

CBPF

**Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas**

Estudos de teoria quântica de campos
com comprimento fundamental

Dissertação apresentada ao
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
como parte dos requisitos necessários à
obtenção do título de mestre em Física.

Thiago Hartz Maia

Orientador: Prof. Dr. Itzhak Roditi

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Março de 2011

Resumo

Nesta dissertação, calculamos o potencial efetivo de Cornwall-Jackiw-Tomboulis (CJT) do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ a dois laços na aproximação de Hartree-Fock e mostramos que, sob certas condições de regularização, o potencial efetivo é renormalizável. Isso demonstra que a vulcanização proposta por Răzvan Gurău e colaboradores resolve o problema da não-renormalizabilidade do potencial efetivo CJT do modelo $\lambda\varphi^{*4}$.

Analisamos também a emissão espontânea de um átomo de hidrogênio na presença de um campo eletromagnético quantizado κ -deformado no estado de vácuo. Mostramos que a influência da deformação é muito pequena, e somente se torna considerável quando o comprimento $1/\kappa$ é da escala atômica.

Antes de apresentarmos tais resultados, delineamos um breve panorama da literatura sobre comprimento fundamental. Em seguida, apresentamos uma revisão da teoria quântica de campos em espaços-tempos não-comutativos construída a partir da quantização por deformação. Depois, deduzimos os seus principais resultados teóricos, tais como a mistura ultravioleta/infravermelho e a possibilidade de se restaurar a renormalizabilidade por meio de uma vulcanização.

Abstract

We compute the Cornwall-Jackiw-Tomboulis (CJT) effective potential for the $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ model in two-loop Hartree-Fock approximation. Then, we show the renormalizability of this model's CJT effective potential. This result shows that Gurau's vulcanization solves the non-renormalizability problem that happens in the CJT effective potential of the $\lambda\varphi^{*4}$ model.

We also compute the spontaneous rate emission of an hydrogen atom in a κ -deformed electromagnetic quantum vacuum. We show that the deformation influence is very small, and only plays an important role when the length $1/\kappa$ is comparable to the atomic size.

Before presenting these results, we review the noncommutative quantum field theory in the deformation quantization formalism, and we present its main results, including the ultraviolet/infrared mixing and the vulcanization process.

Dedico esta dissertação à minha mãe, Adriana Hartz,
e ao meu amigo Reinaldo Faria de Melo e Souza.
Sem o carinho, a dedicação, o incentivo, e a amizade
deles, esta dissertação nunca teria sido possível.

Agradecimentos

Durante os últimos anos, convivi com inúmeras pessoas admiráveis e não poderia deixar de agradecê-las aqui. Assim, agradeço...

Ao meu orientador, professor Itzhak Roditi, que me acolheu como orientando quando eu me encontrei sem saber para onde ir e o que fazer. Se não fosse por ele, muito provavelmente eu não estaria aqui defendendo uma dissertação. Agradeço pela sua atenção e paciência. Agradeço também por me incentivar a fazer física, mas ao mesmo tempo apoiar, de todas as formas possíveis, a minha decisão de ir para história da ciência. Muito obrigado!

Ao meu mestre e grande amigo, professor Carlos Farina, por tudo que me ensinou de física. A sua paixão pela física é uma das coisas mais bonitas e contagiantes que já vi! A importância que ele teve na minha formação e a profunda admiração que tenho por ele jamais poderiam ser expressadas nessas poucas linhas. Agradeço-o por ter aceitado participar da banca de defesa desta dissertação, e pelos inúmeros comentários e correções que fez a este texto.

Ao professor Marcus Venicius Cougo-Pinto, um dos maiores físicos que já conheci. Como admiro a sua precisão conceitual, caligráfica, vocabular, e matemática!

Ao professor José Abdalla Helayël-Neto, por ter me recebido de braços abertos no CBPF. Agradeço pelos magníficos cursos de teoria quântica de campos. Uma pessoa que eu sempre admirarei profundamente. Fico muito feliz por ter sido seu aluno! Agradeço-o também por ter aceitado participar da banca de defesa desta dissertação.

Aos meus professores no CBPF, em especial, aos professores Sebastião Alves Dias e Raul Vallejos, pelos excelentes cursos. Ao professor Eduardo Marino, por ter me ensinado mecânica quântica com tanta dedicação e paciência. Aos professores Cassio Neri e Felipe Acker. À professora Maria Lucia Guimarães pelas maravilhosas aulas, sempre tão motivantes! Ao professor Giovanni Lima dos Santos, por ter me incentivado a fazer física e me aconselhado todos esses anos. Aos professores Carlos Ziller Camenietzki, Cida Mota, e Renato Lemos. Ao professor Manoel Salgado Guimarães (*in memoriam*).

Ao professor Ivan Oliveira, por gerir tão atenciosamente a pós-graduação do CBPF. Ao pessoal da biblioteca do CBPF, em especial, à Edileuza, à Rosa, à Marina, e ao André. Aos meus colegas e amigos do CBPF: Mariana Rubet, Eduardo Bittencourt, Grasielle Santos, André Nicolai, Leonardo

Cirto, Habib Montoya, Boiúna, Cesar Raitz, e tantos outros. Ao CBPF como um todo.

Ao CNPq pela bolsa de mestrado.

Ao meu grande amigo Reinaldo Faria de Melo e Souza, com quem discuti diversas das questões aqui apresentadas. Ele leu muito cuidadosamente inúmeras versões preliminares deste texto, e dificilmente haveria dissertação se não fossem os seus comentários e seus incentivos. Sua argumentação precisa e sua grande abertura ao diálogo foram fundamentais para a escrita desta dissertação.

Aos membros do grupo de Efeito Casimir da UFRJ: Tarciro Mendes, Felipe Rosa, Fábio Pascoal, André Tenório, Bruno Mintz, Fabrício Barone, Márcio Taddei, Hector Okada, Wilton Kort-Kamp, e todos os demais. Em particular, ao professor Mario Junior de Oliveira Neves, a quem agradeço por ter me ensinado muitas coisas sobre teorias κ -deformadas, por ter aceitado participar da banca de defesa, e pelas diversas correções que fez ao texto da dissertação.

Ao meu amigo Roberto Machado Velho, que foi a primeira pessoa a me falar (há muitos anos atrás) de quantização por deformação. Ao pessoal do Tucumãs, em particular, Alexandre Bagdonas, Bruno L'Astorina, Victória Flório Andrade, e Osvaldo de Souza. Ao Rodolfo Petronio, ao Felipe Tovar Falciano, e ao Antonio Augusto Videira pelas conversas sobre David Bohm. Ao pessoal da minha turma de graduação, em especial, à Amanda Bastos, ao Kisney Almeida, ao André Borges, ao Marcos Brum, ao Vinicius Miranda Bragança, ao Gustavo Sophia, ao Daniel Micha, e ao Rodrigo Neumann. Quantas coisas aprendi com vocês! À Sonia Domont, ao Gilberto e à Solange! Ao pessoal do Cerne: Mainá Bittar, Marcelo Cardoso, Pedro Melo. À Graziela Lima. Ao Gustavo Rocha, ao Fábio Freitas, e ao Frederik dos Santos, que me ensinaram mecânica quântica quando eu achava que já sabia. E por terem me acolhido tão gentilmente na Bahia!

Aos meus amigos Tomaz Miranda, Letícia Reis, Gabriela Alcofra, Elisa Fish, Camila do Valle, Felipe Velloso, Diana Stephan, Gleice Meyer, Fábio Gondim Palazzo, Franey Nogueira, Vanessa Rosa, Paula Vieira Campos, Mariana Braga, Júlia Borges, Leonardo Bomfim, Rafaela Duccini, Marília Andries, Fernanda Drummond, e Daniel Terra. À Fernanda Fonseca, ao Jorge Saraiva, e à Tatiana Peixoto: por terem mantido, com humor, a minha sanidade mental nestes últimos meses! Aos meus amigos do IFCS: Gianriccardo Grassia Pastore, Carine Rebonatto, Fausto Ventura, Daniel Dutra, e Rômulo Wehling.

À minha família. À minha avó Marina, pelo seu amor e sua dedicação! Ao meu avô Hugo, à minha tia Isabela, ao meu primo André. Aos meus irmãos, Cláudia e Roberto, e ao nosso pai (*in memoriam*). E por fim, o maior dos agradecimentos. À minha mãe, por todo o amor e toda a dedicação, indizíveis neste papel. Obrigado, mãe!

Índice

Introdução	1
1 Panorama das teorias com comprimento fundamental	5
1.1 A análise dimensional e as escalas fundamentais	6
1.2 Especulações na mecânica quântica	8
1.3 As divergências da teoria quântica de campos	8
1.4 As propostas contemporâneas	10
2 A quantização por deformação	15
2.1 A mecânica quântica via quantização canônica	15
2.2 A quantização de Weyl	22
2.3 A mecânica quântica de Groenewold-Moyal	29
3 A teoria quântica de campos em espaços-tempos não-comutativos	47
3.1 A álgebra de Groenewold-Moyal dos campos	48
3.2 Teorias de campos em espaços-tempos não-comutativos	54
3.3 O problema da mistura ultravioleta/infravermelho	59
3.4 O modelo de Gurău e colaboradores	68
4 A renormalizabilidade do potencial efetivo CJT	75
4.1 Funcionais geradores, ação efetiva e potencial efetivo	76
4.2 O formalismo de Cornwall-Jackiw-Tomboulis	79
4.3 O potencial efetivo CJT no modelo $\lambda\varphi^4$	84

4.4	O potencial efetivo CJT no modelo $\lambda\varphi^{*4}$	92
4.5	O potencial efetivo CJT no modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$	100
5	Deformação κ e emissão espontânea	111
5.1	A emissão espontânea	112
5.2	A regra de ouro de Fermi	113
5.3	A eletrodinâmica quântica κ -deformada	115
5.4	Cálculo da emissão espontânea κ -deformada	116
	Conclusões e perspectivas	120
	Referências bibliográficas	121

Introdução

Nesta dissertação, analisaremos certos aspectos da inclusão, na teoria quântica de campos, de uma escala fundamental de comprimento. Duas teorias que implementam tal inclusão serão discutidas, a teoria quântica de campos em espaços-tempos com geometria não-comutativa canônica e a teoria quântica de campos com deformação κ na álgebra de Poincaré. Apresentaremos, no decorrer da dissertação, duas contribuições inéditas, as quais descreveremos brevemente a seguir.

Apresentação do primeiro problema

A teoria quântica de campos em espaços-tempos não-comutativos sofre de uma séria mazela, denominada *mistura ultravioleta/infravermelho*, a qual conduz à perda da renormalizabilidade. Ou seja, modelos que em um espaço-tempo ordinário (comutativo) são renormalizáveis passam a não mais sê-lo quando a geometria deste espaço-tempo é transformada em não-comutativa. A fim de restaurar a renormalizabilidade, faz-se necessário implementar, na lagrangiana, um processo denominado *vulcanização*. O primeiro problema que discutiremos está relacionado a essa questão.

A função geradora dos gráficos de Feynman irreduzíveis a duas partículas é denominada *ação efetiva de Cornwall-Jackiw-Tomboulis* (abreviada por CJT). Esta função desempenha um importante papel na teoria quântica de campos, em particular na teoria quântica de campos a temperatura finita. É sabido, há décadas, que esta função é renormalizável no caso de um campo escalar com interação do tipo $\lambda\phi^4$ em um espaço-tempo ordinário. No ano de 2003, Gianluca Mandanici estudou esta função no caso do modelo $\lambda\phi^4$

em um espaço-tempo com geometria não-comutativa canônica, e obteve que, neste caso, esta função é não-renormalizável. Este resultado é interessante pois mostra um exemplo concreto de como a renormalizabilidade é perdida devido à não-comutatividade do espaço-tempo. Nós mostraremos, no capítulo 4, que a renormalizabilidade desta função é restaurada pela vulcanização proposta, há cerca de dois anos, por Răzvan Gurău e colaboradores.

Apresentação do segundo problema

O segundo resultado que apresentaremos nesta dissertação tem como tema a deformação κ na álgebra de Poincaré. Uma mudança nas simetrias do espaço-tempo altera as propriedades dos campos sobre ele definidos, alterando assim os fenômenos de interação dos campos com a matéria. Esta mudança nos fenômenos não pode ser maior do que certo limite, caso contrário criaria discrepâncias entre teoria e experimento onde anteriormente, na teoria sem deformação, não havia. Nos últimos anos, este tipo de raciocínio tem sido utilizado para impor cotas às deformações na simetria de Poincaré. No capítulo 5, seguiremos este programa teórico, buscando utilizar a emissão espontânea do átomo de hidrogênio para restringir os valores possíveis da constante κ . Com este intuito, deduziremos a expressão da emissão espontânea κ -deformada e, levando em conta as incertezas experimentais do fenômeno, imporemos uma cota, extremamente modesta, ao parâmetro κ . Apesar de não termos obtido uma boa cota, esta análise serve como um primeiro estudo da interação de sistemas atômicos com o campo eletromagnético κ -deformado. Assim, temos, com esta conta, o intuito, como diria Niels Bohr, não de criticar, mas de aprender [1].

Demais aspectos discutidos nesta dissertação

Antes de apresentarmos tais resultados, revisaremos alguns formalismos teóricos, com o intuito de fornecermos os subsídios necessários para formularmos e discutirmos, nos capítulos 4 e 5, estes dois problemas. Esta revisão será feita nos três primeiros capítulos, os quais descreveremos brevemente a seguir.

O primeiro capítulo apresentará um panorama geral das tentativas de se incluir um compromisso fundamental nas teorias físicas. Esta apresentação será bastante sucinta e não terá

nenhuma pretensão de ser exaustiva. Neste capítulo, definiremos notações, esclareceremos conceitos, apresentaremos motivações físicas, discutiremos experimentos, e revisaremos a literatura. Apesar do caráter introdutório, este capítulo não deve ser visto como um mero prolegômeno ao resto da dissertação. Nele, muitas questões centrais serão apresentadas, e muitas não serão posteriormente retomadas. O intuito é que tal apresentação sirva para mostrar como são ricas as possibilidades de inclusão de um comprimento fundamental na física, e como foram, e continuam sendo, numerosas as tentativas de fazê-lo.

O segundo capítulo apresentará uma breve exposição da quantização por deformação. Iremos nos deter ao caso da mecânica quântica, a partir da qual explicaremos o processo de quantização de Hermann Weyl, e mostraremos como ele foi posteriormente reinterpretado por Hilbrand Groenewold, José Enrique Moyal, entre outros. Depois, definiremos o produto \star e explicaremos o que vem a ser quantização por deformação. Durante este desenvolvimento, apresentaremos, passo a passo, como a mecânica quântica foi sendo alterada. Ao final desta construção, obteremos uma mecânica quântica na qual a cinemática e a dinâmica, independentemente de espaços de Hilbert, se passam inteiramente no espaço de fase, o qual tem sua álgebra de funções deformada pela quantização. Esta formulação da mecânica quântica é muito elegante e, infelizmente, pouco valorizada nos livros-texto.

A partir dos desenvolvimentos matemáticos e conceituais do segundo capítulo, explicaremos, no capítulo seguinte, como formular uma teoria de campos em um espaço-tempo com geometria não-comutativa. Partindo da relação de comutação espaço-temporal canônica, utilizaremos a quantização de Weyl para deduzir o produto \star entre campos. Em seguida, quantizaremos a teoria e obteremos as regras de Feynman do modelo $\lambda\phi^{*4}$. Por fim, exporemos o problema da mistura ultravioleta/infravermelho e mostraremos como este é solucionado por meio da vulcanização proposta por Gurău e colaboradores.

Acerca das notações e convenções adotadas nesta dissertação

Nas discussões sobre teoria quântica de campos em espaços-tempos não-comutativos, adotamos, por convenção da literatura do tema, a métrica euclidiana. Já nas discussões

sobre deformação κ , adotamos a métrica de Minkowski com assinatura $(+, -, -, -)$.

As coordenadas canônicas de uma partícula são denotadas por q e p , ao passo que as coordenadas do espaço-tempo são denotadas por x . Operadores são escritos em gótico (por exemplo, \mathfrak{p} , \mathfrak{q} , \mathfrak{r}). Índices gregos vão de 0 a 3 e índices latinos vão de 1 a n . F_i designa uma quantidade finita cujo valor exato não nos interessa saber. Salvo menção contrária, as integrais vão de $-\infty$ a $+\infty$. No capítulo 2, onde os somatórios mudam diversas vezes de índices, todos são explicitados. Já no capítulo 4, optamos por omití-los quando se trata de um produto escalar, de tal modo que xp designa o produto escalar de x por p .

Acerca das referências bibliográficas

As referências bibliográficas são apresentadas na forma [número] e remetem o leitor a uma lista compilada ao final da dissertação. Vale observar que esta lista inclui comentários e, portanto, faz parte integrante da dissertação, devendo ser consultada para maiores esclarecimentos acerca das afirmações feitas no texto principal.

Nota sobre autoria, supervisões e colaborações

O resultado do capítulo 4 foi desenvolvido em colaboração com o meu orientador, professor Itzhak Roditi. O resultado do capítulo 5 foi desenvolvido em colaboração com os professores Carlos Farina, Marcus Venicius Cougo Pinto, e Mario Junior Neves. Salvo menção contrária, todos os cálculos apresentados nestes capítulos foram realizados pelo autor desta dissertação.

Os três primeiros capítulos são textos de revisão, de tal modo que todas as ideias neles apresentadas já eram conhecidas na literatura. Entretanto, estes capítulos se propõem a organizar as ideias, compilar referências bibliográficas, e esmiuçar certas contas que não são detalhadas nesta literatura. Assim, a exposição presente nestes capítulos, em particular no capítulo 2, difere bastante dos textos existentes na literatura atual sobre o tema.

Capítulo 1

Panorama das teorias com comprimento fundamental

Pode ser interessante incluímos, nas atuais teorias físicas, um comprimento fundamental. Esta é a idéia central desta dissertação, em torno da qual orbitam todas as discussões que serão apresentadas. O modo como tal inclusão deve ser feita, bem como os motivos para fazê-la, não é de modo algum consensual. Diferentes propostas foram apresentadas e debatidas, por vezes acirradamente, no decorrer dos últimos cento e trinta anos. Neste primeiro capítulo, apresentaremos um breve panorama destes debates.

As primeiras tentativas remontam ao final do século XIX, tendo ocorrido em meio ao florescimento da análise dimensional. A ideia de um comprimento fundamental está, hoje em dia, alicerçada em muito mais do que meros argumentos dimensionais, porém muitas de suas defesas atuais – por exemplo, na gravitação quântica – utilizam, como cerne da argumentação, aspectos desta natureza. Portanto, é interessante começarmos a nossa apresentação pelas discussões relacionadas à análise dimensional.

1.1 A análise dimensional e as escalas fundamentais

A análise dimensional surgiu na segunda metade do século XVIII, mas foi somente um século depois que ela foi amplamente difundida. O importante matemático francês Joseph Bertrand escreveu, em 1878, as seguintes palavras:

A unidade de comprimento, a unidade de tempo, e a unidade de força são arbitrárias e independentes; mas quando nós as escolhemos, todas as outras estão interligadas (...) Quando uma [nova] fórmula é obtida, constatamos que ela é [dimensionalmente] homogênea. (...) Esta é (...) uma condição imposta *a priori*, pela homogeneidade das fórmulas ainda desconhecidas. Mais de uma lei física pode ser deduzida [a partir deste raciocínio], obtendo assim a mais simples e mais rigorosa demonstração. [2]

Em oposição a esta ideia de que as unidades são arbitrárias, o físico irlandês George Stoney propôs a existência de unidades preferenciais, as quais denominou *unidades da natureza* [3]. A proposta de Stone passou completamente despercebida, até que Max Planck passou a defendê-la (possivelmente, sem conhecer os trabalhos de Stone).

As unidades naturais de Max Planck

Planck, em seus trabalhos do final do século XIX, conjecturou diversas novas constantes fundamentais. A mais famosa delas é a sua constante h , a qual foi proposta em 1900. Outra menos conhecida é a constante b , proposta em 1899.¹ A partir desta quantidade b , ele definiu certas unidades, que ele denominou *unidades naturais de medida* [4].

Uma vez que b não podia ser escrita como uma combinação de G e c , Planck argumentou que esta nova constante permitia, por meio de uma combinação do tipo $c^x G^y b^z$, estabelecer qualquer unidade dimensional. Assim, ele sugeriu que fossem criadas três unidades específicas – de comprimento, massa e tempo –, as quais estabelecem um conjunto de *unidades naturais de medida*. A escala física associada a estas quantidades veio

¹No ano seguinte, no seu famoso artigo de 1900, Planck renomeou a constante b de h , a qual veio a se tornar posteriormente o selo da mecânica quântica. Vale ressaltar que, quando esta constante b foi proposta em 1899, ela não tinha nenhum significado quântico, tendo servido somente para auxiliar no ajuste dos dados da Lei de Wien.

a ser denominada, em sua homenagem, de *escala de Planck*. Estas unidades são

$$\ell_p := \sqrt{\frac{bG}{c^3}} = 4,13 \times 10^{-33} \text{ cm}$$

$$m_p := \sqrt{\frac{bc}{G}} = 5,56 \times 10^{-5} \text{ g}$$

$$t_p := \sqrt{\frac{bG}{c^5}} = 1,38 \times 10^{-43} \text{ s}$$

Segundo ele, estas quantidades estabeleciam um novo padrão de unidade, que, em oposição à arbitrariedade dos sistemas de medição convencionais, era universal. Nas suas palavras,

[Os sistemas ordinários de medida não são] necessários para todos os lugares e tempos, [sendo determinados] somente pelas necessidades especiais de nossa cultura terrestre. (...) [Com a constante b , pode-se estabelecer novas] unidades de comprimento, massa, tempo, temperatura que, independentemente de corpos e substâncias específicas, teriam necessariamente significado para todos os tempos e culturas, mesmo para aquelas extraterrestres e não-humanas, unidades estas que podem, portanto, ser designadas como unidades naturais de medida. [5]

A universalidade deste novo sistema de unidades era, para Planck, um reflexo da universalidade da radiação de corpo negro. Deste modo, surgiu a idéia de um *comprimento fundamental*. Esta especulação de Planck recebeu, à época, pouco suporte, e acabou no ostracismo.

É interessante observar que, hoje em dia, este argumento é bastante difundido na comunidade de gravitação quântica. Poderíamos rephraseá-lo assim: uma teoria que inclui c , G e h tem, necessariamente, uma escala fundamental de comprimento dada por $\sqrt{hG/c^3}$.

Vale observar também que, assim como pode haver corpos com massa menor que m_p , pode haver, a partir desta argumentação, comprimentos menores que ℓ_p . Ou seja, esta argumentação não implica, por si só, no fato de ℓ_p ser um comprimento mínimo.

1.2 Especulações na mecânica quântica

Durante muitos anos, a idéia de um comprimento fundamental (tanto espacial como temporal) foi posta à margem dos principais desenvolvimentos da física. O que de modo algum significa que não tenham sido publicados trabalhos sobre o tema. Em meio a estes desenvolvimentos, surgiu a argumentação de que as escalas fundamentais são mínimas. Não há espaço para apresentarmos aqui estes trabalhos, muitos dos quais são extremamente interessantes [6]. Entretanto, há um que merece ser brevemente mencionado.

Henri Poincaré, em 1912, ao analisar as implicações da nova física quântica, afirmou:

É preciso nos dar conta das consequências que [a mecânica quântica] acarreta. (...) [Se ela estiver correta,] o Universo saltaria bruscamente de um estado para outro, mas, no intervalo, permaneceria imóvel, e os diversos instantes durante os quais permanecesse no mesmo estado não mais poderiam ser discernidos uns dos outros; chegaríamos, assim, à variação descontínua do tempo, ao *átomo de tempo*. [7]

Ou seja, Poincaré fundamenta, a partir do conceito de transição quântica, a idéia de uma duração de tempo mínima. Muitos outros físicos, por motivos diversos, apresentaram argumentações semelhantes a esta. Edmund Whittaker, em 1949, disse, em uma bela metáfora, que o que estava em jogo para tais físicos era o *cinema da existência* [8].

1.3 As divergências da teoria quântica de campos

Apesar das interessantes argumentações apresentadas no âmbito da mecânica quântica, foi somente na teoria quântica de campos que a idéia de um comprimento fundamental se tornou realmente importante. Isto ocorreu pois muitos físicos acreditavam que seria possível, por meio da inclusão de um comprimento fundamental, eliminar os infinitos que acomediam esta teoria. Mencionaremos, a seguir, três destes trabalhos.

Em 1936, Arthur March propôs que em vez de se incluir diretamente um comprimento fundamental na teoria quântica de campos, ele fosse incluído na geometria. Assim, March alterou a métrica do espaço-tempo, incluindo um comprimento fundamental, e então cons-

truiu, neste novo espaço-tempo, uma teoria quântica de campos. No limite em que o comprimento fundamental tendia a zero, a sua métrica recaía na métrica usual. March foi capaz de obter um valor finito para a auto-energia do elétron na eletrodinâmica quântica de Heisenberg-Pauli, porém a sua teoria não foi bem recebida à época [9].

Em 1938, Heisenberg publicou uma enfática defesa da inclusão de um comprimento fundamental nas teorias físicas, buscando expor todos os problemas que esta inclusão poderia resolver. Ele defende, entre outras coisas, que seria possível, com uma escala de comprimento, prever a massa das partículas elementares, de modo análogo ao papel desempenhado pela constante de Rydberg na determinação das energias possíveis do átomo de Hidrogênio. Com isso, as massas deixariam de ser parâmetros livres da teoria, e passariam a ser por ela preditas [10].

Em 1947, Hartland Snyder buscou resolver o problema dos infinitos por meio de uma dissolução dos pontos do espaço-tempo. Uma vez que as divergências da teoria quântica de campos têm sua origem no caráter pontual das interações, ele argumenta que se a teoria não tivesse pontos bem definidos, então não haveria quantidades infinitas. Assim, ele quantizou as coordenadas do espaço-tempo e postulou relações de incerteza entre elas. Deste modo, ao se determinar com precisão o valor de uma coordenada, o valor da outra passa a ser desconhecido e, então, nunca seria possível se conhecer com total precisão as três coordenadas simultaneamente, sendo, por fim, impossível se falar de pontos [11].

Estas três ideias – deformação da geometria, predição do espectro de massas da teoria, e não-comutatividade espaço-temporal – são ideias centrais nas atuais teorias quânticas de campos com comprimento fundamental, conforme veremos mais adiante.

No final da década seguinte, com o advento dos procedimentos de renormalização, os infinitos da teoria quântica de campos foram reinterpretados, e as teorias com comprimento fundamental perderam a sua principal motivação de então. Assim, tais teorias passaram muitos anos no esquecimento, até serem retomadas na década de 1980.²

²Seria interessante mencionar aqui os trabalhos de gravitação quântica de Lev Landau, Oskar Klein, John Wheeler, Richard Arnowitt, Stanley Deser, Charles Misner, Bryce DeWitt, Roger Penrose, entre outros, que mantiveram em debate a idéia de que na gravitação quântica é fundamental o aparecimento de uma escala fundamental de comprimento e de tempo. Entretanto, não há espaço

1.4 As propostas contemporâneas

No início da década de 1980, o matemático francês Alain Connes elaborou um sofisticado programa teórico. Expliquemos, brevemente, a sua proposta. Dado um espaço topológico compacto, é sabido que podemos construir naturalmente uma C^* -álgebra comutativa com unidade, a saber, a álgebra de funções complexas sobre este espaço. Israel Gelfand mostrou que a volta é possível. Ou seja, que toda C^* -álgebra com unidade é a C^* -álgebra associada a algum espaço topológico compacto. Connes se propôs, então, a mapear todos os conceitos geométricos em termos algébricos, e depois enfraquecer a exigência da comutatividade da C^* -álgebra. A C^* -álgebra não-comutativa assim obtida não está associada a nenhum espaço topológico. Diz-se que esta álgebra está associada a um espaço não-comutativo, o qual na verdade não-existe. Foge ao escopo desta dissertação discutir a obra de Connes. O que nos interessa é saber os resultados que ele obteve a partir do raciocínio acima. Ele foi capaz de construir, neste formalismo, o modelo padrão de partículas elementares e deduzir o espectro de massa dos férmions. Nesta dedução, um papel central é desempenhado por um comprimento fundamental, da ordem de 10^{-16} cm [12]. Em certo sentido, podemos dizer que Connes conseguiu realizar de maneira satisfatória os projetos de Heisenberg e de Snyder. Após os trabalhos de Connes, a geometria não-comutativa tornou-se uma área muito importante de pesquisa. Não lidaremos, nesta dissertação, com o formalismo de Connes, mas sim com outros formalismos correlatos.

Tanto o formalismo da geometria não-comutativa de Connes como também os formalismos que discutiremos a seguir são vistos, na literatura contemporânea, como regimes efetivos de uma teoria de gravitação quântica ainda desconhecida. Trata-se de uma atitude pragmática: trabalhar com teorias não muito pretenciosas que incluam um comprimento fundamental, pensando-as como um regime efetivo de uma teoria fundamental que um dia pode vir a ser encontrada. Em certo sentido, esta nossa atitude – incluir um comprimento fundamental e sondar qual papel ele pode desempenhar – é uma variante contemporânea da fala de Bertrand acerca da exploração dimensional das fórmulas ainda desconhecidas.

para incluímos aqui tais discussões.

A teoria de campos em espaços-tempos não-comutativos

Seguindo Snyder, um caminho possível é quantizar as coordenadas do espaço tempo, transformando-as em operadores hermitianos,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) .$$

Em seguida, faz-se necessário impor relações de comutação entre tais operadores. Na mecânica quântica, os comutadores vêm dos parênteses de Poisson. Neste caso aqui não há parênteses de Poisson a serem quantizados e, portanto, o comutador deve ser imposto por alguma motivação física [13]. Um modelo particularmente interessante é a dita não-comutatividade canônica, caracterizada pelas relações de comutação

$$[\mathfrak{x}_\mu, \mathfrak{x}_\nu] = i \Theta_{\mu\nu} \mathbb{1} , \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 . \quad (1.1)$$

onde $\Theta_{\mu\nu}$ é um elemento constante de uma matriz $n \times n$, onde n é a dimensão do espaço-tempo. Pela antissimetria do comutador, deduz-se que Θ é uma matriz antissimétrica. Aplicando a conjugação hermitiana na igualdade acima deduz-se que Θ é real. Toda matriz real antissimétrica tem subespaços invariantes de dimensão 1 ou 2 [14]. Pode-se mostrar que se n for ímpar, Θ tem um autovalor zero. Assim, por uma transformação de coordenadas, uma das entradas diagonais pode vir a ser igual a zero, e com isso uma das coordenadas pode se tornar comutativa.

Durante muito tempo achou-se que teorias quânticas de campo em espaços-tempos com as relações de comutação acima eram não-unitárias se a coordenada temporal fosse não-comutativa. Por isso, passou a ser habitual na literatura fazer as contas em $(2+1)$ dimensões e colocar o tempo como coordenada comutativa. Hoje sabemos que esse resultado acerca da unitariedade estava errado, pois havia uma sutileza na definição do ordenamento normal. Deste modo, a coordenada temporal pode ser não-comutativa sem com isso levar a uma perda na unitariedade [15].

Nesta dissertação, lidaremos sempre com sistemas em $(3+1)$ dimensões. Neste caso,

a matriz Θ pode ser posta na forma

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix},$$

onde θ é uma escala fundamental de comprimento ao quadrado.

Há duas motivações físicas para utilizarmos as relações de comutação (1.1) [16]. A primeira é o fato deste tipo de relação aparecer entre as coordenadas de posição do elétron no efeito Hall quântico. É importante se observar as diferenças entre este sistema (coordenadas canônicas de um elétron no efeito Hall quântico) e o sistema que discutiremos nos capítulos 3 e 4 desta dissertação (campo escalar em um espaço-tempo não-comutativo). Um lida com os comutadores das coordenadas de uma partícula, ao passo que o outro lida com os comutadores das próprias coordenadas do espaço-tempo [17]. Se por um lado o efeito Hall não serve de justificativa para as relações (1.1), ao menos serve de motivador.

A segunda motivação para tais coordenadas é muito mais relevante, e pode ser entendida como uma situação em certo sentido análoga ao efeito Hall. Pode-se mostrar que na dinâmica de cordas bosônicas em um espaço euclidiano na presença de um campo de rank 2 de Neveu-Schwarz constante (que cumpre o papel do campo magnético no efeito Hall), as coordenadas dos extremos das cordas satisfazem relações de comutação do tipo (1.1) [18].

Conforme veremos no capítulo 3, a teoria não comutativa de campos contraria a expectativa inicial acerca da renormalizabilidade: a não-comutatividade não apenas não resolve o problema dos infinitos da teoria quântica de campos, como também cria novos gráficos não-renormalizáveis. Ou seja, a inclusão de uma não-comutatividade espaço-temporal na teoria quântica de campos conduz a uma piora na renormalizabilidade da teoria.

A deformação κ na álgebra de Poincaré

Uma outra abordagem à inclusão de um comprimento fundamental é considerar relações de dispersão deformadas, e analisar as implicações destas deformações à teoria quântica de campos. Nesta dissertação estaremos interessados (no capítulo 5) em uma relação de dispersão específica, chamada relação de dispersão κ -deformada. Esta relação aparece a partir da chamada álgebra de Poincaré κ -deformada.

Os geradores P , \mathbf{J} e \mathbf{K} da álgebra de Poincaré satisfazem as relações

$$\begin{aligned} [P^i, P^j] &= 0 & [P^i, P^0] &= 0 & [J^i, P^0] &= 0 & [K^i, P^0] &= iP^i \\ [J^i, J^j] &= i \epsilon^{ijk} J_k & [J^i, P^j] &= i \epsilon^{ijk} P_k & [J^i, K^j] &= -i \epsilon^{ijk} K_k \\ [K^i, K^j] &= -i \epsilon^{ijk} J_k & [K^i, P^j] &= i \delta^{ij} P^0 \end{aligned}$$

A deformação κ consiste em alterar as duas últimas relações,

$$\begin{aligned} [K^i, K^j] &= -i \epsilon^{ijk} J_k \xrightarrow{\text{def. } \kappa} -i \epsilon^{ijk} \left(J_k \cosh \frac{P^0}{\kappa} - \frac{P_k}{4\kappa^2} P^m J_m \right) \\ [K^i, P^j] &= i \delta^{ij} P^0 \xrightarrow{\text{def. } \kappa} i \delta^{ij} \kappa \sinh \frac{P^0}{\kappa} \end{aligned}$$

Esta substituição corresponde a efetuar uma deformação de Drinfeld-Jimbo na álgebra de Poincaré. Por motivos matemáticos que não vem ao caso pormenorizarmos aqui, esta deformação não pode ser feita diretamente na álgebra de Poincaré. O caminho usual é efetuar uma deformação de Drinfeld-Jimbo na álgebra de anti-de Sitter $\mathfrak{o}(3, 2)$ e então efetuar uma contração de Wigner-Inonu [19]. O primeiro invariante de Casimir (ou seja, o elemento que comuta com todos os geradores) da álgebra de Poincaré κ -deformada é

$$C_1 := \mathbf{P}^2 - \left(\frac{1}{q} \sinh(qP^0) \right)^2$$

onde definimos $q := \frac{1}{2\kappa}$, que cumpre o papel de comprimento fundamental. Nas representações irredutíveis da álgebra de κ -Poincaré, o invariante de Casimir é um múltiplo da

identidade. Assim, escrevemos

$$C_1 = -m^2 \implies \left(\frac{1}{q} \sinh(q p_0) \right)^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 .$$

Logo, a relação de dispersão desta teoria é $\omega(\mathbf{p}) = \frac{1}{q} \sinh^{-1} \left(q \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right)$. Passando para o espaço de posição, vemos que a derivada espacial não é alterada e a derivada temporal é deformada segundo a transformação

$$\partial_i \longmapsto \partial_i \quad , \quad \partial_0 \longmapsto \partial_q := \frac{1}{q} \sinh(q \partial_0)$$

Assim, a equação de Klein-Gordon de um campo escalar real ϕ , por exemplo, se escreve

$$\left(\nabla^2 - \partial_q^2 - m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, x_0) = 0 .$$

A teoria quântica de campos obtida a partir desta deformação é extremamente rica de fenômenos interessantes. Por exemplo, o vácuo confinado cria espontaneamente partículas [20], o modelo $\lambda\phi^4$ é naturalmente regularizado (tal qual desejavam os físicos da década de 1930) [21], há uma perda na distinção passado futuro na escala de Planck [22], etc. É um tanto surpreendente que uma simples alteração na relação de dispersão, incluindo nela um comprimento fundamental, seja capaz de proporcionar efeitos tão interessantes.

Capítulo 2

A quantização por deformação

Neste capítulo, apresentaremos dois procedimentos de formulação de uma teoria quântica: a quantização canônica (seção 2.1) e a quantização de Weyl (seção 2.2). A primeira destas quantizações é comumente apresentada nos livros didáticos de mecânica quântica, ao passo que a segunda, apesar de ser muito mais interessante, é raramente mencionada. Em seguida, mostraremos como a quantização de Weyl permite-nos formular a mecânica quântica no espaço de fase, sem ser necessário fazermos qualquer menção a espaços de Hilbert (seção 2.3). Isso nos levará à deformação de Groenewold-Moyal na álgebra de funções definidas no espaço de fase. Esta deformação serve de paradigma da chamada *quantização por deformação*, permitindo-nos erigir uma nova compreensão acerca do que vem a ser quantizar um sistema físico.

2.1 A mecânica quântica via quantização canônica

Nesta seção, discutiremos o procedimento de obtenção de um sistema quântico por meio da chamada quantização canônica. Por motivos que ficarão claros mais à frente, separaremos nossa discussão sobre a mecânica quântica em três partes – as quais denominamos, respectivamente, protomecânica, cinemática, e dinâmica.

Apesar de elementares, as discussões da presente seção são imprescindíveis, pois iremos, nas seções seguintes, pouco a pouco, alterando a forma com que a mecânica quântica é vista, e por isso é fundamental estabelecermos inicialmente uma compreensão básica de como o formalismo da mecânica quântica se organiza.

A protomecânica quântica

Todo sistema quântico é obtido a partir de um dado sistema clássico [23]. Este processo de transformação de um sistema clássico em um correspondente sistema quântico é denominado *quantização*. Existem diversos meios de realizá-la, sendo o mais famoso a chamada quantização canônica [24]. Nesta, as grandezas dinâmicas do sistema clássico são transformadas em operadores hermitianos que satisfazem determinadas relações de comutação [25].

Para uma partícula movendo-se em uma dimensão, as duas variáveis dinâmicas relevantes são a coordenada de posição q e o momento canonicamente conjugado p . A quantização canônica corresponde, neste caso, a efetuar as transformações:

$$q \longmapsto \mathfrak{q} \quad \text{e} \quad p \longmapsto \mathfrak{p} ,$$

sendo que o comutador dos operadores \mathfrak{q} e \mathfrak{p} satisfaz a igualdade $[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}] = i\hbar \mathbb{1}$, onde $\mathbb{1}$ é o operador identidade. Essa quantização das variáveis dinâmicas conduz, naturalmente, a uma quantização da função hamiltoniana,

$$H \longmapsto \mathfrak{H} .$$

Este operador é obtido por meio de uma simples substituição de q por \mathfrak{q} e de p por \mathfrak{p} , preservando-se a forma funcional. Por exemplo, no caso do oscilador harmônico não-relativístico unidimensional,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad \longmapsto \quad \mathfrak{H}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \frac{\mathfrak{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathfrak{q}^2 .$$

Do mesmo modo que foi construído o operador hamiltoniano, podemos construir, como

função de q e p , outros operadores \mathcal{O} . Estes devem ser obtidos a partir de funções clássicas O , as quais denominamos observáveis do sistema físico (tais como: a posição, o momento linear, o momento angular etc) [26]. Todos os operadores assim obtidos são hermitianos.

De posse dos objetos matemáticos descritos até aqui, é possível (i) obtermos um sistema quântico a partir de um dado sistema clássico e (ii) especificarmos os operadores que representam quanticamente os seus observáveis. Não se trata ainda de uma cinemática e nem tampouco de uma dinâmica; mas sim de algo que as precede, que poderíamos denominar *protomecânica quântica* [27].

A cinemática quântica

A *cinemática* é a parte da mecânica que descreve a evolução temporal dos sistemas. Isso significa, em termos práticos, que há algo que caracteriza *completamente* o sistema, que evolui temporalmente, e que pode ter sua evolução descrita matematicamente. Esse algo chama-se *estado do sistema*. Ele corresponde, na mecânica clássica, a um ponto (q, p) no espaço de fase, ao passo que na mecânica quântica, corresponde a um elemento de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . A obtenção deste espaço \mathcal{H} é realizada do seguinte modo. Por simplicidade, deter-nos-emos ao movimento unidimensional de uma partícula de spin zero.

Consideramos, de modo *ad hoc*, o operador \hat{q} como sendo o único elemento de um conjunto completo de operadores hermitianos que comutam. Neste caso, o conjunto de auto-vetores normalizados de \hat{q} , a saber

$$\left\{ |q\rangle \in \mathcal{H} \mid \hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \langle q|q\rangle = 1 \right\},$$

é um conjunto ortonormal completo, formando, portanto, uma base. A partir desta, geramos, construtivamente, um espaço de Hilbert abstrato. Por fim, identificamos este espaço de Hilbert com o espaço de Hilbert \mathcal{H} dos *estados do sistema quântico*.

Caso o sistema seja preparado em uma mistura estatística de autovetores de um opera-

dor \mathfrak{D} de autovalores o_n , o estado do sistema é descrito por meio do operador densidade

$$\mathfrak{d} = \sum_n p_n |o_n\rangle\langle o_n| ,$$

onde p_n são as probabilidades de mistura associadas a cada um dos estados $|o_n\rangle$, as quais satisfazem $\sum_n p_n = 1$. Se $p_i = 1$ para algum i , o estado é dito puro.

Uma vez estabelecida uma representação matemática dos estados possíveis do sistema, criemos um mapa que os descreva como função do tempo, implementando assim uma cinemática:

$$\begin{aligned} \psi &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H} \\ t &\longmapsto \psi(t) . \end{aligned}$$

Na mecânica quântica não há uma correspondência imediata entre quantidades cinemáticas e as determinações de tais quantidades. Faz-se necessário incluir na descrição teórica um procedimento que permita efetuar tal determinação. Isso é feito de modo estatístico. Se o sistema está no estado $|\psi\rangle$, o valor esperado $\langle \mathfrak{D} \rangle$ de medição do observável O é dado por

$$\langle \mathfrak{D} \rangle := \langle \psi | \mathfrak{D} | \psi \rangle .$$

Pode-se mostrar que a igualdade acima implica em (i) os únicos valores possíveis de uma medição de um observável O são os auto-valores do operador que o representa, e (ii) a probabilidade de encontrar o valor o_i é dada por $|\langle o_i | \psi \rangle|^2$ [28].

Assim, concluímos todo o aspecto descritivo do formalismo, ou seja, a cinemática.

A dinâmica quântica

A dinâmica é a parte da mecânica que tem como meta determinar a evolução temporal dos sistemas. Ou seja, dado um sistema, a sua vizinhança, e as suas interações, a dinâmica prevê como o estado do sistema evoluirá em função do tempo.

No caso de sistemas isolados, essa evolução é determinada por meio de uma equação, que denominaremos *equação dinâmica da teoria*. Na mecânica quântica não-relativística,

a equação dinâmica da teoria é a *equação de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathfrak{H}(t) |\psi(t)\rangle .$$

No caso do operador densidade \mathfrak{d} , esta equação se reescreve, equivalentemente, na forma

$$\frac{d\mathfrak{d}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathfrak{d}(t), \mathfrak{H}(t)] .$$

Caso saibamos qual é o estado do sistema em um instante qualquer, estas equações, por serem lineares e de primeira ordem na derivada temporal, têm soluções unívocas, e com isso, por meio de qualquer uma das duas, a evolução do estado do sistema é determinada.

Podemos definir um operador evolução $\mathfrak{U}(t)$ — o qual é unitário, e satisfaz $\mathfrak{U}(0) = \mathbb{1}$ e $\mathfrak{U}(-t) = \mathfrak{U}^\dagger(t)$ — de tal modo que, se um sistema quântico encontra-se no estado $|\psi_0\rangle$ no instante $t = 0$, o estado do sistema em um tempo t genérico será dado por

$$|\psi(t)\rangle = \mathfrak{U}^\dagger(t) |\psi_0\rangle .$$

Ou, equivalentemente, se o estado inicial for o operador densidade \mathfrak{d}_0 , então

$$\mathfrak{d}(t) = \mathfrak{U}^\dagger(t) \mathfrak{d}_0 \mathfrak{U}(t) .$$

No caso de executarmos uma medição, o sistema, no exato instante em que ela for realizada, não estará mais isolado, e portanto não evoluirá segundo a equação dinâmica. Existe um grande debate acerca do que ocorre no instante da medição [29]. Na interpretação de John von Neumann, ocorre um colapso do estado do sistema, o qual é projetado na raia do autoestado¹ correspondente ao autovalor observado. Essa interpretação consta em grande parte dos livros-texto de mecânica quântica, entretanto ela é bastante ingênua, e até mesmo equivocada.

¹Para sermos mais precisos, deveríamos dizer o estado é projetado *no subespaço correspondente ao autovalor*. Mas, uma vez que no caso de uma partícula sem spin movendo-se unidirecionalmente este subespaço tem dimensão 1, ele corresponde à raia do autoestado, e portanto não há perda de generalidade ao empregarmos “raia do autoestado” em vez de “subespaço do autovalor medido”.

Uma vez que a mecânica quântica – tal qual entendida por Niels Bohr, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, Léon Rosenfeld etc – tem uma função *preditiva*, e não uma função *descritiva*, não se faz necessário explicar o que ocorre com a função de onda durante o ato de medição. Isso não era, para tais físicos, nem sequer um problema [30]. Na hora que se mede, o sistema está no autoestado medido, e isso não deve ser pensado como sendo uma mudança na realidade, mas sim uma atualização do conhecimento acerca do sistema. Ou seja, o correto é considerarmos que a dinâmica quântica – enquanto uma teoria voltada à determinação da evolução temporal do estado do sistema – tem como função prever *somente* a evolução do sistema livre, e não o ato da medição, o qual, por sua vez, deve ser abordado de modo pragmático.

Críticas ao formalismo padrão da mecânica quântica

O conjunto de ideias apresentado nesta seção 2.1. compõem, salvo pequenas variações, o formalismo da mecânica quântica exposto em praticamente todos os livros-texto sobre o assunto. Esta unanimidade deixa a entender que este é o único formalismo existente, ou até mesmo o único possível. Entretanto, existem muitas outras formulações da protomecânica (ou seja, da construção de sistemas quânticos a partir de sistemas clássicos), as quais levam a diferentes formulações da cinemática e da dinâmica quânticas. As razões devido às quais outros formalismos foram buscados podem ser divididas em dois grupos, um de cunho matemático e outro de cunho conceitual. Primeiramente, vejamos os aspectos matemáticos.

Os operadores q e p são operadores ilimitados [31]. Isso significa que a mecânica quântica precisa ser formulada por meio da análise funcional de operadores auto-adjuntos ilimitados, uma área extremamente complexa da matemática. Muitos teoremas ficaram décadas em aberto e, em meio a tais dificuldades, muitos físicos e matemáticos argumentaram que seria desejável poder formular a mecânica quântica por meio de um ferramental matemático mais elementar.

Ademais, a quantização canônica soa arbitrária, e parece não ser extensível ao caso de

espaços de fase não-euclidianos [32]. Conforme afirmou George Mackey,

Apesar de [a quantização canônica] ser simples e elegante, ela parece, em um primeiro momento, um tanto arbitrária e *ad hoc*. É difícil imaginar como alguém pode tê-la imaginado, e de modo algum parece óbvio como ela pode ser modificada de tal modo a ser útil em espaços diferentes do espaço euclidiano. [33]

Já no que se refere às críticas conceituais, podemos listar a complexidade de compreendermos como ocorre o limite quântico-clássico. Em outras palavras, há uma séria dificuldade na compreensão de como o princípio da correspondência é implementado no formalismo. A princípio, a mecânica clássica deveria ser obtida a partir da mecânica quântica no limite $\hbar \rightarrow 0$. Entretanto, esse limite não é nada elementar. Primeiro, pois diversas quantidades quânticas não são bem definidas nele. Segundo, pois é pouco intuitivo o modo como o espaço de Hilbert é reduzido ao espaço de fase clássico [34].

Na seção 2.3, apresentaremos uma abordagem alternativa à mecânica quântica. Esta outra abordagem – que tem sua origem nos trabalhos de Wigner, Groenewold, e Moyal que analisaremos – se passa toda no espaço de fase, sem fazer menção a espaços de Hilbert. Como consequência disso, o instrumental matemático é muito mais elementar e o limite quântico-clássico muito mais intuitivo. Para que possamos explicar essa abordagem alternativa, faz-se necessário, primeiramente, explicarmos a chamada quantização de Weyl. Isso será feito na próxima seção.

2.2 A quantização de Weyl

Nesta seção, apresentaremos um procedimento de quantização denominado *quantização de Weyl*. Ao contrário do que ocorre na quantização canônica – a qual se processa por meio de uma mera substituição, nas funções clássicas, de números por operadores –, a quantização de Weyl é uma operação matemática bem definida, com uma regra clara de correspondência entre funções clássicas e operadores quânticos. Por isso, o método de Weyl é mais robusto matematicamente que a quantização canônica, sendo capaz de lidar com muitos casos que esta não consegue. Ao fim, a quantização de Weyl conduz a uma completa reformulação da protomecânica quântica apresentada na seção 2.1.

Introdução à quantização de Weyl

Consideremos, do modo mais geral possível, um sistema clássico descrito por n variáveis, que denotaremos por a_1, a_2, \dots, a_n , as quais queremos que venham a ser quantizadas,

$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) .$$

No sistema discutido na seção anterior, por exemplo, tínhamos que estas variáveis eram as variáveis canônicas de um sistema unidimensional, ou seja, $n = 2$ e $(a_1, a_2) = (q, p)$.

Em 1927, Hermann Weyl desenvolveu um procedimento que permite obter, a partir da quantização destas variáveis a_i , uma regra geral por meio da qual é possível determinar a quantização de uma função f qualquer de tais variáveis [35]. A relevância deste resultado de Weyl não é imediatamente evidente, uma vez que o procedimento de quantização canônica, tal qual apresentado na última seção, parece ser capaz de efetuar a quantização de qualquer função f , tornando desnecessária a busca de um novo procedimento de quantização. Entretanto, há exemplos de funções f com os quais a quantização canônica não consegue lidar, fazendo-se necessário um procedimento de quantização mais robusto. Esta necessidade, conforme veremos, é suprida pelo formalismo de Weyl.

O problema da ordenação

Caso haja, na função f , algum produto das variáveis a_i , a quantização não pode ser realizada simplesmente por meio de uma substituição $a_i \mapsto \alpha_i$. Por exemplo, como deveríamos quantizar, no caso de uma partícula movendo-se no plano (q_1, q_2) , o quadrado do momento angular

$$L^2 = q_1^2 p_2^2 + q_2^2 p_1^2 + 2q_1 q_2 p_1 p_2 \quad ?$$

O resultado deveria ser $\mathcal{L}^2 = q_1^2 p_2^2 + q_2^2 p_1^2 - 2q_1 q_2 p_1 p_2$ ou $\mathcal{L}^2 = q_1^2 p_2^2 + q_2^2 p_1^2 - 2p_1 p_2 q_1 q_2$? Em outras palavras, qual a ordenação dos fatores que devemos considerar como sendo a ordenação correta? Uma vez que os operadores q_i e p_i não comutam, estas duas expressões são distintas, e faz-se necessário escolher qual delas representa corretamente o momento angular do sistema quantizado. Essa é a questão que discutiremos a seguir.

A escolha da ordenação

Suponhamos que, no caso de uma partícula movendo-se unidirecionalmente, queiramos quantizar $(p + q)^2$. Essa expressão é absolutamente simétrica na ordem de seus termos, a não tem nenhuma ambiguidade de definição. A quantização nos leva a $(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2$. Por outro lado, se seguíssemos mais adiante com a expressão não quantizada, teríamos $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Aparece, então, um produto de q e p , com o qual não sabemos lidar. Entretanto, sabemos que a resposta tem de ser a mesma obtida a partir do raciocínio anterior. Logo, o produto deve ser quantizado segundo

$$pq \mapsto \frac{1}{2}(pq + qp) .$$

Isso corresponde a uma ordenação simétrica. Motivado por este exemplo, passaremos a considerar a ordenação simétrica como sendo a ordenação correta. Ou seja, o momento angular do parágrafo anterior, ao ser quantizado, deve ser escrito na seguinte forma:

$$\mathcal{L}^2 = q_1^2 p_2^2 + q_2^2 p_1^2 - q_1 q_2 p_1 p_2 - p_1 p_2 q_1 q_2 .$$

Notação: denotaremos por $[abc]$ o ordenamento simétrico dos fatores $a, b, e c$. Ou seja,

$$[abc] := \frac{1}{6}(abc + acb + bac + cab + bca + cba) .$$

Assim, temos uma nova regra. Antes de quantizar a função f , devemos colocar na forma simétrica cada um dos termos que a compõem [36]. Suponhamos que a função f seja expansível em série de potências.² Neste caso, temos primeiramente que escrevê-la na forma

$$f(a_1, \dots, a_n) = C_0 + \sum_{k=1}^n C_k a_k + \sum_{k,l=1}^n C_{k,l} [a_k a_l] + \sum_{k,l,m=1}^n C_{k,l,m} [a_k a_l a_m] + \dots ,$$

onde os coeficientes – $C_{k,l}$, $C_{k,l,m}$ etc – são simétricos nos índices.³ Uma vez estando na forma simétrica, podemos proceder normalmente com a quantização canônica. Observemos que quantizar canonicamente a função f equivale a quantizar canonicamente cada um dos seus termos:

$$f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = C_0 \mathbb{1} + \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{a}_k + \sum_{k,l=1}^n C_{k,l} [\mathbf{a}_k \mathbf{a}_l] + \sum_{k,l,m=1}^n C_{k,l,m} [\mathbf{a}_k \mathbf{a}_l \mathbf{a}_m] + \dots .$$

Demonstração da quantização de Weyl

Tendo em vista este ponto, analisemos cada um dos termos separadamente. Observemos que a definição da exponencial em termos de série de potências,

$$\exp \left(i \sum_{s=1}^n k_s \mathbf{a}_s \right) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \left(\sum_{s=1}^n k_s \mathbf{a}_s \right)^m ,$$

fornece-nos uma expressão completamente simetrizada, em termos da qual podemos reescrever cada termo de f , que genericamente suporemos ser de ordem j , da seguinte forma:⁴

²Isso corresponde a exigir que função seja de classe C^∞ e que seu domínio seja simplesmente conexo.

³Suponhamos que não fossem simétricos. Neste caso, poderíamos decompô-los numa parte simétrica e numa parte antissimétrica. Por exemplo, $C_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{1,2} + C_{2,1}) + \frac{1}{2}(C_{1,2} - C_{2,1})$. A parte antissimétrica, quando contraída com $[a_1 a_2]$ daria zero, sendo portanto sem qualquer significado. Portanto, podemos tomar, sem perda de generalidade, os coeficientes como sendo simétricos.

⁴Salvo menção contrária, todas as integrais deste capítulo têm como limites de integração $-\infty$ e $+\infty$.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}_{i_1} \dots \mathbf{a}_{i_j}] &= (-i)^j \partial_{k_{i_1}} \dots \partial_{k_{i_j}} e^{i \sum_{s=1}^n k_s \mathbf{a}_s} \Big|_{k_1, k_2, \dots, k_n=0} \\
&= (-i)^j \int d^n k \delta^n(k) \left(\partial_{k_{i_1}} \dots \partial_{k_{i_j}} e^{i \sum_{s=1}^n k_s \mathbf{a}_s} \right) \\
&= (-i)^j (-1)^j \int d^n k \left(\partial_{k_{i_1}} \dots \partial_{k_{i_j}} \delta^n(k) \right) e^{i \sum_{s=1}^n k_s \mathbf{a}_s} \\
&= \int d^n k \left(\int d^n a a_{i_1} \dots a_{i_j} e^{-i \sum_{s=1}^n k_s a_s} \right) e^{i \sum_{s=1}^n k_s \mathbf{a}_s} \\
&= \int \int d^n k d^n a \left(a_{i_1} \dots a_{i_j} \right) e^{i \sum_{s=1}^n k_s (\mathbf{a}_s - a_s)} .
\end{aligned}$$

Tendo desenvolvido separadamente cada um dos termos, podemos agora reconstruir a função \mathfrak{f} . Uma vez que os coeficientes de \mathfrak{f} e de f são, por construção, iguais, o processo de reconstruir \mathfrak{f} implica, pela linearidade da integração, na reconstrução de f . Assim,

$$\mathfrak{f}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n a f(a_1, \dots, a_n) \exp \left(i \sum_{s=1}^n k_s (\mathbf{a}_s - a_s) \right) .$$

Podemos reescrever a igualdade acima na forma

$$\underbrace{\mathfrak{f}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)}_{\text{quântico}} = \int d^n a \Delta(\mathbf{a}, a) \underbrace{f(a_1, \dots, a_n)}_{\text{clássico}} ,$$

onde $\Delta(\mathbf{a}, a)$, cuja definição é evidente, é o núcleo da transformação. Obtivemos, portanto, uma integral que relaciona uma função clássica – por exemplo, a hamiltoniana do sistema clássico – com a sua contrapartida quântica. Trata-se, portanto, de um procedimento de quantização, o qual pode ser enunciado formalmente da seguinte maneira:

Definição (Quantização de Weyl) Quando as variáveis a_1, a_2, \dots, a_n de um dado sistema clássico são quantizadas segundo a regra $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, as funções f definidas sobre essas variáveis são imediatamente quantizadas. Esta quantização das funções f ocorre segundo o mapa de Weyl, $\mathfrak{W}: f \mapsto \mathfrak{f} = \mathfrak{W}[f]$, o qual é dado pela regra

$$\mathfrak{W}[f](\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n a \left(f(a_1, \dots, a_n) \right) \exp \left(i \sum_{s=1}^n k_s (\mathbf{a}_s - a_s) \right) .$$

Esta correspondência clássico-quântico é denominada *quantização de Weyl*.

Uma outra forma de se escrever a quantização de Weyl

A quantização de Weyl pode ser escrita de outra forma – mnemonicamente mais palatável e operacionalmente mais interessante – se observarmos que a parte não operatorial da exponencial

$$\exp\left(i\sum_{s=1}^n k_s(\mathbf{a}_s - a_s)\right)$$

pode ser utilizada para efetuar uma transformada de Fourier, qual seja,

$$\tilde{f}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n a \, f(a_1, \dots, a_n) e^{-i\sum_{s=1}^n k_s a_s} ,$$

permitindo-nos escrever

$$f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n k \, \tilde{f}(k_1, \dots, k_n) e^{i\sum_{s=1}^n k_s a_s} .$$

Podemos, portanto, interpretar a quantização de Weyl como sendo uma transformada inversa de Fourier operatorial. Esse foi o modo como a quantização de Weyl foi originalmente enunciada:

A quantidade f é levada da mecânica clássica à quântica de acordo com a regra: troque⁵ p e q no desenvolvimento [leia-se, na transformada inversa] de Fourier de f pelos operadores hermitianos que os representam na mecânica quântica. [37]

Não foi à toa que Weyl assim enunciou a sua conclusão: este modo de escrever a quantização é extremamente útil e, por isso, será majoritariamente empregado no decorrer deste capítulo.

Observações acerca da relevância da quantização de Weyl

Quase todas as funções f que aparecem na mecânica quântica são funções polinomiais. Nestes casos, é bastante simples simetrizar a função e efetuar, à mão, a substituição $a_i \mapsto$

⁵Weyl está preocupado somente com a aplicação do novo formalismo à mecânica quântica. Portanto, ele não escreve, tal como fizemos, variáveis genéricas a , mas sim considera sempre que f é função das variáveis canônicas p e q .

α_i . Com isso, acaba que o procedimento inventado por Weyl é, sob um ponto de vista computacional e pragmático, de pouca serventia. Este fato foi reconhecido pelo próprio Weyl. Por isso, ao apresentar o seu novo procedimento de quantização, ele enfatizou o fato dele ser útil exatamente para lidar com os casos em que a função f não é polinomial. Nas suas palavras,

Ao fazer a transição [da mecânica clássica] para a mecânica quântica, nós nos restringimos a [funções f que eram] polinômios de p e q . Mas a representação de Fourier⁶

$$\mathfrak{f}(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \int d\sigma d\tau \tilde{f}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma p + \tau q)}$$

da função f é aplicável a uma classe muito maior de funções. Essa integral não precisa ser interpretada literalmente, sendo o ponto essencial o fato de ela representar [formalmente] uma combinação linear das funções simples $e^{i(\sigma p + \tau q)}$. [38]

Ou seja, Weyl defende que a ampliação do conjunto de funções f quantizáveis é uma vantagem de seu formalismo⁷. Além disso, a fim de evitar que o leitor tema o trato com exponenciais operatoriais, ele observa que deve-se lidar com as funções exponenciais como sendo funções elementares. Entretanto, nenhum desses argumentos foi suficiente para convencer os físicos da época de que eles deveriam passar a utilizar esse procedimento de quantização. Ele não era prático e parecia, até mesmo, desnecessário [39].

A aparente inutilidade poderia ter sido o suficiente para que quantização de Weyl caísse no ostracismo. Porém isso não ocorreu. A razão pela qual o procedimento de Weyl acabou vitorioso foram os seus frutos: sob o ponto de vista matemático formal, este procedimento acabou sendo muito inspirador, tendo servido de base para o surgimento de inúmeras linhas de pesquisa em física e em matemática. Entre as quais está a formulação da mecânica quântica proposta por Hilbrand Groenewold e José Enrique Moyal [40].

⁶As expressões abaixo foram ligeiramente adaptadas, a fim de facilitar ao leitor a compreensão da notação.

⁷Não estamos aqui preocupados em minúcias matemáticas, por isso não especificamos o domínio de validade da transformação. O que importa aqui é percebermos que o domínio da transformação de Weyl é maior do que o conjunto das funções polinomiais.

Conclusões acerca da quantização de Weyl

Em oposição à quantização canônica, que estabelece uma regra simplória, a quantização de Weyl propõe uma regra sofisticada. Essa mudança na quantização estabeleceu uma reformulação do processo de obtenção de um sistema quântico a partir de um sistema clássico; isto é, da parte da mecânica quântica que denominamos de protomecânica quântica.

Weyl se limitou a esta parte, não havendo, neste seu trabalho, nenhuma tentativa de reformular a cinemática ou a dinâmica. Entretanto, as teorias físicas não são internamente desconexas: as suas diversas partes estão interligadas. Assim, a reformulação de Weyl da protomecânica permitiu a outros físicos levarem a cabo uma completa reformulação da mecânica quântica, abolindo o uso de espaços de Hilbert e elucidando significativamente o limite clássico-quântico. Denominamos a nova teoria quântica que emerge de tais desenvolvimentos de *mecânica quântica de Groenewold-Moyal*.

2.3 A mecânica quântica de Groenewold-Moyal

Nesta seção, apresentaremos uma formulação da mecânica quântica que foi iniciada por Eugene Wigner e, posteriormente, elaborada de maneira sistemática por Hilbrand Groenewold e José Enrique Moyal [41].⁸ O ponto central desses trabalhos foi utilizar a transformação inversa de Weyl para mapear a mecânica quântica do espaço de Hilbert no espaço de fase. Isso é feito, primeiramente, com o estado do sistema: o operador densidade é levado à função de Wigner. Posteriormente com a álgebra: a álgebra dos operadores é levada à álgebra de Groenewold-Moyal. E por fim com a dinâmica: a equação de Schrödinger é substituída pela equação de Groenewold-Moyal. Ao fim dessas três alterações, obtém-se uma nova cinemática e uma nova dinâmica, e assim uma nova mecânica quântica.

A primeira destas transformações – aquela ocorrida no conceito de estado quântico – teve início com o trabalho de Eugene Wigner, de 1932, o qual apresentaremos a seguir.

Wigner e a mecânica quântica no espaço de fase

Na mecânica estatística clássica, o chamado *peso de Boltzmann*, dado por

$$P_B(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon/k_B T}}{\int_0^\infty d\varepsilon e^{-\varepsilon/k_B T}} ,$$

fornece, no equilíbrio térmico, a densidade de probabilidade dos estados em função de suas energias, de tal modo que uma função $O(\varepsilon)$ qualquer tem o seu valor médio dado por

$$\langle\langle O \rangle\rangle = \int_0^\infty d\varepsilon P_B(\varepsilon) O(\varepsilon) .$$

Na expressão acima, utilizamos $\langle \rangle$ duplos para deixar claro que trata-se de um valor esperado termodinâmico, ou seja, calculado para um número muito grande de partículas. Podemos escrever a energia em termos das coordenadas q_i e dos momentos linear p_i das

⁸Não há um consenso acerca da prioridade de Groenewold e de Moyal na autoria destes resultados. Uma vez que não temos aqui o intuito de estabelecer prioridades, optamos por atribuir todos os desenvolvimentos a ambos os físicos, mesmo nos casos nos quais é sabido que o raciocínio não foi desenvolvido por ambos. Por isso, empregaremos sempre a denominação *Groenewold-Moyal*.

partículas que compõem o sistema. Neste caso, o peso de Boltzmann se reescreve na forma

$$P_B(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = \frac{e^{-\varepsilon(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)/k_B T}}{\int d^n q d^n p e^{-\varepsilon(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)/k_B T}} ,$$

e a média da função⁹ $O(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ é escrita, então, como uma integral no espaço de fase do sistema,

$$\langle\langle O \rangle\rangle = \int d^n q d^n p P_B(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) O(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) . \quad (2.1)$$

Ou seja, existe uma função P , definida no espaço de fase, cuja integral do produto por O fornece o valor médio de O . Quando uma função P_B pondera uma outra O de tal modo a gerar o valor médio desta última, a primeira é denominada *distribuição de probabilidades*, e tem seus valores $P_B(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ interpretados como sendo a densidade de probabilidade de ocorrência do evento $O(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$. O peso de Boltzmann é compatível com uma interpretação probabilística, uma vez que é positivo,

$$P_B(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) \geq 0 ,$$

e normalizado,

$$\int d^n q d^n p P_B(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = 1 .$$

Portanto, é dito, na mecânica estatística clássica, que o peso de Boltzmann é uma *distribuição de probabilidades no espaço de fase*.

Após o advento da mecânica quântica contemporânea, em 1925, diversos físicos buscaram estender a função de Boltzmann à física quântica. Uma das primeiras tentativas foi realizada por John von Neumann em 1927 [42]. Ele mostrou que, para um sistema termodinâmico qualquer, o valor médio termodinâmico do operador quântico \mathcal{O} pode ser

⁹Demo-nos a liberdade de denotar duas funções distintas – $O(\varepsilon)$ e $O(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ – pela mesma letra O , uma vez que ambas representam a mesma quantidade física, relacionando-se segundo $O(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) \equiv O(\varepsilon(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n))$.

escrito na forma

$$\langle\langle \mathcal{D} \rangle\rangle = \text{Tr} \left(\mathcal{D} e^{-\mathfrak{H}/k_B T} \right) .$$

Esta fórmula está correta, e até hoje é utilizada nos livros de mecânica estatística quântica. Eugene Wigner, apesar de estar de acordo com ela, decidiu visitar o problema em 1932. Segundo ele,

A termodinâmica de sistemas estatísticos quânticos é, em princípio, dada [pela] fórmula de Neumann (...) [Porém,] não parece simples efetuar cálculos explícitos [com esta fórmula]. Podemos, então, recorrer ao seguinte método. [43]

Em linhas gerais, a abordagem de Wigner foi escrever a distribuição de probabilidades no espaço de fase na forma

$$P(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = P_B(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) + \mathcal{O}(\hbar)$$

e deduzir a correção $\mathcal{O}(\hbar)$ como uma série de potências em \hbar . Esta correção torna-se relevante no limite de baixas temperaturas. Foge ao escopo desta dissertação apresentar os aspectos termodinâmicos deste artigo de Wigner. Entretanto, interessa-nos aqui uma das ferramentas por ele desenvolvidas durante este trabalho, ferramenta esta que posteriormente veio a ser denominada *função de Wigner*. A seguir, descreveremos o artigo de Wigner, centrando-nos na parte do artigo na qual esta função aparece.

Wigner mostrou que, para um sistema com um número n qualquer de partículas, existe uma função w tal que o valor esperado do observável \mathcal{D} pode ser escrito na forma

$$\langle \mathcal{D} \rangle = \int d^n q d^n p w(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) O(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) . \quad (2.2)$$

No membro esquerdo da igualdade acima, aparece o operador quântico \mathcal{D} ; e no membro direito, aparece o operado clássico O . Ou seja, Wigner mostrou que é possível calcular quantidades da física quântica com um cálculo realizado no espaço de fase clássico. Este resultado diferia completamente dos procedimentos de cálculo quânticos existentes até

então. Os únicos resultados semelhantes a este eram aqueles relativos à quantização – que associava uma quantidade quântica (operador) a uma quantidade clássica (função no espaço de fase) –, porém, depois que a teoria estava quantizada, todos os cálculos eram, até então, feitos somente com as quantidades operatoriais. Neste sentido, o trabalho de Wigner foi extremamente original.

Esta semelhança entre o procedimento de Wigner e o procedimento de quantização não é mera coincidência. No cerne do trabalho de Wigner – apesar de isso não estar explícito no seu artigo de 1932 – está uma transformação inversa de Weyl, e esta operação possibilita, conforme mostraremos mais adiante, que quantidades operatoriais sejam calculadas no espaço de fase.

É importante observar que na equação (2.2) não há nenhuma restrição sobre o valor de n e, portanto, o resultado não é válido exclusivamente no limite termodinâmico. Consequentemente, podemos tomar $n = 1$, obtendo o valor esperado do operador no caso de uma única partícula,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int dq dp w(q, p) O(q, p) . \quad (2.3)$$

Ou seja, o formalismo de Wigner não somente é útil para calcular valores esperados em sistemas de muitas partículas (termodinâmicos), como também fornece um novo meio de calcular valores esperados em sistemas de poucas partículas. Este resultado não é importante para Wigner e, por isso, ele nem sequer escreve a igualdade (2.3) em seu artigo. Entretanto, este procedimento para cálculo de valores esperados em sistemas de poucas partículas veio, posteriormente, a se tornar o mais aclamado resultado do seu artigo de 1932. E a função w , tal qual escrita na equação (2.3), foi, em reconhecimento à importância deste trabalho de 1932, denominada *função de Wigner*.

Wigner, em seu artigo, postula uma expressão para a função w sem apresentar uma demonstração da igualdade (2.2). Ele se limita a comentar como demonstrá-la no caso de operadores O que sejam decomponíveis como a soma de uma função de q_1, \dots, q_n e uma função de p_1, \dots, p_n . A seguir, demonstraremos o resultado geral, limitando-nos, por conveniência, ao caso de uma única partícula. A fim de efetuarmos tal demonstração, precisa-

remos primeiramente apresentar a transformação inversa da quantização de Weyl.

A transformação inversa de Weyl

Mostraremos, a seguir, que quantização de Weyl é um procedimento invertível, sendo a sua inversa dada por

$$\mathfrak{W}^{-1} : \mathfrak{D} \longmapsto \mathfrak{W}^{-1}[\mathfrak{D}](q, p) = \int dy \langle q - \frac{1}{2}y \mid \mathfrak{D}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \mid q + \frac{1}{2}y \rangle e^{ipy/\hbar}. \quad (2.4)$$

Em outras palavras, se uma função definida no espaço de fase $O(q, p)$ é levada pela quantização de Weyl \mathfrak{W} ao operador $\mathfrak{D}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$, então este é levado à função $O(q, p)$ pela operação \mathfrak{W}^{-1} .

A demonstração é feita do seguinte modo. Substituindo a quantização de Weyl da função $O(q, p)$,

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau d\sigma d\tilde{q} d\tilde{p} O(\tilde{q}, \tilde{p}) e^{i(\tau\mathfrak{q} - \tau\tilde{q} + \sigma\mathfrak{p} - \sigma\tilde{p})},$$

na expressão (2.4), obtemos

$$\mathfrak{W}^{-1}[\mathfrak{D}](q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau d\sigma d\tilde{q} d\tilde{p} dy O(\tilde{q}, \tilde{p}) e^{-i(\tau\tilde{q} + \sigma\tilde{p})} e^{ipy/\hbar} \langle q - \frac{1}{2}y \mid e^{i(\tau\mathfrak{q} + \sigma\mathfrak{p})} \mid q + \frac{1}{2}y \rangle.$$

Utilizando a relação de Baker-Campbell-Hausdorff, obtemos

$$e^{i(\tau\mathfrak{q} + \sigma\mathfrak{p})} = e^{\frac{i}{2}\sigma\mathfrak{p}} e^{i\tau\mathfrak{q}} e^{\frac{i}{2}\sigma\mathfrak{p}},$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \langle q - \frac{1}{2}y \mid e^{i(\tau\mathfrak{q} + \sigma\mathfrak{p})} \mid q + \frac{1}{2}y \rangle &= \langle q - \frac{1}{2}y \mid e^{\frac{i}{2}\sigma\mathfrak{p}} e^{i\tau\mathfrak{q}} e^{\frac{i}{2}\sigma\mathfrak{p}} \mid q + \frac{1}{2}y \rangle \\ &= \langle q - \frac{1}{2}y - \frac{\hbar}{2}\sigma \mid e^{i\tau\mathfrak{q}} \mid q + \frac{1}{2}y + \frac{\hbar}{2}\sigma \rangle \\ &= e^{i\tau\left(q + \frac{1}{2}y + \frac{\hbar}{2}\sigma\right)} \langle q - \frac{1}{2}y - \frac{\hbar}{2}\sigma \mid q + \frac{1}{2}y + \frac{\hbar}{2}\sigma \rangle \\ &= e^{i\tau q} \delta(y + \hbar\sigma). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{W}^{-1}[\mathfrak{O}](q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau d\sigma d\tilde{q} d\tilde{p} dy O(\tilde{q}, \tilde{p}) e^{-i(\tau q + \sigma p)} e^{ipy/\hbar} e^{i\tau q} \delta(y + \hbar\sigma) \\
&= \int d\tau d\sigma d\tilde{q} d\tilde{p} O(\tilde{q}, \tilde{p}) \frac{e^{i\tau(\tilde{q}-q)}}{2\pi} \frac{e^{i\sigma(\tilde{p}-p)}}{2\pi} \\
&= \int d\tilde{q} d\tilde{p} O(\tilde{q}, \tilde{p}) \delta(\tilde{q} - q) \delta(\tilde{p} - p) = O(q, p) .
\end{aligned}$$

Isso demonstra o fato da equação (2.4) fornecer a inversa da quantização de Weyl.

Dedução da função de Wigner

De posse da transformada inversa de Weyl, podemos, enfim, demonstrar a existência de uma função w tal que, para qualquer função O , a igualdade (2.3) seja satisfeita.

Conforme dissemos na seção 2.1, caso o sistema físico se encontre em uma mistura \mathfrak{d} , então o valor esperado do observável \mathfrak{O} é dado pela expressão

$$\langle \mathfrak{O} \rangle = \text{Tr} (\mathfrak{d} \mathfrak{O}) .$$

Uma vez que o traço independe da base escolhida, calculemos, sem perda de generalidade, o traço na base de autovetores de posição,

$$\langle \mathfrak{O} \rangle = \int d\alpha \langle \alpha | \mathfrak{d} \mathfrak{O} | \alpha \rangle = \int d\alpha d\beta \langle \alpha | \mathfrak{d} | \beta \rangle \langle \beta | \mathfrak{O} | \alpha \rangle .$$

Consideremos, então, a mudança de variáveis $\alpha = q + \frac{1}{2}y$ e $\beta = q - \frac{1}{2}y$. O jacobiano desta transformação é 1, logo $d\alpha d\beta = dq dy$. Então, obtemos

$$\langle \mathfrak{O} \rangle = \int dq dy \langle q + \frac{1}{2}y | \mathfrak{d} | q - \frac{1}{2}y \rangle \langle q - \frac{1}{2}y | \mathfrak{O} | q + \frac{1}{2}y \rangle .$$

Utilizando a equação (2.4), podemos escrever

$$\langle q - \frac{1}{2}y | \mathfrak{O}(q, p) | q + \frac{1}{2}y \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp O(q, p) e^{-ipy/\hbar}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathfrak{D} \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dy \langle q + \frac{1}{2}y | \mathfrak{d} | q - \frac{1}{2}y \rangle \int dp O(q, p) e^{-ipy/\hbar} \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dy dp \left(\langle q - \frac{1}{2}y | \mathfrak{d} | q + \frac{1}{2}y \rangle e^{ipy/\hbar} \right)^* O(q, p) \\
 &= \int dq dp \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \langle q - \frac{1}{2}y | \mathfrak{d} | q + \frac{1}{2}y \rangle e^{ipy/\hbar} \right)^* O(q, p) .
 \end{aligned}$$

O termo entre parênteses na segunda linha da expressão acima, se pensado como uma função $F(y)$, satisfaz à igualdade $F^*(y) = F(-y)$. Por outro lado, a integral em y é simétrica nos limites de integração. Conseqüentemente, o resultado da integração em y é uma função real. Ou seja, a conjugação complexa na terceira linha não tem efeito algum. Por fim, obtemos

$$\langle \mathfrak{D} \rangle = \int dq dp \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \langle q - \frac{1}{2}y | \mathfrak{d} | q + \frac{1}{2}y \rangle e^{ipy/\hbar} \right)}_{w(q,p)} O(q, p) .$$

Ou seja, mostramos que existe uma função $w(q, p)$ cujo produto por uma função $O(q, p)$ integrado em todo o espaço de fase nos fornece o valor esperado quântico do operador $\mathfrak{D} = \mathfrak{W}[O]$ quando o sistema quântico está no estado misto \mathfrak{d} .

A equação

$$\langle \mathfrak{D} \rangle = \int dq dp w(q, p) O(q, p)$$

é denominada *equação de Wigner*. A função $w(q, p)$ (que, como já foi dito, é denominada *função de Wigner*) é definida, em um espaço de fase bidimensional, por

$$w(q, p) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \langle q - \frac{1}{2}y | \mathfrak{d} | q + \frac{1}{2}y \rangle e^{ipy/\hbar} . \quad (2.5)$$

Uma generalização do resultado de Wigner

Comparando as equações (2.4) e (2.5), podemos concluir que a função de Wigner é, a menos de um fator constante, a transformada inversa de Weyl do operador densidade \mathfrak{D} ,

$$w = \frac{1}{2\pi\hbar} \mathfrak{W}^{-1}[\mathfrak{D}] ,$$

onde o fator $2\pi\hbar$ não tem nenhum significado físico, sendo somente uma consequência de como definimos certas transformadas de Fourier. Esse resultado nos mostra que a função de Wigner pode ser pensada como sendo a contrapartida no espaço de fase do estado quântico \mathfrak{D} . Neste sentido, a função de Wigner não é nada mais que uma outra maneira – em certos casos, mais conveniente – de escrevermos o estado do sistema quântico.

Tendo em vista a igualdade acima, a equação de Wigner

$$\text{Tr}(\mathfrak{D} \mathfrak{O}) = \int dq dp w(q, p) O(q, p)$$

pode ser vista como um caso particular de um importante teorema sobre a quantização de Weyl, a saber,

Teorema. Para quaisquer funções a e b quadrado-integráveis definidas em um espaço de fase $2n$ -dimensional Ω , vale a igualdade

$$\text{Tr}(\mathfrak{W}[a] \mathfrak{W}[b]) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\Omega} a b \quad .$$

Esse resultado estabelece uma correspondência genérica entre traços operatoriais e integrais no espaço de fase. É a existência dessa correspondência geral que permite, particularmente, que seja possível calcular o valor esperado de um operador quântico por meio do uso da função de Wigner.

A não-positividade da função de Wigner

O resultado obtido por Wigner em seu artigo de 1932, por ser extremamente inovador, impôs à física quântica novas questões conceituais. Por exemplo, relativas à interpretação da função w como sendo uma distribuição de probabilidades. Wigner, tendo em mente a semelhança entre a sua equação (2.2) e a equação de Boltzmann (2.1), observa que

Na teoria quântica não [pode existir] uma expressão [que permita uma interpretação] similar [àquela de Boltzmann] para a probabilidade, pois não podemos perguntar qual é a probabilidade simultânea para coordenadas e momenta. [44]

Ou seja, a função $w(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ não deve ser entendida com uma distribuição que fornece a densidade de probabilidade de encontrarmos o sistema com coordenadas e momenta dados por $(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$, uma vez que isso iria contra a mecânica quântica, segundo a qual não é possível se conhecer simultaneamente os valores das coordenadas e dos momenta.

Indo ao encontro desta expectativa, Wigner mostrou que a função w não pode ser interpretada como sendo uma distribuição de probabilidade pois, apesar de ser normalizável, não é positiva definida. Em um primeiro momento, esse resultado pode parecer ocorrer em detrimento da interpretabilidade da função de Wigner. Alguns físicos argumentaram que se não podemos interpretá-la como sendo uma probabilidade, então ela não é interpretável. Porém, com o tempo, essa impossibilidade da interpretação probabilística passou a ser vista como sendo o mais interessante aspecto da função de Wigner. Atualmente, o fato de a função de Wigner não ser positiva definida é visto, por alguns autores, como sendo a grande característica quântica do procedimento de Wigner. Poderíamos dizer que enquanto para Heisenberg a não-comutatividade operatorial era o selo da mecânica quântica, para os wignerianos essa marca está na não-positividade da função de Wigner.

Esboço de uma nova cinemática quântica

Podemos definir funções de Wigner dependentes do tempo

$$w(\cdot) : t \mapsto w(t)$$

de acordo com a expressão

$$w(t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \mathfrak{W}^{-1}[\mathfrak{d}(t)] ,$$

onde $\mathfrak{d}(t)$, conforme foi dito na seção 2.1, é dado por $\mathfrak{d}(t) = \mathfrak{U}^\dagger(t) \mathfrak{d}_0 \mathfrak{U}(t)$.

Com isso, a função de Wigner passa a ser uma ferramenta da cinemática, capaz de expressar a evolução temporal do sistema. Entretanto, esta evolução depende da evolução temporal do operador densidade, a qual precisa ser, de antemão, sabida. Ou seja, a função de Wigner está sendo vista, até aqui, como uma ferramenta indireta para se descrever o sistema quântico, cujo estado é descrito, em última instância, pelo operador densidade $\mathfrak{d}(t)$.

Podemos pôr esta cinemática nos seguintes termos.

- Definição do estado: o estado do sistema quântico é descrito matematicamente por um operador densidade \mathfrak{d} , mas *podemos pensar como se* fosse descrito pela função de Wigner w .
- Definição da evolução temporal: a evolução do estado do sistema é descrita pela função $\mathfrak{d}(\cdot)$, mas *podemos pensar como se* essa evolução fosse descrita por uma função de Wigner $w(\cdot)$.

Agora, queremos ir além. Queremos considerar a função de Wigner como sendo uma *descrição autônoma* do sistema, por meio da qual descrevermos o estado do sistema sem precisarmos fazer qualquer menção ao operador densidade. Poderemos, assim, considerar que toda a mecânica quântica se passe no espaço de fase e que o estado do sistema quântico seja descrito por uma função definida neste espaço de fase, a função de Wigner [45].

Deste modo, podemos estabelecer uma nova *cinemática quântica*.

Obstáculo à nova cinemática quântica

Os desenvolvimentos anteriores permitem-nos antever o importante papel que pode vir a ser desempenhado pela função de Wigner na cinemática quântica. Entretanto, há ainda um entrave ao completamento deste projeto, o qual precisa ser superado.

A determinação dos valores possíveis de um observável e dos estados possíveis de um sistema somente pode ser feita, até aqui, por meio de uma equação operatorial de autovalores. Ou seja, precisamos primeiramente do espaço de Hilbert para sabermos os valores possíveis de serem medidos e para construirmos o estado do sistema. Somente depois, podemos efetuar a operação \mathcal{W}^{-1} e passar para a representação do sistema no espaço de fase. Caso queiramos, tal qual esboçado na última subseção, descrever o sistema unicamente por meio da função de Wigner, faz-se necessário, portanto, desenvolvermos um procedimento que nos permita *determinar os valores possíveis dos observáveis e os estados possíveis do sistema* diretamente em termos de funções de Wigner. Este procedimento pode ser realizado com o auxílio do produto \star de Gronewold-Moyal.

O produto \star de Gronewold-Moyal

A quantização de Weyl, conforme vimos, é invertível. Portanto, ela estabelece uma bijeção entre o conjunto das funções definidas no espaço de fase clássico e o conjunto dos operadores que atuam sobre o espaço dos estados do sistema quântico [46].

Estes conjuntos têm regras claras de multiplicação. As funções definidas no espaço de fase se multiplicam pontualmente e, portanto, formam uma álgebra comutativa. Os operadores se multiplicam segundo uma álgebra determinada pelas relações de comutação originárias da quantização e, portanto, formam uma álgebra não-comutativa. Assim, podemos ver que ambos os conjuntos têm estruturas algébricas bem distintas entre si. Por consequência, apesar de a quantização de Weyl estabelecer uma bijeção linear entre eles (isomorfismo), não é possível estabelecermos uma bijeção que preserve a estrutura algébrica (homomorfismo).

É sabido, desde a década de 1920, que essa diferença na estrutura algébrica é que diferencia a física clássica da física quântica. Assim, caso queiramos implementar a mecânica quântica no espaço de fase, devemos necessariamente alterar a álgebra das funções nele definidas. Isso foi feito por Groenewold e Moyal, os quais retiraram o produto pontual das funções definidas no espaço de fase e induziram um novo produto – denominado produto \star [47]. Esse produto foi construído de tal modo a estabelecer um homomorfismo entre os dois espaços. Isto é, o produto \star é tal que, *por construção*, para quaisquer funções f e g definidas no espaço de fase clássico, a seguinte igualdade é satisfeita,

$$\mathfrak{W}[f] \mathfrak{W}[g] = \mathfrak{W}[f \star g] \quad (2.6)$$

Em termos diagramáticos, isso significa completar o campo superior-direito do diagrama

$$\begin{array}{ccc} f, g & \xrightarrow{\text{produto}} & f \star g \\ \mathfrak{W} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{W} \\ f, g & \xrightarrow{\text{produto}} & fg \end{array}$$

de tal modo que ele comute.

Utilizando a transformação inversa de Weyl, podemos escrever explicitamente este produto,

$$\star : (f, g) \longmapsto f \star g = \mathfrak{W}^{-1} \left[\mathfrak{W}[f] \mathfrak{W}[g] \right] \quad (2.7)$$

Pode-se mostrar que o produto \star de Groenewold-Moyal assim definido é expansível em potências de \hbar , fornecendo

$$f \star g = fg + \frac{i\hbar}{2} \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2) , \quad (2.8)$$

onde fg é o produto pontual de f por g , $\{ , \}$ é o *parênteses de Poisson* clássico, e $\mathcal{O}(\hbar^2)$ é uma correção da ordem de \hbar^2 . Assim, vemos que o produto \star é uma *deformação* do produto pontual. Definamos, agora, o chamado *parênteses de Groenewold-Moyal* [48]

$$\{ f \star, g \} := f \star g - g \star f ,$$

o qual, devido à igualdade (2.8), satisfaz

$$\{f^*, g\} = i\hbar \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2) . \quad (2.9)$$

O complemento da nova cinemática quântica

Esse novo produto permite reformularmos a equação de autovalores quântica. Por simplicidade, nos deteremos ao caso em que o operador densidade descreve um estado puro, mas o resultado abaixo, cuidando-se com algumas sutilezas, pode facilmente ser estendido ao caso de estados mistos.

Os valores possíveis de um observável $\mathfrak{O} = \mathfrak{W}[O]$ são dados pela equação de autolavores

$$\mathfrak{O} |o\rangle = o |o\rangle .$$

Multiplicando à direita pela 1-forma $\langle o|$, temos

$$\mathfrak{O} \mathfrak{d} = o \mathfrak{d} .$$

Ou seja,

$$\mathfrak{W}[O] \left(2\pi i \mathfrak{W}[w_o] \right) = o \left(2\pi i \mathfrak{W}[w_o] \right) ,$$

onde o sub-índice o em w significa que esta função de Wigner corresponde ao operador densidade puro $|o\rangle\langle o|$. Aplicando a transformada inversa de Weyl em ambos os membros da igualdade acima e utilizando a definição (2.7) do produto \star , obtemos [49]

$$\boxed{O \star w_o = o w_o}$$

Esta é a versão, no espaço de fase, da equação de autovalores quântica. No caso do oscilador harmônico não-relativístico unidimensional, por exemplo, tem-se as energias possíveis E_n do sistema dadas pela equação [50]

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \right) \star w_n(q, p) = E_n w_n(q, p) .$$

A reformulação da dinâmica quântica

Do mesmo modo que fizemos com a *cinemática*, podemos utilizar o produto \star para efetuarmos uma reformulação da *dinâmica quântica*. A equação de movimento operatorial

$$\frac{d\mathfrak{D}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathfrak{D}(t), \mathfrak{H}(t)]$$

se reescreve na forma

$$2\pi i \frac{d\mathfrak{W}[w(t)]}{dt} = -\frac{2\pi}{\hbar} \left(\mathfrak{W}[w(t)] \mathfrak{W}[H(t)] - \mathfrak{W}[H(t)] \mathfrak{W}[w(t)] \right)$$

de onde, pela linearidade da transformada inversa de Weyl, segue que

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left(w(t) \star H(t) - H(t) \star w(t) \right),$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{dw(q, p, t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \{ w(q, p, t) \star H(q, p, t) \}} \quad (2.10)$$

onde $H(t)$ é o hamiltoniano clássico, possivelmente dependente do tempo. Essa equação fornece a dinâmica da função de Wigner. Uma vez que esta função descreve o estado do sistema, a equação acima cumpre o papel de *equação dinâmica da teoria*.

O raciocínio acima não se aplica somente ao operador densidade, mas também a qualquer outro operador.¹⁰ Deduz-se facilmente que, para uma função $O(q, p, t)$ qualquer, vale a equação

$$\frac{dO(q, p, t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \{ O(q, p, t) \star H(q, p, t) \} \quad (2.11)$$

chamada *equação de Groenewold-Moyal*. Utilizando a equação (2.9), obtemos

$$\frac{dO(q, p, t)}{dt} = \{ O(q, p, t), H(q, p, t) \} + O(\hbar).$$

Isso nos mostra que no limite $\hbar \rightarrow 0$ a equação (2.11) se reduz à *equação de Liouville*.

¹⁰O qual deve, primeiro, ser posto no quadro de Heisenberg.

Concluimos, então, que no limite em que constante de Planck vai a zero, a equação de Groenewold-Moyal se reduz à equação de Liouville. Essa passagem quântico-clássico, além de ser extremamente elementar computacionalmente, é de uma gritante clareza conceitual. Os objetos que aparecem nas duas equações são os mesmos, as quais se diferem somente na forma em que relacionam tais objetos na multiplicação. Essa clareza na formulação do limite clássico talvez seja a grande vantagem conceitual do formalismo de Groenewold-Moyal [51].

A emancipação da nova mecânica quântica

A formulação de uma cinemática e de uma dinâmica quânticas centradas na função de Wigner possibilitam abandonarmos o operador densidade e o espaço de Hilbert a ele associado. Ficamos somente com uma teoria quântica formulada no espaço de fase, cujo objeto matemático fundamental, a partir do qual descrevemos o estado quântico do sistema, é a função de Wigner. Esse espaço não é munido de sua álgebra natural (com a multiplicação feita pelo produto pontual entre as funções), mas sim uma álgebra induzida a partir dos operadores quânticos (com a multiplicação feita pelo produto \star de Groenewold-Moyal). Por meio deste novo produto, as propriedades do sistema quântico são transladadas do espaço de Hilbert para o espaço de fase.

Esse formalismo permite determinar a evolução temporal do estado em termos da hamiltoniana clássica (equação de Groenewold-Moyal para a função de Wigner) e calcular o valor esperado de um dado observável em um dado estado (equação de Wigner). Ademais, para um dado observável é possível saber os seus valores possíveis (equação de autolavores). Assim, temos que toda a capacidade preditiva e explanatória da mecânica quântica padrão é reproduzida na nova mecânica quântica de Groenewold-Moyal, cuja existência agora é autônoma, não mais dependendo da formulação padrão.

Uma comparação das duas mecânicas quânticas

Podemos fazer uma comparação esquemática entre a mecânica quântica padrão e a mecânica quântica de Groenewold-Moyal, resumindo assim o que foi exposto neste capítulo.

	Mecânica Quântica padrão	Mec. Quântica de Groenewold-Moyal
protomecânica	Substituição $q \rightarrow \mathfrak{q}$ e $p \rightarrow \mathfrak{p}$ nas funções clássicas $O(q, p)$, obtendo os operadores $\mathfrak{D}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$.	Substituição do produto pontual entre funções no espaço de fase pelo produto \star de Groenewold-Moyal.
cinemática	O estado do sistema é descrito pelo operador densidade $\mathfrak{d}(t)$, a partir do qual obtém-se os valores esperados $\langle \mathfrak{D} \rangle = \text{Tr}(\mathfrak{d}\mathfrak{D})$. As quantidade observáveis o são dadas por $\mathfrak{D}o = o\mathfrak{d}$.	O estado do sistema é descrito pela função de Wigner $w(q, p, t)$, a partir da qual obtém-se os valores esperados $\langle O \rangle = \int dqdp (w O)$. As quantidade observáveis o são dadas por $O\star w = ow$.
dinâmica	Evolução dinâmica dada pela equação $\frac{d\mathfrak{d}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathfrak{d}(t), \mathfrak{H}(t)]$.	Evolução dinâmica dada pela equação $\frac{dO(q,p,t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \{ O(q, p, t) \star H(q, p, t) \}$.

A mecânica quântica como uma deformação da mecânica clássica

Na mecânica quântica padrão, tal qual vimos na seção 2.1, quantizar significa trocar funções definidas no espaço de fase por operadores quânticos. Na mecânica quântica de Groenewold-Moyal, quantizar significa trocar o produto pontual pelo produto \star . Neste processo, um novo parâmetro é incluído: a constante de Planck. Matematicamente, trata-se, portanto, de uma deformação algébrica, tal qual descrita na seção 1.4.

Esse procedimento de quantização por meio de uma deformação algébrica é denominado *quantização por deformação*, e foi formulado de maneira matematicamente precisa em dois renomados artigos de F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, e D. Sternheimer [52]. Eles mostraram que a mecânica clássica é, em um sentido preciso, estruturalmente instável, e que a mecânica quântica é a única deformação da mecânica clássica que gera uma estrutura estável. Segundo Ludwig Fadeev, isso mostra que a mecâ-

nica quântica não somente é desejável, como também matematicamente necessária [53].

Conclusões do capítulo 2

Chegamos, assim, ao fim do capítulo 2, no qual analisamos o longo percurso que vai da mecânica quântica tal qual formulada nos livros textos até a mecânica quântica via *quantização por deformação*, passando pelos trabalhos de Weyl, Wigner, Groenewold, e Moyal.

Com eles, vimos que é possível, por meio da transformação inversa de Weyl, implementarmos uma mecânica quântica no espaço de fase. Nesta formulação, a protagonista é a função de Wigner, que desempenha o papel de descrição matemática do estado quântico. Sua interpretação não é imediata, uma vez que ela não pode (e não deve) ser interpretada probabilisticamente. Um outro elemento importante foi a mudança na álgebra das funções sobre o espaço de fase, cujo produto, denominado produto \star de Groenewold-Moyal, é uma deformação do produto pontual.

Mostramos que as três principais equações da mecânica quântica – a equação do valor esperado dos observáveis quânticos, a equação de autovalores dos observáveis, e a equação dinâmica – podem ser reescritas em termos da função de Wigner. A nova equação dinâmica, denominada equação de Groenewold-Moyal, tem como limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$) a equação de Liouville clássica, o que significa que, neste contexto, a passagem quântico-clássico é extremamente simples e não demanda grandes esforços conceituais. Esta é uma vantagem deste formalismo da mecânica quântica se comparado ao formalismo padrão.

A lição que podemos tirar de tais desenvolvimentos é que não se faz necessário introduzirmos toda a parafernália de espaços de Hilbert, vetores de estado, operadores auto-adjuntos ilimitados etc. A mecânica quântica pode ser obtida por meio de uma simples deformação na álgebra das funções definidas sobre o espaço de fase. Este exemplo serve de paradigma para a chamada *quantização por deformação*.

Capítulo 3

A teoria quântica de campos em espaços-tempos não-comutativos

De posse do ferramental matemático e conceitual desenvolvido no capítulo 2, apresentaremos agora a formulação da teoria quântica de campo em espaços-tempos não-comutativos.

A apresentação que faremos está organizada do seguinte modo. Primeiro, apresentaremos as relações de comutação espaço-temporal com as quais lidaremos neste capítulo (seção 3.1). Estas relações de comutação são denominadas relações de comutação canônica. Em seguida, deduziremos a álgebra de Groenewold-Moyal dos campos quânticos (seção 3.2). Explicaremos, então, como esta álgebra pode ser utilizada para formular teorias quânticas de campos sobre um espaço-tempo com geometria não-comutativa (seção 3.3). Depois, discutiremos como a inclusão desta não-comutatividade espaço-temporal leva a uma perda na renormalizabilidade do modelo $\lambda\phi^4$ (seção 3.4). Por fim, mostraremos os meios pelos quais a renormalizabilidade pode ser restaurada (seção 3.5).

Conforme discutimos na seção 1.4, a teoria de espaços-tempos não-comutativos não lida com as coordenadas de posição de uma dada partícula, mas sim com as próprias

coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) do espaço-tempo. Estas são quantizadas segundo

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) . \quad (3.1)$$

Os comutadores da mecânica quântica têm sua origem nos parênteses de Poisson clássicos. No caso da não-comutatividade espaço-temporal, não há parênteses de Poisson para serem quantizados, e portanto os comutadores devem ser postulados. Isso deve ser feito segundo motivações físicas ou matemáticas específicas do sistema em questão. Neste capítulo e no próximo, consideraremos somente as relações de comutação denominadas *não-comutatividade canônica* (1.1), cuja origem está, conforme comentamos na seção 1.4, no efeito Hall quântico e na teoria de cordas sob ação de um campo (do tipo) magnético de fundo.

3.1 A álgebra de Groenewold-Moyal dos campos

Tomemos, na notação da seção 2.2, $n = 4$ e $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Ou seja, enquanto na mecânica quântica as variáveis do sistema eram as variáveis canônicas do espaço de fase, agora as variáveis são as coordenadas do espaço-tempo. Podemos aplicar aqui as idéias da seção 2.2 pois a caracterização de um sistema e a subsequente construção de um processo de quantização desenvolvidos em tal seção são completamente genéricos.

Consideremos, agora, que sobre esse espaço-tempo está definido um campo. Do mesmo modo que os observáveis quânticos eram originalmente funções no espaço de fase, este campo é uma função no espaço-tempo. Portanto, do mesmo modo que, nas seções anteriores, os operadores foram quantizados como consequência da quantização das coordenadas canônicas, os campos devem, nesta seção, ser quantizados devido à quantização das coordenadas do espaço-tempo. Ou seja, devido ao caráter operatorial do espaço-tempo, um campo (clássico) qualquer que esteja sobre ele definido é um operador.

Caso queríamos considerar este campo no contexto da teoria quântica de campos, devemos transformá-lo uma segunda vez em operador. Por isso, podemos afirmar que campos quânticos definidos em um espaço-tempo não-comutativo são duplamente operatoriais.

Por um lado, eles atuam no espaço de Hilbert sobre o qual atuam os operadores \mathfrak{x}_i e por outro lado atuam sobre o espaço de Fock dos estados do campo.

Esta profusão de aspectos operatoriais sobrecarrega o formalismo, e seria desejável que pudessemos lidar de outra maneira com o problema. Isso pode ser feito por meio da quantização por deformação. Utilizando-a, podemos implementar a quantização do espaço-tempo na forma de uma deformação na álgebra dos campos. Neste contexto, não faz-se necessário lidarmos com os operadores \mathfrak{x}_i , do mesmo modo que na mecânica quântica de Groenewold-Moyal não precisamos lidar com os operadores \mathfrak{q} e \mathfrak{p} .

Assim, temos um novo programa teórico. Construir uma deformação da álgebra dos campos que implemente a quantização (3.1) e as relações de comutação (1.1). Este programa teórico começa com a construção de um produto \star de Groenewold-Moyal, o qual será determinado por meio da quantização de Weyl [54].

Construção do produto \star por meio da quantização de Weyl

O produto \star entre duas funções g e h quaisquer é, segundo a equação (2.6), definido implicitamente pela igualdade

$$\mathfrak{W}[g \star h] = \mathfrak{W}[g] \mathfrak{W}[h] , \quad (3.2)$$

onde a quantização de Weyl \mathfrak{W} se escreve, neste caso particular, na forma¹

$$\mathfrak{W}[f] = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4k \tilde{f}(k) e^{i \sum_{\mu} k_{\mu} \mathfrak{x}_{\mu}} .$$

¹Subentenda-se que todos os somatório em índices gregos devem ser efetuados de 0 a 3.

Assim, o membro direito da equação (3.2) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}[g] \mathfrak{W}[h] &= \left(\frac{1}{4\pi^2} \int d^4k \tilde{g}(k) e^{i \sum_{\mu} k_{\mu} x_{\mu}} \right) \left(\frac{1}{4\pi^2} \int d^4p \tilde{h}(p) e^{i \sum_{\nu} p_{\nu} x_{\nu}} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^4} \int d^4k d^4p \tilde{g}(k) \tilde{h}(p) e^{i \sum_{\mu} k_{\mu} x_{\mu}} e^{i \sum_{\nu} p_{\nu} x_{\nu}} .\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, temos

$$\begin{aligned}e^{i \sum_{\mu} k_{\mu} x_{\mu}} e^{i \sum_{\nu} p_{\nu} x_{\nu}} &= e^{i \left(\sum_{\mu} k_{\mu} x_{\mu} + \sum_{\nu} p_{\nu} x_{\nu} + \frac{i^2}{2} \sum_{\mu, \nu} [k_{\mu} x_{\mu}, p_{\nu} x_{\nu}] \right)} \\ &= e^{i \sum_{\mu} (k_{\mu} + p_{\mu}) x_{\mu} - \frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \theta_{\mu\nu} k_{\mu} p_{\nu}} .\end{aligned}$$

Definindo uma nova variável $q := k + p$, podemos escrever

$$\mathfrak{W}[g] \mathfrak{W}[h] = \frac{1}{16\pi^4} \int d^4k d^4q \left(\tilde{g}(k) \tilde{h}(q - k) e^{-\frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \theta_{\mu\nu} k_{\mu} (q - k)_{\nu}} \right) e^{i \sum_{\mu} q_{\mu} x_{\mu}} . \quad (3.3)$$

Por outro lado, o membro esquerdo da equação (3.2) é, por definição,

$$\mathfrak{W}[g \star h] = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4q \widetilde{(g \star h)}(q) e^{i \sum_{\mu} q_{\mu} x_{\mu}} . \quad (3.4)$$

Comparando as equações (3.2), (3.3 e (3.4), podemos concluir que

$$\widetilde{(g \star h)}(q) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4k \tilde{g}(k) \tilde{h}(q - k) e^{-\frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \theta_{\mu\nu} k_{\mu} (q - k)_{\nu}} .$$

A fim de obtermos explicitamente o produto \star entre duas funções g e h quaisquer, faz-se necessário efetuarmos uma transformada inversa de Fourier na função acima. Logo,

$$\begin{aligned}(g \star h)(x) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^4k d^4q \widetilde{(g \star h)}(q) e^{i \sum_{\rho} q_{\rho} x_{\rho}} \\ &= \frac{1}{16\pi^4} \int d^4k d^4q \tilde{g}(k) \tilde{h}(q - k) e^{-\frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \theta_{\mu\nu} k_{\mu} (q - k)_{\nu}} e^{i \sum_{\rho} q_{\rho} x_{\rho}} .\end{aligned}$$

Substituindo de volta q por $k + p$, temos

$$(g \star h)(x) = \frac{1}{16\pi^4} \int d^4k d^4p e^{-\frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu} \theta_{\mu\nu} k_\mu p_\nu} \left(\tilde{g}(k) e^{i \sum_\rho k_\rho x_\rho} \right) \left(\tilde{h}(p) e^{i \sum_\rho p_\rho x_\rho} \right).$$

Expandindo o primeiro fator em série de Taylor,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2^n n!} \left(\sum_{\mu,\nu} \theta_{\mu\nu} k_\mu p_\nu \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2^n n!} \sum_{\mu_1, \nu_1, \dots, \mu_n, \nu_n} \theta_{\mu_1, \nu_1} \dots \theta_{\mu_n, \nu_n} k_{\mu_1} p_{\nu_1} \dots k_{\mu_n} p_{\nu_n},$$

obtemos

$$\begin{aligned} (g \star h)(x) &= \frac{1}{16\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2^n n!} \sum_{\mu_1, \nu_1, \dots, \mu_n, \nu_n} \theta_{\mu_1, \nu_1} \dots \theta_{\mu_n, \nu_n} \times \\ &\quad \times \left(\int d^4k k_{\mu_1} \dots k_{\mu_n} \tilde{g}(k) e^{i \sum_\rho k_\rho x_\rho} \right) \left(\int d^4p p_{\nu_1} \dots p_{\nu_n} \tilde{h}(p) e^{i \sum_\rho p_\rho x_\rho} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n!} \sum_{\mu_1, \nu_1, \dots, \mu_n, \nu_n} \theta_{\mu_1, \nu_1} \dots \theta_{\mu_n, \nu_n} \left(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} g(x) \right) \left(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} h(x) \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n!} \sum_{\mu_1, \nu_1, \dots, \mu_n, \nu_n} \theta_{\mu_1, \nu_1} \dots \theta_{\mu_n, \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \partial'_{\nu_1} \dots \partial'_{\nu_n} \right) g(x) h(x') \Big|_{x'=x} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n!} \left(\sum_{\mu, \nu} \theta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial'_\nu \right)^n \right] g(x) h(x') \Big|_{x'=x} \\ &= \exp \left(\frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \theta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial'_\nu \right) g(x) h(x') \Big|_{x'=x}, \end{aligned}$$

onde definimos os operadores ∂ e ∂' como sendo derivadas parciais que atuam, respectivamente, nas variáveis x e x' .

Concluimos, assim, a dedução do produto \star entre funções definidas em um espaço tempo com geometria não-comutativa canônica: dadas duas funções f e g definidas no espaço-tempo, a função produto \star delas é dada por

$$\boxed{(g \star h)(x) = e^{\frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \theta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial'_\nu} g(x) h(x') \Big|_{x'=x}} \quad (3.5)$$

O produto \star em forma integral

A dedução da fórmula acima tem como pressuposto que ambas as funções g e h sejam de classe C^∞ . Para a maioria dos físicos esta é uma hipótese extremamente razoável. Entretanto, alguns físicos com um maior apreço pelo rigor matemático buscaram desenvolver outros produtos, para os quais tal exigência não se faça necessária.

A estratégia padrão é buscar um novo produto $\hat{\star}$ que, por exemplo, exija somente que as funções g e h sejam quadrado integráveis, e que no caso de funções quadrado integráveis de classe C^∞ recaia no produto acima. Ou seja, buscar produtos $\hat{\star}$ que, na restrição de domínio a funções quadrado integráveis C^∞ , sejam dados pela expressão do produto \star .

Existem diversos produtos $\hat{\star}$, sendo o mais famoso deles o produto $\hat{\star}$ dado por [55]

$$(g \hat{\star} h)(x) = \frac{1}{16\pi^4} \int d^4k d^4y g(x + \frac{1}{2}\Theta \cdot k) h(x + y) e^{i\sum_\mu k_\mu y_\mu} \quad (3.6)$$

onde $(\Theta \cdot k)_\mu := \sum_\nu \theta_{\mu\nu} k_\nu$. Conforme esperado, pode-se mostrar que esta expressão recai na definição anterior no caso de funções g e h quadrado integráveis de classe C^∞ . Nesta dissertação, consideraremos todas as funções bem comportadas, e portanto utilizaremos indistintamente as fórmulas (3.5) e (3.6).

Propriedades do produto \star

O produto \star tem diversas propriedades matemáticas, as quais serão sistematicamente utilizadas nas próximas seções, e encontram-se listadas a seguir. No que segue, f , g , h e u são funções quadrado integráveis de classe C^∞ quaisquer, e α , β , γ , δ são números complexos quaisquer.

1. É não-comutativo. Ou seja, $f \star g \neq g \star f$.
2. É associativo. Ou seja, $((f \star g) \star h) = (f \star (g \star h))$.

3. É bilinear. Ou seja,

$$(\alpha f + \beta g) \star (\gamma h + \delta u) = \alpha\gamma(f \star h) + \alpha\delta(f \star u) + \beta\gamma(g \star h) + \beta\delta(g \star u)$$

4. A conjugação complexa é uma involução. Ou seja, $(f \star g)^* = g^* \star f^*$.

5. A integração elimina o produto \star entre duas funções: $\int d^4x (f \star g)(x) = \int d^4x f(x)g(x)$.

6. A multiplicação \star por uma função constante é uma multiplicação normal. Ou seja,

$$\alpha \star f = \alpha f \quad .$$

7. Vale a regra do produto. Ou seja, $\partial_\mu(f \star g) = (\partial_\mu f) \star g + f \star (\partial_\mu g)$.

8. Se reduz ao produto pontual no caso comutativo. Ou seja,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (f \star g)(x) = f(x)g(x) \quad .$$

As propriedades 1 a 6 podem ser demonstradas utilizando a definição do produto \star (isto é, a equação 3.2), valendo-se somente das propriedades (linearidade, etc) da quantização de Weyl. Já as propriedades 7 e 8 dependem da forma explícita do produto \star (isto é, das equações 3.5 e 3.6). A propriedade 7, em particular, pode ser trivialmente demonstrada a partir da expressão (3.5).

3.2 Teorias de campos em espaços-tempos não-comutativos

Nesta seção, mostraremos como podemos utilizar o produto \star obtido na última seção a fim de construir uma teoria quântica de campos sobre um espaço-tempo não-comutativo. Em seguida, discutiremos a teoria livre, o termo de interação, e as regras de Feynman.

Construção do modelo $\lambda\phi^{*4}$

A primeira etapa da quantização de Groenewold-Moyal é a construção da deformação algébrica. Em seguida, devemos utilizar o produto \star assim construído a fim de deformarmos uma dada teoria clássica. Neste capítulo e no próximo, o modelo clássico em questão será o de um campo escalar real ϕ com interação do tipo $\lambda\phi^4$, cuja lagrangeana é

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 . \quad (3.7)$$

Quantizar significa trocar o produto pontual da lagrangeana acima pelo produto \star . Logo, a lagrangeana que descreve este modelo em um espaço-tempo com geometria não-comutativa é

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\star\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}m\phi^{*2} + \frac{\lambda}{4!}\phi^{*4} , \quad (3.8)$$

onde

$$\phi^{*n} := \underbrace{\phi\star\phi\star\dots\star\phi}_{n \text{ vezes}} .$$

A propriedade (5) do produto \star (vide a última seção) permite-nos eliminar o produto \star entre dois fatores. Isso sugere ser útil trabalharmos não com a lagrangeana, mas sim com a ação

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x)) ,$$

a qual se escreve, no caso da lagrangeana (3.8), na forma

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)(x) + \frac{1}{2}m\phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \right\} . \quad (3.9)$$

O sistema físico descrito pela ação acima é denominado modelo $\lambda\phi^{*4}$.

A teoria quântica do campo ϕ livre

A eliminação do produto \star nos dois primeiros termos da ação permite que nós lidemos com a teoria livre (dada pela ação acima no caso $\lambda = 0$) do mesmo modo que lidamos com a teoria livre do caso comutativo, caracterizado pela lagrangeana (3.7).

Com isso, obtemos dois resultados muito importantes relativos à construção de uma teoria quântica deste campo. Primeiro, a quantização do caso não-comutativo é igual à do caso comutativo. Ou seja, os operadores de criação são os mesmos, o espectro de energia é o mesmo, a energia do vácuo é a mesma, os modos do campo livre são os mesmos. Segundo, o propagador livre

$$\begin{array}{c} k \\ \longrightarrow \end{array}$$

no caso não-comutativo é o mesmo propagador livre do caso comutativo, a saber,

$$\Pi^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2} . \quad (3.10)$$

Ou seja, nada é alterado na teoria livre devido à quantização do espaço-tempo.

A teoria quântica do campo ϕ em interação

Tenda em vista esse resultado, podemos concluir que as diferenças entre a teoria comutativa e a teoria não-comutativa só começam a aparecer quando levamos em conta a interação do campo. Veremos, a seguir, que toda a contribuição da não-comutatividade consiste em alterar o fator de vértice das regras de Feynman. Obtidas as novas regras de Feynman, o problema de como lidar com teorias quânticas de campos em espaços-tempos não-comutativos estará completamente resolvido [56].

Utilizando novamente a propriedade (5) do produto \star , o termo de interação da ação

(3.9) pode ser reescrito na forma

$$S_{int}[\phi] = \frac{\lambda}{4!} \int d^4x (\phi \star \phi)^2(x) . \quad (3.11)$$

Escrevendo os campos em termos de suas transformadas de Fourier,²

$$\phi(x) = \int d^4k \tilde{\phi}(k) e^{ikx} ,$$

tem-se

$$\begin{aligned} (\phi \star \phi)(x) &= \int d^4k_1 d^4k_2 \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \left\{ e^{\frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu} \theta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial'_\nu} e^{ik_1x} e^{ik_2x'} \right\}_{x'=x} \\ &= \int d^4k_1 d^4k_2 \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) e^{-\frac{i}{2}(k_1 \wedge k_2)} e^{i(k_1x+k_2x)} , \end{aligned}$$

onde, a fim de simplificar a notação, definimos o produto antissimétrico

$$k_1 \wedge k_2 := \sum_{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu}(k_1)_\mu (k_2)_\nu . \quad (3.12)$$

Portanto, a partir da equação (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} S_{int}[\phi] &= \frac{\lambda}{4!} \int d^4x d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 e^{i(k_1+k_2+k_3+k_4)x} \times \\ &\quad \times F(k_1, k_2, k_3, k_4) \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) , \end{aligned}$$

onde definimos

$$F(k_1, k_2, k_3, k_4) := \exp \left\{ -\frac{i}{2} (k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4) \right\} .$$

Integrando em x , obtemos

²A fim de não sobrecarregar a notação, definimos aqui a transformada de Fourier de modo assimétrico: a transformada inversa é feita sem o fator $1/16\pi^4$, o qual é deixado para a transformada normal, a qual se escreve $\tilde{\phi}(k) = (1/16\pi^4) \int d^4x \phi(x) e^{-ikx}$.

$$S_{int}[\phi] = \frac{\lambda}{4!} \int d^4x d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ \times F(k_1, k_2, k_3, k_4) \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) ,$$

A partir da expressão acima, podemos constatar que a única alteração devido à não-comutatividade do espaço-tempo foi a inclusão do fator F .

Simetrização do fator F

Excetuando-se este fator F , o integrando é simétrico na permutação dos momenta k_i . Logo, a parte antissimétrica de F não contribui para a integral. A fim de expormos a quantidade que de fato contribui, devemos simetrizar a função F . Ao todo, são 24 termos que têm que ser somados e, ao fim, divididos por 24. Vejamos, a título de ilustração, o que ocorre com quatro deles.

$$\begin{aligned} & F(k_1, k_2, k_3, k_4) + F(k_1, k_2, k_4, k_3) + F(k_2, k_1, k_3, k_4) + F(k_2, k_1, k_4, k_3) \\ &= e^{-\frac{i}{2}k_1 \wedge k_2} \left(e^{-\frac{i}{2}k_3 \wedge k_4} + e^{-\frac{i}{2}k_4 \wedge k_3} \right) + e^{-i\frac{i}{2}k_2 \wedge k_1} \left(e^{-\frac{i}{2}k_3 \wedge k_4} + e^{-\frac{i}{2}k_4 \wedge k_3} \right) \\ &= e^{-\frac{i}{2}k_1 \wedge k_2} \left(e^{-\frac{i}{2}k_3 \wedge k_4} + e^{\frac{i}{2}k_3 \wedge k_4} \right) + e^{-\frac{i}{2}k_2 \wedge k_1} \left(e^{-\frac{i}{2}k_3 \wedge k_4} + e^{\frac{i}{2}k_3 \wedge k_4} \right) \\ &= 2 e^{-\frac{i}{2}k_1 \wedge k_2} \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right) + 2e^{-\frac{i}{2}k_2 \wedge k_1} \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right) \\ &= 2 \left(e^{-\frac{i}{2}k_1 \wedge k_2} + e^{-\frac{i}{2}k_2 \wedge k_1} \right) \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right) \\ &= 2 \left(e^{-\frac{i}{2}k_1 \wedge k_2} + e^{\frac{i}{2}k_1 \wedge k_2} \right) \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right) \\ &= 4 \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_2}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right) . \end{aligned}$$

Há um outro grupo de quatro termos cuja soma é igual, a saber,

$$F(k_3, k_4, k_1, k_2) + F(k_4, k_3, k_1, k_2) + F(k_3, k_4, k_2, k_1) + F(k_4, k_3, k_2, k_1) .$$

Juntos, esses oito termos totalizam

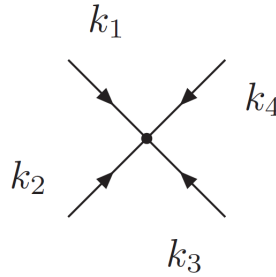
$$8 \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_2}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right)$$

Podemos lidar da mesma forma com os 16 termos restantes. Ao fim, obtemos que a forma simetrizada de F é dada pela expressão

$$F_S(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{3} \left\{ \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_2}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_3}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 \wedge k_4}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_4}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 \wedge k_3}{2}\right) \right\} .$$

As regras de Feynman do modelo $\lambda\phi^{*4}$

Tendo deduzido a expressão do propagador livre e o termo de interação da ação, podemos então analisar as regras de Feynman do modelo $\lambda\phi^{*4}$. Elas são praticamente as mesmas mesmas da teoria $\lambda\phi^4$, com a única diferença que o vértice



inclui o fator F_S , sendo dado, portanto, pela expressão

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{\lambda}{3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ \times \left\{ \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_2}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 \wedge k_4}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_3}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 \wedge k_4}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_1 \wedge k_4}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 \wedge k_3}{2}\right) \right\} . \quad (3.13)$$

onde as permutações dos momenta já foram computadas, eliminando assim o fator 4!

Com isso, estabelecemos o necessário para podermos lidar com o modelo $\lambda\phi^{*4}$. De posse destes resultados, analisaremos, na próxima seção, a correção a um laço ao propagador, a ação efetiva a um laço, e a sua não-renormalizabilidade devido à mistura ultravioleta/ infravermelho.

3.3 O problema da mistura ultravioleta/infravermelho

O modelo de teoria quântica de campos descrito na última seção é não-renormalizável em todas as ordens. Isto ocorre devido a uma propriedade da ação efetiva denominada mistura ultravioleta/infravermelho. Nesta seção 2.6, explicaremos este problema. Nos deteremos, por simplicidade, às contas a um laço, mas pode-se mostrar, sem maiores dificuldades, que o mesmo problema ocorre no caso geral de n laços [57].

A correção a um laço ao propagador do modelo $\lambda\phi^{*4}$

Partindo do propagador livre (3.10) e do vértice de interação (3.13), podemos montar a correção a um laço ao propagador. Para isso devemos juntar duas pernas do vértice da página anterior, as quais escolheremos como sendo as pernas k_2 e k_3 . Em seguida, devemos vinculá-las por conservação de momento. Denotaremos o momento interno ao laço por k . Ademais, devemos vincular k_1 e k_4 ao momento externo, que denotaremos por p .

Podemos, então, aplicar as regras de Feynman, a partir das quais obtemos que a correção a um laço ao propagador, denotada por $\Sigma^{(1)}$, é dada por

$$\Sigma^{(1)}(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_2^2 + m^2} V(k_1, k_2, k_3, k_4) D(k_1, k_2, k_3, k_4),$$

onde

$$D(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(k_2 + k_3) \delta^{(4)}(k_1 - p) .$$

Utilizando a expressão (3.13) e integrando em todos os k_i , obtemos

$$\Sigma^{(1)}(p) = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \left\{ 2 \cos^2\left(\frac{p \wedge k}{2}\right) + \cos\left(\frac{p \wedge p}{2}\right) \cos\left(\frac{k \wedge k}{2}\right) \right\} .$$

Devido à antissimetria do produto \wedge ,

$$p \wedge p = k \wedge k = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} & 2 \cos^2\left(\frac{p \wedge k}{2}\right) + \cos\left(\frac{p \wedge p}{2}\right) \cos\left(\frac{k \wedge k}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{k \wedge p}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{k \wedge p}{2}\right) + 2 \\ &= \cos(k \wedge p) + 2 . \end{aligned}$$

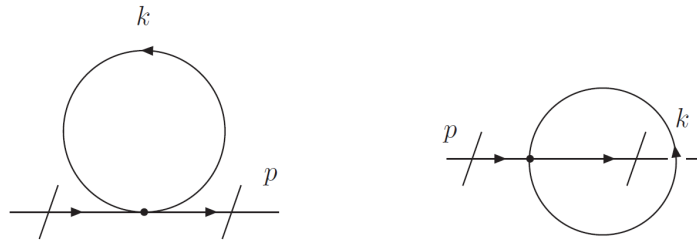
Por fim, obtemos que a correção a um laço ao propagador é dada por

$$\Sigma^{(1)}(p) = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2 + \cos(k \wedge p)}{k^2 + m^2} . \quad (3.14)$$

Podemos separar esta expressão em dois termos, ditos planar e não-planar,

$$\Sigma^{(1)}(p) = \underbrace{\frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2}}_{\text{planar}} + \underbrace{\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\cos(k \wedge p)}{k^2 + m^2}}_{\text{não planar}} ,$$

que denominamos, respectivamente, de $\Sigma_{pn}^{(1)}$ e $\Sigma_{np}^{(1)}$. Suas representações gráficas, oriundas das convenções estabelecidas nos modelos matriciais, são dadas, respectivamente, por



A parte planar, a menos de um fator multiplicativo, é igual ao propagador a um laço do modelo $\lambda\phi^4$. A parte não-planar envolve um cosseno no integrando, e é neste fator que está o problema de renormalizabilidade do modelo $\lambda\phi^{*4}$. Mas antes de analisarmos a renormalizabilidade, vejamos como a função $\Sigma^{(1)}$ pode ser regularizada.

A regularização de $\Sigma^{(1)}$

Utilizando a igualdade

$$\frac{1}{a} = \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha a} , \quad (3.15)$$

podemos reescrever o termo planar de $\Sigma^{(1)}$ na forma

$$\begin{aligned} \Sigma_{pm}^{(1)} &= \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{\lambda}{48\pi^4} \int d^4k \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha(k^2+m^2)} \\ &= \frac{\lambda}{48\pi^4} \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha m^2} \int d^4k e^{-\alpha k^2} \\ &= \frac{\lambda}{48\pi^4} \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha m^2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{48\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na expressão acima, omitimos a dependência (constante) no momento externo p .

Vejamos agora como podemos reescrever o termo não-planar de $\Sigma^{(1)}$. Para facilitar os cálculos, utilizaremos a seguinte decomposição,

$$\Sigma_{np}^{(1)}(p) = \sum_{\sigma=\pm 1} S^{\sigma}(p) , \quad (3.17)$$

onde

$$S^{\sigma}(p) := \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\sigma(k \wedge p)}}{k^2 + m^2} \right) .$$

Cada um dos termos acima se reescreve, por meio da igualdade (3.15), do seguinte modo,

$$S^{\sigma}(p) = \frac{\lambda}{12(2\pi)^4} \int d^4k e^{i\sigma k \wedge p} \int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha(k^2+m^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{192\pi^4} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \int d^4k e^{-\alpha(k^2 - i\frac{\sigma}{\alpha} k \wedge p)} \\
&= \frac{\lambda}{192\pi^4} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \int d^4k e^{-\alpha(k^2 - i\frac{\sigma}{2\alpha} \tilde{p})^2 - \frac{p \wedge p}{4\alpha}} \\
&= \frac{\lambda}{192\pi^4} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2 - \frac{\tilde{p}^2}{4\alpha}} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{192\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2 - \frac{\tilde{p}^2}{4\alpha}} ,
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\tilde{p}_\mu := \sum_\nu \Theta_{\mu\nu} p_\nu$$

Vale observar que

$$\tilde{p}^2 = \sum_{\mu,\eta,\nu=1}^4 p_\mu \Theta_{\mu\eta}^T \Theta_{\eta\nu} p_\nu = \theta^2 p^2 .$$

Observemos que S^σ não depende de σ . Substituindo em (3.17), obtemos

$$\Sigma_{np}^{(1)}(p) = \frac{\lambda}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2 - \frac{\tilde{p}^2}{4\alpha}} . \quad (3.18)$$

A integral (3.16) diverge no limite inferior, e deve ser regularizada. Já a integral (3.18) converge para valores não nulos de p . Entretanto, se quisermos lidar com qualquer valor de p , devemos regularizá-la também. Um dos modos de efetuar estas duas regularizações é incluir nos integrandos um fator $e^{-1/4\Lambda^2\alpha}$, o qual deve ser eliminado, ao final da conta, tomando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. É conveniente definirmos também a quantidade Λ efetivo,

$$\Lambda_{ef}^2(p) := \frac{1}{4\tilde{p}^2 + \Lambda^{-2}} .$$

Assim, os propagadores a um laço regularizados se escrevem na forma

$$\begin{aligned}
\Sigma_{pn}^{(1)}(\Lambda) &= \frac{\lambda}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2 - \frac{1}{4\Lambda^2\alpha}} , \\
\Sigma_{np}^{(1)}(\Lambda, p) &= \frac{\lambda}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2 - \frac{1}{4\Lambda_{ef}^2(p)\alpha}} .
\end{aligned}$$

Essas integrais podem ser expressas em termos da função de Bessel modificada de primeira espécie K_1 [58],

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha A - \frac{B}{4\alpha}} = 4 \sqrt{\frac{A}{B}} K_1 \left(\sqrt{AB} \right). \quad (3.19)$$

Assim, as correções aos propagadores se escrevem como

$$\Sigma_{pn}^{(1)}(\Lambda) = \frac{\lambda m^2}{12\pi^2} \frac{1}{m/\Lambda} K_1 \left(\frac{m}{\Lambda} \right),$$

$$\Sigma_{np}^{(1)}(\Lambda, p) = \frac{\lambda m^2}{24\pi^2} \frac{1}{m/\Lambda_{ef}} K_1 \left(\frac{m}{\Lambda_{ef}} \right).$$

A função K_1 admite, para z pequeno, a expansão

$$\frac{1}{z} K_1(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \ln z + \text{constante} + O(z^2).$$

Uma vez que estaremos interessados em analisar o comportamento dos propagadores na vizinhança de $p = 0$, utilizaremos esta expansão nas funções $\Sigma^{(1)}$. Assim, por fim, temos

$$\Sigma_{pn}^{(1)}(\Lambda) \approx \frac{\lambda}{48\pi^2} \left(4\Lambda^2 + m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right),$$

$$\Sigma_{np}^{(1)}(\Lambda, p) \approx \frac{\lambda}{96\pi^2} \left(4\Lambda_{ef}^2(p) + m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda_{ef}^2(p)} \right) \right).$$

A primeira expressão diverge se retirarmos o corte Λ . Já a segunda, diverge se tirarmos o corte e tomarmos o limite $p \rightarrow 0$. Conforme veremos, é nesta divergência do termo não-planar que está todo o problema de renormalizabilidade da teoria.

O propagador corrigido a um laço

O propagador corrigido a um laço, $\Pi^{(1)}$, pode ser escrito em termos do propagador livre, $\Pi^{(0)}$, e da correção a um laço, $\Sigma^{(1)}$, segundo a expressão regularizada

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}(\Lambda, p) &= \Pi^{(0)}(p) + \left(\Pi^{(0)}(p) \Sigma^{(1)}(\Lambda, p) \Pi^{(0)}(p) \right) \\ &= \frac{1}{p^2 + m^2} + \left(\frac{1}{p^2 + m^2} \Sigma^{(1)}(\Lambda, p) \frac{1}{p^2 + m^2} \right) \\ &= \frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{\Sigma^{(1)}(\Lambda, p)}{(p^2 + m^2)^2} .\end{aligned}$$

O último membro desta igualdade pode ser reescrito do seguinte modo. Para b pequeno, vale a expansão

$$\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a-b)} + \mathcal{O}(b^2) .$$

Descartando o termo em ordem b^2 , temos

$$\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a-b)} = \frac{a-b}{a(a-b)} + \frac{b}{a(a-b)} = \frac{a}{a(a-b)} = \frac{1}{a-b} .$$

Ou seja, se supusermos $\Sigma^{(1)}$ pequeno e descartarmos termos de ordem $(\Sigma^{(1)})^2$, podemos escrever o propagador corrigido a um laço na forma³

$$\Pi^{(1)}(\Lambda, p) = \frac{1}{p^2 + m^2 - \Sigma^{(1)}(\Lambda, p)} . \quad (3.20)$$

Poderíamos analisar a renormalizabilidade diretamente em termos da finitude deste denominador, mas (seguindo Minwalla e colaboradores) optamos por utilizar a expressão acima para escrever a ação efetiva a um laço, e a partir dela analisar a renormalizabilidade. Acreditamos que deste modo ficará mais evidente o apelo físico da renormalização.

³Isso corresponde a limitarmos a nossa expansão perturbativa ao termo de ordem λ . Mas, uma vez que o único gráfico de ordem λ do modelo $\lambda\phi^{*4}$ é também o único gráfico a um laço de duas patas, essa aproximação também corresponde a ficarmos em ordem \hbar .

Análise da renormalizabilidade da ação efetiva a um laço

Uma função muito importante na teoria quântica de campos é a ação efetiva. A partir dela é possível obtermos uma série de quantidades fisicamente relevantes, tais como, por exemplo, os gráficos de Feynman da teoria.

Estas quantidades devem ser bem comportadas, e portanto a ação efetiva deve ser igualmente bem comportada. Em teoria quântica de campos, ser bem comportado significa ser renormalizável. Ou seja, é necessário que seja possível definir os parâmetros das equações da teoria de tal modo que as quantidades fisicamente relevantes sejam preditas com valores finitos [59]. Vejamos se isso é possível no caso da ação efetiva do modelo $\lambda\phi^{*4}$.

Para tal, precisamos reescrever a ação de tal modo a incorporar a correção quântica $\Sigma^{(1)}$. Isto pode ser feito do seguinte modo. Partimos da ação livre no espaço de posição, e substituímos nos campos as suas transformadas de Fourier. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
 S[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \left(-\square + m^2 \right) \phi(x) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k) e^{ikx} \right) \left(-\square + m^2 \right) \left(\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(p) e^{ipx} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ikx} \left(p^2 + m^2 \right) e^{ipx} \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(p) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4p \left(p^2 + m^2 \right) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(p) \delta^4(p+k) \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^4} \int d^4p \left(p^2 + m^2 \right) \tilde{\phi}(-p) \tilde{\phi}(p)
 \end{aligned}$$

O termo $\Sigma^{(1)}$ apareceu no propagador (3.20) como uma correção na massa. Podemos incluí-lo, de modo ad hoc, na expressão acima, obtendo uma ação corrigida a um laço. Esta nova ação é chamada ação efetiva $\Gamma^{(1)}$, e pode ser escrita (descartando, por simplicidade,

o fator numérico em frente à integral) segundo a igualdade [60]

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int d^4p \left(p^2 + m^2 - \Sigma^{(1)}(\Lambda, p) \right)^{-1} \phi(p) \phi(-p) . \quad (3.21)$$

Definindo a quantidade, que independe de p ,

$$\overline{m}^2 := m^2 + \Pi_{pn} ,$$

temos

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int d^4p \left\{ p^2 + \overline{m}^2 - \frac{(\lambda/24\pi^2)}{\Lambda^{-2} + \theta^2 p^2} - \frac{\lambda m^2}{96\pi^2} \ln \left(m^2 \Lambda^{-2} + m^2 \theta^2 p^2 \right) \right\} \phi(p) \phi(-p) . \quad (3.22)$$

A integral acima é finita na presença do parâmetro Λ . Este foi incluído na regularização, e deve ser retirado em algum momento. Se o retirarmos antes de calcularmos a integral, ela divergirá. Por outro lado, se optarmos por calcular primeiro a integral, o parâmetro não pode ser retirado. Ou seja, há uma divergência inevitável. Esta situação é denominada *mistura ultravioleta/infravermelho*. Vejamos que este problema de fato ocorre.

Caso 1

Uma estratégia para se obter a ação efetiva seria primeiramente calcularmos a integral (3.22) e depois tomarmos o limite. Podemos escrevê-la na forma

$$\Gamma^{(1)}[\phi, \widehat{m}^2] = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int d^4p \left\{ p^2 + \widehat{m}^2(p) \right\} \phi(p) \phi(-p) .$$

Uma vez que o campo ϕ é uma função de decrescimento rápido, podemos supor que esta integral seja realizável. Entretanto ela fica escrita como um funcional de

$$\widehat{m}^2(\Lambda, p) = \overline{m}^2 - \frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{1}{\Lambda^{-2} + \theta^2 p^2} - \frac{\lambda m^2}{96\pi^2} \ln \left(m^2 \Lambda^{-2} + m^2 \theta^2 p^2 \right) .$$

Esta função não é bem comportada quando tomamos $\Lambda \rightarrow \infty$, pois não há em \overline{m} termos com a mesma dependência funcional que os termos divergentes, e que permitam absorver as divergências nos parâmetros nus da teoria. Ou seja, a teoria é não renormalizável.

Vale observar que os dois últimos termos da expressão acima (que são os termos que divergem quando tomamos $\Lambda \rightarrow \infty$) vieram do termo não-planar de $\Sigma^{(1)}$, e portanto a não-renormalizabilidade decorre da existência da não-comutatividade espaço-temporal.

Caso 2

Mudemos então de estratégia. Começemos por tomar $\Lambda \rightarrow \infty$ em (3.22),

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = \int d^4p \left\{ p^2 + \overline{m}^2 - \frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{1}{\theta^2 p^2} - \frac{\lambda m^2}{96\pi^2} \ln \left(m^2 \theta^2 p^2 \right) \right\} \phi(p) \phi(-p) .$$

O integrando obtido é ilimitado na vizinhança de $p = 0$. Como estamos em um quadro perturbativo, os diagramas de ordem superior carregam termos do tipo $(1/p^2)^n$, os quais divergem de tal forma que a integral não pode ser realizada. Ou seja, na série perturbativa, o corte não pode ser retirado antes de calcularmos a integral.

Portanto, concluímos que, uma vez que as divergências encontradas não podem ser absorvidas nos parâmetros nus, o modelo $\lambda\phi^{*4}$ é não-renormalizável em ordem igual ou superior a λ^2 . Portanto, a teoria é não-renormalizável.

3.4 O modelo de Gurău e colaboradores

No segundo quartel do século XX, época na qual foi criada a eletrodinâmica quântica, a existência de uma não-renormalizabilidade na teoria era vista como sendo uma mazela inadmissível, a qual fadava a teoria ao descarte. Com o tempo, a não-renormalizabilidade passou, pouco a pouco, a ser mais tolerada. Atualmente, sabemos que ela pode ser somente um indício de que estamos lidando com uma teoria efetiva.

Assim, por exemplo, a teoria de Fermi da interação fraca, que foi desprezada por décadas devido ao fato de ser não-renormalizável, não mais é vista, hoje em dia, como sendo uma teoria absolutamente equivocada, mas sim como sendo um regime efetivo de uma teoria mais fundamental, a teoria eletro-fraca de Weinberg-Salam [61]. Poderíamos interpretar do mesmo modo a ocorrência da mistura uv/iv , concluindo assim que a não-comutatividade canônica deve ser somente um regime efetivo de uma teoria ainda desconhecida.

Se tal atitude seria, por um lado, aceitável, por outro, levaria a um descrédito muito grande do programa da teoria quântica de campos em espaços-tempos não-comutativos. Por isso, desde 1999, quando o problema da mistura foi apresentado por Shiraz Minwalla e colaboradores, inúmeros defensores da não-comutatividade têm buscado solucioná-lo.

Após algumas tentativas, ficou claro um resultado muito interessante. Apesar da mistura ocorrer nos cálculos perturbativos (ou seja, quando levamos em conta a interação), ela é uma propriedade que independe da forma da interação. Portanto, o problema não pode ser resolvido simplesmente mudando o termo de interação

$$\frac{\lambda}{4!} \phi^{*4}$$

por alguma outra expressão mais complexa. Ou seja, caso houvesse algum modelo no qual não ocorresse a mistura, ele teria que diferir do modelo $\lambda\phi^{*4}$ mesmo na parte livre.

O primeiro modelo de teoria quântica de campos em espaços-tempos não-comutativos livre da mistura foi construído em 2003 por Harald Grosse e Raimar Wulkenhaar [62].

Eles incluíram um novo termo na lagrangeana (3.8) do modelo $\lambda\phi^{*4}$, a saber,

$$2\Omega \left(\phi \sum_{\nu} \Theta_{\mu\nu}^{-1} x_{\nu} \right) \star \left(\phi \sum_{\nu} \Theta_{\mu\nu}^{-1} x_{\nu} \right), \quad \Omega = \text{constante}.$$

Em seguida, eles demonstraram que o modelo assim obtido é renormalizável. Pelo fato deste termo ser do tipo ϕ^2 , esse procedimento, conforme faz-se necessário, não altera a interação, e sim o propagador livre [63]. Esse procedimento de inclusão de um termo quadrático nos campos com o único propósito de eliminar a mistura ficou conhecido na literatura como *vulcanização* [64].

Apesar de ter resolvido o problema da renormalizabilidade, o termo proposto por Grosse e Wulkenhaar, ao expor explicitamente as coordenadas x_{ν} , quebra a liberdade de translação. Por isso, essa solução não foi considerada de todo satisfatória, e diversos físicos continuaram buscando modelos que não apresentassem a mistura e que fossem invariantes por translação. Como resultado dessa busca, um segundo modelo renormalizável foi apresentado por Răzvan-Gheorghe Gurău e colaboradores [65]. Dando continuidade ao programa trilhado por Grosse e Wulkenhaar, eles incluíram o termo⁴

$$\phi \star \left(\frac{a}{2\theta^2 \square} \phi \right), \quad a = \text{constante} \geq 0, \quad (3.23)$$

à lagrangeana do modelo $\lambda\phi^{*4}$, obtendo assim a nova ação

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi)(x) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - \frac{1}{2} \left(\phi \frac{a}{\theta^2 \square} \phi \right)(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi^{*4}(x) \right\}. \quad (3.24)$$

O d'Alembertiano \square é um escalar de Lorentz, e portanto esta ação também é um invariante, em particular por translações. O operador \square^{-1} deve ser entendido como a transformada inversa de Fourier de $-1/p^2$, e todos os cálculos devem ser feitos no espaço de Fourier.

⁴É interessante observar que há uma grande variação de notações para este termo, que por vezes é escrito como $\phi \star (\phi / \square \sqrt{\Theta})$ ou $\phi \star (\phi / \sum_{\mu\nu\eta\gamma} \partial_{\mu} \Theta_{\mu\nu} \Theta_{\eta\gamma} \partial_{\nu})$. Se a matriz Θ estiver escrita na forma diagonal em blocos (que, conforme vimos no capítulo 1, é a forma mais reduzida possível, explicitando os subespaços invariantes de dimensão 2), todas estas notações são equivalentes.

O modelo Gurău e colaboradores foi por eles denominado modelo $1/p^2 - \lambda\phi^{*4}$. A seguir, apresentaremos as suas regras de Feynman e mostraremos como a vulcanização (3.23) elimina a mistura uv/iv , tornando este modelo renormalizável.

As regras de Feynman do modelo de Gurău e colaboradores

O termo de interação do modelo $1/p^2 - \lambda\phi^{*4}$ é igual ao termo de interação do modelo $\lambda\phi^{*4}$. Logo, o vértice de interação do modelo em questão também é dado pela expressão (3.13).

Por outro lado, uma vez que a vulcanização adiciona à lagrangeana um termo de ordem ϕ^2 , o propagador livre é alterado. A partir da ação livre no espaço de momenta,

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4p \phi(p) \left\{ p^2 + m^2 + \frac{a}{\theta^2 p^2} \right\} \phi(-p) ,$$

obtemos que o propagador livre

$$\begin{array}{c} k \\ \longrightarrow \end{array}$$

é dado por

$$\Pi^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2 + \frac{a}{\theta^2 k^2}} . \quad (3.25)$$

A fim de garantirmos a positividade do propagador, devemos impor que a seja não-negativo. Para simplificar a notação, incorporaremos o denominador θ^2 na constante a .

Uma outra forma de se escrever o propagador livre

Este propagador é mais complexo que o propagador do modelo $\lambda\phi^{*4}$, e isso torna algumas contas significativamente mais difíceis. Entretanto, se supusermos que $a \neq \frac{m^2}{2}$, podemos utilizar um algebrismo que nos permite colocar a expressão (3.25) em um formato muito

parecido a (3.10). Primeiramente, escrevemos

$$\frac{1}{k^2 + m^2 + \frac{a}{k^2}} = \frac{k^2}{\left(k^2 + \frac{m^2}{2}\right)^2 - M^4}, \quad \text{onde } M^2 := \sqrt{\frac{m^4}{4} - a^2}.$$

Em seguida, utilizamos a decomposição em frações parciais

$$\frac{c}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{a-c}{b}}{a+b} + \frac{1 - \frac{a-c}{b}}{a-b} \right),$$

por meio da qual podemos escrever

$$\frac{1}{k^2 + m^2 + \frac{a}{k^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{m^2}{2M^2}}{k^2 + \frac{m^2}{2} + M^2} + \frac{1 - \frac{m^2}{2M^2}}{k^2 + \frac{m^2}{2} - M^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=\pm 1} \frac{1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}}{k^2 + \frac{m^2}{2} + \gamma M^2}.$$

Portanto, obtemos que

$$\Pi^{(0)}(k) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=\pm 1} \frac{1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}}{k^2 + \frac{m^2}{2} + \gamma M^2}. \quad (3.26)$$

Ou seja, conseguimos escrever o propagador de tal modo que no denominador apareça somente o momento ao quadrado somado a uma constante. Por fim, utilizamos a identidade (3.15), obtendo

$$\Pi^{(0)}(k) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2} \right) \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha \left(k^2 + \frac{m^2}{2} + \gamma M^2 \right)}.$$

O propagador a um laço do modelo de Gurău e colaboradores

Queremos agora analisar a renormalizabilidade a um laço. Como no caso da seção 2.6, comecemos por calcular a correção a um laço ao propagador, $\sigma^{(1)}$.

A conta que temos que fazer é completamente análoga ao caso do modelo $\lambda\phi^{*4}$, mudando somente qual é o propagador que liga as patas k_2 e k_3 do vértice de interação (3.13).

Assim, obtemos

$$\Sigma^{(1)}(p) = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2 + \cos(k \wedge p)}{k^2 + m^2 + \frac{a}{k^2}} .$$

Tal qual ocorre no modelo $\lambda\phi^{*4}$, a parte planar da expressão acima, $\Sigma_{pn}^{(1)}$, não depende de p e pode ser absorvida na massa m . Portanto, nos limitaremos a analisar a parte não-planar da expressão acima, $\Sigma_{np}^{(1)}$. Fazemos então a decomposição em S^σ , a partir da qual obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_{np}^{(1)}(p) &= \frac{\lambda}{24(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm 1} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}\right) \int d^4k \int_0^\infty d\alpha e^{i\sigma(k \wedge p) - \alpha(k^2 + \frac{m^2}{2} + \gamma M^2)} \\ &= \frac{\lambda}{192\pi^4} \sum_{\gamma=\pm 1} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}\right) \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(\frac{m^2}{2} + \gamma M^2)} \int \frac{d^4k}{16\pi^4} e^{-k^2\alpha + i\sigma(k \wedge p)} \\ &= \frac{\lambda}{192\pi^2} \sum_{\gamma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}\right) \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha(\frac{m^2}{2} + \gamma M^2) - \frac{p^2}{4\alpha}} . \end{aligned}$$

Definindo

$$\tilde{m}_\gamma^2 := \frac{m^2}{2} + \gamma M^2 ,$$

a integral acima é posta em um formato muito semelhante à expressão (3.18),

$$\Sigma_{np}^{(1)}(p) = \frac{\lambda}{192\pi^2} \sum_{\gamma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}\right) \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha\tilde{m}_\gamma^2 - \frac{p^2}{4\alpha}} .$$

e portanto podemos regularizá-la do mesmo modo que fizemos no caso do modelo $\lambda\phi^{*4}$.

Assim, utilizando a igualdade (3.19), obtemos

$$\Sigma_{np}^{(1)}(\Lambda, p) = \frac{\lambda \tilde{m}_\gamma^2}{192\pi^2} \sum_{\gamma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}\right) \frac{1}{\tilde{m}_\gamma/\Lambda_{ef}} K_1\left(\frac{\tilde{m}_\gamma}{\Lambda_{ef}}\right) ,$$

que na vizinhança de $p = 0$ pode ser aproximado por

$$\Sigma_{np}^{(1)}(\Lambda, p) \approx \frac{\lambda}{192\pi^2} \sum_{\gamma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}\right) \left(\frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{1}{\Lambda^{-2} + \theta^2 p^2} + \frac{\lambda \tilde{m}_\gamma}{192\pi^2} \ln\left(\tilde{m}_\gamma^2 \Lambda^{-2} + \tilde{m}_\gamma^2 \theta^2 p^2\right) \right) .$$

A renormalizabilidade do modelo de Gurău e colaboradores

Analiseemos agora a renormalizabilidade do modelo de Gurău e colaboradores. A demonstração por eles apresentada é extremamente complexa, de tal modo que optamos por apresentar aqui uma outra demonstração, a qual é devida a Daniel Blashke e colaboradores [66]. A ideia destes autores foi refazer exatamente a conta que Minwalla e colaboradores fizeram para o modelo $\lambda\phi^{*4}$, e mostrar que neste caso não ocorre a mistura uv/iv .

Por um lado, a demonstração de Gurău permite uma melhor compreensão da mistura, por outro, a de Blashke é mais elementar. Uma vez que Blashke utiliza a decomposição apresentada nas páginas anteriores, sua demonstração é válida somente para $a \neq \frac{m^2}{2}$, restrição esta que não há no trabalho de Gurău.

Assim, a equação (3.21) se escreve no caso do modelo de Gurău e colaboradores na forma

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int d^4p \left\{ p^2 + m^2 + \frac{a}{p^2} - \Sigma^{(1)}(\Lambda, p) \right\} \phi(p) \phi(-p) ,$$

onde o termo $\Sigma^{(1)}$ é dado por

$$\Sigma^{(1)}(\Lambda, p) = \underbrace{\Sigma_{pn}^{(1)}(\Lambda)}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{1}{\Lambda^{-2} + \theta^2 p^2}}_{\text{termo do tipo } 1/p^2} + \underbrace{\sum_{\gamma=\pm 1} \left(1 + \gamma \frac{m^2}{2M^2}\right) \frac{\lambda \tilde{m}_\gamma^2}{96\pi^2} \ln \left(\tilde{m}_\gamma \Lambda^{-1} + \tilde{m}_\gamma \theta p\right)}_{\text{termo do tipo } \ln p} .$$

Pode-se mostrar que o termo do tipo $\ln p$ é uma divergência suave, que não causa maiores problemas [67]. Portanto, não nos preocuparemos com ele. Assim, temos dois termos divergentes problemáticos, um constante e o outro do tipo $1/p^2$. O primeiro pode ser absorvido na constante m^2 por meio de uma renormalização infinita⁵

$$m_R^2 = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ m^2 - \Sigma_{pn}^{(1)}(\Lambda) \right\}$$

⁵Uma vez que ignoramos o termo do tipo $\ln p$ e todos os demais termos da expansão da função de Bessel K_1 , os resultados apresentados abaixo são meramente qualitativos. As expressões precisas podem ser encontradas no artigo de Blashke e colaboradores.

e o segundo pode ser absorvido no termo advindo da vulcanização por meio de uma renormalização finita,

$$\frac{a_R}{p^2} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a}{p^2} - \frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{1}{\Lambda^{-2} + \theta^2 p^2} \right\}.$$

Neste contexto, fica evidente como o parâmetro Λ deve ser retirado: o limite deve ser tomado de modo a manter finita a quantidade m_R e de modo a zerar a quantidade a_R [68].

Temos agora um panorama muito mais claro de como ocorre a perda da renormalizabilidade em teorias não-comutativas e de como ela pode ser restaurada. No termo de interação ocorre uma divergência do tipo $1/p^2$, o qual inviabiliza o cálculo da ação efetiva e dos processos físicos obteníveis a partir dela. Para que a integral da ação efetiva seja realizável, faz-se necessário incluir no integrando um termo do tipo $1/p^2$ que cancele o termo advindo da interação. Esse termo pode ser incluído no modelo $\lambda\phi^{*4}$ por meio de uma vulcanização da lagrangeana. Isso foi o que Gurău e colaboradores fizeram.

Conclusões do capítulo 3

Neste capítulo, foi apresentada a formulação de teorias quânticas de campos renormalizáveis em espaços-tempos com geometria não-comutativa. Vimos que um elemento fundamental é a idéia de quantização por deformação. Demonstramos como essa quantização induz uma álgebra nos campos definidos em espaços-tempos não-comutativos, e por fim discutimos a renormalizabilidade de alguns modelos, com especial ênfase no modelo proposto recentemente por Gurău e colaboradores. Este modelo nos permitiu compreender com clareza como aparece a mistura uv/iv e como ela pode ser eliminada.

Capítulo 4

A renormalizabilidade do potencial efetivo CJT

Neste capítulo, apresentaremos o potencial efetivo no formalismo de Cornwall-Jackiw-Tomboulis, e discutiremos, em diversos modelos particulares, a sua renormalizabilidade. A apresentação que faremos está organizada do seguinte modo.

Primeiro, revisaremos o conceito de funcional gerador das funções de Green, discutiremos a transformada de Legendre e a sua utilização na obtenção do potencial efetivo (seção 4.1). Depois, apresentaremos o formalismo de Cornwall-Jackiw-Tomboulis (seção 4.2). Em seguida, demonstraremos um resultado bastante conhecido, a saber, a renormalizabilidade do potencial efetivo CJT no caso do modelo $\lambda\varphi^4$ (seção 4.3). Depois, apresentaremos a perda da renormalizabilidade deste potencial efetivo quando há uma não-comutatividade espaço-temporal (seção 4.4). Na última seção, apresentaremos a nossa contribuição a este debate. Mostraremos como a vulcanização proposta por Gurău e colaboradores permite recuperarmos a renormalizabilidade do potencial efetivo CJT (seção 4.5). Por fim, discutiremos o procedimento de regularização empregado, e a sua validade.

4.1 Funcionais geradores, ação efetiva e potencial efetivo

Dado um campo quântico operatorial ϕ (que suporemos ser escalar e real), definimos [69]

$$Z[J] := \langle 0 | T \left\{ \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x J(x)\phi(x) \right) \right\} | 0 \rangle .$$

Na expressão acima, T é o produto temporalmente ordenado e $|0\rangle$ é o vetor normalizado do espaço de Fock associado ao estado de vácuo. As derivadas funcionais de Z podem ser escritas na forma

$$(-i\hbar)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle .$$

Identificamos o membro direito da equação acima com as funções de Green de n pontos da teoria [70]. Assim, temos que a função Z gera, por meio de derivadas funcionais, as funções de Green – ou equivalentemente, os gráficos de Feynman – da teoria. Pode-se mostrar que nestas funções de Green estão computados todos os termos de n pontos, incluindo os gráficos desconexos. A fim de obtermos somente os gráficos conexos, devemos trabalhar com a função W , a qual é definida por

$$W[J] = -i\hbar \ln Z[J] .$$

Pode-se mostrar que as derivadas funcionais de W geram as funções de Green conexas de n pontos. Caso queiramos gerar funções de Green não somente conexas, mas também irredutíveis a uma partícula, devemos lidar com a transformada de Legendre de W .

A transformada de Legendre

A transformada de Legendre de uma função convexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por [71]

$$g(y) = \min_{x \in \mathbb{R}} \{ f(x) - xy \} . \quad (4.1)$$

Uma vez que a função f é convexa, esta definição é unívoca. Até aqui não exigimos que a função f seja diferenciável. Caso consideremos que ela seja, podemos obter o mínimo da diferença acima derivando a expressão entre chaves com relação a x e igualando o resultado a zero. Assim, obtemos $y = \frac{f(x)}{dx}$. Invertendo esta a relação, obtemos o valor de x associado ao mínimo da diferença (4.1). Este valor de x é uma função de y , que denotaremos por $\tilde{x}(y)$. Assim, a expressão (4.1) pode ser escrita como

$$g(y) = f(\tilde{x}(y)) - \tilde{x}(y) y . \quad (4.2)$$

Esta é a forma na qual a transformada de Legendre é, em geral, definida nos livros-texto. Pode-se mostrar facilmente que a construção acima é extensível ao caso de funcionais. Assim, podemos efetuar uma transformada de Legendre na função W .

A ação efetiva

Escrevemos o análogo da variável y , que denominaremos de φ , segundo a relação

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} . \quad (4.3)$$

É importante observar que enquanto $\phi(x)$ é um operador, $\varphi(x)$ é um número real. A partir da igualdade acima, podemos ver que o campo φ é o valor esperado do campo ϕ no vácuo na presença da fonte J .

Invertendo a expressão (4.3), obtemos $\tilde{J}(\varphi)$. Em analogia à expressão (4.2), construímos a transformada de Legendre, definindo assim uma nova função, que denominaremos Γ ,

$$\Gamma[\varphi] = W[\tilde{J}(\varphi)] - \int d^4x \tilde{J}(\varphi(x))\varphi(x) . \quad (4.4)$$

Pode-se mostrar que $\Gamma[\varphi]$ é o funcional gerador das funções de Green irredutíveis a uma partícula (isto é, das funções de Green que não podem ser tornadas desconexas cortando-se uma linha interna). Esta função Γ é denominada *ação efetiva*.

Derivando funcionalmente Γ e utilizando a regra da cadeia funcional, obtemos [72]

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)} = \int d^4x \left\{ \underbrace{\left(\frac{\delta W[J(\varphi)]}{\delta J(\varphi(x))} - \varphi(x) \right)}_{\text{zero}} \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)} \right\} - J(\varphi(y)) .$$

Ou seja, obtemos

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(\varphi(x)) .$$

Comparando a igualdade acima com a igualdade (4.3), nos parece que a transformada de Legendre é involutiva. Pode-se mostrar que de fato ela o é. Assim, podemos considerar que a quantidade J volta a ser uma quantidade independente. Uma vez que esta é uma fonte fictícia, que foi incluída na teoria somente para construir as funções de Green, podemos agora, ao final de todos os desenvolvimentos, tomá-la como sendo zero. Esta situação é denominada *ponto físico*. Assim, obtemos a chamada *equação de gap*,

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = 0 . \quad (4.5)$$

O potencial efetivo

Podemos escrever a ação efetiva em termos do chamado potencial efetivo, o qual é denotado por V_{ef} e definido por

$$\Gamma[\varphi] = \int d^4x V_{ef}(\varphi(x)) .$$

No caso de um campo φ constante e considerando a teoria no ponto físico, obtemos

$$\frac{dV_{ef}(\varphi)}{d\varphi} = 0 .$$

Pode-se mostrar que o potencial efetivo é igual ao potencial clássico mais uma correção quântica. Assim, a equação acima informa o valor esperado do campo no estado de vácuo (mínimo do potencial) incluindo correções quânticas. Quando ela admite soluções não nulas (vale lembrar que não há mais fontes externas), diz-se que há uma quebra espontânea de simetria [73].

4.2 O formalismo de Cornwall-Jackiw-Tomboulis

O formalismo de Cornwall-Jackiw-Tomboulis (que a partir de agora abreviaremos por CJT) é uma extensão do formalismo apresentado na seção anterior [74]. Os autores definem o seguinte funcional,

$$W[J, K] := \ln \langle 0 | T \left\{ \exp \left(\int d^4x J(x)\phi(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x)K(x, y)\phi(y) \right) \right\} | 0 \rangle ,$$

onde, por simplicidade, consideramos $\hbar = 1$ e ignoramos os números complexos. Caso tomemos $K = 0$, esta expressão recai no funcional $W[J]$ da seção anterior. Eles definiram $\varphi(x)$ e $G(x, y)$ segundo

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(x)} ,$$

$$G(x, y) = -\varphi(x)\varphi(y) + 2 \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(x, y)} ,$$

É imediato verificar que $G(x, y)$ no ponto físico é a função de Green conexa de 2 pontos,

$$G(x, y) \Big|_{J=K=0} = \langle 0 | T \{ \phi(x)\phi(y) \} | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(y) | 0 \rangle .$$

Eles então efetuaram uma transformada dupla de Legendre de $W[J, K]$. Em termos de $\varphi(x)$ e $G(x, y)$, a transformada de Legendre se escreve

$$\Gamma[\varphi, G] = W[\tilde{J}, \tilde{K}] - \int d^4x \tilde{J}(x)\phi(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x)\tilde{K}(x, y)\phi(y) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y G(x, y)\tilde{K}(x, y) .$$

Pode-se mostrar que $\Gamma[\varphi, G]$ é, com relação à variável φ , o funcional gerador das funções de Green irreduzíveis a duas partículas (isto é, das funções de Green que não podem ser tornadas desconexas cortando-se duas linhas internas).

A forma explícita de $\Gamma[\varphi, G]$

Em seguida, os autores demonstraram que a expressão acima pode ser escrita na forma

$$\Gamma[\varphi, G] = S[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(D_0^{-1} G \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(D^{-1} G - 1 \right) + \Gamma^2[\varphi, G] \quad (4.6)$$

onde S é a ação do modelo, incluindo o termo de interação,

$$D^{-1}(x, y) := \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} , \quad (4.7)$$

$$D_0^{-1}(x, y) := D^{-1}(x, y) \Big|_{\lambda=0} ,$$

Tr é o traço, o qual é definido, para uma função genérica $F: (x, y) \mapsto F(x, y)$, por

$$\text{Tr } F := \int d^4x F(x, x) ,$$

e $\Gamma^2[\varphi, G]$ é uma quantidade obtida da seguinte maneira. Devemos transladar o campo ϕ de φ , ou seja, $\phi \mapsto \phi + \varphi$. Depois devemos substituir esta soma na ação, obtendo $S[\phi + \varphi]$. Depois, devemos expandir a ação em potências de ϕ e considerar somente os termos do tipo de interação (isto é, os termos de ordem 3 ou maior em ϕ). Depois, devemos montar todos os gráficos de Feynman irreduzíveis a duas partículas do tipo bolha de vácuo utilizando como propagador a função G . O termo Γ^2 será dado pela soma de todos os gráficos assim obtidos. Evidentemente, esta soma é impraticável. Portanto, nos limitaremos às contas a dois laços na aproximação de Hartree-Fock. Esta aproximação significa tomar, dentre os gráficos que satisfazem o número de laços que se está interessado (no nosso caso, dois laços), somente os gráficos de mais baixa ordem em potências da constante de acoplamento da teoria.

O formalismo CJT no ponto físico

No ponto físico, a ação efetiva CJT satisfaz as equações de gap

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta\varphi(x)} = 0$$

e

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta G(x, y)} = 0 . \quad (4.8)$$

A partir da expressão (4.6), a equação de gap (4.8) se reescreve

$$G^{-1}(x, y) = D^{-1}(x, y) + 2 \frac{\delta\Gamma^2[\varphi, G]}{\delta G(x, y)} . \quad (4.9)$$

A partir desta última equação, fica claro que, no ponto físico, as quantidades φ e G estão relacionadas. Veremos, quando formos discutir os casos específicos, que, de fato, é possível escrevermos, no ponto físico, G em função de φ . Assim, a ação efetiva CJT se escreve, neste caso, como uma função unicamente de φ .

A ação efetiva CJT em sistemas invariantes por translação

Nas contas que faremos nas próximas seções, estaremos interessados, em particular, em sistemas cujos propagadores D e G são invariantes por translação. Uma função de duas variáveis x e y é invariante por translação quando ela depende somente da combinação $x - y$. Pode-se mostrar (e isto ficará evidente nos casos específicos que discutiremos nas próximas seções) que os propagadores D e G somente são invariantes por translação se, e somente se, o campo φ também o for. Como o campo depende somente de uma única variável, φ ser invariante por translação significa φ ser homogêneo. A seguir, analisaremos como se reescrevem as equações do formalismo CJT neste caso, mas antes vejamos como se escreve o traço de funções de duas variáveis invariantes por translação.

Se F é uma função de duas variáveis invariante por translação, então existe f tal que

$$F(x, y) = f(x - y) .$$

Podemos escrever F em termos da transformada de Fourier de f ,

$$F(x, y) = \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha(x-y)} .$$

Logo,

$$F(x, x) = \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{f}(\alpha) ,$$

e portanto o traço se escreve

$$\text{Tr}F = \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{f}(\alpha) . \quad (4.10)$$

Observemos que a integral em x se fatora. Com a igualdade acima, podemos reescrever a expressão (4.11) no caso particular de funções invariantes por translação,

$$\Gamma[\varphi, G] = S[\varphi] - \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(\tilde{D}_0^{-1}(\alpha) \tilde{G}(\alpha) \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\tilde{D}_0^{-1}(\alpha) \tilde{G}(\alpha) - 1 \right) + \Gamma^2[\varphi, G] \quad (4.11)$$

Este é o formato no qual escreveremos a ação efetiva CJT no decorrer deste capítulo.

A equação de gap em sistemas invariantes por translação

No caso de sistemas invariantes por translação, podemos efetuar uma transformada de Fourier da equação de gap (4.9), obtendo a equação

$$\tilde{G}^{-1}(p) = \tilde{D}^{-1}(p) + 2 \frac{1}{\delta^4(0)} \frac{\delta\Gamma^2[\varphi, G]}{\delta\tilde{G}(p)} , \quad (4.12)$$

onde identificamos a função delta de Dirac na origem, $\delta(0)$, com o volume do espaço-tempo. Este é o formato no qual escreveremos a equação de gap (4.8) no decorrer deste capítulo.

O potencial efetivo CJT em sistemas invariantes por translação

O potencial efetivo CJT, no caso de um campo φ constante, se escreve, no ponto físico, como

$$\Gamma[\varphi, G(\varphi)] = V_{ef}(\varphi) \int d^4x . \quad (4.13)$$

Este é o formato no qual escreveremos o potencial efetivo CJT no decorrer deste capítulo. Ou seja, consideraremos o sistema no ponto físico, escreveremos G em função de φ e, portanto, o potencial efetivo será uma função apenas de φ .

A questão da renormalizabilidade do potencial efetivo

O formalismo CJT se mostrou muito útil na análise de teorias quânticas de campos a temperatura finita, tendo sido capaz de lidar com situações nas quais o potencial efetivo usual não era útil. Em particular, o potencial efetivo CJT permite obter-se mais informações sobre as transições de fase [75]. O formalismo CJT também se mostrou útil na descrição de teorias quânticas de campo fora do equilíbrio térmico [76]. A razão para este sucesso é que o potencial efetivo CJT lida muito bem com divergências no infravermelho.

O formalismo CJT também tem sido utilizado para analisar transições de fase em teorias quânticas de campo em espaços-tempos não-comutativos [77]. Uma vez que estas teorias, devido à ocorrência da mistura ultravioleta/infravermelho, apresentam sérios problemas de não-renormalizabilidade, é natural buscarmos analisar a renormalizabilidade do potencial efetivo CJT neste contexto, a fim de sabermos se ele é capaz, ou não, de lidar com as divergências destes modelos [78]. Motivado por esta questão, Gianluca Mandanici calculou o potencial efetivo CJT no modelo $\lambda\phi^{*4}$ e analisou a sua renormalizabilidade [79]. Ele concluiu que o potencial efetivo CJT é não-renormalizável neste caso.

Na época em que ele obteve este resultado, ainda não havia modelos não-comutativos renormalizáveis. Atualmente, há diversos modelos, entre os quais o Grosse & Wulkenhaar e o de de Gurău e colaboradores. O primeiro quebra explicitamente a invariância por translação, e portanto não é interessante para se analisar o potencial efetivo CJT. Já o modelo de Gurău é invariante por translação. Nós calcularemos o potencial efetivo CJT deste modelo e demonstraremos que, sob certas condições de regularização, ele é renormalizável.

As próximas seções estão organizadas do seguinte modo. Na seção 4.3, nós explicaremos como efetuar a renormalização do potencial efetivo CJT no modelo $\lambda\phi^4$. Tomaremos esta conta como o exemplo paradigmático de renormalização do potencial efetivo CJT bem sucedida. Em seguida, na seção 4.4, apresentaremos o trabalho de Gianluca Mandanici. Depois, na seção 4.5, apresentaremos a nossa conta. Por fim, discutiremos a validade do nosso procedimento de regularização.

4.3 O potencial efetivo CJT no modelo $\lambda\varphi^4$

Analisemos a renormalizabilidade do potencial efetivo CJT no modelo $\lambda\varphi^4$. Para tal, partimos da ação deste modelo, a saber,

$$S[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi)(x) + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x) \right\} . \quad (4.14)$$

O programa que seguiremos será o seguinte. Primeiramente, deduziremos o propagador D associado a esta ação. Depois, analisemos como podemos escrever convenientemente o propagador G . Em seguida, calculemos a ação efetiva CJT e o potencial efetivo a ela associado. Por fim, mostremos que o potencial efetivo é renormalizável.

Determinação do propagador D

A partir da ação (4.14) e da igualdade (4.7), obtemos que o propagador D é dado por

$$D^{-1}(x, y) = \left(-\square_x + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2(x) \right) \delta^4(x - y) .$$

Os dois primeiros termos dentro dos parênteses são claramente invariantes por translação, ao passo que o último não o é. Uma vez que queremos analisar sistemas invariantes por translação, devemos impor que todos os termos sejam invariantes por translação. Isto significa considerar o campo ϕ como sendo homogêneo. Assim, podemos omitir sua dependência em x . O inverso do propagador se escreve, então, na forma

$$D^{-1}(x, y) = \left(-\square_x + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \right) \delta^4(x - y) . \quad (4.15)$$

Conforme esperado, D^{-1} fica escrito como uma função de $x - y$, diferença esta que denotaremos por z . Podemos então efetuar uma transformada de Fourier com relação à variável z , obtendo

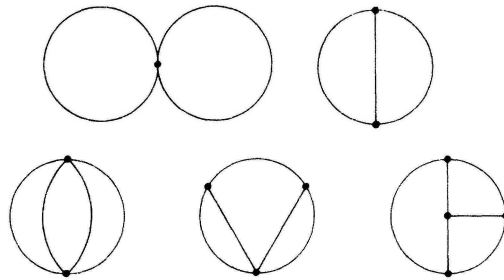
$$\tilde{D}^{-1}(p) = p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 .$$

Determinação do propagador G

O propagador G é determinado pela equação de gap (4.12). A fim de escrevê-la, devemos conhecer previamente a expressão de Γ^2 . Para determiná-la, devemos transladar o campo ϕ com relação a φ , ou seja, $\phi \mapsto \phi + \varphi$. Assim, obtemos a seguinte ação de interação,

$$S_{int}[\phi] = \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left\{ \phi^4 + 4\varphi \phi^3 \right\} .$$

Ou seja, os vértices são do tipo ϕ^3 e ϕ^4 . Com estes vértices, podemos construir, por exemplo, as seguintes bolhas de vácuo irredutíveis a duas partículas de dois e três laços,



Uma vez que estamos nos limitando aos termos a dois laços e à aproximação de Hartree-Fock, levaremos em conta somente o primeiro dentre os gráficos acima. Este gráfico é dado pela união, dois a dois, das patas de um vértice de quatro patas. Essa união deve ser feita utilizando o propagador G . O resultado final é

$$\Gamma^2[\varphi, G] = 3 \frac{\lambda}{4!} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) \tilde{G}(\alpha') \delta^4(\alpha - \alpha + \alpha' - \alpha') . \quad (4.16)$$

A partir da expressão acima, obtemos

$$\frac{1}{\delta^4(0)} \frac{\delta\Gamma^2[\varphi, G]}{\delta\tilde{G}(p)} = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) .$$

É importante observarmos que esta expressão independe de p . De posse desta expressão, podemos concluir que equação de gap (4.12) se escreve, no espaço de momento, na forma

$$\tilde{G}^{-1}(p) = p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) \quad (4.17)$$

No membro direito da igualdade acima, somente o primeiro termo depende de p . Isso nos motiva a escrever $\tilde{G}^{-1}(p)$ como sendo

$$\tilde{G}^{-1}(p) = p^2 + M^2 \quad ,$$

onde M é uma constante. Assim, os termos em p^2 se cancelam, e a equação (4.12) se reescreve na forma

$$M^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2} \quad (4.18)$$

Esta é a equação de gap do modelo $\lambda\varphi^4$. Trata-se de uma equação integral para a quantidade M , a qual fica determinada em função do campo φ . Por isso, a partir de agora, denotaremos M por $M(\varphi)$. Esta equação pode ser resolvida recursivamente [80].

Determinação da ação efetiva CJT

A partir do propagador D (igualdade 4.15) e da equação de gap acima, podemos determinar a ação efetiva CJT. Utilizando a expressão (4.10) do traço no espaço de momenta, obtemos

$$\text{Tr} \ln D_0^{-1}G = \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + m^2}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \right\} \quad (4.19)$$

$$\text{Tr} \left(D^{-1}G - 1 \right) = \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\alpha^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} - 1 \right\} \quad (4.20)$$

Agrupando as expressões (4.14), (4.16), (4.19), (4.20) e levando em conta o fato do campo

φ ter sido tomado como constante, a ação efetiva CJT (4.11) se escreve, em função do campo φ , na forma

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi] &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{m^2 - M^2(\varphi) + \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \\ &+ \frac{\lambda}{8} \delta^4(0) \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \frac{1}{\alpha'^2 + M^2(\varphi)} .\end{aligned}$$

Obtemos, assim, a ação efetiva CJT.

Ela foi escrita como função somente de φ pois G foi escrito em termos de M , e M , por sua vez, fica escrito em termos de φ caso solucionemos a equação de gap. Ou seja, no final das contas, todas as quantidades dependem somente de φ .

Determinação do potencial efetivo CJT

Na expressão acima, a integral em x se fatora. Assim, o potencial efetivo CJT, definido pela expressão (4.13), se escreve na forma

$$\begin{aligned}V_{ef}(\varphi) &= \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{m^2 - M^2(\varphi) + \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} + \frac{\lambda}{8} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \right\}^2 .\end{aligned}$$

Podemos substituir M da equação de gap (4.18) na expressão acima, obtendo

$$\begin{aligned}V_{ef}(\varphi) &= \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \left(\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha'^2 + M^2(\varphi)} \right) \\ &+ \frac{\lambda}{8} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \right\}^2 .\end{aligned}$$

Ou seja, o potencial efetivo CJT para o modelo $\lambda\varphi^4$ é dado por

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} - \frac{\lambda}{8} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \right\}^2, \quad (4.21)$$

onde $M^2(\varphi)$ é dado pela equação

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)}. \quad (4.22)$$

Demonstração da renormalizabilidade do potencial efetivo CJT

Renormalizar o potencial efetivo significa reescrever estas duas equações de tal modo que as quantidades que nela aparecem sejam finitas. Começemos por analisar a equação (4.22). A integral no membro direito é divergente, e pode ter suas contribuições infinitas separadas segundo a decomposição

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} &= \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2}} \right\} \\ &= \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} + \mathcal{O}(\alpha^{-4}) \right\} \\ &= \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^4} + \mathcal{O}(\alpha^{-6}) \right\} \\ &= \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2}}_{I_1} - M^2(\varphi) \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^4}}_{I_2} + \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \mathcal{O}(\alpha^{-6})}_{F_1(\varphi)}. \end{aligned}$$

Ou seja, vale a seguinte decomposição

$$\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} = I_1 - M^2(\varphi)I_2 + F_1(\varphi). \quad (4.23)$$

Pode-se verificar por contagem de potências que as quantidades I_1 e I_2 são infinitas e que a quantidade F_1 é finita. Substituindo esta decomposição na equação (4.22), obtemos

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \left(I_1 - M^2(\varphi) I_2 + F_1(\varphi) \right) .$$

Dividindo esta equação por λ , temos

$$\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{I_2}{2} \right) M^2(\varphi) = \left(\frac{m^2}{\lambda} + \frac{I_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} F_1(\varphi) . \quad (4.24)$$

A fim de restaurar a forma funcional da equação de gap original (não renormalizada) em termos de parâmetros renormalizados, somos motivados a definir as quantidades renormalizadas λ_R e m_R segundo as relações

$$\frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda} + \frac{I_2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{m_R^2}{\lambda_R} = \frac{m^2}{\lambda} + \frac{I_1}{2} ,$$

em termo das quais a igualdade (4.24) se escreve

$$\frac{M^2(\varphi)}{\lambda_R} = \frac{m_R^2}{\lambda_R} + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} F_1(\varphi) .$$

Portanto, obtemos a equação de gap renormalizada

$$M^2(\varphi) = m_R^2 + \frac{\lambda_R}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda_R}{2} F_1(\varphi) . \quad (4.25)$$

Ou seja, obtivemos que a equação de gap é renormalizável. Falta então verificarmos se o potencial efetivo é renormalizável. Para tal, precisamos lidar com a expressão (4.21). Começamos pelo termo logarítmico, o qual se escreve da seguinte forma

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left(\alpha^2 + M^2(\varphi) \right) - \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left(\alpha^2 + m^2 \right)}_{\text{constante}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \alpha^2 \left(1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} \right) \right\} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \alpha^2}_{\text{constante}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} \right) .
\end{aligned}$$

Os termos denotados por “constante” não dependem de φ . Portanto, apesar de serem infinitos, não desempenham papel algum no potencial efetivo, e foram descartados. Utilizando agora a expansão de Taylor da função logaritmo,

$$\ln(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \mathcal{O}(a^3) ,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{M^4(\varphi)}{\alpha^4} + \mathcal{O}(\alpha^{-6}) \right\} \\
&= \frac{I_1}{2} M^2(\varphi) - \frac{I_2}{4} M^4(\varphi) + F_2(\varphi) .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Deste modo, conseguimos reescrever o termo logaritmo do potencial efetivo (4.21), separando as contribuições finitas das infinitas e descartando os infinitos constantes. Vejamos agora o último termo à direita na expressão (4.21). Utilizando a equação de gap não-renormalizada (4.22), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda}{8} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \right\}^2 \\
&= -\frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \right\}^2 = -\frac{1}{2\lambda} \left\{ M^2(\varphi) - m^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \right\}^2 \\
&= -\frac{1}{2\lambda} \left\{ M^4(\varphi) - 2m^2 M^2(\varphi) - \lambda \varphi^2 M^2(\varphi) + m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \varphi^4 + \lambda m^2 \varphi^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\lambda} \left\{ m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} M^2(\varphi) \right\} M^2(\varphi) - \frac{1}{2\lambda} m^4 - \frac{\lambda}{8} \varphi^4 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2
\end{aligned}$$

Utilizando a decomposição (4.23), podemos reescrever os termos dentro das chaves na última linha da igualdade acima, obtendo

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{8} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi)} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{2}M^2(\varphi) - \frac{\lambda}{2}I_1 + \frac{\lambda}{2}I_2M^2(\varphi) - \frac{\lambda}{2}F_1(\varphi) \right\} M^2(\varphi) - \frac{1}{2\lambda}m^4 - \frac{\lambda}{8}\varphi^4 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \\ &= \frac{1}{2\lambda}M^4(\varphi) - \frac{I_1}{2}M^2(\varphi) + \frac{I_2}{2}M^4(\varphi) - \frac{1}{2}M^2(\varphi)F_1(\varphi) - \frac{1}{2\lambda}m^4 - \frac{\lambda}{8}\varphi^4 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 . \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão e a expressão (4.26) na expressão do potencial efetivo (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} V_{ef}(\varphi) &= \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{I_1}{2}M^2(\varphi) - \frac{I_2}{4}M^4(\varphi) + \overbrace{F_2(\varphi)}^{\text{finito}} + \frac{1}{2\lambda}M^4(\varphi) \\ &\quad - \underbrace{\frac{I_1}{2}M^2(\varphi) + \frac{I_2}{2}M^4(\varphi) - \frac{1}{2}M^2(\varphi)F_1(\varphi)}_{\text{finito}} - \frac{1}{2\lambda}m^4 - \frac{\lambda}{8}\varphi^4 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 . \end{aligned}$$

Observemos que os termos do tipo $m^2\varphi^2$ se cancelam. O mesmo acontece com os termos em $M^2(\varphi)$. Em seguida, agrupamos os termos infinitos em $M^4(\varphi)$ e juntamos os dois termos finitos num novo termo, que denotaremos $F_3(\varphi)$. Assim,

$$V_{ef}(\varphi) = -\frac{\lambda}{12}\varphi^4 - \frac{1}{2\lambda}m^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{I_2}{2} \right) M^4(\varphi) + F_3(\varphi) .$$

O primeiro termo é zero, uma vez que $\lambda \approx I_2^{-1} \approx 0$. O segundo termo é infinito, pois $m^4/\lambda \approx I_2^2/I_1 \approx +\infty$. Porém, ele independe de φ e para todos os efeitos é constante, podendo ser descartado. Assim, utilizando a definição de λ_R , obtemos

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{M^4(\varphi)}{2\lambda_R} + F_3(\varphi) . \quad (4.27)$$

Uma vez que a equação de gap é renormalizável (conforme 4.60), a quantidade $M(\varphi)$ é finita. Logo, a expressão acima também é finita. Por fim, concluímos que, como queríamos demonstrar, o potencial efetivo CJT do modelo $\lambda\varphi^4$ é renormalizável.

4.4 O potencial efetivo CJT no modelo $\lambda\varphi^{*4}$

Seguindo o mesmo procedimento que apresentamos na última seção, analisaremos agora a renormalizabilidade do potencial efetivo CJT de outro modelo, o $\lambda\varphi^{*4}$. Ao final, veremos que este potencial efetivo CJT não é renormalizável.

Determinação do propagador D

Partimos da ação do modelo $\lambda\varphi^{*4}$, a saber,

$$S[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi)(x) + \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\varphi^{*4}(x) \right\}. \quad (4.28)$$

A partir dela e da definição (4.7), obtemos o propagador D . Uma vez que há produtos \star envolvidos, pode parecer necessário algum cuidado extra na derivação do termo de interação. Entretanto, isso não ocorre, pois a derivada funcional de produtos \star satisfaz as regras usuais de derivação. Entre as quais, a regra do produto,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}(\varphi\star\varphi)(x) &= \frac{1}{16\pi^4} \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \int d^4k d^4y \varphi(x + \frac{1}{2}\Theta \cdot k) \varphi(x + y) e^{iky} \\ &= \frac{1}{16\pi^4} \int d^4k d^4y \frac{\delta\varphi}{\delta\varphi(y)}(x + \frac{1}{2}\Theta \cdot k) \varphi(x + y) e^{iky} \\ &+ \frac{1}{16\pi^4} \int d^4k d^4y \varphi(x + \frac{1}{2}\Theta \cdot k) \frac{\delta\varphi}{\delta\varphi(y)}(x + y) e^{iky} \\ &= \left(\frac{\delta\varphi}{\delta\varphi(y)} \star \varphi + \varphi \star \frac{\delta\varphi}{\delta\varphi(y)} \right)(x). \end{aligned}$$

onde δ_y é uma função delta de Dirac centrada em y , ou seja, $\delta_y(x) = \delta^4(x - y)$. Assim, a fim de obtermos $D(x, y)$, derivamos funcionalmente a ação (4.28) com relação a $\varphi(x)$, em seguida permutamos os termos dentro do sinal de integração, utilizamos a propriedade (5) do produto \star (ver seção 3.1), depois efetuamos a integração

$$\int d^4x' (\varphi\star\varphi\star\varphi)(x') \delta_x(x'),$$

e por fim derivamos funcionalmente com relação a $\varphi(y)$. Deste modo, obtemos

$$D^{-1}(x, y) = \left(-\square_x + m^2\right)\delta^4(x - y) + \frac{\lambda}{3!} \left\{ \left(\delta_y \star \varphi \star \varphi\right)(x) + \left(\varphi \star \delta_y \star \varphi\right)(x) + \left(\varphi \star \varphi \star \delta_y\right)(x) \right\} .$$

Do mesmo modo que fizemos na última seção, a fim de que D seja invariante por translação, devemos impor que φ seja homogêneo. Uma vez que no caso de funções constantes o produto \star recai no produto normal (isso é evidente a partir da definição do produto \star), temos

$$\frac{\lambda}{3!} \left\{ \left(\delta_y \star \varphi \star \varphi\right)(x) + \left(\varphi \star \delta_y \star \varphi\right)(x) + \left(\varphi \star \varphi \star \delta_y\right)(x) \right\} = \frac{\lambda}{2} \varphi^2 .$$

Obtemos, então, que o propagador D do modelo $\lambda\varphi^{*4}$ é igual ao do modelo $\lambda\varphi^4$,

$$D^{-1}(x, y) = \left(-\square_x + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2\right)\delta^4(x - y) , \quad (4.29)$$

o qual se escreve, no espaço de momenta, na forma

$$\tilde{D}^{-1}(p) = p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 .$$

Determinação do propagador G

Devemos agora calcular Γ^2 . Tal qual fizemos na seção anterior, devemos transladar o campo a partir da solução clássica, analisar os termos de interação, montar as possíveis bolhas de vácuo, e escolher a bolha de dois laços com o menor número de vértices. Assim procedendo, obtemos o mesmo gráfico (em forma de 8) que no modelo $\lambda\phi^4$, entretanto o seu valor numérico é diferente, pois o gráfico deve ser computado a partir do vértice (3.13).

A fim de efetuarmos esta conta, podemos utilizar um atalho: ao invés de juntarmos as patas do vértice (3.13), podemos juntas as patas externas da correção a um laço ao

propagador, a qual é dada pela expressão (3.14). Assim, obtemos

$$\Gamma^2[\varphi, G] = \frac{\lambda}{4!} \delta^4(0) \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) \tilde{G}(\alpha') (2 + \cos \alpha \wedge \alpha') . \quad (4.30)$$

A partir da expressão acima, utilizando a antissimetria do produto \wedge e a paridade da função cosseno, obtemos

$$\frac{1}{\delta^4(0)} \frac{\delta \Gamma^2[\varphi, G]}{\delta \tilde{G}(p)} = \frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) (2 + \cos \alpha \wedge p) .$$

É importante observar que, ao contrário do que ocorre no caso da seção anterior, a expressão acima depende do momento p . Podemos, então, escrever a equação de gap (4.12) na forma

$$\tilde{G}^{-1}(p) = p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) (2 + \cos \alpha \wedge p) \quad (4.31)$$

É conveniente separarmos a integral acima em duas partes, uma independente de p e a outra dependente. Deste modo, somos motivados a escrever $\tilde{G}^{-1}(p)$ na seguinte forma

$$\tilde{G}^{-1}(p) = p^2 + M^2(\varphi) + \Delta(p, \varphi) , \quad (4.32)$$

onde

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) , \quad (4.33)$$

$$\Delta(p, \varphi) = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) \cos \alpha \wedge p . \quad (4.34)$$

Com esta decomposição, separamos a equação de gap (4.32) em duas equações subsidiárias, (4.33) e (4.34). Assim, analisar a renormalizabilidade da equação de gap significa analisar a possibilidade de se reescrever de modo finito cada um destas duas equações. Tendo em vista a expressão (4.32), podemos concluir que a expressão (4.34) é finita para todo p diferente de zero. Assim, no que se refere à renormalizabilidade da equação de gap, nos preocuparemos, daqui em diante, somente com a expressão (4.33).

Determinação da ação efetiva CJT

A partir do propagador D (igualdade 4.29) e da equação de gap acima, podemos determinar a ação efetiva CJT. Utilizando a expressão (4.10) do traço no espaço de momenta, obtemos

$$\text{Tr} \ln D_0^{-1}G = \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + m^2}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \right\} \quad (4.35)$$

$$\text{Tr} \left(D^{-1}G - 1 \right) = \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\alpha^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} - 1 \right\} \quad (4.36)$$

Agrupando as expressões (4.28), (4.31), (4.30), (4.35) e levando em conta o fato do campo φ ter sido tomado como constante, a ação efetiva CJT (4.11) se escreve, em função do campo φ , na forma

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] = & \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{m^2 - M^2(\varphi) - \Delta(\alpha, \varphi) + \frac{\lambda}{2} \varphi^2}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \\ & + \frac{\lambda}{24} \delta^4(0) \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{2 + \cos \alpha \wedge \alpha'}{\left(\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi) \right) \left(\alpha'^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi) \right)}. \end{aligned}$$

Determinação do potencial efetivo CJT

Fatorando a integral em x e substituindo, na terceira linha de $\Gamma[\varphi]$, as expressões (4.33) e (4.34), o potencial efetivo CJT, definido pela expressão (4.13), se escreve na forma

$$\begin{aligned} V_{ef}(\varphi) = & \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} \\ & - \frac{\lambda}{24} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{2 + \cos \alpha \wedge \alpha'}{\left(\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi) \right) \left(\alpha'^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi) \right)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde M e Δ são dados pelas equações integrais acopladas

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} , \quad (4.38)$$

e

$$\Delta(\alpha, \varphi) = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{\cos \alpha \wedge \alpha'}{\alpha'^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)} . \quad (4.39)$$

Demonstração da não-renormalizabilidade do potencial efetivo CJT

Analisemos agora a renormalizabilidade do potencial efetivo. Começemos pela equação (4.38). A integral no membro direito pode ter suas contribuições infinitas separadas segundo a decomposição

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} &= \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} + \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2}} \right\} \\ &= \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} + \mathcal{O}(\alpha^{-4}) \right\} \\ &= \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^4} - \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^4} + \mathcal{O}(\alpha^{-6}) \right\} \\ &= \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2}}_{I_1} - M^2(\varphi) \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^4}}_{I_2} + \\ &\quad + \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \mathcal{O}(\alpha^{-6}) - \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^4}}_{F_4(\varphi)} . \end{aligned}$$

Utilizando o lema de Riemann-Lebesgue na igualdade (4.39), temos que $\Delta(p, \varphi)$ vai a zero quando p vai a infinito. Pode-se mostrar que este decaimento é exponencial, de tal modo que último termo da igualdade acima é finito. Assim, vale a seguinte decomposição,

$$\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} = I_1 - M^2(\varphi) I_2 + F_4(\varphi) . \quad (4.40)$$

Substituindo essa decomposição na equação (4.38), obtemos

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{3} \left(I_1 - M^2(\varphi) I_2 + F_4(\varphi) \right) .$$

Dividindo esta equação por λ , temos

$$\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{I_2}{3} \right) M^2(\varphi) = \left(\frac{m^2}{\lambda} + \frac{I_1}{3} \right) + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{3} F_4(\varphi) . \quad (4.41)$$

A fim de restaurar a forma funcional da equação de gap original (não renormalizada) em termos de parâmetros renormalizados, somos motivados a definir as quantidades renormalizadas λ_R e m_R segundo as relações

$$\frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda} + \frac{I_2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{m_R^2}{\lambda_R} = \frac{m^2}{\lambda} + \frac{I_1}{3} .$$

Assim, obtemos a equação de gap renormalizada

$$M^2(\varphi) = m_R^2 + \frac{\lambda_R}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda_R}{3} F_4(\varphi) . \quad (4.42)$$

Ou seja, obtivemos que a equação (4.33) é renormalizável. É importante observarmos que os parâmetros renormalizados foram definidos de modo diferente do caso $\lambda\varphi^4$. Vejamos agora a renormalizabilidade do potencial efetivo (4.37). Lidamos com o termo logaritmo da mesma forma que fizemos na seção anterior, obtendo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2 + m^2} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} + \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{M^4(\varphi)}{\alpha^4} \right\} + \\ & \quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^{-6}) \right\}}_{F_5(\varphi)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{I_1}{2}M^2(\varphi) - \frac{I_2}{4}M^4(\varphi) + F_5(\varphi) . \quad (4.43)$$

Vejam agora o último termo da expressão (4.37). Este se escreve na forma

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{24} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \frac{1}{\alpha'^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)} (2 + \cos \alpha \wedge \alpha') \\ &= -\frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \int \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha'^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)} \\ & \quad -\frac{\lambda}{24} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \int \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{\cos \alpha \wedge \alpha'}{\alpha'^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)} \\ &= -\frac{\lambda}{12} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \right\}^2 - \underbrace{\frac{1}{4} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}}_{F_6(\varphi)} . \end{aligned}$$

O integrando do segundo termo é extremamente bem comportado (não diverge em nenhum ponto e decai rapidamente), e com isso a integral é finita. Denotaremos este termo por $F_6(\varphi)$. Portanto, temos que nos preocupar somente com o primeiro termo. A menos de certas constantes multiplicativas, este termo se reescreve do mesmo modo que no caso da seção anterior. Assim, utilizando a equação de gap não-renormalizada (4.38), obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{12} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \right\}^2 \\ &= -\frac{3}{4\lambda} \left\{ \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \right\}^2 = -\frac{3}{4\lambda} \left\{ M^2(\varphi) - m^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \right\}^2 \\ &= -\frac{3}{4\lambda} \left\{ M^4(\varphi) - 2m^2 M^2(\varphi) - \lambda \varphi^2 M^2(\varphi) + m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \varphi^4 + \lambda m^2 \varphi^2 \right\} \\ &= \frac{3}{2\lambda} \left\{ m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} M^2(\varphi) \right\} M^2(\varphi) - \frac{3}{4\lambda} m^4 - \frac{3\lambda}{16} \varphi^4 - \frac{3}{4} m^2 \varphi^2 \\ &= \frac{3}{2\lambda} \left\{ \frac{1}{2} M^2(\varphi) - \frac{\lambda}{3} I_1 + \frac{\lambda}{3} I_2 M^2(\varphi) - \frac{\lambda}{3} F_4(\varphi) \right\} M^2(\varphi) - \frac{3}{4\lambda} m^4 - \frac{3\lambda}{16} \varphi^4 - \frac{3}{4} m^2 \varphi^2 \\ &= \frac{3}{4\lambda} M^4(\varphi) - \frac{I_1}{2} M^2(\varphi) + \frac{I_2}{2} M^4(\varphi) - \frac{1}{2} M^2(\varphi) F_4(\varphi) - \frac{3}{4\lambda} m^4 - \frac{3\lambda}{16} \varphi^4 - \frac{3}{4} m^2 \varphi^2 . \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima e a expressão (4.43) na expressão do potencial efetivo (4.37), temos

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{I_1}{2}M^2(\varphi) - \frac{I_2}{4}M^4(\varphi) + F_5(\varphi) + F_6(\varphi) + \frac{3}{4\lambda}M^4(\varphi) \\ - \frac{I_1}{2}M^2(\varphi) + \frac{I_2}{2}M^4(\varphi) - \frac{1}{2}M^2(\varphi)F_4(\varphi) - \frac{3}{4\lambda}m^4 - \frac{3\lambda}{16}\varphi^4 - \frac{3}{4}m^2\varphi^2 .$$

Desprezando termos constantes e agrupando em $F_7(\varphi)$ os termos finitos, obtemos

$$V_{ef}(\varphi) = -\frac{7\lambda}{48}\varphi^4 - \frac{1}{4}m^2\varphi^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{I_2}{3}\right)M^4(\varphi) + F_7(\varphi) .$$

Pelos mesmo motivo do caso $\lambda\varphi^4$, o primeiro termo do membro direito é igual a zero. Assim, a partir da definição de λ_R , podemos escrever o resultado final na forma

$$V_{ef}(\varphi) = -\frac{1}{4}m^2\varphi^2 + \frac{3}{4}\frac{M^4(\varphi)}{\lambda_R} + F_7(\varphi) , \quad (4.44)$$

Uma vez que a equação de gap é renormalizável (vide 4.42), as quantidades M e λ_R são finitas. Logo, o segundo e o terceiro termo do membro direito da igualdade acima são finitos. Entretanto, nesta equação aparece a massa nua m , a qual é infinita,

$$m = \frac{\frac{m_R}{\lambda_R} - \frac{I_1}{3}}{\frac{1}{\lambda_R} - \frac{I_2}{3}} \approx \frac{I_1}{I_2} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\Lambda \frac{1}{p^2}}{\int_0^\Lambda \frac{1}{p^4}} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^2}{\ln \Lambda} = +\infty ,$$

onde utilizamos I_1 e I_2 na sua forma integral regularizada por um corte Λ . Logo, o primeiro termo do membro direito da igualdade (4.44) é divergente. Este termo também apareceu nas contas do potencial efetivo do modelo $\lambda\varphi^4$, mas ao final se cancelou. No modelo $\lambda\varphi^{*4}$, esse cancelamento não ocorre, levando à divergência do potencial efetivo. Portanto, concluímos que o potencial efetivo CJT do modelo $\lambda\varphi^{*4}$ é não-renormalizável.

4.5 O potencial efetivo CJT no modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$

Nesta seção, analisaremos em que medida a vulcanização de Gurau e colaboradores permite resolver o problema da não-renormalizabilidade apresentado ao final da seção anterior. Para tal, deduziremos o potencial efetivo CJT do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ e discutiremos como lidar com o termo advindo da vulcanização. Ao final, veremos que, sob certas condições, o potencial efetivo CJT do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ é renormalizável. Em nossa conta, ficará evidente o papel da vulcanização na restauração da renormalizabilidade.

Determinação do propagador D

Partimos da ação do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$, a saber,

$$S[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi)(x) - \frac{1}{2}\left(\varphi\frac{a}{\square}\varphi\right)(x) + \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\varphi^{*4}(x) \right\}. \quad (4.45)$$

A partir dela e da definição (4.7), obtemos o propagador D . O procedimento usual – que consiste em derivar funcionalmente uma vez, integrar por partes uma das integrais parciais, e derivar funcionalmente outra vez – não pode ser empregado neste caso, uma vez que o termo \square^{-1} não pode ser integrado por partes de modo elementar. Poderíamos recorrer a uma expansão em série formal de potências de \square , efetuar a integração por partes termo a termo, e depois recompor a série. Entretanto, isso complicaria desnecessariamente a questão.

Há dois outros caminhos que podemos seguir. Um seria dizer que a integração por partes não é algo preocupante, pois se expandíssemos formalmente \square^{-1} em séries de \square , sendo \square dado por $\sum_\mu \partial_\mu\partial^\mu$, todas as vezes que integrássemos por parte os termos da série, teríamos que integrar por partes duas derivadas. Assim, a integração por partes não implicaria em nenhuma mudança de sinal, e portanto poderia ser realizada simbolicamente com toda a fração \square^{-1} de uma só vez.

Um segundo caminho possível, seria lembrarmos que o operador \square^{-1} só faz plena-

mente sentido no espaço de momenta. Portanto, deveríamos escrever toda a função D no espaço de momenta. Porém, é mais conveniente lidarmos somente com a parte livre diretamente no espaço de momenta, e continuarmos um pouco mais com a parte de interação no espaço de posição. Conforme vimos no capítulo 3, o propagador livre é dado, no espaço de momenta, por

$$\tilde{D}_0(p) = p^2 + \frac{a}{p^2} + m^2 .$$

O termo de D^{-1} relacionado à interação é dada, no caso de um campo constante, pela mesma expressão do modelo $\lambda\varphi^{*4}$,

$$D(x, y) - D_0(x, y) = \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \delta^4(x - y) .$$

Portanto, o propagador D completo se escreve, no espaço de momenta, na forma

$$\tilde{D}^{-1}(p) = p^2 + \frac{a}{p^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 . \quad (4.46)$$

Determinação do propagador G

O cálculo de Γ^2 no presente modelo é absolutamente idêntico àquele levado a cabo na seção anterior, pois o vértice do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ é igual ao vértice do modelo $\lambda\varphi^{*4}$. Assim, obtemos

$$\Gamma^2[\varphi, G] = \frac{\lambda}{4!} \delta^4(0) \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) \tilde{G}(\alpha') (2 + \cos \alpha \wedge \alpha') , \quad (4.47)$$

e portanto

$$\frac{1}{\delta^4(0)} \frac{\delta\Gamma^2[\varphi, G]}{\delta\tilde{G}(p)} = \frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) (2 + \cos \alpha \wedge p) ,$$

e a equação de gap (4.12) se escreve na forma

$$\tilde{G}^{-1}(p) = p^2 + \frac{a}{p^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) (2 + \cos \alpha \wedge p) . \quad (4.48)$$

Assim, somos motivados a escrever $\tilde{G}^{-1}(p)$ na forma

$$\tilde{G}^{-1}(p) = p^2 + \frac{a}{p^2} + M^2(\varphi) + \Delta(p, \varphi) , \quad (4.49)$$

onde M e Δ são escritos em função de G tal qual na seção anterior,

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) , \quad (4.50)$$

$$\Delta(p, \varphi) = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\alpha) \cos \alpha \wedge p . \quad (4.51)$$

Estamos interessados em discutir a renormalizabilidade do modelo, o que significa, como vimos nas últimas duas seções, analisar a possibilidade de se escrever finitamente a equação de gap (4.48). No caso do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$, devemos analisar não somente a possibilidade de escrevermos M e Δ de modo finito, mas também devemos impor que a seja finito. Ou seja, a constante nua a não deve divergir.

Determinação da ação efetiva CJT

Utilizando o propagador D (4.46), o propagador G (4.49), e a expressão (4.10) do traço no espaço de momenta, obtemos

$$\text{Tr} \ln D_0^{-1} G = \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + m^2}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \right\} \quad (4.52)$$

$$\text{Tr} \left(D^{-1} G - 1 \right) = \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} - 1 \right\} \quad (4.53)$$

Nos dois modelos discutidos anteriormente, bastava conhecermos as quantidades acima para compormos a ação efetiva CJT (4.13). No caso do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$, entretanto, há uma questão a mais a ser tratada, a qual discutiremos a seguir.

O primeiro termo que compõe a ação efetiva CJT (4.11) é a ação S calculada no campo φ . Uma vez que estamos interessados em campos homogêneos, esta ação deve ser calculada com um campo φ constante. No caso do modelo $\lambda\varphi^{*4}$, isso reduzia a ação $S[\varphi]$ da seguinte forma

$$\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi)(x) + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \varphi^{*4}(x) \right\} \mapsto \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right\}.$$

Ou seja, o termo com derivada é igual a zero e o produto \star recai no produto pontual. No caso do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$, precisamos lidar com o termo da vulcanização. Isto significa, lidar com a expressão

$$\frac{a}{\square} \varphi \tag{4.54}$$

no caso de um campo φ constante. Que valor atribuir a este termo? Conforme dissemos na seção 3.4, quando apresentamos a vulcanização de Gurau e colaboradores, o operador \square^{-1} deve ser pensado sempre no espaço de momenta. Ou seja, \square^{-1} é tal que

$$\frac{1}{\square} e^{ixp} = \frac{1}{-p^2} e^{ixp}.$$

Isto significa que para calcularmos o valor de (4.54), temos que escrever o campo φ no espaço de Fourier. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{\square} \varphi &= \frac{a}{\square} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ixp} \left(\int d^4x' \varphi(x) e^{-ix'p} \right) \\ &= \varphi \int d^4p \frac{a}{\square} e^{ixp} \delta(p) \\ &= \varphi \int d^4p \frac{a}{-p^2} e^{ixp} \delta(p) \end{aligned}$$

Esta quantidade é divergente e precisa ser regularizada. Isso pode ser feito por meio da inclusão que um parâmetro regularizador ε que desloque o denominador do integrando. Ao final da conta, este parâmetro ε deverá ser retirado. Assim, obtemos

$$\left(\frac{a}{\square}\varphi\right)_{reg} = -\varphi \int d^4p \delta(p) \frac{a}{p^2 + \varepsilon} e^{ixp} = -\frac{a}{\varepsilon} \varphi .$$

No que segue, omitiremos o fato de todas as expressões do tipo $\square^{-1}\varphi$ estarem regularizados. Para simplificar a notação, escreveremos

$$\mu^2 := \frac{a}{\varepsilon} \quad (4.55)$$

Assim, o termo de vulcanização se escreve, no caso de um campo φ constante, como

$$-\frac{1}{2} \left(\varphi \frac{a}{\square}\varphi\right) = \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 .$$

Esta é uma quantidade divergente que, conforme veremos mais adiante, terá um papel fundamental na restauração da renormalizabilidade do potencial efetivo CJT.

De posse das quantidades até aqui calculadas, podemos obter a ação efetiva CJT (4.11), a qual se escreve

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] = & \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + m^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{m^2 + \frac{a}{\alpha^2} - M^2(\varphi) - \Delta(\alpha, \varphi) + \frac{\lambda}{2} \varphi^2}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi)} \\ & + \frac{\lambda}{24} \delta^4(0) \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \times \\ & \quad \times \frac{2 + \cos \alpha \wedge \alpha'}{\left(\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)\right) \left(\alpha'^2 + \frac{a}{\alpha'^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)\right)} . \end{aligned}$$

Determinação do potencial efetivo CJT

A partir da ação efetiva acima, o potencial efetivo CJT (4.13) se escreve na forma

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{p^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(p, \varphi)}{p^2 + \frac{a}{\alpha^2} + m^2} \right\} \\ - \frac{\lambda}{24} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{2 + \cos \alpha \wedge \alpha'}{\left(\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)\right) \left(\alpha'^2 + \frac{a}{\alpha'^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)\right)}. \quad (4.56)$$

onde M e Δ são dados pelas equações integrais acopladas

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}, \quad (4.57)$$

e

$$\Delta(\alpha, \varphi) = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{\cos \alpha' \wedge \alpha}{\alpha'^2 + \frac{a}{\alpha'^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)}. \quad (4.58)$$

Demonstração da renormalizabilidade do potencial efetivo CJT

Analisemos agora a renormalizabilidade do potencial efetivo. A integral no membro direito da equação (4.57) pode ser decomposta de modo semelhante ao caso $\lambda\varphi^{*4}$, ou seja,

$$\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} = \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} + \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} + \frac{a}{\alpha^4}} \right\} \\ = \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} + \mathcal{O}(\alpha^{-4}) \right\} \\ = \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^4} - \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^4} + \mathcal{O}(\alpha^{-6}) \right\} \\ = \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2}}_{I_1} - M^2(\varphi) \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^4}}_{I_2} + \\ + \underbrace{\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \mathcal{O}(\alpha^{-6}) - \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^4}}_{F_8(\varphi)}.$$

Assim, obtivemos a seguinte decomposição,

$$\int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} = I_1 - M^2(\varphi)I_2 + F_8(\varphi) , \quad (4.59)$$

a qual, a menos de uma diferença finita, é igual à decomposição dos demais modelos. Substituindo esta decomposição na equação (4.57), obtemos a igualdade

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{3} \left(I_1 - M^2(\varphi) I_2 + F_8(\varphi) \right) ,$$

que pode ser renormalizada do mesmo modo que fizemos no modelo $\lambda\varphi^{*4}$. Ou seja, definindo as quantidades renormalizadas λ_R e m_R segundo as mesmas relações que no caso $\lambda\varphi^{*4}$, obtemos a equação de gap renormalizada

$$M^2(\varphi) = m_R^2 + \frac{\lambda_R}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda_R}{3} F_8(\varphi) . \quad (4.60)$$

Ou seja, a equação de gap do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ é renormalizável. Agora, analisemos a renormalizabilidade do potencial efetivo (4.56), começando pelo termo logarítmico. Lidamos com ele da mesma forma que fizemos nas seções anteriores. Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left\{ \frac{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + m^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} + \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} + \frac{a}{\alpha^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{M^4(\varphi)}{\alpha^4} + \frac{a}{\alpha^4} \right\} + \\ & \quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} \left(\frac{M^2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^{-6}) \right\}}_{F_9(\varphi)} \\ &= \frac{I_1}{2} M^2(\varphi) - \frac{I_2}{4} M^4(\varphi) + \frac{I_2}{2} a + F_9(\varphi) . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Vejamos agora o último termo de (4.56), que se escreve, tal qual no modelo $\lambda\varphi^{*4}$, na forma

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{24} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \frac{1}{\alpha'^2 + \frac{a}{\alpha'^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha', \varphi)} (2 + \cos \alpha \wedge \alpha') \\ &= -\frac{\lambda}{12} \left\{ \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)} \right\}^2 - \underbrace{\frac{1}{4} \int \frac{d^4\alpha}{(2\pi)^4} \frac{\Delta(\alpha, \varphi)}{\alpha^2 + \frac{a}{\alpha^2} + M^2(\varphi) + \Delta(\alpha, \varphi)}}_{F_{10}(\varphi)}. \end{aligned}$$

Assim como no modelo $\lambda\varphi^{*4}$, o segundo termo do membro inferior é finito. Uma vez que a decomposição da integral do primeiro termo acima (segundo 4.59) tem o mesmo formato daquela obtida na seção anterior, temos que a expressão acima, a menos de uma diferença nas partes finitas F_i , se escreve exatamente do mesmo modo que no caso $\lambda\varphi^{*4}$. Assim, substituindo as expressões acima e a expressão (4.61) na expressão (4.56) do potencial efetivo CJT, obtemos

$$\begin{aligned} V_{ef}(\varphi) &= \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{I_1}{2}M^2(\varphi) - \frac{I_2}{4}M^4(\varphi) + \frac{I_2}{2}a + F_9(\varphi) + F_{10}(\varphi) \\ &+ \frac{3}{4\lambda}M^4(\varphi) - \frac{I_1}{2}M^2(\varphi) + \frac{I_2}{2}M^4(\varphi) - \frac{1}{2}M^2(\varphi)F_8(\varphi) - \frac{3}{4\lambda}m^4 - \frac{3\lambda}{16}\varphi^4 - \frac{3}{4}m^2\varphi^2. \end{aligned}$$

Desprezando termos constantes que já apareciam no resultado do modelo $\lambda\varphi^{*4}$, descartando o termo em λ (que é igual a zero, como vimos nas outras seções), agrupando em $F_{11}(\varphi)$ os termos finitos, e agrupando os fator de $M^4(\varphi)$ de tal modo a compor o parâmetro λ_R , obtemos

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{I_2}{2}a + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}m^2\varphi^2 + \frac{3}{4}\frac{M^4(\varphi)}{\lambda_R} + F_{11}(\varphi),$$

Os três últimos termos já apareciam (com valores diferentes) no potencial efetivo CJT do modelo $\lambda\varphi^{*4}$, ao passo que os dois primeiros termos, ambos divergentes, são provenientes da vulcanização. O primeiro termo é independente de φ , logo, para os propósitos do potencial efetivo, é uma constante, e pode ser descartado. Assim, obtemos

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}m^2\varphi^2 + \frac{3}{4}\frac{M^4(\varphi)}{\lambda_R} + F_{11}(\varphi), \quad (4.62)$$

O primeiro termo depende de μ e o segundo de m . Estas são quantidades infinitas e, a princípio, descorrelacionadas. Se nós impusermos uma correlação, obtemos que é possível que tais termos se cancelem, fornecendo

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{3}{4} \frac{M^4(\varphi)}{\lambda_R} + F_{11}(\varphi) ,$$

que é uma expressão finita e que tem o mesmo formato funcional que o potencial efetivo (4.27) do modelo $\lambda\varphi^4$. Ou seja, este cancelamento restaura a renormalizabilidade. Para que ele ocorra, devemos impor que $\mu^2 = m^2/2$, o que significa tomar

$$\varepsilon = 2a \frac{\frac{1}{\lambda_R} - \frac{I_2}{3}}{\frac{m_R}{\lambda_R} - \frac{I_1}{3}} .$$

Se escrevermos I_1 e I_2 na suas respectivas formas integrais regularizada por um corte Λ , podemos definir ε em função de Λ segundo a relação

$$\varepsilon(\Lambda) := 2a \left[\int_0^\Lambda \frac{d^4p}{p^4} \right] \left[\int_0^\Lambda \frac{d^4p}{p^2} \right]^{-1} ,$$

que, conforme esperado, vai a zero quando Λ vai a infinito. Mediante esta prescrição de regularização do termo $\frac{1}{\square}\varphi$, obtemos que o potencial efetivo CJT do modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ é renormalizável. Com isso, demonstramos o principal resultado desta dissertação.

Acerca da validade do corte $\varepsilon(\Lambda)$

Em geral, na teoria quântica dos campos, os resultados das regularizações independem do modo como os cortes são retirados. Tomemos como exemplo o cálculo da energia de Casimir de um campos escalar confinado entre duas placas. Quando incluímos funções de corte na frequência dos modos do campo, não há nenhuma restrição sobre o modo como o corte deve ser retirado ao final da conta. Vale lembrar que o artigo original de Hendrik Casimir, de 1948, é muitas vezes elogiado por ter evidenciado este ponto: a função de corte que ele emprega é absolutamente genérica. Ou seja, ele mostrou, em um caso par-

ticular, que não há necessidade de se explicitar o modo por meio do qual o parâmetro de regularização é retirado.

Em comparação a este resultado de Casimir, o procedimento que acabamos de apresentar pode parecer artificial e até mesmo incorreto, como se estivéssemos escamoteando a não-renormalizabilidade da teoria. Pode parecer que, na realidade, o modelo $1/p^2 - \lambda\varphi^{*4}$ é até mesmo mais divergente que o modelo $\lambda\varphi^{*4}$, pois enquanto este tem apenas um termo divergente, aquele tem dois. Entretanto, não acreditamos que seja este o caso.

Por diversas vezes utilizamos, de modo tácito, correlações entre cortes de quantidades divergentes distintas. Por exemplo, quando dissemos que a quantidade m diverge, demonstramos isto por meio do seguinte desenvolvimento,

$$m = \frac{\frac{m_R}{\lambda_R} - \frac{I_1}{3}}{\frac{1}{\lambda_R} - \frac{I_2}{3}} \approx \frac{I_1}{I_2} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\Lambda \frac{1}{p^2}}{\int_0^\Lambda \frac{1}{p^4}} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^2}{\ln \Lambda} = +\infty .$$

Nesta conta, supusemos que os cortes de I_1 e de I_2 estão correlacionados: ambos são escritos como integrais com o mesmo limite superior de integração Λ . Se tivéssemos escrito estas quantidades segundo a seguinte regularização,

$$I_1(\Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{d^4p}{p^2} \quad \text{e} \quad I_2(\Lambda) = \int_0^{e^{\Lambda^3}} \frac{d^4p}{p^4} ,$$

teríamos obtido que a massa m é igual a zero,

$$m = \frac{\frac{m_R}{\lambda_R} - \frac{I_1}{3}}{\frac{1}{\lambda_R} - \frac{I_2}{3}} \approx \frac{I_1}{I_2} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^2}{\ln e^{\Lambda^3}} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^3} = 0 .$$

Ou seja, caso mudássemos a prescrição de regularização, as quantidades nuas poderiam vir a ter outros valores. Neste caso particular, tal procedimento não seria legítimo, pois I_1 e I_2 têm sua origem na mesma integral, e por isso é natural supormos que ambos tem o mesmo parâmetro como limite superior de integração.

Do mesmo modo, podemos supor que há uma correlação entre m e μ , ou seja, entre Λ e ε . Não temos uma justificativa tão convincente como no caso da correlação de I_1 e I_2 , mas ao menos temos, agora, claro que a ocorrência de tais correlações não é de todo estranha à teoria quântica de campos.

Conclusões do capítulo 4

Neste capítulo, apresentamos a ação efetiva ordinária e o potencial efetivo a ela associado. Depois, expusemos o formalismo de Cornwall-Jackiw-Tomboulis, incluindo a sua ação efetiva e o seu respectivo potencial efetivo. Em seguida, apresentamos como efetuar a renormalização da ação efetiva CJT no caso do modelo $\lambda\varphi^4$. Depois, apresentamos o trabalho de Mandanici, que mostrou que a ação efetiva CJT no caso do modelo $\lambda\varphi^{*4}$ é não-renormalizável. Esta não renormalizabilidade deve, segundo ele, ser entendida como um reflexo da não-renormalizabilidade da expansão perturbativa do modelo. Por fim, consideramos o modelo de Gurau e colaboradores, o qual sabemos ser renormalizável perturbativamente, e calculamos o potencial efetivo CJT a ele associado. Demonstramos que, sob certas condições, este potencial efetivo CJT é renormalizável.

Capítulo 5

Deformação κ e emissão espontânea

A deformação da simetria de Poincaré do espaço-tempo altera as propriedades dos campos sobre ele definidos, alterando portanto os fenômenos de interação dos campos com a matéria. Assim, a existência de tal deformação deve, a princípio, alterar as quantidades físicas relevantes destes fenômenos, tais como a taxa de emissão espontânea, o valor do desvio Lamb, o valor do momento giromagnético anômalo do elétron etc.

Uma vez que os valores destes fenômenos são preditos teoricamente com bastante precisão, e estão em grande acurácia com os valores medidos experimentalmente, a deformação não pode alterá-los significativamente, caso contrário produziria desacordos entre teoria e experimento onde, nas teorias originais, não havia. Assim, temos um meio de impor limitações às teorias deformadas: as deformações devem ser tais que as alterações que elas produzem em fenômenos bem conhecidos não podem ser maiores que a margem de incerteza dos respectivos experimentos. Este tipo de limitação impõe uma cota ao valor do parâmetro de deformação.

Nos últimos anos tem havido uma grande valorização desta abordagem às teorias deformadas, em particular utilizando experimentos atômicos de alta precisão. Por exemplo, Amelino-Camelia mostrou uma determinada relação de dispersão deformada tem seu um

de seus coeficientes de deformação significativamente limitado pela análise de experimentos de recuo de átomos-frios por absorção de fótons [81]. O interessante deste trabalho é que os autores fizeram grandes avanços por meio de um experimento atômico.

Neste capítulo, apresentaremos um desenvolvimento que tem como intuito explorar este tipo de abordagem. Calcularemos o tempo médio de decaimento $2p \rightarrow 1s$ por emissão espontânea em um átomo de hidrogênio não-relativístico devido à sua interação com o campo eletromagnético κ -deformado no estado de vácuo. A partir do resultado obtido e da incerteza experimental, deduziremos uma cota superior $q = 1/2\kappa$. Nós não temos nenhuma esperança que a cota obtida seja notável. Este cálculo tem somente uma função exploratória. Como dissemos na introdução da dissertação, não temos, com esta conta, o intuito de criticar, mas sim de aprender.

5.1 A emissão espontânea

A função hamiltoniana que descreve um átomo de hidrogênio no regime não-relativístico é dada, em termos da posição \mathbf{q} e do momento \mathbf{p} do elétron, por

$$\mathfrak{H}_{hydr} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) , \quad (5.1)$$

onde o termo V é uma função do tipo interação coulombiana. Os estados possíveis do átomo de hidrogênio são dados pelos autovetores desta hamiltoniana. Nós denominamos estes autovetores de estacionários, pois o operador evolução, ao atuar em um destes autovetores, altera somente a fase. Assim, uma vez posto em um dado autoestado, o sistema permaneceria sempre no mesmo autoestado. Entretanto, nós observamos experimentalmente que isto não ocorre. Ao ser posto em um estado excitado, o elétron decai espontaneamente. Ou seja, os autovalores da hamiltoniana (5.1) não são auto-estados do sistema.

Esta falta de correspondência indica que a hamiltoniana acima não descreve corretamente o sistema. A razão para tal é o fato de um átomo não poder estar jamais livre. Mesmo se ele estiver isolado de outros átomos e de fótons reais, ele ainda interagirá com o campo

eletromagnético no estado de vácuo. Logo, devemos considerar o átomo acoplado a um campo eletromagnético. Somente assim obteremos a hamiltoniana correta do sistema.

Considerando que o campo, no calibre de Coulomb, é descrito pelo potencial vetor (de três componentes) \mathcal{A} , obtemos, por meio da prescrição de acoplamento mínimo, a hamiltoniana

$$\mathfrak{H}_{\text{completa}} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathcal{A})^2 + V(\mathbf{q}) . \quad (5.2)$$

A hamiltoniana acima admite como autovetores combinações (via produto tensorial) de autoestados atômicos e de autoestados do espaço de Fock do campo. A expressão acima nos fornece o termo de interação átomo-campo

$$\mathfrak{H}_{\text{int}} = -\frac{e}{2m} (\mathbf{p} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot \mathbf{p}) .$$

Utilizando o fato de estarmos no calibre de Coulomb, podemos reescrever este termo como

$$\mathfrak{H}_{\text{int}} = -\frac{e}{m} \mathcal{A} \cdot \mathbf{p} . \quad (5.3)$$

Esta hamiltoniana de interação pode ser vista como uma perturbação ao sistema “átomo isolado”. Assim, a emissão espontânea pode ser vista como a transição de um estado excitado para o estado fundamental devido a presença desta perturbação. Portanto, calcular o tempo que leva para a emissão espontânea ocorrer é igual a calcular o tempo médio que esta perturbação leva para induzir a transição atômica. Para fazermos esta conta, é conveniente utilizarmos a regra de ouro de Fermi.

5.2 A regra de ouro de Fermi

Dado um sistema em um estado inicial $|i\rangle$ e sujeito a uma hamiltoniana de perturbação $\mathfrak{H}_{\text{int}}$, a amplitude do coeficiente a_j do estado $|j\rangle$ no tempo t é dada, em perturbação de

primeira ordem, por

$$a_j(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle j | \mathfrak{H}_{int}(t) | i \rangle e^{i\omega_{ij}t'} ,$$

onde ω_{ni} é a frequência de transição entre os estados $|n\rangle$ e $|i\rangle$. No caso de uma perturbação constante, a expressão acima se reescreve na forma

$$a_j(t) = -\frac{1}{\hbar} \langle j | \mathfrak{H}_{int} | i \rangle \frac{e^{i\omega_{ij}t} - 1}{\omega_{ij}}$$

A probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|j\rangle$ no tempo t é, portanto, dada por

$$P_j = a_j^*(t) a_j(t) = \frac{1}{\hbar^2} |\langle j | \mathfrak{H}_{int} | i \rangle|^2 \frac{4 \text{sen}^2\left(\frac{\omega_{ij}t}{2}\right)}{\omega_{ij}^2}$$

Suponto todas as possibilidades de estados finais, coleção esta que denotamos por $\{f\}$, obtemos que a probabilidade do sistema, no tempo t , não estar mais no estado $|i\rangle$ é dada por

$$P_{i \rightarrow \{f\}} = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j \in \{f\}} |\langle j | \mathfrak{H}_{int} | i \rangle|^2 \frac{4 \text{sen}^2\left(\frac{\omega_{ij}t}{2}\right)}{\omega_{ij}^2}$$

Podemos utilizar, então, a seguinte representação da função delta de Dirac,

$$\frac{\text{sen}(xt/2)}{x^2} \approx \frac{\pi}{2} \delta(x) t \quad , \quad t \gg x^{-1} ,$$

a partir da qual obtemos

$$P_{i \rightarrow \{f\}} = \left[\frac{2\pi}{\hbar} \sum_{j \in \{f\}} |\langle j | \mathfrak{H}_{int} | i \rangle|^2 \delta(E_j - E_i) \right] t$$

O tempo se fatora, e assim obtemos uma taxa de mudança de estado (isto é, uma probabilidade por unidade de tempo) dada por

$$T_{i \rightarrow \{f\}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{j \in \{f\}} |\langle j | \mathfrak{H}_{int} | i \rangle|^2 \delta(E_j - E_i) . \quad (5.4)$$

Esta expressão é chamada regra de ouro de Fermi. O inverso da taxa de transição é igual ao tempo médio que o sistema permanece no estado inicial, que denominamos τ . Esta é a quantidade que estamos interessados em calcular. Antes de efetuarmos a conta, precisamos da expressão do campo eletromagnético κ -deformado.

5.3 A eletrodinâmica quântica κ -deformada

As equações de Maxwell κ -deformadas na ausência de fontes são [82]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_q \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \partial_q \mathbf{E}$$

No limite $q \rightarrow 0$, estas equações recaem nas equações de Maxwell ordinárias. As equações acima, no espaço livre, admitem como solução, no calibre de Coulomb, o seguinte potencial vetor [83]

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{q}{V \sinh(2q\omega(\mathbf{k}))}} \left[a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-i k x} + a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}^*(\mathbf{k}) e^{i k x} \right] .$$

A quantização deste campo tem diversas sutilezas, mas pode ser realizada de modo inteiramente análogo ao caso não-deformado, fornecendo [84]

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{q}{V \sinh(2q\omega(\mathbf{k}))}} \left[\mathbf{a}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-i k x} + \mathbf{a}^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}^*(\mathbf{k}) e^{i k x} \right] . \quad (5.5)$$

Vale observar que, se incluirmos os \hbar , c etc, a raiz quadrada da expressão acima se reescreve na forma

$$\sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 V} \frac{q/c}{\sinh(2q\omega_{\mathbf{k}', \lambda'}/c)}} .$$

5.4 Cálculo da emissão espontânea κ -deformada

Consideremos que o átomo se encontre, inicialmente, no estado $2p$ e que decaia espontaneamente para o estado $1s$, emitindo um fóton. Assim, os estados inicial e final são dados, respectivamente, pelos seguintes produtos tensoriais:

$$|i\rangle = |2p\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}\lambda}=0\rangle$$

$$|j\rangle = |1s\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}\lambda}=1\rangle$$

Queremos calcular (5.4) utilizando estes estados inicial e final. Para tal, consideraremos a perturbação (5.3) com o potencial vetor dado por (5.5). Faremos as contas na aproximação de dipolo, ou seja, considerando que o campo é espacialmente constante nas dimensões em questão. Nesta aproximação o campo não depende da posição, e portanto não depende dos autoestados atômicos. Obtemos, portanto, a seguinte expressão,

$$\langle j | \mathfrak{H}_{int} | i \rangle = -\frac{e}{m} \langle n_{\mathbf{k}\lambda}=1 | \mathfrak{A} | n_{\mathbf{k}\lambda}=0 \rangle \cdot \langle 1s | \mathbf{p} | 2p \rangle . \quad (5.6)$$

A partir de (5.5), o primeiro fator do membro direito da igualdade acima se escreve

$$\langle n_{\mathbf{k}\lambda}=1 | \mathfrak{A} | n_{\mathbf{k}\lambda}=0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{\varepsilon_0 V} \frac{q/c}{\sinh(2q\omega_{\mathbf{k}'\lambda}/c)}} \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}^*(\mathbf{k}) .$$

Utilizando a igualdade

$$[\mathbf{q}, \mathfrak{H}_{hidr}] = \frac{i\hbar}{m} \mathbf{p} ,$$

o segundo fator de (5.6) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle 1s | \mathbf{p} | 2p \rangle &= \frac{m}{i\hbar} \langle 1s | [\mathbf{q}, \mathfrak{H}_{hidr}] | 2p \rangle \\ &= \frac{m}{i\hbar} (E_{2p} - E_{1s}) \langle 1s | \mathbf{q} | 2p \rangle \\ &= im\omega_0 \langle 1s | \mathbf{q} | 2p \rangle \end{aligned}$$

Ou seja, até aqui obtivemos que

$$T_{2p \rightarrow 1s} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{\varepsilon_0 V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\omega_0^2 q/c}{\sinh(2\omega_{\mathbf{k}\lambda} q/c)} \left| \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}^*(\mathbf{k}) \cdot \langle 1s | \mathbf{q} | 2p \rangle \right|^2 \delta(E_{1s} + \hbar\omega_{\mathbf{k}\lambda} - E_{2p})$$

Considerando todas as possibilidades de estados finais (todos os momentos e direções possíveis do fóton emitido), temos

$$\sum_{\mathbf{k}\lambda} \mapsto \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk d\Omega k^2$$

Separando $\mathbf{q} = r \hat{\mathbf{r}}$ e denotando $\omega := \omega_{\mathbf{k}\lambda}$, obtemos

$$T_{2p \rightarrow 1s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{\pi \hbar} \left(\int_0^\infty dk \frac{\omega_0^2 k^2 q/c}{\sinh(2q\omega/c)} \delta(\omega - \omega_0) \right) \times \\ \times \left| \langle 1s | r | 2p \rangle \right|^2 \left(\int d\Omega \left| \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}^*(\mathbf{k}) \cdot \langle 1s | \hat{\mathbf{r}} | 2p \rangle \right|^2 \right)$$

Os dois últimos fatores estão tabelados [85]

$$\int d\Omega \left| \tilde{\epsilon}_{(\lambda)}^*(\mathbf{k}) \cdot \langle 1s | \hat{\mathbf{r}} | 2p \rangle \right|^2 = \frac{32\pi^2}{9}$$

$$\langle 1s | r | 2p \rangle = \sqrt{\frac{4!}{\pi}} \left(\frac{2}{3} \right)^5 a_0$$

Para calcular a integral em dk devemos lembrar que ω e k se relacionam segundo a relação de dispersão κ -deformada

$$k(\omega) = \frac{1}{q} \sinh\left(\frac{q\omega}{c}\right) .$$

Assim, obtemos

$$\int_0^\infty dk \frac{\omega_0^2 k^2 q/c}{\sinh(2q\omega/c)} \delta(\omega - \omega_0) = \frac{\omega_0^2}{q c} \int_0^\infty d\omega \frac{dk}{d\omega} \frac{\sinh^2\left(\frac{q\omega}{c}\right)}{\sinh\left(\frac{2q\omega}{c}\right)} \delta(\omega - \omega_0) = \\ = \frac{\omega_0^2}{q c^2} \frac{\cosh\left(\frac{q\omega_0}{c}\right) \sinh^2\left(\frac{q\omega_0}{c}\right)}{2 \sinh\left(\frac{q\omega_0}{c}\right) \cosh\left(\frac{q\omega_0}{c}\right)} = \frac{\omega_0^2}{2 q c^2} \sinh\left(\frac{q\omega_0}{c}\right) \approx \frac{\omega_0^3}{2 c^3} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{6c^2} q^2 \right)$$

Assim, obtemos

$$T_{2p \rightarrow 1s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega_0^3}{2\pi\hbar c^3} \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{9} \right)^5 a_0^2 \right] \frac{32\pi^2}{9} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{6c^2} q^2 \right)$$

Considerando que a_0 e ω_0 são dados por

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{3 m}{8 \hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 ,$$

obtemos

$$T_{2p \rightarrow 1s} = 6.2 \times 10^8 \left(1 + 4,4 q^2 \times 10^{14} \right) s^{-1} ,$$

onde q está em metros. Logo, o tempo médio de decaimento τ é o inverso da expressão acima, ou seja,

$$\tau = 1,6 \times 10^{-9} \left(1 - 4,4 q^2 \times 10^{14} \right) s$$

No limite $q \rightarrow 0$ este resultado recai no valor conhecido na literatura [85]. É interessante observar que a ordem de grandeza do resultado obtido nos mostra que é válida a aproximação de tempo grande que fizemos na dedução da regra de ouro de Fermi. Podemos agora estimar uma cota superior para q (o que equivale a uma cota inferior para κ , uma vez que $q = 1/2\kappa$). Uma vez que a incerteza experimental na medição do tempo de emissão espontânea é da ordem de 0,1%, temos

$$4,4 q^2 \times 10^{14} < 10^{-3} \implies q < 1,5 \times 10^{-9} m$$

Ou seja, para que a influência da deformação não seja perceptível nos experimentos de emissão espontânea, o parâmetro q deve ser menor que $1,5 \times 10^{-9} m$. Assim, fica determinada uma cota superior (extremamente modesta) para o parâmetro q .

Conclusões do capítulo 5

Neste capítulo, vimos que a deformação κ na álgebra de Poincaré altera as taxas de emissão espontânea, porém de modo imperceptível se levarmos em conta os valores que a deformação κ , se de fato existir, deve vir a ter. Assim, a emissão espontânea, como era de se esperar devido ao fato de ser um fenômeno puramente atômico, não se mostrou de grande serventia para a imposição de uma cota ao valor de κ . Apesar de não ter servido a este propósito, existem diversas lições que podemos tirar deste desenvolvimento.

Primeiro, vimos que o átomo somente perceberia significativamente a existência de um comprimento fundamental se este fosse da ordem de grandeza atômica ($\sim 1\text{\AA}$). Segundo, a partir do sinal do resultado obtido, vimos que a presença da deformação κ estimula a emissão espontânea. Se em algum período remoto do universo a deformação κ tiver sido maior do que atualmente, este resultado pode ter interessantes consequências [86]. Por exemplo, o coeficiente de Einstein A_{21} seria alterado, alterando com isso o equilíbrio termodinâmico [87]. Como terceiro e último aspecto interessante, esta conta nos mostra como é relativamente simples lidarmos com o campo eletromagnético κ -deformado. Esperamos que este ponto sirva de estímulo para novos trabalhos sobre o tema.

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, analisamos diversos aspectos das teorias com comprimento fundamental. Primeiro, apresentamos um panorama da literatura sobre o tema, depois discutimos a quantização por deformação, a qual utilizamos posteriormente para deduzir a álgebra de Groenewold-Moyal dos campos em um espaço-tempo com geometria não-comutativa canônica. Explicamos o problema da mistura ultravioleta/infravermelho, e apresentamos a solução proposta por Gurău e colaboradores.

Em seguida, no capítulo 4, analisamos como esta vulcanização permite restaurar a renormalizabilidade do potencial efetivo CJT do modelo $\lambda\phi^{*4}$. Vimos que a vulcanização atua como um contra-termo, o qual permite absorvermos o termo divergente. Como perspectiva, pretendemos analisar outros potenciais efetivos do modelo $1/p^2 - \lambda\phi^{*4}$, a fim de entender melhor qual o papel desempenhado pelo termo advindo da vulcanização. Uma outra possibilidade que poderia ser interessante seria ir além da aproximação de Hartree-Fock.

Por fim, no capítulo 5, estudamos a emissão espontânea na eletrodinâmica κ -deformada. Deduzimos o tempo médio de decaimento em função da deformação e vimos que o efeito desta naquela é muito pequeno, tornando-se considerável somente quando a escala fundamental da teoria é comparável à escala atômica. Em breve, iremos analisar também outros efeitos atômicos da eletrodinâmica quântica κ -deformada, buscando experimentos mais precisos, a fim de obtermos uma cota superior para o comprimento fundamental melhor do que aquela aqui obtida.

Referências

- [1] Esta frase de Bohr pode ser encontrada em: PAULI, Wolfgang. Carta a Gunnar Källén, de 4 de Janeiro de 1957. In: PAULI, Wolfgang & MEYENN, Karl von. **Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg und andere**: Band IV, Teil IV: 1957-1958. Berlin: Springer, 2005 [citação na carta n. 2435, p. 45].
- [2] BERTRAND, Joseph. Sur l'homogénéité dans les formules de physiques. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences**, t. 86, pp. 916-920, 1878 [citação nas pp. 917 e 916]. Para uma análise mais detalhada, vide também, do mesmo autor: BERTRAND, Joseph. Principes généraux sur le choix des unités, extrait du chapitre XIII des leçons sur la théorie mathématique de l'électricité. **Nouvelles Annales de Mathématiques, journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale**, sér. 3, t. 9, pp. 21-35, 1890.
- [3] Infelizmente, não conseguimos ter acesso ao artigo de Stone. Assim, optamos por não citá-lo. Como fonte secundária, sugerimos a seguinte (breve, mas interessante) análise: RAY, T. P. Stoney's fundamental units. **Irish Astronomical Journal**, v. 15, p. 152, 1981.
- [4] PLANCK, Max. Über irreversible Strahlungsvorgänge. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin**, v. 5, pp. 440-480, 1899. Para uma excelente discussão deste trabalho de Planck: GORELIK, Gennady. **First steps of quantum gravity and the Planck values**, pp. 364-379. In: EISENTAEDT, Jean & KOX, A.J. (Eds.) *Studies in the history of general relativity* (Einstein Studies, v.3). Boston: Birkhäuser, 1992.
- [5] PLANCK, Max. *op.cit.*, p. 479-480 *apud* GORELIK, Gennady. *op.cit.*, p. 368.
- [6] Para uma interessante análise desta miríade de teorias esquecidas: KRAGH, Helge & CARAZZA, Bruno. From time atoms to space-time quantization: the idea of discrete time, ca 1925-1936. **Studies in History and Philosophy of Science**, v. 25, pp. 437-462, 1994.
- [7] POINCARÉ, Henri. **Ensaio fundamentais**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008 [citação nas pp. 201-202].

- [8] WHITTAKER, Edward T. **From Euclid to Eddington**. Cambridge: Cambridge University Press, 1949 [em particular, p. 41].
- [9] March publicou diversos artigos sobre este tema. O mais relevante para esta discussão é: MARCH, Arthur. Statistische Metrik und Quantenelektrodynamik. **Zeitschrift für Physik**, v. 106, n. 1-2, pp. 49-69, 1937. Vale consultar também: KRAGH, Helge. Arthur March, Werner Heisenberg, and the search for a smallest length. **Revue d'Histoire des Sciences**, v. 48, n. 4, pp. 401-434, 1995. March foi influenciado por Erwin Schrödinger, que pouco tempo antes afirmara que o conceito ordinário de espaço-tempo talvez não fosse válido no micro-mundo do núcleo atômico, vide *ibidem* [p. 421].
- [10] HEISENBERG, Werner. Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge. **Annalen der Physik**, Folge 5, Band 32, Seiten 20-30, 1938. Há uma tradução para o inglês em MILLER, Arthur. **Early quantum electrodynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [11] SNYDER, Hartland S. Quantized space-time. **Physical Review**, v. 71, n. 1, pp. 38-41, 1947. Vale consultar também: MIR-KASIMOV, R.M. The Snyder space-time quantization, q-deformations, and ultraviolet divergences. **Physics Letters B**, v. 378, n. 1-4, pp. 181-186, 1996.
- [12] Para uma excelente exposição introdutória da abordagem de Connes ao modelo padrão: CONNES, Alain. Interprétation géométrique du modèle standard de la physique des particules et structure fine de l'espace-temps. **La Vie des Sciences, Comptes Rendus**, série générale, tome 10, n. 3, pp. 223-234, 1993. Vale ver também: O'RAIFEARTAIGH, Lochlainn. Gauge theory: historical origins and some modern developments. **Reviews of Modern Physics**, v. 72, n. 1, pp. 1-23, 2000.
- [13] Uma análise de diversos espaços não-comutativos (incluindo suas motivações físicas e suas formulações matemáticas) pode ser encontrada em CONNES, Alain & MARCOLLI, Matilde. A walk in the noncommutative garden, pp. 1-128. In: KHALKHALI, Masoud & MARCOLLI, Matilde. **An invitation to noncommutative geometry**. Singapore: World Scientific, 2008. Para um panorama mais geral de algumas teorias alternativas do espaço-tempo (denominadas *não-clássicas*), vide: MONK, Nicholas A. M. Conceptions of space-time: problems and possible solutions. **Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, v. 28, n. 1, pp. 1-34, 1997.
- [14] Vide, por exemplo: LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004 [em particular, cap. 15].
- [15] Vide: BAHNS, D. et alii. On the unitarity problem in space/time noncommutative theories. **Physics Letters B**, v. 533, n. 1-2, pp. 178-181, 2002. Vide também: RIM, Chaiho & YEE, Jae Hyung.

- Unitarity in space-time noncommutative field theories. **Physics Letters B**, v. 574, n. 1-2, pp. 111-120, 2003.
- [16] Para ser mais preciso, há outras. Vide: ALVAREZ-GAUMÉ, Luis & WADIA, Spenta R. Gauge theory on a quantum space. **Physics Letters B**, v. 501, pp. 319-325, 2001.
- [17] Entretanto, é possível se construir modelos que relacionam estes dois sistemas. Por exemplo, o efeito Hall de um fluido carregado eletricamente pode ser modelado por uma teoria quântica de campos com coordenadas não-comutativas relacionadas pelos comutadores (1.1). Para uma demonstração deste resultado, vide: JACKIW, Roman. Physical instances of noncommuting coordinates. **Lecture Notes in Physics**, v. 616, pp. 294-304, 2003. Entretanto, não consideraremos, nesta dissertação, um fluido carregado, mas sim um campo escalar real, de tal modo que esta analogia não se aplica ao caso por nós analisado.
- [18] Este resultado foi demonstrado há mais de vinte anos por: ABOUELSAOOD, A. et alii. Open strings in background gauge fields. **Nuclear Physics B**, v. 280, pp. 599-624, 1987. Este sistema foi retomado recentemente por: SEIBERG, Nathan & WITTEN, Edward. String theory and noncommutative geometry. **Journal of High Energy Physics** 09, 1999.
- [19] A construção da álgebra de Poincaré κ -deformada foi feita por: LUKIERSKI, Jerzy et alii. q -deformation of Poincaré algebra. **Physics Letters B**, v. 264, n. 3-4, pp. 331-338, 1991. GILLER, S. et alii. More about the q -deformed Poincaré algebra. **Physics Letters B**, v. 286, n. 1-2, pp. 57-62, 1992. LUKIERSKI, Jerzy; NOWICKI, Anato; & RUEGG, Henri. New quantum Poincaré algebra and κ -deformed field theory. **Physics Letters B**, v. 293, n. 3-4, pp. 344-352, 1992.
- [20] Vide: COUGO-PINTO, Marcus Venicius & FARINA, Carlos. Creation of matter and radiation from deformation of Poincaré invariance. **Physics Letters B**, v. 391, pp. 67-70, 1997.
- [21] NEVES, M.J. *et alii*. Primitively divergent diagrams in a scalar field with quartic self-interaction and a kappa-deformed dispersion relation. **Journal of Physics A**, v. 43, 105402, 2010.
- [22] Vide: NEVES, M.J.; FARINA, C; & COUGO-PINTO, M.V. Past and future blurring at fundamental length scale. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 21, 211601, 2010.
- [23] Para uma excelente análise desta afirmação, vide: BOKULICH, Peter & BOKULICH, Alisa. Niels Bohr's generalization of classical mechanics. **Foundations of Physics**, v. 35, pp. 347-371, 2005.
- [24] Para uma excelente discussão (bastante matemática) acerca do que significa quantizar um sistema clássico e de quais modos isso pode ser feito: BEREZIN, Felix. General concept of quantization.

- Communications in Mathematical Physics**, v. 40, n. 2, pp. 153-174, 1975. Para uma revisão recente sobre o tema: TWAREQUE ALI, S. & ENGLIŠ, Miroslav. Quantization methods: a guide for physicists and analysts. **Reviews in Mathematical Physics**, v. 17, n. 4, pp. 391-490, 2005.
- [25] Essas relações de comutação são tais que, seguindo a prescrição de Dirac, os parênteses de Poisson da teoria são mapeados em comutadores. A fim de não nos delongarmos muito nesta seção 2.1, nós não enfatizamos suficientemente este ponto. Uma excelente apresentação desta idéia pode ser encontrado em GIULINI, Domenico. **That strange procedure called quantisation**. In: GIULINI, Domenico (Ed.) *et alii*. Quantum gravity: from theory to experimental search. Berlin: Springer, 2003, pp. 17-40 [em particular, pp. 18-23]. Curiosamente Giulini também discute o trabalho de Groenewold que apresentaremos na seção 2.3, porém com um enfoque completamente diferente.
- [26] Há aqui uma sutileza conceitual ignorada em praticamente todos os livros textos. Os operadores “posição” e “momento” empregados na quantização canônica são, no que se refere à formulação da teoria, diferentes da “função posição” e da “função momento” que descrevem os observáveis posição e momento. Para maiores esclarecimentos: ISHAM, Chris. **Lectures on quantum theory: mathematical and structural foundations**. London: Imperial College, 2001 [em particular, p. 72].
- [27] Na utilização do termo “protomecânica”, nos baseamos em: FARINA, Carlos & COUGO PINTO, Marcus Venicius. **Mecânica clássica**. Livro não publicado, versão de 2006 [em particular, cap. 2].
- [28] Este teorema é extremamente elegante e raramente mencionado nos livros texto. Para uma demonstração: ISHAM, Chris. *op. cit.* ref. [26] [em particular, pp. 99-100].
- [29] Vide, por exemplo: PESSOA, Osvaldo. **Conceitos de física quântica**, v. I. São Paulo: Livraria da Física, 2003 [em particular, cap. 5].
- [30] Vide, por exemplo, o excelente artigo: OSNAGHI, Stefano. A dissolução pragmático-transcendental do problema da medição em física quântica. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 15, n. 1, p. 79-124, 2005. No que se refere ao confronto da perspectiva de Bohr com outras perspectivas, vide: OSNAGHI, Stefano; FREITAS, Fábio; FREIRE, Olival. The origin of the Everettian heresy. **Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, v. 40, n. 2, pp. 97-123, 2009 [em particular, seções 6 e 7].
- [31] Esse resultado é consequência do chamado Teorema de Wintner, segundo o qual *dado um operador \mathfrak{B} qualquer, é impossível que um operador limitado \mathfrak{A} satisfaça $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A} = i\mathbb{1}$* . Vide: WINTNER, Aurel. The unboundedness of quantum-mechanical matrices. **Physical Review**, v. 71, n. 10, pp. 738-739, 1947. Vide também: WIELANDT, Helmut. Über die Unbeschränktheit der Operatoren

- der Quantenmechanik. **Mathematische Annalen**, v. 121, p. 21, 1949. Disponível em: [gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN = PPN235181684](http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684).
- [32] Uma vez que não voltaremos a este ponto mais a frente, vale abservar aqui que as duas quantizações que discutiremos nas próximas seções (a quantização de Wigner e a quantização por deformação) são facilmente extensíveis a espaços de fase não-euclidianos. Vide: LANDSMAN, Nicholas P. **Mathematical topics between classical and quantum mechanics**. New York: Springer, 1998 [em particular, cap. II seções 2 e 3]. Vide também: MUKUNDA, N. *et alii*. Wigner-Weyl isomorphism for quantum mechanics on Lie groups. **Journal of Mathematical Physics**, v. 46, 012106, 2005.
- [33] MACKEY, George. **The scope and history of commutative and noncommutative harmonic analysis**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1992 [citação na p. 283].
- [34] Em certo sentido, esse é um falso problema. Pois o caráter operatorial da mecânica quântica é arbitrário. Jordan e Sudarshan ilustram isso de maneira muito interessante: eles formulam a mecânica quântica sem operadores, e a mecânica clássica com operadores. Este resultado é largamente inspirado nos trabalhos de Groenewold e Moyal (além de trabalhos de John von Neumann, Ulf Uhlhorn, entre outros). Vide: JORDAN, Thomas F. & SUDARSHAN, Ennackal Chandy George. Lie group dynamical formalism and the relation between quantum mechanics and classical mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 33, n. 4, pp. 515-524, 1961.
- [35] Os resultados de Weyl foram originalmente publicados em: WEYL, Hermann. Quantenmechanik und Gruppentheorie. **Zeitschrift für Physik**, v. 46, n. 1-2, pp. 1-46, 1927. E posteriormente em: WEYL, Hermann. **Gruppentheorie und Quantenmechanik**. Leipzig: Hirzel, 1928. Este livro foi traduzido para o inglês em 1931: WEYL, Hermann. **The theory of groups and quantum mechanics** (traduzido do alemão por H.P. Robertson). New York: Dover, 1950. Apesar de termos acesso às três referências (o artigo pode ser encontrado na coletânea da ref. [49] e o livro em alemão pode ser facilmente encontrado na internet), optamos por citar sempre a partir da edição em inglês.
- [36] Para uma boa discussão acerca da necessidade da simetrização: ISHAM, Chris. *op. cit.* na ref. [26]. [vide o cap. 5, em particular, pp. 92-96]. Para uma análise mais extensa: SHEWELL, John Robert. **On the formation of quantum mechanical operators, and the Wigner distribution function**. PhD Thesis. Rice University, Houston, Texas, Estados Unidos da América, 1958.
- Há outras possibilidades de ordenamento, vide: LAX, Melvin. Quantum noise, XI. **Physical Review**, v. 172, n. 2, pp. 350-361, 1968. AGARWAL, Girish & WOLF, Emil. Quantum dynamics in phase space. **Physical Review Letters**, v. 21, n. 3, pp. 180-183, 1968 (errata: **Physical Review Letters**, v. 21, n. 9, p. 656, 1968). Uma revisão do tema pode ser encontrada em: AGARWAL,

- Girish & WOLF, Emil. Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics, I. **Physical Review D**, v. 2, n. 10, pp. 2161-2186, 1970.
- [37] WEYL, Hermann. *op. cit.* na ref. [35] [citação na p. 275].
- [38] WEYL, Hermann. *op. cit.* na ref. [35] [citação na p. 274].
- [39] Para uma análise crítica das limitações de diversos procedimentos de quantização, incluindo a quantização de Weyl, vide: SHEWELL, John Robert. On the formation of quantum-mechanical operators. **American Journal of Physics**, v. 27, n. 1, pp. 16-21, 1959.
- [40] Uma excelente análise da quantização de Weyl e das suas posteriores utilizações e influências em física-matemática pode ser encontrado em: PFLAUM, Markus J. **From Weyl quantization to modern algebraic index theory**. In: TENT, Katrin (Ed.) *Groups and analysis: the legacy of Hermann Weyl*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, pp. 84-99.
- [41] Os artigos originais são: GROENEWOLD, Hilbrand J. On the principles of elementary quantum mechanics. **Physica**, v. 12, n. 7, pp. 405-460, 1946. MOYAL, José Enrique. Quantum mechanics as a statistical theory. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 45, pp. 99-124, 1949.
- Em seguida, Moyal aplicou suas idéias ao oscilador harmônico: BARTLETT, M.S. & MOYAL, J.E. The exact transition probabilities of quantum-mechanical oscillators calculated by the phase-space method. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 45, pp. 545-553, 1949.
- Na década de 1950, motivado pelos debates gerados pela mecânica quântica de David Bohm (a qual também utiliza funções definidas no espaço de fase), Takabayasi levou adiante as idéias de Moyal: TAKABAYASI, Takehiko. The formulation of quantum mechanics in terms of ensemble in phase space. **Progress of Theoretical Physics**, v. 11, n. 4-5, pp. 341-373, 1954.
- Foi Baker quem levou os físicos a retomarem a atenção aos trabalhos de Groenewold e Moyal: BAKER Jr, George A. Formulation of quantum mechanics based on the quasi-probability distribution induced on phase space. **Physical Review**, v. 109, n. 6, pp. 2198-2206, 1958.
- Este formalismo para a mecânica quântica foi largamente difundido na década de 1960: JORDAN, Thomas F. & SUDARSHAN, Ennackal C.G. *op. cit.* na ref. [34]. MEHTA, C.L. Phase-space formulation of the dynamics of canonical variables. **Journal of Mathematical Physics**, v. 5, n. 5, 677-686, 1964. FAIRLIE, D.B. The formulation of quantum mechanics in terms of phase space functions. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 60, pp. 581-586, 1964. Para uma revisão dos trabalhos da década de 1960, vide: AGARWAL, Girish & WOLF, Emil. Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics, II. **Physical Review D**, v. 2, n. 10, pp. 2187-2205, 1970.

- [42] NEUMANN, John von. Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. **Göttinger Nachrichten**, v. 1, n. 11, 273-291, 1927 (o título completo da revista é Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Band 1927). Disponível em: [gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN = PPN252457811](http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN252457811). Uma breve, mas muito interessante, análise deste trabalho de von Neumann pode ser encontrada em: HOVE, Léon van. Von Neumann's contributions to quantum theory. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 64, n. 3, part 2, pp. 95-99, 1958 [em particular, pp. 97-98].
- [43] WIGNER, Eugene. On the quantum correction for thermodynamics equilibrium. **Physical Review**, v. 40, n. 5, pp. 749-759, 1932 [citação na p. 750].
- [44] *Ibidem* [citação na p. 749].
- [45] Neste sentido, vale consultar a excelente apresentação feita por: SCHLEICH, Wolfgang P. **Quantum optics in phase space**. Berlin: Wiley-VCH, 2001 [em particular, o cap. 3].
- [46] Sendo mais preciso, trata-se de uma bijeção entre (i) o espaço das funções quadrado-integráveis à Lebesgue definidas no espaço de fase e (ii) o conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt definidos sobre o espaço realizado pelo procedimento de Weyl. Uma vez que não estamos preocupados com os pormenores matemáticos, não nos aprofundaremos neste ponto. Para maiores informações: POOL, James C.T. Mathematical aspects of the Weyl correspondence. **Journal of Mathematical Physics**, v. 7, n. 1, pp. 66-76, 1966. Uma apresentação mais elementar pode ser encontrada em: ZAMPINI, Alessandro. **Applications of the Weyl-Wigner formalism to noncommutative geometry**. PhD Thesis. Università degli Studi di Napoli, Napoli, Itália, 2004 [em particular, p. 20].
- [47] O produto \star aparece na equação 4.27 do artigo de Groenewold, *op. cit.* na ref. [41]. E não aparece no artigo de Moyal, apesar de grande parte das idéias desta mecânica quântica estarem em seu artigo, formuladas sob a forma de processos estocásticos no espaço de fase.
- Mesmo após a valorização dos trabalhos de Groenewold e Moyal – vide ref. [41] – o produto \star permaneceu ausente. Grande parte das vezes, isso foi feito por meio de sua propriedade, que discutiremos na seção 2.4, $\int f \star g = \int fg$. Vide, por exemplo: FAIRLIE, D.B. *op. cit.* na ref. [41].
- Somente com os trabalhos sobre quantização por deformação – vide ref. [52] – o produto \star passou a ser sistematicamente utilizado de maneira explícita. Uma importante obra neste sentido foi o, relativamente recente, livro: RIEFFEL, Marc. **Deformation quantization for actions of \mathbb{R}^d** (Memoirs of the AMS n. 506). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1993.
- [48] Para uma análise dos parênteses de Groenewold-Moyal, vide: MEHTA, C.L. *op. cit.* na ref. [41]. E também: JORDAN, Thomas F. & SUDARSHAN, Ennackal C.G. *op. cit.* na ref. [34].

- [49] Para uma discussão desta equação: CURTRIGHT, Thomas; FAIRLIE, David; ZACHOS, Cosmas. Features of time-independent Wigner functions. **Physical Review D**, v. 58, n. 2, 025002, 1998. Os mesmos autores editaram um ótimo livro com uma coletânea dos mais importantes artigos sobre a mecânica quântica de Groenewold-Moyal e com um excelente ensaio introdutório ao tema: ZACHOS, Cosmas (Ed.); FAIRLIE, David (Ed.); CURTRIGHT, Thomas (Ed.). **Quantum mechanics in phase space**. Singapore: World Scientific, 2005.
- [50] A solução desta equação pode ser encontrada, por exemplo, em: ZEIDLER, Eberhard. **Quantum field theory II: quantum electrodynamics – A bridge between mathematicians and physicists**. Berlin: Springer, 2009 [em particular, pp. 592-596]. Para uma boa discussão da função de Wigner do átomo de Hidrogênio: DAHL, Jens Peder & SPRINGBORG, Michael. Wigner's phase space function and atomic structure, I. **Molecular Physics**, v. 47, n. 5, pp. 1001-1019, 1982. Este artigo possui também uma boa discussão da quantização de Weyl e do trabalho de Shewell da nota [39]. Esta equação no caso de espalhamentos foi analisada por: REMLER, E.A. Use of the Wigner representation in scattering problems. **Annals of Physics**, v. 95, n. 2, pp. 455-495, 1975.
- [51] Vale observar também que o limite quântico-clássico da função de Wigner tem uma interpretação muito elementar: ela passa a ser positiva definida, representando portanto uma distribuição de probabilidade estatística clássica. Uma excelente apresentação deste tema pode ser encontrada em: DIÓSI, Lajos. Wigner centennial: His function and its environmental decoherence. **Acta Physica Hungarica B**, v. 20, n. 1-2, pp. 29-34, 2004.
- [52] BAYEN, F.; FLATO, M.; FRONSDAL, C.; LICHNEROWICZ, A.; & STERNHEIMER, D. Deformation theory and quantization I. **Annals of Physics**, v. 111, pp. 61-110, 1978. *Idem*, Deformation theory and quantization II. **Annals of Physics**, v. 111, pp. 111-151, 1978.
- A primeira demonstração matemática de existência da quantização por deformação em variedades simpléticas quaisquer foi apresentada por: WILDE, Marc de & LECOMTE, Pierre B.A. Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. **Letters in Mathematical Physics**, v. 7, n. 6, pp. 487-496, 1983.
- Para uma análise de como incluir a *quantização por deformação* em um curso de mecânica quântica, vide: HIRSHFELD, Allen C. & HENSELDER, Peter. Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics. **American Journal of Physics**, v. 50, n. 5, pp. 537-547, 2002.
- [53] Vide: FADDEEV, Ludwig. Basics of quantum mechanics and canonical quantization in Hilbert spaces. In: DELIGNE, Pierre. **Quantum fields and strings: a course for mathematicians**. American Mathematical Society, 2000, pp. 513-552 [em particular, p. 517].

- [54] Na demonstração a seguir, nos baseamos em: WESS, Julius. Differential calculus and gauge transformations on a deformed space. **Lecture Notes in Physics** (Springer), v. 774, pp. 3-21, 2009 [em particular, pp. 18-19]. Consultamos também: SZABO, Richard J. Quantum field theory on noncommutative spaces. **Physics Reports**, v. 378, n. 4, pp. 207-299, 2003.
- [55] Para uma defesa desse produto (3.6) em detrimento do produto (3.5), vide: WULKENHAAR, Raimar. **Renormalisation of noncommutative ϕ_4^4 -theory to all orders**. Habilitationsschrift, Fakultät für Physik der Technischen Universität Wien, 2004 [em particular, pp. 4, 23, e 24].
- [56] As regras de Feynman do modelo $\lambda\phi^{*4}$ foram analisadas por: FILK, Thomas. Divergencies in a field theory on quantum space. **Physics Letters B**, v. 376, n. 1-3, pp. 5358, 1996. MICU, Andrei & SHEIKH-JABBARI, Mohammad M. Noncommutative ϕ^4 theory at two loops. **Journal of High Energy Physics**, ano 2001, n. 1, artigo 025.
- Para uma análise da existência da expansão perturbativa: LINHARES, Cesar Augusto; MALBOU-ISSON, Adolfo Pedro Carvalho; & RODITI, Itzhak. Existence of asymptotic expansions in noncommutative quantum field theories. **Reviews in Mathematical Physics**, v. 20, pp. 933-949, 2008.
- [57] A existência da mistura uv/iv foi demonstrada por: MINWALLA, Shiraz; RAAMSDONK, Mark van; & SEIBERG, Nathan. Noncommutative perturbative dynamics. **Journal of High Energy Physics**, ano 2000, n. 2, artigo 020. A nossa discussão segue, em larga medida, este artigo. Algumas expressões matemáticas do artigo tem erros de digitação, e muitas contas são omitidas. Buscamos, então, corrigir tais erros, e expor as contas da maneira mais clara possível.
- [58] GRADSHTEYN, I.S. **Table of integrals, series, and products**. Sexta edição, San Diego: Academic Press, 2000 [vide integral 7 da seção 8.432, p. 907].
- [59] Fomos extremamente imprecisos nesta caracterização da renormalização. Para uma brilhante exposição do tema, vide: SCHWEBER, Silvan S. **QED and the men who made it**: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga. Pinceton: Princeton University, 1994 [em particular, pp. 595-605].
- [60] Essa expressão é apresentada, sem demonstração, por: MINWALLA, Shiraz et alii. *op.cit.* na ref. [57] [em particular, p. 8]. Nós buscamos apresentar aqui uma demonstração intuitiva, breve e autocontida. Ela não é de todo precisa, e nem tampouco se propõe a sê-lo.
- [61] Uma breve, mas excelente, discussão deste exemplo pode ser encontrada em: DITTRICH, Walter & REUTER, Martin. **Effective lagrangians in quantum electrodynamics** (Lecture Notes in Physics, v. 220). Berlin: Springer, 1985 [em particular, pp. 16-17].

- [62] Os trabalhos originais são: GROSSE, Harald & WULKENHAAR, Raimar. Power-counting theorem for non-local matrix models and renormalisation. **Communications in Mathematical Physics**, v. 254, n. 1, pp. 91-127, 2005. GROSSE, Harald & WULKENHAAR, Raimar. Renormalisation of ϕ^4 -theory on noncommutative \mathbb{R}^4 in the matrix base. **Communications in Mathematical Physics**, v. 256, n. 2, pp. 305-374, 2005.
- Para uma revisão do segundo trabalho: GROSSE, Harald & WULKENHAAR, Raimar. **Noncommutative QFT and renormalization**. In: FAUSER, Bernhard (Ed.) *et alii*. Quantum gravity: mathematical models and experimental bounds. Berlin: Springer, 2007, pp. 315-326. Uma grande revisão sobre o tema pode ser encontrada em: WULKENHAAR, Raimar. *op. cit.* na ref. [55]. Para uma excelente análise das motivações para a inclusão do novo termo: GOURSAC, Axel de. On the origin of the harmonic term in noncommutative quantum field theory. **Symmetry, Integrability and Geometry (SIGMA)**, v. 6, 048, 2010.
- [63] Há um anacronismo em nossa apresentação. Pois a clareza acerca de que a mistura somente pode ser eliminada por meio da inclusão de um termo em ϕ^2 é posterior aos trabalhos de Grosse e Wulkenhaar, e portanto eles não se guiaram por isso. Pelo contrário, foi exatamente o resultado deles que levou os físicos a suspeitarem que o problema não estava na forma da interação. Como não temos aqui nenhum propósito de fidelidade histórica, optamos por apresentar o tópico sob o ponto de vista lógico, incorrendo intencionalmente neste anacronismo.
- [64] A origem desse nome não é de todo clara. É possível que tenha vindo da química, na qual significa mudar um processo a fim de aumentar a durabilidade do produto final (por exemplo, adicionar enxofre à fabricação de polímeros a fim de aumentar a elasticidade). Os autores do nome foram: GURĂU, Răzvan; RIVASSEAU, Vincent; & VIGNES-TOURNERET, Fabien. Propagators for noncommutative field theories. **Annales Henri Poincaré**, v. 7, n. 7-8, pp. 1601-1628, 2006 [em particular, p. 1602].
- [65] O artigo original é: GURĂU, Răzvan; MAGNEN, Jacques; RIVASSEAU, Vincent; & TANASA, Adrian. A translation invariant renormalizable non-commutative scalar model. **Communications in Mathematical Physics**, v. 287, n. 1, pp. 275-290, 2009. Para uma boa revisão: TANASA, Adrian. Translation-invariant noncommutative renormalization. **Symmetry, Integrability and Geometry (SIGMA)**, v. 6, 025, 2010.
- [66] BLASCHKE, Daniel *et alii*. Quantum corrections for translation-invariant renormalizable non-commutative ϕ^4 theory. **Journal of High Energy Physics**, ano 2008, n. 11, artigo 074.
- [67] Confirme *ibidem* [em particular, p. 7].

- [68] Blaschke e colaboradores não consideram essa solução em seu artigo, impondo restrições mais brandas a a_R . Acreditamos que a única maneira de realmente solucionar o problema proposto por Minwalla é impor que a_R seja zero, tornando a integral da ação efetiva convergente. Evidentemente, em se tratando somente da renormalização do propagador $\Pi^{(1)}$, essa restrição que nós impusemos não se faz necessária.
- [69] Seguimos aqui a apresentação de: RIVERS, R.J. **Path integral methods in quantum field theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988 [em particular, pp. 4-37]. Vale consultar também: JACKIW, Roman. Functional evaluation of the effective potential. **Physical Review D**, v. 9, n. 6, pp. 1686-1701, 1974.
- [70] Para uma excelente discussão acerca desta identificação: ITZYKSON, Claudde & ZUBER, Jean-Bernard. **Quantum field theory**. New York: Dover, 2005 [em particular, pp. 123-124].
- [71] Nossa apresentação da transformada de Legendre segue: ARNOLD, Vladimir. **Mathematical aspects of classical mechanics**, segunda edição. New York: Springer, 1989 [em particular, pp. 61-65].
- [72] Esta passagem em geral é ignorada na literatura. Um dos poucos livros que chama atenção a ela é: ITZYKSON, Claudde & ZUBER, Jean-Bernard. *op. cit.* na ref. [70] [em particular, p. 290].
- [73] A relação entre correções quânticas e quebra espontânea de simetria foi formulada por: COLEMAN, Sidney & WEINBERG, Eric. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. **Physical Review D**, v. 7, n. 6, pp. 1888-1910, 1973.
- [74] Artigo original: CORNWALL, John M. Cornwall; JACKIW, Roman; & TOMBOULIS, E. Terry. Effective action for composite operators. **Physical Review D**, v. 10, n. 8, pp. 2428-2445, 1974. Um dos raros artigos de revisão sobre o tema é: HAYMAKER, R.W. Variational methods for composite operators. *Rivista del Nuovo Cimento*, v. 14, n. 8, pp. 1-89, 1991.
- [75] Vide: AMELINO-CAMELIA, Giovanni & PI, So-Young. Self-consistent improvement of the finite temperature effective potential. **Physical Review D**, v. 47, n. 6, pp. 2356-2362, 1993. Este artigo é uma enfática defesa do formalismo CJT no caso do modelo $\lambda\phi^4$ a temperatura finita.
- [76] Para uma apresentação da utilização do formalismo CJT em teoria quântica de campos fora do equilíbrio térmico: BERGES, Jürgen. Introduction to nonequilibrium quantum field theory. **AIP Conference Proceedings**, v. 739, pp. 3-62, 2004.
- [77] Dois estudos recentes sobre o tema são: CASTORINA, Paolo & ZAPPALÀ, Dario. Nonuniform symmetry breaking in noncommutative $\lambda\phi^4$ theory. **Physical Review D**, v. 68, n. 6, 065008, 2003.

- CASTORINA, Paolo & ZAPPALÀ, Dario. Spontaneous breaking of translational invariance in non-commutative $\lambda\phi^4$ theory in two dimensions. **Physical Review D**, v. 77, n. 2, 027703, 2008.
- [78] Para uma boa discussão acerca da renormalização do potencial efetivo CJT: AMELINO-CAMELIA, Giovanni & PI, So-Young. *op. cit.* na ref. [75]. Este procedimento de renormalização tem suas origens nos modelos $O(N)$: COLEMAN, Sidney; JACKIW, Roman; & POLITZER, Hugh David. Spontaneous symmetry breaking in the $O(N)$ model for large N . **Physical Review D**, v. 10, n. 8, pp. 2491-2499, 1974. Vale observar também a semelhança com o esquema de renormalização levado a cabo em: PI, So-Young & SAMIULLAH, Mohammad. Renormalizability of the time-dependent variational equations in quantum field theory. **Physical Review D**, v. 36, n. 10, pp. 3128-3137, 1987.
- [79] Este trabalho foi apresentado na tese: MANDANICI, Gianluca. **Wave propagation and ir/uv mixing in noncommutative spacetimes**. Tese de Doutorado, Departamento de Física, Università di Roma (La Sapienza), em Janeiro de 2003. Orientadores: Giovanni Amelino-Camelia & Kensuke Yoshida. Posteriormente, publicado em: MANDANICI, Gianluca. Cornwall-Jackiw-Tomboulis effective potential for canonical noncommutative field theories. **International Journal of Modern Physics A**, v. 19, n. 21, pp. 3541-3555, 2004.
- [80] Caso tenhamos uma solução exata desta equação, todos os gráficos dayse e super-dayse são (iterativamente) computados. Vide: AMELINO-CAMELIA, Giovanni & PI, So-Young. *op. cit.* na ref. [75] [em particular, p. 47]. Uma boa discussão sobre a solução desta equação no modelo $\lambda\phi^6$ pode ser encontrada em: SATHEESH, K.P. & BABU JOSEPH, K. Finite temperature Cornwall-Jackiw-Tomboulis formalism of Φ^6 theory. **Pramana**, v. 50, n. 2, pp. 133-148, 1998.
- [81] AMELINO-CAMELIA, Giovanni *et alii*. Constraining the energy-momentum dispersion relation with Planck-scale sensitivity using cold atoms. **Physical Review Letters**, v. 103, 171302, 2009. Ver errata: **Physical Review Letters**, v. 104, 039901(E), 2010.
- [82] Estas equações foram apresentadas em: COUGO-PINTO, Marcus Venicius; FARINA, Carlos; & MENDES, Jayme. Casimir effect and creation of radiation in confined κ -deformed electrodynamics. **Physics Letters B**, v. 529, pp. 256-260, 2002 [em particular, p. 257].
- [83] Esta expressão, ainda não publicada, foi calculada por Mario Junior de Oliveira Neves, a quem agradeço por me fornecer o resultado.
- [84] Uma excelente discussão acerca das dificuldades em quantizar os campos, em particular o campo escalar, na presença da deformação κ pode ser encontrada em: MENDES, Jayme Felipe Martins. **Efeitos do vácuo em teoria quântica de campos deformada**. Tese de Doutorado, apresen-

- tada ao Programa de Pós-Graduação em Física, UFRJ, em Abril de 2003. Orientador Prof. Marcus Venicius Cougo-Pinto. Vide também: NEVES, Mario Junior de Oliveira. **Modelos em teoria quântica de campos com relação e dispersão κ -deformada**. Tese de Doutorado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, UFRJ, em Outubro de 2008. Orientador Prof. Marcus Venicius Cougo-Pinto.
- [85] Estas quantidades, bem como uma boa discussão da emissão espontânea, podem ser encontradas em: BELLAC, Michel Le. **Quantum physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006 [em particular, pp. 473-477].
- [86] Sobre esta especulação cosmológica, vide: COUGO-PINTO, Marcus Venicius & FARINA, Carlos. op. cit. na ref. [20] [em particular, p. 70].
- [87] Para a relação entre emissão espontânea e termodinâmica: MILONNI, Peter. **The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics**. San Diego: Academic Press, 1994 [em particular, pp. 20-21].