

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Tunelamento de Barreira na Emissão de  
Prótons por Núcleos Deficientes em Nêutrons

MARTHA MONIQUE NOGUEIRA RODRIGUES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 2011

*Aos meus pais.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades que me foram concedidas, por ter conhecido pessoas e lugares interessantes, mas também pelos momentos difíceis, mas que contribuíram para o meu aprendizado.

Não poderia deixar de agradecer aos meus pais Rute e Edmundo que me ajudaram e deram condições para que conseguisse prosseguir nesta batalha.

Ao meu orientador prof. Sérgio Duarte que desde o início acreditou no meu potencial, aos professores Odilon Tavares, Emil Medeiros, José Helayel, Edgar Côrrea, Sebastião Alves que, ao longo deste anos, me deram confiança e me ajudaram sempre que precisei e ao professor Nilton Teruya por sua grande contribuição em nosso trabalho. Um agradecimento especial à Fundação Faperj.

Minha gratidão a nossa secretária e amiga, Cristiana de Oliveira.

Aos coordenadores da pós-graduação, aos secretários Bete e Ricardo, aos meus colegas de sala, Carlos Hernaski, Alfredo Vargas e Guilherme Bremm, e aos demais colegas e amigos, fora e dentro do CBPF. A todos só posso dizer: Muito Obrigada!

# Resumo

No presente trabalho apresentaremos um modelo de tunelamento de barreira de potencial para discussão do comportamento de taxas e meias-vidas de decaimento nuclear por emissão de prótons. Inicialmente, utilizaremos este modelo com um único parâmetro, aplicado aos emissores alfa, que constitui um decaimento com dados bem estabelecidos, com o objetivo de validar o modelo de barreira. Diante do sucesso na aplicação do modelo de decaimento alfa, utilizamos o mesmo na discussão de núcleos emissores de um próton ainda pouco estudados, reproduzindo quase a totalidade dos dados de meias-vidas existentes. Novamente, o modelo apresentou resultados bastante satisfatórios para a determinação de meias-vidas dos emissores de próton no estado fundamental, e também nos estados isoméricos para os quais existem medidas disponíveis na literatura. Adicionalmente, fizemos algumas previsões para a meia-vida de possíveis emissores ainda não detectados experimentalmente. O método de determinação de meias-vidas e taxas é então estendido para os emissores de dois prótons, porém, neste caso, a barreira de potencial é determinada utilizando formas de potenciais mais realistas, convencionalmente aplicadas na Física Nuclear. Utilizamos o potencial nuclear de Woods-Saxon (WS) e os potenciais, coulombiano e centrífugo. Com este modelo de barreira, temos como principais parâmetros livres a profundidade do potencial nuclear (WS) e a sua difusibilidade. Foi analisada a aplicação do modelo para o caso da emissão de dois prótons pelo  $^{45}\text{Fe}$ , discutindo-se também os possíveis valores de momento angular aceitáveis para a descrição do modelo.

# Abstract

In the present work we will present a potential barrier model of tunnelling for discussion the behavior of half-life and rate of nuclear decay by proton emission. Initially, we will use a one-parameter model applied to the alpha emitters, which constitutes a decay of well established data with the aim of validate the potential barrier model. In view of the success of the model applied to alpha decay, we use it to discuss the one-proton emission process not yet well studied. The model was able in reproducing, almost the totality of the existing half-life data. Again, the model presents satisfactory results for the half-live determination for ground-state proton emission as well as for isomeric states with half-lives available in the literature. In addition, we made predictions for half-life of possible proton emitters nuclei not yet detected experimentally. The method of evaluation of half-life and decay rate is extended to two-proton emission cases, however, in these cases the potential barrier is determine by using more realistic forms of potential, conventionally applied in the Nuclear Physics. We used the nuclear potential of Woods-Saxon (WS) together with the Coulomb and centrifugal potentials. By using this approach we have as main free parameters the depth of the nuclear potential (WS) and its difuseness. We discuss the application of the model for the case of emission of two-protons from  $^{45}\text{Fe}$ , where we make an analysis of possible values of angular moment for the decay.

# Conteúdo

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Conteúdo . . . . .	v
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Tunelamento de Barreira na Aproximação de Wentzel – Kramers – Brillouin (WKB)</b>	<b>4</b>
1.1 O Método WKB . . . . .	4
1.2 Aproximação WKB nos pontos de retorno . . . . .	8
1.3 O coeficiente de transmissão na aproximação WKB. . . . .	13
<b>2 Decaimentos Nucleares numa Descrição Fenomenológica da Barreira.</b>	<b>15</b>
2.1 Modelo fenomenológico de barreira . . . . .	16
2.2 Aplicação do modelo no decaimento alfa . . . . .	19
<b>3 Modelo de Barreira Fenomenológica Aplicada aos Núcleos Emissores de Prótons</b>	<b>24</b>
3.1 Emissão de prótons por núcleos exóticos no estado fundamental . . . . .	26

3.2	Emissores de prótons em estados meta-estáveis (isoméricos) . . . . .	29
3.3	Previsões do modelo para possíveis novos emissores de prótons . . . . .	31
3.4	Emissão de prótons e sistemáticas observadas . . . . .	34
3.4.1	Sistemática de Geiger-Nuttall . . . . .	34
3.4.2	Sistemática de formas nucleares . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Emissão Simultânea de Dois Prótons por Núcleos Deficientes em Nêutrons</b>	<b>40</b>
4.1	Proposta estatística de Goldansky para emissão simultânea de dois prótons . . . . .	43
4.2	Um modelo de barreira de potencial realista . . . . .	45
4.3	Emissão de dois prótons na barreira realista dentro da proposta de Goldansky . . . . .	46
4.3.1	A distribuição de energia de um próton na dupla emissão do $^{45}\text{Fe}$ . . . . .	47
4.3.2	A meia-vida da emissão de dois prótons pelo $^{45}\text{Fe}$ . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Síntese dos Resultados, Conclusões e Perspectivas</b>	<b>53</b>
5.1	Síntese dos Resultados . . . . .	53
5.2	Conclusões Finais . . . . .	55
5.3	Perspectivas . . . . .	56
	<b>Apêndice A</b>	<b>57</b>
	<b>A Cálculo do Fator de Gamow para a Barreira Fenomenológica.</b>	<b>58</b>
A.1	Fator de Gamov na região de superposição . . . . .	58
A.2	Fator de Gamov na região de separação . . . . .	60
	<b>Apêndice B</b>	<b>62</b>

<b>B</b>	<b>Coefficiente de Transmissão numa Barreira Quadrada</b>	<b>63</b>
	<b>Apêndice C</b>	<b>66</b>
<b>C</b>	<b>Determinação de Meias-vidas para o Tunelamento da Barreira Fenomenológica</b>	<b>67</b>
	<b>Apêndice D</b>	<b>68</b>
<b>D</b>	<b>Publicações</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Introdução

A atividade dos núclídeos que emitem radiações, conhecida por radioatividade, foi descoberta em 1896 por Henri Becquerel que entusiasmado com a apresentação de Poincaré sobre a descoberta do raio-X intensificou seus estudos sobre materiais fosforescentes e fluorescentes. Estabeleceu que os sais de Urânio emitem radiações parecidas com o raio-X e que impressionavam chapas fotográficas.

Porém, o entendimento do fenômeno ficou por conta do casal Curie. Em 1898, Madame Curie e seu marido Pierre descobriram que o elemento Tório apresentava características radioativas semelhantes à do Urânio.

A radioatividade já era explicada como propriedade atômica pelo casal Curie. Determinavam a intensidade da radiação de elementos radioativos pela ionização do ar.

Em 1934 o casal Joliot-Curie, verificou que a radioatividade pode também ser artificialmente induzida. O processo de emissão de radiação pelo núclídeo radioativo é chamado de desintegração nuclear ou decaimento nuclear.

Neste trabalho estudamos, inicialmente, o decaimento alfa utilizando um modelo de um único parâmetro introduzido em nosso trabalho para o estudo de emissão de prótons por núcleos exóticos deficientes em nêutrons. Baseado na aproximação WKB este modelo possibilita o cálculo da meia-vida dos decaimentos alfa de núcleos de diferentes paridades no número de massa e número atômico, cobrindo quase todos os dados experimentais existentes (mais de três centenas de dados). O objetivo aqui era consolidar a aplicação

do modelo de barreira usando uma forma de decaimento muito bem estudada na literatura.

Em seguida o modelo foi aplicado para o cálculo de meias-vidas de decaimento por emissão de um próton de núcleos exóticos, que são elementos que encontram-se longe da linha de estabilidade beta com um número excessivo de prótons, próximo a “proton drip line”, conhecida como linha de gotejamento de próton (Fig. 1). Esses núcleos não são encontrados livres na natureza, mas seus estudos são relevantes na astrofísica nuclear, por exemplo, pois muitos deles participam de reações em cadeia que ocorrem no interior das estrelas responsáveis pela nucleossíntese dos elementos mais pesados. Esses núcleos possuem meias-vidas muito curtas, da ordem de milissegundos, mas podem ser produzidos em laboratório a partir de reações nucleares com feixes de íons pesados e, depois, são utilizados para o estudo de suas propriedades.

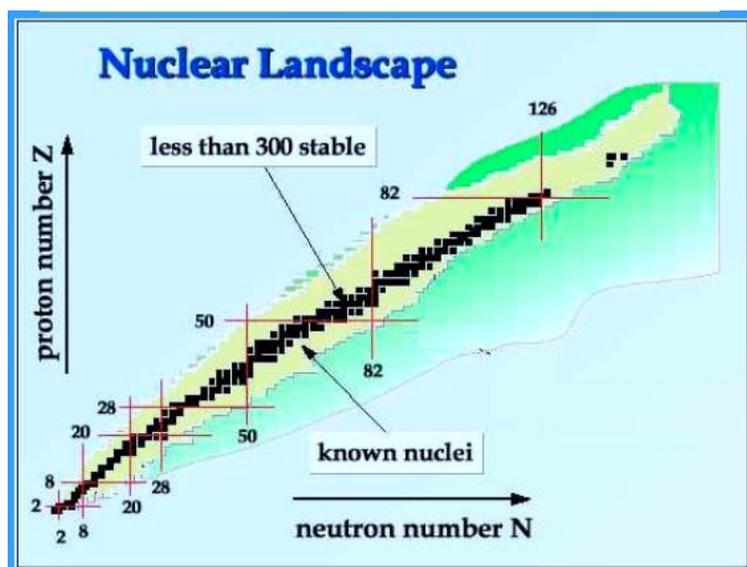


Figura 1: Carta de núclídeos mostrando os núcleos conhecidos da linha de beta estabilidade em cor preta e a extensão da mesma para a região de núcleos exóticos ricos em próton (acima) e ricos em nêutrons (abaixo). A linha limite superior da região rica em prótons é chamada linha de gotejamento de prótons (*proton drip line*) e a inferior é denominada linha de gotejamento de nêutrons (*neutron drip line*). A sequência de números mágicos é indicada por linhas vermelhas.

Outra motivação para a pesquisa dos núcleos exóticos é que suas propriedades devem se desviar significativamente do comportamento sistemático observados na linha de beta estabilidade. Por exemplo, possuir uma seqüência de números mágicos diferente do convencional ( $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ ) e novas simetrias, permitindo assim a revisão da estrutura nuclear e dos modelos utilizados.

Este trabalho está organizado na sua apresentação como especificado a seguir.

No primeiro capítulo apresentamos a aproximação WKB fazendo uma análise de sua aplicação nos pontos de retorno.

No capítulo 2 desenvolvemos o nosso modelo de barreira fenomenológica e depois aplicamos ao decaimento alfa. Ainda neste capítulo mostramos o procedimento de ajuste do único parâmetro do modelo.

No capítulo seguinte este mesmo modelo é utilizado para os emissores de um próton que como veremos reproduz de maneira muito satisfatória os dados de meias-vidas existentes na literatura.

No capítulo 4 estudamos a emissão de dois prótons, introduzindo um tipo de barreira construída por formas de potencial convencionalmente utilizados na Física Nuclear, ao que denominamos de modelo de barreira realista. Para esse decaimento analisamos a emissão simultânea de dois prótons pelo  $^{45}\text{Fe}$  cujos dados experimentais foram recentemente determinados (ref. [1]).

Fazemos, no último capítulo, uma síntese dos resultados parciais apresentados nos capítulos anteriores, apresentamos nossas conclusões e algumas sugestões para a continuidade do presente trabalho.

Terminamos incluindo apêndices suplementares nos quais são mostradas, explicitamente, a dedução de resultados utilizados no corpo do trabalho (apêndices A, B e C). No apêndice D são documentados os Artigos originados no desenvolvimento deste trabalho.

# Capítulo 1

## Tunelamento de Barreira na Aproximação de Wentzel – Kramers – Brillouin (WKB)

Poucas questões relacionadas à Mecânica Quântica possuem solução exata, na grande maioria das vezes os problemas formulados são resolvidas através de métodos de aproximação. No modelo abordado neste trabalho utilizamos o método de aproximação desenvolvido por Wentzel, Kramers e Brillouin, método WKB (refs. [2], [3], [4]), também conhecida como aproximação semi-clássica. Neste capítulo fizemos um resumo sobre o método WKB deduzindo expressões bem conhecidas na literatura, porém explorando detalhes de sua aplicação não tão difundidos.

### 1.1 O Método WKB

Neste método admite-se que se tenha uma partícula movendo-se num determinado potencial  $V(s)$ , num estado estacionário do sistema. O potencial traduz a ação do núcleo residual sobre a partícula a ser emitida. O sistema de dois corpos já separado nas coordenadas relativas e de centro de massa leva a uma equação de

Schödinger independente do tempo para a coordenada relativa dada por ref. [5],

$$\left( \frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + V(s) \right) \psi(s) = E\psi(s) , \quad (1.1)$$

onde  $E$  é a energia do movimento relativo e  $\mu$  é a massa reduzida do sistema de dois corpos dada por  $\mu = Mm/(M + m)$ , onde  $M \equiv M(ZA)$  corresponde à massa do núcleo residual e  $m$ , a massa da partícula a ser emitida.

Uma solução mais geral para a equação de Schroedinger independente do tempo tem a forma,

$$\psi(s) = Ne^{\frac{i}{\hbar}\phi(s)}, \quad (1.2)$$

com  $N$  sendo a normalização e  $\phi(s)$  a função de fase. Substituindo-a na eq. (1.1), obtém-se

$$\left[ -\frac{1}{\hbar^2}(\phi'(s))^2 + \frac{i}{\hbar}\phi''(s) + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(s)) \right] = 0 \quad (1.3)$$

onde  $\phi'$  e  $\phi''$  são as derivadas de  $\phi$  em relação a  $s$ .

Fazendo a expansão em série para  $\phi(s)$  na forma

$$\phi(s) = \phi_0(s) + \hbar\phi_1(s) + \hbar^2\phi_2(s) + \dots \quad (1.4)$$

$\phi_0(s)$  corresponderá à fase clássica desde que é o que sobrevive no limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Os outros termos da série representam correções quânticas para a fase clássica.

Substituindo a série na eq. (1.3), obtém-se:

$$\frac{1}{\hbar^2}(-(\phi_0'(s))^2 + 2\mu(E - V(s))) + \frac{i}{\hbar}(i\phi_0''(s) - 2\phi_0'(s)\phi_1'(s)) + O(\hbar^0) = 0 \quad (1.5)$$

Para que essa igualdade seja verdadeira, os coeficientes dos potenciais de  $\hbar$  na eq. (1.5) devem se anular.

Da condição de que o coeficiente de  $\hbar^2$  se anula temos,

$$-(\phi_0'(s))^2 + 2\mu(E - V(s)) = 0$$

ou seja,

$$\phi_0'(s) = \pm p(s),$$

que nos dá,

$$\phi_0(s) = \pm \int_{s_0}^s ds' p(s'), \quad (1.6)$$

Obtém-se a fase clássica como

$$\phi_0(s) = \int_{s_0}^s ds' p(s') \quad (1.7)$$

Se mantivermos apenas o termo dominante na expansão de  $\phi(s)$ , então a função de onda terá a forma

$$\psi(s) = N e^{\frac{i}{\hbar} \phi_0(s)} = N e^{\frac{i}{\hbar} \int_{s_0}^s ds' p(s')} \quad (1.8)$$

A função de onda estacionária dependente do tempo seria,

$$\psi(s, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi(s)$$

que nos leva a

$$\psi(s, t) = N e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' (p\dot{s} - E)}. \quad (1.9)$$

Note-se que em (1.9) o argumento da função exponencial corresponde essencialmente a ação clássica

$$S_{[cl]} = \int_0^t dt' (p\dot{s} - E).$$

Incluindo uma correção de primeira ordem na função de fase  $\phi(s)$  olhando para o coeficiente do termo  $1/\hbar$  na eq. (1.5) e levando o segundo termo, temos:

$$i\phi''(s) - 2\phi_0'(s)\phi_1'(s) = 0,$$

que leva a

$$\phi_1(s) = \frac{i}{2} (\ln \phi_0'(s))' = \frac{i}{2} (\ln p(s))', \quad (1.10)$$

A constante de integração na eq. (1.10) pode ser absorvida em  $N$ . O aparecimento do momento como argumento da função logarítmica exponencial (1.10) seleciona a raiz positiva para  $\phi_0(s)$  na eq. (1.6). Então,

incluindo a correção de primeira ordem na função de fase, escrevemos a função de onda como:

$$\begin{aligned}\psi(s) &\cong N e^{\frac{i}{\hbar}(\phi_0(s) + \hbar\phi_1(s))} , \\ \psi(s) &\cong N e^{\frac{i}{\hbar}(\int^s ds' p(s') + \frac{i\hbar}{2} \ln p(s))} \\ \psi(s) &\cong \frac{N}{\sqrt{p(s)}} e^{\frac{i}{\hbar}(\int^s ds' p(s'))} ,\end{aligned}\tag{1.11}$$

obtendo, dessa forma, a função de onda na aproximação WKB. Nesta aproximação verifica-se que há uma divergência na função de onda WKB para  $p(s)$  muito pequeno e, em particular, uma singularidade para

$$p(s) = 0 .\tag{1.12}$$

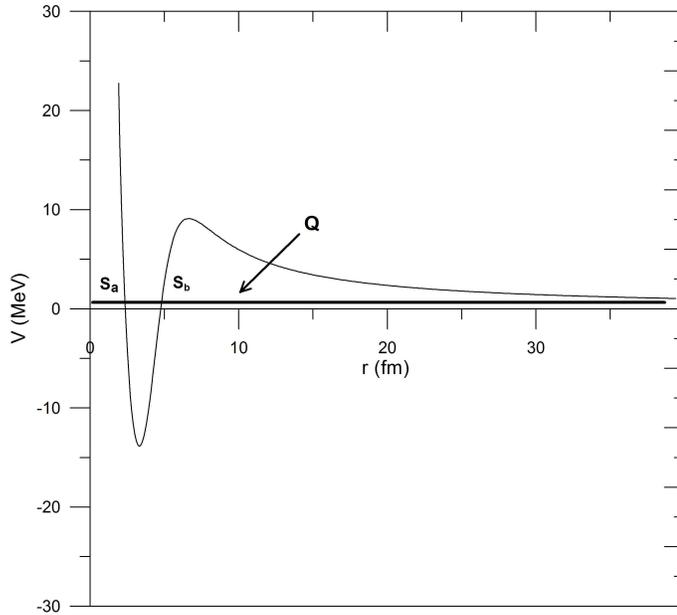


Figura 1.1: Barreira de potencial com os pontos de retorno,  $s_a$  e  $s_b$ . A linha cheia representa a energia de decaimento,  $Q$ .

Da eq. (1.11) nota-se que,

$$\psi^*(s)\psi(s) \propto \frac{1}{p(s)} ,\tag{1.13}$$

ou seja, a densidade de probabilidade é inversamente proporcional a  $p(s)$  ou a velocidade. O que já era esperado numa visão clássica, porque qualitativamente o sistema é mais provável de ser encontrado em

pontos onde sua velocidade média é menor. Então, a aproximação WKB nos oferece uma função de onda que preserva algumas propriedades clássicas. Por isso, a aproximação WKB é chamada de aproximação semi-clássica. Considerando o movimento de uma partícula no potencial, a normalização para a função de onda WKB que é amortecida fora do potencial pode ser determinada aproximadamente como,

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \psi^*(s) \psi(s) \cong \int_{s_a}^{s_b} ds \psi^*(s) \psi(s) = |N|^2 \int_{s_a}^{s_b} \frac{ds}{p(s)} = 1, \quad (1.14)$$

onde  $s_a$  e  $s_b$  são os pontos de retorno como mostrados na Fig. (1.1).

O período clássico de oscilação é dado por,

$$\tau = 2 \int_{s_a}^{s_b} \frac{ds}{v(s)} = 2\mu \int_{s_a}^{s_b} \frac{ds}{p(s)}, \quad (1.15)$$

obtemos, então,

$$|N|^2 \frac{\tau}{2\mu} = 1 \rightarrow N = N^* = \sqrt{\frac{2\mu}{\tau}}, \quad (1.16)$$

portanto, podemos escrever a função de onda WKB normalizada, como,

$$\psi(s) \cong \sqrt{\frac{2\mu}{\tau p(s)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int^s ds' p(s')} = \sqrt{\frac{w}{\pi v(s)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int^s ds' p(s')}, \quad (1.17)$$

onde  $w = \frac{2\pi}{\tau}$  denota a frequência do movimento. O argumento da exponencial na expressão acima é referida como Fator de Gamow para o decaimento.

## 1.2 Aproximação WKB nos pontos de retorno

Estamos considerando que o potencial é independente do tempo e varia suavemente com a distância. As soluções na forma,

$$\psi(s, t) = \phi(s) e^{\frac{i}{\hbar} Et},$$

podem ser encontradas e, assim,  $\phi(s)$  é a solução de,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} + k(s)^2 \phi(s) &= 0 \quad \text{para } E > V \\ \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} - \rho(s)^2 \phi(s) &= 0 \quad \text{para } E < V, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde

$$k(s) = \sqrt{\frac{2\mu(E - V(s))}{\hbar^2}} \quad \text{e} \quad \rho(s) = \sqrt{\frac{2\mu(V(s) - E)}{\hbar^2}} .$$

Substituindo a solução

$$\psi(s) = Ae^{\frac{i}{\hbar}\phi(s)}$$

na equação de Schroendinger independente do tempo,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(s) - E)\psi$$

obté-m-se,

$$i\hbar \frac{d^2 \phi}{ds^2} - \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - 2\mu(V(s) - E) = 0 .$$

Usando a expansão (1.4) na equação acima, encontram-se os seguintes resultados,

$$i\hbar \frac{d}{ds} \left[ \frac{d\phi_0}{ds} + \hbar \frac{d\phi_1}{ds} + \dots \right] - \left( \frac{d\phi_0}{ds} + \hbar \frac{d\phi_1}{ds} + \dots \right)^2 + \hbar^2 k^2 = 0 \quad \text{para } E > V(s) \quad (1.19)$$

Assumindo que  $\left| \frac{d\phi_0}{ds} \right| \gg \left| \hbar \frac{d\phi_1}{ds} \right|$  e juntando os termos com  $\hbar$  tem-se,

$$- \left[ \frac{d\phi_0}{ds} \right]^2 + \hbar^2 k^2 = 0 \quad \text{resultando em } \phi_0 = \pm \int^s \hbar k(s') ds' \quad (1.20)$$

$$i \frac{d^2 \phi_0}{ds^2} - 2 \frac{d\phi_0}{ds} \frac{d\phi_1}{ds} = 0 \quad \text{resultando em } \phi_1 = \frac{1}{2} i \ln k(s), \quad (1.21)$$

Da equação (1.21) tem-se,

$$i \frac{d}{ds} \left( \frac{d\phi_0}{ds} \right) = 2 \frac{d\phi_0}{ds} \frac{d\phi_1}{ds} , \quad i \frac{dk}{ds} = 2k \frac{d\phi_1}{ds} , \quad d\phi_1 = \frac{i}{2} \frac{dk}{k} . \quad (1.22)$$

Para a expansão de primeira ordem que estamos considerando ser exata, os termos de ordem superior devem decair rapidamente. Neste caso,

$$\left| \frac{d\phi_0}{ds} \right| \gg \left| \hbar \frac{d\phi_1}{ds} \right| \quad \text{ou} \quad |k| \gg \left| \frac{1}{2k} \frac{dk}{ds} \right| . \quad (1.23)$$

A função de onde de deBroglie é  $\lambda = 2\pi/k$ , portanto,  $\left| \frac{\lambda}{4\pi} \frac{d\lambda}{ds} \right| \ll \lambda$ . Esta condição permite com que o potencial varie suavemente e o momento seja considerado aproximadamente constante para muitos comprimentos de onda.

Próximo aos pontos de tunelamento clássicos, as soluções WKB tornam-se inválidas, pois  $k$  vai a zero. Neste caso é necessário encontrar uma conexão entre as soluções para uma solução exponencial atravessar um ponto de tunelamento.

Como vimos, a aproximação WKB possui singularidade nos pontos de retorno, pois neles o potencial se iguala à energia total da partícula fazendo com que o termo  $p(s)$  vá a zero. Neste caso é necessário unir as soluções das funções de onda em torno dos pontos de retorno. Para  $s < s_a$  a função de onda fica,

$$\psi_1(s) \cong \sqrt{\frac{2\mu}{Tp(s)}} \exp \left[ i/\hbar \int ds' p(s') \right], \quad (1.24)$$

e para  $s > s_b$  a função de onda fica,

$$\psi_3(s) \cong \sqrt{\frac{2\mu}{Tp(s)}} \exp \left[ -i/\hbar \int ds' p(s') \right] \quad (1.25)$$

e na região entre  $s_a$  e  $s_b$ , temos,

$$\psi_2(s) \cong \sqrt{\frac{2\mu}{Tp(s)}} \left\{ \exp \left[ i/\hbar \int ds' p(s') \right] + \exp \left[ -i/\hbar \int ds' p(s') \right] \right\}. \quad (1.26)$$

A seguinte condição de contorno é utilizada

$$\begin{aligned} \psi(s_a) &= \psi(s_b) \\ \frac{d\psi}{ds}(s_a) &= \frac{d\psi}{ds}(s_b). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Para aplicar as condições de contorno próximo a  $s_a$  e  $s_b$  foi feita uma expansão em série de Taylor do potencial  $V(s)$  em torno de  $s$ , eliminando os termos de ordem superior a 1, teremos

$$\begin{aligned} V(s) &\approx k(s - s_a), \quad \text{em torno de } s_a \\ V(s) &\approx k(s - s_b), \quad \text{em torno de } s_b. \end{aligned} \quad (1.28)$$

A equação de Schroedinger torna-se, para esses casos, na vizinhança de cada ponto,

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{2\mu k}{\hbar^2}(s - s_a)\psi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{2\mu k}{\hbar^2}(s - s_b)\psi = 0, \quad (1.29)$$

fazendo a mudança de variável,

$$z = - \left( \frac{2\mu k}{\hbar^2} \right)^{1/3} (s - s_a) \quad (1.30)$$

a equação de Schrödinger reduz-se à forma simples,

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - z\psi = 0.$$

As soluções da equação acima se anulam assintoticamente para  $z \rightarrow \infty$  constituindo as funções de Airy (Fig. 1.2) definidas por,

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds \quad (1.31)$$

na qual para  $|z|$  grande apresenta-se da seguinte forma,

$$Ai(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left(\frac{-2}{3}z^{3/2}\right) \quad (z > 0) \quad (1.32)$$

e

$$Ai(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \pi/4\right) \quad (z < 0). \quad (1.33)$$

Se a barreira for suficientemente alta para a aproximação linear do potencial permanecer válida (eq. 1.28), para grandes comprimentos de onda as funções de Airy conectam as funções de onda nos pontos de retorno.

A seguinte notação é usada

$$k(s) = \sqrt{\frac{2\mu(E - V(s))}{\hbar^2}} \quad E > V,$$

$$\rho(s) = \sqrt{\frac{2\mu(V(s) - E)}{\hbar^2}} \quad E < V.$$

Na vizinhança de  $s_a$  temos  $k^2 = -\rho^2 \approx (2\mu k/\hbar^2)^{1/3}(s - s_a) = -(2\mu k/\hbar^2)^{2/3} z$ , com a troca de variável da eq. (1.30). Portanto,

$$\int_{s_a}^s \rho ds' = \left( \frac{2\mu k}{\hbar} \right)^{1/3} \int_{s_a}^s \sqrt{-z} ds' = - \int_0^z \sqrt{-z'} dz' = -\frac{2}{3}z^{3/2}, \quad (1.34)$$

e também,

$$\int_{s_a}^s k ds' = \left( \frac{2\mu k}{\hbar} \right)^{1/3} \int_{s_a}^s \sqrt{-z} ds' = - \int_0^z \sqrt{-z'} dz' = \frac{2}{3}(-z)^{3/2}. \quad (1.35)$$

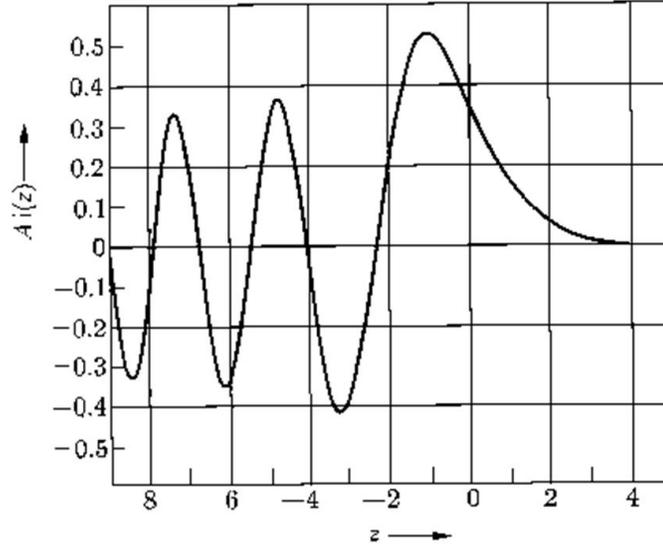


Figura 1.2: Função de Airy  $Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$  (ref. [6])

Comparando as eq. (1.34) e (1.35) com as eqs. (1.32) e (1.33) chegamos a uma continuidade da função aproximada,

$$\psi_1 = |p|^{-1/2} \exp\left[i/\hbar \int_{s_a}^s ds' |p|\right], \quad (s < s_a) \quad (1.36)$$

a esquerda de  $s_a$  com a aproximação,

$$\psi_2 \approx 2p^{-1/2} \sin\left[i/\hbar \int_{s_a}^s dsp + \frac{\pi}{4}\right], \quad (s > s_a). \quad (1.37)$$

a direita de  $s_a$ . Similarmente, a função aproximada a direita de  $s_b$

$$\psi_3 = |p|^{-1/2} \exp\left[i/\hbar \int_{s_b}^s ds' |p|\right], \quad (s > s_b) \quad (1.38)$$

é contínua com a aproximação a esquerda de  $s_b$ ,

$$\psi_2 \approx 2p^{-1/2} \sin\left[i/\hbar \int_{s_b}^s dsp + \frac{\pi}{4}\right], \quad (s < s_b). \quad (1.39)$$

para  $s = \pm\infty$ .

### 1.3 O coeficiente de transmissão na aproximação WKB.

Para a questão do tunelamento a grandeza importante é o coeficiente de transmissão. Usaremos as formas de função de onda WKB para determinar sua expressão.

Pela eq. (B.5) e ref. [7] o coeficiente de transmissão é definido da seguinte forma, para um degrau de potencial (Fig. B.1),

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + (1 + \epsilon^2/4)\sinh^2(2\kappa a)}$$

no qual  $T(E)$  expressa a probabilidade da partícula incidir no potencial na barreira de potencial, atravessando-

a. Os termos  $\kappa$  e  $\epsilon$  são representados por,

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad \epsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$$

e

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

No caso em que a barreira é muito alta e larga,  $\kappa a \gg 1$  e para  $\sinh 2\kappa a \cong (1/2)e^{2\kappa a} \gg 1$ ,

$$|T(E)|^2 \cong \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4}\right)^{-1} 4e^{-4\kappa a} = \frac{16(\kappa k)^2}{(\kappa^2 + k^2)^2} \exp(-4\kappa a),$$

explicitando os termos  $k$  e  $\kappa$ ,

$$|T(E)|^2 = \frac{16 E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-4 \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}a}{\hbar}\right),$$

Absorvendo o primeiro termo antes da exponencial para dentro da mesma, a probabilidade fica da seguinte forma,

$$|T(E)|^2 = \exp\left\{-4 \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}a}{\hbar} + \log\left(\frac{16 E(V_0 - E)}{V_0^2}\right)\right\},$$

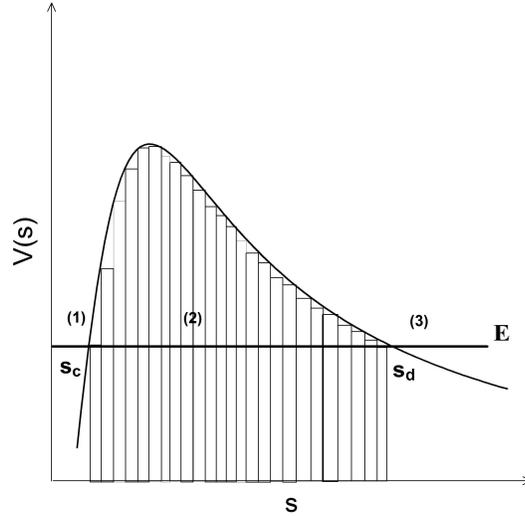


Figura 1.3: Barreira de potencial com os pontos de retorno,  $s_c$  e  $s_d$ , e a energia de decaimento,  $E$ , representada pela linha cheia.

Como a barreira é muito grande,  $V(s) \gg E$ , então o segundo termo do argumento da exponencial vai a zero. Assim,

$$|T(E)|^2 \approx \exp \left\{ -4 \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}a}{\hbar} \right\},$$

Para o caso de uma barreira potencial contínua Fig. 1.3 como a que estamos nos referindo neste trabalho, faremos um cálculo aproximado para  $V(s)$  entre  $s_a$  e  $s_b$ , dividindo-a em  $N$  barreiras quadráticas individuais de largura  $ds$ . A largura do passo  $2a$  é, agora, substituído por  $ds$ . A probabilidade de transmissão fica então,

$$|T(E)|^2 = \prod_{i=1}^N \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2m(V(s_i) - E)}}{\hbar} 2 ds \right\} = \exp \left\{ -2 \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{2m(V(s_i) - E)}}{\hbar} ds \right\},$$

que pela aproximação  $N \rightarrow \infty$  fica,

$$|T(E)|^2 = \exp \left\{ -2 \int_{s_a}^{s_b} \frac{\sqrt{2m(V(s) - E)}}{\hbar} ds \right\}, \quad (1.40)$$

a equação acima corresponde a probabilidade de transmissão (ref.[7]) e o termo da exponencial ao fator de Gamow que serão usados adiante em nosso trabalho.

## Capítulo 2

# Decaimentos Nucleares numa Descrição Fenomenológica da Barreira.

Uma das situações mais bem sucedidas das aplicações de métodos aproximativos semi-clássicos em problemas de natureza tipicamente quântica é a descrição dos decaimentos radioativos nucleares. O problema é reduzido a um sistema de dois corpos imaginando que a partícula a ser emitida seja pré-formada no caso do decaimento alfa. Considera-se ainda que a partícula está submetida a um potencial central de um caroço nuclear, que virá a se constituir como núcleo residual do decaimento. A questão foi assim colocada em 1928 por George Gamow [8] e Condon e Gurney [9] para a explicação pioneira do decaimento alfa. Neste caso, utilizando-se um potencial esquemático onde a atração do caroço nuclear era descrita por um poço esférico superposto a uma barreira de potencial coulombiana. A partícula alfa pré-formada assalta a barreira e a probabilidade de penetrabilidade é calculada dentro de uma aproximação semi-clássica para a solução da função de onda da partícula alfa.

Neste capítulo introduzimos um modelo fenomenológico de barreira de potencial para o tratamento de decaimentos nucleares. Ao final do capítulo fazemos uma aplicação utilizando um modelo de barreira,

ainda esquemático, porém bastante aprimorado quando comparado ao originalmente utilizado por Gamow. Mostramos que os resultados são bastante satisfatórios para a determinação das taxas de decaimento de uma larga faixa de núclídeos alfa emissores. O propósito é a validação do modelo face à grande quantidade de dados existentes para o decaimento alfa.

## 2.1 Modelo fenomenológico de barreira

Construímos aqui um modelo de barreira associado ao processo de decaimento nuclear tendo por base argumentos fenomenológicos para uma parametrização da mesma numa forma analítica. Levando em conta a interação coulombiana e a interação nuclear durante o processo de separação dos fragmentos Duarte e Gonçalves [10, 11] estabeleceram um potencial de gota líquida efetiva para a barreira de potencial na região de separação dos fragmentos, com o objetivo de descrever a fissão altamente assimétrica (emissão de clusters). Mais adiante, fizemos uma análise da aplicação desta barreira para o decaimento alfa identificando que a mesma poderia ser parametrizada de maneira simples na região de superposição (ilustrada na fig.2.1) por uma forma parabólica de ordem  $q$ ,

$$V_c = Q + \left( \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2\mu_0 c^2} + \frac{2Z_d e^2}{c} - Q \right) \left( \frac{s - a}{c - a} \right)^q, \quad q \geq 1 \quad e \quad a < s < c. \quad (2.1)$$

Na região de separação (ilustrada na fig.2.1), utilizamos apenas as formas de potenciais coulombiano e centrífugo convencionais,

$$V_{coul}(s) = \frac{2 Z_d e^2}{s}, \quad V_{cent} = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2\mu_0 s^2} \quad s \geq c. \quad (2.2)$$

Nas equações acima  $Q$  é a energia total de decaimento,  $\ell$  o momento angular orbital,  $Z_d$  o número atômico do núcleo-filho. Onde ainda temos  $a = R_p - r_p$  e  $c = R_d + r_p$  representando a diferença e a soma, respectivamente, entre os raios dos núcleos envolvidos (núcleo pai e núcleo filho) e o raio da partícula emitida (ver Fig. (2.2)).

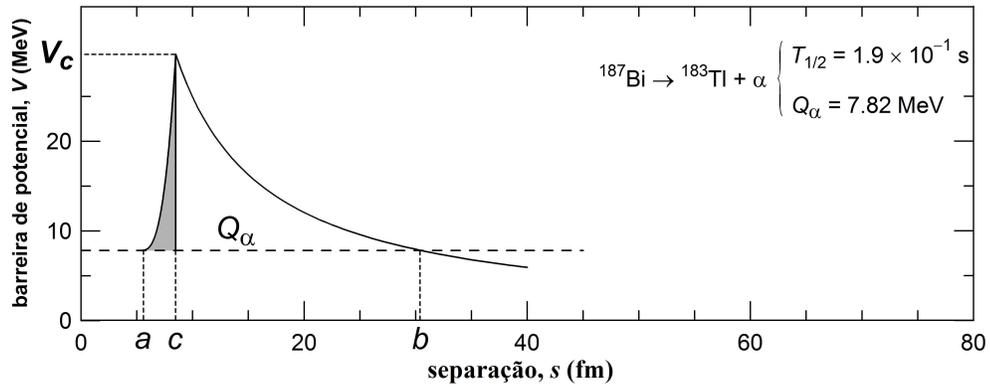


Figura 2.1: Barreira de potencial do decaimento alfa do Bismuto com a presente sistemática. A área hachurada evidencia a região de superposição ( $a - c$ ) e a área ( $c - b$ ) corresponde a região de separação. A linha pontilhada corresponde a energia  $Q_\alpha$ .

Ainda nestas equações  $c - a$  corresponde à extensão da região de superposição, ou seja, região na qual a partícula alcança a superfície nuclear e o termo  $e$  corresponde à carga do elétron.

O tunelamento da barreira para o processo de decaimento nuclear é calculado fatorizando-se as contribuições da região de superposição e de separação na probabilidade de transmissão (eq: 1.40),

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2\mu(s)[V(s) - E]} ds, \quad (2.3)$$

para calcular a constante de decaimento,  $\lambda$ ,

$$\lambda = \lambda_0 SP_{se}, \quad (2.4)$$

onde  $S = e^{-G_{ov}}$  e  $P_{se} = e^{-G_{se}}$  (ver apêndice A). O termo S pode ser interpretado como sendo a probabilidade da partícula atravessar a superfície nuclear e  $P_{se}$  de tunelar a barreira coulombiana mais centrífuga na região de separação. A quantidade  $\lambda_0$  corresponde ao fator de frequência de assalto a barreira, calculada da seguinte maneira,

$$\lambda_0 = \frac{v}{2a} = \left( \frac{Q}{2\mu_0 a^2} \right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula a ser emitida.

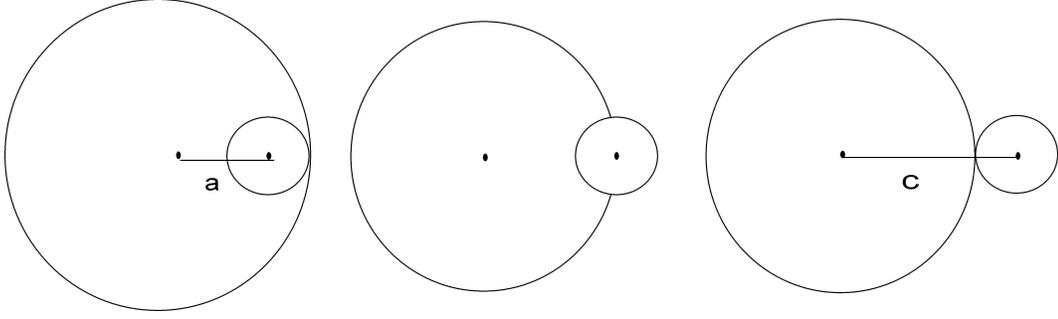


Figura 2.2: Desenho esquemático do processo de overlapping, mostrando a diferença entre os raios do núcleo pai e da partícula ( $a = R_p - r_p$ ) e a soma dos raios do núcleo filho e da partícula ( $c = R_d + r_p$ )

Na região de superposição não é imediata a determinação da massa reduzida do sistema, entretanto numa análise detalhada desta questão Duarte e Gonçalves [10] determinaram o comportamento da massa efetiva dos fragmentos, onde foi observada uma forma aproximadamente parabólica para a dependência da massa efetiva com a separação entre os centros dos fragmentos. Numa parametrização da forma obtida naquele trabalho, determinamos uma expressão simples para a massa efetiva dada por,

$$\mu(s) = \mu_0 \left( \frac{s - a}{c - a} \right)^p, \quad p \geq 0 \quad e \quad a < s < c, \quad (2.6)$$

tendo por limite após a separação dos fragmentos a massa reduzida  $\mu_0$ , representada pela expressão  $\mu_0 = (m_d m)/(m_d + m)$ .

Substituindo as equações (2.1) e (2.6) na eq. (2.3) (ver apêndice A) e fazendo algumas manipulações algébricas a integral de Gamow para a região de superposição fica dada por,

$$G_{ov} = c_1 \sqrt{\mu_0 Q} (c - a) g H(x, y), \quad (2.7)$$

com  $c_1 = 2\sqrt{2\mu_0 c}/\hbar c$  onde  $c$  corresponde a velocidade da luz e,

$$x = \frac{c_2 \ell(\ell + 1)}{\mu_0 Q_\alpha c^2}; \quad y = \frac{Z_d e^2}{Q_\alpha c} \quad e \quad H(x, y) = \sqrt{x + 2y - 1}. \quad (2.8)$$

com  $c_2 = (\hbar c)^2/(2\mu_0 c)$ . Observa-se que os parâmetros  $p$  e  $q$  das expressões do potencial e da massa efetiva

na região de superposição foram incorporados em um único parâmetro  $g$  dado por,

$$g = \left( \frac{2}{p + q + 2} \right). \quad (2.9)$$

Este parâmetro está limitado no intervalo  $0 \leq g \leq 2/3$  como mostrado no apêndice A.

O fator de Gamow na região de separação (veja ainda no Apêndice A) fica dado pela seguinte expressão,

$$G_{se} = c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\sqrt{x}}{2y} \ln \left( \frac{\sqrt{x(x+2y-1)} + x + y}{\frac{x}{y} \left[ 1 + \sqrt{x + \frac{x}{y^2}} \right]^{-1} + y} \right) \right\} \quad (2.10)$$

$$+ c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 - \frac{1}{y}}{\sqrt{1 + \frac{x}{y^2}}} \right)} - \sqrt{\frac{1}{2y} \left( 1 + \frac{x}{2y} - \frac{1}{2y} \right)} \right\}.$$

onde  $c_3 = 2\sqrt{2\mu_0}ce^2/(\hbar c)$ .

Quando  $\mu_0$  é dado em unidades de MeV e  $c$  em fm/s, com  $\hbar c = 197.32 \text{ MeV} \cdot \text{s}$  temos  $c_1 = 0.43747$ ,  $c_2 = 20.9008 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2$  e  $c_3 = 1.25988372$ .

Os parâmetros  $x$  e  $y$  definidos nas expressões de Gamow são dependentes dos raios nucleares e da energia do decaimento (eq. 2.8). A determinação dos raios nucleares será discutida na próxima seção.

## 2.2 Aplicação do modelo no decaimento alfa

Nesta seção vamos aplicar o modelo desenvolvido para os decaimentos alfa nucleares, que é a desintegração nuclear com mais casos experimentais de meias-vidas bem determinadas.

Devido à utilização de potenciais esfericamente simétricos dentro do modelo nos restringiremos aqui aos casos do decaimento alfa com  $\ell = 0$  de estado fundamental para estado fundamental. Mesmo assim, isto envolve ainda cerca de 336 núcleos alfa emissores. O fator de Gamow na região de superposição para  $\ell = 0$  fica da seguinte forma (de acordo com a eq. (A.8)),

$$G_{ov} = c_1 \sqrt{\mu_0 Q_\alpha} (c - a) g \sqrt{2y - 1}. \quad (2.11)$$

para o decaimento alfa,  $c = R_d + r_\alpha$  onde  $r_\alpha = 1.620 \pm 0.01 fm$  que corresponde ao raio homogêneo equivalente da alfa extraído do espalhamento elástico de elétrons sobre o  $^4He$  [12].

A energia total de decaimento,  $Q_\alpha$ , é calculada com os excessos de massa atômica,

$$Q = \Delta M_p - (\Delta M_d + \Delta M_\alpha) + 10^{-6} k(Z_p^\beta - Z_d^\beta) MeV , \quad (2.12)$$

onde  $\Delta M$  é o excesso de massa da partícula e  $kZ_\beta$  representa a energia de ligação dos elétrons no átomo e seus valores são  $k = 8.7 eV$  e  $\beta = 2.517$  for  $Z \geq 60$  e  $k = 13.6 eV$  e  $\beta = 2.408$  for  $Z < 60$ . e, na região de separação, da eq. (A.23), fica,

$$G_{se} = c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{1}{2y}} - \sqrt{\frac{1}{2y} \left( 1 - \frac{1}{2y} \right)} \right\}$$

com  $c_3$  determinado na seção anterior.

A determinação dos valores das variáveis auxiliares  $x$  e  $y$  necessita do conhecimento dos raios nucleares  $R'_i$ s [ $i = p$  (pai),  $d$  (filho, do inglês *daughter*)] (vide eq. 2.8). Baseando-se no modelo da gotícula<sup>1</sup>, Myers [13] e Moller [14] estimaram os raios nucleares com base nos raios das distribuições de próton,  $R_{Zi}$ , e de nêutron,  $R_{Ni}$ , dos núcleos pai e filho como,

$$R_i = \frac{Z_i}{A_i} R_{Zi} + \left( 1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) R_{Ni}, \quad (2.13)$$

sendo estes últimos dados como funções dos raios das correspondentes distribuições homogêneas equivalentes de prótons,  $r_{Zi}$ , e de nêutrons,  $r_{Ni}$ , por

$$R_{ji} = r_{ji} \left[ 1 + \frac{5}{2} \left( \frac{w}{r_{ji}} \right)^2 \right], \quad \text{com } j = Z, N \quad , \quad i = p, d,$$

tomando-se o parâmetro de difusibilidade de superfície nuclear igual a  $\omega = 1 fm$ , os raios nucleares ficam finalmente determinados conhecendo-se os  $r_{Zi}$  e  $r_{Ni}$ , dados por,

$$r_{Zi} = \tilde{r}_0 (1 + \bar{\epsilon}_i) \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) \left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} - \bar{\delta}_i \right) \right] A_i^{1/3} \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>Modelo da gota líquida com correções de camada ref. [13], [14].

$$r_{Ni} = \tilde{r}_0(1 + \bar{\epsilon}_i) \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{Z_i}{A_i} \left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} - \bar{\delta}_i \right) \right] A_i^{1/3} \quad (2.15)$$

onde

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{4e^{0.831A_i^{1/3}}} - \frac{0.191}{A_i^{1/3}} + \frac{0.0031Z_i^2}{A_i^{4/3}} \quad (2.16)$$

$$\bar{\delta}_i = \frac{\left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} + 0.004781 \frac{Z_i}{A_i^{2/3}} \right)}{\left( 1 + \frac{2.52114}{A_i^{1/3}} \right)}, \quad (2.17)$$

utilizando-se  $\tilde{r}_0 = 1.16 \text{ fm}$ .

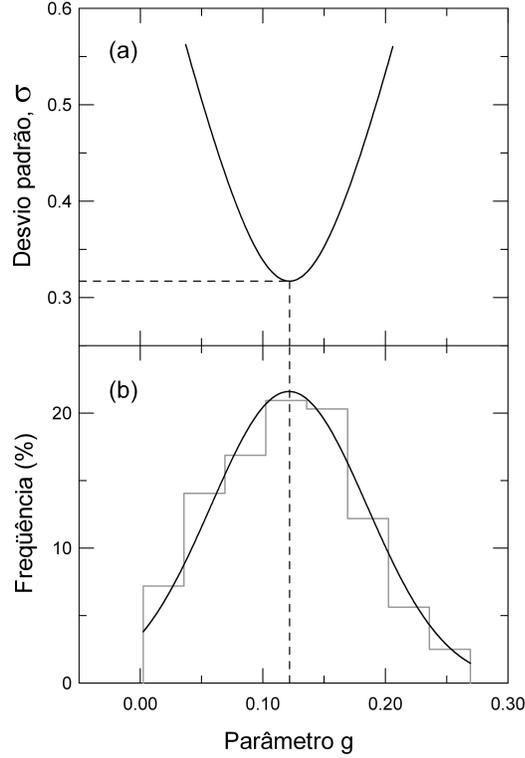


Figura 2.3: (a) Minimização do desvio padrão  $\sigma$  (eq. (2.18)) para determinar o melhor valor para o parâmetro de ajuste,  $g$ . (b) Distribuição da frequência (linha cinza) para os valores de  $g$  experimentais e seu correspondente fit gaussiano (curva cheia)

O conjunto de dados experimentais de meias-vidas foi utilizado para determinação do único parâmetro do modelo, o parâmetro  $g$  que aparece na equação (2.11). Esta determinação consiste em minimizar o desvio

médio quadrático  $\sigma$  dos dados de meias-vidas em relação as previsões do cálculo como mostrado na parte superior da Fig. 2.3.

Esse desvio médio quadrático é dado convencionalmente pela expressão,

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{N-2} \sum_i^N \left[ \log_{10} \left( \frac{T_{1/2}^{e(i)}}{T_{1/2}^{c(i)}} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.18)$$

onde  $T_{1/2}^{c(i)}$  é a meia-vida parcial do decaimento alfa calculada (C.6, eq. do Apêndice C) e  $T_{1/2}^{e(i)}$  corresponde a meia-vida experimental do decaimento alfa e  $N$  corresponde a quantidade de casos de desintegrações alfa considerado no conjunto de dados. Elimina-se aqueles dados que desviam-se por mais de dois desvios-padrão, com o restante dos dados (320 núclídeos, ainda) uma nova interação é realizada no sentido de obter o valor do parâmetro do modelo, resultando no valor final de  $g = 0.122$ .

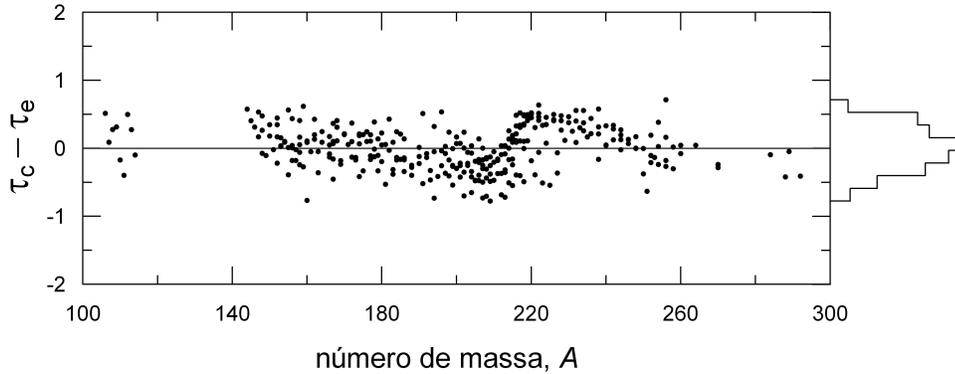


Figura 2.4: A quantidade  $\tau^c - \tau^e = \log_{10}T_{1/2}^c - \log_{10}T_{1/2}^e$  contra o número de massa  $A$  para os 320 núclídeos emissores-alfa incluídos na presente sistemática. A distribuição de freqüência representada a direita, em destaque, enfatiza a boa reprodutividade das meias-vidas do decaimento alfa.

Na Fig. (2.4) é mostrada a quantidade  $\Delta\tau = \tau^c - \tau^e$ , onde  $\tau = \log T_{1/2}$ , versus o número de massa do núcleo pai. Pode-se observar que apesar da grande variação de meias-vidas (variam no intervalo de 30 ordens de magnitude), a concordância entre os valores calculados e experimentais são considerados bastante satisfatórios, pois a grande maioria dos desvios da magnitude são menores que 1/2. Somente 26 casos

excedem essa cota, mas ainda são menores que uma ordem de magnitude. A boa reprodutividade das meias-vidas se reflete na distribuição de frequência a direita da figura. Vale salientar que 80% das meias-vidas dos núclídeos são reproduzidas por fator de dois ou menor.

Na tabela 1 é mostrada uma comparação entre os resultados de nossa sistemática e de outras similares dentro da literatura. O caso mais próximo ao nosso corresponde a ref. [15], embora tenha mostrado um resultado de  $\overline{\Delta\tau}$  melhor, a nossa sistemática envolve apenas um único parâmetro de ajuste contra os dois utilizados naquela referência.

Concluindo este capítulo, enfatizamos o êxito da aplicação do método de tunelamento de barreira, aplicada ao modelo de barreira estabelecido na seção anterior. Como podemos observar, o cálculo envolve um único parâmetro, que é ajustado para a melhor reprodução de um conjunto de dados. Com seu parâmetro ajustado, o cálculo pode ser utilizado como instrumento de previsão de casos de decaimentos ainda não medidos.

**Tabela 1:** Estatísticas obtidas em diferentes sistemáticas<sup>a</sup> de meias-vidas para decaimentos alfa.

Referência para decaimento alfa. Fórmula ou formalismo	Número de ajustes parâmetro n	Desvio padrão <sup>b</sup> $\sigma$	Valor médio <sup>c</sup> $\overline{\Delta\tau}$
Brown [16]	3	0.461	0.020
Royer [17]	3	0.298	-0.004
Tavares [15]	2	0.380	0.001
Presente trabalho	1	0.317	0.002

<sup>a</sup> Os valores das 320  $Q_\alpha$  e  $T_{1/2_\alpha}^e$  foram usadas em todas as sistemáticas da tabela acima, exceto na ref. [15].

<sup>b</sup> Foi examinada a quantidade  $\tau = \log_{10} T_{1/2}$ .

<sup>c</sup>  $\overline{\Delta\tau} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_c - \tau_e)$ .

O sucesso deste modelo simples nos levou a estendê-lo para outras formas de decaimento hadrônicos nucleares, inclusive para situações envolvendo núcleos exóticos como veremos no próximo capítulo.

## Capítulo 3

# Modelo de Barreira Fenomenológica

## Aplicada aos Núcleos Emissores de Prótons

Os núcleos emissores de próton são aqueles deficientes em nêutrons encontrados longe da linha de beta estabilidade, na região conhecida como “proton drip-line”. Os primeiros casos destes emissores foram observados por Jackson [18] e confirmado por Cerny [19] em setembro de 1970, mas ainda hoje existem previsões para emissores de prótons que ainda não foram constatados experimentalmente. Como vimos que o modelo apresentado no capítulo anterior conseguiu reproduzir muito bem meias-vidas do decaimento alfa, decidimos explorar o seu comportamento quando aplicado no caso dos núcleos deficientes em nêutrons para determinação das meias-vidas de emissão de prótons.

A emissão de prótons ocorre quando um próton de valência tunela uma barreira de potencial formada pela superposição dos potenciais centrífugo, nuclear e o coulombiano.

Aqui neste capítulo, a aplicação do modelo, diferentemente da sua aplicação anterior, será feita explorando casos de emissão de próton com diversos momentos angulares, tanto para emissões do estado fundamental como para os emissores por estados isoméricos, utilizando o mesmo tipo de abordagem em ambos os casos. Esses núcleos nos estados isoméricos, assim como os do estado fundamental, são produ-

zidos por colisões de íons pesados em reações de fusão-evaporação em energias moderadas ( 4-6 MeV/u) [20, 21, 22, 23, 24]. Nessas reações uma certa quantidade de núcleos exóticos emissores de próton são populados originados por emissões sucessivas de nêutrons no canal de evaporação de estados excitados de um núcleo composto.

Os primeiros emissores de estado fundamental e isomérico foram observados no instituto de pesquisa em íons pesados em Darmstadt (GSI), Alemanha, por Hofmann et al [25] para  $^{151}Lu$ . Desde, então, muitos outros casos foram medidos e relatados na literatura (ref. [26] a [36]).

Os cálculos realizados são os mesmos das seções 2 e 3 do capítulo anterior, porém levando em consideração as diferenças inerentes ao processo em questão. Assim, na eq. (2.8) para o emissor de próton deverá ser tomado,

$$x = \frac{c_1 \ell(\ell + 1)}{\mu_0 Q_p c^2}; \quad y = \frac{Z_d e^2}{2Q_p c} \quad (3.1)$$

$$H(x, y) = \sqrt{x + 2y - 1}.$$

com  $c_1 = 20.9008 \text{ MeV fm}^2$  e na expressão do fator de Gamow na região de separação, eq. (2.10), a constante  $c_3$  assume o valor  $c_3 = 0.6299437$ , levando em consideração a barreira coulombiana para a emissão de próton.

Vale salientar que para os emissores de próton foi adotado o valor para o raio do próton,  $r_p = 0.87 \pm 0.02 \text{ fm}$  extraído da média dos raios de prótons de experimentos e análises dos dados do espalhamento elásticos de elétrons do alvo de hidrogênio (ref. [37] - [41]) e, novamente, utilizamos  $\tilde{r}_0 = 1.16 \text{ fm}$  nas eqs. (2.14) e (2.15).

### 3.1 Emissão de prótons por núcleos exóticos no estado fundamental

Inicialmente gostaríamos de comparar a barreira do decaimento alfa (Fig. 2.1) com uma típica do decaimento de um próton ilustrada na Fig. (3.1) que será estudada adiante. Vemos que a região de superposição (intervalo  $a - c$  nestas figuras), é muito mais significativa para o caso de decaimento alfa ( $\ell = 0$ ) que para emissão de próton no mesmo valor de  $\ell$ .

No entanto, a altura da barreira que depende do produto das cargas pode levar a uma contribuição ainda significativa da região de superposição. Portanto, usaremos o mesmo tratamento dado a região de superposição que no caso do decaimento alfa.

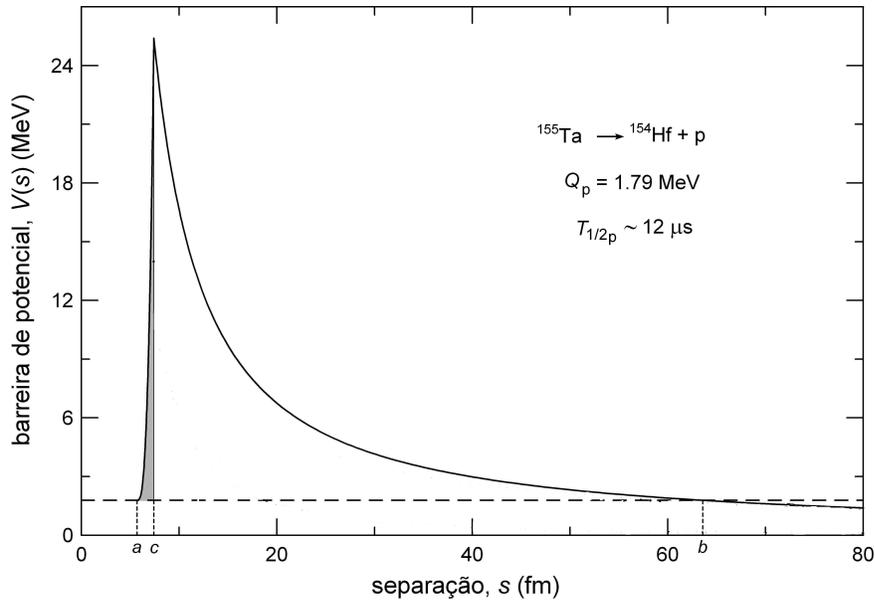


Figura 3.1: Barreira de potencial para um caso de decaimento próton. No intervalo  $a - c$  tem-se a região de superposição e em  $c - b$  a de separação. A linha pontilhada corresponde ao valor  $Q_p$ .

Existem 71 casos de emissores de próton com meias-vidas razoavelmente bem determinadas experimen-

talmente. Destes apenas 27 são de prótons emitidos no estado fundamental dos quais 6 são de emissões em onda  $s$ ,  $\ell = 0$ .

Como no capítulo anterior, nos deteremos, inicialmente, nas emissões de estado fundamental para a aplicação direta do modelo desenvolvido, sendo que aqui estenderemos a aplicação para os casos com diferentes valores de  $\ell$ . Os nossos resultados de previsões de meias-vidas estão apresentados na sétima coluna da Tab. 2.

A Fig. (3.2) mostra o desvio das meias-vidas calculada e experimental dos emissores de próton no estado fundamental listados na oitava coluna da tab. 2. Observa-se que o desvio das meias-vidas desses núcleos é menos de uma ordem de grandeza.

**Tabela 2** - Propriedades de emissores conhecidas de prótons no estado fundamental.

No.	Núcleos pai	Grau de		$\ell^c$	Valores de meias-vidas		
		deformação $\delta^a$	Valor $Q_p^b$ (MeV)		Experimental <sup>c</sup> $T_{1/2p}^e$ (s)	Calculado, $T_{1/2p}^c$ (s)	
						Este trabalho	$\Delta\tau^d$
1	$^{109}_{53}\text{I}$	0.128	0.830	2	$1.07 \times 10^{-4e}$	$1.05 \times 10^{-4}$	-0.01
2	$^{112}_{55}\text{Cs}$	0.169	0.830	2	$5.0 \times 10^{-4}$	$5.2 \times 10^{-4}$	0.02
3	$^{113}_{55}\text{Cs}$	0.168	0.980	2	$1.67 \times 10^{-5e}$	$1.35 \times 10^{-5}$	-0.09
4	$^{117}_{57}\text{La}$	0.242	0.811	2	$2.2 \times 10^{-2e}$	$4.6 \times 10^{-3}$	-0.68
5	$^{121}_{59}\text{Pr}$	0.268	0.851	2	$1.0 \times 10^{-2}$	$0.73 \times 10^{-2}$	-0.14
6	$^{130}_{63}\text{Eu}$	0.280	1.033	2	$0.90 \times 10^{-3}$	$1.53 \times 10^{-3}$	0.23
7	$^{131}_{63}\text{Eu}$	0.280	0.953	2	$2.66 \times 10^{-2}$	$1.06 \times 10^{-2}$	-0.40
8	$^{135}_{65}\text{Tb}$	0.275	1.193	3	$0.94 \times 10^{-3}$	$1.70 \times 10^{-3}$	0.26
9	$^{140}_{67}\text{Ho}$	0.249	1.110	3	$0.60 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-2}$	0.79
10	$^{141}_{67}\text{Ho}$	0.239	1.194	3	$4.20 \times 10^{-3e}$	$6.3 \times 10^{-3}$	0.18
11	$^{145}_{69}\text{Tm}$	0.205	1.754	5	$3.5 \times 10^{-6e}$	$5.8 \times 10^{-6}$	0.22
12	$^{146}_{69}\text{Tm}$	-0.140	1.208	5	$7.50 \times 10^{-2e}$	$8.0 \times 10^{-2}$	0.03
13	$^{147}_{69}\text{Tm}$	-0.134	1.064	5	$4.30 \times 10^0$	$3.04 \times 10^0$	-0.15
14	$^{150}_{71}\text{Lu}$	-0.117	1.285	5	$4.9 \times 10^{-2e}$	$5.9 \times 10^{-2}$	0.08
15	$^{151}_{71}\text{Lu}$	-0.111	1.255	5	$1.30 \times 10^{-1e}$	$1.14 \times 10^{-1}$	-0.06
16	$^{155}_{73}\text{Ta}$	-0.006	1.786	5	$1.2 \times 10^{-5}$	$3.9 \times 10^{-5}$	0.51
17	$^{156}_{73}\text{Ta}$	-0.039	1.026	2	$1.65 \times 10^{-1e}$	$0.94 \times 10^{-1}$	-0.24
18	$^{157}_{73}\text{Ta}$	0.035	0.946	0	$3.0 \times 10^{-1}$	$1.8 \times 10^{-1}$	-0.22
19	$^{159}_{75}\text{Re}$	0.041	1.836	5	$2.1 \times 10^{-5}$	$6.2 \times 10^{-5}$	0.47
20	$^{160}_{75}\text{Re}$	0.062	1.296	2	$0.87 \times 10^{-3}$	$4.05 \times 10^{-4}$	-0.33
21	$^{161}_{75}\text{Re}$	0.062	1.216	0	$3.7 \times 10^{-4}$	$4.0 \times 10^{-4}$	0.03
22	$^{166}_{77}\text{Ir}$	0.084	1.167	2	$1.5 \times 10^{-1}$	$4.5 \times 10^{-2}$	-0.52
23	$^{167}_{77}\text{Ir}$	0.091	1.086	0	$1.1 \times 10^{-1}$	$0.68 \times 10^{-1}$	-0.21
24	$^{170}_{79}\text{Au}$	-0.070	1.497	2	$3.6 \times 10^{-4e}$	$1.2 \times 10^{-4}$	-0.48
25	$^{171}_{79}\text{Au}$	-0.076	1.468	0	$3.7 \times 10^{-5e}$	$3.5 \times 10^{-5}$	-0.02
26	$^{176}_{81}\text{Tl}$	-0.039	1.268	0	$5.2 \times 10^{-3}$	$1.3 \times 10^{-2}$	0.40
27	$^{177}_{81}\text{Tl}$	-0.039	1.180	0	$0.67 \times 10^{-1}$	$1.26 \times 10^{-1}$	0.27

<sup>a</sup>Grau de deformação dado por  $\delta = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_2 \left( 1 + \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_2 \right)$ , onde  $\beta_2$  é o parâmetro da deformação quadrupolar, os valores citados em [14].

<sup>b</sup> Valores de  $Q_p$  determinados pela equação (eq:32 do cap. 2) com excesso de massa dados por [26].

<sup>c</sup> Momento angular,  $\ell$ , e valores de meias-vidas experimentais,  $T_{1/2p}^e$  (s), são de [26, 27, 29, 30, 42] e referências citadas em [43].

<sup>d</sup>  $\Delta\tau = \tau^c - \tau^e = \log_{10}(T_{1/2p}^c/T_{1/2p}^e)$ .

Vale a pena lembrar que os raios nucleares utilizados vêm das expressões (eq. 2.13) a (2.17), que comentamos na seção 2.3, tomando-se para o raio do próton o valor de  $\tilde{r}_0 = 0.87 \pm 0.02$  fm.

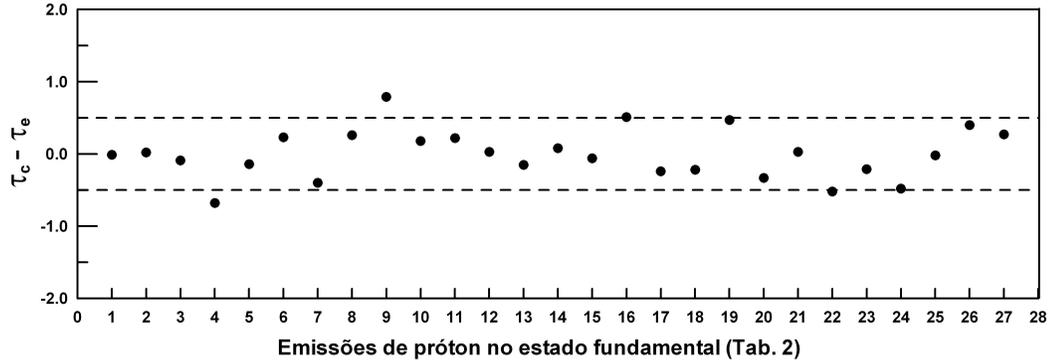


Figura 3.2: Emissões de próton no estado fundamental correspondentes a da Tab.2. Nota-se que o desvio das meias-vidas é de meia ordem de grandeza demonstrando, assim, que o modelo funcionou muito bem para esses núcleos

Quanto ao valor e procedimento de ajuste do parâmetro do modelo (parâmetro  $g$ ), este envolve uma separação por classes de deformação mostrada na terceira coluna da tab. 2. Como isto requer uma análise bastante detalhada, adiamos a discussão para o final deste capítulo, na seção 3.4.1.

## 3.2 Emissores de prótons em estados meta-estáveis (isoméricos)

Além dos casos estudados na seção anterior, temos registrados na literatura 21 casos de emissão de próton por estados meta-estáveis medidos experimentalmente.

Nas tabelas 2 e 3, da segunda até a quinta coluna observa-se os dados de entrada para a presente análise. A coluna oito mostra a diferença  $\Delta\tau = \tau^c - \tau^e$  entre as meias-vidas calculada e experimental como as obtidas no trabalho.

**Tabela 3** - Propriedades das emissões de prótons de transições isoméricas conhecidos.

No.	Isômero	Graus de		Valores de meias-vidas			
		deformação	Valor $Q_p^b$	$\ell^c$	Experimental <sup>c</sup>		
	$\delta^a$	(MeV)			$T_{1/2p}^e$ (s)	Este trabalho	Calculado, $T_{1/2p}^c$ (s)
1	$^{53m}_{27}\text{Co}$	0.077	1.599	9	$1.65 \times 10^1$	$4.02 \times 10^0$	-0.78
2	$^{117m}_{57}\text{La}$	0.242	0.951	4	$1.0 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-2}$	0.34
3	$^{141m}_{67}\text{Ho}$	0.239	1.264	0	$0.66 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-5}$	0.67
4	$^{146m}_{69}\text{Tm}$	-0.140	1.150	5	$3.5 \times 10^{-1}$	$3.2 \times 10^{-1}$	-0.04
5	$^{147m}_{69}\text{Tm}$	-0.134	1.134	2	$3.6 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-4}$	-0.33
6	$^{150m}_{71}\text{Lu}$	-0.117	1.325	2	$3.0 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-5}$	-0.44
7	$^{151m}_{71}\text{Lu}$	-0.111	1.325	2	$1.6 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-5}$	-0.16
8	$^{156m}_{73}\text{Ta}$	-0.039	1.146	5	$0.89 \times 10^1$	$0.68 \times 10^1$	-0.12
9	$^{161m}_{75}\text{Re}$	0.062	1.336	5	$3.25 \times 10^{-1}$	$3.03 \times 10^{-1}$	-0.03
10	$^{164m}_{77}\text{Ir}$	0.069	1.847	5	$1.1 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-4}$	0.19
11					$0.58 \times 10^{-4}$		0.47
12	$^{165m}_{77}\text{Ir}$	0.078	1.747	5	$3.5 \times 10^{-4}$	$7.0 \times 10^{-4}$	0.30
13	$^{166m}_{77}\text{Ir}$	0.084	1.347	5	$0.84 \times 10^0$	$0.94 \times 10^0$	0.05
14	$^{167m}_{77}\text{Ir}$	0.091	1.262	5	$7.5 \times 10^0$	$6.5 \times 10^0$	-0.06
15	$^{170m}_{79}\text{Au}$	-0.070	1.767	5	$0.84 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-3}$	0.31
16					$1.8 \times 10^{-3}$		-0.02
17	$^{171m}_{79}\text{Au}$	-0.076	1.718	5	$2.2 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-3}$	0.20
18	$^{177m}_{81}\text{Tl}$	-0.039	1.987	5	$4.5 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-4}$	-0.27
19					$5.3 \times 10^{-4}$		-0.34
20	$^{185m}_{83}\text{Bi}$	-0.039	1.624	0	$4.4 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-5}$	-0.11
21					$5.9 \times 10^{-5}$		-0.24

<sup>a</sup>Grau de deformação nuclear  $\delta = 0.757\beta_2 + 0.273\beta_2^2$ , onde  $\beta_2$  é o parâmetro de deformação quadrupolar da Ref. [14].

<sup>b</sup>Valor  $Q_p$  emerge da equação (eq. 32) com excesso de massa dado em [26].

<sup>c</sup>Momento angular,  $\ell$ , e meias-vidas experimentais,  $T_{1/2p}^e$  (s), são de [26, 27, 30, 42] e referências citadas em [43].

<sup>d</sup> $\Delta\tau = \tau^c - \tau^e = \log_{10}(T_{1/2p}^c/T_{1/2p}^e)$ .

Os valores do  $\Delta\tau$  da análise neste trabalho que corresponde à coluna oito das tabelas 2 e 3 correspondem ao desvio padrão  $\sigma = 0.34$ , pois os núcleos  $^{141m}\text{Ho}$  na tabela 2,  $^{140}\text{Ho}$  e  $^{117}\text{La}$  na tabela 3 são os que apresentam maior deformação. Se, portanto, esses três casos com os resultados para  $^{53m}\text{Co}$  na tabela 2 forem removidos então  $\sigma$  converte-se igualmente para 0.27 para ambas sistemáticas, significando que  $\sim 92\%$  das

medidas são reproduzidas com um fator  $\sim 3$ . O desvio das meias-vidas também pode ser verificado na Fig. 3.3.

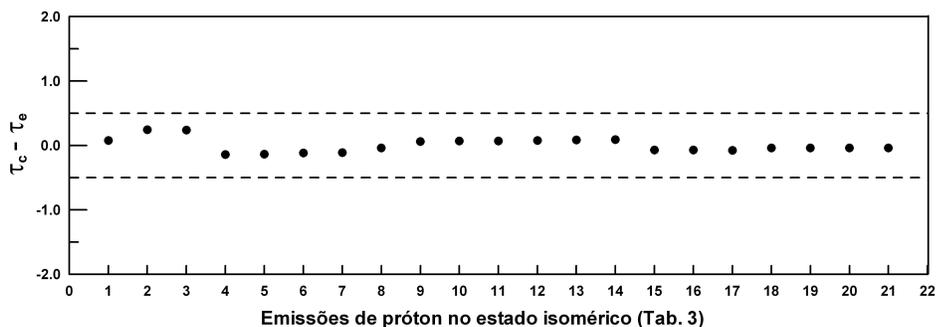


Figura 3.3: Emissões de próton no estado isoméricos correspondentes a da Tab. 3. Nota-se que o desvio das meias-vidas é de meia ordem de grandeza demonstrando, assim, que o modelo funcionou muito bem para esses núcleos

### 3.3 Previsões do modelo para possíveis novos emissores de prótons

A boa reprodutibilidade da meia-vida por emissão de prótons experimental foi motivo para utilizar a presente análise a fim de prever as meias-vidas de alguns possíveis candidatos a emissores de próton ainda não detectados experimentalmente. Com os valores previstos de massas nucleares verifica-se que as condições de balanço de energia do processo de emissão de prótons dos núcleos ainda não observados experimentalmente viabilizam o processo.

Exemplos destes casos são mostrados na tabela 4, para os quais utilizou-se o nosso modelo como um instrumento de previsão das meias-vidas. Na última coluna o ponto de interrogação indica que para esses núcleos não foram medidos valores de meias-vidas e modos de decaimento na literatura.

Como vimos no capítulo anterior o conhecimento dos raios nucleares é de fundamental importância para a aplicação do modelo fenomenológico apresentado. Neste ponto vale lembrar que estamos lidando com núcleos muito longe da linha de beta estabilidade e que determinações de raios e outros parâmetros nucleares

simplesmente obtidos por ajuste aos núcleos da linha de estabilidade beta não seria recomendável. Portanto, os raios nucleares aqui utilizados são obtidos por ajuste da linha de estabilidade beta, porém envolvendo propriedades gerais da matéria nuclear tais como, incompressibilidade, características de emparelhamento entre nucleons e características dos espaçamentos nos níveis de energia (densidades de níveis). Uma expressão levando em conta estes aspectos foi estabelecida por Möller *et al.* [14] e Myers [13] que determinam o raio homogêneo equivalente para um gotícula esférica carregada, balanceando-se os efeitos coulombiano considerando as energias de tensão superficial, compressibilidade, efeitos de emparelhamento e de camada. Esta expressão dos raios apresenta a vantagem de carregar efeitos gerais da interação entre nucleons permitindo uma extrapolação para fora da linha de beta estabilidade mais confiável.

**Tabela 4** - Predições de meias-vidas de emissão de prótons no estado fundamental para casos ainda não observados.

No.	Núcleos pai				Excesso de massa, $\Delta M$ (MeV) <sup>b</sup>		Valor $Q_p$ <sup>c</sup> (MeV)	$\ell$ <sup>d</sup>	Nossos resultados para	Outros modos de
	Elemento	Z	A	$\delta^a$	Pai	Filho			decaimento próton	de decaimento
								meia-vida <sup>e</sup>	e meia-vida <sup>b</sup>	
1	Cl	17	30	-0.156	4.44	-3.16	0.313	6	2 ms	?
2	Ge	32	58	0.178	-8.37	-15.90	0.245	1	2.4 ms	?
3	Br	35	68	-0.211	-38.64	-46.49	0.566	5	12 $\mu$ s	?
4	Rh	45	89	0.041	-47.66	-55.65	0.708	4	7 $\mu$ s	?
5	I	53	108	0.121	-52.65	-60.54	0.610	2	160 ms	?, 36 ms
6								4	41 s	
7	Au	79	173	-0.076	-12.82	-21.101	1.008	0	4.4 s	$\alpha, \beta^+$ , 25 ms
8	Bi	83	184	-0.039	1.05	-7.569	1.348	1	16 ms	$\alpha(?)$ , 6.6 ms
9	Bi	83	186	-0.039	-3.17	-11.541	1.100	1	12 s	$\alpha$ , 14.8 ms

<sup>a</sup>Esta é a quantidade da deformação nuclear de quadrupólo como definida nas tabelas 2 e 3.

<sup>b</sup>Valores tomados da Ref. [26].

<sup>c</sup>Efeito de seleção incluído (ver equação (2.12)).

<sup>d</sup>Valores de paridade e spin relatados na Ref. [26].

<sup>e</sup>Incertezas (estatísticas somente) de um fator 4..

Na Fig. 3.4 mostramos um comportamento do parâmetro associado aos raios nucleares, o parâmetro  $r_0$  da expressão  $R = r_0 A^{1/3}$  que aqui designamos por raio nuclear reduzido. Para núcleos pesados na linha de estabilidade beta este parâmetro é, praticamente, constante cujo valor é de  $r_0 = 1.18 fm$ .

Como observamos na figura para os núcleos emissores de próton da tabela 4 o comportamento é bem

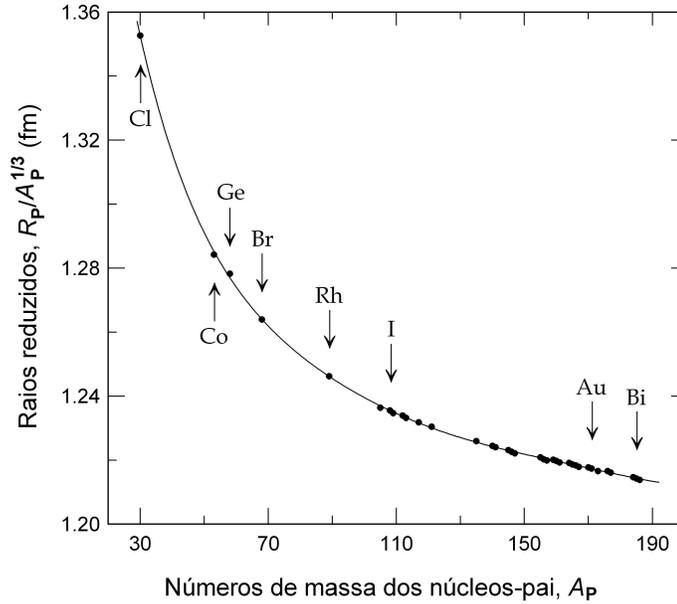


Figura 3.4: Raios reduzidos versus número de massa dos núcleos-pai utilizados na presente sistemática. Os casos assinalados por pequenas setas correspondem aos núcleos candidatos a emissores de próton ainda não observados experimentalmente.

distinto com a variação crescente significativa quando reduzimos a massa dos emissores considerados. Note-se que os núcleos candidatos a emissores de próton ainda não observados experimentalmente da tabela 4 foram também incluídos e assinalados por pequenas setas verticais.

Os valores dos raios pai e filho foram satisfatórios para o decaimento alfa [44, 45, 46] e válidos para núcleos com  $Z \geq 20$  [14]. A Fig. 3.4 mostra uma variação no raio reduzido  $R/A^{1/3}$  do modelo da gota líquida para os emissores de próton. Houve um decréscimo de 5 – 6% em  $R/A^{1/3}$  quando passa de *Co* para *Bi* ao longo da região de nuclídeos na vizinhança de “proton drip line”, denunciando, assim, uma tendência para grandes valores de raios destes núcleos.

## 3.4 Emissão de prótons e sistemáticas observadas

Embora os núcleos emissores de próton ainda não sejam bem conhecidos, seria interessante verificar se alguma sistemática de decaimentos bem consagrados observada para núcleos próximos a linha de beta estabilidade seria ou não verificados. Uma dessas sistemática das mais bem consagradas são as sistemáticas estabelecidas nos diagramas de Geiger-Nuttall que será analisado numa das primeiras subseções que se seguem. Em seguida, analisaremos outro tipo de sistemática observada muito mais recentemente e já para os núcleos emissores de próton [27]. Trata-se de uma sistemática que explicita comportamentos distintos para núcleos de diferentes formas. Nesta seção o objetivo é verificar se o nosso modelo fenomenológico nos leva a sistemáticas similares.

### 3.4.1 Sistemática de Geiger-Nuttall

Praticamente paralelo à descoberta do núcleo por Rutherford, Hans Geiger em 1911 descobriu, com Mitchell Nuttall, a lei de Geiger-Nuttall [47], na qual relaciona o logaritmo da constante de decaimento de um isótopo radioativo com a energia das partículas alfa emitidas e é escrita da seguinte forma,

$$\log \lambda = -\frac{\alpha}{\sqrt{Q_\alpha}} + \beta \quad (3.2)$$

onde  $\lambda = \ln 2 / \tau_{1/2}$  e as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes angular e linear, respectivamente, e têm seus valores obtidos pelo ajuste da reta.

A figura 3.5 mostra um gráfico de Geiger-Nuttall para casos de meias-vidas de emissores de próton, com o mesmo valor de  $\ell$ .

Verifica-se pela figura que à medida que  $Z$  cresce as linhas se deslocam para a esquerda e para cima do mesmo modo que acontece no decaimento alfa [44, 45]. As sequências para Ir e Tm (todos os casos para transições  $\ell = 5$ ) mostram variações em aproximadamente 5 e 6 ordens de grandeza em meias-vidas,

respectivamente, mostrando uma boa reprodução da lei de Geiger-Nuttall para os dados existentes para estes núcleos.

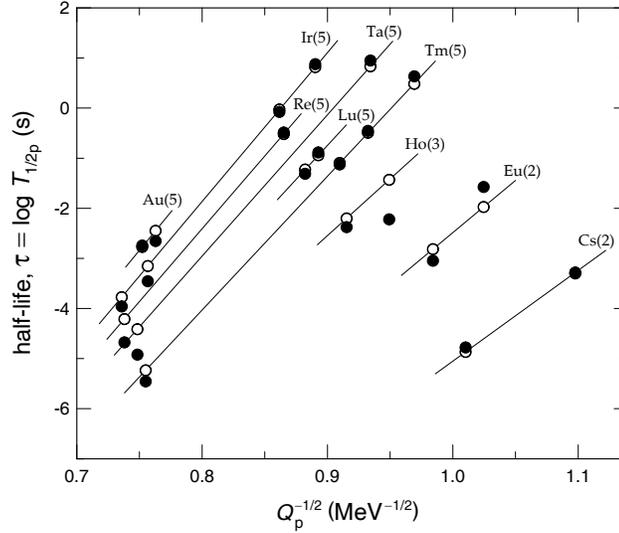


Figura 3.5: Geiger-Nuttall plotado para diferentes casos de radioatividade de próton. A quantidade  $\tau = \log_{10} T_{1/2p}(\text{s})$  contra  $Q_p^{-1/2}$  para a sequência isotópicas e valores de  $\ell$  indicados entre parênteses próximos às linhas. Dados experimentais são representados por símbolos cheios, e os abertos indicam os resultados calculados por nós.

### 3.4.2 Sistemática de formas nucleares

Aqui nesta seção procuramos verificar a sistemática observada por Delion *et al* [27], representada por um diagrama (Fig. 3.6) do logaritmo de uma grandeza que chamaremos de meias-vidas reduzidas dos núcleos emissores de prótons contra o parâmetro Coulombiano,  $\chi = Z_d(\mu_0/Q_p)^{1/2}$ .

As contribuições para a meias-vida associadas à penetrabilidade das barreiras coulombiana e a centrífuga podem ser fatorizadas, sendo assim a meia-vida reduzida é definida como o logaritmo da meia-vida experimental,  $\log_{10} T_{1/2}^{(p)}$ , subtraído do logaritmo dos fatores que não estão diretamente associados a penetrabili-

dade da barreira coulombiana. Especificamente definida por (ver apêndice C),

$$\tau_r = \tau - (\tau_0 + \tau_1 + \tau_2^{ce}), \quad (3.3)$$

com

$$\tau = \log_{10} T_{1/2}^{(p)} = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \quad (3.4)$$

sendo  $\tau_0$  e  $\tau_1$ , dados por

$$\tau_0 = -22 + \log_{10} \left[ a \left( \frac{\mu_0}{Q_p} \right)^{1/2} \right] \quad (3.5)$$

$$\tau_1 = c_4(c - a)g \sqrt{\mu_0 Q_p} H(x, y) \quad (3.6)$$

com  $c_4 = (2\sqrt{2\mu_0}/\hbar) \log_{10} e = 0.19$ . Note-se que  $\tau_1$  na eq. (3.6) representa a contribuição da região de superposição, e

$$\tau_2 = c_5 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_p} \right)^{1/2} \cdot F(x, y), \quad (3.7)$$

a contribuição da região de separação, com  $c_5 = (2\sqrt{2\mu_0}e^2/\hbar) \log_{10} e = 0.27358027$ .

A função de penetrabilidade,  $F(x, y)$ , na região de separação está definida no apêndice A (eq. A.23), ficando,

$$F(x, y) = \left\{ \frac{\sqrt{x}}{2y} \ln \left( \frac{\sqrt{x(x+2y-1)} + x + y}{\frac{x}{y} \left[ 1 + \sqrt{x + \frac{x}{y^2}} \right]^{-1} + y} \right) \right\} \quad (3.8)$$

$$+ \left\{ \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 - \frac{1}{y}}{\sqrt{1 + \frac{x}{y^2}}} \right)} - \sqrt{\frac{1}{2y} \left( 1 + \frac{x}{2y} - \frac{1}{2y} \right)} \right\}$$

que expandida em série de  $x$  fica

$$F(x, y) = F(0, y) + F'(0, y) x + \text{termos de ordens mais altas.} \quad (3.9)$$

o primeiro termo da expansão corresponde a

$$F(0, y) = \arccos(2y)^{-1/2} - (2y - 1)^{1/2}/(2y), \quad (3.10)$$

e o segundo a

$$F'(0, y) x = \frac{(2y - 1)^{1/2}}{4y^2} x. \quad (3.11)$$

Desta maneira é possível explicitar separadamente as contribuições Coulombiana ( $\tau_2^{\text{co}}$ ) e centrífuga ( $\tau_2^{\text{ce}}$ ) na região de barreira externa,

$$\tau_2 = \tau_2^{\text{co}} + \tau_2^{\text{ce}}, \quad (3.12)$$

onde

$$\tau_2^{\text{co}} = 0.27358027 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_p} \right)^{1/2} \times F(0, y), \quad (3.13)$$

tomando apenas o primeiro termo da expansão de  $F(x, y)$  na eq. (3.12).

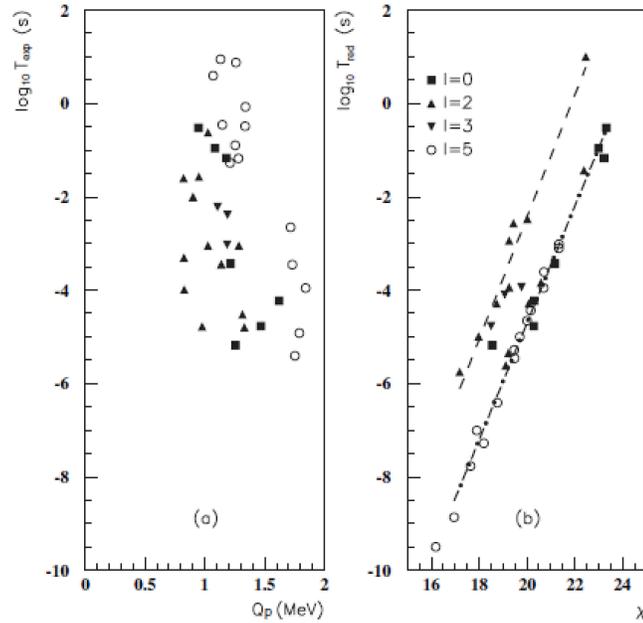


Figura 3.6: Em (a) verifica-se que não há sistemática para o decaimento de próton com o diagrama  $\log_{10} T_{1/2}$  contra valor  $Q$ ; em (b) a sistemática é verificada levando em consideração o parâmetro Coulombiano (ref.[27])

Desprezando-se os termos de ordens mais altas na expansão e fazendo uso da definição de  $x$  e  $y$  na eq. (3.11) ficamos com,

$$\tau_2^{\text{ce}} = c_6 \ell(\ell + 1) Z_d^{-1} \left[ (2y - 1) Q_p / \mu_0 \right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

com  $c_6 = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$  que aparecem nas eq. (2.7), (2.8) e (2.10). Lembrando que  $x$  e  $y$  são parâmetros associados às barreiras centrífuga e coulombiana definidos na eq. (3.2).

Para melhor compreender a sistemática estabelecida por Delion [27] apresentamos na Fig. 3.6 dois tipos de diagramas. Na Fig. 3.6a observa-se que não há uma sistemática fazendo o gráfico de logaritmo das meias-vidas experimentais em relação ao valor de energia de decaimento, já que o decaimento de próton é muito dependente não só da energia, mas também da altura e largura das barreiras centrífuga e coulombiana que são atravessadas pela próton no decaimento antes deste decair.

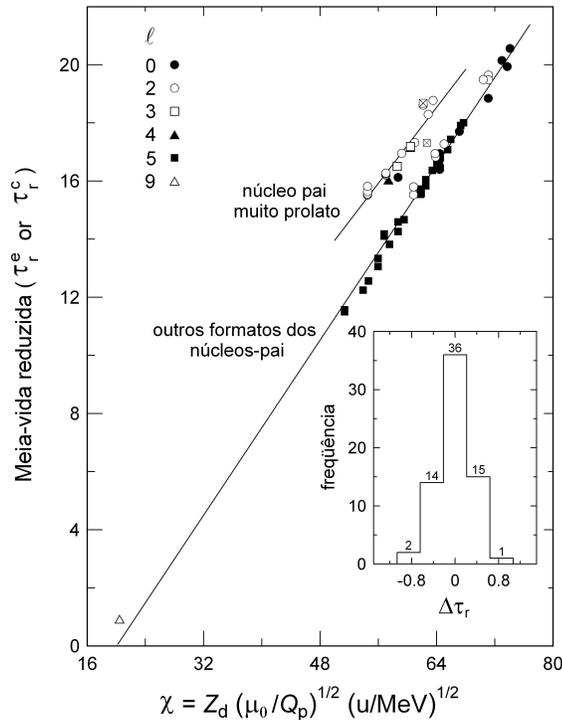


Figura 3.7: Meia-vida reduzida  $\tau_r$  (eq. 3.3), contra o parâmetro coulombiano. Os símbolos representam as meias-vidas reduzidas experimentais,  $\tau_r^e$ , para diferentes valores de momentos angulares indicados. A meia-vida reduzida calculada,  $\tau_r^c$ , é dada pela reta dos mínimos quadrados representando os núcleos muito prolato e os núcleos com outras formas. O símbolo do  $\otimes$  indica os casos que tiveram um desvio maior que 4.5. O caso do  $^{53m}\text{Co}$ , indicado pelo triângulo aberto, teve um fator 6 (ref. [28]).

Por outro lado, na Fig. 3.6b, é possível observar a sistemática obtida por Delion onde se exhibe o logaritmo

das meias-vidas reduzidas em função do parâmetro coulombiano.

Agora, utilizando nossos resultados, foram plotados na Fig. 3.7 os dados das tabelas 2 e 3 e é possível observá-los arranjados ao longo de duas retas, sendo a superior relacionadas aos núclídeos emissores de prótons muito prolatos e a inferior associadas aos núcleos com outras formas. Ainda na figura citada observamos, no histograma em destaque, com que frequência ocorreu o desvio das meias-vidas dos emissores de prótons. Verifica-se também que o arranjo dos núcleos, em relação a deformação, independe dos momentos angulares.

Feita uma minimização semelhante à do decaimento alfa, para os núcleos muito prolatos foi encontrado um  $g = 0$  e para os núcleos de outras formas o parâmetro encontrado foi  $g = 0.12$ .

Observamos neste capítulo que o nosso modelo reproduz muito bem os dados experimentais dos núcleos emissores de um próton, tanto para emissão no estado fundamental como em transições isoméricas.

Fizemos predições para meias-vidas de emissões de próton que ainda não foram detectados experimentalmente. O próximo passo é, aproveitando, o sucesso do modelo de penetrabilidade de barreira nos casos acima, reutilizá-lo para eventos com emissão dupla de prótons, o que faremos no próximo capítulo.

## Capítulo 4

# Emissão Simultânea de Dois Prótons por Núcleos Deficientes em Nêutrons

Encontramos registros na literatura [48] de que talvez o primeiro a mencionar a possibilidade do núcleo emitir um par de prótons foi Zeldovich, mas foi Goldansky (1960) [49] e Jänecke, ainda segundo a ref. [48], que determinaram os candidatos para o decaimento com dupla emissão de prótons. As pesquisas continuaram e predições revelaram que  $^{39}\text{Ti}$ ,  $^{42}\text{Cr}$  e  $^{45}\text{Fe}$  poderiam ser emissores neste modo de decaimento nuclear. Passados 40 anos da previsão teórica, a radioatividade de dois prótons foi confirmada apenas recentemente através do decaimento do  $^{45}\text{Fe}$  [50, 51], um experimento com um sinal claro de emissão correlacionada estimulando-se com isto o estudo detalhado do mecanismo do decaimento.

A primeira observação do  $^{45}\text{Fe}$  se deu em 1966 quando três íons deste núcleo foram identificados entre outros fragmentos produzidos através de um bombardeamento de um alvo de Berílio contra um feixe de Níquel a 600 MeV/nucleon. Mas, a descoberta do decaimento por dois prótons deu-se através de dois experimentos, no SSI/LISE3 (Superconducting Intense Source for Secondary Ions/espectômetro Lise) do GANIL (*Grand Accélérateur National Ions Lourds*), no ano de 2000, e no separador de fragmentos

*Fragment Recoil Separator* - FRS do GSI Helmholtz Centre for Heavy Ion Research, em 2001. Em ambos foram utilizados os fragmentos do feixe primário de  $^{58}\text{Ni}$ , implantados no telescópio detetor de silício, bombardeando o alvo de berílio [48]. A média dos três íons do  $^{45}\text{Fe}$  levou a determinação de uma meia-vida de  $1.75^{+0.49}_{-0.28}$  ms e uma energia de decaimento de  $Q_{2p} = 1.151(15)$  MeV (ref. [52]), resultados que concordaram muito bem com duas previsões teóricas, uma baseada no modelo da matriz-R (ref. [53]) e outro envolvendo, explicitamente, a dinâmica de três corpos (ref. [54]).

Bem recentemente, apresentou-se na literatura resultados bem consolidados para a emissão simultânea por dois prótons, observada para o caso do  $^{45}\text{Fe}$  como emissor. Os resultados obtidos no decaimento por dois prótons pelo  $^{45}\text{Fe}$  no detetor gasoso Optical Time Projection Chamber (OTPC) (ref. [1]), que grava as imagens das trajetórias das partículas opticamente, permitiu também investigar a distribuição angular dos prótons emitidos.

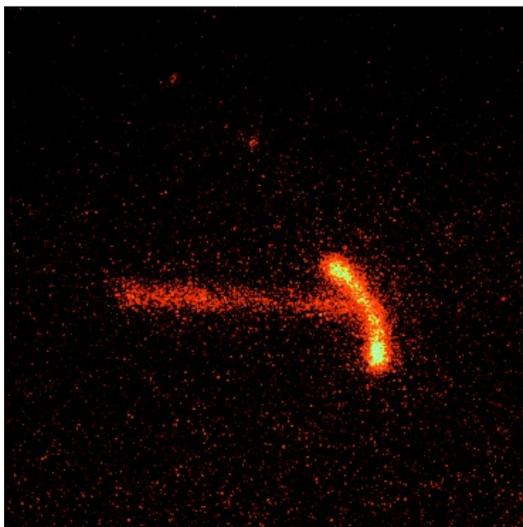


Figura 4.1: Registro do decaimento do  $^{45}\text{Fe}$  realizado no OTPC (ref. [1]). Um traço do  $^{45}\text{Fe}$  entrando na câmara pela esquerda. Os dois traços curtos e brilhosos são prótons de aproximadamente  $0.6\text{MeV}$ , emitidos  $535\mu\text{s}$  depois da entrada do íon na câmara.

O experimento foi realizado no “National Superconduction Cyclotron Laboratory” na Universidade de

Michigan, nos Estados Unidos. Os íons do  $^{45}\text{Fe}$  foram produzidos numa reação de um feixe  $^{48}\text{Ni}$  em 161 MeV/nucleon. Na Fig. 4.1 é mostrado o traço do  $^{45}\text{Fe}$  entrando na câmara do detector.

Foram observados 125 decaimentos em 9 dias, sendo 87 decaimentos diretos por dois prótons e 38 por decaimento beta. A meia-vida parcial encontrada foi  $T_{1/2}(2p) = 3.7\text{ms}$  e a largura correspondente,  $\Gamma_{2p} = 1.23_{-0.12}^{+0.15} \times 10^{-19} \text{ MeV}$ .

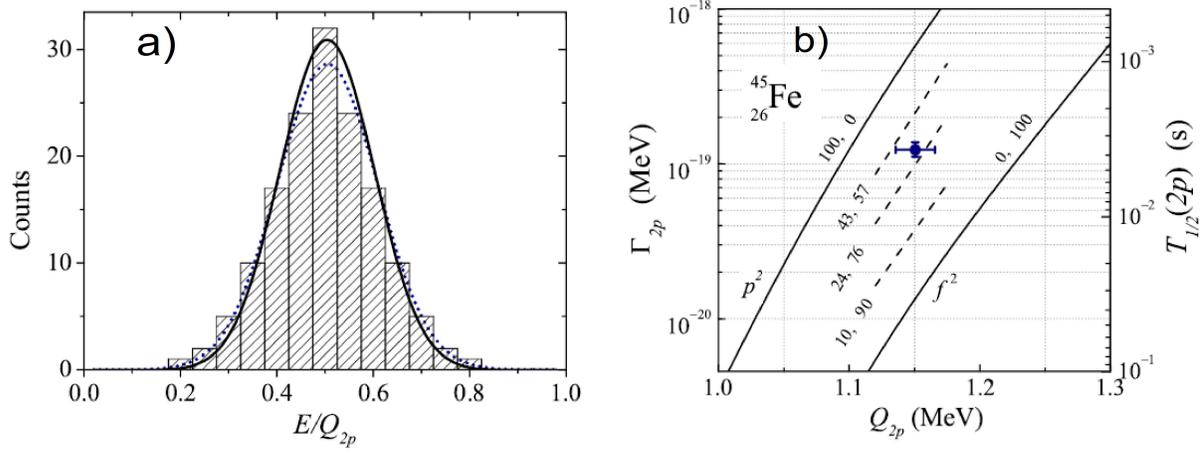


Figura 4.2: (a) Distribuição de energia do próton emitido individualmente no decaimento por dois prótons do  $^{45}\text{Fe}$ . O histograma são os dados experimentais e a curva pontilhada representa a predição teórica com uma forma gaussiana, e a linha cheia indica a predição do modelo de três corpos. (b) Meia-vida parcial do decaimento do  $^{45}\text{Fe}$  dependente da energia de decaimento. Estão mostradas as previsões de meias-vidas (largura) como função de energia, calculadas como nas refs.[54] e [55] para valores de ondas  $p$  ( $\ell = 1$ ) e  $f$  ( $\ell = 3$ ). Utilizou-se a notação  $p^2$  e  $f^2$  para indicar que cada orbital  $p$  e  $f$  possui dois prótons. Os pesos relativos de combinações das ondas  $p^2$  e  $f^2$  estão indicadas pelos pares de percentuais sobre as curvas.

Na Fig. 4.2a observa-se a distribuição de energia do próton emitido individualmente no decaimento de dois prótons do  $^{45}\text{Fe}$ , onde o histograma são os dados experimentais, a curva pontilhada representa a predição teórica com uma forma gaussiana, e a linha cheia indica a predição do modelo de três corpos. A meia-vida parcial do decaimento do  $^{45}\text{Fe}$  dependente da energia de decaimento é mostrada na Fig. 4.2b,

onde são mostradas as previsões para as ondas p ( $\ell = 1$ ) e f ( $\ell = 3$ ) feitas por [54], [55]. Entre elas está indicado o dado experimental.

O processo de emissão por dois prótons é previsto para núcleos, no estado fundamental, altamente deficientes em nêutrons com número atômico par. Devido às interações de emparelhamento, as emissões de um único próton seriam energeticamente proibidas. Neste processo, o núcleo pode emitir dois prótons de forma seqüencial ou simultânea. A primeira ocorre quando, ao ser emitido o primeiro próton, surge um núcleo residual intermediário excitado no estado do contínuo, emitindo, então, um segundo próton. Este processo tem sido observado para núcleos leves, como por exemplo, o  $^{12}\text{O}$ , onde temos como próton-emissor intermediário, o  $^{11}\text{N}$  ref. [56]. Algumas das evidências indicam a dominância do processo seqüencial para o  $^{12}\text{O}$ , pois a largura parcial para este decaimento consegue ser razoavelmente bem justificada por cálculos utilizando os dados experimentais de largura de emissões de um próton pelo  $^{11}\text{N}$  em modelos para o decaimento seqüencial (ref. [57] a [59]). A forma de emissão simultânea tem sido observada em núcleos com número de massa próximo de 50.

## **4.1 Proposta estatística de Goldansky para emissão simultânea de dois prótons**

Um tratamento quântico rigoroso para o decaimento de dois prótons requer, por um lado, a inclusão de estados ressonantes num contínuo dentro de um modelo de camadas com um potencial do caroço e, por outro lado, a escolha adequada de um sistema de três corpos (núcleo residual e os dois prótons a serem emitidos) para a descrição do sistema. Em geral, utiliza-se um tratamento bastante elaborado usando-se sistema de coordenadas hipersférico de Jacobi [54] e uma estrutura de modelo de camada mergulhada ou permeada pelo contínuo. Para contornar as dificuldades inerentes ao problema decidimos por uma abordagem fenomenológica já introduzida pioneiramente pelo Goldansky [49], envolvendo uma hipótese estatística na

descrição do processo que reduz a necessidade do tratamento a três corpos a uma superposição estatística da descrição do sistema por configurações de dois corpos, correlacionadas em energia.

Como Goldansky admitimos que a probabilidade de emissão é proporcional ao produto das probabilidades de penetrabilidade de barreira calculadas com energias que somadas correspondem a energia do decaimento simultâneo dos dois prótons.

$$P(E) \sim e^{-G_1(E)} e^{-G_2(Q_{2p}-E)}, \quad (4.1)$$

onde  $G_1$  e  $G_2$  são os fatores de Gamow para a emissão de próton num dado valor de energia  $E$  e o valor complementar  $Q_{2p} - E$ .

Para descrever o decaimento de dois prótons tem-se o produto de dois fatores de barreira que o Goldansky considerou apenas como sendo puramente coulombiana [49],

$$\omega(E) = \exp \left\{ \frac{-2\pi(Z-2)e^2\sqrt{M}}{\hbar\sqrt{Q_{2p}}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right] \right\}, \quad (4.2)$$

onde  $Q_{2p}$  é a energia total dos dois prótons,  $M$  é a massa do próton, e  $x$  e  $(1-x)$  são as frações de energia referentes a cada próton.

Quando os prótons possuem a mesma energia, ou seja,  $x = 0.5$ , o fator de penetrabilidade da barreira,  $\omega(E)$ , é máximo,  $\omega(E)_{max}$  que é escrito da seguinte maneira,

$$\omega(E)_{max} = \exp \left\{ \frac{-2\pi(Z-2)e^2\sqrt{M}}{\hbar\sqrt{Q_{2p}}} (2\sqrt{2}) \right\}, \quad (4.3)$$

A probabilidade de decaimento por um dos prótons é  $(0.5-x) Q_{2p}$  e, para o outro próton é,  $(0.5+x) Q_{2p}$ , levando em conta que  $x \ll 0.5$  assim, o fator de barreira fica,

$$\omega(E) = \exp \left\{ \frac{-2\pi(Z-2)e^2\sqrt{M}}{\hbar\sqrt{Q_{2p}}} \left[ \frac{1}{\sqrt{0.5-x}} + \frac{1}{\sqrt{0.5+x}} \right] \right\} \quad (4.4)$$

expandindo em série de Taylor em torno de  $x = 0$  calculamos a relação e tomando  $x \ll 0.5$ ,

$$\frac{\omega(E)_{max}}{\omega(E)} \approx \exp \left\{ \frac{-6\pi(Z-2)e^2\sqrt{M}}{\hbar\sqrt{Q_{2p}}} x^2 \right\}, \quad (4.5)$$

esta equação mostra que Goldansky previu uma forma gaussiana para a cauda da distribuição de energia. Mostraremos na seção seguinte que não somente para  $x \ll 0.5$ , mas para todo  $x$ , o comportamento observado, mesmo para uma forma de potencial de barreira mais completa, é de uma curva gaussiana.

## 4.2 Um modelo de barreira de potencial realista

Como mencionamos anteriormente, o cálculo de tunelamento na emissão simultânea de dois prótons fica reduzido ao produto de fatores associados ao tunelamento de cada próton separadamente, dentro da proposta de Goldansky.

Nos capítulos anteriores foi feito o cálculo destes fatores utilizando um modelo fenomenológico de barreira, que apesar de apresentar a vantagem de utilizar apenas um único parâmetro, usando uma forma esquemática de barreira, deixa o desconforto conceitual de uma descontinuidade da derivada do potencial no pico da barreira como, por exemplo, na fig. 3.1. Esta descontinuidade se reflete na função de onda mesmo tomada na aproximação WKB do próton.

Levando-se em conta que nos cálculos de tunelamento utilizamos procedimentos numéricos para integração dos cálculos do fator de Gamow, não significaria grande esforço a utilização de uma barreira mais realista, construída a partir de um modelo de potenciais correntemente utilizados para a descrição do modelo de camada nuclear, como, por exemplo, potenciais nucleares do tipo Woods-Saxon (WS).

Portanto, neste capítulo utilizaremos para o cálculo do fator de Gamow o potencial,

$$V(r) = V_{cent} + V_{coul.} + V_{nucl.}, \quad (4.6)$$

onde o potencial coulombiano é dado por,

$$V_{coul}(r) = \frac{Z_d e^2}{r} \left( 3 - \frac{r}{R_c} \right)^2 \quad r \leq R_c, \quad (4.7)$$

$$= \frac{Z_d e^2}{r} \quad r > R_c, \quad (4.8)$$

com  $R_c = R_d + r_p$ , sendo  $R_d$  e  $r_p$  os raios do núcleo filho e do próton, respectivamente.

O potencial nuclear é uma forma WS,

$$V_{nucl}(r) = - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_N}{d}\right)} \quad (4.9)$$

e o centrífugo sendo

$$V_{centr}(r) = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2\mu_0 r^2}, \quad (4.10)$$

onde  $V_0$  é a profundidade do potencial nuclear,  $\mu_0$  é a massa reduzida do sistema,  $R_N$  é o raio nuclear dado pelas eq. (2.13) a (2.17) e  $d$  é a difusibilidade do potencial, ou seja, um comprimento característico da difusão da superfície nuclear.

### 4.3 Emissão de dois prótons na barreira realista dentro da proposta de Goldansky

Neste seção discutiremos a utilização da barreira realista apresentada na seção anterior, associada a proposta de Goldansky (seção 4.1), com o objetivo de discutir a possibilidade dessa proposta teórica reproduzir dados experimentais do decaimento do  $^{45}\text{Fe}$  com dupla emissão de próton, por ser este processo o mais recentemente medido e com resultados bem consolidados.

Para o decaimento de dois prótons, calculamos a constante de decaimento,  $\lambda_{2p}$ , como sendo, o produto da taxa média de assalto a barreira,  $\bar{\lambda}_0$ , pela probabilidade de tunelamento dos dois prótons dado pela eq. (4.1), ou seja,

$$\lambda_{2p}(E) = \bar{\lambda}_0 P(E) \quad (4.11)$$

onde  $\bar{\lambda}_0$  calculada com a distribuição de energia de um próton,

$$\bar{\lambda}_0 = \int_0^{\infty} \lambda_0(Q) G(E) dQ \quad (4.12)$$

sendo  $\lambda_0$  referente ao da eq. (2.5) e  $G(E)$  um peso gaussiano da distribuição de energia.

### 4.3.1 A distribuição de energia de um próton na dupla emissão do $^{45}\text{Fe}$

Um dos dados experimentais deste processo, como vimos na Fig. 4.2 a, consiste na distribuição de energia individual dos prótons do decaimento [1]. Dentro da nossa proposta, podemos gerar prótons emitidos com energia  $E$  considerando todas as possíveis partições da energia  $Q_{2p} = E + (Q_{2p} - E)$  para a emissão simultânea dos dois prótons. Como vimos nas eqs. (4.2) a (4.5), Goldansky previu uma forma gaussiana, eq. (4.5) (pelo menos, para a cauda desta distribuição espectral,  $x \ll 0.5$ ), levando em conta uma barreira puramente coulombiana.

Nesta seção determinaremos esta distribuição de energia levando em conta a barreira gerada pela forma do potencial das eq. (4.6) a (4.10). Portanto, incluindo não apenas a parte coulombiana como também o potencial nuclear e centrífugo.

Na Fig. 4.3a temos essa distribuição de energia calculada por (4.1) utilizando as barreiras de potencial que se apresentam na Fig. 4.3b. O cálculo foi feito para diferentes valores de momento angular ( $\ell = 0, 1, 2, 3$ ) para os valores fixos da profundidade do potencial nuclear ( $V_0 = 42.37 \text{ MeV}$ ) e a difusibilidade ( $d = 0.72 \text{ fm}$ ).

Verificamos numericamente (ver Fig. 4.3(a)) que a forma de espectro, mesmo para uma barreira potencial incluindo a parte centrífuga e a nuclear, é gaussiana para qualquer valor de  $x$  e não apenas para  $x \ll 0.5$  para diferentes valores de momento angular apresentados. De fato, um ajuste de uma forma analítica gaussiana foi feito com um desvio médio quadrático menor que  $10^{-5}$  para todos os casos. Ao mesmo tempo verificamos a quase insensibilidade do espectro obtido às variações dos valores dos momen-

tos angulares cobertos. Observamos que o dado experimental correspondendo ao histograma na Fig. 4.3(a) é razoavelmente bem reproduzido com esta proposta de cálculo.

É perceptível na Fig. 4.3 b a alteração significativa na barreira de potencial, muito embora essa mudança não se reflita na distribuição espectral para os correspondentes valores de  $\ell$ .

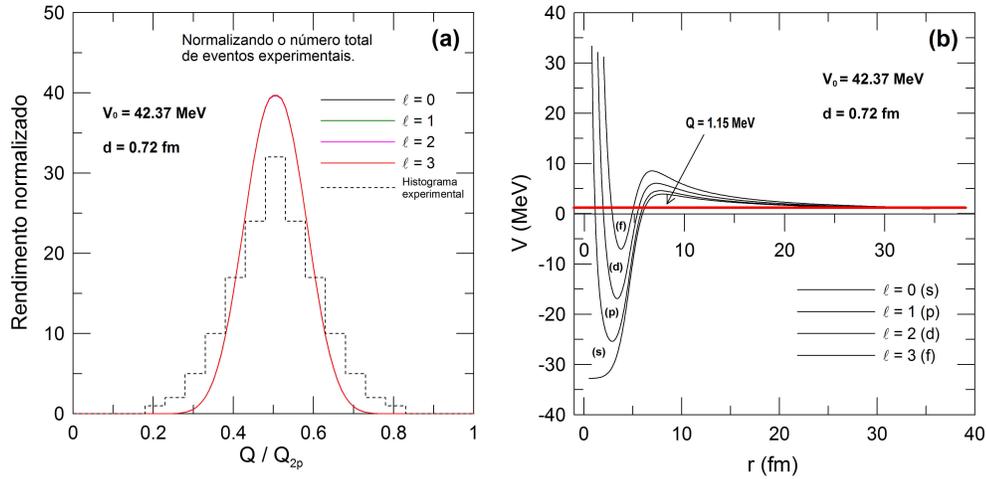


Figura 4.3: (a) Espectro de energia de um próton na emissão dupla do  $^{45}\text{Fe}$ ; (b) Barreira de potencial correspondente.

Ambos para variações do momento angular,  $\ell = 0, 1, 2$  e  $3$ .

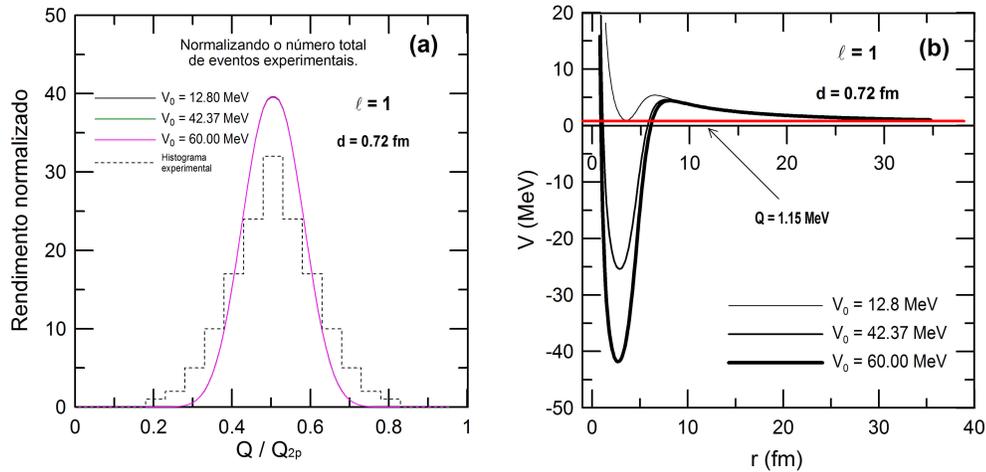


Figura 4.4: (a) Distribuição de energia de um próton; (b) barreira de potencial correspondente. Ambos com  $\ell = 1$

para diferentes valores da profundidade do potencial nuclear,  $V_0$ .

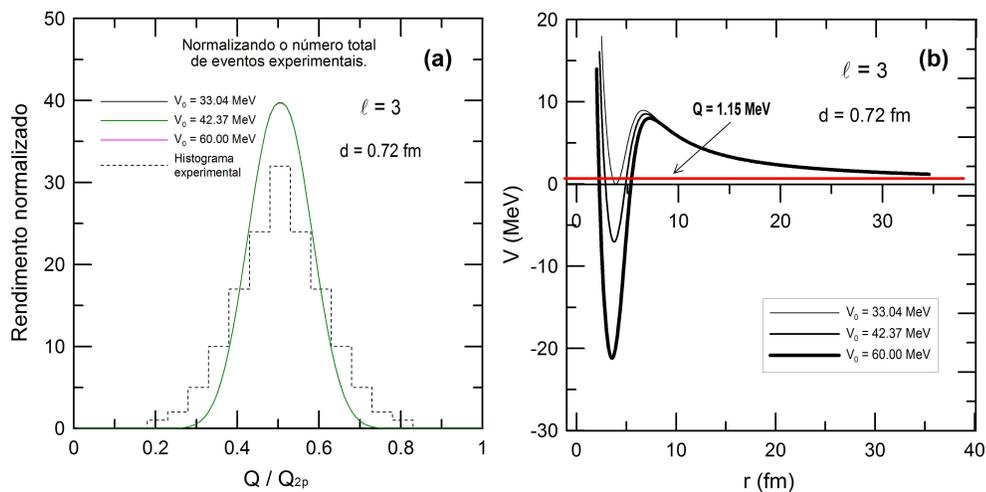


Figura 4.5: (a) Distribuição de energia de um próton; b) barreira de potencial correspondente. Ambos com  $\ell = 3$  para diferentes valores da profundidade do potencial nuclear,  $V_0$ .

Alterações na barreira de potencial podem também ser induzidas por variações dos parâmetros do potencial nuclear ( $V_0, d$ ). Seria interessante verificar como a barreira se modifica com a mudança desses parâmetros e o reflexo sobre a sensibilidade do espectro.

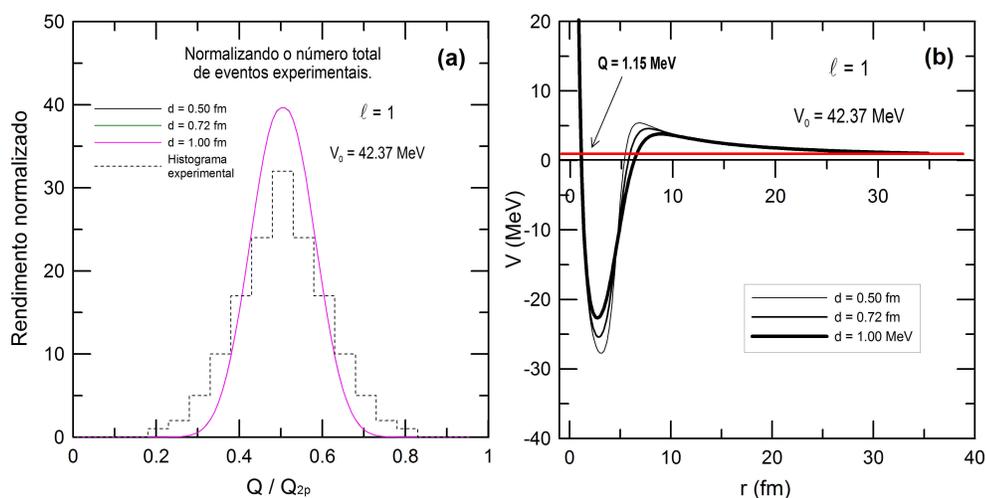


Figura 4.6: Variando a difusibilidade para distribuição de energia e barreira de potencial, ambos com  $\ell = 1$ , para diferentes valores de difusibilidade.

Nas Fig. 4.4 e 4.5 mostra o espectro e a barreira correspondentes para variações significativas da profundidade do potencial nuclear,  $V_0$ , sendo a Fig. 4.4 para  $\ell = 1$  e a Fig. 4.5 para  $\ell = 3$ . Novamente, mudanças perceptíveis na barreira não são suficientes para a modificação do espectro.

Procedemos da mesma forma com relação a mudança na difusibilidade. As Fig. 4.6 e 4.7 mostram resultados similares, ou seja, a quase insensibilidade do espectro de energia face às mudanças ainda perceptíveis na barreira.

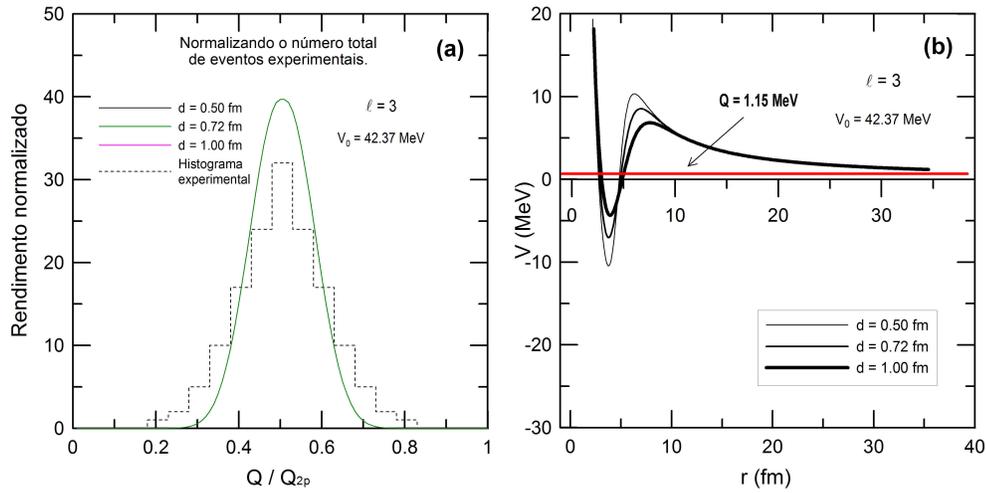


Figura 4.7: Difusibilidade para distribuição de energia e barreira de potencial, ambos com  $\ell = 3$ , para diferentes valores de difusibilidade.

### 4.3.2 A meia-vida da emissão de dois prótons pelo $^{45}\text{Fe}$

A apresentação do dado experimental da meia-vida do decaimento do  $^{45}\text{Fe}$  por Miernik [1] vem acompanhada de previsões teóricas do modelo de três corpos de Grigorenko e Zhukov [54, 55] para a dependência da meia-vida com a energia do decaimento, fixados diferentes valores do momento angular, mostrada na Fig. 4.2b. As várias linhas teóricas mostram diferentes configurações dos dois prótons de valência do  $^{45}\text{Fe}$  nos orbital dominante  $f$  com uma contribuição significativa do orbital  $p$ .

Com a taxa determinada pela eq. (4.11), calculamos a meia-vida,  $T_{1/2}^{(2p)}$  para valores de momento angular

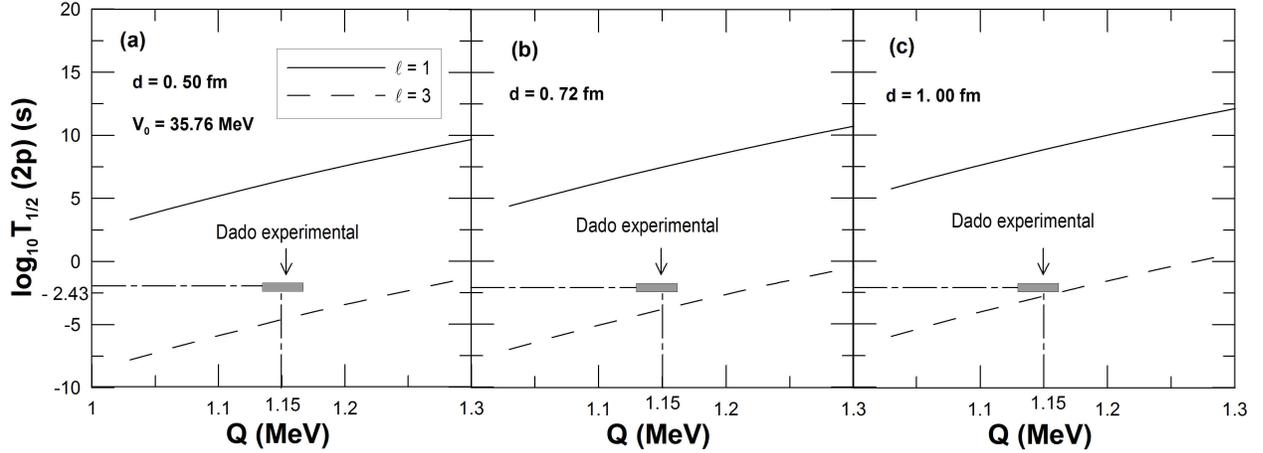


Figura 4.8: Meia-vida contra energia, variando a profundidade do poço da barreira de potencial para  $\ell = 1$  e  $\ell = 3$ . O retângulo, em destaque, indica o dado experimental.

considerados.

A Fig. (4.8) mostra as ondas  $p$  e  $f$  para a profundidade da barreira de potencial constante,  $V_0 = 35.76 \text{ MeV}$ , variando a difusibilidade do potencial nuclear com  $d = 0.5 \text{ fm}, 0.72 \text{ fm}, 1.00 \text{ fm}$ . Observa-se que à medida que a difusibilidade aumenta a curva correspondente a  $\ell = 3$  (onda  $f$ ) aproxima-se do dado experimental. Para este valor de profundidade de potencial nuclear que consideramos relativamente raso as difusibilidades consideradas permitem englobar o dado experimental. Os nossos resultados apontam na direção de um peso maior para a onda  $p$  que para a onda  $f$  na tentativa de reprodução do dado experimental por uma combinação das configurações de ondas  $pf$ , ao contrário do que se observa nos resultados da Fig. 4.2b.

Nas Fig. (4.9) e (4.10) aumentamos a profundidade do potencial nuclear,  $V_0$ , a fim de averiguar as mudanças nesses diagramas. Verificamos que à medida que a profundidade do potencial nuclear aumentou o comportamento das curvas em relação ao dado experimental se assemelha ao caso anterior. A curva correspondente a  $\ell = 3$  se aproxima da meia-vida com o aumento de  $V_0$ , ou seja, o peso da onda  $f$  cresce na ponderação para reproduzir o dado experimental.

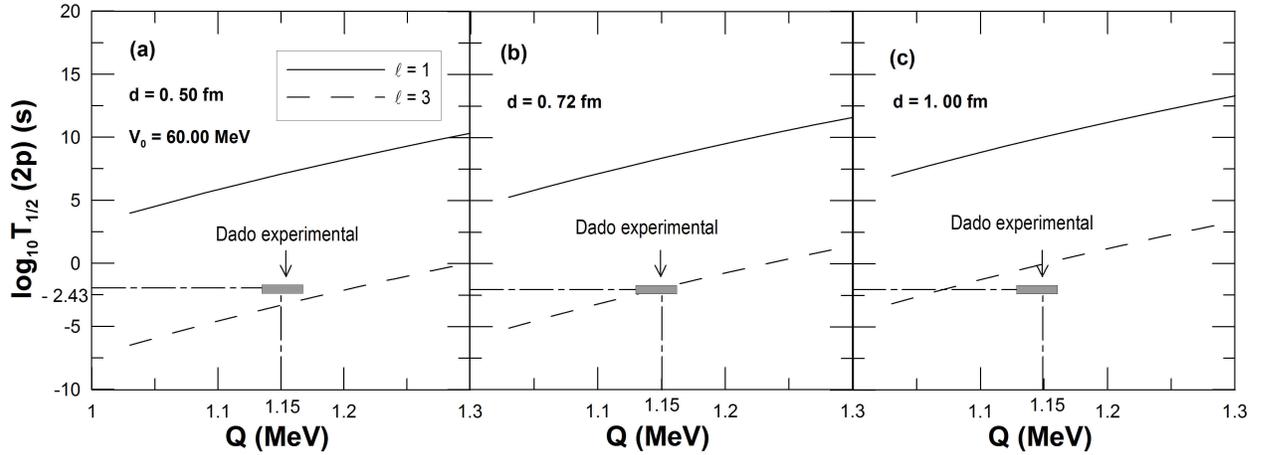


Figura 4.9: Meia-vida contra energia, variando a difusibilidade para  $\ell = 1$  e  $\ell = 3$ . O retângulo, em destaque, indica o dado experimental.

Da análise deste diagramas, podemos concluir que a proposta de cálculo de meia-vida consegue obter resultados para a dependência com a energia do decaimento similares àqueles obtidos pelo modelo de Gri-gorenko e Zhukov (ref. [54, 55]), e são também capazes de reproduzir o dado experimental apenas mudando apropriadamente os pesos associados a contribuições das ondas  $p$  e  $f$ .

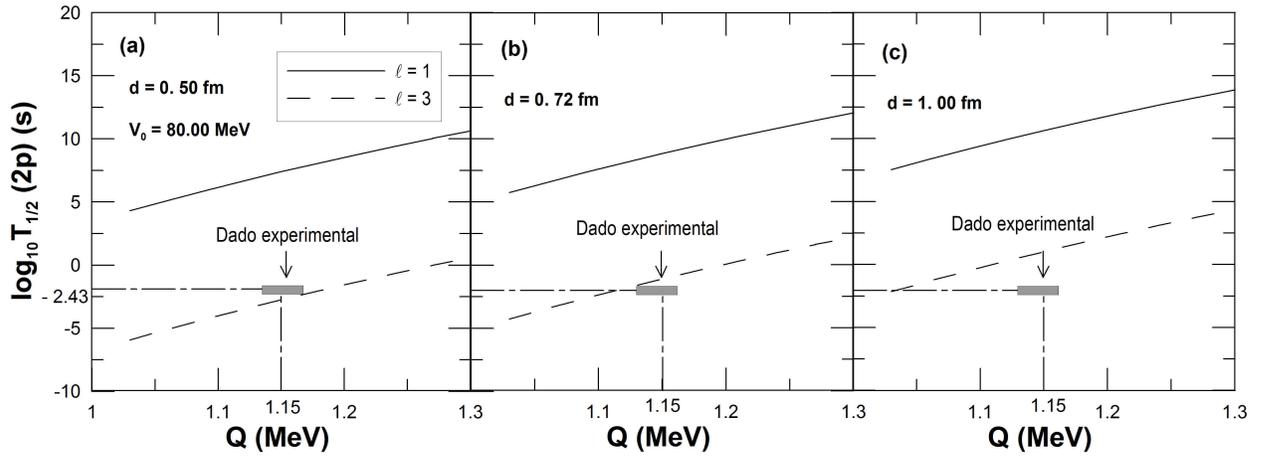


Figura 4.10: Meia-vida contra energia, variando a difusibilidade para  $\ell = 1$  e  $\ell = 3$ . O retângulo, em destaque, indica o dado experimental.

# Capítulo 5

## Síntese dos Resultados, Conclusões e Perspectivas

Como distribuímos nossos resultados ao longo dos capítulos neste trabalho, dedicaremos a primeira seção deste capítulo a uma retomada e síntese dos resultados obtidos. Em seguida, apresentamos nossas conclusões finais e, na seqüência levantamos algumas questões a serem abordadas como continuação direta do presente trabalho.

### 5.1 Síntese dos Resultados

Com um modelo de tunelamento unidimensional e diferentes propostas para a forma da barreira discutimos neste trabalho o processo de decaimento por um próton e de dupla emissão de prótons para núcleos deficientes em nêutrons. A emissão de um único próton foi discutida para uma forma de barreira fenomenológica (cap. 2) onde fizemos uma parametrização do potencial nuclear em associação com a massa efetiva para a região de superposição. Esta forma de barreira foi validada pela aplicação do módelo do de-

caimento alfa (cap. 1) onde os dados experimentais são bastantes consolidados para uma gama muito larga de nuclídeos (consideramos 336 casos de emissores alfa).

O modelo mostrou-se bem satisfatório reproduzindo muito bem as meias-vidas, conhecidas e ainda não determinadas experimentalmente, apenas com um único parâmetro (veja Fig. 2.4, cap. 1).

Quando aplicado à emissão de prótons o modelo foi estendido não somente à emissão de  $\ell = 0$ , mas para qualquer  $\ell$  permitindo a análise da emissão de prótons por estados isoméricos (majoritariamente emissões de  $\ell \neq 0$  (veja tab. 3, cap. 2)).

Para emissões de estados fundamentais e isoméricos com meias-vidas determinadas o modelo reproduziu muito bem com desvios menores que uma ordem de grandeza (vide tab. 2 e 3, cap. 2). Este resultado permitiu-nos fazer algumas previsões de meias-vidas de possíveis emissores, ainda não detectados (tab. 4, cap. 2).

Uma sistemática de meias-vidas reduzidas (eq. 3.3) como função do parâmetro coulombiano  $Z_d (\mu_0/Q)^{1/2}$  foi reproduzida com a utilização da barreira fenomenológica estabelecida (Fig. 3.4). Além disto, a sistemática de Geiger-Nuttall para meias-vidas tão bem estabelecida para os emissores alfa foi verificada para o caso dos emissores de próton (Fig. 3.5).

A próxima etapa do nosso trabalho foi o estudo do decaimento por dois prótons que, seguindo a proposta de Goldansky [49], foi reduzido ao tunelamento de cada próton separadamente, utilizando, neste caso, uma barreira realista constituída pela superposição de uma forma de potencial convencional (Woods-Saxon, coulombiana e centrífuga).

O núcleo pai considerado para este estudo foi o emissor simultâneo de dois prótons  $^{45}\text{Fe}$ , cujas meia-vida experimental e largura foram determinadas por Miernik [1]. Comparando as previsões de nossos cálculos para o espectro de energia e para o diagrama da dependência da meia-vida com o valor de energia do decaimento com aqueles apresentados, acompanhando a apresentação do dado experimental baseado no modelo de três corpos de Grigorenko e Zhukov [54, 55], variando os parâmetros do potencial nuclear ( $V_0, d$ )

a fim de ajustar as ondas  $p$  e  $f$  para incorporar o dado experimental, mostramos que a nossa proposta de cálculo pode reproduzir de forma similar à ref. [54, 55] e o valor da meia-vida experimental do  $^{45}\text{Fe}$  da ref. [1].

Mostramos que os espectros de energia de um próton é um observável demasiadamente insensível às mudanças da barreira dentro da nossa proposta de cálculo (vide Fig. 4.3 a 4.7).

## 5.2 Conclusões Finais

A despeito da existência de propostas na literatura de cálculos bem mais sofisticados para a determinação de meias-vidas de emissores de prótons, mostramos, neste trabalho que a tradicional proposta de tunelamento de barreira para os decaimentos nucleares não pode ser descartada para o estudo dos processos de emissão por núcleos deficientes em nêutrons. O elemento essencial é a escolha apropriada da forma da barreira e sua parametrização.

Inclusive, neste estudo, sistemáticas para meias-vidas convencionais, tipo Geiger-Nuttal são observados e a mesma sistemática denunciadora de deformações nucleares recentes (ref. [27]) é reproduzida em nosso trabalho.

Revisitamos a proposta pioneira de Goldansky para a emissão de dois prótons aprimorada no nosso estudo com a inclusão não só da barreira coulombiana, mas do potencial nuclear e centrífugo. No estudo deste processo focalizamos o caso da emissão do  $^{45}\text{Fe}$  mostrando que, mais uma vez, a proposta de tunelamento de barreira acrescida da hipótese estatística do Goldansky consegue, razoavelmente, dar conta da reprodução do espectro de energia de um próton. Ao mesmo tempo com a escolha apropriada de pesos para a composição de diferentes momentos angulares podemos determinar a meia-vida experimental deste emissor. Esses percentuais devem ser compatíveis com a composição dessas ondas ( $p$  e  $f$ ) que venham a reproduzir a distribuição do ângulo de abertura da emissão simultânea de dois prótons não analisada, ainda,

neste trabalho.

### 5.3 Perspectivas

Como possíveis alternativas de continuidade do presente trabalho apresentamos a seguir alguns aspectos a serem explorados ou aprimorados:

1. Dentre os processos de nucleossíntese propostos na literatura encontramos o processo-p de captura de prótons, bem como os processos de captura de nêutron. Estes processos envolvem elementos ricos em prótons no primeiro caso e ricos em nêutrons no último. Portanto, existe um interesse astrofísico relevante por muitos núclídeos que mesmo de difícil detecção em laboratórios seriam de grande interesse astrofísico e completamente inexplorados neste trabalho.

2. Estudamos ao longo do quarto capítulo a emissão simultânea de dois prótons utilizando uma barreira gerada pela superposição do potencial nuclear na forma de uma curva WS, do potencial coulombiano e do potencial centrífugo. Entretanto, deixamos por fazer a utilização desta forma de barreira, que denominamos de barreira realista, para o caso da emissão de um próton e mesmo do decaimento alfa.

3. No caso da emissão de dois prótons, até mesmo para consolidar a proposta aqui apresentada, seria interessante a aplicação da abordagem estatística apresentada para outros candidatos a emissão dupla de próton apontados na literatura, tais como:  $^{54}\text{Zn}$ ,  $^{48}\text{Ni}$  e  $^{19}\text{Mg}$ .

4. Uma outra questão, ainda a ser explorada dentro desta proposta estatística apresentada para o caso do decaimento simultâneo, seria a elaboração de um cálculo para o caso do decaimento seqüencial de dois prótons. Com esta alternativa teríamos um ferramental de cálculo para alguns casos já explorados na literatura, tanto do ponto de vista teórico como experimental ([50] a [54]).

5. Mais imediatamente se coloca o estudo da distribuição do ângulo de abertura das direções de emissão dos prótons, mesmo para o caso mesmo do  $^{45}\text{Fe}$  que temos determinado na literatura experimentalmente

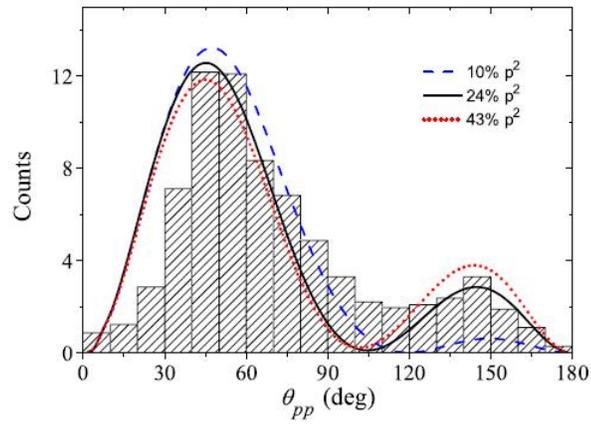


Figura 5.1: A distribuição da abertura do ângulo entre dois prótons emitidos no decaimento do  $^{45}\text{Fe}$  está representada pelo histograma. As linhas mostram as previsões do modelo de três corpos para as mesmas misturas de  $p^2$  e  $f^2$  mostradas na Fig. 4.2 (ref. [1]).

[1](reproduzida na Fig. 5.1) e explorada por outros modelos. Este aspecto importante ficou ainda em aberto em nossos estudos.

# Apêndice A

## Cálculo do Fator de Gamow para a Barreira Fenomenológica.

### A.1 Fator de Gamov na região de superposição

Sendo o fator de Gamov igual a,

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2\mu(s) [V(s) - E]} ds \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mu(s)$  é a massa reduzida efetiva e, como a energia potencial  $V(s)$ , não é bem conhecida. Duarte e Gonçalves ref. [10] estudaram o comportamento da massa efetiva para diferentes casos hadrônicos e Poenaru ref. *et al* [60] assumiu uma função quadrática para a barreira. Diante dessas descrições, Tavares *et al* [44] assumiu que ambas funções teriam a seguinte forma,

$$\mu(s) = \mu_0 \left( \frac{s-a}{c-a} \right)^p, \quad p \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

no qual  $\frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m}$ ,  $a = R_p - r_p$  e  $c = R_d + r_p$  (ver Fig. 2.1).

$$V(s) - Q = \left( \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu_0 c^2} + \frac{2Z_d e^2}{c} - Q \right) \left( \frac{s-a}{c-a} \right)^q, \quad q \geq 1 \quad (\text{A.3})$$

Substituindo as equações acima na integral de Gamow,

$$G_{ov} = \frac{2}{\hbar} \int_a^c \sqrt{2\mu_0 \left[ \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu_0 c^2} + \frac{2Z_d e^2}{c} - Q \right]} \left( \frac{s-a}{c-a} \right)^{\frac{p+q}{2}} ds \quad (\text{A.4})$$

Foi usado os seguintes valores para as constantes:

$$\hbar c = 197.38 \text{ MeV} \cdot \text{fm}, \quad e^2 = 1.4399652 \text{ MeV} \cdot \text{fm},$$

com  $c$  sendo a velocidade da luz na unidade de  $\text{fm}/s$ .

Com estes valores, a integral fica,

$$G_{ov} = c_1 \sqrt{\mu_0 Q_\alpha} \sqrt{\left[ \frac{c_2 \ell(\ell+1)}{\mu_0 Q_\alpha c^2} + \frac{2Z_d e^2}{Q_\alpha c} - 1 \right]} \int_a^c \left( \frac{s-a}{c-a} \right)^{\frac{p+q}{2}} ds \quad (\text{A.5})$$

com  $c_1 = 0.43747 (\sqrt{\text{MeV fm}^2})^{-1}$ .

Resolvendo essa integral chega-se ao seguinte resultado,

$$G_{ov} = c_1 \sqrt{\mu_0 Q_\alpha} (c-a) \frac{2}{p+q+2} \sqrt{\left[ \frac{c_2 \ell(\ell+1)}{\mu_0 Q_\alpha c^2} + \frac{2Z_d e^2}{Q_\alpha c} - 1 \right]} \quad (\text{A.6})$$

Por conveniência, adotou-se a seguinte convenção:

$$x = \frac{c_2 \ell(\ell+1)}{\mu_0 Q_\alpha c^2}; \quad y = \frac{Z_d e^2}{Q_\alpha c} \quad e \quad H(x, y) = \sqrt{x+2y-1}, \quad (\text{A.7})$$

sendo  $c_2 = 20.9008 \text{ MeV fm}^2$ .

A quantidade  $\left( \frac{p+q+2}{2} \right)^{-1}$  corresponde ao  $g$  que é o parâmetro de ajuste do modelo, cujo valor é determinado por um conjunto de meias-vidas medidas. Devido aos limites de  $p$  e  $q$  o parâmetro de ajuste obedece o seguinte intervalo  $0 \leq g \leq 2/3$ , pois  $g = 2/3$  para  $p = 0$  e  $q = 1$  e  $g = 0$  para  $p$  e  $q$  infinitos.

A integral de Gamow fica,

$$G_{ov} = c_1 \sqrt{\mu_0 Q_\alpha} (c-a) g H(x, y) \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Fator de Gamov na região de separação

Para o fator de Gamow na região de separação, tem-se,

$$G_{se} = \frac{2}{\hbar} \int_c^b \sqrt{2\mu_0 Q_\alpha} \sqrt{\frac{c_2 \ell(\ell+1)}{\mu_0 Q_\alpha s^2} + \frac{2Z_d e^2}{Q_\alpha s} - 1} ds. \quad (\text{A.9})$$

Usando as seguintes notações,  $x = c_2 \ell(\ell+1)/(\mu_0 Q_\alpha c^2)$  e  $y = Z_d e^2/(Q_\alpha c)$ , a integral de Gamow pode ser escrita como,

$$G_{se} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2\mu_0 Q_\alpha} \int_c^b \sqrt{\frac{xc^2}{s^2} + \frac{2yc}{s} - 1} ds \quad (\text{A.10})$$

Fazendo a seguinte transformação de variáveis,

$$z = \frac{1}{s}, \quad dz = -\frac{1}{s^2} ds, \quad \text{então} \quad ds = -s^2 dz = -\frac{dz}{z^2}$$

Assim,

$$G_{se} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2\mu_0 Q_\alpha} \int_c^b \frac{\sqrt{(xc^2)z^2 + (2yc)z - 1}}{z^2} dz \quad (\text{A.11})$$

Para resolver esta integral recorreu-se às regras de integração de formas polinomiais e irracionais,

$$\int_c^b -\frac{\sqrt{X}}{x'^2} dx' = \frac{\sqrt{X}}{x'} \Big|_c^b - \frac{B}{2} \int_c^b \frac{dx'}{x' \sqrt{X}} - C \int_c^b \frac{dx'}{\sqrt{X}} \quad (\text{A.12})$$

com  $X = Ax'^2 + Bx' + C$ . Usaremos a seguinte nomenclatura,

$$\begin{aligned} \text{primeiro termo} &= \frac{\sqrt{X}}{x'} \Big|_c^b \\ \text{segundo termo} &= \frac{B}{2} \int_c^b \frac{dx'}{x' \sqrt{X}} \\ \text{terceiro termo} &= C \int_c^b \frac{dx'}{\sqrt{X}} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

as integrais dos segundo e terceiro termos são resolvidas por,

$$-\frac{1}{2} \int_c^b \frac{dx'}{x' \sqrt{X}} = \frac{-1}{2\sqrt{-A}} \arcsin \left( \frac{Bx' + 2A}{x' \sqrt{B^2 - 4AC}} \right) \Big|_c^b \quad (\text{A.14})$$

$$-\int_c^b \frac{dx'}{\sqrt{X}} = \frac{-1}{\sqrt{C}} \ln \left[ \frac{2Cx' + B}{\sqrt{4AC + B^2}} \sqrt{\frac{(2Cx' + B)^2}{4AC - B^2} + 1} \right] \Big|_c^b \quad (\text{A.15})$$

onde,

$$A = -1, \quad B = 2yc, \quad C = xc^2, \quad X = (xc^2)z^2 + (2yc)z - 1, \quad x' = z = \frac{1}{s} \quad (\text{A.16})$$

Voltando ao primeiro termo devemos considerar que no ponto  $b$ ,  $V(b) = Q$ . Assim,

$$X(b) = \frac{xc^2}{b^2} + \frac{2yc}{b} - 1 = V(b) - Q$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} \text{primeiro termo} &= \left[ s \sqrt{\frac{xc^2}{s^2} + \frac{2yc}{s} - 1} \right]_c^b = 0 - c \sqrt{x + 2y - 1} \\ \text{primeiro termo} &= -cH(x, y) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Para resolver o segundo termo, substituímos os limites da integral na eq. (A.14), obtemos,

$$\text{segundo termo} = 2yc \left[ \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\frac{2yc}{b} - 2}{\sqrt{\frac{4y^2c^2}{b^2} + \frac{4xc^2}{b^2}}} \right) - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\frac{2yc}{c} - 2}{\sqrt{4y^2 + 4x}} \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

No primeiro parênteses de (A.18) explicitamos  $x$  e  $y$  e substituímos  $Q$  por  $V(b)$ , encontrando o resultado igual a  $-1$ .

Pela relação trigonométrica inversa em (A.18) temos,

$$1/2 [\arcsin(w) - \arcsin(-1)] = \arccos \sqrt{v}, \quad (\text{A.19})$$

onde consideramos que  $w$  corresponde ao conteúdo do segundo parênteses de (A.18). Substituindo  $w =$

$\frac{y-1}{\sqrt{x+y^2}} = \sin \alpha$ ,  $\arccos(\sqrt{v}) = \beta$  e  $\arcsin(-1) = -\pi/2$  na eq. (A.19), chegamos a uma equação de segundo grau em  $y$  cuja solução é da seguinte forma,

$$y = \frac{1 \pm w}{2}$$

Fazendo  $r = 1 \pm w/2$ , substitui este termo em  $\frac{1+w}{2}$  resulta em  $1 - r$ ; no termo  $\frac{1-w}{2}$  resulta em  $r$ , ou seja, este é o termo válido.

Então, o segundo termo fica da seguinte maneira,

$$\frac{b}{2} \int_c^b \frac{dx'}{x' \sqrt{X}} = \arccos \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{y-1}{\sqrt{x+y^2}} \right) \right]^{1/2}. \quad (\text{A.20})$$

Agora vamos resolver o terceiro termo, aplicando o limite  $b$  no resultado da integral,

$$\text{terceiro termo} = c\sqrt{x} \left[ \ln \left( \frac{\frac{2xc^2}{b} + 2yc}{\sqrt{4xc^2 + 4y^2c^2}} + \sqrt{\frac{\left(\frac{2xc^2}{b} + 2yc\right)^2}{4xc^2 + 4y^2c^2} + 1} \right) \right] \quad (\text{A.21})$$

A eq. (A.21) (lembrando que  $V(b) - Q = 0$ ) reduz-se a  $\ln(1) = 0$ . Ou seja, no limite  $b$  temos o segundo membro de (A.21) nulo. Devemos obter ainda o terceiro termos, aplicando no limite  $c$ , que resulta,

$$\text{terceiro termo} = c\sqrt{x} \ln \left[ \frac{x + y + \sqrt{x}H(x, y)}{\sqrt{x + y^2}} \right] \quad (\text{A.22})$$

Para obter a solução final do fator de Gamow para a região de separação soma-se os resultados das equações (A.17), (A.20) e (A.22), elimina-se os termos repetidos e dividindo ambos os lados por  $2y$ , obtemos a solução,

$$G_{se} = c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\sqrt{x}}{2y} \ln \left( \frac{\sqrt{x(x+2y-1)} + x + y}{\frac{x}{y} \left[ 1 + \sqrt{x + \frac{x}{y^2}} \right]^{-1} + y} \right) \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$+ c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 - \frac{1}{y}}{\sqrt{1 + \frac{x}{y^2}}} \right)} - \sqrt{\frac{1}{2y} \left( 1 + \frac{x}{2y} - \frac{1}{2y} \right)} \right\}$$

onde  $c_3 = 1.25988372 \sqrt{MeV}$ .

# Apêndice B

## Coeficiente de Transmissão numa Barreira Quadrada

A função de onda é oscilatória fora da barreira e tem características exponenciais na região não-clássica.

Considerando a barreira quadrada

$$V(s) = V_0 \Theta(a - |s|) \quad a > 0, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\Theta(a - |s|)$  é a função degrau de Heaviside, está representada na figura abaixo, faremos uma análise

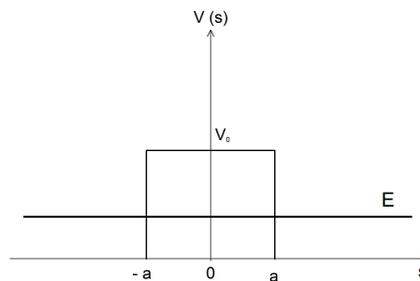


Figura B.1: Barreira de potencial com os pontos de retorno,  $-a$  e  $a$ .

apenas para  $E < V_0$  (ref. [7]). Da equação de Schrödinger, para dentro ( $|s| < a$ ) e fora da barreira ( $|s| > a$ ),

obtém-se as seguintes soluções,

$$\begin{aligned}
 \psi(s) &= Ae^{iks} + Be^{-iks} & s < -a \\
 \psi(s) &= Ce^{-\kappa s} + De^{\kappa s} & -a < s < a \\
 \psi(s) &= Fe^{iks} + Ge^{-iks} & s > a
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

nas quais  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  e  $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ .

Para calcular as constantes  $A, B, C, D, F, G$  igualamos as função de onda e suas derivadas. Em  $s = -a$ :

$$\begin{aligned}
 Ae^{-ika} + Be^{ika} &= Ce^{\kappa a} + De^{-\kappa a} \\
 ik(Ae^{-ika} - Be^{ika}) &= -\kappa(Ce^{\kappa a} - De^{-\kappa a})
 \end{aligned}$$

Em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ e^{-ika} & -e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\kappa a} & e^{-\kappa a} \\ \frac{i\kappa}{k}e^{\kappa a} & -\frac{i\kappa}{k}e^{-\kappa a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Considerando,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

onde

$$M(a) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{i\kappa}{k})e^{\kappa a + ika} & (1 - \frac{i\kappa}{k})e^{-\kappa a + ika} \\ (1 - \frac{i\kappa}{k})e^{\kappa a - ika} & (1 + \frac{i\kappa}{k})e^{-\kappa a - ika} \end{pmatrix}$$

Para  $s = +a$  temos,

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Conectando  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$  obtém-se,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a)M(-a)^{-1} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

com

$$M(-a)^{-1} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \frac{ik}{\kappa}) e^{\kappa a + ika} & (1 + \frac{ik}{\kappa}) e^{\kappa a - ika} \\ (1 + \frac{ik}{\kappa}) e^{-\kappa a + ika} & (1 - \frac{ik}{\kappa}) e^{-\kappa a - ika} \end{pmatrix},$$

temos,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\cosh(2\kappa a) + \frac{i\epsilon}{2} \sinh(2\kappa a)] e^{2ika} & \frac{i\eta}{2} \sinh(2\kappa a) \\ \frac{-i\eta}{2} \sinh(2\kappa a) & [\cosh(2\kappa a) - \frac{i\epsilon}{2} \sinh(2\kappa a)] e^{-2ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

onde os termos  $\epsilon$  e  $\eta$  são representados por,

$$\epsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa},$$

e

$$\eta = \frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa}.$$

Analisando a situação da partícula incidindo pela esquerda, neste caso,  $G = 0$ . A eq. (B.3) é então simplificada para,

$$\begin{aligned} A &= F \left[ \cosh(2\kappa a) + \frac{i\epsilon}{2} \sinh(2\kappa a) \right] e^{2ika} \\ B &= F \left[ -\frac{i\eta}{2} \sinh(2\kappa a) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Definindo a amplitude de transmissão,

$$T(E) \equiv \frac{F}{A} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh(2\kappa a) + (i\epsilon/2) \sinh(2\kappa a)}$$

e, assim o coeficiente de transmissão,

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + (1 + (\epsilon^2/4))\sinh^2(2\kappa a)}, \quad (\text{B.5})$$

$|T(E)|^2$  expressa a probabilidade da partícula tunelar a barreira de potencial.

# Apêndice C

## Determinação de Meias-vidas para o Tunelamento da Barreira Fenomenológica

A equação da meia-vida,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (\text{C.1})$$

sendo o  $\lambda$  dado por,

$$\lambda = \lambda_0 e^{-G}, \quad (\text{C.2})$$

onde  $G$  corresponde ao fator de Gamow e  $\lambda_0$  é dado por,

$$\lambda_0 = \frac{v}{2a} = \left( \frac{Q}{2\mu_0 a^2} \right)^{1/2}. \quad (\text{C.3})$$

Dessa maneira, a meia vida fica,

$$T_{1/2} = \ln 2 \sqrt{2a} \sqrt{\frac{\mu_0}{Q}} e^G. \quad (\text{C.4})$$

Tomando por unidade de massa efetiva a unidade de massa atômica (u) e de energia o MeV, a velocidade

da luz dada por  $c = 3 \times 10^8 m/s \equiv 9 \times 10^{16} fm/s$  e fazendo as seguintes conversões de unidades,

$$u \rightarrow 1.66 \times 10^{-27} Kg$$

$$MeV \rightarrow 1.6 \times 10^{-13} J$$

na equação da meia-vida (C.4), obtém-se o seguinte resultado,

$$T_{1/2} = 1.0 \times 10^{-22} a \sqrt{\frac{\mu_0}{Q}} e^G, \quad (C.5)$$

que pode ser escrita numa forma logarítmica,

$$\tau = \log_{10} T_{1/2} = -22,0 + \log_{10} a + \frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{\mu_0}{Q} \right) + (G_{ov} + G_{se}) \log_{10} e . \quad (C.6)$$

Por conveniência, no decaimento de um próton usamos a seguinte notação,

$$\tau_0 = -22,0 + \log_{10} a + \frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{\mu_0}{Q} \right) = -22,0 + \log_{10} \left[ a \left( \frac{\mu_0}{Q} \right)^{1/2} \right] \quad (C.7)$$

$$\tau_1 = G_{ov} \log_{10} e = c_1 \log_{10} e (c - a) g \sqrt{\mu_0 Q_p} H(x, y). \quad (C.8)$$

$$\tau_2 = G_{se} \log_{10} e = c_3 \log_{10} e Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_p} \right)^{1/2} . F(x, y). \quad (C.9)$$

Nestas expressões as funções  $H(x, y)$  e  $F(x, y)$  foram estabelecidas no apêndice A (eq. A.7) e (A.23) e as constantes  $c_1$  e  $c_3$  estão também lá definidas.

# Apêndice D

## Publicações

Seguem, abaixo, os endereços dos artigos e “proceeding” publicados no desenvolvimento desta dissertação.

Alfa2006

ComAlfa2006

Proton2007

RTFNB2009

RTFNB2010

# Bibliografia

- [1] K. Miernik *et. al.* , Phys. Rev. Lett. **99**, 192501 (2007).
- [2] L. Brillouin, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **183**, 2426 (1926).
- [3] H.A. Kramers, Zeitschrift für Physik **39**, 828840 (1926).
- [4] G. Wentzel, Zeitschrift für Physik **38**, 518529 (1926).
- [5] A. Das, Field Theory: a path integral approach, chapter 7, World Scientific, (1993).
- [6] J.L. Powell, B. Crasemann, Quantum Mechanics, chapter 5, Addison-Wesley Publishing Company Inc, (1965).
- [7] F. Schwabl, Quantum Mechanics, chapter 3, ed. Springer, (2007).
- [8] G. Gamow, Z. Phys. **51**, 204 (1928).
- [9] E. U. Condon, R. W. Gurney, Nature **122**, 439 (1928).
- [10] S. B. Duarte, M. G. Gonçalves, Phys. Rev. C **53**, 2309 (1996).
- [11] M. G. Gonçalves, Modelo de pré-cisão para desintegrações nucleares raras. Tese de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, (1992).
- [12] I. Sick, J. S. McCarthy, R. R. Whitney, Phys. Lett. **64**, 33 (1976).

- [13] W. D. Myers, *Droplet Model of Atomic Nuclei*, New York (1977).
- [14] P. Moller, J. R. Nix, W. D. Myers, W. J. Swiatecki, *At. Data Nucl. Data Table*, **59**, 185 (1995).
- [15] O. A. P. Tavares, S. B. Duarte, O. Rodríguez, F. Guzmán, M. Gonçalves, F. García, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **24**, 1757 (1998).
- [16] B. A. Brown, *Phys. Rev. C* **46**, 811 (1992).
- [17] G. Royer, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **26**, 1149 (2000).
- [18] K. P. Jackson, C. U. Cardinal, H. C. Evans, N. A. Jelley, J. Cerny, *Phys. Lett. B* **33**, 281 (1970).
- [19] J. Cerny, J. E. Esterl, R. A. Gough, R. G. Sextro, *Phys. Lett. B* **33**, 284 (1970).
- [20] K. P. Rykaczewski, *Eur. Phys. J. A.* **15**, 81 (2002).
- [21] M. Karny *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 012502 (2003).
- [22] T. N. Ginter *et al*, *Phys. Rev. C* **68**, 034330 (2003).
- [23] H. Kettunen *et al*, *Phys. Rev. C* **69**, 054323 (2004).
- [24] P. J. Sellin, P. J. Woods, T. Davinson, N. J. Davis, K. Livingston, R. D. Page, A. C. Shotton, *Phys. Rev. C* **47**, 1933 (1993).
- [25] S. Hofmann, W. Reisdorf, G. Münzenberg, F. P. Heberger, J. R. H. Schneider, *Z. Phys. A* **305**, 111 (1982).
- [26] G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, A. H. Wapstra, *Nucl. Phys. A* **729**, 3 (2003).
- [27] D. S. Delion, R. J. Liotta, R. Wyss, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 072501 (2006).
- [28] O. A. P. Tavares, E. L. Medeiros, *Eur. Phys. J. A* **45**, 57 - 60 (2010).
- [29] D. T. Joss *et al*, *Phys. Lett. B* **641**, 34 (2006).

- [30] P. J. Woods, C. N. Davids, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47**, 541 (1997).
- [31] A. A. Sonzogni, *Nucl. Data Sheets* **95**, 1 (2002).
- [32] A. P. Robinson, P. J. Woods, D. Seweryniak, C. N. Davids, M. P. Carpenter, A. A. Hecht, D. Peterson, S. Sinha, W. B. Walters, S. Zhu, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 032502 (2005).
- [33] C. R. Bingham *et al*, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B* **241**, 185 (2005).
- [34] J. C. Batchelder *et al*, *Eur. Phys. J. A* **25**, s. 01, 149 (2005).
- [35] D. N. Basu, P. Roy Chowdhury, C. Samanta, *Phys. Rev. C* **72**, 051601 (R) (2005).
- [36] M. Balasubramaniam, N. Arunachalam, *Phys. Rev. C* **71**, 014603 (2005).
- [37] P. Mergell, Ulf-F. Meißner, D. Drechsel, *Nucl. Phys. A* **596**, 367 (1996).
- [38] G.G. Simon, Ch. Schmitt, F. Borkowski, V.H. Walther, *Nucl. Phys. A* **333**, 381 (1980).
- [39] F. Borkowski, G.G. Simon, V.H. Walther, R.D. Wendling, *Nucl. Phys. B* **93**, 461 (1975).
- [40] I. Sick, *Phys. Lett. B* **576**, 62 (2003).
- [41] K. Melnikov, T. van Ritbergen, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1673 (2000).
- [42] D. S. Delion, R. J. Liotta, R. Wyss, *Phys. Rep.* **424**, 113 (2006).
- [43] E. L. Medeiros, M. M. N. Rodrigues, S. B. Duarte, O. A. P. Tavares, *Eur. Phys. J. A* **34**, 417-427 (2007).
- [44] O. A. P. Tavares, E. L. Medeiros, M. L. Terranova, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **31**, 129 (2005).
- [45] O. A. P. Tavares, M. L. Terranova, E. L. Medeiros, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B* **243**, 256 (2006).

- [46] E. L. Medeiros, M. M. N. Rodrigues, S. B. Duarte, O. A. P. Tavares, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **32**, B23 (2006).
- [47] H. Geiger, J. M. Nuttal, Phil. Mag. **22**, 613 (1911); H. Geiger, Z. Phys. **8**, 45 (1921).
- [48] B. Blank, M. Ploszajczak, Rep. Prog. Phys. **71**, 046301 (2008).
- [49] V. I. Goldansky, Nucl. Phys. **19**, 482-495 (1960).
- [50] J. Giovinazzo *et. al.* , Phys. Rev. Lett. **89**, 102501 (2002).
- [51] M. Pfützner *et. al.* , Eur. Phys. J. A **14**, 279 (2002).
- [52] C. Dossat *et. al.* , Phys. Rev. C **72**, 054315 (2005).
- [53] B. A. Brown, F. C. Barker, Phys. Rev. C **67**, 041304(R) (2003).
- [54] L. V. Grigorenko, M. V. Zhukov, Phys. Rev. C **68**, 054005 (2003).
- [55] L. V. Grigorenko, M. V. Zhukov, Phys. Rev. C **76**, 014008 (2007).
- [56] T. Leite, N. Teruya, A. Dimarco, S. B. Duarte, O. Tavares, M. Gonçalves, Phys. Rev. C **80**, 014606 (2009).
- [57] R. A. Kryger *et. al.* , Phys. Rev. Lett. **74**, 860 (1995); A. Azhari, R. A. Kryger, M. Thoennessen, Phys. Rev. C **58**, 2568 (1998).
- [58] F. C. Barker, Phys. Rev. C **59**, 535 (1999); F. C. Barker, Phys. Rev. C **63**, 047303 (2001).
- [59] G. J. KeKelis *et. al.* , Phys. Rev. C **17**, 1929 (1978).
- [60] D. N. Poenaru, M. Ivascu, A. Săndulescu, W. Greiner, Phys. Rev. C **32**, 572 (1985).