



Dissertação de Mestrado

# **Aceleração cósmica transiente através da interação entre fluidos**

Bernardo Machado de Oliveira Fraga  
Orientador: Nelson Pinto Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
2010

# Agradecimentos

Agradeço a meus pais e minha irmã, por todo o apoio;

A toda minha família, orgulhosa por ter um mestre;

Ao meu orientador, por me iniciar no campo da cosmologia desde a iniciação científica e me ajudar durante todo esse tempo;

Aos meus amigos desde os tempos de colégio Daniel Cuiñas, Antonio Gonçalves, Diego Vivas, Rubens Duarte e Wesley Barbosa;

Aos meus primos e agora vizinhos Diogo, André e Leandro;

Ao pessoal do mestrado do CBPF, em especial Diogo Celani;

Ao Ricardo e a Bete da CFC, por estarem lá sempre que eu precisei e me ajudarem com a presteza de sempre;

Ao CNPq, pela bolsa

# Resumo

Pesquisas recentes parecem indicar que o máximo da aceleração do universo já passou, e que está perdendo força. Como consequência, a aceleração pode ser um fenômeno transiente. Investigamos um *toy model* que reproduz esse comportamento através de uma interação entre matéria escura e energia escura, que implica num cancelamento da parte "pura" da constante cosmológica. Com uma análise estatística de supernovas tipo Ia (SNIa) demonstramos que, para certos valores dos parâmetros do modelo, uma aceleração transiente é um efeito devido puramente à interação.

# Abstract

Recent investigations seem to favor a cosmological dynamics according to which the accelerated expansion of the Universe may have already peaked and is now slowing down again. As a consequence, the cosmic acceleration may be a transient phenomenon. We investigate a toy model that reproduces such a background behavior as the result of a coupling between dark matter and dark energy which implies a cancelation of the "bare" cosmological constant. With the help of a statistical analysis of Supernova Type Ia (SNIa) data we demonstrate that for a certain parameter combination a transient accelerating phase emerges as a pure interaction effect.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 A Aceleração do Universo e Possíveis Soluções</b>	<b>5</b>
2.1 As equações de Friedmann . . . . .	5
2.1.1 Propriedades das Equações de Friedmann . . . . .	7
2.1.2 Curvatura Espacial Nula, Um Fluido Dominante . . . . .	8
2.1.3 Curvatura Espacial não-Nula . . . . .	9
2.2 A Constante Cosmológica . . . . .	11
2.2.1 Problemas da Constante Cosmológica . . . . .	13
2.3 Quintessência . . . . .	14
2.4 Modelos com interação . . . . .	16
2.4.1 Observação da Interação . . . . .	18
<b>3 Aceleração Transiente do Universo</b>	<b>22</b>
3.1 Modelo . . . . .	22
3.2 Especificando a Interação . . . . .	25
3.2.1 Interação Exponencial . . . . .	25
3.2.2 Interação Gaussiana . . . . .	27
3.3 Limites dos Parâmetros . . . . .	28
3.3.1 Interação Exponencial . . . . .	28
3.3.2 Interação Gaussiana . . . . .	29
3.4 Transferência de Energia e o Termo de Interação . . . . .	30
3.4.1 Representação como Campo Escalar . . . . .	31
3.5 Análise de Supernovas Ia . . . . .	33

<b>4 Conclusão e considerações finais</b>	<b>39</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>41</b>

# Lista de Figuras

3.1	Potencial efetivo para ambos os tipos de interação . . . . .	33
3.2	PDFs bidimensionais e unidimensionais para o modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	35
3.3	PDFs bidimensionais para a interação exponencial e o parâmetro de aceleração usando o melhor ajuste. . . . .	35
3.4	PDFs unidimensionais para a interação exponencial e o parâmetro de aceleração usando o pico das probabilidades. . . . .	36
3.5	PDFs bidimensionais para a interação gaussiana e o parâmetro de aceleração, usando o melhor ajuste. . . . .	37
3.6	PDFs unidimensionais para a interação gaussiana e o parâmetro de aceleração, usando o pico das probabilidades. . . . .	38

# Capítulo 1

## Introdução

A Cosmologia é a ciência que tenta explicar a estrutura e a evolução do universo como um todo. Com a elaboração da Teoria da Relatividade Geral por Einstein em 1915 [1] uma série de modelos de universo foram elaborados, sendo o primeiro deles do próprio Einstein [2]. Esse modelo surgiu quando Einstein percebeu que suas equações de campo contrariavam um dos paradigmas da época, o de que vivemos num universo estático; por isso, Einstein adicionou um termo extra em suas equações de campo de modo a cancelar o caráter atrativo da gravitação (a chamada constante cosmológica). Em 1922 e 1924, o matemático russo Alexandr Friedmann conseguiu soluções não estáticas da equação de Einstein sem o termo cosmológico [3], [4]. A cosmologia permaneceu como um ramo da ciência altamente especulativo, pois até aquele momento não se tinha nenhuma observação de alguma propriedade global do universo, e portanto não poderia ser testada.

Até que em 1929, o astrônomo americano Edwin Hubble [5], observando cefeidas, descobriu que havia uma tendência de sua radiação apresentar um desvio para o vermelho, indicando que elas estariam se afastando do sistema solar com uma velocidade proporcional a distância em que se encontravam.

$$v = H_0 d$$

Essa observação, combinada com a idéia de que não ocupamos lugar privilegiado, indicava um universo em expansão, dando um grande impulso às soluções de Friedmann e fazendo com que Einstein considerasse a constante cosmológica como o maior erro de sua vida.

Como o universo estava em expansão e a gravidade é atrativa, era esperado que houvesse um momento no passado em que o universo fosse extremamente denso e quente, além de muito pequeno; extrapolando mais um pouco para o passado, o universo teria partido de uma singularidade inicial. George Gamow foi o primeiro a tentar elaborar essa idéia em termos mais formais [6]; ele dizia que o universo teria começado num estado de temperatura e densidade quase infinita. Toda a matéria seria composta de prótons, nêutrons e elétrons interagindo num meio permeado de fótons de alta energia. Depois



disso juntaram a ele Ralph Alpher e George Herman, que fizeram cálculos da abundância de elementos mais pesados produzidos com a expansão e consequente resfriamento do universo. Uma das previsões mais notáveis desses físicos foi a de uma radiação primordial que deveria permear o universo até hoje e que só foi confirmada anos depois.

Durante um certo tempo, um outro modelo de universo rivalizava com o modelo proposto por Friedmann: A teoria do Estado Estacionário, cujo maior defensor era Fred Hoyle. Essa teoria dizia que o universo não tinha começo nem teria um fim, e apesar da expansão as propriedades não mudariam com o tempo. Isso demandaria uma criação contínua de matéria para compensar a expansão do universo, uma característica não muito bem explicada na época.

No entanto, em 1965, foi feita uma das maiores descobertas da cosmologia: Arno Penzias e Robert Wilson acidentalmente detectaram um ruído em todas as direções do céu, na faixa de microondas [7]: era a confirmação da existência da radiação cósmica de fundo, prevista por Gamow. Essa descoberta foi uma forte evidência a favor da teoria do Big Bang<sup>1</sup>, e o Estado Estacionário foi praticamente abandonado. Com o sucesso do Big Bang, passou-se a considerar esse modelo o Modelo Cosmológico Padrão. No entanto, alguns problemas do Big Bang ainda estavam sem solução à época, sendo um dos mais importantes a singularidade inicial, que não havia como ser contornada.

Isso levou alguns físicos a proporem um novo modelo onde o universo seria eterno como no modelo do Estado Estacionário, a diferença sendo que houve uma fase de contração antes da expansão atual: um *Bounce*. Os primeiros modelos analíticos foram obtidos no final da década de 70, por Novello e Salim [9] e por Melnikov e Orlov [10]. Na época, os modelos com bounce chamaram pouco a atenção, já que logo no início dos anos 80 a teoria inflacionária, criada por Guth e depois refinada por Linde, resolveu muitos dos problemas do modelo cosmológico padrão de uma forma simples. Juntou-se a isso os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose, e os modelos com *bounce* foram quase totalmente ignorados na época.

No entanto, no fim dos anos 90, foi feita uma nova e impressionante descoberta: 2 grupos independentes, estudando supernovas tipo Ia, concluíram que o universo não somente estava se expandindo, como essa expansão era acelerada [8]. Além disso, as observações indicavam que a componente responsável pela aceleração, chamada genericamente de energia escura, era responsável por cerca de 70% da densidade total do universo. Ou seja, a maior parte da densidade do universo era composta por algo completamente desconhecido, pois segundo a relatividade geral, fluidos normais como radiação e poeira necessariamente implicavam numa gravitação atrativa, tornando a aceleração impossível. Seria necessário um fluido com pressões negativas para que a aceleração fosse possível. Mas Einstein já tinha proposto um fluido com tal propriedade: a constante cosmológica, que foi proposta exatamente como um mecanismo de gravidade repulsiva. Um fluido com densidade constante no tempo implica que sua pressão será negativa, e portanto o problema da

---

<sup>1</sup>O termo Big Bang foi cunhado pelo próprio Hoyle, numa entrevista de rádio.

aceleração poderia ser contornado. A constante cosmológica, que Einstein havia considerado o maior erro de sua vida, reaparecia como uma possível solução de um dos mais importantes problemas da cosmologia atual. No entanto, devido à sua própria natureza, a constante cosmológica enfrenta vários problemas: ela passa a ser importante exatamente na época da formação de estruturas no universo; embora possamos ajustar o valor da constante, parece que há algum mecanismo físico ainda não compreendido. Além disso, não há nenhuma explicação fundamental para a natureza dessa constante cosmológica. O modelo com a constante cosmológica foi chamado de  $\Lambda$ CDM.

Como um fluido com densidade constante criava um problema sério de condições iniciais, um novo modelo foi criado: quintessência, um campo escalar rolando lentamente em seu potencial [11]. É necessário que a componente cinética seja pequena (*slow roll*) a fim de se obter pressões negativas e consequentemente aceleração. A escolha de um potencial para esse campo até hoje é controversa, não tendo nenhuma justificativa básica para que uma classe de potenciais seja escolhida em detrimento de outra. No entanto, alguns tipos de potenciais são mais convenientes, como aqueles que são potenciais ditos atratores, ou seja, dão origens a soluções que são praticamente insensíveis às condições iniciais do campo [12]. Além de não existir até o momento nenhuma justificativa para a escolha de um determinado potencial, esse campo escalar que deveria dominar o universo atualmente, nunca foi observado. A constante cosmológica e a quintessência serão discutidos com mais detalhes no capítulo 2.

Além da energia escura, outra componente material do universo é a chamada matéria escura, responsável por cerca de 20% da densidade total. Portanto, 95% do universo é composto por fluidos desconhecidos, e uma interação entre esses fluidos é possível, sendo uma situação mais geral do que modelos sem interação. Os primeiros modelos de interação foram feitos por Wetterich [29], seguido depois por diversos autores [34, 35]. Uma das principais vantagens é a de que modelos com interação aliviam bastante o problema da coincidência cósmica: a razão entre a densidade de matéria e de energia escura hoje é muito perto da unidade. Alguns autores [13] mostraram que uma interação entre matéria escura e um campo escalar pode levar a soluções para  $r \equiv \frac{\rho_m}{\rho_x}$  que tendem a um valor constante, dado que algumas condições não muito restritivas sejam respeitadas. Isso é extremamente importante pois o modelo  $\Lambda$ CDM prevê que

$$r \propto a^{-3}$$

e portanto, para que  $r$  tenha um valor constante e próximo da unidade atualmente, é necessário que as condições iniciais sejam muito específicas. Vemos que o problema da coincidência cósmica é aliviado, já que o valor de  $r$  tende a uma constante pela própria dinâmica dos modelos com interação. Precisa-se impor uma forma específica para o parâmetro de interação, proporcional ao parâmetro de Hubble, que no entanto pode ser justificada por razões dimensionais. Juntando isso ao fato de que até hoje a natureza das componentes escuras do universo não está muito bem explicada, faz com que modelos

com interação sejam mais estudados, dando mais alternativas para entender o universo atual.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, damos uma noção geral de cosmologia relativística, apresentando algumas soluções encontradas para a evolução do universo e mencionando alguns casos de interesse, em especial mencionando soluções possíveis para explicar a aceleração do universo. No capítulo 3 apresentamos um modelo de universo com uma fase de aceleração transiente, baseado em alguma observações recentes que indicam que a aceleração do universo está perdendo força. Já o capítulo 4 é dedicado às conclusões e observações finais.

# Capítulo 2

## A Aceleração do Universo e Possíveis Soluções

Vamos apresentar aqui uma breve introdução sobre a cosmologia relativista, focando principalmente no problema da aceleração do universo e as duas principais soluções, o campo escalar e a constante cosmológica, expondo suas virtudes e seus problemas.

### 2.1 As equações de Friedmann

Para conseguirmos um modelo cosmológico baseado na relatividade geral, é necessário encontrar soluções para a famosa equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (2.1.1)$$

,sendo que  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Riemann,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica,  $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$  é o traço do tensor de Riemann,  $k$  é uma constante e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia que caracteriza o conteúdo material do universo. Um dos primeiros passos é determinar a métrica, e com isso o lado esquerdo da equação. Usando o princípio cosmológico, que diz que o universo é isotrópico e homogêneo em todos os pontos, restringe-se a métrica a 3 opções possíveis, diferenciadas pela sua curvatura espacial e que podem ser escritas em coordenadas esféricas comoventes como:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.1.2)$$

onde consideramos a velocidade da luz  $c = 1$ ,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi$  é o elemento de ângulo sólido infinitesimal,  $a$  é o fator de escala e  $k$  é a curvatura espacial normalizada:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{geometria esférica} \\ 0, & \text{geometria plana} \\ -1, & \text{geometria hiperbólica} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Essa é a chamada geometria de Friedmann (ou de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, FLRW). Com a geometria definida, temos o lado esquerdo da equação. Quando a curvatura é positiva, as topologias são todas compactas, por isso às vezes universos com  $k = +1$  são chamados de universos fechados. Já se a curvatura é nula ou negativa, pode-se ter topologias compactas e abertas.

O papel do fator de escala pode ser entendido calculando a distância de um objeto na origem  $r = 0$  até uma coordenada  $r$  em um tempo  $t$ , num caminho radial:

$$d(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r, & k = +1 \\ r, & k = 0 \\ \sinh^{-1} r, & k = -1 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Como a coordenada radial não depende do tempo, a distância entre dois objetos comoventes na geometria de Friedmann é modificada somente pelo fator de escala, caso o universo se expanda ou contraia. Caso a curvatura do universo seja não nula, o fator de escala pode ser entendido como o raio de curvatura; num universo plano isso não faz mais sentido e o fator de escala deve ser entendido como na equação acima.

Normalmente, o conteúdo material do universo é considerado como sendo de fluidos tipo-perfeitos, que têm um tensor momento-energia em coordenadas comoventes bem simples:

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + (\rho + p)U_\mu U_\nu \quad (2.1.5)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade de energia e  $U_\mu$  é a quadrivelocidade do fluido, que em coordenadas comoventes é

$$U_\mu = \text{diag}\{1, 0, 0, 0\}$$

Podemos agora resolver a equação de Einstein com esses dados e chegamos às chamadas equações de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (2.1.7)$$

sendo que  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . Aplicando a conservação covariante do tensor momento-energia ( $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ), chegamos a

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.1.8)$$

Como temos 3 variáveis,  $p$ ,  $\rho$  e  $a$ , e 3 equações, poderíamos resolver esse sistema. No entanto, essas equações não são linearmente independentes: derivando a primeira equação de Friedmann em relação ao tempo cósmico e usando a de conservação, chegamos na equação de aceleração. Portanto, precisamos de uma equação ainda: é a chamada equação

de estado, que relaciona a pressão e a densidade de energia. Em sua forma mais simples é dada por

$$p = w\rho \quad (2.1.9)$$

com  $w$  uma constante. Essa relação vale para fluidos comuns, como matéria bariônica não-relativística e radiação.

Com essas relações, é razoavelmente simples resolver as equações de Friedmann e obter modelos para o universo. Pode-se ver por (2.1.6) que a curvatura influi diretamente na solução da equação.

Podemos ver algumas propriedades importantes das equações de Friedmann, mesmo sem resolvê-la especificamente.

### 2.1.1 Propriedades das Equações de Friedmann

Pela equação da aceleração (2.1.7), se  $\rho + 3p > 0$ , ou equivalentemente,  $w > -1/3$ , a aceleração é sempre negativa. Isso implica que em algum momento passado o fator de escala foi zero. Ou seja, há uma singularidade inicial que é inescapável para fluidos como matéria e radiação, que obedecem a condição acima. Essa propriedade da equação de Friedmann é tema de pesquisa atual, já que a relatividade geral é uma teoria clássica, e não pode ser extrapolada para um universo muito pequeno. Avanços na gravitação quântica e na teoria de cordas podem ajudar a resolver essa questão.

Usando o chamado parâmetro de densidade, definido por

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} \quad (2.1.10)$$

sendo que  $\rho_i$  pode representar a densidade de energia de qualquer fluido e  $\rho_{crit}$  é a densidade crítica, ou seja, a densidade do universo com curvatura nula

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

podemos reescrever (2.1.6) como:

$$\Omega = 1 + \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.1.11)$$

sendo que  $\Omega$  considera todos os fluidos presentes no universo, ou seja,  $\Omega = \sum_i \Omega_i$ . Podemos ver que há uma relação entre a densidade total do universo e a curvatura. Se  $\Omega = 1$ , temos um universo espacialmente plano; caso  $\Omega < 1$ , temos curvatura negativa e se  $\Omega > 1$  a curvatura é positiva. Além disso, podemos reescrever essa equação como

$$a_0^2 = \frac{k}{H_0^2(\Omega_0 - 1)} \quad (2.1.12)$$

sendo que o subscrito "0" corresponde a quantidades medidas atualmente. Caso a curvatura seja nula, podemos normalizar o fator de escala como quisermos (usualmente escolhendo  $a_0 = 1$ ). Caso  $k \neq 0$ , há uma relação entre o fator de escala hoje e as quantidades observáveis  $H_0$  e  $\Omega_0$ , e não podemos mais escolher qualquer normalização. Observações atuais indicam que  $\Omega_0$  é muito próximo de 1.

Uma quantidade muito útil é o chamado parâmetro de desaceleração

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) \quad (2.1.13)$$

Se o universo se expandir desaceleradamente,  $q < 0$  e vice-versa.

Podemos ver por (2.1.6) que o parâmetro de Hubble pode zerar em algum momento. Isso implicaria num mínimo ou máximo para o fator de escala, e portanto é um ponto importante para teorias alternativas. Usando  $H = 0$  temos

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{k}{a^2} \rightarrow a_m^2 = \frac{3k}{8\pi G\rho} \quad (2.1.14)$$

Só é possível ter um mínimo ou máximo com curvatura positiva. Além disso, caso  $\rho + 3p > 0$ , teremos um máximo. Portanto, um universo dominado por fluidos como matéria e radiação expandiria a partir de uma singularidade inicial até um tamanho máximo, e voltaria a colapsar numa singularidade final; tal comportamento é chamado de *Big-Bang Big-Crunch*. Caso  $\rho + 3p < 0$ , (2.1.7) é positivo, e portanto temos um mínimo. Nesse caso, não há singularidades; o universo contrai do infinito até um tamanho mínimo, e depois volta a expandir. Esse modelo, chamado de universo com *bounce*, pode ser uma das soluções para evitar a singularidade inicial, e apesar de ter sido sugerido nos anos 70, foi ignorado por muito tempo, voltando à tona nos dias de hoje.

Vamos examinar com mais detalhes essas propriedades analisando soluções analíticas para a equação de Friedmann.

## 2.1.2 Curvatura Espacial Nula, Um Fluido Dominante

Podemos resolver facilmente a equação (2.1.8) e obtemos

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (2.1.15)$$

e com isso resolvemos a equação de Friedmann com  $k = 0$ :

$$a(t) \propto t^{2/[3(1+w)]} \quad (2.1.16)$$

Pode-se ver por essa solução que o fator de escala tende a zero quando o  $t \rightarrow 0$ , se  $w > -1$ . Portanto, há uma singularidade no começo do universo, que depois começa sua expansão, que dura para sempre. Vamos especificar para poeira e radiação

**Radiação**

Nesse caso  $p = \frac{1}{3}\rho$  e portanto

$$\rho \propto a^{-4} \longrightarrow a(t) \propto t^{1/2} \quad (2.1.17)$$

**Poeira**

Nesse caso, como a velocidade das moléculas é bem menor que a da luz, podemos considerar  $p = 0$  e portanto

$$\rho \propto a^{-3} \longrightarrow a(t) \propto t^{2/3} \quad (2.1.18)$$

Vemos que a poeira decai mais lentamente do que a radiação, portanto ela dominou durante mais tempo o universo. De fato, esse modelo, chamado de universo de Einstein-de Sitter, foi durante muito tempo considerado o que melhor descrevia o universo desde a época em que a poeira começou a dominar até os dias atuais.

Em ambos os casos, vemos que realmente há uma singularidade em  $t = 0$ , pois o fator de escala tende a zero e as densidades tendem a infinito, e que a expansão é infinita e desacelerada.

**2.1.3 Curvatura Espacial não-Nula**

Para achar soluções das equações de Friedmann com  $k \neq 0$ , é mais simples usarmos o tempo conforme, definido por

$$\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)} \quad (2.1.19)$$

Podemos então reescrever (2.1.6) usando  $dt = a(\eta)\eta$  como:

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k \quad (2.1.20)$$

Onde a prima significada uma derivada em relação ao tempo conforme. Derivando novamente em relação a  $\eta$  e usando (2.1.8), obtemos

$$a'' + ka = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3p)a^3 \quad (2.1.21)$$

e podemos resolvê-la para diferentes fluidos.

**Poeira**

Como  $p = 0$ , temos que o lado direito de (2.1.21) é constante, e as soluções são dadas por

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \cosh(\eta) - 1 & k = -1 \\ 1 - \cos(\eta) & k = +1 \end{cases} \quad (2.1.22)$$



Com  $a(\eta)$  temos agora a relação entre o tempo conforme e o cósmico, resolvendo (2.1.19)

$$t \propto \begin{cases} \eta - \sin \eta & k = +1 \\ \sinh \eta - \eta & k = -1 \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Caso  $k = -1$ , o tempo conforme é semi-infinito,  $\infty > \eta > 0$ ; caso  $k = 1$  o tempo conforme é limitado,  $2\pi > \eta > 0$ .

### Radiação

Como  $w = 1/3$ , a equação (2.1.21) fica

$$a'' + ka = 0 \quad (2.1.24)$$

cujas soluções são simples:

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \sinh \eta & k = -1 \\ \sin \eta & k = +1 \end{cases} \quad (2.1.25)$$

O tempo cósmico é dado por

$$t \propto \begin{cases} \cosh \eta - 1 & k = -1 \\ 1 - \cos \eta & k = +1 \end{cases} \quad (2.1.26)$$

E novamente no caso de curvatura negativa o tempo conforme é semi-infinito, enquanto se a curvatura for positiva  $\pi > \eta > 0$ . Tanto para poeira quanto para radiação, caso a curvatura seja positiva, a solução para o fator de escala é uma função periódica: portanto, o universo parte de uma singularidade inicial, atinge o tamanho máximo e depois colapsa numa singularidade final, como já havíamos visto anteriormente. Já se a curvatura for negativa, o universo expande desaceleradamente para sempre a partir de uma singularidade inicial.

Em todas essas soluções, não consideramos a equação da aceleração (2.1.7). Pode-se ver que, caso  $\rho + 3p \neq 0$ , o universo não é estático. Fluidos comuns, como poeira e radiação respeitam essa condição, e quando Einstein percebeu que seu modelo baseado na relatividade geral gerava um universo que se expandia, ele incluiu "à força" um termo extra em suas equações para contrabalançar o efeito atrativo da gravitação, a chamada constante cosmológica. Depois, com a descoberta da expansão do universo por Hubble, Einstein considerou a constante cosmológica o maior erro de sua vida.

Com a observação da aceleração do universo, a constante cosmológica surgiu como uma alternativa para explicar esse fenômeno. Pela equação de aceleração, percebe-se que para que haja expansão acelerada, é necessário que  $\rho + 3p < 0$ . No entanto, como nem matéria nem radiação obedecem essa condição, chamada de Condição de energia forte (*SEC* em inglês), várias alternativas foram encontradas para tentar explicá-lo, incluindo a constante cosmológica. Vamos examiná-las mais com mais detalhes nas seções seguintes.

## 2.2 A Constante Cosmológica

Como visto na seção anterior, as equações de Friedmann implicam num universo não-estático, fato esse que incomodava os físicos da época, inclusive Einstein. Isso o fez incluir um termo extra em suas equações, que gerava uma gravidade repulsiva e conseqüentemente poderia fazer o universo se comportar estaticamente: a constante cosmológica. A equação com esse novo termo fica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (2.2.27)$$

As equações de Friedmann com esse novo termo ficam

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (2.2.28)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.2.29)$$

Pode-se ver pela equação da aceleração que a constante cosmológica induz uma aceleração positiva, compensando o efeito atrativo da gravitação e fazendo com que uma solução estática para as equações de Friedmann fosse possível.

Einstein procurou essa solução considerando que o universo era composto principalmente de poeira, sendo a parte radiativa desprezível. É uma afirmação válida, pois enquanto a densidade de radiação decai com  $a^{-4}$ , a poeira decai com  $a^{-3}$ ; é de esperar, portanto, que atualmente a densidade de radiação seja desprezível, como já foi verificado.

Uma solução estática para as equações com constante cosmológica requer  $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ . Para isso,  $\Lambda > 0$ . Com isso, temos que

$$4\pi G\rho = \Lambda . \quad (2.2.30)$$

Substituindo isso na outra equação, temos que

$$\frac{k}{a^2} = \Lambda . \quad (2.2.31)$$

Vemos que a solução de Einstein só é possível com curvatura positiva e, além disso, é altamente instável: a constante cosmológica precisa ter o mesmo valor da densidade de energia do universo. Qualquer mínima diferença fará com que o universo se expanda ou contraia. Essa solução, que já não era muito atraente a princípio, foi completamente descartada quando da descoberta da expansão do universo por Hubble, em 1929.

No entanto, a constante cosmológica pode ser a causa da aceleração do universo. Como ela obedece  $\rho + 3p < 0$ , a equação (2.1.7) é positiva, e portanto o universo se expande aceleradamente. Podemos resolver a equação de Friedmann com constante cosmológica.

Cosideremos a equação da aceleração, somente com a constante cosmológica

$$\ddot{a} - H_{\Lambda}^2 a = 0 , \quad (2.2.32)$$

sendo que  $H_\Lambda^2 = \frac{\Lambda}{3}$ . A solução dessa equação é simples

$$a(t) = C_1 \exp(H_\Lambda t) + C_2 \exp(-H_\Lambda t) , \quad (2.2.33)$$

sendo que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. Essas constantes podem ser determinadas usando a equação de Friedmann (2.1.6):

$$4H_\Lambda^2 C_1 C_2 = k . \quad (2.2.34)$$

Caso a curvatura seja nula, uma das constantes é nula; escolhamos  $C_2 = 0$  para que o universo se expanda e escolhamos  $C_1 = H_\Lambda^{-1}$ . Caso a curvatura não seja nula, nenhuma das duas constantes pode ser nula. Nesse caso, escolhamos o tempo  $t = 0$  onde  $|C_1| = |C_2|$ . Portanto, se  $k = 1$

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2H_\Lambda} , \quad (2.2.35)$$

enquanto que para  $k = -1$

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{2H_\Lambda} . \quad (2.2.36)$$

As soluções dependendo da curvatura são:

$$a(t) = H_\Lambda^{-1} \begin{cases} \sinh(H_\Lambda t) & k = -1 \\ \exp(H_\Lambda t) & k = 0 \\ \cosh(H_\Lambda t) & k = +1 . \end{cases} \quad (2.2.37)$$

Universos dominados apenas pela constante cosmológica são chamados universos de de-Sitter. Se incluirmos essas soluções na métrica, teremos o espaço-tempo de de-Sitter. Ao contrário das soluções dominadas por poeira, quando a curvatura é determinada pela densidade, qualquer uma das 3 soluções é possível para qualquer valor de  $\Lambda$ . Todas essas soluções descrevem o mesmo espaço-tempo em diferentes coordenadas. Isso era esperado, pois como o E-T de de-Sitter é dominado por um fluido com densidade constante no tempo, qualquer hipersuperfície espacial homogênea e isotrópica, independente da curvatura, será uma hipersuperfície de densidade constante. O universo de de-Sitter é invariante por translações temporais e por isso tem o maior grupo de simetria, como o espaço-tempo de Minkowski. Além disso não há uma evolução real, também como em Minkowski; a aparente expansão é reflexo da escolha do sistema de coordenadas. No entanto, não há nenhum sistema de coordenadas estático que cubra todo o espaço de de-Sitter em escalas maiores que  $H_\Lambda^{-1}$ .

O comportamento do fator de escala depende da curvatura: com curvatura nula, ele sempre cresce com o tempo cósmico, e tende a zero quando  $t \rightarrow -\infty$ ; se a curvatura é negativa, novamente o fator de escala sempre cresce, só que se anula quando  $t = 0$ ; já com curvatura positiva, o fator de escala diminui do infinito, chega num valor mínimo, e depois cresce de novo. É importante notar que o fato do fator de escala ser zero não representa uma singularidade física, mas sim uma singularidade do sistema de coordenadas. Para

escalas maiores que  $H_\Lambda^{-1}$ , o comportamento do fator de escala tende a ser igual para qualquer curvatura:  $a(t) \propto \exp(H_\Lambda t)$ .

Como vimos, as soluções com constante cosmológica nos dão um universo que se expande exponencialmente, e podem ser uma solução para o problema da aceleração do universo. No entanto, há problemas sérios, que vamos examinar com mais detalhes agora.

### 2.2.1 Problemas da Constante Cosmológica

- Divergência entre teoria e observação

Considerando a constante cosmológica como um fluido, temos que  $\rho = -p$  por (2.1.8), já que  $\dot{\rho} = 0$ . Com o advento da teoria quântica de campos, descobriu-se que a energia do vácuo tem o mesmo comportamento da constante cosmológica (pelo menos em algumas situações), pois a invariância de Lorentz requer que o tensor momento-energia do vácuo seja proporcional à métrica de Minkowski, em sistemas localmente inerciais. Portanto, em coordenadas gerais,  $T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$ , e de acordo com (2.1.5)  $\rho = -p$ . Mas não é óbvio a identificação da constante cosmológica como a energia de vácuo, já que enquanto uma tem sua origem na relatividade geral, a outra vem da teoria quântica de campos, duas áreas da física totalmente diferentes, e até agora, incompatíveis. Isso sugere que a constante cosmológica atualmente observada é composta por duas partes, a gravitacional e a energia do vácuo:

$$\Lambda = \Lambda_{grav} + \Lambda_{QFT} . \quad (2.2.38)$$

A densidade da constante cosmológica medida atualmente, é de  $\rho_\Lambda \approx 10^{-47} GeV^4$  [20]. Usando teoria quântica de campos, a densidade de energia das flutuações do vácuo divergiria. Regularizando o tensor momento-energia através da imposição de um cutoff ultravioleta, o valor da densidade de energia do vácuo é aproximadamente 123 ordens de grandeza maior do que o observado. Usando um cutoff ainda menor, na escala da QCD, encontra-se  $\rho_\Lambda \approx 10^{-3} GeV^4$ , ainda 40 ordens de magnitude maior que o observado. Portanto, a parte gravitacional da constante cosmológica teria que cancelar, na melhor das hipóteses, 40 ordens de magnitude para que o valor observado seja atingido; no entanto, esse é um ajuste fino muito grande, e ainda que possa ser colocado como uma condição inicial, não há nenhuma justificativa física para isso. Há também a possibilidade da estimativa da teoria quântica de campos estar errada; isso pode ser devido ao fato de que essa predição é feita usando a teoria para espaços planos, e não é imediatamente claro que isso possa ser aplicado ao espaço curvo da relatividade geral.

Com o advento da supersimetria nos anos 70, esperava-se que esse problema pudesse ser resolvido, já que férmions e bósons de mesma massa contribuem com o mesmo valor para a energia do vácuo, porém com sinal diferente. Portanto, com uma quantidade precisa de férmions e bósons no universo esse problema poderia ser

resolvido. Mas a supersimetria, caso exista, seria quebrada em algum momento do universo com a diminuição da temperatura devido à expansão. Isso faria com que a constante cosmológica tivesse uma densidade de energia da ordem da escala em que a supersimetria foi quebrada, que ainda é muito alta se comparada com as observações.

- **Coincidência Cósmica**

Esse problema pode ser apresentado de duas maneiras: a mais usada é o fato de que observações atuais, indicam que a razão entre as densidades da constante cosmológica e de matéria é próxima da unidade, ou seja,  $r \equiv \frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} \approx 1$ . No entanto, a densidade de matéria é proporcional a  $a^{-3}$ , enquanto a densidade da constante cosmológica se mantém a mesma. Isso causa um problema, pois as condições iniciais teriam que ser ajustadas muito especificamente para que isso ocorra. Esse argumento pode soar um tanto antropocêntrico, então vamos colocá-lo de outra maneira. Como a densidade de energia da constante cosmológica é constante, ela seria praticamente desprezível no início, quando o universo era pequeno; com a expansão e o consequente decaimento da radiação e da poeira, a constante cosmológica deixou de ser desprezível. Esse momento coincide com a formação de estruturas no universo, indicando que há algum argumento físico por trás. Podemos ainda assim ajustar as condições iniciais de modo que isso ocorra, mas não há nenhuma justificativa para esse ajuste.

Esses problemas fizeram com que uma nova alternativa para a aceleração do universo fosse proposta: quintessência, um campo escalar rolando em seu potencial.

## 2.3 Quintessência

Com o problema da coincidência cósmica, procurou-se um campo escalar dinâmico que pudesse contornar essa situação. Um campo escalar tem a lagrangeana dada por:

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \quad (2.3.39)$$

Usando a definição de tensor momento energia

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{g})}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.3.40)$$

chegamos ao tensor momento-energia de um campo escalar:

$$T_{\mu\nu}^\phi = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} g_{\mu\nu} + V(\phi) g_{\mu\nu} \quad (2.3.41)$$

Considerando um campo homogêneo e isotrópico (ou seja, só teremos derivadas temporais), podemos comparar essa expressão com (2.1.5) e atribuir uma pressão e uma densidade de energia a esse campo.

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.3.42)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.3.43)$$

Com isso, podemos usar (2.1.8) para descobrir a equação do campo:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (2.3.44)$$

Poderíamos encontrar essa equação utilizando a variação da ação em relação ao próprio campo:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int \delta(d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}) = 0$$

A partir da densidade e da pressão, podemos construir uma equação de estado para esse campo escalar

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (2.3.45)$$

Pode-se ver que podemos ter  $w < -1/3$  dependendo da escolha do potencial, e é aí que reside uma das maiores dificuldades desse modelo: como esse campo escalar não foi observado até hoje, a escolha é um tanto arbitraria. Há uma certa preferência na escolha de potenciais que dêem origem a soluções atratoras [12], ou seja, que são pouco sensíveis às condições iniciais do campo.

As soluções atratoras têm a propriedade de que a razão entre as densidades de energia do campo e da componente de fundo (seja ela matéria ou radiação) evolui a uma taxa quase fixa a medida que o campo rola no seu potencial. Essa é uma característica desejada, pois seria importante que a densidade de energia do campo ultrapassasse a energia do fundo para que possamos ter uma expansão acelerada. Portanto, há duas características importantes para as soluções atratoras: uma grande gama de condições iniciais levam a uma mesma evolução cósmica; e a energia do campo eventualmente será dominante, possibilitando uma fase de expansão acelerada. Zlatev, Steinhardt e Wang [14] mostraram que, se um potencial satisfaz

$$\Gamma \equiv \frac{V''V}{V'^2} > 1 \quad (2.3.46)$$

uma solução atratora é possível. Um dos primeiros potenciais atratores foi uma lei de potência [15, 16]

$$V(\phi) = V_0\phi^{-\alpha}$$

com  $\alpha < 2$  para que a razão entre as densidades do campo e radiação/matéria cresça lentamente, enquanto a equação de estado é um pouco menor do que a do fundo. Além

disso, para valores grandes do campo, o potencial é praticamente plano, garantindo a aceleração do universo.

No entanto, esse é somente o exemplo mais simples; potenciais exponenciais como  $V = V_0 \exp(s\phi)$  [17, 18], sendo  $s$  uma constante e funções hiperbólicas como  $V(\phi) = V_0[\cosh(\lambda\phi) - 1]^p$  [19] também dão origem a soluções atratoras. Portanto, mesmo considerando somente potenciais atratores, a variedade ainda é grande, e a escolha do potencial continua um tanto arbitrária.

Até agora, consideramos que os fluidos componentes do universo evoluem independentemente, ou seja, não há nenhuma interação entre eles. No entanto, esse poderia ser um caso específico; um modelo mais geral seria um modelo com interação entre diferentes fluidos. Vamos examinar alguns exemplos na próxima seção.

## 2.4 Modelos com interação

Nos modelos com interação entre dois fluidos, as energias de cada um deles não se conserva independentemente; o que temos é a conservação de energia total, ou seja,  $(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$ . Isso pode ser escrito como <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 + 3H(1 + w_1)\rho_1 &= -Q \\ \dot{\rho}_2 + 3H(1 + w_2)\rho_2 &= Q, \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

onde consideramos que cada fluido obedece uma equação de estado  $p_i = w_i\rho$ . Esse modelo de interação entre dois fluidos genéricos já foi estudado [27]. Partimos do pressuposto que nenhum dos dois fluidos viola a condição de energia forte (ou seja, ambos obedecem  $w_i > -1/3$  e não podem por si só causar a aceleração); podemos usar, sem perder generalidade, uma forma para a equação da densidade de energia do fluido 2

$$\rho_2 = \rho_{20} \frac{f}{f_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (2.4.48)$$

onde escolhemos um ansatz para a função  $\frac{f}{f_0}$

$$\frac{f}{f_0} = \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3w_f}. \quad (2.4.49)$$

Resolvendo desse modo as equações de conservação para os dois fluidos e fazendo as seguintes definições:

$$w_+ \equiv w_1, \quad w_- \equiv w_2 + w_f, \quad \rho_+ \equiv C_1, \quad \rho_- \equiv \frac{\rho_{20} a_0^{3(1+w_2+w_f)} (w_+ - w_2)}{w_+ - w_-}, \quad (2.4.50)$$

---

<sup>1</sup>Isso porque a derivada covariante segue as mesmas regras da derivada comum para somas e multiplicações.

chegamos a:

$$H^2 = l_{pl}^2 (\rho_+ a^{-3(1+w_+)} + \rho_- a^{-3(1+w_-)}) \quad (2.4.51)$$

onde os fluidos originais são substituídos por dois fluidos efetivos não interagentes, caracterizados por uma equação de estado  $p_{\pm} = w_{\pm}\rho_{\pm}$ . Além disso, tanto  $\rho_-$  pode ser negativo como  $w_-$  pode ser menor que  $-1/3$ . Uma solução analítica para 2.4.51 foi encontrada usando uma coordenada análoga ao tempo conforme, da forma

$$a(\tau) = a_b \left( \frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-} \right)^{\alpha} \quad (2.4.52)$$

Essa solução depende claramente do sinal de  $\rho_-$  e de  $\alpha$ , e isso faz com que possamos obter modelos interessantes para o universo.

Por exemplo, caso  $\rho_- < 0$  e  $\alpha > 0$ , temos um universo com bounce; esse caso poderia acontecer numa temperatura onde os bárions são relativísticos, mas a matéria escura não, ou no caso de ambos serem relativísticos, mas com uma equação de estado ligeiramente diferente. Já no caso  $\rho_- > 0$  e  $\alpha < 0$ , temos um universo que parte de uma singularidade inicial para uma expansão desacelerada para depois se expandir aceleradamente, exatamente como no modelo  $\Lambda$ CDM. Esse cenário poderia ocorrer com uma interação entre matéria escura e bárions com equação de estado ligeiramente diferente,  $0 < w_1 \ll 1$  e  $0 < w_2 \ll 1$ , com  $w_1 > w_2$ . Nesse caso, a densidade da constante cosmológica sera proporcional a  $w_1 - w_2$ , o que poderia explicar o valor observado ser tão pequeno.

Portanto, através de uma interação entre fluidos num universo plano, podemos obter modelos como bounces e universos acelerados sem que seja necessário recorrer a fluidos exóticos.

No entanto, na literatura, é mais comum postular uma interação no setor escuro do universo, ou seja, matéria e energia escura, considerando que não se sabe muita coisa sobre esses componentes:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_m + 3H\rho_m &= Q \\ \dot{\rho}_x + 3H(1+w)\rho_x &= -Q. \end{aligned} \quad (2.4.53)$$

$|Q|$  dá a magnitude da interação. A forma para essa interação é controversa, já que ainda não há nenhuma justificativa física. No entanto, podemos dar uma forma geral:  $Q$  deve ter dimensões de densidade/tempo. A escala  $t^{-1}$  é facilmente dada por  $H$ ; portanto, a forma geral do parâmetro de interação deve ser da forma;

$$Q = \beta H(\rho_m, \rho_x), \quad (2.4.54)$$

sendo  $\beta$  uma constante. A dependência específica nas densidades é até o momento arbitrária, portanto há na literatura análises para diferentes casos.

Um dos casos mais simples é aquele onde o parâmetro da interação depende somente de uma das duas densidades, por exemplo,

$$Q = \beta H \rho_m$$



Esse modelo já foi bastante estudado no contexto da quintessência, e foi mostrado que uma solução atratora é possível com um potencial exponencial [35]. No entanto, o universo chegaria na solução atratora logo depois da fase dominada por radiação, impedindo uma fase dominada pela matéria e consequentemente a formação de estruturas. Esse problema pode ser contornado assumindo que  $\beta$  não é mais uma constante, mas sim uma função do campo similar a uma função degrau que "ligue" a interação depois da formação de estruturas.

Outro modelo bastante estudado, também no contexto da quintessência, é  $Q = 3Hc^2\rho$  [13]. Desse modo, pode-se considerar que trata-se de um fluido tipo poeira dissipativo. Os autores buscam uma solução estacionária para  $r \equiv \frac{\rho_m}{\rho_\phi}$ , e mostram que essa solução só é possível num universo acelerado caso o universo seja espacialmente plano. Assumindo que as equações de estado dos fluidos são constantes, obtém-se duas soluções estacionárias ( $r_+$  e  $r_-$ , com  $r_+ > r_-$ ), sendo que  $r_+$  é instável. Portanto,  $r$  passa de uma solução estacionária mas instável, quando o fator de escala é pequeno, tendendo a uma outra solução estacionária e estável, a medida que o fator de escala cresce e a densidade do campo passa a ser importante.

Já outros modelos mais sofisticados, como  $Q = H(\beta_1\rho_m + \beta_2\rho_x)$  [30], na tentativa de fazer com que haja uma transição de uma fase de quintessência para uma fase fantasma, ou seja, uma fase em que  $w < -1$ . Usando potenciais exponenciais e quadráticos, junto com expansões em série para o parâmetro de Hubble e as densidades de energia, os autores mostraram que é possível escolher os parâmetros de tal forma que  $r_0 \approx \frac{3}{7}$ , além de haver uma transição de  $w > -1$  para  $w < -1$ .

Vários outros modelos para o parâmetro  $Q$  foram estudados, mas todos têm uma mesma característica: ainda que seja possível dar uma forma geral a esse parâmetro através de justificativas dimensionais, a forma final dele é dependente do modelo que se quer obter. Até o momento, não há nenhuma justificativa *a priori* para que se escolha uma determinada função. A observação desse parâmetro de interação seria uma grande ajuda para isso, e é isso que veremos na próxima seção.

### 2.4.1 Observação da Interação

Para que modelos com interação sejam considerados como alternativas viáveis, é preciso que haja alguma forma dessa interação ser medida pelas observações. Primeiro, portanto, devemos construir um parâmetro que nos permita distinguir modelos com interação dos sem interação usando quantidades mensuráveis. Como já visto no capítulo 2, tanto o parâmetro de Hubble  $H$  quanto o parâmetro de desaceleração  $q$  não são capazes de nos dar informações sobre a interação, pois tanto o parâmetro de desaceleração dado por (considerando por simplicidade um universo plano)

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}\Big|_0 = -\frac{1}{2}\Omega_0(1 + 3w) \quad (2.4.55)$$

quanto o parâmetro de Hubble  $H$  não são influenciados diretamente pela interação, sendo necessária uma busca por outras soluções. Sahni et al. [28] propuseram 2 parâmetros que envolvem a terceira derivada do fator de escala, chamados de  $j$  e  $s$ , sendo

$$j = \frac{\ddot{a}}{aH^3} \quad (2.4.56)$$

$$s = \frac{j-1}{3(q-\frac{1}{2})} \quad (2.4.57)$$

Originalmente, esses parâmetros foram propostos para diferenciar diferentes modelos de energia escura sem interação. Zimdahl e Pavón [21] os usaram para medir uma suposta interação. Podemos calcular facilmente  $j$  lembrando que

$$\frac{\ddot{a}}{aH^3} = \frac{1}{H^2} \left( \frac{\ddot{H}}{H} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\dot{H} \right)$$

Portanto

$$j = 1 + \frac{9w\rho_x}{2\rho_t} \left[ 1 + w + \frac{1}{3H} \left( \frac{Q}{\rho_x} - \frac{\dot{w}}{w} \right) \right]$$

$$s = 1 + w + \frac{1}{3H} \left( \frac{Q}{\rho_x} - \frac{\dot{w}}{w} \right) \quad (2.4.58)$$

sendo que  $\rho_t = \rho_m + \rho_x$ . Podemos ver que, além do termo de interação, essa quantidade também serviria para descobrir se a equação de estado de um determinado componente é realmente constante, devido à presença do termo  $\frac{\dot{w}}{w}$ .

No modelo  $\Lambda$ CDM, com  $w = -1$  temos que

$$j = 1 - \frac{9}{2} \frac{Q}{3H\rho_t} \quad (2.4.59)$$

$$s = \frac{Q}{3H\rho_x} \quad (2.4.60)$$

Com esses parâmetros bem definidos, falta agora indicar como eles podem ser medidos. Uma das quantidades observáveis em cosmologia é a distância de luminosidade ( $d_L$ ), que Hubble mediu para descobrir a expansão do universo. Ela é definida por

$$l \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (2.4.61)$$

sendo que  $L \equiv \frac{dE}{dt}$  é a luminosidade absoluta de uma estrela ou galáxia e  $l$  é a luminosidade observada na terra. Como consideramos um universo em expansão, o fóton sofrerá um desvio para o vermelho no seu trajeto até a terra; vamos considerar um fóton radial

emitido na coordenada  $r = 0$  num tempo  $t$  e observado na terra em  $r_0$  e  $t_0$ . Portanto, podemos expressar a distância de luminosidade como

$$d_L = \frac{a_0}{a(t)} a_0 \chi_e \longrightarrow d_L = a_0 \chi_e (1 + z) \quad (2.4.62)$$

onde  $z$  é o desvio para o vermelho, dado por  $1 + z = \frac{a_0}{a(t)}$  e  $\chi_e$  é a distância coordenada. Essa distância é dada por

$$\chi_e \equiv \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.4.63)$$

onde na última igualdade usamos o fato de que fótons seguem geodésicas nulas. Podemos mudar a variável na última integral para o redshift, usando que

$$\dot{z} = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} = -(1 + z)H \implies dt = -\frac{dz}{(1 + z)H}$$

e após algumas manipulações chegamos finalmente a

$$a_0 \chi_e = \int \frac{dz}{H(z)}$$

e podemos expressar a distância de luminosidade como função do redshift

$$d_L = (1 + z) \int \frac{dz}{H(z)} \quad (2.4.64)$$

Podemos expandir o parâmetro de Hubble numa série de Taylor em função do redshift atual ( $z = 0$ )

$$H(z) = H_0(z) + \frac{1}{2} \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=0} z + \frac{1}{3} \left. \frac{d^2H}{dz^2} \right|_{z=0} z^2 + \dots \quad (2.4.65)$$

Podemos calcular as derivadas do parâmetro de Hubble usando que  $\frac{d}{dz} = \frac{dt}{dz} \frac{d}{dt}$  e que

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1 + z)H}$$

Portanto

$$\frac{dH}{dz} = \frac{1 + q}{1 + z} H \quad (2.4.66)$$

$$\frac{d^2H}{dz^2} = \frac{H}{(1 + z)^2} [j - 1 + 2(1 + q) - (1 + q)^2] \quad (2.4.67)$$

e usando isso na expansão (2.4.65) e integrando (ver [36]) temos finalmente que a distância de luminosidade é

$$d_L = H_0^{-1} z \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z + \frac{1}{6}(3(q_0 + 1)^2 - 5(q_0 + 1) + 1 - j_0)z^2 + \dots \right] \quad (2.4.68)$$

Hubble mediu somente o primeiro termo dessa expansão, por isso seu gráfico foi uma reta. Podemos ver que a interação só aparece em terceira ordem no redshift, e até o momento não há nenhuma medida confiável com precisão tão grande. Experimentos como o DES podem ajudar elucidar a questão.

# Capítulo 3

## Aceleração Transiente do Universo

Nesse capítulo vamos apresentar um modelo de universo com aceleração transiente, através da interação entre matéria escura e energia do vácuo. Mostraremos que uma aceleração transiente pode ser atingida mesmo com uma constante cosmológica total nula, sendo um efeito puramente da interação.

### 3.1 Modelo

Universos com aceleração transiente são particularmente importantes para a teoria de cordas/teoria-M, pois um universo que se expande aceleradamente para sempre terá necessariamente um horizonte de eventos, impedindo assim a formulação do único observável conhecido até hoje da teoria de cordas, a matriz  $S$  [22]. Além disso, num artigo recente [31], os autores, usando dados de supernovas, CMB e oscilação acústica de bárions e uma parametrização específica para a equação de estado, demonstraram que o pico da aceleração já passou, indicando que isso pode ser um fenômeno transiente. Universos com aceleração transiente já foram estudados no contexto da quintessência [24], das branas [23] e em teorias  $f(R)$  [26]. O caso de uma aceleração transiente através de interação entre matéria escura e quintessência também já foi estudado em [25, 40].

Usamos aqui o mesmo modelo apresentado no capítulo anterior, sendo que agora particularizamos um dos fluidos como matéria escura, deixando o outro ainda arbitrário com uma equação de estado  $p_x = w\rho_x$  e consideramos ainda que os bárions se conservam independentemente. A equação de conservação portanto é

$$\dot{\rho}_x + 3H(1+w)\rho_x = -Q \tag{3.1.1}$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q \tag{3.1.1}$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \tag{3.1.2}$$

A densidade de energia da matéria escura pode, sem perda de generalidade, ser escrita

como

$$\rho_m = \tilde{\rho}_{m_0} \frac{f}{f_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (3.1.3)$$

Podemos escrever  $f$  como função do fator de escala:

$$\frac{f}{f_0} = 1 + g(a) \quad (3.1.4)$$

portanto

$$Q = \tilde{\rho}_{m_0} \frac{dh}{da} \dot{a} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (3.1.5)$$

Com a equação para  $\rho_m$ , podemos ver que

$$\rho_m = \tilde{\rho}_{m_0} (1 + g) \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (3.1.6)$$

Chamando o valor de  $\rho_m$  em  $a = a_0$  de  $\rho_{m_0}$ , ele é dado por

$$\rho_{m_0} = \tilde{\rho}_{m_0} (1 + g_0) \quad (3.1.7)$$

sendo que  $g_0 = g(a_0)$ . Portanto, se  $g = 0$  o valor da densidade da matéria hoje é  $\tilde{\rho}_{m_0}$ , logo a interação renormaliza o valor da densidade. Além disso, podemos considerar  $\tilde{\rho}_{m_0}$  como o valor da densidade em  $a = a_0$  sem interação, enquanto  $\rho_{m_0}$  é o valor da densidade em  $a = a_0$  na presença da interação.

Com as equações (3.1.1), (3.1.3) e (3.1.4) podemos resolver a equação de conservação para o outro fluido; sua densidade de energia é dada por

$$\rho_x = C \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} - \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} \int_{t_0}^t dt \left[ \tilde{\rho}_{m_0} \frac{dg}{da} \dot{a} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \right] \left( \frac{a}{a_0} \right)^{3(1+w)} \quad (3.1.8)$$

Podemos calcular a integral

$$\begin{aligned} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} \int_{t_0}^t dt \left[ \tilde{\rho}_{m_0} \frac{dg}{da} \dot{a} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \right] \left( \frac{a}{a_0} \right)^{3(1+w)} &= -\tilde{\rho}_{m_0} a_0^3 a^{-3(1+w)} \int_{t_0}^t dt \frac{dg}{da} \dot{a} a^{3w} = \\ &= -\tilde{\rho}_{m_0} a_0^3 a^{-3(1+w)} \int_{a_0}^a da \frac{dg}{da} a^{3w} \end{aligned}$$

Podemos ver que, em  $a = a_0$  a integral se anula, e portanto o valor de  $\rho_x$  em  $a_0$  é  $C$ . Logo, podemos escrever

$$\rho_x = \rho_{x_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} - \tilde{\rho}_{m_0} a_0^3 a^{-3(1+w)} \int_{a_0}^a da \frac{dg}{da} a^{3w} \quad (3.1.9)$$

Resolvendo a integral por partes

$$\int_{a_0}^a da \frac{dg}{da} a^{3w} = a^{3w} g(a) \Big|_{a_0}^a - 3w \int_{a_0}^a da g(a) a^{3w-1} = g(a) a^{3w} - g_0 a_0^{3w} - 3w \int_{a_0}^a da g(a) a^{3w-1}$$

Finalmente, a densidade de energia desse fluido é dada por:

$$\rho_x = (\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0} g_0) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} - \tilde{\rho}_{m_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 g(a) + 3w \tilde{\rho}_{m_0} a_0^3 a^{-3(1+w)} \int_{a_0}^a da g(a) a^{3w-1} \quad (3.1.10)$$

A equação para a aceleração do universo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [\rho_m + (1 + 3w)\rho_x]$$

fica então

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left\{ \tilde{\rho}_{m_0} (1 + g(a)) \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + (1 + 3w) \left[ (\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0} g_0) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} - \tilde{\rho}_{m_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 g + 3w \tilde{\rho}_{m_0} a_0^3 a^{-3(1+w)} \int_{a_0}^a da g(a) a^{3w-1} \right] \right\} \quad (3.1.11)$$

Podemos reescrevê-la como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left\{ \tilde{\rho}_{m_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{b_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + (1 + 3w) \left[ (\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0} g_0) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} + 3w \tilde{\rho}_{m_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \left[ (1 + 3w) a^{-3w} \int_{a_0}^a da g(a) a^{3w-1} - g(a) \right] \right] \right\} \quad (3.1.12)$$

Pode-se ver pela equação acima que o termo extra na aceleração cósmica, devido à interação, pode induzir transições de fase desaceleradas para aceleradas e vice-versa, mesmo que a *SEC* seja obedecida ( $w > -1/3$ ). A aceleração hoje é dada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} \Big|_0 = -\frac{4\pi G}{3} [\tilde{\rho}_{m_0} + \rho_{b_0} + (1 + 3w)(\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0} g_0) - 3w \tilde{\rho}_{m_0} g_0] \quad (3.1.13)$$

e com isso temos o parâmetro de desaceleração hoje

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{aH^2} \Big|_0 &= -\frac{8\pi G}{3H_0^2} \frac{1}{2} \{ \tilde{\rho}_{m_0} + \rho_{b_0} + (1 + 3w)(\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0} g_0) - 3w \tilde{\rho}_{m_0} g_0 \} \longrightarrow \\ \frac{\ddot{a}}{aH^2} \Big|_0 &= -\frac{1}{2} \{ \tilde{\Omega}_{m_0} (1 + g_0) + \Omega_{b_0} + (1 + 3w)\Omega_{x_0} \} = -\frac{1}{2} [\Omega_{m_0} + (1 + 3w)\Omega_{x_0}] \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

onde usamos que  $\Omega_{m_0} = \tilde{\Omega}_{m_0} (1 + g_0)$ . Num universo espacialmente plano onde  $\Omega_{m_0} + \Omega_{x_0} + \Omega_{b_0} = 1$ , temos que

$$\frac{\ddot{a}}{aH^2} \Big|_0 = -\frac{1}{2} (1 + 3w\Omega_{x_0}) \quad (3.1.15)$$

Podemos ver por essa equação que a interação não tem influência direta sobre o parâmetro de desaceleração, como era esperado; além disso, é preciso que  $w$  seja negativo para que possamos ter um universo acelerado hoje, excluindo uma possível interação entre matéria e radiação.

Vamos agora especificar o termo de interação  $g(a)$  para que tenhamos fases de aceleração transientes.

## 3.2 Especificando a Interação

Como não se tem conhecimento o bastante sobre a energia escura, não há justificativa até o momento para escolhermos um determinado tipo de interação. Portanto, vamos construir um *Toy Model* com um determinado tipo de interação que seja simples matematicamente (ou seja, que nos permita resolver as equações analiticamente) e que possa modelar um universo que tenha uma fase acelerada transiente. Vamos aqui analisar dois tipos de interação, uma exponencial e a outra gaussiana.

A partir de agora vamos usar  $a_0 = 1$ .

### 3.2.1 Interação Exponencial

Vamos escolher uma função  $g(a)$

$$g(a) = c_1 a^n \exp(-a/\sigma) \quad (3.2.16)$$

sendo que  $n$  é um número inteiro e  $\sigma$  é um real positivo. A densidade de energia do fluido  $x$  é dada por

$$\begin{aligned} \rho_x = \rho_{x_0} a^{-3(1+w)} + c_1 \tilde{\rho}_{m_0} \exp(-1/\sigma) a^{-3(1+w)} - c_1 \tilde{\rho}_{m_0} a^{n-3} \exp(-a/\sigma) + \\ + 3w c_1 \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3(1+w)} \int_{a_0}^a da a^{n+3w-1} \exp(-a/\sigma) \end{aligned}$$

Considerando que  $n + 3w - 1$  um número inteiro, podemos resolver a integral por partes, o que nos dá

$$\begin{aligned} \rho_x = \rho_{x_0} a^{-3(1+w)} + K_1 \exp(-1/\sigma) a^{-3(1+w)} + 3w K_1 \exp(-1/\sigma) \sum_{i=0}^{n+3w-1} \left[ \frac{(n+3w-1)!}{i!} \sigma^{n+3w-i} \right] a^{-3(1+w)} \\ - K_1 a^{n-3} \exp(-a/\sigma) - 3w K_1 a^{-3(1+w)} \exp(-a/\sigma) \sum_{i=0}^{n+3w-1} \left[ \frac{(n+3w-1)!}{i!} \sigma^{n+3w-i} a^i \right] \end{aligned}$$

onde  $K_1 \equiv c_1 \tilde{\rho}_{m_0}$ . Vamos agrupar os termos constantes e reescrever essa equação de uma maneira mais simples:

$$\rho_x = \rho_{x_0}^{eff} a^{-3(1+w)} - K_1 a^{n-3} \exp(-a/\sigma) - 3w K_1 a^{-3(1+w)} \exp(-a/\sigma) \sum_{i=0}^{n+3w-1} \left[ \frac{(n+3w-1)!}{i!} \sigma^{n+3w-i} a^i \right] \quad (3.2.17)$$



sendo que

$$\rho_{x_0}^{eff} = \rho_{x_0} + K_1 \exp(-1/\sigma) + 3wK_1 \exp(-1/\sigma) \sum_{i=0}^{n+3w-1} \left[ \frac{(n+3w-1)!}{i!} \sigma^{n+3w-i} \right] \quad (3.2.18)$$

A aceleração cósmica fica então

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left\{ (1+3w) \left[ \rho_{x_0} + K_1 \exp(-1/\sigma) + 3wK_1 \exp(-1/\sigma) \sum_{i=0}^{n+3w-1} \left( \frac{(n+3w-i)!}{i!} \right) \sigma^{n+3w-i} \right] a^{-3(1+w)} \right. \\ \left. + \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} + \rho_{b_0} a^{-3} + 3wK_1 [-(1+3w) \exp(-a/\sigma) \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{n+3w-1} \left( \frac{(n+3w-i)!}{i!} \right) \sigma^{n+3w-i} a^{i-3(1+w)} - a^{n-3} \exp(-a/\sigma) \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

onde podemos usar a definição de  $\rho_{x_0}^{eff}$  para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[ \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} + \rho_{b_0} a^{-3} + (1+3w) \rho_{x_0}^{eff} a^{-3(1+w)} \right] + 4\pi G w K_1 \exp(-a/\sigma) \times \\ \times \left[ (1+3w) \sum_{i=0}^{n+3w-1} \frac{(n+3w-1)!}{i!} \sigma^{n+3w-i} a^{i-3(1+w)} + a^{n-3} \right] \quad (3.2.19) \end{aligned}$$

Vamos escolher aqui  $n = 5$  e uma equação de estado de vácuo,  $w = -1$ . Usando que  $\tilde{\rho}_{m_0} = \rho_{m_0} - K_1 \exp(-1/\sigma)$ , a densidade de matéria é

$$\rho_m = \rho_{m_0} a^{-3} + K_1 a^{-3} [a^5 \exp(-a/\sigma) - \exp(-1/\sigma)], \quad (3.2.20)$$

e a densidade de energia do fluido  $x$  é

$$\rho_x = \rho_{x_0}^{eff} + 3K_1 \exp(-a/\sigma) \left( \sigma^2 + \sigma a - \frac{1}{3} a^2 \right) \quad (3.2.21)$$

com

$$\rho_{x_0}^{eff} = \rho_{x_0} + K_1 \exp(-1/\sigma) - 3K_1 \exp(-1/\sigma) (\sigma^2 + \sigma) = \rho_{x_0} - 3K_1 \exp(-1/\sigma) \left[ \sigma^2 + \sigma - \frac{1}{3} \right]$$

que coincide com a densidade de energia do vácuo se não houver interação ( $K_1 = 0$ ).

A aceleração cósmica é dada por (usando o fato de que  $\tilde{\rho}_{m_0} = \rho_{m_0} - K_1 \exp(-1/\sigma)$ )

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left\{ [\rho_{m_0} - K_1 \exp(-1/\sigma)] a^{-3} + \rho_{b_0} a^{-3} - 2\rho_{x_0}^{eff} + 3K_1 \exp(-a/\sigma) [a^2 - 2\sigma^2 - 2\sigma a] \right\} \quad (3.2.22)$$

### 3.2.2 Interação Gaussiana

Agora vamos considerar uma função  $g(a)$  da forma

$$g(a) = c_2 a^n \exp(-a^2/\sigma^2) \quad (3.2.23)$$

Então a densidade do fluido  $x$  é

$$\rho_x = (\rho_{x_0} + K_2 \exp(-1/\sigma^2)) a^{-3(1+w)} - K_2 a^{n-3} \exp(-a^2/\sigma^2) + 3w K_2 a^{-3(1+w)} \int_{a_0}^a da a^{n+3w-1} \exp(-a^2/\sigma^2)$$

sendo  $K_2 = c_2 \tilde{\rho}_{m_0}$ . Considerando novamente  $n = 5$  e  $w = -1$  a integral fica

$$\int_{a_0}^a da a \exp(-a^2/\sigma^2) = -\frac{1}{2} \sigma^2 [\exp(-a^2/\sigma^2) - \exp(-1/\sigma^2)]$$

e temos, portanto

$$\rho_x = \rho_{x_0} + K_2 \exp(-1/\sigma^2) - K_2 a^2 \exp(-a^2/\sigma^2) + \frac{3}{2} K_2 \sigma^2 \exp(-a^2/\sigma^2) - \frac{3}{2} K_2 \sigma^2 \exp(-1/\sigma^2)$$

Agrupando novamente os termos constantes, essa equação é escrita como

$$\rho_x = \rho_{x_0}^{eff} - K_2 \exp(-a^2/\sigma^2) \left( a^2 - \frac{3}{2} \sigma^2 \right) \quad (3.2.24)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \rho_{x_0}^{eff} &= \rho_{x_0} + K_2 \exp(-1/\sigma^2) - \frac{3}{2} K_2 \sigma^2 \exp(-1/\sigma^2) \\ &= \rho_{x_0} - \frac{3}{2} K_2 \exp(-1/\sigma^2) \left[ \sigma^2 - \frac{2}{3} \right] \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

que novamente coincide com a densidade de energia do vácuo se não houver interação.

A densidade de matéria é dada por

$$\rho_m = \rho_{m_0} a^{-3} + K_2 a^{-3} [a^5 \exp(-a^2/\sigma^2) - \exp(-1/\sigma^2)] \quad (3.2.26)$$

Já a aceleração cósmica é

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left\{ \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} + \rho_{b_0} a^{-3} - 2[\rho_{x_0} + K_2 \exp(-1/\sigma^2)] \right. \\ &\quad \left. - 3K_2 a^{-3} \left[ -2a^3 \sigma^2 \left( -\frac{1}{2} \exp(-a^2/\sigma^2) + \frac{1}{2} \exp(-1/\sigma^2) \right) - a^5 \exp(-a^2/\sigma^2) \right] \right\} \end{aligned}$$

que, utilizando a definição de  $\rho_{x_0}^{eff}$  e que nesse caso  $\tilde{\rho}_{m_0} = \rho_{m_0} - K_2 \exp(-1/\sigma^2)$ , pode ser escrita da forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left\{ [\rho_{m_0} - K_2 \exp(-1/\sigma^2)] a^{-3} + \rho_{b_0} a^{-3} - 2\rho_{x_0}^{eff} + 3K_2 \exp(-a^2/\sigma^2) (a^2 - \sigma^2) \right\} \quad (3.2.27)$$

Temos agora que estabelecer limites para que nosso modelo seja válido, ou seja, para que o universo seja desacelerado no passado, acelerado hoje e novamente desacelerado no futuro. Já podemos ver que, para  $a \gg 1$ , o termo dominante será dado pela constante cosmológica efetiva  $\rho_{x_0}^{eff}$ ; portanto, se esse termo for positivo, o universo se expandirá aceleradamente para sempre, como acontece no modelo  $\Lambda$ CDM. Uma maneira de contornar esse problema é impor  $\rho_{x_0}^{eff} = 0$ , ou seja, uma parte da interação cancela a constante cosmológica "pura" ( $\rho_{x_0}$ ). Nesse caso, a aceleração do universo será causada unicamente pela interação.

### 3.3 Limites dos Parâmetros

Nessa seção vamos tentar estabelecer limites dos nosso parâmetros livres de modo a obter um modelo cosmológico viável. Em ambos os casos vamos considerar que a constante cosmológica total é nula ( $\rho_{x_0}^{eff} = 0$ ).

#### 3.3.1 Interação Exponencial

Vamos reescrever (3.2.22) em função dos parâmetros de densidade:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \{ [\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} - \bar{K}_1 \exp(-1/\sigma)] a^{-3} + 3\bar{K}_1 \exp(-a/\sigma)[a^2 - 2\sigma^2 - 2\sigma a] \} \quad (3.3.28)$$

sendo que  $\bar{K}_1 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} K_1$ .

Para valores pequenos do fator de escala, i.e. no passado, os termos em  $a^{-3}$  dominam, e para que possamos ter uma expansão desacelerada

$$\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} > \bar{K}_1 \exp(-1/\sigma) \quad (3.3.29)$$

Como  $\rho_{x_0}^{eff} = 0$ , temos que

$$\Omega_{x_0} = 3\bar{K}_1 \exp(-1/\sigma) \left[ \sigma^2 + \sigma - \frac{1}{3} \right] \quad (3.3.30)$$

e levando em conta um universo plano,  $\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} = 1 - \Omega_{x_0}$ , podemos reescrever (3.3.28) como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \{ a^{-3} - 3\bar{K}_1 \exp(-1/s)[\sigma^2 + \sigma]a^{-3} + 3\bar{K}_1 \exp(-a/\sigma)[a^2 - 2\sigma^2 - 2\sigma a] \} \quad (3.3.31)$$

Podemos escrever a função de Hubble como:

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_m + \Omega_x + \Omega_b)$$

e usando  $\rho_b$  de (3.1.1),  $\rho_m$  de (3.2.20) e  $\rho_x$  de (3.2.21) (com  $\rho_{x_0}^{eff} = 0$  temos que,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{1 - 3\bar{K}_1 \exp(-1/\sigma)(\sigma^2 + \sigma)}{a^3} + 3\bar{K}_1 \exp(-a/\sigma)(\sigma^2 + \sigma a) \quad (3.3.32)$$

A condição para que o universo expanda desaceleradamente em  $a \ll 1$  é

$$\bar{K}_1 \exp(-1/\sigma)[\sigma^2 + \sigma] < \frac{1}{3} \quad (3.3.33)$$

que é a mesma condição (3.3.29), substituindo  $\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0}$  por  $1 - \Omega_{x_0}$ .

A condição para que atualmente ( $a = 1$ ) o universo esteja acelerado é

$$\left. \frac{\ddot{a}}{aH^2} \right|_0 > 0 \Leftrightarrow \bar{K}_1 \exp(-1/\sigma) \left( \sigma^2 + \sigma - \frac{1}{3} \right) > \frac{1}{9} \quad (3.3.34)$$

que é consistente com (3.1.15) se combinada com (3.3.30).

Temos portanto duas condições a serem satisfeitas simultaneamente, (3.3.33) e (3.3.34) o que nos dá um intervalo de valores possíveis para a intensidade da interação

$$\frac{e^{1/\sigma}}{9(\sigma^2 + \sigma - 1/3)} < \bar{K}_1 < \frac{e^{1/\sigma}}{3(\sigma^2 + \sigma)} \quad (3.3.35)$$

### 3.3.2 Interação Gaussiana

Vamos novamente reescrever (3.2.27) em função dos parâmetros de densidade

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \left\{ [\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} - \bar{K}_2 \exp(-1/\sigma^2)] a^{-3} + 3\bar{K}_2 \exp(-a^2/\sigma^2)[a^2 - \sigma^2] \right\} \quad (3.3.36)$$

sendo  $\bar{K}_2 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} K_2$ . O termo dominante para valores pequenos do fator de escala é o primeiro, logo para que o universo estivesse em expansão desacelerada no passado, a seguinte condição tem que ser satisfeita:

$$\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} > \bar{K}_2 \exp(-1/\sigma^2) \quad (3.3.37)$$

Como a constante cosmológica total é nula,

$$\Omega_{x_0} = \bar{K}_2 \exp(-1/\sigma^2) \left[ \frac{3}{2}\sigma^2 - 1 \right] \quad (3.3.38)$$

Substituindo esse valor em (3.3.36), já levando em conta que  $\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} = 1 - \Omega_{x_0}$  ficamos com

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{3}{2}\bar{K}_2\sigma^2 \exp(-1/\sigma^2) \right] a^{-3} + 3\bar{K}_2 \exp(-a^2/\sigma^2)[a^2 - \sigma^2] \right\} \quad (3.3.39)$$

Novamente usando  $\rho_b$  de (3.1.1),  $\rho_m$  de (3.2.26) e  $\rho_x$  de (3.2.24), a função de Hubble é dada por

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K}_2 \exp(-1/\sigma^2)}{a^3} + \frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K}_2 \exp(-a^2/\sigma^2) \quad (3.3.40)$$

Usando a equação da aceleração, a condição para expansão desacelerada em  $a \ll 1$  é

$$\bar{K}_2 \sigma^2 \exp(-1/\sigma^2) < \frac{2}{3} \quad (3.3.41)$$

que é a mesma condição (3.3.37), substituindo as densidades bariônicas e de poeira pela densidade do vácuo.

A condição para a aceleração atual do universo é:

$$\left. \frac{\ddot{a}}{aH^2} \right|_0 \Leftrightarrow \bar{K}_2 \exp(-1/\sigma^2) \left[ \sigma^2 - \frac{2}{3} \right] > \frac{2}{9} \quad (3.3.42)$$

que é novamente consistente com (3.1.15) se combinada com (3.3.38).

Novamente, temos 2 condições que devem ser satisfeitas: (3.3.41) e (3.3.42), novamente indicando um intervalo de valores para a intensidade da interação:

$$\frac{2e^{1/\sigma^2}}{9(\sigma^2 - 2/3)} < \bar{K}_2 < \frac{2e^{1/\sigma^2}}{3\sigma^2} \quad (3.3.43)$$

É interessante comparar as expressões (3.3.28) e (3.3.36) com a expressão correspondente para o modelo  $\Lambda$ CDM

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \left[ \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} - 2\Omega_\Lambda \right] \quad (3.3.44)$$

Nota-se que os termos de interação podem fazer o papel de  $\Omega_\Lambda$ . Além disso, o modelo  $\Lambda$ CDM dá uma boa descrição do universo atual; espera-se portanto que essa situação não mude muito considerando modelos alternativos. Isso indica valores positivos para  $\bar{K}_1$  e  $\bar{K}_2$  e  $\sigma > 1$ . Uma análise estatística de supernovas tipo Ia em andamento parece confirmar esse fato.

### 3.4 Transferência de Energia e o Termo de Interação

Utilizando argumentos da termodinâmica, mostra-se que valores positivos para  $Q$  são preferidos [32, 33], ou seja, há uma transferência de energia da energia escura para a matéria escura. Portanto, de acordo com (3.1.5), num universo em expansão ( $\dot{a} > 0$ ), a quantidade  $\frac{dg}{da}$  tem que ser positiva. Para o caso da interação exponencial, temos

$$\frac{dg_1}{da} = \left( \frac{5}{a} - \frac{1}{\sigma} \right) g_1 \quad (3.4.45)$$

e portanto, para  $c_1 > 0$

$$Q > 0 \Leftrightarrow a < 5\sigma \quad (3.4.46)$$

Já para a interação gaussiana

$$\frac{dg_2}{da} = \left( \frac{5}{a} - \frac{2a}{\sigma^2} \right) g_2 \quad (3.4.47)$$

e conseqüentemente

$$Q > 0 \Leftrightarrow a^2 < \frac{5}{2}\sigma^2 \quad (3.4.48)$$

Logo, para valores altos do parâmetro  $\sigma$ , valores positivos de  $\bar{K}_1$  e  $\bar{K}_2$  (correspondente a  $c_1$  e  $c_2$  positivos) são favorecidos. Quando esses limites não forem mais obedecidos ( $a > 1$ ), a interação já não vai ter mais importância, pois em ambos os casos é suprimida exponencialmente.

Podemos escrever também explicitamente o parâmetro  $Q$  para o modelo exponencial como

$$Q_1 = K_1 a^2 H \left( 5 - \frac{a}{\sigma} \right) \exp(-a/\sigma) \quad (3.4.49)$$

enquanto no modelo gaussiano temos

$$Q_2 = K_2 a^2 H \left( 5 - s \frac{a^2}{\sigma^2} \right) \exp(-a^2/\sigma^2) \quad (3.4.50)$$

Esses termos podem ser escritos como:

$$Q_1 = \beta_1(a) H \rho_x \quad (3.4.51)$$

sendo que

$$\beta_1(a) = \frac{1}{3} \frac{5 - \frac{a}{\sigma}}{3 \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{\sigma}{a} - \frac{1}{3}} \quad (3.4.52)$$

O mesmo vale para a interação gaussiana, sendo que

$$\beta_2(a) = \frac{2}{3} \frac{5 - 2 \frac{a^2}{\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{2}{3}} \quad (3.4.53)$$

Interações do tipo  $Q = \beta H \rho_x$  com  $\beta$  uma constante foram amplamente estudadas para modelar interações entre matéria e energia escura. Aqui apenas generalizamos para um parâmetro variável. É importante notar que tanto (3.4.52) como (3.4.53) são nulos para valores pequenos do fator de escala, ou seja, há um momento em que a interação "liga". Para valores do fator de escala muito grandes, tanto  $Q_1$  como  $Q_2$  tendem a zero, pois  $\rho_x$  tende a zero em ambos os casos.

### 3.4.1 Representação como Campo Escalar

Vamos aqui encontrar uma representação equivalente para a dinâmica da componente  $x$  na forma de um campo escalar. Podemos reescrever a equação da conservação de energia como

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + w_{eff})\rho_x = 0 \quad (3.4.54)$$

com

$$w_{eff} = w + \frac{Q_1}{3H\rho_x} \quad (3.4.55)$$

Usando a dinâmica do campo escalar, chegamos a correspondência

$$(1 + w_{eff})\rho_x = \dot{\phi}^2$$

e, usando (3.4.49) chegamos a

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{3} K_1 a^2 \left( 5 - \frac{a}{\sigma} \right) \exp(-a/\sigma) \quad (3.4.56)$$

e usando a fórmula para o potencial

$$V = (1 - w_{eff})\rho_x$$

temos o potencial efetivo

$$V = 3K_1 a^2 \left( \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{\sigma}{a} - \frac{11}{18} + \frac{a}{18\sigma} \right) \exp(-a/\sigma) \quad (3.4.57)$$

A parte cinética se anula para valores muito grandes ou muito pequenos do fator de escala. Já o potencial efetivo tem um valor constante  $V \approx 3K_1\sigma^2$  para valores pequenos do fator de escala e também tende a zero quando  $a \gg 1$ .

Usando que  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{da} \frac{da}{dt}$ , podemos escrever a equação (3.4.56) como

$$\frac{d\phi}{da} = \frac{\left[ \frac{\bar{K}_1}{8\pi G} \left( 5 - \frac{a}{\sigma} \right) \exp(-a/\sigma) \right]^{1/2}}{\frac{H}{H_0}} \quad (3.4.58)$$

A solução dessa equação, junto com a equação para o potencial efetivo, nos dá uma representação de  $V(\phi)$ .

Para a interação gaussiana, os termos são dados por

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{3} K_2 a^2 \left( 5 - 2 \frac{a^2}{\sigma^2} \right) \exp(-a^2/\sigma^2) \quad (3.4.59)$$

e

$$V = \frac{3}{2} K_2 a^2 \left( \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{2a^2}{9\sigma^2} - \frac{11}{9} \right) \exp(-a^2/\sigma^2) \quad (3.4.60)$$

O comportamento tanto do potencial efetivo quanto do termo cinético é semelhante ao do primeiro caso. Reescrevendo (3.4.59) temos

$$\frac{d\phi}{da} = \frac{\left[ \frac{\bar{K}_2}{8\pi G} \left( 5 - 2 \frac{a^2}{\sigma^2} \right) \exp(-a^2/\sigma^2) \right]^{1/2}}{\frac{H}{H_0}} \quad (3.4.61)$$

Os potenciais como função do campo podem ser determinados numericamente. Eles podem ser aproximados como uma série finita em termos de potências de  $\sinh$  e  $\cosh$ , como por exemplo:

$$V(\phi) = a_0 + \frac{a_1 \phi}{\cosh \phi} + \frac{a_2}{\cosh^2 \phi} \quad (3.4.62)$$

Para a interação exponencial temos que  $a_0 = 0.121151$ ,  $a_1 = -0.527741$  e  $a_2 = 0.603898$ , enquanto na interação gaussiana temos  $a_0 = 0.416204$ ,  $a_1 = -0.655256$  e  $a_2 = -0.0962396$  [39]. A figura seguinte mostra o resultado gráfico da interpolação numérica e da aproximação.

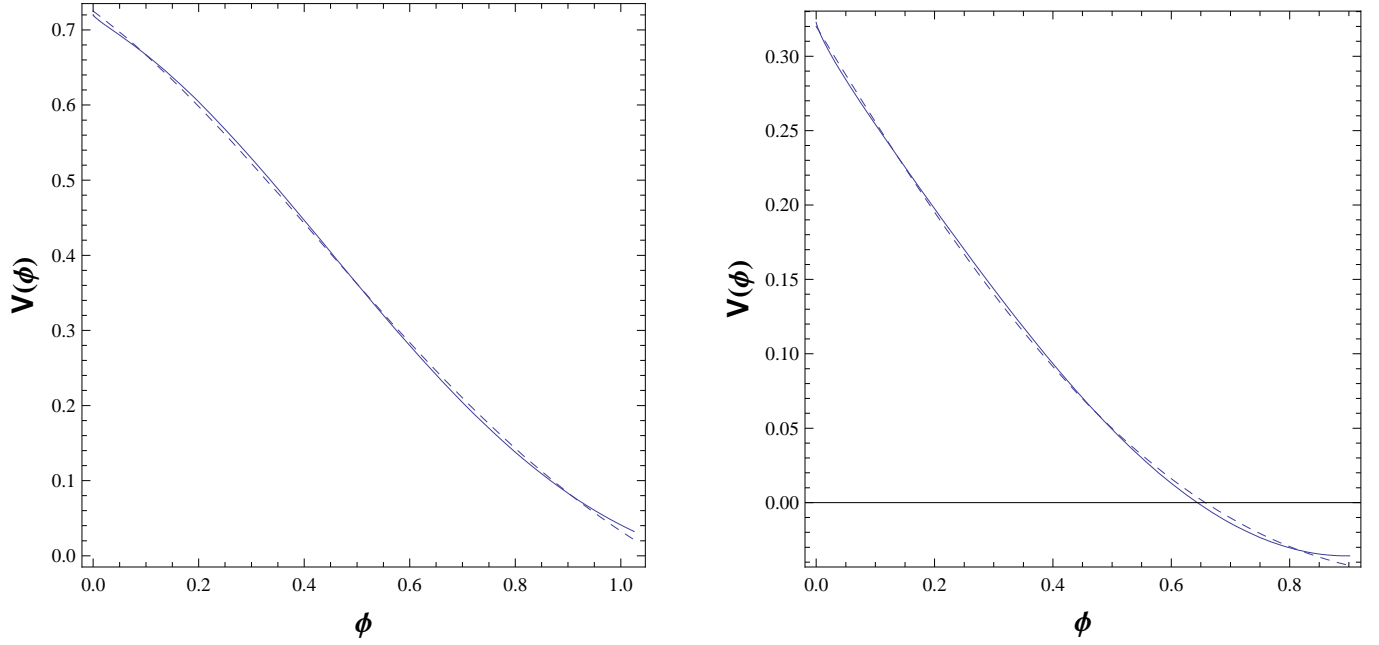


Figura 3.1: Esquerda: potencial efetivo para a interação exponencial. Direita: potencial efetivo para a interação gaussiana. As linhas contínuas são os resultados numéricos, enquanto as pontilhadas correspondem às aproximações em termos de funções hiperbólicas

### 3.5 Análise de Supernovas Ia

Vamos aqui usar um levantamento de supernovas para definir limites dos parâmetros livres do modelo.

Usaremos o levantamento "gold" de supernovas Ia [38]. O parâmetro a ser calculado é a distância de luminosidade

$$D_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.5.63)$$

sendo  $H$  dado pelas equações das seções anteriores.  $H_0 = 100h$  Km/s/Mpc é o valor do parâmetro de Hubble atualmente. Os dados observacionais são dados em forma da distância modular

$$\mu_0 = \log \left( \frac{D_L}{Mpc} \right) + 25 \quad (3.5.64)$$

Com isso constrói-se uma função chi-quadrado, dada por

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\mu_{0i}^t - \mu_{0i}^o}{\sigma_i^2} \quad (3.5.65)$$

sendo que  $\mu_{0i}^t$  é o valor da distância modular da  $i$ -ésima supernova calculado com nosso modelo,  $\mu_{0i}^o$  é o valor observado e  $\sigma_i$  é a barra de erro observacional. Com essa função, podemos construir



a função densidade de probabilidade (PDF)

$$P(x_n) = A \exp(-\chi^2(x_n)/2) \quad (3.5.66)$$

onde  $x_n$  representa os parâmetros livres do modelo.  $A$  é uma constante de normalização. A descrição geral da análise pode ser encontrada em [37]

Primeiro obtemos os valores para o modelo  $\Lambda$ CDM, que é o limite quando  $\bar{K}_1 = 0$  e  $\bar{K}_2 = 0$ , ou seja, o modelo sem interação. Nesse caso, temos somente 2 parâmetros livres:  $\Omega_{x0}$  e o parâmetro de Hubble. Minimizando  $\chi^2$  obtemos  $\chi_{red}^2 = 1.128$  (a  $\chi^2$  mínima dividida pelo número total de graus de liberdade) com  $\Omega_{x0} = 0.651$  e  $h = 0.644$  [39]. Depois da marginalização, as probabilidades máximas ocorrem em  $\Omega_{x0} = 0.651$  e  $h = 0.619$ . Os gráficos são mostrados na figura (3.2)

No modelo com interação, teríamos a princípio 4 parâmetros livres:  $\Omega_{x0}$ ,  $\bar{K}_1$  ou  $\bar{K}_2$ , o parâmetro de Hubble e  $\sigma$ . No entanto, como escolhemos a constante cosmológica efetiva nula, há uma relação entre  $\Omega_{x0}$  e  $\bar{K}_1$  ou  $\bar{K}_2$  (3.3.30, 3.3.38), reduzindo portanto o número de parâmetros livres para 3:  $\bar{K}_1$  ou  $\bar{K}_2$ ,  $h$  e  $\sigma$ . Integrando sobre um ou dois desses parâmetros, temos a função densidade de probabilidade bidimensional ou unidimensional. Vamos nos restringir somente ao caso com 3 parâmetros livres.

Para a interação exponencial, as PDFs estão mostradas nas figuras (3.3) e (3.4). O melhor ajuste é obtido para  $h = 0.643$ ,  $\sigma = 4.000$  e  $\bar{K}_1 = 0.015$  com  $\chi_{red}^2 = 1.129$ , correspondendo à  $\Omega_{x0} = 0.683$ . A evolução do parâmetro de aceleração é mostrado no painel inferior direito da figura (3.3): podemos ver que após um período de aceleração, a expansão volta a desacelerar. Depois de marginalização, as probabilidades máximas ocorrem em  $h = 0.670$ ,  $\sigma = 3.558$  e  $\bar{K}_1 = 0.017$ . Esses valores nos dão  $\Omega_{x0} = 0.599$  e novamente temos um período de aceleração transiente. A evolução é mostrada no painel inferior direito da figura (3.4).

Os resultados obtidos para a interação gaussiana são semelhantes. As PDFs bi- e unidimensionais são mostradas nas figuras (3.5) e (3.6). O melhor ajuste é obtido com os valores  $h = 0.644$ ,  $\sigma = 5.000$  e  $\bar{K}_2 = 0.019$ , correspondendo à  $\Omega_{x0} = 0.678$  e  $\chi_{red}^2 = 1.129$ . Novamente a evolução do parâmetro de aceleração é mostrada no painel inferior direito da figura (3.5). Depois de marginalizarmos, as probabilidades máximas ocorrem em  $h = 0.670$ ,  $\sigma = 4.358$  e  $\bar{K}_2 = 0.022$ , implicando em  $\Omega_{x0} = 0.563$ . O comportamento do parâmetro de aceleração é mostrado no painel inferior direito da figura (3.6), e novamente vemos um período de aceleração transiente. Em todos esses casos, a energia escura cede energia para a matéria escura.

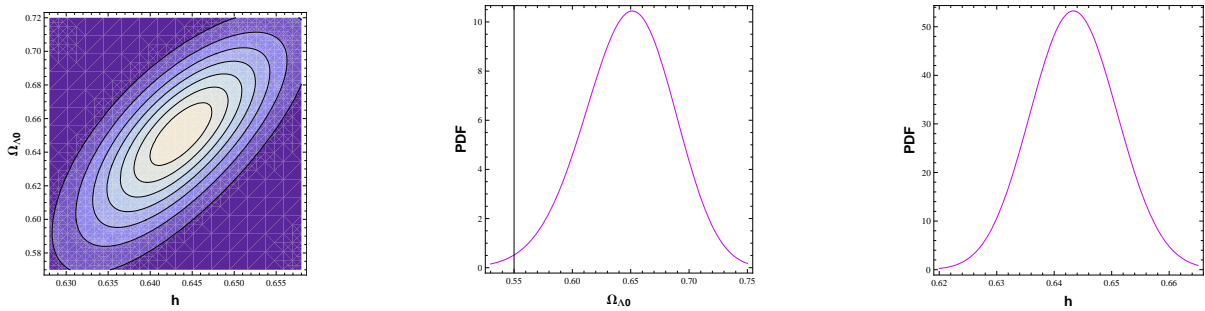


Figura 3.2: O modelo  $\Lambda$ CDM. Esquerda: PDF bidimensional para  $h$  e  $\Omega_{\Lambda_0}$ . Quanto mais brilhante, maior a probabilidade. Centro: PDF unidimensional para  $\Omega_{\Lambda_0}$ . Direita: PDF unidimensional para  $h$

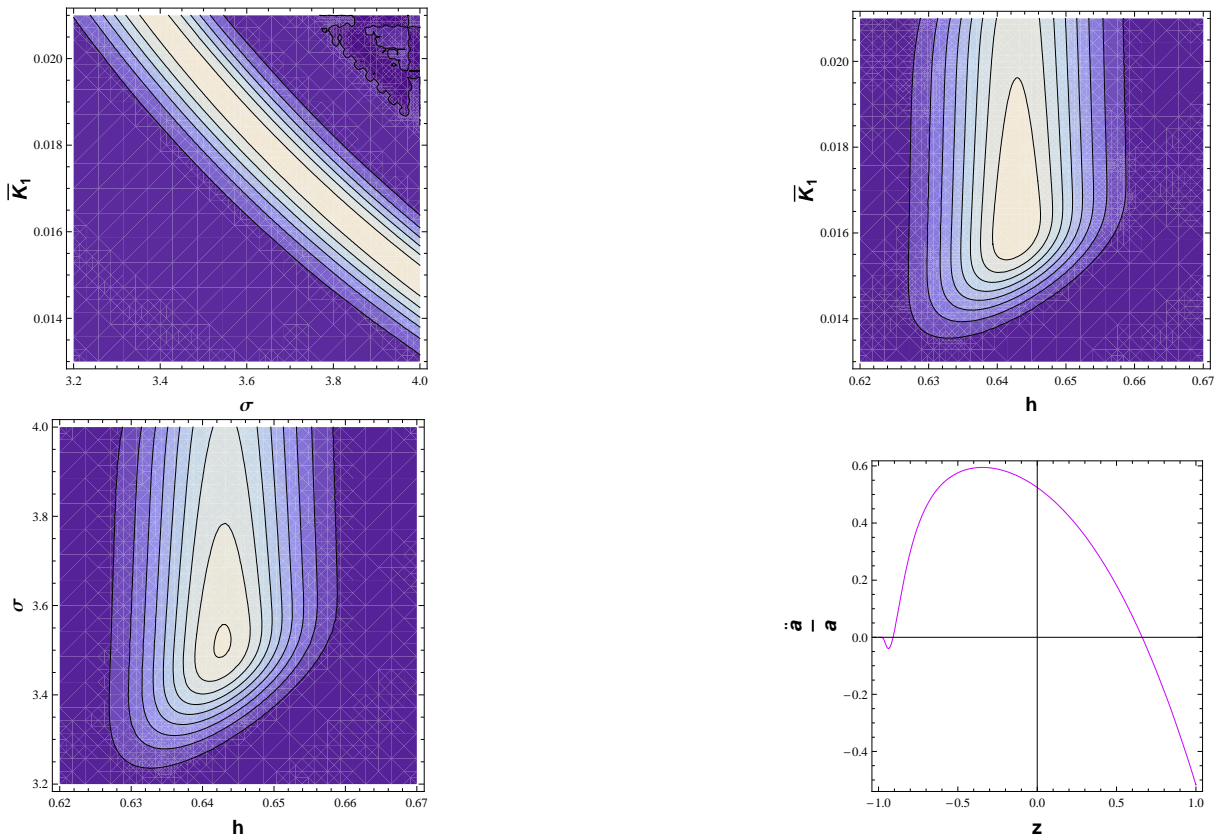


Figura 3.3: PDFs bidimensionais para diferentes combinações de  $\bar{K}_1$ ,  $\sigma$  e  $h$ , depois de integrarmos no outro parâmetro. A figura inferior direita representa a evolução do parâmetro de aceleração no melhor ajuste em unidades de  $H_0^2$

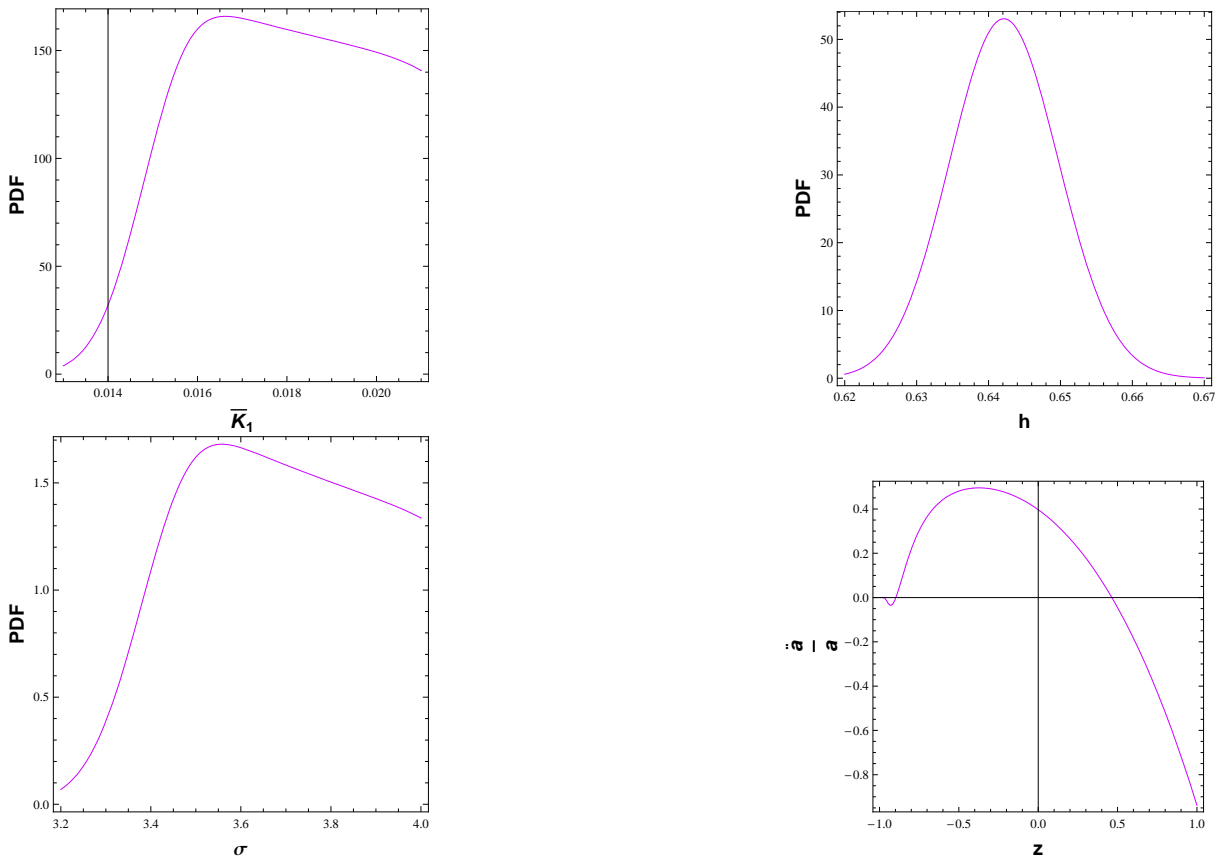


Figura 3.4: PDFs unidimensionais de  $\bar{K}_1$ ,  $\sigma$  e  $h$ , depois de integrarmos sobre os outros parâmetros. A figura inferior direita representa a evolução do parâmetro de aceleração para o pico das probabilidades em unidades de  $H_0^2$

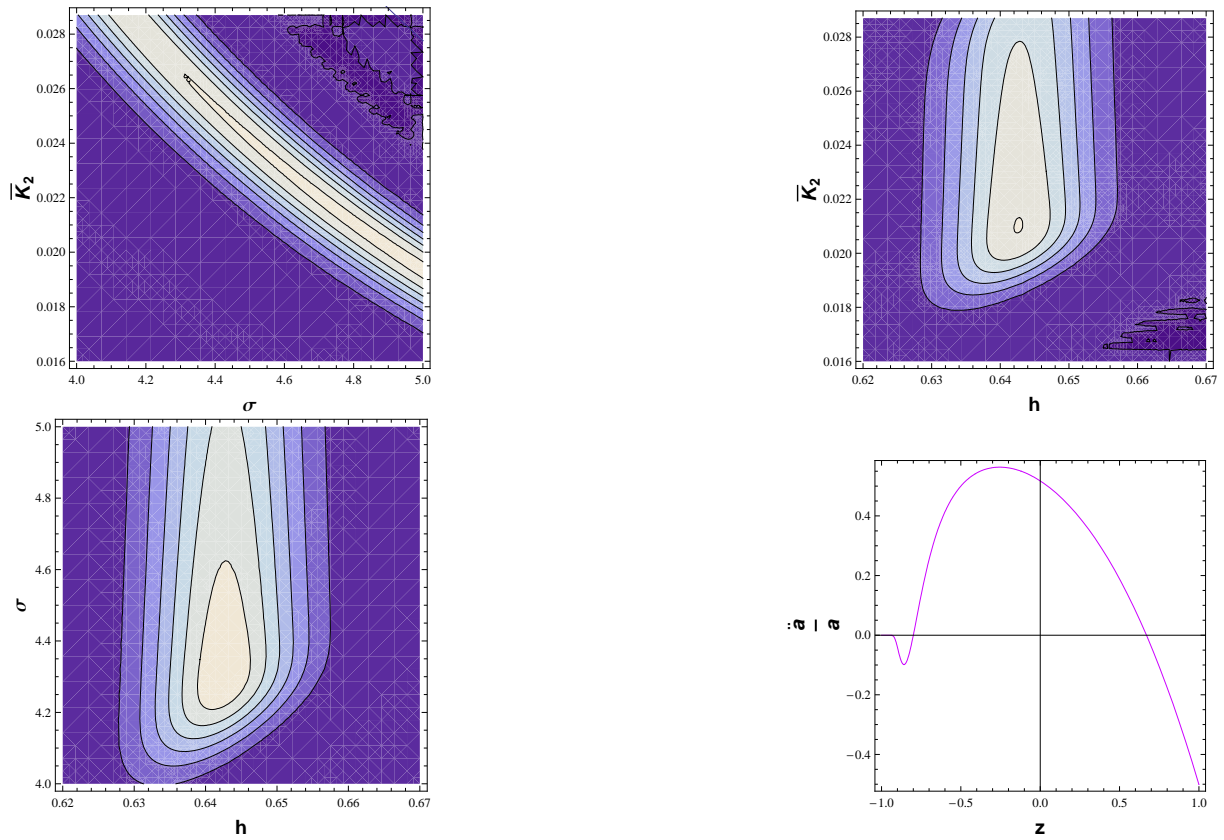


Figura 3.5: PDFs bidimensionais para diferentes combinações de  $\bar{K}_2$ ,  $\sigma$  e  $h$ , depois de integrarmos sobre o outro parâmetro. A figura inferior direita representa a evolução do parâmetro de aceleração no melhor ajuste em unidades de  $H_0^2$

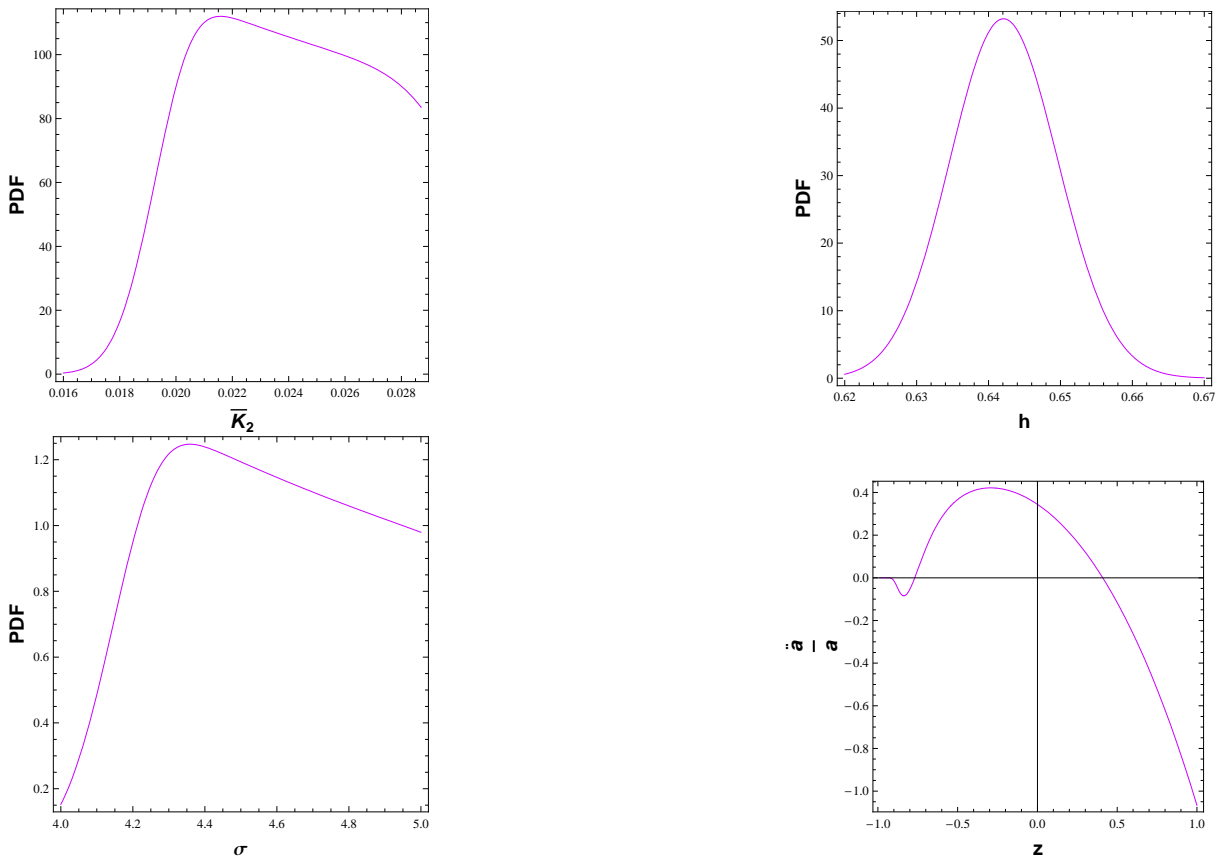


Figura 3.6: PDFs unidimensionais de  $\bar{K}_2$ ,  $\sigma$  e  $h$ , depois de integrarmos sobre os outros parâmetros. A figura inferior direita representa a evolução do parâmetro de aceleração para o pico das probabilidades em unidades de  $H_0^2$

# Capítulo 4

## Conclusão e considerações finais

O modelo  $\Lambda$ CDM parece ser o modelo que melhor descreve o atual estágio do universo. Nesse modelo, o atual estágio de expansão acelerada é causado por uma constante cosmológica, que é equivalente a um fluido com equação de estado  $w = -1$ . Como vimos no capítulo 2, essa é a mesma equação de estado da energia do vácuo, o que nos dá uma predição para seu valor baseado na teoria quântica de campos. No entanto, o valor observado é muitas ordens de magnitude menor do que o predito, indicando que há algum problema ou na teoria quântica de campos ou na própria constante cosmológica. Sendo assim, buscar alternativas ao modelo  $\Lambda$ CDM é importante. No nosso trabalho, mostramos que uma interação no setor escuro (matéria escura e vácuo) do universo pode dar origem a fenômenos interessantes, como uma aceleração transiente, que algumas pesquisas recentes parecem indicar. Além disso, um modelo sem interação (ainda que não saibamos exatamente a natureza dessa interação) parece ser uma restrição muito forte, enquanto que um modelo com interação é muito mais geral.

Com essa interação, mostramos que a constante cosmológica é renormalizada. Mesmo considerando que a constante cosmológica efetiva seja nula, a parte da interação dependente do tempo é capaz de gerar uma expansão acelerada. Dois modelos foram estudados, uma interação exponencial e uma gaussiana, e ambos geram uma aceleração transiente. Apesar das investigações recentes indicarem que o pico da aceleração já passou, nosso *toy model* prediz que esse pico ainda está por vir. O modelo  $\Lambda$ CDM não é capaz de reproduzir tal comportamento, pois no futuro o universo seria dominado pela constante cosmológica, o que causaria uma expansão acelerada para sempre. Através de uma análise estatística de supernovas tipo Ia mostrou-se que modelos com aceleração transiente podem ser uma alternativa viável ao modelo  $\Lambda$ CDM. Ainda que o mecanismo de cancelamento a constante cosmológica "pura" seja totalmente fenomenológico, isso pode indicar algo mais profundo. Uma constante cosmológica total nula parece ser mais facilmente explicada do que um valor pequeno mas não nulo.

No geral, nossas conclusões acerca da possibilidade de uma aceleração transiente como um resultado de uma interação no setor escuro coincidem com a análise numérica de [40]. No entanto, uma solução analítica, mesmo que de um *toy model*, pode dar mais informações sobre o papel da interação na dinâmica do universo.

O principal problema dos modelos com interação é a escolha do termo de interação. Como

ainda não foi observado nada<sup>1</sup>, a escolha foi feita baseada no modelo que queríamos obter. Não procuramos nesse trabalho nenhuma justificativa física para o termo de interação, o que claramente é muito importante e deve ser buscado em trabalhos futuros seja na física de partículas ou em outro ramo. Além disso, é necessário aplicar a teoria de perturbações cosmológicas a esse modelo, a fim de comparar os resultados com as observações atuais. Mas isso está além do escopo desse trabalho, que é demonstrar que uma interação enriquece a dinâmica do universo e pode dar origem a fenômenos interessantes, sendo portanto uma alternativa viável ao modelo  $\Lambda$ CDM, que ainda é o modelo mais aceito apesar dos problemas já conhecidos.

---

<sup>1</sup>Como visto no capítulo 2, uma interação só terá efeito em terceira ordem no redshift, portanto pode ser que leve algum tempo até que tenhamos medidas confiáveis.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, A.Preuss Akad.Wiss.Berlin, *Sitzber*, 844 (1915)
- [2] A. Einstein, A.Preuss Akad.Wiss.Berlin, *Sitzber*, 142 (1915)
- [3] A. Friedmann, *Zeitschrift für Physik* **10**, 377 (1922)
- [4] A. Friedmann, *Zeitschrift für Physik* **21**, 326 (1924)
- [5] E. Hubble, *Proc.Nat.Acad.Sci. (USA)* **15**, 168 (1929)
- [6] G. Gamow, *Phys. Rev.* **70**,572 (1946)
- [7] A. Penzias, R. Wilson, *Astrophys.J.* **142**, 419 (1965)
- [8] A.G. Riess *et al.*, *Astron.J.* **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys.J.* **517**, 565 (1999)
- [9] M. Novello, J. Salim, *Phys. Rev. D* **20**, 377 (1979)
- [10] V.N. Melnikov, S.V. Orlov, *Phys. Lett. A* **70**, 263 (1979)
- [11] P.J.E. Peebles, B. Ratra, *Ap. J. Lett.* **325**, L17 (1988)
- [12] I. Slatev, L. Wang, P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999)
- [13] L.P. Chimento, A.S. Jakubi, D. Pavón, W. Zimdahl, *Phys. Rev. D***67**, 083513 (2003)
- [14] Paul J. Steinhardt, Limin Wang, Ivaylo Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999)
- [15] Ratra, B e Peebles, P.J.E., *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988)
- [16] P.J.E. Peebles e B. Ratra, *Rev.Mod.Phys.* **75**, 559 (2003)
- [17] P.G. Ferreira, e M. Joyce, *Phys.Rev.Lett.* **79**, 4740 (1997)
- [18] E.J. Copeland, A.R. Liddle, e D. Wands, *Phys.Rev.D***57**, 4686 (1998)
- [19] Varun Sahni e Limin Wang, *Phys.Rev.D***62** 103517 (2000)
- [20] Varun Sahni, *Lect.NotesPhys.* 653:141-180 (2004)



- [21] W.Zimdahl, D. Pavón, Gen.Rel.Grav. **36** 1483-1491 (2004)
- [22] W. Fischler, A. Kashani-Poor, R. McNees e S. Paban, JHEP **3**, 0107 (2001); S. Hellerman, N. Kaloper e L. Susskind, JHEP **3**, 0106 (2001); J.M. Cline, JHEP **35**, 0108 (2001)
- [23] E. Halyo, JHEP **25**, 0110 (2001); V. Sahni e Y. Shtanov, Int.J.Mod.Phys. **D11**, 1515 (2000)
- [24] F.C. Carvalho, J.S. Alcaniz, J.A.S. Lima and R. Silva, Phys.Rev.Lett. **97**, 081301 (2006); J. S. Alcaniz, R. Silva, F. C. Carvalho and Z. H. Zhu, Class. Quant. Grav. **26**, 105023 (2009)
- [25] F.E.M. Costa, Phys.Rev. **D82**, 103527 (2010)
- [26] M. Campista, B. Santos, J. Santos and J. S. Alcaniz, “Cosmological Consequences of Exponential Gravity in Palatini Formalism,”, arXiv:1012.3943
- [27] Nelson Pinto-Neto, Bernardo M.O. Fraga, Gen.Rel.Grav **23**, 1663-1674 (2008)
- [28] V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky, U. Alam, JETP. Lett. **77**:201-206 (2003)
- [29] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **302**, 668 (1988); *ibid.*, Astron. Astrophys. **301**, 321 (1995).
- [30] H. Mohseni Sadjadi, M. Honadoost, Phys.Lett.**B647**: 231-236 (2007)
- [31] A. Shafieloo, V. Sahni, e A.A. Starobinski, arXiv:0903.5141
- [32] J.S. Alcaniz and J.A.S. Lima, Phys.Rev. **D72**, 063516 (2005)
- [33] D. Pavón, Bin Wang, Gen. Rel. Grav. **41**, 1 (2009)
- [34] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon e W. Zimdahl, Phys. Rev. D **67** 083513 (2003); W. Zimdahl, D. Pavon e L. P. Chimento, Phys.Lett. B **521**, 133 (2001)
- [35] L. Amendola, Phys. Rev. D **62**, 043511 (2000); L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev. D **64**, 043509 (2001); L. Amendola and C. Quercellini, Phys.Rev. D **68**, 023514 (2003)
- [36] M. Visser, Class.Quant.Grav. **21**:2603-2616 (2004)
- [37] R. Colistete Jr. e J.C. Fabris, Class.Quant.Grav. **22**, 2813 (2005)
- [38] A.G. Riess et al., Astrophys. J. **607**, 665(2004)
- [39] Julio C. Fabris, Bernardo Fraga, Nelson Pinto-Neto, Winfried Zimdahl, JCAP04 (2010) 008
- [40] F.E.M. Costa e J.S. Alcaniz, arXiv:0908.4251