

CBPF-DH-003/87

ZUR THEORIE DER DIELEKTRISCHEN NACHWIRKUNG*

von

F.M. de Oliveira Castro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

*Zeitschrift für Physik, Sonderabdruck 114. Band. 1. und 2. Heft
(Eingegangen am 26. Juni 1939).

Die Entladung eines Kondensators, der Nachwirkung aufweist, verläuft nicht exponentiell. Bei Gültigkeit des Superpositionsprinzips läßt sich für den Spannungsverlauf eine Integro-Differentialgleichung aufstellen. Diese wird integriert unter der Annahme, daß sich die Nachwirkungsfunktion durch den Ausdruck βt^{-n} darstellen läßt.

Einleitung und Zusammenfassung. Der Spannungsverlauf bei der Entladung eines Kondensators, der Nachwirkung aufweist, ist nicht exponentiell und hängt von der Ladedauer ab; nach zeitweiligem Kurzschluß treten wieder Rückstandsladungen auf. Im Anschluß an die formale Theorie von Schweidler ¹⁾ sind diese Vorgänge neuerdings von Gross ²⁾ diskutiert worden. In Analogie zu der einfachen Differentialgleichung des Kondensators ohne Nachwirkung läßt sich nämlich bei Gültigkeit des Superpositionsprinzips für den Kondensator mit Nachwirkung eine Integro-Differentialgleichung aufstellen. Diese ist von Gross näherungsweise gelöst worden und die Lösung gab das beobachtete Verhalten prinzipiell richtig wieder. Der Grad der Näherung ließ sich aber gar nicht übersehen; so blieb die Frage offen, ob noch bestehende Abweichungen zwischen Messung und Rechnung auf Unzulänglichkeiten der Rechnung oder auf Nichtzutreffen ihrer Voraussetzungen beruht.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine strenge Integration der Gleichung der Entladung. Ihre Durchführung liefert einmal eine befriedigende Theorie der Kondensatorentladung; darüber hinaus glauben wir, daß sie einen Beitrag zur Theorie der Volterraschen Integralgleichung darstellt, der auch vom rein mathematischen Standpunkt aus von Interesse ist.

Voraussetzung der Rechnung ist die Wahl einer geeigneten *Nachwirkungsfunktion*. Wir haben für diese hier den Schweidlerschen Ausdruck βt^{-n} gewählt, von dem sich immer wieder gezeigt hat, daß er den Verlauf des Nachladestroms in einem weiten Intervall am besten wiedergibt ³⁾; eventuelle Abweichungen für kleine Zeiten, wie sie Voglis ⁴⁾ festgestellt hat, sind dabei hier ohne Belang.

¹⁾ E. von Schweidler, Ann. d. Phys. **24**, 711, 1907. — ²⁾ B. Gross, ZS. f. Phys. **107**, 217, 1937. — ³⁾ F. Tank, Ann. d. Phys. **48**, 307, 1915; W. Gnann, ZS. f. Phys. **66**, 436, 1930; Phys. ZS. **36**, 22, 1935; F. Seidl, ZS. f. Phys. **91**, 318, 1934; **99**, 695, 1936; A. Wikstrom, Physics **6**, 86, 1935; E. Hippauf, R. Stein, Phys. ZS. **39**, 90, 1938; G. M. Voglis, ZS. f. Phys. **109**, 52, 1938; B. Gross, ebenda **108**, 598, 1938. — ⁴⁾ G. M. Voglis, l. c.

Der *Gang der Arbeit* ist der folgende: Die Entladungsgleichung wird zunächst durch eine einfache Umformung auf die Form einer Volterra'schen Integralgleichung gebracht. Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird angeschrieben und dann die iterierten Kerne explizit berechnet; es gelingt, deren allgemeine Bildungsformel aufzustellen. Damit wird dann, nach einer Integration, die Lösung erhalten als eine im ganzen betrachteten Gebiet konvergente unendliche Reihe. Bei Beschränkung auf kleine Entladezeiten läßt sich die Lösung vereinfachen, denn hier führt der lösende Kern auf eine bekannte Transzendent, die Funktion von Mittag-Leffler¹⁾. Verschiedene Darstellungen dieser Funktion werden angegeben und Näherungsformeln aufgestellt; diese ermöglichen in einigen Spezialfällen sogar eine Aufstellung der Lösung in geschlossener Form. Die Lösung für beliebige Entladezeiten kann dann aus der für kleine Zeiten durch ein Verfahren sukzessiver Approximation erhalten werden. Schließlich wird die hier erhaltene Lösung mit den von Gross (l. c.) angegebenen Formeln verglichen; in dem Bereich, für den diese abgeleitet wurden, erweisen sie sich als geeignete Näherung.

1. *Die Grundgleichung des Problems.* Die Belegungen eines unvollkommenen Kondensators mögen im Augenblick $t = 0$ isoliert werden. Der Spannungsverlauf $U(t)$ ist dann nach Gross (l. c.) zu berechnen als Integral der Gleichung

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} + \int_0^t \frac{dU}{d\tau} \varphi(t - \tau) d\tau + i_0(t) = 0. \quad (1)$$

Hierbei ist C die geometrische Kapazität der Anordnung, R der Ohmsche (End-)Widerstand, φ die Nachwirkungsfunktion und i_0 der Nachladestrom, der von allen Spannungsänderungen bei der Ladung herrührt. Wir beschränken uns auf die beiden besonders wichtigen Fälle der *Entladung* nach einer Ladung, die während der Zeit t_0 mit einer Spannung U_0 stattgefunden hat, und der *Wiederaufladung*, welcher eine vollständige Ladung mit U_0 und dann ein Kurzschluß während der Zeit t_0 vorausgegangen ist. Man kann dann schreiben

$$i_0(t) = \delta U_0 \varphi(t + t_0), \quad (2)$$

$$[U(t)]_0 = U(0). \quad (3)$$

Für die Entladung ist

$$\delta = 1 \text{ und } U(0) = U_0$$

¹⁾ G. Mittag-Leffler, Acta Mathematica **29**, 101, 1905; **42**, 285, 1918.

Es läßt sich dann unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen, auf die wir gleich zurückkommen, zeigen, daß die Reihe der iterierten Kerne

$$\sum_{h=1}^{\infty} K^{(h)}(\tau, t)$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Funktion $S(\tau, t)$, gegen die die Reihe konvergiert, heißt dann der lösende Kern der Integralgleichung.

Der Konvergenzbeweis läßt sich besonders einfach durchführen, wenn in dem Bereich (T)

$$0 \leq \tau \leq t \leq a \quad (a \text{ endlich}),$$

für den die Konvergenz bewiesen werden soll, sämtliche Kerne begrenzt und stetig sind. Die Reihe konvergiert aber auch vielfach dann noch, wenn dem nicht so ist. Ein sehr wichtiger Fall, für den dies gilt, liegt dann vor, wenn $K(\tau, t)$ eine „Volterrasche Funktion der Ordnung α “ ist. Diese wird definiert durch

$$K(\tau, t) = \frac{(t - \tau)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} F(\tau, t). \quad (11)$$

Dabei muß $\alpha > 0$ sein und F stetig in (T) und außerdem $F(t, t) \neq 0$. $\Gamma(\alpha)$ ist die Gammafunktion: $\Gamma(1 + \alpha) = \alpha! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt$. Man sieht, daß für $0 < \alpha < 1$ K unendlich wird in $\tau = t$.

Die Lösung wird gegeben durch

$$\psi(t) = f(t) + \int_0^t f(\tau) S(\tau, t) d\tau. \quad (12)$$

Dabei ist der lösende Kern $S(\tau, t)$

$$S(\tau, t) = \sum_{h=1}^{\infty} K^{(h)}(\tau, t). \quad (13)$$

4. Die allgemeine Lösung der Grundgleichung. Aus (13) ergibt sich die Lösung von (1) durch eine einfache Integration:

$$U(t) = U(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} f(s) S(s, \tau) ds. \quad (14)$$

Die Reihenfolge der Integrationen läßt sich durch Anwendung der bekannten Dirichletschen Formel umkehren. Es folgt

$$\boxed{U(t) = U(0) + \int_0^t G(s, t) f(s) ds} \quad (15)$$

mit

$$G(s, t) = 1 + \int_s^t S(s, \tau) d\tau. \quad (16)$$

Wir nehmen G den lösenden Kern der Grundgleichung.

5. *Die iterierten Kerne.* Wir versuchen nunmehr, die Lösung in expliziter Form zu erhalten. Man sieht zunächst leicht, daß der Kern unserer Integralgleichung die Form (11) hat. Er schreibt sich, wenn man noch setzt

$$\sigma = k\Gamma(p), \quad (17)$$

in der Form

$$K(\tau, t) = \frac{(t - \tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} \lambda [\sigma + \Gamma(p) (t - \tau)^{1-p}]. \quad (18)$$

Wegen $0 < p < 1$ und $\Gamma(p) \neq 0$ ist der Klammerausdruck in obiger Gleichung für $\tau = 1$ verschieden von 0. Schreibt man ihn formal als $F(\tau, t)$, so wird (18) identisch mit (11). Der Kern ist also eine „Volterrasche Funktion der Ordnung p “. Dies bedeutet, daß man unbedenklich die Volterraschen Lösungsmethoden anwenden kann.

Wir notieren noch den Wert eines Integrals, welches bei den folgenden Integrationen benutzt ist. Es ist bekanntlich

$$\int_{\tau}^t (t-s)^{p-1} (s-\tau)^{q-1} ds = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} (t-\tau)^{p+q-1} \quad (19)$$

für sämtliche positiven Werte von p und q .

Hiernit verifiziert man dann leicht, daß ist

$$K^{(1)}(\tau, t) = -\lambda \left[1 + \frac{\sigma}{\Gamma(p)} (t - \tau)^{p-1} \right], \quad (20)$$

$$K^{(2)}(\tau, t) = \lambda^2 \left[\frac{t - \tau}{\Gamma(2)} + \frac{2\sigma}{\Gamma(1+p)} (t - \tau)^p + \frac{\sigma^2}{\Gamma(2p)} (t - \tau)^{2p-1} \right] \quad (21)$$

$$K^{(3)}(\tau, t) = -\lambda^3 \left[\frac{(t - \tau)^2}{\Gamma(3)} + \frac{3\sigma}{\Gamma(2+p)} (t - \tau)^{p+1} + \frac{3\sigma^2}{\Gamma(1+2p)} (t - \tau)^{2p} + \frac{\sigma^3}{\Gamma(3p)} (t - \tau)^{3p-1} \right]. \quad (22)$$

Man sieht nun schon die allgemeine Bildungsformel:

$$K^{(h)}(\tau, t) = (-\lambda)^h \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} \frac{\sigma^r (t - \tau)^{h-r+p-1}}{\Gamma(h-r+rp)}. \quad (23)$$

6. *Der lösende Kern der Volterraschen Gleichung in expliziter Form.* Durch Substitution von (23) in (13) erhält man sofort

$$S(\tau, t) = \sum_{h=1}^{\infty} (-\lambda)^h \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} \frac{\sigma^r (t - \tau)^{h-r+rp-1}}{\Gamma(h-r+rp)}. \quad (24)$$

7. Der lösende Kern der Grundgleichung in expliziter Form. Indem man in (16) nunmehr $S(\tau, t)$ durch seinen Wert (24) ausdrückt, folgt

$$G(s, t) = 1 + \int_s^t \sum_{h=1}^{\infty} (-\lambda)^h \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} \frac{\sigma^r (\tau - s)^{h-r+rp-1}}{\Gamma(h-r+rp)} d\tau. \quad (25)$$

Man kann die Integration Glied für Glied ausführen und erhält

$$G(s, t) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} (-\lambda)^h \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} \frac{\sigma^r (t-s)^{h-r+rp}}{\Gamma(h-r+rp+1)}. \quad (26)$$

Damit ist die Lösung unseres Problems gelungen.

Die Diskussion der Form dieser Lösung und ihre Anwendung zur Durchführung numerischer Rechnungen ist im allgemeinsten Fall umständlich. Wir wollen hier zunächst zwei besonders wichtige Fälle bis zur Erhaltung numerisch bequemer Formeln weiter behandeln.

8. Fall a: $R = \infty$; sehr kleine Lade- oder Entladezeiten. Wenn die Lade- und Entladedauer sehr klein ist, so überwiegt erfahrungsgemäß zunächst über ein beträchtliches Zeitintervall die anomale Stromkomponente gegenüber der Ohmschen. Man kann also in diesem Intervall U/R gegenüber $i_0(t)$ vernachlässigen. Formal geschieht dies, indem man $R = \infty$ setzt oder in der Schreibweise der Gleichung (26)

$$\lambda = 0. \quad (27)$$

Für diesen Fall vereinfacht sich Gleichung (26) sehr. Man schreibt die Summe in einer Form, die erkennen läßt, welche Glieder λ enthalten:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} \frac{[-\lambda(t-s)]^{h-r} [-\lambda\sigma(t-s)]^r}{\Gamma(h-r+rp+1)}.$$

Nach (9a), (9c) und (17) ist

$$\lambda\sigma = \frac{\beta}{C} \Gamma(p), \quad (28)$$

also unabhängig von λ . Nur solche Glieder bleiben bestehen. Es sind also diejenigen, für die gilt

$$h = r.$$

Mit der Abkürzung

$$x = \frac{\beta}{C} \Gamma(p) (t-s)^p \quad (29)$$

wird

$$G = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-x)^h}{\Gamma(hp+1)}. \quad (30)$$

Dieser Ausdruck ist bekannt. Er ist gleich der Funktion von Mittag-Leffler (l. c.), die nach Wiman und Buhl¹⁾ definiert ist durch

$$E_p(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(p+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2p+1)} + \cdots + \frac{x^h}{\Gamma(hp+1)} \cdots \quad (31)$$

Somit wird

$$G(x) = E_p(-x) \quad (32)$$

und die Lösung ist

$$U(t) = U(0) + \int_0^t E_p \left[-\frac{\beta}{C} \Gamma(p) (t-s)^p \right] f(s) ds \quad (33)$$

mit

$$f(s) = -\frac{i_0}{C}. \quad (34)$$

Bevor die Methoden der Berechnung von E besprochen werden, soll noch ein zweiter Sonderfall behandelt werden, welcher auf formal denselben Ausdruck führt wie der obige.

9. Fall b: $[U - U(0)]/R = 0$; Verhalten kurze Zeit nach Öffnen. Wir schreiben in Gleichung (1) statt U/R den Ausdruck $U/R - U(0)/R + U(0)/R$. $U(0)/R$ ist konstant, wir können es mit dem rechten Glied zusammenfassen, dies ändert dann nur den Wert von $f(s)$. Beschränkt man sich nun auf so kleine Zeiten, daß man $\frac{U - U(0)}{R}$ noch vernachlässigen kann, so fällt man formal auf Fall **a** zurück. Die Lösung ist also wieder durch Gleichung (33) gegeben. Nur ist jetzt

$$f(s) = -\left(\frac{U(0)}{RC} + \frac{i_0(s)}{C} \right). \quad (35)$$

10. Zur Berechnung der Funktion von Mittag-Leffler. Für einige spezielle Werte führt E_p auf einfache Ausdrücke. So ist

$$E_1(-x) = e^{-x}, \quad (36)$$

$$E_{0,5}(-x) = e^{-x^2} [1 - \Phi(x)], \quad (37)$$

wobei $\Phi(x)$ das Gaußsche Fehlerintegral ist:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} e^{-s^2} ds.$$

¹⁾ A. Wiman, Acta Mathematica **29**, 191, 217, 1905; A. Buhl, Séries analytiques. Sommabilité. Memorial des Sciences Mathématiques VII. Paris, Gauthier-Villars, 1925.

Ferner ist

$$E_0(-x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{für } |x| < 1. \quad (38)$$

Für $|x| > 1$ ist die Funktion E_0 nicht definiert. Die Kurve $1/1+x$ scheint aber auch hier noch eine Grenzkurve darzustellen für die Funktion E_p , wenn $p \rightarrow 0$ geht. Wir schließen dies allerdings nicht auf Grund eines strengen Beweises, sondern infolge numerischer Übereinstimmung, wie wir gleich zeigen werden.

Vom experimentellen Standpunkt aus sind gerade kleine Werte von p interessant, von der Größenordnung 0,1. Wir haben daher die Funktion $E_{0,1}$ in dem in Frage kommenden Bereich von x berechnet. Für $x \leq 1$ kann die Berechnung mit der Reihe (31) geschehen. Für $x > 1$ ist dies aber sehr mühsam. Man findet jedoch asymptotische Formeln, welche schon für Werte x von etwa 2 ab sehr bequem sind. Die Ableitung soll an anderer Stelle erfolgen. Es ist, mit $p = 1/m$ und für m geradzahlig:

$x \gg 1$:

$$E_p(-x) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{r+1}}{\Gamma(1-r/m)} x^r \left(1 - \frac{r/m}{x^m} + \frac{r/m(r/m+1)}{x^{2m}} - \dots \right) \quad (39)$$

Man sieht leicht, daß die Formel meist sehr rasch konvergiert. Im allgemeinen ist schon das Glied mit x^m gegen 1 zu vernachlässigen. Tabelle 1 gibt die so berechneten Werte.

Für die weitere Durchführung der Rechnung, welche noch eine Integration über E erforderlich macht, wäre es wünschenswert, eine einfachere, wenn auch nur näherungsweise gültige Darstellung der Funktion E zu finden. In Anbetracht der für $p = 0$ gültigen Formel (38) liegt es nahe, für kleine p den verallgemeinerten Ansatz

$$E_p(-x) = \frac{1}{1+ax} \quad (40)$$

zu versuchen. Man kann dann a etwa so bestimmen, daß die Steigung im Ursprung richtig wiedergegeben wird. Wegen $\Gamma(1+p) = p\Gamma(p)$ folgt aus (31) dann $a = 1/p\Gamma(p)$ und somit hier

$$p \ll 1: \quad E_p(-x) = \frac{1}{1+x/p\Gamma(p)}. \quad (41)$$

Die so berechneten Werte finden sich auch in Tabelle 1. Und zwar ist die Rechnung für $p = 0,1$ durchgeführt. Man sieht, daß die Übereinstimmung sehr gut ist. Sie sinkt mit wachsendem x . Auf Grund der Formel (39) kann man übrigens hier die Abweichung schätzen. Für $x \rightarrow \infty$ ist E_p in

erster Näherung gegeben durch $1/I(1-p)x$, während die Näherungsformel (41) den Ausdruck $I(1+p)/x$ liefert. Für sehr kleine p -Werte ist der Unterschied bedeutungslos.

Tabelle 1.

x	$E_{0,1}(-x)$	$1/1 + 1,051 x$	$E_{0,5}(-x)$	x	$E_{0,1}(-x)$	$1/1 + 1,051 x$	$E_{0,5}(-x)$
0,0	1,000	1,000	1,000	2,0	0,3200	0,3224	0,2655
0,2	0,8259	0,8264	0,8090	4,0	0,1901	0,1922	0,1370
0,4	0,7031	0,7040	0,6708	6,0	0,1353	0,1369	0,0940
0,6	0,6118	0,6133	0,5678	8,0	0,1049	0,1063	0,0650
1,0	0,4856	0,4876	0,4276	10,0	0,0857	0,0869	0,0564

Falls man die Funktion E durch den Ausdruck (41) ersetzen kann, so ist die Rechnung weiter sehr vereinfacht.

11. *Expliziter Ausdruck der Lösung für kleine Entladezeiten im Grenzfall vollständiger Ladung.* Wir nehmen jetzt $p \ll 1$ an und betrachten den Fall der Entladung nach vollständiger Ladung. Dann ist also, wenn man sich auf kurze Entladezeiten beschränkt, U gegeben, nach (35), (33) und (40)

$$U(t) = U_0 - \frac{U_0}{RC} \int_0^t \frac{ds}{1 + \frac{\beta}{pC} s^p}. \quad (42)$$

Ist p darstellbar als $1/m$ mit geradzahligem m , so kann man das Integral in (42) geschlossen auswerten. Mit

$$A = \frac{\beta}{pC} \quad (43)$$

schreibt sich das Integral als

$$J = \frac{1}{p A^m} \int_0^{At^p} \frac{u^{m-1}}{1+u} du. \quad (44)$$

Durch Ausdividieren und Integrieren folgt schließlich

$$J = \frac{1}{p A^m} \left[\frac{A^{m-1} t^{1-p}}{m-1} - \frac{A^{m-2} t^{1-2p}}{m-2} + \dots + A t^{1-(m-1)p} - \ln(1 + A t^p) \right]. \quad (45)$$

Damit ist dieser Fall vollständig gelöst.

12. *Eine Lösung durch sukzessive Näherung für beliebige Entladezeiten.* Es liegt nahe, von der Lösung (33) ausgehend eine Entwicklung durch sukzessive Näherungen zu finden. Man setzt dazu also an

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varrho^i U_i, \quad (46)$$

wobei $\varrho = 1/RC$ ist. Einsetzen in die Grundgleichung und ordnen ergibt im Fall $i_0 = 0$ ¹⁾

$$\sum_{i=1}^3 \varrho^i \frac{dU_i}{dt} + \sum_{i=1}^{\infty} \varrho^i \frac{1}{C} \int_0^t \frac{dU_i}{d\tau} \varphi(t-\tau) d\tau = - \sum_{i=1}^{\infty} \varrho^i U_{i-1}. \quad (47)$$

Durch Gleichsetzen der Glieder mit gleichen Potenzen in ϱ erhält man also Rekursionsformeln. Es wird, entsprechend der Lösung (33), da man ja nun die rechten Seiten als bekannte Funktionen in t ansehen kann,

$$U_i(t) = (-1)^i \int_0^t E_p(t-s) U_{i-1}(s) ds. \quad (48)$$

Man kann die Konvergenz dieser Reihe und damit die Tatsache, daß sie wirklich eine strenge Lösung darstellt, beweisen, indem man wie üblich jedes Glied majoriert und zeigt, daß die so erhaltene Reihe noch konvergiert.

Diese Methode gestattet nunmehr eine Konstruktion der Lösungskurven. Natürlich ist die Ausführung immer noch sehr zeitraubend, denn die Integrationen können nur graphisch ausgeführt werden, und wegen des Arguments $(t-s)$ unter dem Integralzeichen ist für jeden Punkt, bei den höheren Näherungen, eine neue Kurve erforderlich.

13. Vergleich der strengen Lösung mit den von Gross angegebenen Ausdrücken. Gross hat, wie eingangs erwähnt, eine Näherungslösung der Gleichung (1) erhalten unter der Annahme, daß $dU/d\tau$ sehr langsam veränderlich sei gegen $\varphi(t-\tau)$ und so vor das Integral gezogen werden könne. Es folgt dann, in unserer Bezeichnungsweise,

$$U(t) = U_0 \exp. \frac{1}{U_0} \int_0^t \frac{f(s) ds}{1 + \frac{\beta C}{p} s^p}. \quad (49)$$

¹⁾ Anmerkung bei der Korrektur. Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da die Kurven für beliebiges $i_0(t)$ hieraus abgeleitet werden können. Bezeichnet U_1 den Spannungsverlauf im obigen Fall, U_2 den bei Entladung nach beliebiger Ladedauer t_0 und U_3 den bei einer Wiederaufladung nach einem t_0 dauernden Kurzschluß, so gilt nämlich nach Gross, wie in einer folgenden Arbeit gezeigt wird:

$$U_3(t) = U_1(t) - U_2(t),$$

$$U_3(t) = U_1(t) + \frac{RC}{U_0} \int_0^t \frac{dU_1(\tau)}{d\tau} i_0(t-\tau) d\tau.$$

In den beiden *Sonderfällen* und für $p \ll 1$ ließ sich die strenge Lösung in der Form schreiben

$$U(t) = U_0 + \int_0^t \frac{f(s) ds}{1 + \frac{\beta C}{p} (t-s)^p}. \quad (50)$$

Dies hat schon die Form der Gleichung (49). Eine erste Bedingung dafür, daß die Näherung gültig ist, wird also durch die Forderung $p \ll 1$, oder $n \simeq 1$, dargestellt. Das entspricht aber gerade der Annahme.

Wir wollen nun die Lösungen genauer vergleichen.

a) Im Fall sehr großer Ladezeiten und so kleiner Entladezeiten, daß man in (49) bei dem linearen Glied abbrechen kann, sind die beiden Gleichungen identisch. Denn hier ist, nach (35), $f(s) = -U_0/RC = \text{const}$, und damit kann man in (50) $(t-s)$ durch s ersetzen.

b) Für beliebige Ladezeiten und kleine Entladezeiten unterscheiden sich die Lösungen dadurch, daß in der Näherungslösung statt $(t-s)^p$ der Ausdruck s^p steht. Solange aber p sehr klein und $(t-s)^p$ also langsam veränderlich ist, wird hierdurch kein wesentlicher Fehler bedingt werden.

Im *allgemeinen Fall* erhielten wir die Lösung in Form der Gleichung (48). Ersetzt man hier $(t-s)$ durch s , so läßt sich die Summe leicht auswerten und man erhält gerade Gleichung (49). Hinsichtlich der Näherung gilt also das unter b) Gesagte.

Wir schließen somit, daß die Grosssche Lösung im allgemeinen gut brauchbar ist und dann den Vorzug großer Einfachheit besitzt. Die aus ihr gefolgerten Aussagen, besonders über das Verhalten bei sehr kleinen Entladezeiten, bleiben streng bestehen.

Herrn Dr. B. Gross danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für wertvolle Hinweise.

Rio de Janeiro, Instituto de Eletrotécnica da Escola Nacional de Engenharia, Mai 1939.