O}_B^{[\alpha][\beta]}(k) \end{pmatrix}.$$

De forma que, como foi visto, escrevemos o propagador como

$$(\mathbf{O}^{-1})^{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(k) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{(\mu)(\nu)} & \mathbb{X}^{(\mu)[\beta]} \\ \mathbb{Y}^{[\alpha](\nu)} & \mathbb{B}^{[\alpha][\beta]} \end{pmatrix},$$

sendo suas componentes obtidas em termos das componentes do operador de onda através das expressões

$$\mathbb{A}^{(\mu)(\nu)} = [A^{(\mu)(\nu)} - X^{(\mu)[\alpha]}(B^{-1})_{[\alpha][\beta]} Y^{[\beta](\nu)}]^{-1}$$

$$\mathbb{B}^{[\alpha][\beta]} = [B^{[\alpha][\beta]} - Y^{[\alpha](\mu)}(A^{-1})_{(\mu)(\nu)} X^{(\nu)[\beta]}]^{-1}$$

$$\mathbb{X}^{(\mu)[\beta]} = -(A^{-1})^{(\mu)(\nu)} X_{(\nu)[\alpha]} \mathbb{B}^{[\alpha][\beta]}$$

$$\mathbb{Y}^{[\alpha](\nu)} = -(B^{-1})^{[\alpha][\beta]} Y_{[\beta](\mu)} \mathbb{A}^{(\mu)(\nu)}.$$

Nosso objetivo aqui, assim como nos modelos compostos por um campo, é obter a prescrição em termos diretamente das componentes dos operadores de onda das teorias. Então, escrevendo os operadores de onda no espaço dos momentos em termos dos operadores de projeção, temos

$$O_A^{(\mu)(\nu)}(k) = a_t(k) T_A^{(\mu)(\nu)} + a_l(k) L_A^{(\mu)(\nu)}, \quad (3.16)$$

$$O_B^{[\mu][\nu]}(k) = b_t(k) T_B^{[\mu][\nu]} + b_l(k) L_B^{[\mu][\nu]}. \quad (3.17)$$

Fazendo uso das álgebras (3.14) e (3.15) junto com as definições (3.16) e (3.17), expomos os cálculos das componentes do propagador

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^{(\mu)(\nu)} &= [O_A^{(\mu)(\nu)} - \hat{S}^{(\mu)[\alpha]}(O_B^{-1})_{[\alpha][\beta]}(\pm \hat{S}^{[\beta](\nu)})]^{-1} \\
&= \left[a_t(k)T_A^{(\mu)(\nu)} + a_l(k)L_A^{(\mu)(\nu)} \mp \hat{S}^{(\mu)[\alpha]} \left(\frac{1}{b_t(k)}(T_B)_{[\alpha][\beta]} + \frac{1}{b_l(k)}(L_B)_{[\alpha][\beta]} \right) \hat{S}^{[\beta](\nu)} \right]^{-1} \\
&= \left[a_t(k)T_A^{(\mu)(\nu)} + a_l(k)L_A^{(\mu)(\nu)} \mp \frac{x(k)}{b_t(k)}T_A^{(\mu)(\nu)} \right]^{-1} \\
&= \frac{b_t(k)}{a_t(k)b_t(k) \mp x(k)}T_A^{(\mu)(\nu)} + \frac{1}{a_l(k)}L_A^{(\mu)(\nu)}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}^{[\alpha][\beta]} &= [O_B^{[\alpha][\beta]} - (\pm \hat{S}^{[\alpha](\mu)})(O_A^{-1})_{(\mu)(\nu)}\hat{S}^{(\nu)[\beta]}]^{-1} \\
&= \left[b_t(k)T_B^{[\alpha][\beta]} + b_l(k)L_B^{[\alpha][\beta]} \mp \hat{S}^{[\alpha](\mu)} \left(\frac{1}{a_t(k)}(T_A)_{(\mu)(\nu)} + \frac{1}{a_l(k)}(L_A)_{(\mu)(\nu)} \right) \hat{S}^{(\nu)[\beta]} \right]^{-1} \\
&= \left[b_t(k)T_B^{[\alpha][\beta]} + b_l(k)L_B^{[\alpha][\beta]} \mp \frac{x(k)}{a_t(k)}T_B^{[\alpha][\beta]} \right]^{-1} \\
&= \frac{a_t(k)}{a_t(k)b_t(k) \mp x(k)}T_B^{[\alpha][\beta]} + \frac{1}{b_l(k)}L_B^{[\alpha][\beta]}, \tag{3.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}^{(\mu)[\beta]} &= -(O_A^{-1})^{(\mu)(\nu)}\hat{S}_{(\nu)[\alpha]}\mathbb{B}^{[\alpha][\beta]} \\
&= -\left(\frac{1}{a_t(k)}T_A^{(\mu)(\nu)} + \frac{1}{a_l(k)}L_A^{(\mu)(\nu)} \right) \hat{S}_{(\nu)[\alpha]} \left(\frac{a_t(k)}{a_t(k)b_t(k) \mp x(k)}T_B^{[\alpha][\beta]} + \frac{1}{b_l(k)}L_B^{[\alpha][\beta]} \right) \\
&= -\frac{1}{a_t(k)b_t(k) \mp x(k)}\hat{S}^{(\mu)[\beta]}, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}^{[\alpha](\nu)} &= -(O_B^{-1})^{[\alpha][\beta]}(\pm \hat{S}_{[\beta](\mu)})\mathbb{A}^{(\mu)(\nu)} \\
&= \mp \left(\frac{1}{b_t(k)}T_B^{[\alpha][\beta]} + \frac{1}{b_l(k)}L_B^{[\alpha][\beta]} \right) \hat{S}_{[\beta](\mu)} \left(\frac{b_t(k)}{a_t(k)b_t(k) \mp x(k)}T_A^{(\mu)(\nu)} + \frac{1}{a_l(k)}L_A^{(\mu)(\nu)} \right) \\
&= \mp \frac{1}{a_t(k)b_t(k) \mp x(k)}\hat{S}^{[\alpha](\nu)}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Notamos que as componentes $\mathbb{X}^{(\mu)[\beta]}$ e $\mathbb{Y}^{[\alpha](\nu)}$ podem diferir apenas no sinal, conforme já havíamos mencionado. Por fim, o “propagador” obtido, não levando em conta os termos que são ortogonais às correntes conservadas e fazendo $k^0 = 0$, assume a forma

$$\mathcal{P}^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_A(\mathbf{k})\mathbb{I}^{(\mu)(\nu)} & \mathcal{P}_S(\mathbf{k})\hat{S}^{(\mu)[\beta]}(\mathbf{k}) \\ \pm \mathcal{P}_S(\mathbf{k})\hat{S}^{[\alpha](\nu)}(\mathbf{k}) & \mathcal{P}_B(\mathbf{k})\mathbb{I}^{[\alpha][\beta]} \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

com

$$\mathcal{P}_A(\mathbf{k}) = \frac{b_t(\mathbf{k})}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) \mp x(\mathbf{k})}, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{P}_B(\mathbf{k}) = \frac{a_t(\mathbf{k})}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) \mp x(\mathbf{k})}, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{P}_S(\mathbf{k}) = -\frac{1}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) \mp x(\mathbf{k})}. \quad (3.25)$$

3.2.3 Prescrição para a energia potencial interpartículas

Com o propagador em mãos, podemos expor a prescrição para a energia potencial. O produto do propagador com o delta das correntes resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(\mu),[\alpha];(\nu),[\beta]}(\mathbf{k})\Delta^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}(\mathbf{k}) &= \mathcal{P}_A(\mathbf{k})(\Delta_A)^{(\mu)}_{(\mu)}(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_B(\mathbf{k})(\Delta_B)^{[\alpha]}_{[\alpha]}(\mathbf{k}) + \\ &+ (1 \pm 1)\mathcal{P}_S(\mathbf{k})\hat{S}_{(\mu)[\alpha]}(\mathbf{k})(\Delta_S)^{(\mu)[\alpha]}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

em que

$$\Delta_A^{(\mu)(\nu)}(\mathbf{k}) = \int \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} J_A^{(\mu)}(\mathbf{x})J_A^{(\nu)}(\mathbf{y}), \quad (3.27a)$$

$$\Delta_B^{[\alpha][\beta]}(\mathbf{k}) = \int \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} J_B^{[\alpha]}(\mathbf{x})J_B^{[\beta]}(\mathbf{y}), \quad (3.27b)$$

$$\Delta_S^{(\mu)[\alpha]}(\mathbf{k}) = \int \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} J_A^{(\mu)}(\mathbf{x})J_B^{[\alpha]}(\mathbf{y}). \quad (3.27c)$$

Os dois primeiros deltas envolvem correntes relativas ao mesmo campo. Por sua vez o terceiro termo em (3.26) contém o fator (1 ± 1) que resultará em 2, caso o operador $S^{(\mu)[\nu]}$ não possua derivadas ou apresente um número par de derivadas; e será 0, caso o número de derivadas seja ímpar. Esse termo mistura as duas correntes como o que ocorreu na teoria de Maxwell-Parafóton, na qual havia um termo da energia oriundo da interação entre as cargas q e ρ . Na teoria CSKR esse termo era nulo, já que o operador de mixing contém uma derivada.

Finalmente, temos que a expressão da energia potencial interpartículas em modelos com termo de mixing é dada por

$$E = E_I + E_{II} + (1 \pm 1)E_{III}, \quad (3.28)$$

sendo

$$E_I = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P}_A(\mathbf{k})(\Delta_A)^{(\mu)}_{(\mu)}(\mathbf{k}), \quad (3.29)$$

$$E_{II} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P}_B(\mathbf{k})(\Delta_B)^{[\alpha]}_{[\alpha]}(\mathbf{k}), \quad (3.30)$$

$$E_{III} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P}_S(\mathbf{k})\hat{S}_{(\mu)[\alpha]}(\mathbf{k})(\Delta_S)^{(\mu)[\alpha]}(\mathbf{k}). \quad (3.31)$$

Assim, a prescrição consiste em calcular $\mathcal{P}_A(\mathbf{k})$, $\mathcal{P}_B(\mathbf{k})$ e $\mathcal{P}_S(\mathbf{k})$ usando (3.23), (3.24) e (3.25), e obter os deltas das correntes associado a duas partículas carregadas a partir das correntes propostas.

No caso de um operador de mixing sem derivadas ou com um número par de derivadas, temos

$$E = E_I + E_{II} + 2E_{III}, \quad (3.32)$$

com

$$\mathcal{P}_A(\mathbf{k}) = \frac{b_t(\mathbf{k})}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) - x(\mathbf{k})}, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{P}_B(\mathbf{k}) = \frac{a_t(\mathbf{k})}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) - x(\mathbf{k})}, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{P}_S(\mathbf{k}) = -\frac{1}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) - x(\mathbf{k})}. \quad (3.35)$$

Considerando agora, um operador de mixing com um número ímpar de derivadas, obtemos

$$E = E_I + E_{II}, \quad (3.36)$$

com

$$\mathcal{P}_A(\mathbf{k}) = \frac{b_t(\mathbf{k})}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) + x(\mathbf{k})}, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{P}_B(\mathbf{k}) = \frac{a_t(\mathbf{k})}{a_t(\mathbf{k})b_t(\mathbf{k}) + x(\mathbf{k})}. \quad (3.38)$$

4 Conclusão

Utilizando a experiência adquirida no cômputo da energia potencial D-dimensional entre ‘cargas’ estáticas eletromagnéticas [51], gravitacionais [59] e escalares [60], nos aventuramos cautelosamente no Capítulo 1 deste trabalho na construção de uma prescrição que permitisse calcular a energia potencial em modelos eletromagnéticos onde os objetos interagentes não fossem cargas, como é o caso do conhecido sistema de Kalb-Ramond [52]. Lançando mão de uma ‘corrente’ independente do tempo,

$$J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{\mu\nu\rho i} \partial_i \left[(V_1)_\rho \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + (V_2)_\rho \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2) \right], \quad (4.1)$$

onde V_i^ρ , $i = 1, 2$, é um pseudo quadrivetor constante e uniforme no sistema de referência no qual os cálculos estão sendo executados, obtivemos para o modelo de Kalb-Ramond a seguinte expressão para a energia potencial

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 - 3 \left(\mathbf{V}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{V}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Esta energia é igual àquela obtida para a interação de dois dipolos elétricos \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 localizados nos pontos \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 , porém com um sinal global negativo; a mesma situação ocorre no caso do campo escalar que também apresenta um sinal negativo global quando comparado com o caso eletromagnético usual [60].

Encorajados pela simplicidade desta prescrição, a utilizamos no Capítulo 2 para o cálculo da energia potencial de dois modelos onde os campos eletromagnéticos estão acoplados via um termo de mixing. Especificamente analisamos os sistemas de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond e o do parafóton. O nosso método, além de corresponder bastante bem as nossas expectativas, permitiu obter as mencionadas energias com relativa facilidade [61].

Mais ambiciosos e destemidos, partimos no Capítulo 3 para a construção de uma prescrição geral para o cômputo da energia potencial relativa à sistemas com dois campos eletromagnéticos acoplados por um termo de mixing [62]. Na elaboração desse método admitimos que o operador de mixing das eletrodinâmicas interagentes seja simétrico na troca das duas estruturas de índices. À primeira vista parece que operadores de mixing de teorias usuais gozam desta simetria. É o caso dos dois modelos que enfocamos no Capítulo 2. Esta prescrição geral que elaboramos facilita enormemente o cômputo da energia potencial de modelos eletromagnéticos com mixing. Na realidade, o cálculo desta energia pelos métodos tradicionais é bastante laborioso.

Mostramos também no Capítulo 3 o importante resultado que no âmbito das teorias eletromagnéticas, os projetores dos campos eletromagnéticos $A^{(\mu)}$ e $B^{[\alpha]}$ formam duas

álgebras (vide (3.14) e (3.15)) que tem a mesma estrutura que aquelas formadas por $\hat{S}^{\mu\nu\alpha}$, $\theta^{\beta\gamma}$, $\omega^{\pi\lambda}$, $P_b^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e $P_e^{\mu\nu\rho\lambda}$ (vide (2.10) e (2.11)) [62].

Uma possível continuação desse trabalho seria analisar o modelo do para-fóton no limite em que o campo B_μ fosse bastante ‘pesado’, ou seja, $m \gg m_\gamma$, onde m_γ é a massa do fóton. Tradicionalmente, como faríamos isso? Já que estamos tratando com energias $\ll m$, integraríamos sobre o campo B_μ com a finalidade de obter um modelo efetivo para o campo A_μ . Isto seria feito via o funcional gerador relacionado ao modelo em questão. Após um *shifting* no campo B_μ executaríamos a integral gaussiana sobre esse campo, o que nos forneceria uma lagrangiana efetiva para A_μ . A partir desta poderíamos calcular a energia potencial para a interação de duas cargas. Na realidade, pretendemos obter essa energia diretamente da expressão encontrada em (2.35) sem os passos intermediários anteriormente descritos.

APÊNDICE A – Maxwell \times Kalb-Ramond

Exposição comparativa das eletrodinâmicas de Maxwell e Kalb-Ramond.

Maxwell	Kalb-Ramond
Estrutura de campos	
$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$	$B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -X_x & -X_y & -X_z \\ X_x & 0 & -Y_z & Y_y \\ X_y & Y_z & 0 & -Y_x \\ X_z & -Y_y & Y_x & 0 \end{pmatrix}$
Estrutura de correntes	
$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$	$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{J}_x & -\mathcal{J}_y & -\mathcal{J}_z \\ \mathcal{J}_x & 0 & -\mathcal{Q}_z & \mathcal{Q}_y \\ \mathcal{J}_y & \mathcal{Q}_z & 0 & -\mathcal{Q}_x \\ \mathcal{J}_z & -\mathcal{Q}_y & \mathcal{Q}_x & 0 \end{pmatrix}$
Tensor intensidade de campo	
$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$	$G^{\mu\nu\alpha} = \partial^\mu B^{\nu\alpha} + \partial^\nu B^{\alpha\mu} + \partial^\alpha B^{\mu\nu}$
Campos em termo dos potenciais	
$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	$\boldsymbol{\mathcal{E}} \equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{X}$ $\mathcal{B} = \nabla \cdot \mathbf{Y}$
Estrutura dos duais da intensidade de campo	
$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$	$\tilde{G}^\mu = \begin{pmatrix} -\mathcal{B} \\ -\mathcal{E}_x \\ -\mathcal{E}_y \\ -\mathcal{E}_z \end{pmatrix}$

Maxwell	Kalb-Ramond
Equações de movimento	
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$	$\partial_\mu G^{\mu\nu\alpha} = J^{\nu\alpha}$ $\partial_\mu \tilde{G}^\mu = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\boldsymbol{\mathcal{J}}$ $\nabla \mathcal{B} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} = -\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0$
Conservação da corrente	
$\partial_\mu J^\mu = 0$	$\partial_\mu J^{\mu\nu} = 0$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = 0$ $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} - \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{Q}} = 0$
Tensor Energia-Momento	
$T^\mu_\nu = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$	$T^\mu_\nu = G^{\mu\alpha\beta} G_{\alpha\beta\nu} - \frac{1}{6} \delta^\mu_\nu G^{\alpha\beta\lambda} G_{\alpha\beta\lambda}$
$T^0_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ $T^i_0 = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i$ $T^i_j = -E^i E_j - B^i B_j - \frac{1}{2} \delta_j^i (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$	$T^0_0 = \boldsymbol{\mathcal{E}}^2 + \mathcal{B}^2$ $T^i_0 = 2\mathcal{B}\boldsymbol{\mathcal{E}}^i$ $T^i_j = 2\boldsymbol{\mathcal{E}}^i \boldsymbol{\mathcal{E}}_j + \delta_j^i (\boldsymbol{\mathcal{E}}^2 - \mathcal{B}^2)$

Referências

- [1] T. Lee and G. Wick, Nucl. Phys. B **9**, 209 (1969).
- [2] T. Lee and G. Wick, Phys. Rev. D **2**, 1033 (1970).
- [3] F. A. Barone, G. Flores-Hidalgo and A. Nogueira, Phys. Rev. D **88**, 105031 (2013).
- [4] R. Cuzinato, C. de Melo, L. Medeiros and P. Pompeia, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 3641 (2011).
- [5] A. Accioly and E. Scatena, Mod. Phys. Lett. A **25**, 269 (2010).
- [6] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena and R. Turcati, Mod. Phys. Lett. A **26**, 1985 (2011).
- [7] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena and R. Turcati, arXiv:1012.1045v2.
- [8] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Pereira-Dias and C. Hernaski, Phys. Rev. D **86**, 105046 (2012).
- [9] C. Galvão and B. Pimentel, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).
- [10] B. Bufalo, B. Pimentel and G. Zambrano, Phys. Rev. D **83**, 045007 (2011).
- [11] M. Bertin, B. Pimentel and G. Zambrano, J. Math. Phys. (N.Y.) **52**, 102902 (2011).
- [12] J. Frankel, Phys. Rev. E **54**, 5859 (1996).
- [13] A. Zayats, arXiv:1306.3966.
- [14] R. Baginski and B. Santos, Mod. Phys. Lett. A **26**, 1909 (2011).
- [15] S. Moyaedi, M. Setare and B. Khosropour, Adv. High Energy Phys. **2013**, 657870 (2013).
- [16] S. Moyaedi, M. Setare and B. Khosropour, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1350142 (2013).
- [17] P. Gaete, J. Helayël-Neto and E. Spallucci, J. Phys. A **45**, 215401 (2012).
- [18] R. Cuzinato, C. Melo and P. Pompeia, Ann. Phys. (Amsterdam) **322**, 1211 (2007).
- [19] S. Kruglov, J. Phys. A **43**, 245403 (2010).
- [20] I. Cho and O. Kwon, Phys. Rev. D **82**, 025013 (2010).
- [21] A. Accioly and M. Dias, Phys. Rev. D **70**, 107705 (2004).

- [22] P. Gaete, *Int. J. Phys. A* **27**, 1250061 (2012).
- [23] P. Gaete and E. Spallucci, *J. Phys. A* **45**, 065401 (2012).
- [24] M. Born and L. Infeld, *Proc. R. Soc. Lond. A* **144**, 1934 (1934).
- [25] A. Accioly, *Am. J. Phys.* **65**, 882 (1977).
- [26] P. Gaete and I. Schmidt, *Int. J. Phys. A* **19**, 3427 (2004).
- [27] M. Setare and M. Kamali, *Int. J. Phys. A* **28**, 1350154 (2013).
- [28] M. Kiessling, arXiv:1107.2333v2.
- [29] M. Kiessling, *J. Math. Phys.* **52**, 022902 (2011).
- [30] H. Carley and M. Kiessling, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 030402 (2006).
- [31] S. Vellozo, J. Helayël-Neto, A. Smith and L. De Assis, *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 2934 (2008).
- [32] S. Vellozo, J. Helayël-Neto, A. Smith and L. De Assis, *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 1905 (2009).
- [33] D. Comelli, *Phys. Rev. D* **72**, 064018 (2005).
- [34] A. Khoudeir and Y. Parra, *Phys. Rev. D* **58**, 025010 (1998).
- [35] S. Kruglov, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 2477 (2013).
- [36] S. Kruglov, *J. Phys. A* **43**, 375402 (2010).
- [37] S. Kruglov, *Phys. Rev. D* **75**, 117301 (2007).
- [38] P. Gaete and J. Helayël-Neto, *Eur.Phys. J. C* **74**, 2816 (2014).
- [39] S. Carroll, G. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [40] R. Gambini and J. Pullin, *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999).
- [41] R. Myers and M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003).
- [42] P. Bolokhov and M. Pospelov, *Phys. Rev. D* **77**, 025022 (2008).
- [43] C. Reyes, L. Urrutia and J. Vergas, *Phys. Rev. D* **78**, 125011 (2008).
- [44] C. Reyes, *Phys. Rev. D* **82**, 125036 (2010).
- [45] C. Reyes, *Phys. Rev. D* **87**, 125028 (2013).

- [46] A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, JHEP 0202 (2002) 030.
- [47] B. Altschul, Q. Bailey and V. Kostelecký, Phys. Rev. D **81**, 065028 (2010).
- [48] V. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009).
- [49] V. Kostelecký, arXiv:1309.3761v1.
- [50] V. Kostelecký, arXiv:1010.4559v1.
- [51] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, F. A. Barone and P. Gaete, Phys. Rev. D **90**, 105029 (2014).
- [52] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D **9**, 2273 (1973).
- [53] E. Cremmer and J. Scherk, Nuc. Phys. B **72**, 117 (1974).
- [54] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, Princeton, 2nd edition, (2010).
- [55] L. Schulman. *Techniques and Applications of Path Integration*. Dover Publications, New York, (2005).
- [56] L. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, (1996).
- [57] M. Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, Oxford, (2005).
- [58] J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, MA, (1967).
- [59] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone and W. Herdy, Class. Quantum Grav. **32**, 035021 (2015).
- [60] A. Accioly, G. Correia and W. Herdy. *Prescription for computing the interparticle potential energy for D-dimensional scalar models*. (Submetido à publicação na Mod. Phys. Lett. A).
- [61] A. Accioly and G. Correia. *Simple prescription for obtaining the interparticle potential energy for electromagnetic models with a mixing term*. (Submetido à publicação no Eur. Phys. J. C).
- [62] A. Accioly and G. Correia. *Finding the interparticle potential energy related to electromagnetic models coupled by a mixing term*. (Submetido à publicação no J. Math. Phys.).
- [63] J. Jaeckel and A. Ringwald, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **60**, 405 (2010).