CBPF-CS-001/03

Algumas reflexões sobre a natureza das teorias físicas em geral e da mecânica estatística em particular

Constantino Tsallis

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF/MCT
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Dedicado ao meu grande amigo Silvio Salinas quem, com ceticismo oportuno, civilizado e aberto, tem me estimulado empaticamente ao longo dos anos a explorar caminhos de compreensão, e consequentemente de persuasão, da mecânica estatística dita "não extensiva".

Não existe procedimento lógico-dedutivo que permita formular — e propor — uma nova teoria física ou uma generalização de uma teoria física pré-existente. Isto acontece através de metáforas — "a única coisa que não pode ser aprendida dos outros" na visão aristotélica [1] —, indução incompleta, e outros caminhos tortuosos do intelecto humano. É conhecido o caminho metafórico que levou Erwin Schröedinger a formulação de sua célebre equação partindo da ótica física.

A veracidade e persistência das teorias físico-matemáticas, de *todas* as teorias físico-matemáticas, é fugaz, efêmera, ilusória, como cabe a natureza humana de quem as formula, quem as prolonga e enriquece, quem as usa, quem acredita entendê-las. Esta constatação pétrea aplica-se a $F = ma$, formulada por Isaac Newton na segunda metade do século XVII, e em menos de 250 anos generalizada por Albert Einstein, na sua teoria da relatividade restrita, por sua vez novamente generalizada, dez anos depois, na sua teoria da relatividade geral. Aplica-se as equações de James Clerk Maxwell para o eletromagnetismo. E também aplica-se a pedra angular da mecânica estatística de Ludwig Boltzmann e Josiah Willard Gibbs, $S = -k\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i$ (na sua forma discreta), e seu célebre caso particular $S = k \ln W$, escrito na lápide do túmulo de Boltzmann no Cemitério Central de Viena.

Apesar desta sua fragilidade "genética", os físicos — virtualmente todos — temos um sentimento íntimo enorme de plausibilidade epistemológica quando pensamos nestas equações. Por quê? Creio que seja isto conseqüência de dois fatores. Primeiro, sua beleza matemática incontestável. Segundo, a quantidade abrumadora de verificações experimentais em situações ubíquas. Estas equações são, deste modo "divino", — e somente deste modo! —, *eternas*, isto é válidas em todo tempo. São também *universais*, no sentido de serem válidas em todo lugar. Mas a palavra "universal" tem também uma outra acepção, a de serem válidas *para todos os casos.* Neste sentido, reconhecidamente as citadas equações *não são universais.* É, por exemplo, notório que $F = ma$ falha para massas tão pequenas quanto a do elétron (onde a mecânica quântica substitue a newtoniana), nem se aplica para velocidades próximas à da luz no vácuo (onde, em outro sentido, é a mecânica relativista a que substitue a newtoniana). Sem falar nos fenômenos associados a massas pequenas se movendo a velocidades altas, onde é preciso simultaneamente implementar *ambas* generalizações, isto é, a mecânica quântica relativista!

Toda construção intelectual humana rege-se essencialmente por estas considerações. A genial descoberta de Boltzmann, condensada na sua expressão matemática da entropia, abriu para a humanidade a maravilha das conexões quantitativas do mundo microscópico com o mundo macroscópico. Mesmo assim, não saberia furtar-se ao seu sino, isto é, o de *não ser aplicável em todos os casos*! Cabem, portanto, algumas perguntas elementares: *Quando é adequado usar a entropia de Boltzmann-Gibbs?* E, quando seu uso for inadequado, *o que usar no seu lugar?* Sendo humanamente impossível a resposta geral a esta última pergunta, convém substituí-la por uma mais modesta: *Naqueles infinitos casos para os quais a entropia de Boltzmann-Gibbs se mostrar por ventura inadequada, tem alguns para os quais possa ser formulado um substituto adequado?* Para estes casos ou, melhor, esta classe de casos, *qual seria a expressão de entropia a ser usada no sentido da física teórica?* Para que a resposta seja epistemologicamente satisfatória no sentido da ciência física tal como a entendemos atualmente, é necessário que cumpra duas exigências. A primeira é que ela seja *única*, isto é, que, dadas *todas* as características intrínsecas e extrínsecas de um sistema qualquer pertencente a classe visada, tenhamos uma única expressão matemática (ou um único conjunto de expressões matemáticas), que nos leve, por procedimentos lógico-dedutivos, a uma única predição teórica. A segunda é que suas predições quantitativas recebam o veredicto favorável da *verificação experimental ou observacional* com sistemas naturais ou artificiais.

Sejamos agora mais específicos, e focalizemos a mecânica estatística, esta interessante mistura de *mecânica* e *teoria de probabilidades*, esta mistura de *energia* (o mundo das possibilidades) e de *entropia* (o mundo das probabilidades), esta mistura do *sistema físico* com a *informação* — "antropomórfica" diria Edwin Thompson Jaynes — sobre ele.

Quando é útil usar $S_{BG} = -k \sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i$ para descrever quantitativamente fenômenos naturais e artificiais? (BG refere a Boltzmann-Gibbs). Tudo indica que a resposta correta é: "Quando o sistema possui uma dinâmica microscópica que, se isolado, o leva rapidamente a ocupar com igual probabilidade praticamente todas as regiões accessíveis de seu espaço de fases dada a informação macroscópica que possuímos (sobre o sistema). Por *igual probabilidade* entendemos que passa tempos semelhantes em regiões do espaço de fases de (hiper)volumes semelhantes." Para um sistema seguindo as leis da mecânica clássica, isto acontece quando ele possui expoentes de Lyapunov positivos, o que garante rápida "mixagem" ("mixing"), essencialmente quando o sistema é *ergódico*.

E se o sistema não for assim? Se o sistema tiver uma dinâmica microscópica que o força a "viver" tempos enormes, ou para sempre, em regiões contidas de modo não trivial no seu espaço de fases, por exemplo em regiões com estrutura (multi)fractal, *qual expressão entrópica utilizar?* A resposta correta é obviamente não trivial. A única certeza que temos é que ela deve conter a expressão de BG como caso particular, pois uma ocupação geométrica *euclidiana* do espaço de fases é um caso particular de ocupação geométrica *tout court*. Trata-se portanto de uma *generalização* e não de uma *alternativa*. O problema reside obviamente no fato que qualquer função matemática admite *infinitas* generalizações.

Entretanto, para uma ocupação geométrica hierárquica deste tipo (ainda não totalmente caracterizada, mas que parece ser a chamada "scale-free network"), formulei em 1985 e publiquei em 1988 [2] (ver também [3, 4]) uma proposta de generalização da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, atualmente conhecida como "mecânica estatística não extensiva". Esta proposta está baseada na entropia $S_q = k[1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q]/(1-q)$ ($q \in \mathcal{R}$), que reproduz S_{BG} no limite $q \to 1$. Obviamente, esta proposta não está completa nem é totalmente operacional *a menos que se diga a priori qual valor de q deve ser usado para tal o qual sistema em tais ou quais condições.* E hoje claro que o valor de q está univocamente determinado pela dinâmica microscópica do sistema, consistentemente com a crítica feita por Einstein à entropia de Boltzmann [5], e comentada por Eddie G.D. Cohen [6, 7]. Mais ainda, sabe-se que tem um valor de q para as propriedades ligadas à sensitividade às condições iniciais, chamado q_{sen}, e um outro ligado às propriedades de relaxação, chamado q_{rel} (presumivelmente ligado à probabilidade de ocupação no estado estacionário, que generaliza o familiar conceito de equilíbrio térmico na mecânica estatística de BG, para a qual $q_{sen} = q_{rel} = 1$, coincidência esta — de dois conceitos essencialmente diferentes — que presumivelmente explica freqüêntes confusões no entendimento de físicos). Já se conhecem estes valores de q para vários sistemas dinâmicos não lineares. Por exemplo, para o limiar do caos do mapa logístico temos [8, 9, 10, 11] $q_{sen} = 0.2444877013412820 66...$, e $q_{rel} = 2.4...$ [12, 13].

En passant, este exemplo, e tantos outros existentes na literatura, fazem com que a declaração "It's just mindless curve-fitting"de Itamar Procaccia, reportada pelo jornalista Adrian Cho [14], seja de uma triste inexatidão, fruto de uma análise científica leviana ou de sentimentos desencontrados, ou de ambos. Analogamente a Procaccia, também Roberto Luzzi e colaboradores [15] ignoram (ou desconsideram) os vários casos já existentes na literatura para os quais q é calculado *a priori*. Cometendo a mesma grave omissão, concluem semelhantemente: "These entropies produce what can be called unconventional statistics, which are useful for fitting purposes (they depend on adjustable parameters). “Estas afirmativas levam, como veremos em breve, estes autores a afirmar que S_q não é, nem pode ser, uma entropia física. Sem dúvida surprende um pouco ler que colegas físicos possam, ao menos aparentemente, considerar que, quando as expressões matemáticas da física teórica contém parâmetros não universais, elas são suspeitas de não serem “físicas”. Pergunto-me como dever-se-ia então pensar fenômenos de deflexão de partículas carregadas na presença de campos elétricos, cujo trajetoria reconhecidamente depende da massa M e da carga Q da partícula. Ou como dever-se-ia pensar o fato de que, na teoria de fenômenos críticos, os expoentes críticos, que conhecidamente caracterizam as classes de universalidade, dependem da dimensão do espaço d assim como da dimensão n do campo nele definido. Esta última analogia é, como esperado e de fato, muito próxima ao que acontece com q, como provado por Fulvio Baldovin e Alberto Robledo [10, 11] para mapas unidimensionais unimodais no quadro do grupo de renormalização de Feigenbaum [16]. Nestes casos q depende da potência z de inflexão do mapa.

No quadro das reflexões epistemológicas aqui apresentadas, convém analizar outro aspecto desta generalização da mecânica estatística de BG (isto e, $q = 1$) que também provoca afirmativas veementes (mas cujo grau de veracidade não necessariamente está — note-se — correlacionado com o grau de veemência). Isto tem a ver, como já aventado, com a “fisicalidade” da entropia S_q. Isto é, se se trata de uma entropia “física” ou de um “truque” conveniente. Esta questão tem de fato relação com a do parágrafo anterior, isto é, se q pode ser considerado um parâmetro “físico”, ou se não é mais do que um parâmetro de ajuste, sem qualquer conteúdo físico ou geométrico relevante. Me seja permitido começar dizendo que certas facetas de tal discussão carecem, na minha opinião, de interesse científico profundo. Vejamos um exemplo. Ptolomeu e seus seguidores usavam um número cada vez maior de epiciclos (círculos) para “explicar”e, sobretudo, prever as órbitas dos planetas. Kepler substituiu as órbitas circulares por órbitas elípticas, com o sucesso magistral que lhe conhecemos. A elipse contém o círculo como um caso particular, aquele de excentricidade nula. É hoje sabido, através da transformada de Fourier, que uma órbita eliptica pode ser pensada como uma série *infinita* de epiciclos. Quem somente quiser trabalhar com círculos, figura que os gregos consideravam “perfeita”, poderá fazer boa astronomia também, *desde que considere infinitos círculos para cada órbita planetária*. Quem quiser usar do “truque”de Kepler, e utilizar uma *única* elipse, também está epistemologicamente “autorizado”a fazê-lo assim. Ambos chegarão ao mesmo resultado. Entretanto, é possível — até provável — que o astrônomo “kepleriano”chegue consideravelmente *mais rápido*, e com uma visão geométrica e dinâmica *mais abrangente*, do que o astrônomo “ptolemaico”!

Para esclarecer que tipo de afirmativas são estas que qualifiquei de “veementes”, as ilustrarei fazendo novamente uso das asserções de Luzzi e colaboradores. Escrevem eles

[15] "...what is called "Tsallis entropy", which has been wrongly supposed to be the physical entropy of the natural world... . ... it is utterly wrong to identify Harvda-Charvat-Tsallis "entropy"with the physical entropy of systems in nature". Seria sem dúvida de um valor deslumbrante saber o procedimento — se ele existir — que permite a físicos afirmarem categoricamente o que é *a priori* correto ou errado para "entender"o mundo natural, além da necessaria consistência lógico-matemática das manipulações teóricas, das indispensáveis verificações experimentais-observacionais, e de algumas outras exigências epistemológicas tais como a falseabilidade de Karl Popper. Houve, na história da humanidade, vários cientistas que recusaram veementemente o uso de qualquer órbita celestial que não fosse baseada em círculos. Houve também cientistas como Ernst Mach e Wilhelm Ostwald que contestaram duramente as idéias de Boltzmann. Relata Arnold Sommerfeld o acontecido em Lubeck em 1895 durante um debate aberto: "... Boltzmann was seconded by Felix Klein. The battle between Boltzmann and Ostwald resembled the battle of the bull with the supple fighter. However, this time the bull was victorious .... The arguments of Boltzmann carried the day. We, the young mathematicians of that time, were all on the side of Boltzmann ... ."[17]. Creio que é com grande clarividência que o físico e jornalista científico Marcelo Gleiser escreve " Verdade, mesmo nas ciências exatas, é um conceito que exige muito cuidado. Em princípio, não há uma verdade final, uma teoria "perfeita"do mundo. O que existe são aproximações, algumas mais precisas do que outras, modelos matemáticos que descrevem os fenômenos que observamos na natureza."[18]

Espero ter ilustrado nestes exemplos a razão de minha afirmativa de que "certas facetas"não são tremendamente interessantes desde o ponto de vista de uma teoria física, mesmo decididamente sendo-o desde o ponto de vista humano, social e histórico. Tem outros aspectos que são, entretanto, de capital relevância científica. Mas antes de abordá-los, convém mencionar uma questão histórica que, mesmo menor em conteúdo filosófico, parece-me oportuna na presente ocasião, pois dá substância á questão cientificamente mor que nos resta por explorar nesta breve resenha em torno da mecânica estatística e das teorias físicas em geral.

Existem na literatura de cibernética, teoria de controle, teoria de informação, processamento de imagens e outras disciplinas científicas e tecnológicas, dúzias de formas entrópicas, talvez mais de trinta na data de hoje. Fui tomando conhecimento ao longo dos anos de várias delas. A maioria, mas não todas, contém a entropia de Boltzmann-Gibbs como caso particular. A primeira generalização da qual tomei conhecimento foi de fato a entropia de Renyi [19], $S_q^R = [\ln \sum_{i=1}^W p_i^q]/(1-q)$; ela é uma função monótona crescente de S_q. Acho engraçado o fato de que tomei conhecimento dela precisamente através dos dois Referees que analizaram meu trabalho de 1988 [2]. Eu a tinha por acaso redescoberto independentemente neste meu trabalho, tendo inclusive indicado sua conexão com S_q. A menção de Renyi foi, se me lembro bem, a única exigência de ambos Referees para a aceitação, no Journal of Statistical Physics, pelo seu Editor Joel Lebowitz. A segunda generalização da qual tomei conhecimento foi a de Daroczy de 1970 [20]. Fui alertado, creio que em torno de 1989-90, sobre sua existência...precisamente por Silvio Salinas! (quem a descobriu em um artigo de revisão de Wehrl [21] na Biblioteca de Física da Universidade de São Paulo). A forma funcional coincide com a de S_q. Ela já é citada no trabalho com Evaldo Curado em 1991 [3]. Algum tempo depois, um colega dos Estados Unidos, Richard N. Silver, foi convidado ao Brasil por Sylvio Goulart Rosa Jr., e passou alguns dias no CBPF trabalhando comigo em uma q-generalização da equação de Schröedinger (generalização que efetivamente fizemos, mas jamais publicamos por não entender minimamente a que correspondia fisicamente!). De volta a sua instituição, Los Alamos National Laboratory, achou, e me comunicou, que existia uma publicação ainda mais antiga que a de Daroczy, que continha (a menos do fator multiplicativo) a mesma forma funcional! Esta publicação é de autoria de Harvda e Charvat [22] e é de 1967. Daroczy não a cita, muito provavelmente por total desconhecimento, apesar de eles terem trabalhado na mesma área. Ela foi citada por mim a primeira vez em [23], e ocasionalmente desde então ... como agora! Alguns anos depois, tomei ainda conhecimento, já não me lembro como, do trabalho (em checo) de 1968 de Vajda [24], que também estudou a forma funcional de S_q; ele cita Harvda e Charvat. Umas 20-25 destas formas entrópicas podem ser achadas em [29]. As numerosíssimas conexões entre todas estas formas não tem sido jamais estabelecidas no meu conhecimento. Creio que por uma boa razão: além de extremamente penoso, seria tal trabalho muito provavelmente estéril! Resta entretanto que, no melhor do meu conhecimento, inexiste qualquer tentativa anterior à de 1988 [2] de propor a generalização da própria mecânica estatística de BG e de sua conexão com a termodinâmica, com base em alguma destas múltiplas formas entrópicas generalizadas. Muito particularmente, até dois ou três anos atrás, nem sequer com base na hoje bastante conhecida e utilizada (na área de caos) entropia de Renyi tinha sido cogitada tal generalização. Creio que a primeira tentativa essencialmente estruturada tenha sido a iniciativa de Ervin K. Lenzi [25], doutorando meu na época. (Há de se distinguir claramente uma proposta de generalizar a forma funcional da entropia de BG, de um emprendimento consideravelmente maior, qual seja uma proposta de generalizar a própria mecânica estatística de BG, e de sua conexão com a termodinâmica.).

Estes meandros de descobertas e redescobertas são mais comuns em ciência do que normalmente se pensa. A celebérrima distribuição dita “normal”foi publicada pela primeira vez por Abraham de Moivre em 1733, redescoberta por Pierre Simon de Laplace em 1774, novamente redescoberta por Robert Adrain em 1808, e finalmente redescoberta por Carl Friedrich Gauss em 1809 [26]. Ela é freqüentemente chamada de “Gaussiana”pois foi Gauss quem fez a conexão com a teoria de erros, causando grande impacto entre os cientistas experimentais daquela e de todas as épocas. Similarmente, Csiszar afirma [27] que a entropia de Renyi foi primeiramente descoberta por Schutzenberger em 1954 [28].

Esta digressão histórica nos leva curiosamente a uma questão central da mecânica estatística: já que não é possível generalizar através de procedimentos lógico-dedutivos a entropia e a mecânica estatística de BG, *quais propriedades matemáticas seria interessante preservar na generalização metafórica deste exitoso formalismo físico, de modo de ter chance de encontrar utilidade e uso para o estudo de sistemas naturais e artificiais?* Isto é, *que espera-se de uma forma entrópica para ser qualificada, pelos físicos, como uma entropia "física"?* Desde já, a aceitação coletiva de uma teoria física pela comunidade científica só advém *a posteriori* de verificações experimentais-observacionais importantes ou em número abrumador, ou ambos. Mas ainda, a questão a qual desejamos responder é: *quais propriedades matemáticas aumentam a chance a priori disto vir a acontecer?* É neste ponto onde intervém uma das facetas mais criativas da ciência. Eu, pessoalmente, sempre tenho usado neste ponto crucial a *beleza* lógica-estética como guia principal para aferir o "candidato". Neste ponto, no que se refere à entropia e à mecânica estatística, não posso de fato fazer muito além do que relatar aquelas propriedades da entropia de BG que intuitivamente me parecem essênciais para se ter uma forma de termodinâmica que, para uma classe relevante de *estados estacionários*, reflita a realidade física de modo semelhante a como a teoria de BG reflete um estado estacionário muito peculiar, aquele que não possui história (nem passada nem futura), e que é comumente denominado de *equilíbrio térmico*. Tem — é claro — aquelas propriedades triviais que todas as formas entrópicas satisfazem. Estas incluem a positividade e a extremização sob equiprobabilidade. As determinantes são outras, evidentemente. Eu privilegio três: *concavidade*, *estabilidade (ou robustez experimental)*, e *finitude da produção de entropia por unidade de tempo*. A entropia S_{BG} satisfaz todas três. A entropia S_q *também* ($\forall q > 0$) (ver [30, 31, 32] por exemplo). A dificuldade para satisfazer simultaneamente estas três propriedades pode ser avaliada pelo fato de que a entropia de Renyi não satisfaz *nenhuma* delas para *todo* valor de $q > 0$. *Concavidade* tem a ver com a estabilidade termodinâmica do sistema, no fundo sua própria existência como tal por um lapso de tempo significativo (e possível que, sem a concavidade, os objetos e pessoas não teriam sequer nome!). *Estabilidade* tem a ver com a reproductibilidade experimental, no fundo a confiabilidade, dentro de uma margem de erro, de uma medida experimental (e possível que, sem estabilidade, as ciências experimentais quantitativas não existiriam). *Finitude da produção de entropia por unidade de tempo* tem a ver com a viabilidade de se medir taxas de fluxo de grandezas básicas que emergem nos sistemas abertos, no fundo que tais medições só fazem sentido científico teórico e experimental se fornecem números *finitos*, nem zero nem infinito (e possível que, sem esta propriedade, fosse impossível escolher, dentro do enorme universo que nos rodeia — por fora e por dentro! —, um subsistema finito e imerso no resto para estudá-lo quantitativamente).

A mecânica estatística associada a S_q tem apresentado generalizações simples e naturais de estruturas matemáticas importantes da teoria de BG, tais como o teorema H, o teorema de Ehrenfest, a estrutura das transformações de Legendre da termodinâmica, teorema de reciprocidade de Onsager, o teorema de Pesin, a obtenção da estatística associada ao estado estacionário (isto é, aquele que extremiza a entropia S_q sob vínculos adequados) por caminhos alternativos. Merecem especial menção a generalização do célebre teorema de Shannon (por Roberto Jorge Vasconcellos dos Santos), do teorema de Khinchin (por Sumiyoshi Abe), dos tradicionais procedimentos de Darwin-Fowler, de Khinchin, de Balian-Balasz (por Abe e A.K. Rajagopal) (ver [33] e referências ali indicadas). Outrossim, cresce permanentemente o número de fenômenos (tanto dependentes quanto independentes do tempo) cuja forma funcional é a q-exponencial, precisamente naquelas propriedades que, nos sistemas usuais, exibem dependências da forma exponencial, típica da teoria de BG [34]. Cresce ainda o número de sistemas dinâmicos não lineares, de baixa ou alta dimensionalidade, dissipativos ou conservativos, onde torna-se possível calcular q a priori. Todas estas indicações são favoráveis no sentido da mecânica estatística não extensiva ser uma teoria que os físicos qualificariam de "física", mas a última palavra é do tempo... como sempre foi!

Agradeço calorosamente meus colegas e amigos Carmen do Prado e Roberto Andrade, que fizeram a parte mais pesada da organização do evento em justa homenagem ao Silvio Salinas nos seus 60 anos, ... fugaz etapa dos muitos ainda por vir!

Referências

[1] Aristoteles, *A Arte Poetica*, 322 A.C. [" The greatest thing by far is to be a master of metaphor. It is the one thing that cannot be learned from others; it is also a sign of genius, since a good metaphor implies an eye for resemblance."].

[2] C. Tsallis, *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).

[3] E.M.F. Curado and C. Tsallis, *Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics*, J. Phys. A **24**, L69 (1991); Corrigenda: **24**, 3187 (1991) and **25**, 1019 (1992).

[4] C. Tsallis, R.S. Mendes and A.R. Plastino, *The role of constraints within generalized nonextensive statistics*, Physica A **261**, 534 (1998).

[5] A. Einstein, Annalen der Physik **33**, 1275 (1910) [" Usually W is put equal to the number of complexions... In order to calculate W, one needs a *complete*

(molecular-mechanical) theory of the system under consideration. Therefore it is dubious whether the Boltzmann principle has any meaning without a complete molecular-mechanical theory or some other theory which describes the elementary processes. $S = \frac{R}{N} \log W +$ const. seems without content, from a phenomenological point of view, without giving in addition such an *Elementartheorie*." (Translation: Abraham Pais, *Subtle is the Lord...*, Oxford University Press, 1982)].

[6] E.G.D. Cohen, *Statistics and dynamics*, Physica A **305**, 19 (2002).

[7] E.G.D. Cohen, *Superstatistics*, in *Anomalous Distributions, Nonlinear Dynamics, and Nonextensivity*, eds. H.L. Swinney and C. Tsallis, special issue of Physica D (2003), in press.

[8] C. Tsallis, A.R. Plastino and W.-M. Zheng, *Power-law sensitivity to initial conditions - New entropic representation*, Chaos, Solitons and Fractals **8**, 885 (1997).

[9] M.L. Lyra and C. Tsallis, *Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems*, Phys. Rev. Lett. **80**, 53 (1998).

[10] F. Baldovin and A. Robledo, *Sensitivity to initial conditions at bifurcations in one-dimensional nonlinear maps: Rigorous nonextensive solutions*, Europhys. Lett. **60**, 518 (2002).

[11] F. Baldovin and A. Robledo, *Universal renormalization-group dynamics at the onset of chaos in logistic maps and nonextensive statistical mechanics*, Phys. Rev. E **66**, R045104 (2002).

[12] F.A.B.F. de Moura, U. Tirnakli and M.L. Lyra, *Convergence to the critical attractor of dissipative maps: Log-periodic oscillations, fractality and nonextensivity*, Phys. Rev. E **62**, 6361 (2000).

[13] E.P. Borges, C. Tsallis, G.F.J. Ananos and P.M.C. Oliveira, *Nonequilibrium probabilistic dynamics at the logistic map edge of chaos*, Phys. Rev. Lett. **89**, 254103 (2002).

[14] A. Cho, *A fresh take on disorder, or disorderly science?*, Science **297**, 1268 (2002).

[15] R. Luzzi, A.R. Vasconcellos and J.G. Ramos, *Trying to make sense of disorder*, Science **298**, 1171 (2002).

[16] V. Latora, A. Rapisarda and A. Robledo, Science (2003), em impressão.

[17] http://physics.hallym.ac.kr/reference/physicist/Boltzmann.html

[18] M. Gleiser, Folha de Sao Paulo (15/08/1999).

[19] A. Renyi, in *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium*, 1960 **1** (University of California Press, Berkeley, 1961), page 547.

[20] Z. Daroczy, Inf. and Control **16**, 36 (1970).

[21] A. Wehrl, Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).

[22] J. Harvda and F. Charvat, Kybernetica **3**, 30 (1967).

[23] C. Tsallis, Chaos, Solitons and Fractals **6**, 539 (1995).

[24] I. Vajda, Kybernetika **4**, 105 (1968) [in Czech].

[25] E.K. Lenzi, R.S. Mendes and L.R. da Silva, *Statistical mechanics based on Renyi entropy*, Physica A **280**, 337 (2000).

[26] S.M. Stigler, *Statistic on the table – the history of statistical concepts and methods* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 1999), page 284.

[27] I. Csiszar, *Information measures: a critical survey*, in *Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and the European Meeting of Statisticians*, 1974 (Reidel, Dordrecht, 1978), page 73.

[28] M.P. Schutzenberger, *Contribution aux applications statistiques de la theorie de l' information*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **3:3** (1954).

[29] I.J. Taneja, Advances in Electronics and Electron Physics **76**, 327 (1989); M. Behara, *Additive and nonadditive measures of entropy* (Wiley Eastern, New Delhi, 1990); M. Basseville, Institut de Recherche en Informatique et Systemes Aleatoires -IRISA (France), Report 1020 (May 1996).

[30] S. Abe, *Stability of Tsallis entropy and instabilities of Renyi and normalized Tsallis entropies: A basis for q-exponential distributions*, Phys. Rev. E **66**, 046134 (2002).

[31] V. Latora, M. Baranger, A. Rapisarda and C. Tsallis, *The rate of entropy increase at the edge of chaos*, Phys. Lett. A **273**, 97 (2000).

[32] S. Abe and A.K. Rajagopal, Science (2003), em impressão.

[33] C. Tsallis, *Nonextensive Statistical Mechanics: Construction and Physical Interpretation*, in *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications*, eds. M. Gell-Mann and C. Tsallis (Oxford University Press, Oxford, 2003), in press.

[34] Ver http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm para bibliografia regularmente atualizada.