**Dissertação de Mestrado**

# Quantização Estocástica de Campos Escalares no Espaço-tempo de de Sitter

**Thalles Carvalho G. R. de Aguiar**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, março de 2009.

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

# Quantização Estocástica de Campos Escalares no Espaço-tempo de de Sitter

Dissertação de Mestrado submetida ao Centro Brasileiro de Pesquisas sob orientação do Prof. Dr. Nami Fux Svaiter para obtenção do título de Mestre em Física por Thalles Carvalho G. R. de Aguiar.

Rio de Janeiro, março de 2009.

À minha família

## Agradecimentos

- À minha família, namorada e amigos por todo apoio e estímulo.
- Ao meu orientador, Nami Fux Svaiter pela orientação e motivação.
- Aos colegas do CBPF, em especial ao Gabriel Menezes pela ajuda nesse trabalho.
- Ao CNPq e FAPERJ pelo suporte financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos como implementar o método de quantização estocástica para campos escalares definidos numa variedade Euclidiana com curvatura, a saber, a variedade de de Sitter Euclidiana. As funções de correlação de dois pontos associadas ao campo escalar massivo auto-interagente são calculadas até a primeira ordem na expansão perturbativa da constante de acoplamento $\lambda$. Seu valor para o limite assintótico do parâmetro de Markov, $\tau \to \infty$, é exibido. Em seguida, discutimos em detalhes a regularização estocástica covariante, que torna as funções de correlação de dois pontos ao nível de um laço finitas na métrica Euclidiana de de Sitter.

## Abstract

In this thesis, we study how the stochastic quantization method can be implemmented for scalar fields defined in an Euclidean manifold with curvature, namely, the Euclidean de Sitter manifold. The two-point correlation functions associated to the massive self-interacting scalar field is evaluated up to the first order level in the coupling constant $\lambda$. Its value for the asymptotic limit of the Markov parameter $\tau \to \infty$ is exhibited. Afterwards, we discuss in detail the covariant stochastic regularization, which renders the one-loop two-point correlation functions finite in the Euclidean de Sitter metric.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

A teoria do movimento Browniano, que descreve o movimento irregular e aleatório de uma pequena partícula imersa em um fluido, é a forma mais simples de se tratar a dinâmica de sistemas fora do equilíbrio. O botânico Robert Brown é tido como o descobridor do movimento Browniano, por volta de 1827, enquanto observava grãos de pólen flutuando na água através de um microscópio [1]. Entretanto, foi somente em 1905 em um dos trabalhos de Albert Einstein [2] e depois em 1906 num trabalho independente de Marian Smoluchowski [3] que um tratamento matemático mais rigoroso sobre o fenômeno foi obtido, atraindo a atenção de físicos e matemáticos e corroborando para o conceito de átomo, ainda não completamente estabelecido na época. A teoria do movimento Browniano foi posteriormente desenvolvida por P. Langevin [4], G. E. Uhlembeck e L. S. Ornstein [5], entre outros.

Mais tarde, a teoria do movimento Browniano foi extendida para situações onde alguma propriedade de um sistema, como flutuações nas correntes elétricas em um circuito devido a flutuações térmicas nos condutores, desempenha um papel semelhante ao desempenhado pela partícula Browniana. A teoria de processos estocásticos foi iniciada por N. Wiener influenciado pela teoria desenvolvida para descrever o movimento Browniano, e alguns anos mais tarde foi combinada com a descrição da mecânica quântica por integrais de trajetória de Feynman.

Ao fazermos a extensão analítica para o tempo imaginário, $t \to -it$, é possível observar a semelhança entre a equação de Schrödinger para uma partícula livre e uma equação de difusão para uma partícula Browniana. Essa semelhança levou muitos físicos a acreditarem que a mecânica quântica seria, de fato, uma teoria efetiva, e flutuações quânticas seriam originadas através de um movimento clássico aleatório da partícula causado pela interação com um substrato não-observável.

Por volta de 1952, baseado nessa idéia, D. Bohm [6] desenvolveu uma teoria na qual era possível obter uma equação de movimento Newtoniana a partir da equação de Schrödinger. Tal equação Newtoniana apresentava um termo de força chamado, então, de força quanto-mecânica, que deveria ser considerada como um termo de força aleatório representando a interação com o suposto substrato não-observável. Em 1966, Nelson [7] formulou um método de quantização que obtinha a mecânica quântica a partir de considerações da teoria de movimento Browniano, tendo a constante de Planck como constante de difusão. Apesar dessas teorias serem formuladas em termos do tempo real $t$ e se utilizarem de interpretações estocásticas para a mecânica quântica, elas não são capazes de descrever situações com muitas partículas ou campos.

Motivados pela tentativa de quantizar um campo de calibre sem a necessidade de fixação do calibre e introdução de campos auxiliares (os fantasmas de Fadeev e Popov), Parisi e Wu desenvolveram em 1981 o método de quantização estocástica [8]. O método é formulado em torno de um processo estocástico fictício com respeito a um parâmetro extra, o tempo de Markov $\tau$. Todavia, não há uma interpretação física para o parâmetro de Markov, que deve ser tomado apenas como uma ferramenta matemática. O método se fundamenta na idéia de que o comportamento quântico de um sistema $d$-dimensional pode ser obtido como o limite de equilíbrio de um sistema clássico $d+1$-dimensional, inicialmente fora do equilíbrio e acoplado a um reservatório térmico, e cuja evolução no parâmetro de Markov é descrita por uma equação de Langevin. O reservatório térmico na teoria é representado por um campo de ruído estocástico.

Outra característica interessante da quantização estocástica é a escolha do processo estocástico com respeito ao parâmetro de Markov não ser única. Isso significa que diferentes equações de Langevin que evoluem para uma situação de equilíbrio nos fornecem a mesma teoria quântica. Em outras palavras, no limite de equilíbrio quando o parâmetro de Markov vai a infinito, $\tau \to \infty$, as médias estocásticas das funções de correlação de alguma quantidade se tornam valores esperados no vácuo da teoria Euclidiana, e recupera-se assim a teoria quântica de campos.

Um método similar ao método de Parisi e Wu, chamado "quantização microcanônica", foi proposto por volta de 1982 [9]. A idéia é que um sistema quântico em $d$ dimensões seria equivalente a um sistema clássico em $d+1$ dimensões governado por uma dinâmica determinística com respeito a um tempo fictício. É esperado que as flutuações quânticas apareçam de comportamentos caóticos do sistema ao evoluir no tempo fictício. Entretanto, esse método não é aplicável a qualquer sistema, pois a condição necessária é a existência de caos clássico.

A quantização estocástica foi formulada originalmente utilizando-se o espaço-tempo Euclidiano, de forma a fazer a teoria matematicamente bem definida. Entretanto, existe uma formulação da quantização estocástica para o espaço-tempo de Minkowski [10, 11], e o tempo imaginário não é estritamente necessário. Além disso, é importante ressaltar que, diferentemente dos métodos de quantização canônica e por integrais de trajetória, que se baseam na Hamiltoniana e Lagrangiana do sistema, o método de quantização estocástica pode ser implementado a partir de uma equação clássica de movimento. Dessa forma, é possível aplicar o método a sistemas que não apresentam o formalismo canônico. Outra ferramenta bastante útil resultante do método de quantização estocástica é o processo de regularização estocástica, que preserva todas as simetrias originais do sistema considerado.

O método de quantização estocástica foi aplicado para diversos campos definidos em variedades Euclidianas planas. Para uma revisão dessas aplicações veja as referências [12–15]. O método também foi aplicado para o caso de gravidade Euclidiana linearizada e também não-linearizada [16, 17]. Entretanto, aplicações do método a uma teoria semi-clássica, ou seja, campos quânticos na presença de um campo gravitacional clássico, não foram exploradas pela literatura. Nosso objetivo é preencher essa lacuna. Recentemente, o método de quantização de Parisi e Wu foi aplicado para estudar campos escalares auto-interagentes em variedades que possam ser analiticamente continuadas para a situação Euclidiana, mais precisamente os espaços de Einstein e Rindler [18], e as funções de correlação de dois pontos da teoria numa aproximação de um laço foram obtidas. Além disso, foi mostrado recentemente que o método de quantização estocástica pode ser aplicado com sucesso a sistemas cujas ações permanecem complexas após a rotação de Wick e teorias topológicas [19, 20].

Nessa dissertação aplicaremos o método de Parisi-Wu na descrição de um campo bosônico auto-interagente definido no espaço-tempo de de Sitter [21]. Uma introdução sobre teorias de campo na variedade plana Euclidiana pode ser encontrada nas referências [22, 23]. Material sobre a variedade de de Sitter e teorias quânticas de campo em espaços curvos pode ser encontrado nas referências [24–28, 31, 32]. Para uma revisão sobre mecânica estatística fora do equilíbrio e processos estocásticos veja as referências [33, 34].

No capítulo seguinte serão desenvolvidas idéias básicas acerca da mecânica estatística fora do equilíbrio. No terceiro capítulo, é feita uma revisão da aplicação do método de quantização estocástica para campos definidos numa variedade plana Euclidiana. No capítulo 4, o método é aplicado a campos escalares definidos na variedade de de Sitter e no quinto capítulo apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalho. Uma revisão sobre processos estocásticos é apresentada no apêndice A e uma breve discussão sobre diferentes sistemas de coordenadas no espaço-tempo de de Sitter é realizada no apêndice B.

Nessa dissertação vamos utilizar o sistema natural de unidades, a saber, $c = \hbar = k_B = G = 1$.

# Capítulo 2

# Mecânica estatística fora do equilíbrio

## 2.1 A equação de Langevin

A quantização estocástica de Parisi e Wu está baseada na teoria de processos estocásticos. Portanto, vamos rapidamente discutir como a equação de Langevin descreve o comportamento de uma partícula Browniana. Considere o movimento unidimensional de uma partícula de massa $m$, posição $x$ e velocidade $v$ em um fluido. A equação de movimento da partícula é dada por

$$m\frac{d}{dt}v(t) = F_{total}(t), \tag{2.1}$$

onde $F_{total}(t)$ é a força resultante agindo sobre a partícula num instante de tempo $t$. Na maioria dos casos, a força é dominada por um termo de fricção proporcional à velocidade, onde a constante de proporcionalidade é dada pela Lei de Stokes. Nesse caso a equação anterior fica escita na forma

$$m\frac{d}{dt}v(t) = -\xi v(t), \tag{2.2}$$

cuja solução é dada por

$$v(t) = v(0)\ e^{-\frac{\xi t}{m}}. \tag{2.3}$$

Pela expressão anterior é possível notar que a velocidade da partícula Browniana decairia a zero para intervalos de tempo suficientemente longos, o que contradiria o teorema da equipartição da energia. No equilíbrio térmico, devemos ter $\langle v^2 \rangle_{eq} = T/m$, onde $T$ é a temperatura associada ao sistema, o que não é possível com a solução (2.3). Concluimos disto, que a suposição que $F_{total}(t)$ é dominada pelo termo de fricção é incorreta nesse caso. Uma forma de solucionar este problema é adicionarmos ao lado direito da equação (2.2) uma força estocástica, ou ruído, $R(t)$. A equação de movimento passa a ser escrita como

$$m\frac{d}{dt}v(t) = -\xi v(t) + R(t), \tag{2.4}$$

que é uma equação estocástica, devido ao termo adicional. Mais adiante definiremos as funções de correlação associadas a esse ruído. Essa é a equação de Langevin para a partícula Browniana. O ruído pode ser interpretado como um termo proveniente de colisões ocasionais da partícula com as moléculas do meio no qual ela está imersa. Assim, o problema se resume em determinar a variável estocástica $v(t)$, a partir da equação de movimento (2.4), onde aparece $R(t)$.

Se colisões em instantes distintos de tempo $t$ e $t'$ não têm correlação, o ruído, sendo uma variável estocástica, obedece a uma distribuição Gaussiana, cuja distribuição de probabilidade é

$$P[R] = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{4B}\int dt\ R^2(t)\right\}}{\int \mathcal{D}R\ \exp\left\{-\frac{1}{4B}\int dt\ R^2(t)\right\}}. \tag{2.5}$$

Uma média estocástica de alguma quantidade $f(t)$ do sistema é calculada como

$$\langle f(t)\rangle = \frac{\int \mathcal{D}R\ \exp\left\{-\frac{1}{4B}\int dt\ R^2(t)\right\}\ f(t)}{\int \mathcal{D}R\ \exp\left\{-\frac{1}{4B}\int dt\ R^2(t)\right\}}, \tag{2.6}$$

onde a medida $\mathcal{D}R$ nos indica que estamos levando e conta todas as realizações possíveis associadas ao ruído. O que se conclui diretamente das expressões anteriores é que o ruído satisfaz as seguintes relações de correlação,

$$\langle R(t)\rangle = 0, \tag{2.7}$$

$$\langle R(t)R(t')\rangle = 2B\ \delta(t-t'). \tag{2.8}$$

A equação de Langevin (2.4) pode ser, então, resolvida. Sua solução vem a ser dada por

$$v(t) = v(0)\ e^{-\frac{\xi t}{m}} + \frac{1}{m}\int_0^t ds\ e^{-\xi(t-s)/m}\ R(s). \tag{2.9}$$

Através dessa solução, é possível calcular a velocidade quadrática média (média estocástica) $\langle v^2(t) \rangle$:

$$
\begin{aligned}
\left\langle v^2(t) \right\rangle &= \lim_{t' \to t} \langle v(t)v(t') \rangle = \\
&= v^2(0)\ e^{-2\frac{\xi t}{m}} \\
&+ \frac{2}{m} v(0)\ e^{-\frac{\xi t}{m}} \int_0^t ds\ e^{-\xi(t-s)/m}\ \langle R(s) \rangle \\
&+ \lim_{t' \to t} \int_0^t ds \int_0^{t'} ds'\ e^{-\xi(t-s)/m}\ e^{-\xi(t'-s')/m}\ \langle R(s)R(s') \rangle\,. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Utilizando as relações de correlação (2.7) e (2.8) e supondo que o sistema tende ao equilíbrio para intervalos de tempo bastante longos ($t \to \infty$), obtemos nesse limite

$$
\lim_{t \to \infty} \left\langle v^2(t) \right\rangle = \frac{B}{\xi m}. \qquad (2.11)
$$

Se assumirmos ergodicidade no sistema, a média quadrática da velocidade deve ser igual a $T/m$, e obtemos o teorema de flutuação-dissipação. Esse teorema, obtido primeiramente por Einstein, é um dos princípios fundamentais da mecânica estatística de sistemas fora do equilíbrio e relaciona a intensidade da correlação entre o ruído em diferentes instantes de tempo com o coeficiente de fricção e a temperatura do sistema no equilíbrio. Sua expressão (veja, por exemplo, as referências [34, 35]) é dada por

$$
B = \xi T. \qquad (2.12)
$$

Essa relação expressa que os mecanismos de dissipação de energia estão intimamente ligados a flutuações térmicas do sistema em equilíbrio.

## 2.2 As funções de correlação temporais

A mecânica estatística de sistemas em equilíbrio é baseada na idéia de um ensemble estatístico, e qualquer propriedade termodinâmica de um sistema pode ser calculada através da função de partição. A mecânica estatística fora do equilíbrio também é baseada na idéia de ensemble estatístico, entretanto, existem infinitos estados fora do equilíbrio, em contraste com a mecanica estatística do equilíbrio, onde existe apenas um estado de equilíbrio. Esta propriedade impossibilita a definição de uma função de partição para sistemas fora do equilíbrio, e seu papel é desempenhado pelas funções de correlação temporais (ou, de forma mais geral, espaço-temporais), que podem ser calculadas através das soluções da equação de Langevin.

Considere uma quantidade $A(t)$ definida sobre um sistema. A média no tempo dessa quantidade é definida como

$$\langle A \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\ A(t). \tag{2.13}$$

A subtração da variável $A(t)$ pela sua média temporal define a flutuação,

$$\delta A(t) = A(t) - \langle A \rangle_t\,. \tag{2.14}$$

Flutuações em instantes distintos de tempo são, normalmente, correlacionadas. Assim, a média temporal do produto de flutuações em instantes de tempo distintos é chamada de função de correlação temporal, que pode escrita como

$$C(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds\ \delta A(s)\ \delta A(t+s). \tag{2.15}$$

Se o sistema estudado é ergódico, uma média temporal com tempos longos é equivalente a uma média sobre o ensemble no equilíbrio. Assim, da mesma forma que na mecânica estatística do equilíbrio é possível calcular as propriedades termodinâmicas de um sistema através da função de partição do sistema, em vez de uma média temporal para tempos longos, é possível obter as funções de correlação temporal através de uma média sobre o ensemble, em vez de uma média temporal.

A transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos define a densidade espectral,

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-i\omega t}\ C(t). \tag{2.16}$$

Essa relação entre a densidade espectral e a função de correlação de dois pontos é conhecida como teorema de Wiener-Kintchine, e mostra que conhecer a densidade espectral é equivalente a conhecer a função de correlação temporal, já que a expressão anterior é inversível. A densidade espectral é uma excelente ferramenta para resolução de equações de Langevin, através de uma análise de Fourier. O que assumimos implicitamente nas relações (2.7) e (2.8) é que a densidade espectral do ruído $R(t)$ é independente da frequência e, nesse caso, é dito que o ruído possui o espectro branco.

## 2.3 Outros tipos de equações de Langevin

Um processo estocástico é um processo Markoviano se, ao medirmos uma variável estocástica $A(t)$ num instante de tempo $t$, a probabilidade de obtermos o valor $a$, sabendo que a variável assumiu um valor $a_0$ num instante de tempo $t_0$, for independente do conhecimento de que valores a variável assumiu em instantes de tempo anteriores a $t_0$. Em outras palavras, a história do sistema está toda contida na informação de que a variável $A(t)$ assumiu o valor $a_0$ em $t = t_0$.

O movimento Browniano considerado nas seções anteriores é Markoviano. Isso é uma consequência do fato de que o termo de fricção na equação de Langevin em um instante de tempo $t$ é proporcional à velocidade no mesmo instante de tempo, e de que o ruído é branco, ou seja, que a transformada de Fourier da função de correlação do ruído é independente da frequência.

Processos físicos que são descritos por uma equação de Langevin Markoviana representam um conjunto bem pequeno dentro do universo dos processo estocásticos. Situações mais gerais nos forçam a utilizar uma descrição não-Markoviana desses processos. Nesses casos, o termo de fricção em um instante de tempo $t$ depende de $v(s)$, para $s < t$. Dessa forma, o coeficiente $\xi$ deve ser substituído por um kernel de memória $K(t)$ na equação de Langevin. O produto do coeficiente de fricção pela velocidade deve ser substituído por uma convolução do kernel de memória com a velocidade, para tempos anteriores a $t$, ou seja, na equação (2.4) devemos fazer

$$\xi v(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} ds\ K(t-s)v(s). \tag{2.17}$$

Quando tais sistemas se aproximam do equilíbrio, o teorema de flutução-dissipação deve ser modificado e ruído não é mais branco. Então, a relação de correlação (2.8) é modificada e escrita como

$$\langle R(t)R(t')\rangle = \left\langle v^2 \right\rangle_{eq}\ K(t-t'). \tag{2.18}$$

Equações de Langevin não-Markovianas também podem aparecer quando variáveis de um sistema de equações Markovianas são eliminadas. O contrário também é válido. Se o kernel de memória decai suficientemente rápido no tempo, um sistema Markoviano pode ser convertido em um sistema não-Markoviano com uma variável adicional.

Equações de Langevin não-lineares podem ser obtidas, como, por exemplo, no caso do movimento de uma molécula dipolar em um potencial periódico. Um tratamento analítico de equações desse tipo, em geral, é difícil ou até mesmo impraticável e um tratamento por simulações computacionais se faz necessário. No decorrer desta dissertação lidaremos apenas com equações de Langevin Markovianas.

# Capítulo 3

# Quantização estocástica para campos Euclidianos

## 3.1 Quantização de campos escalares livres

A quantização estocástica é um método relativamente recente utilizado para quantizarmos teorias de campo clássicas. Ele foi proposto em 1981 por G. Parisi e Y. S. Wu, numa tentativa de desenvolver um método de quantizar teorias de calibre, mas sem a necessidade de fixar o calibre do sistema e introdução de campos adicionais. A idéia principal da quantização estocástica é que um sistema quântico em $d$ dimensões pode ser encarado como o limite de um sistema estatístico clássico evoluindo em $d+1$ dimensões acoplado a um banho térmico.

A dimensão extra $\tau$ atribuída ao sistema representa um tempo fictício chamado parâmetro de Markov, em que os campos evoluem. O limite de equilíbrio é equivalente a tomar $\tau \to \infty$. O banho térmico é simulado através do ruído estocástico equivalente ao introduzido no capítulo anterior nas equações (2.4), (2.7) e (2.8). No limite de equilíbrio, as médias estocásticas das quantidades relacionadas ao sistema se tornam valores esperados no vácuo para o sistema.

Nessa seção aplicaremos o método da quantização estocástica para campos bosônicos livres. Consideremos então, um sistema descrito por um campo bosônico $\phi(x)$ definido em uma variedade Euclidiana $d$-dimensional. Existe uma importante analogia à teoria de campos Euclidiana e a mecânica estatística clássica. A medida de integrais de trajetória Euclidiana é relacionada à distribuição de Boltzmann de um sistema em equilíbrio térmico. As funções de Green da teoria Euclidiana são escritas como

$$\langle \phi(x_1)...\phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \; e^{-S_E} \phi(x_1)...\phi(x_n)}{\int \mathcal{D}\phi \; e^{-S_E}}, \tag{3.1}$$

onde $S_E$ é a ação Euclidiana do sistema. Se fizermos $S_E \rightarrow 1/T \; S_E$, onde $T$ é a temperatura, a semelhança entre a equação anterior e o valor esperado estatístico de um sistema em equilíbrio a uma temperatura $T$ é visível. Logo, a idéia da quantização estocástica é considerar a medida funcional Euclidiana como uma distribuição estacionária de um processo estocástico. Para um sistema descrito por um campo escalar não interagente em uma variedade Euclidiana plana $d$-dimensional, a ação Euclidiana é dada por

$$S_0[\phi] = \int d^d x \; \frac{1}{2} \left( (\partial_\mu \phi(x))^2 + m_0^2 \phi^2(x) \right). \tag{3.2}$$

Escolhemos condições de contorno periódicas para o campo, o que equivale a definí-lo em um $d$-toro $\Omega = T^d$. Para a implementação do método, é necessário acrescentar uma variável ao campo, o tempo de Markov, $\phi(x) \rightarrow \phi(x, \tau)$. Dessa forma, o campo fica definido em um domínio $T^d \times R^{(+)}$. Supomos que, estando o sistema acoplado a um banho térmico com temperatura $T$, este atinge o equilíbrio no limite em que o tempo de Markov vai a infinito. Portanto, como o sistema é considerado inicialmente fora do equilíbrio, sua evolução no tempo de Markov é descrita por uma equação de Langevin do tipo

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \left. \frac{\delta S_0}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x) = \phi(x,\tau)} + \eta(x, \tau). \tag{3.3}$$

O termo $\eta(x, \tau)$, definido no mesmo domínio de $\phi(x, \tau)$, é o ruído, que representa os efeitos do banho térmico do sistema. É válido ressaltar que $\delta S_0 / \delta \phi(x) = 0$ apenas para o campo clássico. Utilizando a ação dada pela equação (3.2) a equação de Langevin acima fica escrita como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \left( -\Delta + m_0^2 \right) \phi(x, \tau) + \eta(x, \tau), \tag{3.4}$$

onde $\Delta$ é o operador de Laplace definido na variedade Euclidiana $d$-dimensional. Assumindo que o ruído é branco e satisfaz uma distribuição de probabilidade Gaussiana, obtemos relações de correlação semelhantes às relações (2.7) e (2.8),

$$\langle \eta(x, \tau) \rangle_\eta = 0, \tag{3.5}$$

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') \delta^d(x - x'). \tag{3.6}$$

Em geral, de forma análoga à teoria do movimento Browniano, a média estocástica de qualquer funcional do campo $\phi$, $F[\phi]$, é dada por

$$\langle F[\phi] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\eta \; F[\phi] \; \exp\left\{-\frac{1}{4}\int d^d x \int d\tau \; \eta^2(x,\tau)\right\}}{\int \mathcal{D}\eta \; \exp\left\{-\frac{1}{4}\int d^d x \int d\tau \; \eta^2(x,\tau)\right\}}. \tag{3.7}$$

Para resolver a equação de Langevin (3.3) definimos a função de Green retardada para o problema de difusão, $G(x-x', \tau-\tau')$. Essa função de Green satisfaz

$$\begin{aligned} G(x-x',\tau-\tau') &= 0, \qquad \tau-\tau' < 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(-\Delta + m_0^2\right)\right] G(x-x',\tau-\tau') &= \delta(\tau-\tau')\delta^d(x-x'), \qquad \tau-\tau' > 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Com a condição inicial $\phi(x, \tau = 0) = 0$, a solução para a equação (3.4) pode ser escrita como a convolução da função de Green com a fonte, no caso, o ruído,

$$\phi(x,\tau) = \int_\Omega d^d x' \int_0^\tau d\tau' \; G(x-x',\tau-\tau')\eta(x',\tau'). \tag{3.9}$$

Definindo as transformadas de Fourier do campo e do ruído,

$$\phi(k,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \; e^{-ikx} \; \phi(x,\tau), \tag{3.10}$$

$$\eta(k,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \; e^{-ikx} \; \eta(x,\tau), \tag{3.11}$$

e substituindo essas expressões na equação (3.4) obtemos a seguinte equação de Langevin na representação dos momentos

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(k,\tau) = -\left(k^2 + m_0^2\right)\phi(k,\tau) + \eta(k,\tau). \tag{3.12}$$

A equação acima é satisfeita por cada modo de Fourier $\phi(k, \tau)$. É interessante comparar a equação (2.4) com a equação acima, onde o "coeficiente de fricção" é dado por $k^2 + m_0^2$. A solução para a equação (3.12) é escrita como

$$\phi(k,\tau) = \int_0^\tau d\tau' \; e^{-(k^2+m_0^2)(\tau-\tau')}\eta(k,\tau'). \tag{3.13}$$

Utilizando a decomposição (3.11) é possível mostrar que as relações (3.5) e (3.6) na representação de momentos ficam escritas como

$$
\begin{aligned}
\langle \eta(k,\tau) \rangle_\eta &= 0, & (3.14)\\
\langle \eta(k,\tau)\eta(k',\tau') \rangle_\eta &= 2(2\pi)^d \delta(\tau-\tau')\delta^d(k+k'). & (3.15)
\end{aligned}
$$

Dessa forma é possível calcular, utilizando as equações (3.13), (3.14) e (3.15), a função de correlação $\langle \phi(k,\tau)\phi(k',\tau) \rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle \phi(k,\tau)\phi(k',\tau) \rangle_\eta &\equiv D(k,k',\tau)\\
&= \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^\tau d\tau_2 \; e^{-(k^2+m_0^2)(\tau-\tau_1)} \; e^{-(k'^2+m_0^2)(\tau-\tau_2)} \; \langle \eta(k,\tau_1)\eta(k',\tau_2) \rangle_\eta\\
&= (2\pi)^d \delta^d(k+k') \frac{1}{k^2+m_0^2} \left(1 - e^{-2\tau(k^2+m_0^2)}\right). \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Finalmente, tomando o limite no qual o sistema vai ao equilíbrio, $\tau \to \infty$, obtemos

$$
\lim_{\tau\to\infty} \langle \phi(k,\tau)\phi(k',\tau) \rangle_\eta = D(k,k') = (2\pi)^d \delta^d(k+k') \frac{1}{k^2+m_0^2}, \qquad (3.17)
$$

que é a função de dois pontos Euclidiana ou função de Schwinger para o campo bosônico. A afirmação feita acima de que no limite em que o tempo de Markov vai para o infinito obtemos a teoria de campos Euclidiana foi verificada para o caso de um campo escalar não-interagente. Essa equivalência entre a quantização estocástica e os demais métodos de quantização, em especial o método de integrais de trajetória, já foi bastante discutida na literatura, e a equivalência demonstrada de diversas maneiras, dentre as quais se destacam as provas através de uma análise da equação de Fokker-Planck e análise da equação de Langevin [36] e técnicas diagramáticas [13].

## 3.2 Quantização de campos escalares interagentes

Consideremos agora o método de quantização estocástica aplicados a teoria escalar auto-interagente. Consideraremos uma interação do tipo $\lambda\phi^4$. A ação total do sistema é dada por $S = S_0 + S_I$, onde $S_0$ é descrita pela equação (3.2) e a ação de interação por

$$
S_I[\phi] = \int_\Omega d^d x \; \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x). \qquad (3.18)
$$

De forma análoga ao caso de campos livres, o equivalente à equação (3.3) fica escrito como

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(x,\tau) = -\left(-\Delta + m_0^2\right)\phi(x,\tau) - \frac{\lambda}{3!}\phi(x,\tau) + \eta(x,\tau). \tag{3.19}$$

As funções de correlação de um e dois pontos associadas ao ruído continuam sendo dadas pelas expressões (3.5) e (3.6), enquanto as demais funções de correlação são dadas por

$$\langle \eta(x_1,\tau_1)...\eta(x_{2k-1},\tau_{2k-1})\rangle_\eta = 0, \tag{3.20}$$

$$\langle \eta(x_1,\tau_1)...\eta(x_{2k},\tau_{2k})\rangle_\eta = \sum \langle \eta(x_1,\tau_1)\eta(x_2,\tau_2)\rangle_\eta ... \langle \eta(x_{2k-1},\tau_{2k-1})\eta(x_{2k},\tau_{2k})\rangle_\eta, \tag{3.21}$$

onde a soma deve ser tomada sobre todas as diferentes maneiras em que os $2k$ índices podem ser divididos em $k$ pares. Essa propriedade nada mais é do que uma expressão do teorema de decomposição de Wick. É interessante notar que, tomando médias estocásticas sobre o ruído, é possível mostrar que

$$\lim_{\tau_i\to\infty} \langle \phi(x_1,\tau_1)...\phi(x_n,\tau_n)\rangle_\eta = \frac{\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x_1,\tau_1)...\phi(x_n,\tau_n)\ e^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi\ e^{-S[\phi]}}. \tag{3.22}$$

A medida funcional das integrais de trajetória Euclidianas pode ser considerada como uma distribuição estacionária de um processo estocástico. Vamos agora assumir que a constante de acoplamento $\lambda$ que aparece na ação de interação $S_I[\phi]$ é uma quantidade pequena. Dessa forma, podemos tratar a equação (3.19) de através de um método perturbativo. Supomos que o campo $\phi(x,\tau)$ pode ser escrito como uma expansão na constante de acoplamento,

$$\phi(x,\tau) = \phi^{(0)}(x,\tau) + \lambda\phi^{(1)}(x,\tau) + \lambda^2\phi^{(2)}(x,\tau) + ... \tag{3.23}$$

Substituindo a expansão anterior na equação (3.19) e equacionando termos de mesma ordem em $\lambda$, obtemos até a primeira ordem em $\lambda$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + (-\Delta + m_0^2)\right]\phi^{(0)}(x,\tau) = \eta(x,\tau), \tag{3.24}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + (-\Delta + m_0^2)\right]\phi^{(1)}(x,\tau) = -\frac{1}{3!}\left(\phi^{(0)}(x,\tau)\right)^3. \tag{3.25}$$

A equação (3.24) é idêntica à equação (3.4). Se assumirmos que $\phi^{(j)}(x,\tau=0) = 0,\ \forall\, j$, sua solução é dada pela convolução da função de Green para o problema de difusão, definida nas equações (3.8), com o ruído,

$$\phi^{(0)}(x,\tau) = \int_\Omega d^dx' \int_0^\tau d\tau'\ G(x-x',\tau-\tau')\eta(x',\tau'). \tag{3.26}$$

A solução da equação (3.25) fica escrita como

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)}(x,\tau) &= -\frac{1}{3!}\int_\Omega d^d x_1 \int_0^\tau d\tau_1\, G(x-x_1,\tau-\tau_1)\times \\
&\times \left(\int_\Omega d^d x' \int_0^{\tau_1} d\tau'\, G(x_1-x',\tau_1-\tau')\eta(x',\tau')\right)^3 . \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Podemos, agora, considerar as funções de correlação de $n$ pontos $\langle\phi(x_1,\tau_1)...\phi(x_n,\tau_n)\rangle_\eta$. Substituindo os resultados acima obtidos e levando em conta as propriedades de decomposição descritas pela equação (3.21) são gerados os gráficos estocásticos, que possuem uma grande semelhança com os gráficos de Feynman da teoria de campos. Podemos, como foi feito na seção anterior, calcular a função de correlação de dois pontos $\langle\phi(x_1,\tau_1)\phi(x_2,\tau_2)\rangle_\eta$. Utilizando as expressões (3.26) e (3.27) podemos mostrar que na representação de momentos

$$\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta = \langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta^{(0)} + \langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta^{(1)}, \qquad (3.28)$$

onde $\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta^{(0)} = D(k_1,k_2,\tau)$ é a contribuição de ordem zero para a função de dois pontos, definida na equação (3.16). A contribuição de primeira ordem é

$$\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta^{(1)} = (a)+(b), \qquad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned}
(a) &= -\frac{\lambda}{2}\delta^d(k_1+k_2)\int d^d k \int_0^{\tau_1} d\tau\, G(k_1,\tau_1-\tau)D(k,\tau,\tau)D(k_2,\tau_2,\tau), \qquad (3.30)\\
(b) &= -\frac{\lambda}{2}\delta^d(k_1+k_2)\int d^d k \int_0^{\tau_2} d\tau\, G(k_2,\tau_2-\tau)D(k,\tau,\tau)D(k_1,\tau_1,\tau). \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Após um cálculo simples, é fácil mostrar que no limite de equilíbrio, em que $\tau_1=\tau_2\to\infty$, nós obtemos a função de Schwinger de dois pontos numa aproximação de um laço:

$$(b)\Big|_{\tau_1=\tau_2\to\infty} = -\frac{\lambda}{2}\delta^d(k_1+k_2)\frac{1}{(k_1^2+m_0^2)}\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+2m_0^2)}\int d^d k\, \frac{1}{k^2+m_0^2}. \qquad (3.32)$$

Apesar de ser possível obter as funções de Schwinger no limite de equilíbrio, isso não garante que obtivemos uma teoria finita fisicamente aceitável. O passo seguinte é aplicar um procedimento de regularização à teoria, o que será feito mais à frente através da regularização estocástica.

## 3.3 Quantização de férmions

Nessa seção vamos aplicar o método de quantização de Parisi e Wu a teorias fermiônicas. Utilizando uma equação de Langevin do tipo (3.3), aparecem problemas de convergência no limite termodinâmico do parâmetro de Markov ($\tau \to \infty$). Nesse limite, as médias estocásticas calculadas para o sistema em $d+1$ dimensões não resultam nos valores esperados no vácuo da teoria em $d$ dimensões. Isso ocorre porque não existem análogos clássicos de campos fermiônicos, e o operador diferencial que aparece na equação de Dirac não é positivo-definido.

A solução para esse problema pode ser dada graças à liberdade com que podemos escolher a equação de Langevin. Dessa forma, podemos escolher uma versão bosonizada da equação, transformando todos os operadores relevantes em operadores positivo-definidos.

Consideremos uma teoria Euclidiana descrita apenas por campos espinoriais, em $d$ dimensões. A ação para férmions livres nessa teoria é dada por

$$S[\psi,\bar{\psi}] = -i\int d^dx\;\bar{\psi}(x)\,(\gamma_\mu\partial_\mu + im)\,\psi(x), \tag{3.33}$$

onde as matrizes $\gamma_\mu$ satisfazem a álgebra de Clifford, $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$. Portanto, a equação de Langevin fica escrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x,\tau) &= -\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\bigg|_{\psi(x)=\psi(x,\tau)} + \eta(x,\tau)\\ &= \big(i\partial\!\!\!/ - m\big)\,\psi(x,\tau) + \eta(x,\tau),\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde $\partial\!\!\!/ = \gamma_\mu\partial_\mu$. O ruído também é um campo fermiônico cujo anticomutador é zero e, em analogia com o caso bosônico, este satisfaz as relações de correlação $\langle\eta(x,\tau)\rangle = \langle\bar{\eta}(x,\tau)\rangle = 0$ e $\langle\eta_\alpha(x,\tau)\bar{\eta}_\beta(x',\tau')\rangle = 2\delta_{\alpha\beta}\delta^d(x-x')\delta(\tau-\tau')$. A solução da equação acima é dada através da introdução da função de Green $g(x,\tau)$, que satisfaz

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x-x',\tau-\tau') &= 0, \quad \tau-\tau'<0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - i\partial\!\!\!/ + m\right)_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}(x-x',\tau-\tau') &= \delta_{\alpha\gamma}\delta^d(x-x')\delta^d(\tau-\tau'), \quad \tau-\tau'>0.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Apesar da equação acima envolver apenas os termos diagonais nos índices espinoriais, $g(x-x',\tau-\tau')$ não é diagonal. De forma análoga à expansão feita para o campo escalar dada pela equação (3.10), utilizando soluções de ondas planas como base, é possível fazer uma expansão de Fourier nos campos fermiônicos. A função de Green, portanto, fica explicitamente dada por

$$g(x,\tau) = \theta(t) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \exp\left\{-(\not{p}+m)\tau - ipx\right\}, \tag{3.36}$$

onde $\not{p} = \gamma_\mu p_\mu$. Logo, a solução para o campo $\psi(x,\tau)$ fica escrita como

$$\psi(x,\tau) = \int_\Omega d^d x' \int_0^\tau d\tau' \; g(x-x', \tau-\tau')\eta(x',\tau'). \tag{3.37}$$

Para que haja convergência para a teoria de campos, é necessário que $g(x,\tau) \to 0$ conforme $\tau \to \infty$. Entretanto, a função de Green não é diagonal, devido à matriz $\not{p}+m\mathbb{I}$. Essa matriz pode ser diagonalizada através de uma matriz unitária $U(p)$, e dessa forma a convergência de $g(x,\tau)$ pode ser analizada. Portanto, temos

$$\not{p} + m\mathbb{I} = U^\dagger(p) \begin{pmatrix} i\sqrt{p^2} & & & & 0 \\ & i\sqrt{p^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -i\sqrt{p^2} & \\ 0 & & & & -i\sqrt{p^2} \end{pmatrix} U(p) + m\mathbb{I}. \tag{3.38}$$

Assim, a função de Green $g(x,\tau)$ também fica diagonalizada por $U(p)$, e é dada por

$$g(x,\tau) = \theta(t) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} U^\dagger(p) \left(e^{-A(p)\tau}\right) U(p) \; e^{-m\tau - ipx}, \tag{3.39}$$

onde $A(p)$ é a matrix diagonal dos autovalores $\pm i\sqrt{p^2}$, que aparece na equação (3.38). Claramente, a convergência da função de Green depende unicamente do fator $\exp\{-m\tau\}$, o que quer dizer que, para teorias de férmions não massivos, não obtemos diretamente o limite quântico quando o parâmetro de Markov vai ao infinito.

A solução para este problema provém do fato de que a escolha da equação de Langevin, que descreve a evolução do sistema no parâmetro de Markov, não é única. Como foi brevemente discutido no primeiro capítulo, para processos não-Markovianos é necessário introduzir um kernel na equação de Langevin. Podemos utilizar essa generalização para o caso de férmions, onde o kernel deve ser escolhido de forma a cancelar os autovalores negativos de $\delta S/\delta\bar{\psi}(x)$. Em geral, o kernel não deve ser positivo-definido. A equação de

Langevin generalizada fica escrita como

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x,\tau) = -\int d^dy\ K(y,x)\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(y)}\bigg|_{\psi(y)=\psi(y,\tau)} + \theta(x,\tau). \tag{3.40}$$

O novo ruído introduzido deve satisfazer as novas relações de correlação

$$\begin{aligned}\langle\theta(x,\tau)\rangle &= \langle\bar{\theta}(x,\tau)\rangle = 0,\\ \langle\theta_\alpha(x,\tau)\bar{\theta}_\beta(x',\tau')\rangle &= 2K_{\alpha\beta}(x,y)\delta(\tau-\tau').\end{aligned} \tag{3.41}$$

O segundo momento da distribuição de probabilidade do ruído é agora proporcional ao kernel $K(x,y)$. Essa nova expressão é escrita dessa maneira de forma a manter válido o teorema de flutuação-dissipação. Se escolhermos o kernel $K(x,y)$ da forma

$$K(x,y) = \big(i\not{\partial} + m\big)\,\delta^d(x-y), \tag{3.42}$$

a equação de Langevin (3.40) se torna

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x,\tau) = -(\Delta - m^2)\psi(x,\tau) + \theta(x,\tau). \tag{3.43}$$

A equação acima possui a mesma forma da equação de Langevin para o campo escalar (3.3). Toda a informação sobre a natureza espinorial da teoria está contida nos valores esperados de $\theta(x,\tau)$. As funções de $2n$ pontos para o ruído são dadas por

$$\langle\theta(x_1,\tau_1)\cdots\bar{\theta}(x_n,\tau_n)\rangle = \sum_{\text{perm}}\ \varepsilon_p\ \prod_{\text{pares}}\langle\theta(x_i,\tau_i)\theta(x_j,\tau_j)\rangle, \tag{3.44}$$

onde $\epsilon_p$ assume o valor $+1$ para permutações pares e o valor $-1$ para permutações ímpares.

A equação de Langevin (3.43) pode ser resolvida de forma análoga ao caso bosônico. Dada a função de Green diagonal

$$G(x,\tau) = \theta(\tau)\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\ e^{-(p^2+m^2)\tau-ipx}, \tag{3.45}$$

a solução fica explicitamente definida por

$$\psi(x,\tau) = \int_0^\tau d\tau'\ \int_\Omega d^dx'\ G(x-x',\tau-\tau')\theta(x',\theta'). \tag{3.46}$$

A função de Green dada pela equação (3.45) possui as mesmas propriedades de convergência da função de Green no caso bosônico. De fato, ela converge no caso em que $m = 0$. Como a convergência é garantida no caso de férmions livres, ao introduzirmos uma interação a expressão para o campo fermiônico $\psi(x,\tau)$ fica dada por

$$\psi(x,\tau) = \int_0^\tau d\tau' \int_\Omega d^dx' \; G(x-x',\tau-\tau')\left[\theta(x',\theta') - \left.\frac{\delta S_I[\psi,\bar{\psi}]}{\delta\bar{\psi}(x)}\right|_{\psi(x)=\psi(x,\tau)}\right]. \qquad (3.47)$$

É possível demonstrar através de uma análise da equação de Fokker-Planck associada à distribuição de probabilidades que o kernel $K(x,y)$ introduzido na equação de Langevin é suficiente para garantir a convergência da teoria no caso de acoplamento entre férmions e entre férmions e outros campos, e que o método de quantização estocástica fornece as funções de correlação da teoria de campos no limite do equilíbrio [15].

## 3.4 A regularização estocástica

A expressão (3.32) é claramente divergente se $d \geq 2$, devido à integração nos momentos. Um passo fundamental no processo de quantização de uma teoria é encontrar um esquema de regularização satisfatório, de forma a tornar as integrações da teoria finitas em um estágio anterior à renormalização. No fim, a teoria renormalizada deve ser independente do processo de regularização adotado. Alguns métodos de regularização acabam por ser incompatíveis com as simetrias da teoria, que devem ser preservadas. Por exemplo, a regularização na rede, que discretiza o espaço, quebra a invariância por translação e rotação de uma teoria.

Uma generalização do método de quantização de Parisi e Wu sugere um novo método de regularização para a teoria de campos. Graças à presença do parâmetro de Markov como uma dimensão adicional é possível desenvolver um esquema de regularização que preserva todas as simetrias da teoria: a regularização estocástica.

O processo de regularização estocástica consiste em modificar o processo estocástico original representado pela equação (3.19) através da introdução de um regulador, ou no termo de fricção ou na correlação do ruído. O processo estocástico modificado é diferente do processo original. Eles coincidem apenas no limite em que o kernel se aproxima da unidade.

Existem duas possibilidades de escolha para o regulador. Uma é tomar um kernel dependente de $\tau$ somente. Isso corresponde a escolher a correlação do ruído como $\langle\eta(x,\tau)\eta(x',\tau')\rangle = 2\delta^d(x-x')K(\tau-\tau')$. Essa escolha implica que o novo processo é essencialmente não-Markoviano. Como a função delta das coordenadas espaciais ainda aparece na correlação do ruído, esta se mantém invariante sob transfomações de simetria.

A outra possibilidade é a regularização estocástica covariante, que é puramente Markoviana. A idéia é construir uma nova equação regularizada de Langevin, com o termo que contém a contribuição do ruído modificado,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(x,\tau) = -\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\bigg|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)} + \int d^d y \; R_{xy}(\Delta)\eta(y,\tau), \tag{3.48}$$

onde o regulador é função do Laplaciano,

$$\Delta_{xy} = \int d^d z \; (\partial_\mu)_{xz}(\partial_\mu)_{zy}, \tag{3.49}$$

e

$$(\partial_\mu)_{xy} = \partial_\mu(x) \; \delta^d(x-y). \tag{3.50}$$

Para que os processos estocásticos coincidam ao fim do processo de regularização, é necessário que o regulador se aproxime da unidade à medida em que o corte ultravioleta $\Lambda$ se aproxima do infinito. Essa propriedade possibilita a escolha de diversos reguladores. O regulador escolhido no decorrer desta dissertação é da forma

$$R(\Delta,\Lambda) = \exp\left\{\frac{\Delta}{\Lambda^2}\right\}, \tag{3.51}$$

que claramente satisfaz

$$\lim_{\Lambda\to\infty} R(\Delta,\Lambda) = 1, \tag{3.52}$$

$$\lim_{\Lambda\to\infty} R_{xy}(\Delta,\Lambda) = \delta^d(x-y), \tag{3.53}$$

garantindo que o processo estocástico regularizado seja reduzido ao processo original no limite em que o parâmetro $\Lambda$, introduzido para regularizar a teoria, vá ao infinito. Com essa modificação da equação de Langevin é possível mostrar que todas as contribuições para as funções de $n$ pontos em todas as ordens da expansão na constante de acoplamento são finitas. De fato, a contribuição para a função de dois pontos dada pela equação (3.32) fica reescrita como

$$(b)\bigg|_{\tau_1=\tau_2\to\infty} = -\frac{\lambda}{2}\delta^d(k_1+k_2)\frac{1}{(k_1^2+m_0^2)}\frac{R_{k_2}^2(\Lambda)}{(k_1^2+k_2^2+2m_0^2)}\int d^d k \; \frac{R_k^2(\Lambda)}{k^2+m_0^2}, \tag{3.54}$$

onde $R_k$ é a transformada de Fourier do regulador, definida por

$$R_k(\Lambda) = R(\Delta, \Lambda)\Big|_{\Delta=-k^2}. \tag{3.55}$$

Claramente, a equação (3.54) é uma expressão finita, devido à convergência da integral envolvendo o regulador. No próximo capítulo, os passos desenvolvidos até agora serão aplicados para investigar a quantização de um campo escalar no espaço-tempo de de Sitter.

# Capítulo 4

# Quantização de campos escalares na variedade de de Sitter

## 4.1 Quantização estocástica de Parisi-Wu em variedades Riemannianas

No capítulo anterior, o método da quantização estocástica foi empregado para se estudar campos escalares com auto-interação em variedades que podem ser continuadas analiticamente para a situação Euclidiana. A equação de Langevin para os coeficientes de Fourier foi resolvida e a função de dois pontos ao nível de um laço foi exibida. Mostramos que esta diverge e, a fim de torná-la finita, nos utilizamos da regularização estocástica covariante. É importante ressaltar que este procedimento de estender a variedade real para uma complexa na situação acima faz com que a ação se torne uma quantidade real, permitindo a implementação da quantização estocástica de modo relativamente simples. Queremos mostrar que esse esse procedimento também funciona quando, partindo de uma variedade pseudo-Riemanniana, via extensão analítica da coordenada temporal, encontramos uma variedade Riemanniana onde os campos estão definidos. Uma equação de Langevin generalizada convergirá para uma situação de equilíbrio onde as funções de correlação calculadas como média de todas as realizações do ruído se tornarão as funções de Schwinger associadas ao campo em questão na variedade curva.

Nosso propósito neste capítulo é discutir a quantização estocástica de campos escalares com auto-interação definidos na variedade de de Sitter. Vamos calcular a função de Schwinger de dois pontos ao nível de um laço e aplicar a regularização estocástica contínua para controlar divergências ultravioletas.

Para tanto, vamos primeiramente fazer uma generalização do método desenvolvido no capítulo anterior para espaços-tempo curvos. Consideremos uma variedade $M^d$ que admite um campo vetorial de Killing não-nulo $X$. Se for sempre possível introduzir coordenadas $(t, x^j)$ localmente de forma que $X^0 = \frac{\partial}{\partial t}$ e as componentes do tensor métrico forem independentes de $t$ a variedade é estacionária. Além disso, se a distribuição $X^\perp$ dos hiperplanos ortogonais a $X^0$ for integrável, a variedade é estática. Para variedades estáticas, é possível realizar uma rotação de Wick e estender analiticamente a variedade pseudo-Riemanniana para o domínio Riemmaniano, onde a quantização estocástica pode ser implementada.

Consideremos, então, uma teoria de campos clássica definida em $M^d \times R^{(+)}$, onde $R^{(+)}$ representa o setor do parâmetro de Markov $\tau$, acoplada a um banho térmico. Em geral, é possível introduzir uma decomposição de Fourier da forma

$$\phi(x,\tau) = \int d\tilde{\mu}(k)\ \phi_k(\tau) u_k(x), \tag{4.1}$$

onde a medida $d\tilde{\mu}(k)$ depende da métrica de $M^d$, e os modos $u_k(x)$ são soluções da equação de Klein-Gordon definida nessa variedade. Para campos definidos em espaços-tempo cujos elementos de linha são escritos da forma

$$ds^2 = g_{oo}dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j, \tag{4.2}$$

vamos propor uma equação de Langevin dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\phi(x,\tau) = -\frac{g_{00}}{\sqrt{g}}\frac{\delta S}{\delta\,\phi(x)}\bigg|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)} + \eta(x,\tau), \tag{4.3}$$

onde $g = |\det g_{\mu\nu}|$ e $S$ é a ação Euclidiana dada por

$$S[\phi] = \int d^d x\ \sqrt{g}\mathcal{L}[\phi]. \tag{4.4}$$

Impomos que o ruído $\eta(x,\tau)$ ainda satisfaça uma distribuição estatística Gaussiana e seja branco. As expressões para o primeiro e segundo momentos da distribuição de probabilidade satisfeita pelo ruído, (3.5) e (3.6), ficam escritas como

$$\langle \eta(x,\tau) \rangle_\eta = 0, \tag{4.5}$$

$$\langle \eta(x,\tau)\eta(x',\tau') \rangle_\eta = \frac{2}{\sqrt{g(x)}}\,\delta^d(x-x')\,\delta(\tau-\tau'). \tag{4.6}$$

Na seção seguinte, empregaremos tais generalizações para a quantização de um campo bosônico em um espaço de de Sitter quadridimensional. Antes de prosseguirmos, gostaríamos de salientar que a equação de Langevin acima contém a componente $g_{00}$ do tensor métrico, que a torna não-covariante. Isto não é um problema, pois a covariância deve ser restaurada na situação de equilíbrio. Vale a pena lembrar que na quantização de um sistema fermiônico a introdução do kernel $K(x,y)$ quebra a simetria local de calibre.

## 4.2 Campos escalares livres no espaço-tempo de de Sitter

Existem diversas formas de representar o espaço de de Sitter quadridimensional. A mais simples é pelo hiperbolóide

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2, \tag{4.7}$$

imerso em um espaço de Minkowski de cinco dimensões, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2. \tag{4.8}$$

Da forma da equação (4.7), percebe-se que o grupo de simetria do espaço de de Sitter é o grupo de dez parâmetros $SO(1,4)$ das transformações de Lorentz homogêneas no espaço de imersão de cinco dimensões, conhecido como grupo de de Sitter. Assim como o grupo de Poincaré tem um papel central na quantização de campos no espaço de Minkowski, o grupo de de Sitter é fundamental para a discussão da quantização de uma teoria no espaço-tempo de de Sitter. Por ser um espaço maximalmente simétrico, o espaço-tempo de de Sitter $S_{1,3}$ o escalar de curvatura de Ricci em $d$ dimensões é dado por $\frac{d(d-1)}{\alpha^2}$.

Vamos introduzir em $S_{1,3}$ as coordenadas $x^\beta = (t, \xi^i)$, onde $\beta, \delta, \gamma = 0,1,2,3$ e $i,j = 1,2,3$. Temos:

$$z^0 = \alpha \tan t \quad ; \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \tag{4.9}$$

$$z^a = \frac{\alpha}{\cos t} k^a(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad ; \quad a,b = 1,2,3,4, \tag{4.10}$$

$\xi^1, \xi^2, \xi^3$ sendo as coordenadas na esfera $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 1$. O “futuro" (“passado") infinitamente remoto corresponde a $t = \pi/2$ ($t = -\pi/2$) para as coordenadas do tipo tempo $t$. As esferas tridimensionais $z^0 = const.$ são hipersurperfícies de tempos iguais.

Podemos escrever

$$dk_1^2 + dk_2^2 + dk_3^2 + dk_4^2 = \omega_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\, d\xi^i\, d\xi^j, \tag{4.11}$$

onde $\omega_{ij} = \frac{\partial k_a}{\partial \xi_i}\frac{\partial k_a}{\partial \xi_j}$ é o tensor métrico de $S_3$. Dessa forma, o intervalo do espaço-tempo de de Sitter pode ser denotado da seguinte maneira,

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 t}\left(dt^2 - \omega_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\, d\xi^i\, d\xi^j\right). \tag{4.12}$$

Com uma rotação de Wick, chegamos ao espaço de de Sitter Euclidiano escrito nas coordenadas (4.9) e (4.10). Consideremos a seguinte densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\,(m_0^2 + \xi R)\phi^2. \tag{4.13}$$

Note que foi introduzido um acoplamento entre o campo bosônico e o campo gravitacional representado pelo termo $\xi R\phi^2$, onde $\xi$ é um fator numérico e $R$ o escalar de curvatura de Ricci. Se tomarmos $\xi = \frac{1}{4}\frac{d-2}{d-1}$, a inserção desse termo de acoplamento garante que a teoria seja invariante sob transformações conformes no caso em que $m_0 = 0$. Como estamos considerando $d = 4$, temos $R = \frac{12}{\alpha^2}$ e $\xi = \frac{1}{6}$. Utilizando as equaçoes (4.4) e (4.13), a equação de Langevin (4.3) fica escrita como

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(x,\tau) = -\frac{\alpha^2}{\cosh^2 t}\left(-\Delta + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2}\right)\varphi(x,\tau) + \eta(x,\tau), \tag{4.14}$$

onde $\Delta$ é o operador de Laplace-Beltrami em 4 dimensões, definido por

$$\begin{aligned}\Delta &= g^{-1/2}\partial_\mu(g^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\\ &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Procedemos, então, de forma análoga ao caso plano. Definimos a função de Green retardada para o problema de difusão $G(x - x', \tau - \tau')$, que satisfaz

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\alpha^2}{\cosh^2 t}\left(-\Delta_x + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2}\right)\right] G(x - x', \tau - \tau') = \delta(\tau - \tau')\delta^d(x - x'), \tag{4.16}$$

se $\tau - \tau' > 0$ e $G(x - x', \tau - \tau') = 0$, se $\tau - \tau' < 0$. Usando a função de Green e a condição inicial $\phi(x, \tau = 0) = 0$ a solução fica escrita como

$$\phi(x,\tau) = \int_\Omega d^4x' \int_0^\tau d\tau' \sqrt{g(x')}\; G(x-x', \tau-\tau')\eta(x',\tau'). \tag{4.17}$$

Para encontrarmos a função de Green, e consequentemente a solução da equação de Langevin, é útil fazermos uma expansão de Fourier do campo e do ruído, segundo a equação (4.1). Nesse caso, os modos $u_k(x)$ são dados por [38]

$$u^{\pm}_{ps\sigma}(x) = N\sqrt{s+1}\;\Xi_{s\sigma}[k(\xi)] f^{\pm}_p(t)\;\cosh t, \tag{4.18}$$

com $s = 0, 1, 2, ...$ e $\sigma = 1, 2, ...(s+1)^2$. As funções $\Xi_{s\sigma}[k(\xi)]$ são polinômios ortogonais harmônicos em $k$ de grau $s$. Tais polinômios são soluções da equação $(\Delta + s(s+2))\,\Xi_{s\sigma}[k(\xi)] = 0$, e são identificados pelo índice $\sigma$. As funções $f^{\pm}_p(t)$ são expressas através de funções hipergeométricas,

$$f^{\pm}_p(t) = \frac{1}{(ip)!}\sqrt{\Gamma(ip+\mu)\Gamma(ip-\mu+1)}\, e^{\pm ip\,t} F\left(\mu, 1-\mu; ip+1; \frac{1\pm\tanh t}{2}\right), \tag{4.19}$$

com $\mu = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4m^2}\right)$ e $m = m_0\alpha$. A medida para a decomposição na equação (4.1) nesse caso é

$$\int d\tilde{\mu}_{ps\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int dp \sum_{s,\,\sigma}. \tag{4.20}$$

Substituindo a decomposição de Fourier com os modos dados ela equação (4.18) na equação de Langevin (4.14), é possível concluir que cada modo de Fourier satisfaz uma equação de Langevin do tipo

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi_q(\tau) = -(q^2+1)\phi_q(\tau) + \eta_q(\tau), \tag{4.21}$$

onde $q^2 = p^2 + \kappa^2$, com $\kappa^2 = s(s+2)$. Tomando a condição inicial $\phi_q(\tau = 0) = 0$, a solução da equação (4.21) fica escrita como

$$\phi_q(\tau) = \int_0^\tau d\tau'\; G_q(\tau-\tau')\eta(\tau'), \tag{4.22}$$

onde a função de Green é dada por

$$G_q(\tau-\tau') = e^{-(q^2+1)(\tau-\tau')}\;\theta(\tau-\tau'). \tag{4.23}$$

A função de dois pontos $D_q(\tau,\tau')$ pode ser calculada de forma semelhante ao caso plano Euclidiano, levando em conta que na representação de momentos a segunda relação (4.6) fica escrita como

$$\langle \eta_q(\tau)\eta_{q'}(\tau')\rangle = 2(2\pi)\delta(p+p')\delta_{ss'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta(\tau-\tau'). \tag{4.24}$$

De fato, obtemos

$$D_q(\tau,\tau') = \langle \phi_q(\tau')\phi_{q'}(\tau')\rangle = \delta(p+p')\delta_{ss'}\delta_{\sigma\sigma'}\,\frac{1}{q^2+1}\left(e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{(q^2+1)(\tau+\tau')}\right), \tag{4.25}$$

ou na representação de coordenadas

$$\begin{aligned} D(x,x',\tau,\tau') &= \int d\tilde{\mu}(q)\; u_q^+(x)u_q^-(x')D_q(\tau,\tau') \\ &= \int d\tilde{\mu}(q)\; u_q^+(x)u_q^-(x')\;\frac{1}{q^2+1}\left(e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{(q^2+1)(\tau+\tau')}\right). \end{aligned} \tag{4.26}$$

No limite em que $\tau=\tau'\to\infty$ obtemos seguinte expressão

$$\begin{aligned} D(x,x') &= \mathcal{N}^2\frac{\cosh t\cosh t'}{\sin\gamma}\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^2\sin{(s+1)\gamma}\int dp\frac{f_p^+(t)f_p^-(t)}{p^2+(s+1)^2} \\ &= \mathcal{N}^2\frac{\cosh t\cosh t'}{\sin\gamma}\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\sin{(s+1)}f_{i(s+1)}^+(t)f_{i(s+1)}^-(t)\gamma, \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde utilizamos o teorema da soma dos polinômios harmônicos [37],

$$\sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2}\Xi_{\sigma s}(\xi^i)\Xi_{\sigma s}(\xi'^i) = \frac{(s+1)\sin{(s+1)\gamma}}{2\pi^2\sin\gamma}, \tag{4.28}$$

com $\gamma=\pm\arccos\sum_{\alpha=1}^{4}k_\alpha(\xi)k_\alpha(\xi')$. A expressão (4.27) é claramente divergente, entretanto, é possível mostrar que [39], definindo a função $\Delta(t,t')$ como

$$\Delta(t,t') = \sum_{s=0}^{\infty}f_{-i(s+1)}^+(t)f_{-i(s+1)}^-(t')\cos{(s+1)\gamma}, \tag{4.29}$$

que é uma expressão finita, é possível reescrever a expressão (4.27) como

$$D(x,x') = -\mathcal{N}^2\frac{\cosh t\cosh t'}{\sin\gamma}\;\frac{\partial}{\partial\gamma}\Delta(t,t'). \tag{4.30}$$

Vale a pena salientar que, apesar de ser um resultado bastante conhecido na literatura [38, 39], o método utilizado para encontrá-lo difere completamente dos métodos anteriormente aplicados na literatura. Não existem aplicações do método de quantização estocástica a variedades curvas, mais especificamente à variedade de de Sitter. O estudo de uma nova forma de quantização pode fornecer novas informações sobre o processo de quantização de uma teoria que não são evidentes na aplicação dos outros métodos de quantização além de novas técnicas, como o caso da regularização estocástica. Na seção seguinte, examinaremos o caso de um campo bosônico neutro auto-interagente, na variedade de de Sitter.

## 4.3 Campos escalares interagentes no espaço-tempo de de Sitter

Agora, vamos aplicar o método para o caso de uma teoria auto-interagente, com ação de interação dada por

$$S_I[\phi] = \int_\Omega d^d x \ \sqrt{g(x)} \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x), \tag{4.31}$$

e a equação de Langevin obtida é

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\varphi(x,\tau) = -\frac{\alpha^2}{\cosh^2 t}\left(-\Delta + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2}\right)\varphi(x,\tau) + \frac{\lambda}{3!}\frac{\alpha^2}{\cosh^2 t}\phi(x,\tau) + \eta(x,\tau). \tag{4.32}$$

Da mesma forma que no caso Euclidiano plano, podemos resolver a equação acima através de uma série perturbativa $\lambda$. A função de dois pontos na representação de momentos é dada por $\langle \phi_q(\tau_1)\phi_k(\tau_2)\rangle = (a) + (b) + (c)$, onde o termo $(a)$ é a contribuição de ordem zero dada pela equação (4.25). Os termos $(b)$ e $(c)$ são as contribuições de primeira ordem em $\lambda$, escritos como

$$(b) \;=\; -\frac{\lambda}{2}\delta^4(q,k)\int d\tilde{\mu}(p) \ u_p^+ u_p^- \ \int_0^{\tau_1} d\tau \ G_q(\tau_1 - \tau) D_p(\tau,\tau) D_k(\tau_2,\tau), \tag{4.33}$$

$$(c) \;=\; -\frac{\lambda}{2}\delta^4(q,k)\int d\tilde{\mu}(p) \ u_p^+ u_p^- \ \int_0^{\tau_2} d\tau \ G_k(\tau_2 - \tau) D_p(\tau,\tau) D_q(\tau_1,\tau), \tag{4.34}$$

onde $G_q(\tau - \tau')$ e $D_q(\tau, \tau')$ são definidos pelas equações (4.23) e (4.25), respectivamente. Substituindo essas expressões e tomando o limite de equilíbrio ($\tau_1 = \tau_2 \to \infty$) obtemos para $(b)$, por exemplo, a expressão

$$(b)\Big|_{\tau_1=\tau_2\to\infty} = -\frac{\lambda}{2}\delta^4(q,k)\frac{1}{(k^2+1)}\frac{1}{(q^2+k^2+2)}I, \tag{4.35}$$

com a quantidade $I$ definida por

$$I = \mathcal{N}^2\cosh^2 t_1 \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^3\int dp\ f_p^+(t_1)f_p^-(t_1)\ \frac{1}{p^2+(s+1)^2}. \tag{4.36}$$

Lembrando que as funções $f_p^+(t_1)$ e $f_p^-(t_1)$ são, de fato, funções hipergeométricas, a integral acima pode ser feita escolhendo o contorno apropriado no plano $p$ complexo. O resultado é

$$I = \mathcal{N}^2\cosh^2 t_1 \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^2 f_p^+(t_1)f_p^-(t_1)\Big|_{p=-i(s+1)}. \tag{4.37}$$

A série nessa equação é claramente divergente, portanto, é necessário regularizá-la e obter um resultado finito para a função de dois pontos. Isso pode ser feito, assim como demonstrado no capítulo anterior, através da regularização estocástica covariante. Introduzimos, então, a seguinte equação de Langevin regularizada

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(x,\tau) = -\frac{g_{00}}{\sqrt{g}}\frac{\delta S_0}{\delta\phi(x)}\Big|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)} + \int d^4y\ \sqrt{g}R_{xy}(\Delta)\eta(y,\tau), \tag{4.38}$$

onde o regulador é função do Laplaciano. A usando a decomposição em modos dada pela equação (4.1), concluimos que cada modo de Fourier satisfaz uma equação do tipo

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi_q(\tau) = -(q^2+1)\phi_q(\tau) + R_q\eta_q(\tau), \tag{4.39}$$

onde $R_q = R_{xy}(\Delta)|_{\Delta=-(p^2+(s+1)^2)}$ e $R_{xy}(\Delta) = \int d\tilde{\mu}(q)\ u_q^+(x)u_q^-(y)R_q$. Obtemos, então, repetindo os cálculos da seção anterior, é possível mostrar que a função de correlação de dois pontos para o campo livre na representação de momentos fica

$$D_q(\tau,\tau') = N^2\delta^4(q,q')\frac{R_q^2}{(q^2+1)}\left(e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{(q^2+1)(\tau+\tau')}\right). \tag{4.40}$$

Dessa forma, a contribuição de primeira ordem para a função de dois pontos dada pela equação (4.35) fica reescrita como

$$(b)_\Lambda\Big|_{\tau-1=\tau_2\to\infty} = -\frac{\lambda}{2}\delta^4(q,k)\frac{R_k^2}{(k^2+1)}\frac{1}{(q^2+k^2+2)}I(\Lambda). \tag{4.41}$$

O termo $I(\Lambda)$ é dado por

$$I(\Lambda) = \mathcal{N}^2 \cosh^2 t_1 \int dp \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^3 \, \frac{e^{-2(p^2+(s+1)^2)/\Lambda^2}}{p^2+(s+1)^2} \, f_p^+(t_1) f_p^-(t_1). \tag{4.42}$$

Apesar de não ter sido possível expressar a equação acima em termos de funções conhecidas, a presença da função exponencial garante que a integral seja finita. Dessa forma, obtivemos a função de Schwinger de dois pontos regularizada numa aproximação de um laço para um campo massivo conformalmente acoplado no espaço-tempo de de Sitter. Um tratamento similar pode ser utilizado para a obtenção das funções de Schwinger de quatro pontos.

Um ponto importante a se ressaltar é que o procedimento de regularização estocástica preserva todas as simetrias da Lagrangiana não-regularizada. O próximo passo seria isolar as partes divergentes no limite $\Lambda \to \infty$ e removê-las através de uma redefinição adequada das constantes da teoria, ou seja, implementar o programa de renormalização.

Uma questão natural a ser levantada é se é possível renormalizar todas as funções de $n$ pontos em todas as ordens da expansão perturbativa em $\lambda$. Argumentos dados por Birrel sugerem que, *a priori*, não podemos esperar que uma prova independente da regularização para a teoria $\lambda\phi^4$ em espaços curvos exista. Uma tentativa de uma prova geral da renormalizabilidade da teoria $\lambda\phi^4$, definida em um espaço-tempo que pode ser continuado analiticamente para a situação Euclidiana, foi desenvolvida por Bunch. Nossa derivação mostra que a regularização estocástica pode ser uma tentativa de tal prova independente de regularização, embora ainda estejamos na mesma situação estudada por Bunch.

# Capítulo 5

# Conclusões

A aplicação do método de quantização estocástica em espaços curvos etá relacionada ao seguinte fato. Para variedades estáticas, é possível realizar uma rotação de Wick, ou seja, extender analiticamente a variedade pseudo-Riemanniana para o domínio Riemanniano. Para variedades curvas não-estáticas, o método deve ser formulado no domínio pseudo-Riemanniano. Essa situação pode ser vista como um caso especial da formulação Euclidiana para sistemas com ações complexas.

A aplicação do método de Parisi em espaços-tempo curvos incompletos possui problemas ainda não esclarecidos. Quando estamos trabalhando em um espaço-tempo com horizonte de eventos, como o espaço-tempo de Rindler e de Sitter, ainda não sabemos qual o comportamento das funções de correlação do ruído próximo ao horizonte. É fácil de verificar que, quando $g = \det g_{\mu\nu} = 0$, a função de correlação do ruído (4.6) diverge e, portanto, as funções de Schwinger $\langle \phi(x_1, \tau_1) \cdots \phi(x_n, \tau_n) \rangle_\eta$ perdem seu significado físico. Nessa dissertação contornamos esse problema considerando um sistema de coordenadas para o espaço-tempo de de Sitter onde o horizonte de eventos cosmológico não aparece. Dessa forma, foi possível obter a função de Schwinger de dois pontos para campos escalares auto-interagentes. Um ponto importante a ser ressaltado, é o fato de o procedimento de regularização estocástica, que preserva as simetrias do problema, poder ser aplicado. A correção da ordem de um laço para a função de dois pontos, dada por (4.41), foi feita finita através da generalização da equação de Langevin, introduzindo um kernel regulador.

Uma continuação natural do trabalho apresentado nessa dissertação é investigar a aplicação do método de quantização estocástica de ampos escalares no espaço-tempo de de Sitter utilizando o sistema de coordenadas dado por (B.16), onde o horizonte de eventos aparece explicitamente. Outra continuação seria o estudo de como aplicar a quantização estocástica para campos de spin meio ou um numa variedade curva, com ou sem horizonte de eventos.

Para finalizar, gostaríamos de enfatizar que o estudo de uma nova forma de quantizarmos campos clássicos, além das quantizações canônica e por integrais de trajetória, pode trazer um entendimento mais profundo do significado do termo “quantização” de uma teoria clássica.

# Apêndice A

# Processos estocásticos

## A.1 Características gerais

Considere uma variável $\mathbf{z}(t)$ que assuma valores aleatórios definida em um domínio $0 \leq t \leq T$. Se fizermos $N$ leituras dos valores assumidos por $\mathbf{z}(t)$, obteremos um conjunto de valores $\{z_1(t), z_2(t), \ldots, z_N(t)\}$. O valor da variável $\mathbf{z}(t)$ em um instante de tempo $t$ é dado segundo uma distribuição probabilística, e cada leitura $z_j(t)$ é uma amostra de um ensemble estatístico. Se tomarmos o número de leituras $N$ suficientemente grande, deve ser possível encontrar a lei de distribuição obedecida por $\mathbf{z}(t)$.

Se uma leitura contínua é feita, uma função $z(t)$ é obtida como uma amostra do processo estocástico $\mathbf{z}(t)$. Para leituras feitas em instantes discretos de tempo, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$, então o conjunto de $n$ valores obtido, $\{z(t_1), \ldots, z(t_n)\}$, é a amostra do processo. Considerando o limite em que $n$ é grande e o intervalo entre duas leituras consecutivas tende a zero, obtemos uma trajetória contínua no tempo.

As características do processo estocástico $\mathbf{z}(t)$ podem ser descritas em termos da densidade de probabilidade $p_1(t, z)$. A probabilidade de encontrarmos para $z(t)$ um valor entre $z$ e $z + dz$ no instante $t$ é dada por

$$p_1(t, z)dz = \langle \delta(z(t) - z) \rangle dz. \tag{A.1}$$

A distribuição de probabilidades para esse processo, ou seja, a probabilidade para $z(t) < Z$, em um dado instante $t$ é fornecida pela expressão

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^{Z} dz\ p_1(t, z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle, \tag{A.2}$$

onde $\theta(z)$ é a função degrau de Heaviside. É possível concluir da expressão anterior que $F(t,\infty)=1$. De forma análoga, se considerarmos $n$ instantes de tempo, podemos generalizar a densidade de probabilidade para $n$ instantes de tempo, ou seja, $p_n(t_1,\ldots,t_n;z_1,\ldots,z_n)$. Nesse caso, a probabilidade de encontrarmos $z_j \leq z(t_j) \leq z_j + dz_j$ para $j=(1,2,\ldots,n)$ é dada por

$$p_n(t_1,\ldots,t_n;z_1,\ldots,z_n)dz_1\cdots dz_n = \langle \delta(z(t_1)-z_1)\ldots\delta(z(t_n)-z_n)\rangle dz_1\cdots dz_n. \tag{A.3}$$

O processo estocástico fica definido quando a densidade de probabilidades é dada para qualquer conjunto de $n$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$ instantes de tempo. Dessa forma, a média estocástica de um funcional arbitrátrio de $z(t)$ é definida como

$$\langle R[z(t)]\rangle = \int dz_1\cdots\int dz_n\ R[z_1,\ldots,z_n]\ p_n(t_1,\ldots,t_n;z_1,\ldots,z_n), \tag{A.4}$$

onde assumimos que a densidade de probabilidade está normalizada segundo

$$\int dz_1\cdots\int dz_n\ p_n(t_1,\ldots,t_n;z_1,\ldots,z_n)=1. \tag{A.5}$$

Se a densidade de probabilidade definida para o processo estocástico $\mathbf{z}(t)$ é invariante sob uma translação temporal nos instantes de tempo $t_i$, ou seja, se

$$p_n(t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau;z_1,\ldots,z_n)=p_n(t_1,\ldots,t_n;z_1,\ldots,z_n), \tag{A.6}$$

então $\mathbf{z}(t)$ é um processo estacionário. Nesse caso, a função de correlação de dois pontos depende somente da diferença entre os instantes de tempo, isto é,

$$B(t_1,t_2)=\langle z(t_1)z(t_2)\rangle = B(t_1-t_2). \tag{A.7}$$

A escala temporal $\tau_0$ característica da função de correlação de dois pontos é chamada de raio de correlação, e pode ser determinada a partir da relação

$$\int_0^\infty d\tau\ \langle z(t+\tau)z(t)\rangle = \tau_0\langle z^2(t)\rangle. \tag{A.8}$$

Outra quantidade importante a ser definida é a função espectral, pois a análise harmônica é um método bastante utilizado na resolução de problemas envolvendo processos estocásticos. O teorema de Wiener-kintchine [40, 41] expressa que a função espectral de um processo estocástico pode ser expressa como a transformada de Fourier da função de correlação, isto é,

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ B(t)\ e^{i\omega t}. \tag{A.9}$$

Essa expressão pode ser invertida, e dessa forma, se a função espectral for conhecida é possível obter a função de correlação de dois pontos.

Uma descrição completa das propriedades estocásticas de $\mathbf{z}(t)$ pode ser feita através do funcional característico, definido por

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_{\infty}^{\infty} d\tau\ v(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle, \tag{A.10}$$

onde $v(\tau)$ é uma função arbitrária. Através do funcional característico é possível obter todos os momentos da distribuição de probabilidade. De fato, é possível ver que o $n$-ésimo momento da distribuição de probabilidade fica definido em termos de derivadas funcionais do funcional característico,

$$M_n(t_1, \ldots, t_n) = \langle z(t_1) \ldots z(t_n) \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \cdots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] \bigg|_{v=0}. \tag{A.11}$$

Podemos então reescrever o funcional característico através de uma expansão de Taylor,

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\ M_n(t_1, \ldots, t_n)\ v(t_1) \cdots v(t_n). \tag{A.12}$$

Representando o funcional característico na forma $\Phi[v(\tau)] = \exp\{W[v(\tau)]\}$, o funcional $W[v(\tau)]$ pode ser expandido através de uma série de Taylor, da forma

$$W[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\ K_n(t_1, \ldots, t_n)\ v(t_1) \cdots v(t_n), \tag{A.13}$$

onde as quantidades $K_n(t_1, \ldots, t_n)$ são os cumulantes da distribuição de probabilidade, definidos por

$$K_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \cdots \delta v(t_n)} W[v(\tau)] \bigg|_{v=0}. \tag{A.14}$$

É possível concluir a partir das equações (A.11) e (A.14), que os funcionais $\Phi[v(\tau)]$ e $W[v(\tau)]$ são, respectivamente, os funcionais geradores dos momentos $M_n$ e dos cumulantes $K_n$ da distribuição. Além disso, o $j$-ésimo cumulante $K_j$ pode ser escrito em termos dos momentos $M_i$, somente, com $i \leq j$. Reciprocamente, o momento $M_k$ pode ser escrito em termos dos cumulantes $K_l$, $l \leq k$, somente.

## A.2 Processos Markovianos

Considere agora o funcional característico, dado pela equação (A.10). Se tomarmos $v(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k \delta(t - t_k)$, o funcional característico fica expresso por

$$\Phi(v_1, \ldots, v_n) = \left\langle e^{i \sum_{k=1}^{n} v_k z(t_k)} \right\rangle = \left\langle \prod_{k=1}^{n} e^{i v_k z(t_k)} \right\rangle . \tag{A.15}$$

Nesse caso, a densidade de probabilidade para o processo $\mathbf{z}(t)$ é dada pela equação (A.3). A probabilidade de transição é definida como a probabilidade de obtermos para $z(t)$ um valor entre $z_1$ e $z_1 + dz_1$ no instante de tempo $t_1$, sabendo que $z(t_0) = z_0$, e é da forma

$$p(z_1, t_1 | z_0, t_0) dz_1 = \frac{p_2(z_0, t_0; z_1, t_1)}{p_1(z_0, t_0)} dz_1. \tag{A.16}$$

Probabilidades de transição para $n$ instantes de tempo são dadas, quando temos precisamente $z(t_0) = z_0$, pela definição mais geral

$$p(z_1, t_1, \ldots, z_n, t_n | z_0, t_0) dz_1, \ldots, dz_n = \frac{p_n(z_0, t_0; z_1, t_1; \ldots; z_n, t_n)}{p_1(z_0, t_0)} dz_1, \ldots, dz_n. \tag{A.17}$$

Se a probabilidade de encontrarmos para $z(t)$ o valor $z$ num instante de tempo $t$, sabendo que $z(t_0) = z_0$, é independente do conhecimento do valor de $z(t)$ para instantes de tempo anteriores a $t_0$ o processo estocástico é um processo Markoviano. A história do sistema anterior ao tempo $t_0$ está toda contida na informação de que $z(t_0) = z_1$. Isso pode ser expresso por

$$p(z, t | z_0, t_0; z', t') = p(z, t | z_0, t_0), \quad t' < t_0. \tag{A.18}$$

Denotando a densidade de probabilidade de transição por $p(z, t | z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) | z(t_0) = z_0 \rangle$ e fazendo $t = t_0$, obtemos a condição inicial

$$p(z, t_0 | z_0, t_0) = \delta(z - z_0). \tag{A.19}$$

Portanto,

$$p(z_2, t_2; z_1, t_1 | z_0, t_0) = p(z_2, t_2 | z_1, t_1) p(z_1, t_1 | z_0, t_0). \tag{A.20}$$

A evolução do processo no intervalo de tempo $[t_0, t_2]$ pode ser construída através da evolução em dois intervalos de tempo, $[t_0, t_1]$ e $[t_1, t_2]$. Portanto, a densidade de probabilidade de transição para um processo Markoviano pode ser escrita como

$$p(z_2, t_2|z_0, t_0) = \int dz_1 \; p(z_2, t_2|z_1, t_1) p(z_1, t_1|z_0, t_0), \tag{A.21}$$

ou, generalizando para $n$ instantes de tempo,

$$p(z_n, t_n|z_0, t_0) = \int dz_{n-1} \cdots \int dz_1 \; p(z_n, t_n|z_{n-1}, t_{n-1}) \cdots p(z_1, t_1|z_0, t_0). \tag{A.22}$$

## A.3 As funções de correlação temporais

Nesta seção vamos calcular uma expressão para a funções de correlação da forma $\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle$, onde $R[z(\tau)]$ é um funcional arbitrário de $z(\tau)$. Vamos considerar a situação em que $R[z(t)+\eta(t)]$, onde $\eta(t)$ é uma função determinística, e calcular $\langle z(t) R[z(\tau)+\eta(\tau)] \rangle$. Em seguida faremos $\eta(t) = 0$ de forma a obter o resultado desejado.

Expandindo o funcional $R[z(t) + \eta(t)]$ através de uma série de Taylor em torno de $z(t) = 0$, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} R[z(t) + \eta(t)] &= R[\eta(t)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\tau_1 \cdots \int d\tau_k \; \frac{\delta^k}{\delta\eta(\tau_1) \cdots \delta\eta(\tau_n)} R[\eta(t)] z(\tau_1) \cdots z(\tau_n) \\ &= \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; z(\tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} \right\} R[\eta(t)]. \end{aligned} \tag{A.23}$$

Dessa forma, usando a equação anterior,

$$\begin{aligned} \langle z(t) R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle &= \left\langle z(t) \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; z(\tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} \right\} \right\rangle R[\eta(\tau)] \\ &= \Omega\left[ t, \frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)} \right] \left\langle \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; z(\tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} \right\} R[\eta(\tau)] \right\rangle \\ &= \Omega\left[ t, \frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle , \end{aligned} \tag{A.24}$$

onde o operador $\Omega\left[t, \frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)}\right]$ é definido como

$$\begin{aligned}
\Omega\left[t, v(\tau)\right] &= \frac{\left\langle z(t)\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\ z(\tau)v(\tau)\right\}\right\rangle}{\left\langle \exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\ z(\tau)v(\tau)\right\}\right\rangle} \\
&= \frac{1}{\Phi[v(\tau)]}\frac{\delta}{i\delta v(\tau)}\Phi[v(\tau)] \\
&= \frac{\delta}{i\delta v(\tau)}\ln\Phi[v(\tau)]. \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

Ao introduzirmos o operador dentro das chaves que denotam o valor esperado na equação (A.24), podemos substituir $\frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)} \rightarrow \frac{\delta}{i\delta z(\tau)}$. Fazendo $\eta(t) = 0$ obtemos

$$\langle z(t)R[z(\tau)]\rangle = \left\langle \Omega\left[t, \frac{\delta}{i\delta z(\tau)}\right] R[z(\tau)]\right\rangle. \qquad \text{(A.26)}$$

Ao expandirmos $\ln\Phi[v(\tau)]$ em uma série de Taylor (A.13), obtemos para o operador $\Omega[t, v(\tau)]$

$$\Omega[t, v(\tau)] = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{i^j}{j!}\int d\tau_1\cdots\int d\tau_j\ K_{j+1}(t, \tau_1, \ldots, \tau_j)v(\tau_1)\cdots v(\tau_j). \qquad \text{(A.27)}$$

Substituindo essa expressão na equação (A.26) obtemos, finalmente,

$$\langle z(t)R[z(\tau)]\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int d\tau_1\cdots\int d\tau_j\ K_{j+1}(t, \tau_1, \ldots, \tau_j)\left\langle\frac{\delta^j}{\delta z(\tau_1)\cdots\delta z(\tau_j)}R[z(\tau)]\right\rangle. \qquad \text{(A.28)}$$

## A.4 Processos Gaussianos

Um processo estocástico geral é definido através da densidade de probabilidade (A.3), dada para todos os possíveis conjuntos de $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Um processo Gaussiano é completamente caracterizado pelos seus primeiro e segundo momentos. De fato, um processo estocástico $\mathbf{z}(t)$ é Gaussiano se a distribuição de probabilidades dos valores $\{z_1, \ldots, z_n\}$ observados em $n$ instantes de tempo $\{t_1, \ldots, t_n\}$ é uma distribuição normal $n$-dimensional, ou seja

$$F[z(\tau)] = N \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\tau_1 d\tau_2 \, \big(z(\tau_1) - \bar{z}(\tau_1)\big) \, A(\tau_1,\tau_2) \, \big(z(\tau_2) - \bar{z}(\tau_2)\big)\right\}, \tag{A.29}$$

onde $\bar{z}(\tau) = \langle z(\tau)\rangle$ são os primeiros momentos da distribuição de $\mathbf{z}(t)$ em $\tau$, $A$ é um operador positivo-definido e $N$ é uma constante de normalização.

Portanto, o funcional característico dado pela equação (A.10) fica expresso por

$$\begin{aligned}\Phi[v(\tau)] &= \int \mathcal{D}z \; F[z(\tau)] \exp\{iVZ\} \\ &= \int \mathcal{D}z \; \exp\left\{iVZ - \frac{1}{2}(Z-\bar{Z})A(Z-\bar{Z})\right\},\end{aligned} \tag{A.30}$$

onde usamos a notação $XY = \int d\tau X(\tau)Y(\tau)$. Fazendo a transformação $Z - M = U + iA^{-1}V$ temos que $\mathcal{D}z \to \mathcal{D}u$. Lembrando que a distribuição Gaussiana (A.29) é normalizada à unidade é possível reescrever a expressão para o funcional característico como

$$\Phi[v(\tau)] = \exp\left\{i\int d\tau \bar{z}(\tau)v(\tau) - \frac{1}{2}\int d\tau_1 d\tau_2 \; v(\tau_1)A^{-1}(\tau_1,\tau_2)v(\tau_2)\right\}. \tag{A.31}$$

Como o funcional característico é o funcional gerador dos momentos da distribuição, como mostra a equação (A.11), é possível concluir que

$$A^{-1}(t_1,t_2) = \langle \; (z(t_1) - \bar{z}(t_1))\,(z(t_2) - \bar{z}(t_2)) \; \rangle = M_2(t_1,t_2). \tag{A.32}$$

Realizando o cálculo dos demais momentos, chega-se à conclusão de que

$$M_n(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ for ímpar,} \\ \sum \prod\limits_{\text{pares}} M_n(t_i,t_j) & \text{se } n \text{ for par,} \end{cases} \tag{A.33}$$

onde a soma é feita sobre todas as possíveis combinações de produtos. Da mesma forma, utilizando a expressão (A.14) podemos calcular os cumulantes da distribuição Gaussiana,

$$K_1(t) = \langle z(t)\rangle, \qquad K_2(t_1,t_2) = \langle z(t_1)z(t_2)\rangle - \langle z(t_1)\rangle\langle z(t_2)\rangle, \tag{A.34}$$

sendo os demais cumulantes nulos. Sendo assim, esses resultados justificam a afirmativa de que uma distribuição Gaussiana é completamente definida pelos primeiro e segundo momentos.

# Apêndice B

# O Espaço-tempo de de Sitter

## B.1 Conceitos gerais

No espaço-tempo de Minkowski, a expansão de um campo escalar massivo em ondas planas determina os modos de frequência positiva e negativa. Os modos de frequência positiva com respeito a $t$ são autofunções do vetor de Killing $\partial_t$, ortogonal às hipersuperfícies em que $t$ é constante, que satisfazem a expressão

$$\frac{\partial}{\partial t}u_k(x) = -i\omega u_k(x), \qquad \omega = k^2 + m^2 > 0. \tag{B.1}$$

Nota-se claramente que $u_k(x) \propto e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ satisfaz essa relação. O coeficiente na expansão de Fourier que acompanha $u_k$ define o estado de vácuo e o espaço de Fock do sistema, i.e., se o campo é expresso por

$$\phi(x) = \sum_k [a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)], \tag{B.2}$$

temos que o vácuo é definido por

$$a_k |0\rangle = 0, \ \forall k. \tag{B.3}$$

Portanto, o estado de vácuo do sistema é invariante sob transformações do grupo de Poincaré. Isso significa que diferentes observadores inerciais concordam sobre a escolha do estado de mais baixa energia associado a um campo quantizado. Entretanto, se sairmos do grupo de Poincaré e permitirmos que observadores não inerciais implementem uma quantização canônica, o estado de vácuo definido por esses observadores não deve, a princípio, coincidir com o estado de vácuo dos observadores inerciais. Num espaço-tempo sem curvatura, uma forma natural de definirmos modos de frequências positivas e negativas associadas a um observador não-inercial é mostrarmos que a linha de universo desse observador é uma curva integral de um vetor de Killing do tipo tempo, que é um gerador de isometrias. Se estes modos não coincidem com os modos inerciais temos diferentes vácuos para observadores inerciais e não-inerciais. Este fato não é nada mais, nada menos, que uma consequência de que em um sistema quantizado descrito por infinitos graus de liberdade temos infinitas representações não unitariamente equivalentes associadas à álgebra dos operadores. Uma situação bastante instrutiva associada à discussão acima é o efeito Unruh-Davies [42], no qual um detector acelerado vê o vácuo de Minkowski como um estado térmico, de temperatura proporcional à aceleração.

Quando consideramos espaços-tempos curvos, em geral, não há vetores de Killing para definirmos o que são modos de frequência positiva, e não há um sistema de coordenadas natural (como o sistema cartesiano, em Minkowski) para a expansão do campo (B.2). Para obtermos informações mais precisas sobre o estado do campo é necessário construir quantidades locais, como $\langle\psi| T_{\mu\nu}(x) |\psi\rangle$.

Em muitos casos, o espaço-tempo pode ser tratado como assintoticamente plano no seu futuro e/ou passado remotos. Sob essas circunstâncias, é natural a escolha do vácuo definido pela equação $(B.3)$ como o vácuo do sistema, ou seja, há ausência de partículas para todos os observadores inerciais nas regiões assintóticas. Se escolhermos o estado do campo como vácuo na região de passado remoto ($t \to -\infty$), então ele permanecerá nesse estado durante toda sua evolução. Entretanto, fora da região de passado remoto, observadores em queda livre podem detectar partículas nesse estado. Além disso, se o espaço-tempo considerado é assintoticamente plano na região de futuro remoto ($t \to \infty$), o estado de vácuo nessa região pode não coincidir com o vácuo definido na região de passado remoto, e nesse caso, observadores inerciais no futuro remoto detectarão partículas. Podemos dizer, então, que partículas foram criadas durante a evolução do espaço tempo. É possível mostrar que a produção de partículas ocorre somente quando a simetria conforme é quebrada, ou seja, quando o campo considerado é massivo.

Apesar das considerações anteriores, deve existir uma aproximação para teorias em espaços curvos em que o conceito de partícula faça algum sentido, pois a teoria quântica de campos no espaço de Minkowski fornece uma boa descrição dos efeitos quânticos observados apesar de vivermos em um universo em expansão. De fato, no limite em que a taxa de expansão é pequena em relação à massa e ao momento das partículas, a criação de partículas deve ir a zero, recuperando assim a teoria no espaço de Minkowski. Espera-se, dessa forma, que apenas os modos de baixa frequência em relação à taxa de expansão sejam excitados. Considerando o campo no vácuo no passado remoto, e como a criação de partículas de grande momento e massa é suprimida, na região de futuro remoto detectores comóveis não devem detectar tais modos. O campo, portanto, deve estar num estado de "quase vácuo" nos modos de alta frequência, entretanto *quanta* de baixa frequência podem ser registrados.

Se nas regiões de passado e futuro remoto o espaço-tempo não é estático, existe um método para encontrar os modos, soluções da equação de campo, para os quais a produção de partículas pela evolução do espaço-tempo seja mínima. O vácuo definido por tais soluções é chamado de vácuo adiabático. Para uma exposição mais detalhada sobre a definição do estado de vácuo de um campo e partículas, veja as referências [29–31, 43].

O estado de vácuo de um campo não é necessariamente desprovido de *quanta*. Entretanto, se existem simetrias do espaço-tempo, pode existir um conjunto particular de modos e coordenadas de forma que existam estados de muitas partículas com algum sentido físico. No caso de variedades conformalmente planas, existem campos vetoriais de Killing conformes satisfazendo uma equação do tipo (B.1). Uma métrica de uma variedade conformalmente plana pode ser escrita como $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$. Para um campo escalar de massa nula, por exemplo, a equação de Klein-Gordon proveniente da densidade Lagrangiana (4.13) é invariante sob transformações conformes, e os modos de frequência positiva são definidos em relação ao vetor de Killing conforme do tipo tempo $\partial_\eta$, onde $\eta$ é o tempo conforme. Dessa forma, a decomposição em modos de Fourier do campo fica escrita como

$$\phi(x) = \Omega(x) \sum_k [a_k \bar{u}_k(x) + a_k^\dagger \bar{u}_k^*(x)], \tag{B.4}$$

onde $\bar{u}_k(x) \propto e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-\omega\eta)}$. Portanto, o vácuo conforme é definido por

$$a_k |0\rangle = 0. \tag{B.5}$$

Para uma exposição mais detalhada sobre o assunto, consulte as referências [43–45]

## B.2 A variedade de de Sitter

O espaço-tempo de de Sitter é um espaço-tempo homogêneo e isotrópico com relação a todos os pontos, descrito pelo tensor métrico $g^{\mu\nu}$ solução das equações de Einstein com uma constante cosmológica $\lambda$ positiva no vácuo.

O espaço de de Sitter é o único espaço-tempo curvo maximalmente simétrico. Este espaço possui um grupo de isometrias de dez parâmetros, chamado grupo de de Sitter. O espaço-tempo de de Sitter pode ser representado pelo hiperbolóide $z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2$ imerso em um espaço de Minkowski 5-dimensional. Dessa forma, o grupo de de Sitter é o grupo ortogonal em cinco dimensões $SO(4)$ das transformações de Lorentz homogêneas no espaço de Minkowski 5-dimensional

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2. \tag{B.6}$$

O escalar de curvatura, portanto, é dado por $R = 12/\alpha^2$.

Para que seja possível a quantização de campos na variedade de de Sitter, é necessário especificar um sistema de coordenadas, para obtenção dos modos de frequência positiva e negativa.

Vamos considerar primeiramente as coordenadas $(t, \mathbf{x})$, tal que

$$\begin{aligned} z_0 &= \alpha \sinh \frac{t}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^{-1} e^{\frac{t}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2, \\ z_i &= e^{\frac{t}{\alpha}} x_i, \\ z_4 &= \alpha \cosh \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^{-1} e^{\frac{t}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2, \qquad \infty < t, x_i < \infty. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Essas coordenadas cobrem a região da variedade de de Sitter em que $z_0 + z_4 > 0$. Dessa forma, o elemento de linha (B.6) fica escrito como

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\frac{t}{\alpha}} \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2. \tag{B.8}$$

Definindo o tempo conforme por

$$\eta = -\alpha e^{-\frac{t}{\alpha}}, \qquad -\infty < \eta < 0, \tag{B.9}$$

podemos reescrever o elemento de linha (B.3) na sua forma conforme ao elemento de linha de Minkowski 4-dimensional,

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^2 \left(d\eta^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2\right). \tag{B.10}$$

Esse elemento de linha possui a forma de um elemento de linha de Robertson-Walker com a seção espacial plana. Os modos de frequência positiva nesse sistema de coordenadas são dados por [31]

$$u_k(x) = \frac{1}{2\pi\alpha}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\ H_\nu^{(2)}(k\eta), \tag{B.11}$$

onde $\nu^2 = 9/4 - (m^2\alpha^2 + 2)$ e $H$ é a função de Hankel. É possível mostrar que não há produção de partículas durante a expansão, já que o vácuo nesse caso é invariante sob transformações do grupo de de Sitter.

Apesar de não haver produção de partículas, pode ser mostrado que um detector comóvel (para o qual a expansão é isotrópica) possui uma função resposta $\mathcal{F}(E) = \displaystyle\int d\tau \int d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau'))$ característica de um espectro térmico cuja temperatura é dada por $T = (2\pi\alpha)^{-1}$. Tal função resposta aparece ao calcularmos a amplitude de probabilidade de transição para um detector se movendo ao longo de uma linha de universo $x(\tau)$. Portanto, apesar de não haver criação de partículas, um detector que permaneça ligado durante a expansão se comportará como se estivesse exposto a um banho de térmico.

Outro parametrização que pode ser utilizada é dada por $(t, \rho, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \alpha \sinh\frac{t}{\alpha}, \\
z_1 &= \alpha \cosh\frac{t}{\alpha}\cos\rho, \\
z_2 &= \alpha \cosh\frac{t}{\alpha}\sin\rho\cos\theta, \\
z_3 &= \alpha \cosh\frac{t}{\alpha}\sin\rho\sin\theta\cos\varphi, \\
z_4 &= \alpha \cosh\frac{t}{\alpha}\sin\rho\sin\theta\sin\varphi.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Todo o espaço-tempo de de Sitter é coberto por essas variáveis se $-\infty < t < \infty$, $0 \le \rho \le \pi$, $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \varphi \le 2\pi$. Definindo o tempo conforme por $\eta = 2/\tan\left(\frac{e^t}{\alpha}\right)$, com $0 \le \eta \le \pi$, o elemento de linha dado por (B.6) se torna

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\sin^2\eta}\left[d\eta^2 - d\rho^2 - \sin^2\rho(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \tag{B.13}$$

Apesar de não ser possível definir o vácuo adiabático no passado ou futuro remotos, pois com as coordenadas (B.12) a taxa de expansão nessas regiões não é pequena em relação à frequência, é possível definí-lo como sendo o estado com ausência de modos com grandes momentos. Dessa forma, os modos de frequência positiva são dados em termos de funções de Legendre, através de [31]

$$
\begin{aligned}
u_k(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}}\eta}{\alpha}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{\pi\Gamma(k+\frac{1}{2}-\nu)}{4\gamma(k+\frac{1}{2}+\nu)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{i\nu\pi/2} \\
&\times \left[P^{\nu}_{k-\frac{1}{2}}(-\cos\eta) + \frac{2i}{\pi} Q^{\nu}_{k-\frac{1}{2}}(-\cos\eta)\right]. \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}
$$

Essa coordenatização do espaço de de Sitter é equivalente àquela dada por (B.7), portanto, todas as propriedades já discutidas anteriormente são igualmente válidas no caso de coordenadas definidas por (B.12).

É possível definir um sistema de coordenadas estático por

$$
\begin{aligned}
z_0 &= (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \sinh\frac{t}{\alpha}, \\
z_1 &= (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cosh\frac{t}{\alpha}, \\
z_2 &= r\sin\theta\cos\varphi, \qquad \text{(B.15)} \\
z_3 &= r\sin\theta\sin\varphi, \\
z_4 &= r\cos\theta,
\end{aligned}
$$

com $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, que cobre a região onde $z_0 + z_1 > 0$. Nessas coordenadas, obtemos para o elemento de linha a expressão

$$
ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad \text{(B.16)}
$$

Esse elemento de linha é similar ao elemento de linha de Schwarzschild, e possui uma singularidade em $r = \alpha$, o que caracteriza um horizonte de eventos para um observador situado em $r = 0$. Nessas coordenadas o estado de vácuo não é invariante sob o grupo de de Sitter, e é possível mostrar que o valor esperado nesse vácuo do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ diverge em $r = \alpha$. Como a posição do horizonte depende da origem da coordenada radial, o estado de vácuo não é invariante sob translações espaciais.

# Referências Bibliográficas


[1] R. Brown, Philos. Mag. **4**, 161 (1828).

[2] A. Einstein, Ann. Physik **17**, 549 (1905).

[3] M. Smoluchowski, Ann. Physik **21**, 756 (1906).

[4] P. Langevin, C. R. Acad. Sci. **146**, 530 (1908).

[5] G. E. Uhlenbeck e L. S. Ornstein, Phys. Rev. **36**, 823 (1930).

[6] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).

[7] E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 107 (1966).

[8] G. Parisi e Y. S. Wu, Sci. Sin. **24**, 483 (1981).

[9] D. J. E. Callaway e A. Rahman, Phys. Rev. Lett. **49**, 613 (1982)

[10] H. Hüffel e H. Rumpf, Phys. Lett. **B148**, 104 (1984).

[11] E. Gozzi, Phys. Lett. **B150**, 119 (1985).

[12] P. Damgaard e H. Hüffel, *"Stochastic Quantization"*, World Scientific Press, Singapore (1988).

[13] M. Namiki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111**, 1 (1993).

[14] B. Sakita, *"Quantum Theory of Many Variables and Systems"*, World Scientific Press, Singapore (1985).

[15] P. Damgaard e H. Hüffel, Phys. Rep. **152**, 227 (1987).

[16] H. Rumpf, Phys. Rev. **D33**, 942 (1986).

[17] H. Rumpf, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111**, 63 (1993).

[18] G. Menezes e N. F. Svaiter, J. Phys. **A**, Math. Theor. **40**, 8548 (2007).

[19] G. Menezes e N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **47**, 073507 (2006).

[20] G. Menezes e N. F. Svaiter, Physica **A374**, 617 (2007).

[21] "The Stochastic Quantization of Scalar Fields in de Sitter Spacetime", T. C. de Aguiar, G. S. Menezes e N. F. Svaiter, Class. Quantum Grav. **26** (2009) 075003.

[22] D. J. Amit, *"Field Theory; The Renormalization Group and Critical Phenomena"*, World Scientific Press, Singapore (2005).

[23] M. Le Bellac, *"Quantum and Statistical Field Theory"*, Oxford University Press, Oxford (1992).

[24] N. F. Svaiter, tese de doutorado, *"Teoria Quântica de Campos em Sistemas de Coordenadas Curvilíneas no Espaço-tempo de Minkowski e em Espaços Curvos"*, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (1989).

[25] S. Weinberg, *"Gravitation and Cosmology"*, John Wiley and Sons, New Jersey (1972).

[26] R. Wald, *"Quantum Field Theory in Curved Spacetimes and Black Hole Thermodynamics"*, University of Chicago Press, Chicago (1994).

[27] L. Ford *"Quantum Field Theory in Curved Spacetime"*, arXiv:gr-qc/9707062v1 (1997).

[28] M. Spradlin, A. Strominger e A. Volovich, *"Les Houches Lectures on de Sitter Space"*, arXiv:hep-th/0110007v2 (2001).

[29] L. Parker, tese de doutorado, *"The Creation of Particles in an Expanding Universe"*, Harvard University (1966).

[30] S. A. Fulling, Phys. Rev. **D7**, 10 (1973).

[31] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *"Quantum Fields in Curved Space"*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

[32] S. A. Fulling, tese de doutorado, *"Scalar Quantum field Theory in a Closed Universe of Constant Curvature"*, Princeton University Press, New Jersey (1972).

[33] R. Zwanzig, *"Nonequilibrium Statistical Mechanics"*, Oxford University Press, Oxford (2001).

[34] R. Kubo, M. Toda e N. Hashitsume *“Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics”*, Springer Verlag, Heidelberg (1991).

[35] H. B. Callen e T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951)

[36] P. H. Damgaard e H. Hüffel, Phys. Rep. **152**, 227 (1987).

[37] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *“Table of Integrals, Series and Products”*, editado por A. Jeffrey e D. Zwillinger, Academic Press, California (2007).

[38] N. A. Chernikov e E. A. Tagirov, Ann. Inst. Henri Poincaré **9A**, 109 (1968).

[39] E. A. Tagirov, Ann. Phys. **76**, 561 (1973).

[40] N. Wiener, Acta Math. **55**, 117 (1930).

[41] A. I. Kintchine, Math. Ann. **109**, 604 (1934).

[42] W. G. Unruh, N. Weiss, Phys. Rev. **D29**, 1656 (1984).

[43] V. L. Ginzburg e V. P. Frolov, Sov. Phys. Usp. **30**(12), 1073 (1987).

[44] D. W. Sciama, P. Candelas e D. Deutsch, Adv. Phys. **30**, 327 (1981).

[45] S. A. Fulling e S. N. M. Ruijsenaars, Phys. Rep. **152**, 135 (1987).