



CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
LAFEX - COORDENAÇÃO DE FÍSICA EXPERIMENTAL DE ALTAS ENERGIAS
GRUPO DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS ELEMENTARES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial D-dimensional em modelos eletromagnéticos e gravitacionais

WALLACE MOREIRA HERDY

Orientador

Antonio José Accioly

Rio de Janeiro - RJ

Abril de 2014

“É a teoria que decide o que podemos observar.”

Albert Einstein

Agradecimentos

A Deus, criador de todas as coisas.

A minha querida esposa Samanta, a quem tenho muito amor e admiração, pela paciência e companheirismo nesta jornada chamada vida.

Aos meus filhos William e Julia, pela alegria que trazem ao existirem no meu dia a dia.

Aos meus dedicados pais, Sergio e Cleuza, que sempre me incentivaram e através de seus esforços tornaram tudo isso possível.

Ao professor Antonio Accioly, excelente orientador e grande amigo, com quem tive a imensa honra de cooperar durante estes anos, por sua grande dedicação e seus valiosos ensinamentos.

Ao professor José Helayël, que me fez acreditar no sonho do Mestrado, e para o qual minhas palavras não são capazes de expressar minha gratidão.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, pela oportunidade de participar e ter as condições necessárias para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de CBPF, companheiros de caminhada, Arthur, Breno, Célio, Daniel, Esley, Felipe Ferreira, Felipe Germani, Frederico, Gilson, Guilherme, Khrissy, Lucianno, Max, Ricardo, Rodrigo, Saulo e Victor.

Sumário

Sumário	ii
Introdução	3
Referências Bibliográficas	6

I MODELOS ELETROMAGNÉTICOS D-DIMENSIONAIS

8

Referências Bibliográficas	11
-----------------------------------	-----------

1 Energia Potencial D-Dimensional para a Eletrodinâmica de Lee e Wick	12
1.1 O propagador de Lee e Wick	12
1.1.1 Uma prescrição para o cálculo do propagador de LW	13
1.1.2 O cálculo do propagador	15
1.2 Examinando a unitariedade do modelo eletrodinâmico de Lee e Wick D-dimensional	16
1.2.1 Teorema para o estudo da unitariedade	17

1.2.2	Analisando a unitariedade: o resíduo em cada pólo	19
1.3	A energia potencial interpartículas D-dimensional de Lee e Wick	20
1.3.1	O funcional gerador	21
1.3.2	As correntes conservadas	21
1.3.3	A expressão para a energia potencial	22
1.3.4	O cálculo das integrais: a energia potencial D-dimensional de Maxwell	22
1.3.5	O cálculo das integrais: a energia potencial D-dimensional de Proca	24
1.3.6	A energia potencial D-dimensional de Lee e Wick para $D > 3$	25
1.3.7	A energia potencial de Lee e Wick para $D = 3$	25
1.4	Comportamento para pequenas distâncias da energia potencial D-dimensional de Lee e Wick	26
1.4.1	Energia potencial para $D > 3$ com $\nu \notin \mathbf{N}$	26
1.4.2	Energia potencial para $D > 3$ com $\nu \in \mathbf{N}$	27
1.4.3	Energia potencial para $D = 3$	27
1.5	Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial interpartícula no contexto de um modelo eletromagnético D-dimensional	27
	Referências Bibliográficas	29
	II MODELOS GRAVITACIONAIS D-DIMENSIONAIS	31
	Referências Bibliográficas	34
2	Energia Potencial D-Dimensional para a Gravitação de Ordem Superior	35
2.1	A Lagrangiana da Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional	36
2.1.1	A aproximação de campo fraco	36

2.1.2	O Teorema de Gauss-Bonnet linearizado	39
2.1.3	A Lagrangiana	40
2.2	O propagador da Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional	41
2.2.1	Uma prescrição para o cálculo do propagador do gráviton em D dimensões, e uma lista de algumas identidades que facilitam esta tarefa	41
2.2.2	O cálculo do propagador	44
2.3	Examinando a unitariedade do modelo de Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional	47
2.3.1	Teorema para o estudo da unitariedade	47
2.3.2	Analisando a unitariedade: o resíduo em cada pólo	52
2.4	A energia potencial interpartículas D-dimensional para a Gravitação de Ordem Superior	54
2.4.1	A constante D-dimensional de Einstein	54
2.4.2	O funcional gerador	54
2.4.3	A conservação dos tensores energia-momento	55
2.4.4	A expressão para a energia potencial	55
2.4.5	A energia potencial D-dimensional da Gravitação de Ordem Superior para $D > 3$	55
2.4.6	A energia potencial da Gravitação de Ordem Superior para $D = 3$	56
2.5	Comportamento para pequenas distâncias da energia potencial da Gravitação de Ordem Superior D-dimensional	57
2.6	Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial interpartícula no contexto de um modelo gravitacional D-dimensional	58
	Referências Bibliográficas	60
	Epílogo	62

Referências Bibliográficas

67

Apêndice A Elemento de volume em coordenadas esféricas D-dimensionais 68

Resumo

A partir de uma análise detalhada do método para o cômputo da energia potencial D-dimensional, o qual é baseado na integral de caminho de Feynman, uma expressão simples para o cálculo deste potencial é obtida. Esta prescrição converte a árdua tarefa de computar o aludido potencial em um exercício algébrico simples. A energia potencial D-dimensional, tanto para a eletrodinâmica de Lee e Wick quanto para a gravitação de ordem superior, são então computadas. O papel desempenhado pelas derivadas de ordem mais alta nestes resultados é também analisado.

Palavras-chave: Modelos Eletromagnéticos e Gravitacionais D-Dimensionais; Prescrição para o Cálculo da Energia Potencial Interpartículas D-Dimensional; Unitariedade ao Nível de Árvore.

Áreas de conhecimento: Teoria Quântica de Campos; Gravitação.

Abstract

From a detailed analysis of the method for computing the D-dimensional potential energy, which is based on the Feynman path integral, a simple expression for calculating this potential, is obtained. This prescription converts the hard task of computing the alluded potential into a straightforward algebraic exercise. The D-dimensional potential energy for both Lee-Wick electrodynamics and higher-derivative gravity, are then computed. The role played by higher derivatives in these results is analyzed as well.

Introdução

Podemos dizer, em poucas palavras, que a Teoria Quântica de Campos (QFT) nasceu da fusão da Relatividade Especial com a Mecânica Quântica (QM); em contrapartida, a necessidade de reconciliar a Relatividade Geral com a QM deu origem à teoria de cordas. Acredita-se que um tratamento correto do campo gravitacional sob o ponto de vista da QFT, tratamento este por hora ainda desconhecido, deverá reproduzir a teoria da relatividade geral de Einstein no limite de baixas energias, ou de modo mais geral, o Sistema Einstein-Yang-Mills -Dirac. Em outras palavras, é provável que a QFT nada mais seja que o limite de baixas energias relativo à uma teoria de campos efetiva de uma teoria mais fundamental, tal como a teoria de supercordas.

A QFT é na realidade um conjunto de ideias e ferramentas que combina harmoniosamente três dos maiores temas da física moderna: a teoria quântica, o conceito de campo e o princípio de relatividade. Assim sendo, ela não só fornece um sólido alicerce para a física das partículas elementares contemporânea [1], mas é também um repositório de ferramentas que são essenciais para a física nuclear [2] e a física atômica [3], bem como para a física da matéria condensada [4] e a astrofísica [5]. Além disso, esta teoria tem permitido que se edifiquem novas pontes entre a física e a matemática [6].

Primitivamente, a motivação para o estudo da QFT jazia na esperança de que ela

viesses lançar uma nova luz sobre nossa maneira de enxergar as partículas fundamentais da matéria e suas interações. De fato, uma estrutura que incorporava, por um lado, a QM (que tinha sido tão bem sucedida no que se refere à resolução de um grande número de problemas da física atômica no início do século passado) e, por outro, a teoria de campos (a linguagem utilizada para descrever o surpreendente quadro da realidade desvelado por Faraday, Maxwell e Hertz), certamente deveria fornecer alguma indicação confiável sobre a natureza fundamental da matéria. Na realidade, os resultados superaram em muito as expectativas. Realmente, basta citar, por exemplo, a QED, o primeiro filho bem sucedido do casamento da relatividade especial com a QM. Esta teoria prediz, para citar apenas um dos seus sucessos, o momento magnético anômalo do elétron corretamente com onze casas decimais. Esta fantástica concordância entre os resultados previstos teoricamente e os obtidos experimentalmente levaram Ryder [7] a perguntar: “O que mais se poderia querer de uma teoria física?”

Por outro lado, derivadas de ordem mais alta têm sido usadas frequentemente como um poderoso mecanismo no controle das terríveis divergências ultravioletas (UV) que são comumente encontradas em modelos físicos relevantes. No início dos anos setenta, por exemplo, Lee e Wick (LW) alegaram terem descoberto uma versão finita da QED [8]; no entanto o modelo que eles tinham proposto apresenta um problema bastante severo: a presença de graus de liberdade associados com uma norma não positiva no espaço de Hilbert. Para remediar esta dificuldade, estes autores adotaram modificações *ad hoc* no que concerne à continuação analítica das amplitudes [9]. Em resumo, podemos dizer que o trabalho de LW consiste essencialmente na introdução de campos com propagadores com sinal errado do tipo de Pauli e Villars como graus de liberdade físicos, que resultam em amplitudes que são mais bem comportadas no UV e tornam a logaritmicamente divergente QED finita. Recentemente, o interesse nas teorias de LW recrudescer graças ao surgimento das teorias de gauge não abelianas de LW consideradas por Grinstein, O’Connell e Wise [10]. Este modelo, comumente chamado de

Modelo Padrão de LW, é naturalmente livre de divergências quadráticas, fornecendo assim uma solução alternativa para o problema da hierarquia.

Logo depois da criação do sistema de LW, modelos de gravitação com derivadas de ordem mais alta foram considerados [11]. Apesar destes modelos serem assombrados por fantasmas, sendo em consequência não unitários, eles são renormalizáveis.

A presença de derivadas de ordem superior em um modelo, contudo, não implica que ele deve ser rejeitado. De fato, sistemas com derivadas de ordem mais alta podem ser utilizados como modelos efetivos de campos em escalas de energia familiares. A gravitação com derivadas de ordem superior, por exemplo, tem sido bastante usada em interessantes e importantes aplicações cosmológicas [12].

Neste trabalho faremos algumas incursões no campo dos modelos com derivadas de ordem superior. Iniciamos, computando no Capítulo 1 [13] a energia potencial em D dimensões para a eletrodinâmica de LW via um método que se apoia fortemente na integral de trajetória de Feynman. Estudamos então detalhadamente o comportamento para pequenas distância deste potencial, bem como seu comportamento assintótico. A unitariedade do modelo ao nível de árvore é também analisada. Esta análise é baseada em um teorema cujo enunciado e detalhada demonstração são também apresentados. Terminamos o Capítulo exibindo uma prescrição bastante simples para calcular a energia potencial D-dimensional baseada em uma análise acurada dos resultados deste Capítulo. No Capítulo 2 [14] discutimos a gravitação de ordem mais alta nos moldes que utilizamos para confeccionar o Capítulo 1. Finalizamos apresentando no Epílogo uma discussão sobre os resultados obtidos ao longo desta dissertação e apresentamos possíveis aplicações dos resultados mencionados.

Ao longo de todo o trabalho utilizamos unidades naturais. A métrica, por sua vez, tem assinatura $(+, -, -, \dots, -)$.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Donoghue, E. Golowich, and B. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, 1995).
- [2] S. Shapiro, and Teukolsky, *Black holes, white dwarf and neutron stars: the physics of compact objects* (Wiley-VHC, 1983).
- [3] C. Eberlein, and R. Zietal, *Phys. Rev. A* **83**, 052514 (2011).
- [4] A. Tsvelik, *Quantum field theory in condensed matter physics* (Cambridge University Press, 2003).
- [5] R. Wald, *Quantum Field Theory in curved spacetime and black hole thermodynamics* (The University of Chicago Press, 1994).
- [6] N. Bogulobov, A. Logunov, and I. Todorov, *Introduction to axiomatic quantum field theory* (Reading, 1975).
- [7] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1996) 2nd ed.
- [8] T. Lee and G. Wick, *Nucl. Phys. B* **9**, 209 (1969).
- [9] T. Lee and G. Wick, *Phys. Rev. D* **2**, 1033 (1970).

- [10] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, *Phys. Rev. D* **77**, 025012 (2008).
- [11] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [12] See, for instance, T. Soritiou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
- [13] A. Accioly, G. Correia, P. Gaete, and W. Herdy, *Coulomb's law modification in D-dimensional electromagnetic models* (submetido à publicação no International Journal of Modern Physics A).
- [14] A. Accioly, F. E. Barone, F. A. Barone, and W. Herdy, *A simple prescription for computing the interparticle potential energy for D-dimensional gravity theories* (submetido à publicação na Classical and Quantum Gravity).

Parte I

**MODELOS
ELETROMAGNÉTICOS
D-DIMENSIONAIS**

De tempos em tempos, novos modelos eletromagnéticos aparecem na literatura. As razões para estudar estes sistemas são muitas e de diferentes espécies: (i) controlar as divergências ultravioletas que estão geralmente presentes nos modelos eletromagnéticos [1], (ii) obter um sistema onde uma carga pontual tenha auto-energia finita (a eletrodinâmica de Born-Infeld apresenta esta peculiaridade [2]), (iii) encontrar um sistema que além de possuir uma carga pontual com auto-energia finita, exiba também o fenômeno da birrefringência (a eletrodinâmica logarítmica apresenta estas características [3]), (iv) analisar modelos com violação de Lorentz [4-6], e assim por diante.

No entanto, como é bem conhecido, estes modelos eletromagnéticos devem reproduzir a energia potencial Coulombiana no limite não relativístico, mais uma correção à mencionada energia. Conseqüentemente, é de fundamental importância se ter um método simples para computar este potencial de modo que seu comportamento em baixas energias possa ser analisado pronta e eficientemente.

Existem, obviamente, muitos métodos poderosos na literatura, que nos permitem computar a energia potencial interpartícula no limite não relativístico. Infelizmente, todos esses métodos, exigem computações algébricas excessivas e, em consequência, são processos que consomem bastante tempo.

Nosso objetivo nesta Parte I da dissertação [7] é conceber um método onde as dificuldades mencionadas anteriormente possam ser superadas, ou pelo menos reduzidas a um mínimo. Para conseguirmos isso vamos partir de um método para o cálculo do potencial que se apoia fortemente na integral de trajetória de Feynman. Examinando cuidadosamente este método é possível obter-se uma expressão muito simples para o cálculo do potencial D-dimensional, a qual tem como ingrediente principal um “propagador” no espaço dos momentos, “propagador” este que é obtido descartando-se todos os termos do propagador de Feynman usual no espaço dos momentos que sejam ortogonais às correntes externas conservadas e fazendo-se em seguida $k^0 = 0$, onde k^μ é o momento da partícula trocada. O método é encontrado analisando-se o cálculo da

energia potencial D-dimensional para a eletrodinâmica de LW.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Lee and G. Wick, *Phys. Rev. D* **2**, 1033 (1970).
- [2] M. Born and L. Infeld, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **144**, 425 (1934).
- [3] P. Gaete and J. Helayël-Neto, arXiv: 1312.5157v1 [hep-th] 18 Dec 2013.
- [4] D. Colladay and V. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [5] R. Gambini and J. Pullin, *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999).
- [6] R. Meyers and M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003).
- [7] A. Accioly, G. Correia, P. Gaete, and W. Herdy, *Coulomb's law modification in D-dimensional electromagnetic models* (submetido à publicação no International Journal of Modern Physics A).

Energia Potencial D-Dimensional para a Eletrodinâmica de Lee e Wick

Estuda-se a unitariedade do modelo de Lee e Wick via um teorema cuja demonstração é feita em detalhe. A energia potencial D-dimensional para a interação entre duas cargas estáticas é então calculada por um método baseado na integral de trajetória de Feynman. O comportamento para pequenas distâncias deste potencial bem como seu comportamento assintótico são também analisados. Finalizamos apresentando uma prescrição simples para calcular a energia potencial D-dimensional para modelos eletromagnéticos a qual foi obtida por meio de uma acurada observação do método utilizado na obtenção do potencial D-dimensional de Lee e Wick .

1.1 O propagador de Lee e Wick

O modelo abeliano de Lee e Wick (LW) é definido pela Lagrangiana invariante de *gauge*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu},$$

onde $F_{\mu\nu}(= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ é o campo de força, e $m(> 0)$ é um parâmetro com dimensão de massa.

Como estamos interessados em estudar a unitariedade deste modelo ao nível de árvore, precisamos antes de mais nada, computar o seu propagador. Para isto vamos adicionar um termo fixador de *gauge* à Lagrangiana anterior. No *gauge* de Lorentz, este termo pode ser escrito como $\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$, onde, como é usual, λ é o parâmetro de *gauge*.

Podemos então escrever \mathcal{L} como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.1)$$

1.1.1 Uma prescrição para o cálculo do propagador de LW

Para calcularmos o propagador de Lee e Wick, é conveniente trabalharmos em termos de operadores de projeção no espaço vetorial. O conjunto completo de projetores no espaço dos momentos é formado pelos operadores de projeção vetorial longitudinal $\omega_{\mu\nu}$ e transversal $\theta_{\mu\nu}$, ou seja,

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu},$$

onde k_μ é o momento da partícula trocada e $k^2 = k_\mu k^\mu$.

Como estes operadores são de projeção, eles são idempotentes,

$$\theta_{\mu\rho}\theta_\nu^\rho = \theta_{\mu\nu},$$

$$\omega_{\mu\rho}\omega_\nu^\rho = \omega_{\mu\nu},$$

e ortogonais,

$$\theta_{\mu\rho}\omega_\nu^\rho = 0,$$

e sua soma nos leva a

$$\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}.$$

	θ	ω
θ	θ	0
ω	0	ω

Tabela 1.1: Tabela multiplicativa para os operadores de projeção

O operador $\theta_{\mu\nu}$ atuando sobre um vetor V_μ nos fornece a projeção deste vetor na direção transversal a k_μ ; enquanto que $\omega_{\mu\nu}$ atuando sobre o mesmo vetor nos dá a projeção de V_μ na direção de k_μ . De fato (vide a Figura 1.1)

$$\omega^{ij}V^j = \frac{k^i}{|\vec{k}|} \frac{k^j}{|\vec{k}|} V^j = \frac{k^i}{|\vec{k}|} (\vec{V} \cdot \hat{k}) = L^i,$$

$$\theta^{ij}V^j = \delta^{ij}V^j - \frac{k^i}{|\vec{k}|} \frac{k^j}{|\vec{k}|} V^j = V^i - \frac{k^i}{|\vec{k}|} (\vec{V} \cdot \hat{k}) = T^i,$$

onde $\vec{T} = \vec{V} - \vec{L}$.

A representação da unidade em qualquer álgebra de operadores de projeção é a soma dos operadores que se encontram na diagonal principal, como é fácil de ver. De fato, $\mathbf{I}\theta = \theta\theta + \omega\theta = \theta$ e $\mathbf{I}\omega = \theta\omega + \omega\omega = \omega$. Portanto

$$\theta + \omega = \mathbf{I}.$$

Para calcularmos o propagador, precisamos expandir o operador de onda $\mathcal{O}^{\mu\nu}$ em termos dos operadores de projeção $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$.

Genericamente,

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = A\theta^{\mu\nu} + B\omega^{\mu\nu}.$$

Com isso, a tarefa de encontrar o inverso do operador de onda \mathcal{O} torna-se simples, pois $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I} = \theta + \omega$. Se $\mathcal{O}^{-1} = C\theta + D\omega$, então

$$(A\theta + B\omega)(C\theta + D\omega) = \theta + \omega,$$

ou seja,

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{A}\theta + \frac{1}{B}\omega. \quad (1.2)$$

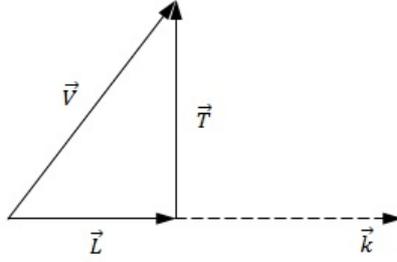


Figura 1.1: Projeções longitudinal ($L^i = \frac{k^i}{|\vec{k}|}(\vec{V} \cdot \hat{k})$) e transversal ($T^i = V^i - \frac{k^i}{|\vec{k}|}(\vec{V} \cdot \hat{k})$) do vetor \vec{V} , em relação a \vec{k} .

1.1.2 O cálculo do propagador

Para encontrarmos o operador de onda, escrevemos a Lagrangiana de LW (1.1), já com o termo de fixação de gauge, na forma específica associada aos bósons neutros,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu. \quad (1.3)$$

Seja, então, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$, onde

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}A_\mu (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2m^2}A_\mu (\eta^{\mu\nu} \square^2 - \square \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2\lambda}A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu. \quad (1.6)$$

Utilizando (1.4), (1.5), e (1.6), concluimos que

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\square + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\partial^\mu\partial^\nu + \frac{\square}{m^2}(\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu).$$

Recordando que

$$\partial_\mu e^{-ikx} = -ie^{-ikx}k_\mu,$$

e, conseqüentemente, que

$$\partial_\mu \longrightarrow -ik_\mu,$$

$$\partial^\mu \longrightarrow -ik^\mu,$$

$$\square = \partial_\mu\partial^\mu \longrightarrow -k^2,$$

obtemos prontamente o operador de onda no espaço dos momentos, ou seja,

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) = \eta^{\mu\nu}\left(\frac{k^4}{m^2} - k^2\right) - k^\mu k^\nu\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} + \frac{k^2}{m^2}\right).$$

Expandindo este operador em termos dos operadores de projeção chegamos a seguinte expressão

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \left(\frac{k^4}{m^2} - k^2\right)\theta^{\mu\nu} - \left(\frac{k^2}{\lambda}\right)\omega^{\mu\nu},$$

a qual pode ser trivialmente invertida, nos fornecendo então o propagador para a Eletrodinâmica de LW:

$$(\mathcal{O}^{-1})^{\mu\nu} = \left(\frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)}\right)\theta^{\mu\nu} - \left(\frac{\lambda}{k^2}\right)\omega^{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

1.2 Examinando a unitariedade do modelo eletrodinâmico de Lee e Wick D-dimensional

A análise da unitariedade para o presente modelo pode ser feita através de um simples algoritmo que transforma esta tarefa (que em geral é muito laboriosa) em um exercício algébrico relativamente simples [1,2-6]. Esta prescrição consiste basicamente em saturar

o propagador com correntes conservadas, compatíveis com as simetrias do sistema. A unitariedade ao nível de árvore do modelo é assegurada se o resíduo em cada pólo simples do propagador saturado (PS) tiver sinal positivo (correspondendo aos modos que se propagam) ou se for zero (sem modos de propagação).

O propagador saturado de Lee e Wick é dado por

$$PS = J^\mu(k)(\mathcal{O}^{-1})_{\mu\nu}(k)J^\nu(k). \quad (1.8)$$

Como o propagador está contraído com correntes conservadas,

$$\partial_\nu J^\nu(x) = 0 \longrightarrow k_\nu J^\nu(k) = 0.$$

Consequentemente,

$$PS = J^\mu \left(\frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \right) J_\mu = -\frac{J^2}{k^2} + \frac{J^2}{k^2 - m^2}. \quad (1.9)$$

1.2.1 Teorema para o estudo da unitariedade

Para a análise da unitariedade ao nível de árvore de modelos eletromagnéticos, o teorema que se segue é bastante útil [3]:

Se m é a massa de uma partícula física genérica associada a um dado modelo eletrodinâmico e k é o seu momento trocado, então

$$(J^\mu J_\mu)|_{k^2 \geq 0} < 0.$$

Aqui J^μ é a corrente conservada.

Demonstraremos este teorema detalhadamente. Iniciamos expandindo a corrente J^μ em uma base apropriada. O seguinte conjunto de vetores linearmente independentes, no espaço dos momentos D -dimensional, serve para nossos propósitos:

$$k^\mu \equiv (k^0, \vec{k}), \quad \tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\vec{k}), \quad \varepsilon_i^\mu \equiv (0, \hat{e}_i), \quad i = 1, 2, \dots, D - 2;$$

onde \hat{e}_i são vetores perpendiculares entre si e perpendiculares a \vec{k} , todos linearmente independentes e com comprimento 1.

Utilizando esta base, podemos escrever a corrente J^μ da seguinte maneira

$$J^\mu = Ak^\mu + B\tilde{k}^\mu + C^i \varepsilon_i^\mu \quad (1.10)$$

Recordando que as correntes são conservadas, obtemos

$$\begin{aligned} Ak^2 + Bk_\mu \tilde{k}^\mu &= 0, \\ Ak^2 + B(k_0^2 + \vec{k}^2) &= 0, \\ A(k_0^2 - \vec{k}^2) &= -B(k_0^2 + \vec{k}^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Segue-se que

$$A^2 > B^2. \quad (1.12)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} J^\mu J_\mu &= A^2 k^\mu k_\mu + ABk^\mu \tilde{k}_\mu + AC^j k^\mu \varepsilon_{j\mu} + AB\tilde{k}^\mu k_\mu + B^2 \tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu + \\ &+ BC^j \tilde{k}^\mu \varepsilon_{j\mu} + AC^i k_\mu \varepsilon_i^\mu + BC^i \tilde{k}_\mu \varepsilon_i^\mu + C^i C^j \varepsilon_i^\mu \varepsilon_{j\mu}. \end{aligned}$$

Levando em consideração a ortogonalidade entre os vetores de base, os quatro termos que possuem este produto sumirão. Teremos então

$$J^2 = A^2 k^2 + 2ABk^\mu \tilde{k}_\mu + B^2 \tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu + C^i C^j \varepsilon_i^\mu \varepsilon_{j\mu}. \quad (1.13)$$

No último termo, por sua vez,

$$\varepsilon_i^\mu \varepsilon_{j\mu} = (0, \hat{e}_i)(0, -\hat{e}_j) = -\delta_{ij}.$$

Consequentemente,

$$J^2 = A^2 k^2 + 2AB(k_0^2 + \vec{k}^2) + B^2 k^2 - (C^i)^2,$$

que com o auxílio de (1.11) se reduz a

$$J^2 = (B^2 - A^2)k^2 - (C^i)^2.$$

Portanto,

$$(J^\mu J_\mu)|_{k^2 \geq 0} < 0, \tag{1.14}$$

o que demonstra o nosso Teorema.

Utilizando este resultado vamos checar a unitariedade ao nível de árvore do modelo de Lee e Wick.

1.2.2 Analisando a unitariedade: o resíduo em cada pólo

No propagador saturado (1.9) existem os seguintes pólos: $k^2 = 0$ e $k^2 = m^2$ sendo os resíduos em cada um destes pólos iguais a

$$Res(PS)|_{k^2=0} = -J^2|_{k^2=0},$$

$$Res(PS)|_{k^2=m^2} = J^2|_{k^2=m^2}.$$

De (1.14), concluímos que

$$Res(PS)|_{k^2=0} = -J^2|_{k^2=0} > 0,$$

$$Res(PS)|_{k^2=m^2} = J^2|_{k^2=m^2} < 0.$$

A análise destes pólos nos mostra de imediato que o modelo carrega dois modos de excitação de spin-1 na concha de massa: um de massa de repouso nula e outro massivo. No primeiro caso, temos a representação de uma partícula física sem massa. Já o grau de liberdade massivo possui resíduo negativo, o que traz consequências desagradáveis [7]. Na escala quântica, há o aparecimento de estados de norma negativa (ghosts). No caso do modelo de Lee e Wick o ghost massivo de spin 1 é não taquiônico. Concluímos então que a teoria de Lee e Wick não é unitária ao nível de árvore.

Lee e Wick contornaram este problema impondo que a partícula massiva deveria decair de maneira a não interferir no espectro de partículas [8-10]. Fizeram isso introduzindo modificações *ad hoc* nas regras usuais da teoria quântica de campos. Desta maneira, o modelo recuperaria a unitariedade. Estas modificações engenhosas, porém inortodoxas, foram alvos de críticas acerbas e não foram incorporadas ao ferramental da física teórica e não serão, em consequência, levadas em conta aqui.

1.3 A energia potencial interpartículas D-dimensional de Lee e Wick

Como é bem conhecido, o funcional gerador para os diagramas de Feynman conexos, $W_D(J)$, está relacionado com o funcional gerador para uma teoria eletromagnética, $Z_D(J)$, via a expressão $Z_D(J) = e^{iW_D(J)}$, onde

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \int d^D x d^D y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y).$$

Aqui $J_\mu(x)$ e $D_{\mu\nu}(x-y)$ são, respectivamente, a corrente conservada e o propagador.

Agora, lembrando que

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x-y) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} D_{\mu\nu}(k), \\ J_\mu(k) &= \int d^D x e^{-ikx} J_\mu(x), \end{aligned}$$

obtemos prontamente

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} J^\mu(k)^* D_{\mu\nu}(k) J^\nu(k). \quad (1.15)$$

Por outro lado,

$$Z_D(J) = \langle 0 | e^{-iH_D T} | 0 \rangle = e^{-iE_D T}.$$

Segue-se que a energia potencial é dada por

$$E_D = -\frac{W_D(J)}{T}. \quad (1.16)$$

1.3.1 O funcional gerador

No caso do modelo de Lee e Wick, (1.15) pode ser escrita como

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \left(\frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \right) \int dx^0 \int \frac{dy^0}{2\pi} e^{ik^0(x^0 - y^0)} \times \\ \times \int \int d^{D-1} \vec{x} d^{D-1} \vec{y} e^{i\vec{k}(\vec{y} - \vec{x})} J^\mu(x) J_\mu(y).$$

O fator $(\int dx^0)$ corresponde ao intervalo de tempo de transição T . Segue-se que

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} T \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \delta(k^0) \left(\frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \right) \times \\ \times \int \int d^{D-1} \vec{x} d^{D-1} \vec{y} e^{i\vec{k}(\vec{y} - \vec{x})} J^\mu(x) J_\mu(y). \quad (1.17)$$

1.3.2 As correntes conservadas

No caso de duas cargas estáticas Q_1 e Q_2 localizadas, respectivamente, em \vec{a}_1 e \vec{a}_2 no espaço, a corrente D-dimensional assume a forma

$$J^\mu(x)_D = \delta_0^\mu [Q_1 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) + Q_2 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_2)],$$

e, portanto,

$$J^\mu(x) J_\mu(y) = 2Q_1 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) Q_2 \delta^{D-1}(\vec{y} - \vec{a}_2). \quad (1.18)$$

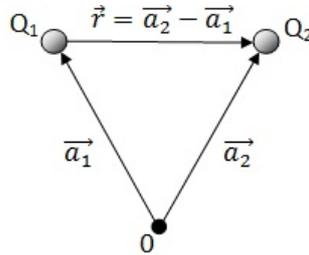


Figura 1.2: Cargas pontuais localizadas, respectivamente, em \vec{a}_1 e \vec{a}_2 , no espaço.

1.3.3 A expressão para a energia potencial

Inserindo (1.18) em (1.17) e utilizando (1.16), obtemos

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \left[\int \frac{d^{D-1} \vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} - \int \frac{d^{D-1} \vec{k}}{k^2 + m^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} \right], \quad (1.19)$$

onde $\vec{r} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$.

Note que a primeira integral acima fornece a energia potencial D-dimensional de Maxwell, enquanto que a segunda nos dá a energia potencial D-dimensional de Proca com o sinal trocado.

1.3.4 O cálculo das integrais: a energia potencial D-dimensional de Maxwell

Inicialmente, vamos calcular a integral relativa ao potencial de Maxwell, ou seja,

$$E_D(\text{Maxwell}) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-1} \vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})}. \quad (1.20)$$

Para tanto, vamos utilizar coordenadas esféricas D-dimensionais, onde adotamos a seguinte notação: $\vec{k} = \vec{x}$, $k^2 = x^2$, $|\vec{k}| = x$ e $|\vec{r}| = r$, com \vec{r} sobre o eixo x_1 . Em D dimensões as variáveis serão então $(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1})$.

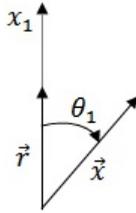


Figura 1.3: Relação geométrica entre \vec{x} e \vec{r} , em coordenadas esféricas

O elemento de volume em coordenadas esféricas D-dimensionais (vide Apêndice A) é dado por,

$$dV_D = x^{D-1} dx \prod_{i=1}^{D-1} \text{sen}^{D-1-i} \theta_i d\theta_i \quad (0 \leq \theta_1 \dots \theta_{D-2} \leq \pi \quad e \quad 0 \leq \theta_{D-1} < 2\pi).$$

Utilizando este elemento de volume, nossa integral pode ser escrita como

$$\left[\int_0^\infty dx \frac{x^{D-2}}{x^2} \int_0^\pi d\theta_1 \text{sen}^{D-3}(\theta_1) e^{ixr \cos \theta_1} \right] \times \\ \times \left[\int_0^\pi d\theta_2 \text{sen}^{D-4}(\theta_2) \int_0^\pi d\theta_3 \text{sen}^{D-5}(\theta_3) \dots \int_0^\pi d\theta_{D-3} \text{sen}(\theta_{D-3}) \int_0^{2\pi} d\theta_{D-2} \right]. \quad (1.21)$$

Vamos iniciar pela segunda parte que contém várias integrais com senos. Lembrando, por outro lado, que [11]

$$\int_0^\pi \text{sen}^p x dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+2}{2})},$$

onde $p > -1$ e Γ é a função gama, obtemos prontamente para $D > 3$

$$\int_0^\pi d\theta_2 \text{sen}^{D-4}(\theta_2) \dots \int_0^\pi d\theta_{D-3} \text{sen}(\theta_{D-3}) \int_0^{2\pi} d\theta_{D-2} = \frac{2(\pi^{\frac{D-2}{2}})}{\Gamma(\frac{D-2}{2})} \quad (1.22)$$

Passemos então a resolução da primeira parte de (1.21).

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{D-2}}{x^2} \int_0^\pi d\theta_1 \text{sen}^{D-3}(\theta_1) e^{ixr \cos \theta_1}. \quad (1.23)$$

Tendo em conta que [12]

$$\int_0^\pi e^{i\beta \cos x} \text{sen}^{2\nu} x dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\beta}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(\beta),$$

onde J_ν é a função de Bessel de primeira espécie de ordem ν , concluímos que para $D > 3$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{D-2}}{x^2} \left[\sqrt{\pi} \left(\frac{2}{xr}\right)^{\frac{D-3}{2}} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) J_{\frac{D-3}{2}}(xr) \right] \\ = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \int_0^\infty x^{\frac{D-5}{2}} J_{\frac{D-3}{2}}(xr) dx. \quad (1.24)$$

Porém, [13]

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(ax) dx = 2^\mu a^{(-\mu-1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2})},$$

e, conseqüentemente, para $D > 3$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{D-2}}{x^2} \int_0^\pi d\theta_1 \text{sen}^{D-3}(\theta_1) e^{ixr \cos \theta_1} = \sqrt{\pi} \frac{2^{D-4}}{r^{D-3}} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right). \quad (1.25)$$

Segue-se que para $D > 3$ o potencial D-dimensional de Maxwell é dado por

$$E_D(\text{Maxwell}) = \frac{Q_1 Q_2}{r^{D-3}} \frac{\Gamma(\frac{D-3}{2})}{4\pi^{\frac{D-1}{2}}}. \quad (1.26)$$

1.3.5 O cálculo das integrais: a energia potencial D-dimensional de Proca

Usando os resultados encontrados na subseção anterior, a integral relativa à energia potencial D-dimensional de Proca assume a seguinte forma para $D \geq 3$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx \frac{x^{D-2}}{x^2 + m^2} \left[\sqrt{\pi} \left(\frac{2}{xr}\right)^{\frac{D-3}{2}} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) J_{\frac{D-3}{2}}(xr) \right] \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \int_0^\infty \frac{x^{\frac{D-1}{2}}}{x^2 + m^2} J_{\frac{D-3}{2}}(xr) dx. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Tendo em conta que [14]

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} J_\nu(ax) \frac{dx}{x^2 + b^2} = b^\nu K_\nu(ab),$$

onde K_ν é a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem ν , obtemos então para $D \geq 3$

$$\int \frac{d^{D-1}x}{x^2 + m^2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{r}} = (2\pi)^{\frac{D-1}{2}} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr). \quad (1.28)$$

A energia potencial D-dimensional da eletrodinâmica de Proca, para $D \geq 3$, assume então a forma

$$E_D(\text{Proca}) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr) \quad (1.29)$$

1.3.6 A energia potencial D-dimensional de Lee e Wick para $D > 3$

Segue-se, finalmente, que a energia potencial D-dimensional de Lee e Wick para $D > 3$ pode ser expressa como

$$E_D(r) = Q_1 Q_2 \left[\frac{\Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right)}{r^{D-3} 4\pi^{\frac{D-1}{2}}} - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr) \right]. \quad (1.30)$$

Para exemplificar, admitindo que $D = 4$, encontramos a energia potencial conhecida de Lee e Wick em 4 dimensões:

$$E_4(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r} (1 - e^{-mr})$$

1.3.7 A energia potencial de Lee e Wick para $D = 3$

Quando $D = 3$, a expressão para o cálculo da energia potencial de Lee e Wick se reduz a

$$E_3(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^2} \left[\int \frac{d^2 \vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} - \int \frac{d^2 \vec{k}}{k^2 + m^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} \right].$$

A segunda integral acima, que corresponde ao potencial da eletrodinâmica de Proca, foi calculada na Seção 1.3.5 e o resultado vale também para 3 dimensões. Resta-nos, portanto, calcular $\int \frac{d^2 \vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})}$. Para tanto, vamos regularizar esta integral utilizando o procedimento que se segue

$$\int \frac{d^2 \vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^2 \vec{k}}{k^2 + \epsilon^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})};$$

porém,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^2 \vec{k}}{k^2 + \epsilon^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\pi K_0(\epsilon r)],$$

e como,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\pi K_0(\epsilon r)] = -2\pi \ln\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

onde r_0 é um regulador infravermelho, concluímos então que o potencial tridimensional de Lee e Wick obedece à equação

$$E_3(r) = -\frac{Q_1 Q_2}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + K_0(mr) \right]. \quad (1.31)$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Lembrando que $K_\nu(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right)$ para $r \rightarrow \infty$, vemos claramente que (1.30) e (1.31) reproduzem assintoticamente a energia potencial coulombiana.

1.4 Comportamento para pequenas distâncias da energia potencial D-dimensional de Lee e Wick

Utilizando as expressões para a energia potencial interpartículas D-dimensional para a Eletrodinâmica de Lee e Wick encontradas anteriormente, analisaremos seu comportamento para pequenas distâncias. Nesta investigação vamos considerar duas situações: $D > 3$ e $D = 3$. Se $D > 3$, temos dois casos: $\nu \notin \mathbf{N}$ e $\nu \in \mathbf{N}$.

1.4.1 Energia potencial para $D > 3$ com $\nu \notin \mathbf{N}$

Se $\nu \notin \mathbf{N}$, quando $z \rightarrow 0$ [15],

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \left[\Gamma(\nu) \left(\frac{2}{z} \right)^\nu \left(1 + \frac{z^2}{4(1-\nu)} + \frac{z^4}{32(1-\nu)(2-\nu)} + \dots \right) + \Gamma(-\nu) \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \left(1 + \frac{z^2}{4(\nu+1)} + \frac{z^4}{32(\nu+1)(\nu+2)} + \dots \right) \right] \quad (1.32)$$

o que implica que $3 < D < 5$. Lembrando que estamos considerando $z = mr$ e analisando quando $r \rightarrow 0$. Portanto, se D é um número par > 3 , a eletrodinâmica de Lee e Wick só é finita em $r = 0$ quando $D = 4$. Este sistema é renormalizável, porém não é unitário.

1.4.2 Energia potencial para $D > 3$ com $\nu \in \mathbf{N}$

Se $\nu \in \mathbf{N}$ [15],

$$\begin{aligned}
K_\nu(z) = & (-1)^{\nu-1} \ln\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!(k+\nu)!} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k (\nu-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \\
& + \frac{(-1)^\nu}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+\nu+1)}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (1.33)
\end{aligned}$$

onde $\psi(z) \equiv \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ é a função psi. Infelizmente, se D é um número ímpar > 3 , a eletrodinâmica de Lee e Wick é singular em $r = 0$.

Nossos resultados para $D > 3$ podem ser sumarizados basicamente em uma sentença. Existe uma única eletrodinâmica de Lee e Wick que para $D > 3$ é finita para pequenas distâncias: o modelo em quatro dimensões. Neste caso $E_4(0) = \frac{Q_1 Q_2 m}{4\pi}$.

1.4.3 Energia potencial para $D = 3$

Se $D = 3$ obtemos prontamente de (1.31)

$$E_3(0) = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi} \ln(mr_0). \quad (1.34)$$

Esta energia, obviamente, é finita na origem.

1.5 Uma prescrição simples para o cálculo da energético potencial interpartícula no contexto de um modelo eletromagnético D-dimensional

Uma análise acurada dos cálculos realizados anteriormente nos permite construir uma prescrição simples para o cômputo da energia potencial no contexto dos modelos eletromagnéticos D-dimensionais. Para tanto, vamos construir um “propagador $\mathcal{P}_{\mu\nu}(\vec{k})$ ”

no espaço dos momentos descartando do propagador usual de Feynman no espaço dos momentos todos os termos que forem ortogonais às correntes externas conservadas e fazendo em seguida $k^0 = 0$, onde k^μ é o momento da partícula trocada. Em termos deste “propagador”, o cálculo do potencial é feito via a seguinte simples expressão

$$E_D = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\vec{k} \mathcal{P}_{\mu\nu}(\vec{k}) \Delta^{\mu\nu}(\vec{k}), \quad (1.35)$$

onde

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{k}) = \int \int d^{D-1}\vec{x} d^{D-1}\vec{y} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} \frac{J^\mu(x) J^\nu(y)}{2}. \quad (1.36)$$

É importante notar que na prática esta integral é trivial uma vez que ela é uma integral envolvendo deltas de Dirac. De fato, como $J^\mu(x) = \eta^{\mu 0} [Q_1 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) + Q_2 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_2)]$, (1.35) se reduz a

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathcal{P}_{00}(\vec{k}). \quad (1.37)$$

Em resumo, construímos uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial D-dimensional [16]. Esta prescrição pode ser estendida para modelos escalares e tensoriais.

No caso da eletrodinâmica de LW, obtemos prontamente usando (1.7), a seguinte expressão para $\mathcal{P}_{\mu\nu}(\vec{k})$:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(\vec{k}) = \left[\frac{1}{\vec{k}^2} - \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} \right] \eta_{\mu\nu}. \quad (1.38)$$

Conseqüentemente o potencial D-dimensional pode ser calculado através da expressão

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left[\frac{1}{\vec{k}^2} - \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} \right], \quad (1.39)$$

a qual coincide, obviamente, com a expressão (1.19) obtida anteriormente.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Deser and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **48** 975 (1982).
- [2] A. Cucchieri, M. Porrati and S. Deser, *Phys. Rev. D* **51** 4543 (1995).
- [3] A. Accioly and M. Dias, *Int. J. Theor. Phys.* **44** 1123 (2005).
- [4] A. Accioly, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **127** 100 (2004).
- [5] A. Accioly and M. Dias, *Mod. Phys. Lett. A* **19** 817 (2004).
- [6] A. Accioly and M. Dias, *Int. J. Mod. Phys. A* **21** 559 (2006).
- [7] S. Coleman, in *Proceedings of Erice 1969, Ettore Majorana School on Subnuclear Phenomena* (Academic Press, New York, 1970), pp. 282-327.
- [8] T. Lee and G. Wick, *Nucl. Phys. B* **9**, 209 (1969).
- [9] T. Lee, *Phys. Rev. D* **2**, 1033 (1970).
- [10] T. Lee, in *Quanta* edited by P. G. O. Freund, C. J. Goebel, and Y. Nambu (Chicago U. P., Chicago, 1970), p.260.
- [11] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 2007), pp. 397.

- [12] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 2007), pp. 492.
- [13] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 2007), pp. 676.
- [14] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 2007), pp. 679.
- [15] S. Wolfram, *The Wolfram Functions Site* (<http://functions.wolfram.com>).
- [16] A. Accioly, G. Correia, P. Gaete, and W. Herdy, *Coulomb's law modification in D-dimensional electromagnetic models* (submetido à publicação no International Journal of Modern Physics A).

Parte II

MODELOS GRAVITACIONAIS D-DIMENSIONAIS

As teorias de gravitação com derivadas de ordem superior em 3+1 dimensões foram sugeridas por Weyl [1] e Eddington [2]. Estas teorias nada mais eram que simples generalizações da relatividade geral obtidas, a grosso modo, acrescentando-se à Lagrangiana de Einstein os escalares R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$. Uma interessante discussão sobre estas teorias pode ser encontrada em Havas [3]. Verificou-se mais tarde que, devido ao teorema de Gauss-Bonnet, somente era necessário considerar dois dos termos quadráticos acima mencionados. Assim sendo, as Teorias de Gravitação de Ordem Superior passaram, em geral, a serem definidas pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right),$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$, sendo G a constante de Newton, e α e β parâmetros arbitrários.

Com a constatação de que a gravitação não era renormalizável dentro do esquema perturbativo padrão, as teorias de gravitação de ordem superior, consideradas até então como simples extensões da relatividade geral, passaram a ocupar um lugar de destaque na busca por uma Teoria de Gravitação Quântica. Neste sentido é digno de nota o magistral trabalho de Stelle de 1977 [4], no qual é demonstrado que as Teorias de Ordem Superior são renormalizáveis juntamente com os seus acoplamentos com a matéria. Infelizmente estas teorias não são unitárias devido à presença de um *ghost* massivo de spin-2. Em 1986, Antoniadis e Tomboulis [5] argumentaram que a presença do *ghost* massivo de spin-2 no propagador nu era inconclusiva, já que esta excitação era instável. De acordo com eles, a posição dos pólos complexos no propagador vestido é explicitamente dependente de *gauge*. Utilizando argumentos padrões de Teoria Quântica de Campos eles concluíram que as Teorias de Gravitação de Ordem Superior são unitárias. No ano seguinte Johnston [6] provou que as conjecturas de Antoniadis e Tomboulis não eram verdadeiras, uma vez que o par de pólos complexos que aparecem no propagador re-somado são independentes de *gauge*, implicando na não-unitariedade das teorias de gravitação com derivadas de ordem superior.

Assim, acreditava-se até 2009 que as Teorias Gravitacionais de Ordem Superior não

eram unitárias. Isto explica, em parte, o grande interesse que a teoria de gravitação massiva em 2+1 dimensões [7] provocou e, de certo modo continua provocando, na comunidade científica já que a sua versão linearizada é unitária ao nível de árvore.

Neste capítulo realizamos um estudo da unitariedade ao nível de árvore das Teorias de Gravitação de Ordem Superior em D dimensões. Como esta análise requer a utilização apenas da versão linearizada do modelo, iniciamos a nossa discussão apresentando uma versão linearizada do Teorema de Gauss-Bonnet. Uma vez discutida a questão da unitariedade ao nível de árvore do sistema, calculamos o potencial interpartícula D-dimensional deste modelo e estudamos o comportamento deste potencial para pequenas distâncias. Concluimos o capítulo apresentando uma prescrição bastante simples para o cômputo da energia potencial interpartícula para modelos gravitacionais D-dimensionais [8].

Em nossa convenção o tensor Ricci é definido por $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda} \equiv \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \dots$.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Weyl, *Space-Time- Matter* Dover, New York (1952), Chap. IV.
- [2] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed, Cambridge University Press (1924), Chap. IV.
- [3] P. Havas, *General Relativity and Gravitation* **8** 631 (1977).
- [4] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977).
- [5] I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33** 2756 (1986).
- [6] D.A. Johnston, *Nuclear Physics B* **297** 721 (1988).
- [7] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102** 201301 (2009).
- [8] A. Accioly, F. E. Barone, F. A. Barone, and W. Herdy, *A simple prescription for computing the interparticle potential energy for D-dimensional gravity theories* (submetido à publicação na Classical and Quantum Gravity).

Capítulo 2

Energia Potencial D-Dimensional para a Gravitação de Ordem Superior

Iniciamos apresentando uma prescrição para o cômputo do propagador concernente à teoria de gravitação em D dimensões. O algoritmo é então utilizado para a obtenção do respectivo propagador. A unitariedade ao nível de árvore de modelos gravitacionais D -dimensionais contendo derivadas de ordem superior é então analisada. O potencial interpartículas para estes sistemas é calculado e seu comportamento para pequenas distâncias é estudado. Finalizamos apresentando um método simples para o cálculo do potencial relativo à modelos gravitacionais D -dimensionais, o qual é construído através de uma análise acurada do processo utilizado para a obtenção do potencial para as teorias de gravitação com derivadas de ordem mais alta em D dimensões.

2.1 A Lagrangiana da Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional

Antes de definirmos a Lagrangiana para os modelos de gravitação de ordem superior D-dimensionais, vamos rever alguns resultados da assim chamada aproximação de campo fraco [1-3].

2.1.1 A aproximação de campo fraco

Um campo gravitacional fraco é descrito por uma métrica que difere muito pouco da métrica de Minkowski, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde $\kappa^2 = 4\pi\kappa_D$, sendo κ_D a constante de Einstein D-dimensional.

A inversa de $g_{\mu\nu}$, por sua vez, pode ser escrita como

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\alpha} h_{\alpha}{}^{\nu} + \dots \quad (2.2)$$

- *Símbolos de Christoffel*

Os símbolos de Christoffel são definidos como,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} [g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}].$$

Em primeira ordem em κ eles assumem a forma

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} [h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\nu} + h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\lambda}]. \quad (2.3)$$

- *Tensor de Riemann*

O tensor de Riemann é definido como,

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} [g_{\mu\nu,\lambda\rho} + g_{\lambda\rho,\mu\nu} - g_{\lambda\nu,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\lambda\nu}].$$

Da expressão anterior obtemos prontamente a sua forma linearizada, ou seja,

$$R_{\lambda\mu\nu\rho}(\text{lin}) = \frac{\kappa}{2}[h_{\mu\nu,\lambda\rho} + h_{\lambda\rho,\mu\nu} - h_{\lambda\nu,\mu\rho} - h_{\mu\rho,\lambda\nu}] \quad (2.4)$$

- *Tensor de Ricci*

Contraindo o tensor de Riemann linearizado com $\eta^{\mu\nu}$, encontramos o tensor de Ricci linearizado

$$R_{\mu\nu}(\text{lin}) = \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\nu\rho}(\text{lin}) = \frac{\kappa}{2}[\square h_{\mu\nu} - \eta^{\lambda\rho}(\gamma_{\lambda\mu,\nu\rho} + \gamma_{\lambda\nu,\mu\rho})], \quad (2.5)$$

onde as quantidades $\gamma_{\lambda\mu}$ são as seguintes combinações lineares de $h_{\lambda\mu}$,

$$\gamma_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\mu}h, \quad h \equiv \eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma} \quad (2.6)$$

- *Escalar de Curvatura*

Finalmente, contraindo o tensor de Ricci linearizado com $\eta^{\mu\nu}$, encontramos o escalar de curvatura linearizado $R(\text{lin})$

$$R(\text{lin}) = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\text{lin}) = \eta^{\mu\nu} \frac{\kappa}{2}[\square h_{\mu\nu} - \eta^{\lambda\rho}(\gamma_{\lambda\mu,\nu\rho} + \gamma_{\lambda\nu,\mu\rho})],$$

segue-se que

$$R(\text{lin}) = \kappa[\frac{1}{2}\square h - \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\gamma_{\lambda\mu,\nu\rho}]. \quad (2.7)$$

- *a densidade tensorial*

Lembrando que $\det A = e^{\text{tr} \ln A}$, podemos calcular $\sqrt{(-1)^{D-1}g(\text{lin})}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sqrt{(-1)^{D-1}g(\text{lin})} &= \{(-1)^{D-1} \det g_{\mu\nu}(\text{lin})\}^{\frac{1}{2}} = \{(-1)^{D-1} \exp[\text{tr} \ln(g_{\mu\nu}(\text{lin}))]\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{(-1)^{D-1} \exp \text{tr} \ln[\eta_{\mu\alpha}(\delta^\alpha_\nu + \kappa h^\alpha_\nu)]\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{(-1)^{D-1}(\det \eta_{\mu\alpha}) \exp \text{tr} \ln(\delta^\alpha_\nu + \kappa h^\alpha_\nu)\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como $\kappa \ll 1$, podemos expandir $\ln(\delta^\alpha_\nu + \kappa h^\alpha_\nu)$, obtendo

$$= \{(-1)^{D-1}(\det \eta_{\mu\alpha})[\exp \text{tr}(\kappa h^\alpha_\nu - \frac{\kappa^2}{2}h^{\alpha\beta}h_{\beta\nu} + \dots)]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{D-1}(\det \eta_{\mu\alpha})[\exp \frac{1}{2}(\kappa h - \frac{\kappa^2}{2}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \dots)] \\
&= (-1)^{D-1}(\det \eta_{\mu\alpha})[1 + (\frac{\kappa h}{2} - \frac{\kappa^2}{4}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \dots) + \frac{1}{2!}(\frac{\kappa h}{2} - \frac{\kappa^2}{4}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \dots)^2 + \dots] \\
&= (-1)^{D-1}(\det \eta_{\mu\alpha})[1 + \frac{\kappa}{2}h - \frac{\kappa^2}{4}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \frac{\kappa^2 h^2}{8} + \dots].
\end{aligned}$$

Os termos $(-1)^{D-1}(\det \eta_{\mu\alpha})$ terão sempre como resultado $+1$, pois se D é par, temos $(-1)(-1) = 1$ e se D é ímpar, temos $(1)(1) = 1$.

Portanto, em um espaço-tempo em D dimensões, com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, \dots)$,

$$\sqrt{(-1)^{D-1}g(\text{lin})} = 1 + \frac{\kappa}{2}h - \frac{\kappa^2}{4}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \frac{\kappa^2 h^2}{8} + \dots \quad (2.8)$$

• *Forma “gama-gama” da gravitação de Einstein*

Uma forma simples de reescrever o termo livre da Lagrangiana de Einstein é colocá-lo na forma “gama-gama”, ou seja, escrevê-lo como produtos de símbolos de Christoffel. Vamos então calcular a forma “gama-gama” para a gravitação de Einstein em D dimensões. A ação de Einstein em D dimensões pode ser escrita como

$$S = \int d^N x \sqrt{(-1)^{D-1}g} \frac{2\sigma}{\kappa^2} R = \int d^N x \sqrt{(-1)^{D-1}g} \frac{2\sigma}{\kappa^2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

onde $R_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$ e $\sigma = \pm 1$. Definindo a densidade tensorial $H^{\mu\nu} \equiv \sqrt{(-1)^{D-1}g}(g^{\mu\nu})$, obtemos

$$H^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = H^{\mu\nu} [-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}].$$

Usando as relações

$$H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = \partial_{\alpha}[H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}] - H^{\mu\nu}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}, \quad H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} = \partial_{\nu}[H^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}] - H^{\mu\nu}_{,\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha},$$

temos que

$$S = \frac{2\sigma}{\kappa^2} \int d^N x H^{\mu\nu} (-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) + H^{\mu\nu}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - H^{\mu\nu}_{,\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}.$$

Levando em conta que a derivada covariante de $H^{\mu\nu}{}_{,\alpha}$ é igual a zero, obtemos

$$H^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = H^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\beta\alpha} - H^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} - H^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}.$$

Substituindo $H^{\mu\nu}{}_{,\alpha}$ e $H^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ em S , chegamos finalmente à forma “gama-gama” da ação da teoria de Einstein em D dimensões, ou seja,

$$S = \frac{2\sigma}{\kappa^2} \int d^N x \sqrt{(-1)^{D-1}g} g^{\mu\nu} [-\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}]. \quad (2.9)$$

Note que essa ação contém somente derivadas primeiras da métrica.

2.1.2 O Teorema de Gauss-Bonnet linearizado

Seria importante generalizar a gravitação em D dimensões através da adição de um ou mais termos com derivadas de ordem superior à sua ação, a fim de obtermos uma teoria renormalizável. Existe uma maneira de conseguir a generalização que estamos buscando: incluir os termos com derivadas quárticas $\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1}g} (\frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2}R^2_{\mu\nu} + \frac{\gamma}{2}R^2_{\mu\nu\lambda\rho})$ na ação da gravitação usual.

Em 3+1 dimensões, como é bem conhecido, os escalares quadráticos R^2 , $R^2_{\mu\nu}$ e $R^2_{\mu\nu\alpha\beta}$ não são independentes devido ao Teorema de Gauss-Bonnet

$$\int \sqrt{-g} (R^2 - 4R^2_{\mu\nu} + R^2_{\mu\nu\alpha\beta}) = 0. \quad (2.10)$$

O termo de Gauss-Bonnet é um invariante topológico em quatro dimensões, o que significa que ele não contribui para as equações de campo clássicas da gravitação. Para dimensões $D = 3$ e $D > 4$ este Teorema não mais se aplica. Como estamos interessados no estudo da unitariedade ao nível de árvore de Teorias de Gravitação de Ordem Superior em dimensões $D > 2$, onde se trabalha com a versão linearizada da teoria, seria interessante construirmos uma versão linearizada do teorema de Gauss-Bonnet [4]. Considere, neste espírito, a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{D-1}g} (R^2 - 4R^2_{\mu\nu} + R^2_{\mu\nu\alpha\beta}) \quad (2.11)$$

Vamos linearizar esta Lagrangiana via a relação (2.1).

Utilizando (2.4), (2.5) e (2.7), obtemos prontamente as seguintes expressões para os termos quadráticos

$$\begin{aligned}
R^2(\text{lin}) &= \frac{\kappa^2}{4} [4\Box h\Box h + 4\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - 8\Box h\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}], \\
-4R_{\mu\nu}^2(\text{lin}) &= \frac{\kappa^2}{4} [-4\Box h_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu} + 8\Box h_{\mu\nu}\partial^\nu\partial_\alpha h^{\mu\alpha} + 8\Box h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu h - \\
&\quad -8\partial_\nu\partial^\alpha h_{\mu\alpha}\partial^\mu\partial_\beta h^{\nu\beta} - 4\partial_\mu\partial_\nu h\partial^\mu\partial^\nu h], \\
R_{\alpha\mu\nu\beta}^2(\text{lin}) &= \frac{\kappa^2}{4} [4\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h^{\mu\nu} + 4\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu h^{\alpha\beta} - 8\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\beta h^{\nu\alpha}].
\end{aligned}$$

Como a gravitação é invariante por difeomorfismos, podemos escrever estas relações, sem perda de generalidade, em um *gauge* conveniente. Em nosso caso, vamos utilizar o *gauge* de de Donder ($\partial_\mu\gamma^{\mu\nu} = 0$), a fim de simplificarmos nossos cálculos. Neste *gauge* as equações precedentes assumem a forma

$$\begin{aligned}
R^2(\text{lin}) &= \kappa^2\Box h\Box h, \\
-4R_{\mu\nu}^2(\text{lin}) &= -\kappa^2\Box h_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu}, \\
R_{\alpha\mu\nu\beta}^2(\text{lin}) &= \kappa^2(\Box h_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu} - \Box h\Box h).
\end{aligned}$$

Substituindo as relações acima em (2.11) concluimos que o Teorema de Gauss-Bonnet linearizado é válido para $D > 3$. Para $D=3$, por outro lado, tanto o tensor de curvatura quanto o tensor de Ricci tem o mesmo número de componentes [5]. Consequentemente, em cálculos ao nível de árvore, podemos considerar como a versão mais simples de uma Teoria de Gravitação com Derivadas de Ordem Superior aquela cuja Lagrangiana é uma combinação linear dos escalares R , R^2 e $R_{\mu\nu}^2$ linearizados. Esta definição vale, obviamente, para $D > 2$.

2.1.3 A Lagrangiana

Em consequência do exposto anteriormente, vamos utilizar a seguinte Lagrangiana na obtenção do propagador

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{D-1}g(\text{lin})} \left(\frac{2\sigma}{\kappa^2} R(\text{lin}) + \frac{\alpha}{2} R^2(\text{lin}) + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2(\text{lin}) \right).$$

Como esta Lagrangiana é invariante de *gauge*, precisamos fixar o *gauge*. Isto pode ser feito adicionando-se à Lagrangiana anterior uma Lagrangiana fixadora de *gauge* apropriada. No *gauge* de de Donder, a Lagrangiana fixadora de *gauge* é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{fg}} = \frac{1}{2\lambda} (\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu})^2,$$

onde λ é o parâmetro de *gauge*.

Podemos então escrever \mathcal{L} como

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{D-1}g(\text{lin})} \left(\frac{2\sigma}{\kappa^2} R(\text{lin}) + \frac{\alpha}{2} R^2(\text{lin}) + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2(\text{lin}) \right) + \frac{1}{2\lambda} (\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu})^2. \quad (2.12)$$

2.2 O propagador da Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional

Com o objetivo de encontrar a expressão para a energia potencial não-relativística entre duas massas pontuais, precisamos calcular o propagador para teorias usuais de spin 2. O trabalho de computar o propagador é enormemente reduzido quando trabalhamos numa base conveniente de operadores.

2.2.1 Uma prescrição para o cálculo do propagador do gráviton em D dimensões, e uma lista de algumas identidades que facilitam esta tarefa

Um conjunto completo de operadores em D dimensões para teorias de spin 2 é fornecido pelos operadores de Barnes-Rivers, os quais são definidos, no espaço dos momentos,

como se segue [6,7]

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{(D-1)}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (2.13)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda}), \quad (2.14)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{(D-1)}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (2.15)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (2.16)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (2.17)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (2.18)$$

onde $\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ e $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ são, respectivamente, os projetores transversais e longitudinais usuais.

No referencial de repouso de campos tensoriais massivos, $P^{(2)}$ e $P^{(1)}$ projetam as partes de spin-2 e de spin-1, enquanto que $P^{(0-s)}$ e $P^{(0-w)}$ projetam as duas partes de spin-0 do campo. $P^{(0-sw)}$ e $P^{(0-ws)}$ são os operadores de transferência de spin-0 ou operadores de mapeamento.

A família de operadores $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, $P^{(0-s)}$ e $P^{(0-w)}$ são idempotentes, mutuamente ortogonais e formam uma álgebra fechada. No entanto, para termos um conjunto completo no espaço correspondente, devemos incluir os outros dois operadores, $P^{(0-sw)}$ e $P^{(0-ws)}$.

A representação da unidade em qualquer álgebra de operadores de projeção é a soma dos operadores que se encontram na diagonal principal. Sendo assim,

$$[P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2}[\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}] = \mathbf{I}_{\mu\nu,\kappa\lambda}.$$

\mathbf{I} é portanto a representação da unidade para a álgebra formada pelos operadores $\{P^{(2)}, P^{(1)}, P^{(0-s)}, P^{(0-w)}\}$. Pode-se mostrar de maneira trivial que \mathbf{I} é também a identidade para os operadores de Barnes-Rivers acima definidos.

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

Tabela 2.1: Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers

Para calcular o propagador do gráviton, precisamos expandir o operador de onda $\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ em termos dos operadores de projeção de Barnes-Rivers. Chamamos a atenção para o fato de que o operador de onda $\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ é simétrico na troca de μ por ν , de α por β , e de $\mu\nu$ por $\alpha\beta$.

A tarefa de expandir o operador \mathcal{O} é enormemente facilitada se utilizarmos as seguintes identidades tensoriais [4]

$$[P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}), \quad (2.19)$$

$$\left[(D-1)P^{(0-s)} + P^{(0-w)} + \sqrt{D-1}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda}, \quad (2.20)$$

$$[2P^{(1)} + 4P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\kappa}k_\nu k_\lambda + \eta_{\mu\lambda}k_\nu k_\kappa + \eta_{\nu\lambda}k_\mu k_\kappa + \eta_{\nu\kappa}k_\mu k_\lambda), \quad (2.21)$$

$$\left[2P^{(0-w)} + \sqrt{D-1}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\nu}k_\kappa k_\lambda + \eta_{\kappa\lambda}k_\mu k_\nu), \quad (2.22)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \frac{1}{k^4}(k_\mu k_\nu k_\kappa k_\lambda). \quad (2.23)$$

Escrevendo o operador \mathcal{O} na forma genérica,

$$\mathcal{O} = x_1 P^{(1)} + x_2 P^{(2)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)},$$

e expandindo genericamente seu inverso, ou seja, o propagador \mathcal{O}^{-1} , obtemos

$$\mathcal{O}^{-1} = y_1 P^{(1)} + y_2 P^{(2)} + y_s P^{(0-s)} + y_w P^{(0-w)} + y_{sw} P^{(0-sw)} + y_{ws} P^{(0-ws)}.$$

Levando em conta que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = \mathbf{I} = P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}$, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$x_1 y_1 = 1, \quad x_2 y_2 = 1,$$

$$x_s y_s + x_{sw} y_{ws} = 1,$$

$$x_w y_w + x_{ws} y_{sw} = 1,$$

$$x_s y_{sw} + x_{sw} y_w = 0,$$

$$x_w y_{ws} + x_{ws} y_s = 0.$$

Resolvendo o sistema de equações acima, encontramos o propagador

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_s x_w - x_{sw} x_{ws}} \left[x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)} \right]. \quad (2.24)$$

2.2.2 O cálculo do propagador

Para encontramos o operador de onda, precisamos deixar a Lagrangiana da Gravitação de Ordem Superior D-dimensional (2.12), já com o termo de fixação de *gauge*, em um formato específico relacionado aos bósons neutros,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{O}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (2.25)$$

Seja, então, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_{\text{fg}}$, onde

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{(-1)^{D-1} g(\text{lin})} \left(\frac{2\sigma}{\kappa^2} R(\text{lin}) \right), \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{(-1)^{D-1} g(\text{lin})} \left(\frac{\alpha}{2} R^2(\text{lin}) \right), \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}_3 = \sqrt{(-1)^{D-1} g(\text{lin})} \left(\frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2(\text{lin}) \right), \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fg}} = \frac{1}{2\lambda} (\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu})^2. \quad (2.29)$$

Estas Lagrangianas e respectivos operadores de onda podem ser escritos no espaço dos momentos como

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\sigma}{2} \left\{ h_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}k^2 + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}k^2) - \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}k^\nu k^\beta + \eta^{\nu\alpha}k^\mu k^\beta + \eta^{\mu\beta}k^\nu k^\alpha + \eta^{\nu\beta}k^\mu k^\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta) - (\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}k^2) \right] h_{\alpha\beta} \right\},$$

$$\mathcal{O}_1^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sigma k^2 \left[P^{(2)} - (D-2)P^{(0-s)} \right]^{\mu\nu,\alpha\beta}; \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\alpha}{2} \kappa^2 h_{\mu\nu} \left[\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}k^4 - \eta^{\mu\nu}k^2 k^\alpha k^\beta - \eta^{\alpha\beta}k^2 k^\mu k^\nu + k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta \right] h_{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{O}_2^{\mu\nu,\alpha\beta} = \alpha \kappa^2 k^4 \left[(D-1)P^{(0-s)} \right]^{\mu\nu,\alpha\beta}; \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\beta}{2} \frac{\kappa^2}{4} h_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}k^4 + \frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}k^4 - \frac{1}{2}\eta^{\nu\alpha}k^2 k^\mu k^\beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}k^2 k^\nu k^\beta - \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}k^2 k^\mu k^\alpha - \frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}k^2 k^\nu k^\alpha - \right. \\ \left. - \eta^{\alpha\beta}k^2 k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu}k^2 k^\alpha k^\beta + 2k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}k^4 \right] h_{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{O}_3^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{\beta \kappa^2}{4} k^4 \left[P^{(2)} + DP^{(0-s)} \right]^{\mu\nu,\alpha\beta}; \quad (2.32)$$

$$\mathcal{L}_{fg} = \frac{1}{2\lambda} h_{\mu\nu} \left[\frac{1}{4}\eta^{\mu\beta}k^\nu k^\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\nu\beta}k^\mu k^\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}k^\nu k^\beta + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\eta^{\nu\alpha}k^\mu k^\beta - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}k^2 \right] h_{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{O}_{fg}^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{4\lambda} k^2 \left[2P^{(1)} + (D-1)P^{(0-s)} + P^{(0-w)} - \sqrt{D-1}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right]^{\mu\nu,\alpha\beta}. \quad (2.33)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta} &= \left(\sigma + \frac{\beta\kappa^2 k^2}{4}\right) k^2 [P^{(2)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{k^2}{2\lambda} [P^{(1)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+ \left[-(D-2)\sigma + (D-1)\alpha\kappa^2 k^2 + (D)\frac{\beta\kappa^2 k^2}{4} + (D-1)\frac{1}{4\lambda}\right] k^2 [P^{(0-s)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+ \frac{k^2}{4\lambda} [P^{(0-w)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{k^2}{4\lambda} \sqrt{D-1} [P^{(0-sw)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{k^2}{4\lambda} \sqrt{D-1} [P^{(0-ws)}]^{\mu\nu,\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Invertendo este operador obtemos o propagador para a gravitação de Ordem Superior D-dimensional:

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}^{-1})^{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{k^2 \left(\sigma + \frac{\beta}{4}\kappa^2 k^2\right)} [P^{(2)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\lambda}{k^2} [P^{(1)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+ \frac{1}{k^2 \left[-(D-2)\sigma + (D-1)\alpha\kappa^2 k^2 + (D)\frac{\beta\kappa^2 k^2}{4}\right]} [P^{(0-s)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+ \left\{ \frac{4\lambda}{k^2} + \frac{D-1}{k^2 \left[-(D-2)\sigma + (D-1)\alpha\kappa^2 k^2 + (D)\frac{\beta\kappa^2 k^2}{4}\right]} \right\} [P^{(0-w)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\sqrt{D-1}}{k^2 \left[-(D-2)\sigma + (D-1)\alpha\kappa^2 k^2 + (D)\frac{\beta\kappa^2 k^2}{4}\right]} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}]^{\mu\nu,\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Se definirmos

$$M_2^2 \equiv -\frac{4\sigma}{\beta\kappa^2}, \quad (2.34)$$

$$M_0^2 \equiv \frac{4\sigma(D-2)}{\kappa^2(4\alpha(D-1) + D\beta)}, \quad (2.35)$$

e supormos que $-\frac{\sigma}{\beta} > 0$ e $\frac{\sigma}{(4\alpha(D-1) + D\beta)} > 0$ (condições para a não existência de táquions), podemos interpretar M_2 como a massa da partícula de spin-2 e M_0 como a massa da partícula de spin-0. Em termos destes parâmetros o propagador assume a forma

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}^{-1})^{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{M_2^2}{\sigma k^2 (M_2^2 - k^2)} [P^{(2)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\lambda}{k^2} [P^{(1)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+ \frac{M_0^2}{(D-2)\sigma k^2 (k^2 - M_0^2)} [P^{(0-s)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \left\{ \frac{4\lambda}{k^2} + \frac{(D-1)M_0^2}{(D-2)\sigma k^2 (k^2 - M_0^2)} \right\} [P^{(0-w)}]^{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\sqrt{D-1}M_0^2}{(D-2)\sigma k^2 (k^2 - M_0^2)} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}]^{\mu\nu,\alpha\beta}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

2.3 Examinando a unitariedade do modelo de Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional

A análise da unitariedade para o presente modelo gravitacional pode ser feita de forma similar ao desenvolvido na Seção 1.2. No presente caso o propagador saturado PS pode ser escrito como

$$PS = \frac{\frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2} \right)}{k^2} - \frac{\frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right)}{k^2 - M_2^2} + \frac{\frac{1}{\sigma} \left(\frac{T^2}{(D-1)(D-2)} \right)}{k^2 - M_0^2}. \quad (2.37)$$

Apresentamos abaixo um teorema útil para a análise dos pólos do propagador saturado.

2.3.1 Teorema para o estudo da unitariedade

Teorema [8]

Se M_2 é a massa de uma partícula física genérica de spin-2 associada a um modelo gravitacional D -dimensional e k o seu correspondente momento trocado, então

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) |_{k^2=M_2^2} > 0 \quad \text{e} \quad \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2} \right) |_{k^2=0} \geq 0.$$

Aqui $T^{\mu\nu} (= T^{\nu\mu})$ é a corrente conservada.

Este teorema será demonstrado com algum detalhe. Iniciamos expandindo o tensor $T^{\mu\nu}$ em uma base apropriada. O seguinte conjunto de vetores linearmente independentes, no espaço dos momentos, serve para nossos propósitos:

$$k^\mu \equiv (k^0, \vec{k}); \quad \tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\vec{k}); \quad \varepsilon_i^\mu \equiv (0, \hat{\varepsilon}_i), \quad i = 1, 2, \dots, D-2,$$

onde $\hat{\varepsilon}_i$ são vetores perpendiculares entre si e perpendiculares a \vec{k} , e com comprimento 1.

Utilizando esta base, podemos escrever o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ da seguinte maneira

$$T^{\mu\nu} = Ak^\mu k^\nu + B\tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu + C^{ij} \varepsilon_i^{(\mu} \varepsilon_j^{\nu)} + Dk^{(\mu} \tilde{k}^{\nu)} + E^i k^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)} + F^i \tilde{k}^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)}, \quad (2.38)$$

onde $a^{(\mu b^\nu)} \equiv \frac{1}{2}(a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu)$.

As seguintes contrações serão usadas com frequência

$$k_\mu k^\mu = \tilde{k}_\mu \tilde{k}^\mu = k^2, \quad k_\mu \tilde{k}^\mu = k_0^2 + \vec{k}^2, \quad k_\mu \epsilon_i^\mu = \tilde{k}_\mu \epsilon_i^\mu = 0, \quad \epsilon_i^\mu \epsilon_{j\mu} = -\delta_{ij}.$$

A conservação de corrente leva às seguintes equações

$$Ak^2 + \frac{D}{2}(k_0^2 + \vec{k}^2) = 0, \quad (2.39)$$

$$B(k_0^2 + \vec{k}^2) + \frac{D}{2}k^2 = 0, \quad (2.40)$$

$$E^i k^2 + F^i(k_0^2 + \vec{k}^2) = 0. \quad (2.41)$$

Das equações (2.39) e (2.40), obtemos

$$Ak^4 = B(k_0^2 + \vec{k}^2)^2. \quad (2.42)$$

A equação (2.41) implica em

$$(E^i)^2 > (F^i)^2. \quad (2.43)$$

Por outro lado, saturando os índices de $T^{\mu\nu}$ com k_ν e k_μ chegamos a uma relação de consistência para os coeficientes A , B e D :

$$Ak^4 + B(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + Dk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) = 0. \quad (2.44)$$

A etapa seguinte consiste no cálculo de $\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2}\right)|_{k^2=0}$. Qual o sinal de $T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2}$ quando $k^2 = 0$?

Considerando $k^2 = 0$ observamos que de acordo com a equação (2.39) o coeficiente D necessariamente precisa ser igual a 0. Do mesmo modo, de acordo com a equação (2.40), $B = 0$. E, de acordo com a equação (2.41), $F^i = 0$.

Portanto, utilizando (2.38), para $k^2 = 0$,

$$T^{\mu\nu} = Ak^\mu k^\nu + C^{ij} \epsilon_i^{(\mu} \epsilon_j^{\nu)} + E^i k^{(\mu} \epsilon_i^{\nu)},$$

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = C^{ij}\epsilon_{i(\mu}\epsilon_{\nu)j}C^{kl}\epsilon_k^{(\mu}\epsilon_l^{\nu)} = (C^{ij})^2.$$

Conseqüentemente,

$$T = -C^{ii},$$

$$T^2 = (C^{ii})^2.$$

Como resultado,

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2}\right)|_{k^2=0} = \left[(C^{ij})^2 - \frac{(C^{ii})^2}{D-2}\right].$$

Em $D = 3$, como $i = j = 1$, concluímos que

$$\left[(C^{ij})^2 - \frac{(C^{ii})^2}{D-2}\right] = (C^{ii})^2 - (C^{ii})^2 = 0. \quad (2.45)$$

Para $D > 3$, por outro lado,

$$\left[(C^{ij})^2 - \frac{(C^{ii})^2}{D-2}\right] > 0.$$

Portanto,

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2}\right)|_{k^2=0} \geq 0. \quad (2.46)$$

Vamos agora determinar o sinal de $T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1}$ quando $k^2 = M_2^2$.

De (2.44) obtemos prontamente

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = & \underbrace{A^2k^4 + AB(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + ADk^2(k_0^2 + \vec{k}^2)}_a + AB(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + B^2k^4 + \\ & + \underbrace{BDk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) + \frac{D^2}{2}k^4}_{b} + (C^{ij})^2 + \underbrace{ADk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) + \frac{D^2}{2}(k_0^2 + \vec{k}^2)^2}_c + \\ & + BDk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) - \underbrace{\frac{(E^i)^2}{2}k^2 - \frac{E^i F^i}{2}(k_0^2 + \vec{k}^2)}_d - \frac{(F^i)^2}{2}k^2 - \frac{E^i F^i}{2}(k_0^2 + \vec{k}^2). \end{aligned}$$

Calculando a , utilizando (2.44) obtemos

$$a = A \left[\underbrace{Ak^4 + B(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + Dk^2(k_0^2 + \vec{k}^2)}_0 \right] = 0.$$

Calculando b , utilizando (2.40) encontramos que

$$b = Dk^2 \left[\underbrace{B(k_0^2 + \vec{k}^2) + \frac{D}{2}k^2}_0 \right] = 0.$$

Calculando c , utilizando (2.39) podemos escrever

$$c = D(k_0^2 + \vec{k}^2) \left[\underbrace{Ak^2 + \frac{D}{2}(k_0^2 + \vec{k}^2)}_0 \right] = 0.$$

Calculando d , utilizando (2.41) concluimos que

$$d = -\frac{-E^i}{2} \left[\underbrace{E^i k^2 + F^i(k_0^2 + \vec{k}^2)}_0 \right] = 0.$$

Substituindo a, b, c e d e reordenando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} &= AB(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + B^2k^4 + BDk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) + \\ &\quad + (C^{ij})^2 - \frac{(F^i)^2}{2}k^2 - \frac{E^i F^i}{2}(k_0^2 + \vec{k}^2). \end{aligned}$$

Utilizando (2.42), (2.39) e (2.41) podemos escrever

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = A^2k^4 - 2ABk^4 + B^2k^4 + (C^{ij})^2 - \frac{(F^i)^2}{2}k^2 + \frac{(E^i)^2}{2}k^2,$$

ou seja,

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = (A - B)^2k^4 + (C^{ij})^2 + \frac{k^2}{2} [(E^i)^2 - (F^i)^2], \quad (2.47)$$

que demonstra, utilizando (2.43), que $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} > 0$.

Por outro lado,

$$T = Ak^2 + Bk^2 - C^{ii} + D(k_0^2 + \vec{k}^2) = Bk^2 - Ak^2 - C^{ii} = (B - A)k^2 - C^{ii}. \quad (2.48)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T^2 &= A^2k^4 + B^2k^4 - 2ABk^4 + 2AC^{ii}k^2 - 2BC^{ii}k^2 + (C^{ii})^2, \\ T^2 &= (A - B)^2k^4 + 2(A - B)C^{ii}k^2 + (C^{ii})^2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

De (2.47) e (2.49), temos

$$\begin{aligned} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) \Big|_{k^2=M_2^2} &= (A - B)^2k^4 + (C^{ij})^2 + \frac{k^2}{2} [(E^i)^2 - (F^i)^2] - \\ &\quad - \frac{(A - B)^2k^4}{D-1} - \frac{2(A - B)C^{ii}k^2}{D-1} - \frac{(C^{ii})^2}{D-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) \Big|_{k^2=M_2^2} &= \underbrace{\frac{D-2}{D-1}(A - B)^2k^4}_{>0} + \underbrace{(C^{ij})^2 - \frac{(C^{ii})^2}{D-1}}_{>0} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{k^2}{2} [(E^i)^2 - (F^i)^2]}_{>0} - \frac{2(A - B)C^{ii}k^2}{D-1}. \end{aligned}$$

Os termos indicados pelas chaves claramente são positivos. Só resta verificar o sinal do último termo. Para isso, vamos considerar o traço do tensor (2.48),

$$T = (B - A)k^2 - C^{ii}.$$

Estamos considerando que $k^2 = M_2^2$ e $M_2^2 > 0$ (não existência de táquions). Partículas físicas com massa diferente de zero possuem o traço do tensor energia-momento sempre positivo. Por esta razão, em (2.48), $(B - A) > 0$.

Logo, no último termo, $(A - B) < 0$ e portanto o termo $-\frac{2(A-B)C^{ii}k^2}{D-1}$ é também positivo.

Logo,

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) \Big|_{k^2=M_2^2} > 0. \quad (2.50)$$

Vamos agora usar este Teorema para checar a unitariedade do modelo Gravitacional de Ordem Superior D-dimensional.

2.3.2 Analisando a unitariedade: o resíduo em cada pólo

No propagador saturado (2.37) existem os seguintes pólos: $k^2 = 0$, $k^2 = M_2^2$ e $k^2 = M_0^2$.

Os resíduos em cada um destes pólos valem:

$$Res(PS)|_{k^2=0} = \frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2} \right) \Big|_{k^2=0},$$

$$Res(PS)|_{k^2=M_2^2} = -\frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) \Big|_{k^2=M_2^2},$$

$$Res(PS)|_{k^2=M_0^2} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{T^2}{(D-1)(D-2)} \right) \Big|_{k^2=M_0^2}.$$

Consequentemente o modelo carrega três modos de excitação na concha de massa: um gráviton (spin-2 sem massa), uma partícula massiva de spin-2, e uma partícula massiva de spin-0.

Vamos agora verificar se $Res(PS) \geq 0$ em cada um dos pólos.

Caso I: $\sigma = +1$

Utilizando (2.46), temos que

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2} \right) \Big|_{k^2=0} \geq 0.$$

Utilizando (2.50), obtemos

$$-\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) \Big|_{k^2=M_2^2} < 0.$$

Obviamente,

$$\left(\frac{T^2}{(D-1)(D-2)} \right) \Big|_{k^2=M_0^2} > 0.$$

Conseqüentemente, o modelo é composto de uma partícula de massa nula e spin-2 (o gráviton), uma partícula massiva de spin-0, e um *ghost* massivo de spin-2 que viola a unitariedade.

Em particular, quando $D = 3$, conforme (2.45), $(T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0$, e a partícula de massa nula e spin-2 não é excitada. Este resultado é bastante conhecido visto ser a gravitação de Einstein em $D = 3$ trivial fora das fontes. Para $D > 3$, a partícula é incorporada ao modelo.

Caso II: $\sigma = -1$

Os resíduos em cada um dos pólos tem os seguintes sinais:

$$\begin{aligned}
 & - \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2} \right) |_{k^2=0} \leq 0, \\
 & \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) |_{k^2=M_2^2} > 0, \\
 & - \left(\frac{T^2}{(D-1)(D-2)} \right) |_{k^2=M_0^2} < 0.
 \end{aligned}$$

Este modelo é portanto, composto de uma partícula massiva de spin-2, e dois *ghosts*, sendo um de massa nula e spin-2, e outro massivo de spin-0. Conseqüentemente, a teoria também não é unitária ao nível de árvore.

No caso específico onde $D = 3$, vimos que a partícula de massa nula e spin-2 não é excitada, pois o resíduo é igual a zero. O pólo problemático é $k^2 = M_0^2$, onde o resíduo é negativo. No entanto, existe uma particular combinação entre os parâmetros α e β na Lagrangiana (2.12), no limite $M_0^2 \rightarrow \infty$, que implica em $\alpha = -\frac{3}{8}\beta$. E, neste caso, o modelo fica livre de *ghosts* ao nível de árvore. Esta situação em particular é conhecida como modelo BHT [9,10] para a gravidade massiva em $D = 3$.

2.4 A energia potencial interpartículas D-dimensional para a Gravitação de Ordem Superior

No caso da gravitação D-dimensional,

$$W_D(T) = -\frac{\kappa_D}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T^{\mu\nu}(k) P_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) T^{\alpha\beta}(k), \quad (2.51)$$

onde $T_{\mu\nu}(k)$ é a corrente conservada e $P_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)$ é o propagador. Aqui, κ_D é a constante de Einstein D-dimensional.

2.4.1 A constante D-dimensional de Einstein

A constante de Einstein D-dimensional κ_D pode ser escrita para $D > 3$ como [11]

$$\kappa_D = \left(\frac{D-2}{D-3} \right) G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}, \quad (2.52)$$

onde G_D é a constante gravitacional em D dimensões. Em três dimensões, ao contrário da crença popular, κ_3 não pode ser relacionada à G_3 já que a relatividade geral em $D = 3$ — que é trivial — não possui limite newtoniano. Portanto, a constante de Einstein que, como é bem conhecido, é uma constante dimensional, será apenas por conveniência denotada por κ_3 em $D = 3$.

É importante notar que quando $D = 4$, κ_D se reduz ao seu valor usual em 4 dimensões,

$$\kappa_4 = 8\pi G_4. \quad (2.53)$$

2.4.2 O funcional gerador

Utilizando (2.51), obtemos

$$\begin{aligned} W_D(T) = & -\frac{\kappa_D T}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \delta(k^0) \int \int d^{D-1} \vec{x} d^{D-1} \vec{y} e^{i\vec{k}(\vec{y}-\vec{x})} \left\{ \left(\frac{M_2^2}{\sigma k^2 (M_2^2 - k^2)} \right) \times \right. \\ & \times \left[T^{\mu\nu}(x) T_{\mu\nu}(y) - \frac{T(x)T(y)}{D-1} \right] + \left(\frac{M_0^2}{(D-2)\sigma k^2 (k^2 - M_0^2)} \right) \left[\frac{T(x)T(y)}{D-1} \right] \left. \right\}. \quad (2.54) \end{aligned}$$

2.4.3 A conservação dos tensores energia-momento

Sejam duas massas pontuais m_1 e m_2 localizadas, respectivamente, em \vec{a}_1 e \vec{a}_2 no espaço. O tensor energia-momento D-dimensional assume neste caso a forma

$$T^{\mu\nu}(x)_D = \delta_0^\mu \delta_0^\nu [m_1 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) + m_2 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_2)].$$

Podemos então concluir que

$$T^{\mu\nu}(x)T_{\mu\nu}(y) = 2m_1m_2\delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1)\delta^{D-1}(\vec{y} - \vec{a}_2), \quad (2.55)$$

$$T(x)T(y) = 2m_1m_2\delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1)\delta^{D-1}(\vec{y} - \vec{a}_2). \quad (2.56)$$

2.4.4 A expressão para a energia potencial

É fácil mostrar que

$$E_D(r) = -\frac{\kappa_D m_1 m_2}{\sigma(2\pi)^{D-1}} \left[\frac{(D-3)}{(D-2)} \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{\vec{k}^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} - \frac{(D-2)}{(D-1)} \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{\vec{k}^2 + M_0^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} + \frac{1}{(D-2)(D-1)} \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{\vec{k}^2 + M_0^2} e^{i\vec{k}(\vec{r})} \right]. \quad (2.57)$$

Note que a primeira integral acima fornece a energia potencial D-dimensional da gravitação de Einstein.

2.4.5 A energia potencial D-dimensional da Gravitação de Ordem Superior para $D > 3$

Resolvendo as integrais em (2.57), obtemos, quando $D > 3$ a seguinte expressão para a energia potencial gravitacional

$$E_D(r) = -\frac{\kappa_D m_1 m_2}{\sigma(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left[\frac{(D-3)}{(D-2)} 2^{\frac{D-5}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right)}{r^{D-3}} - \frac{(D-2)}{(D-1)} \left(\frac{M_2}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(M_2 r) + \right]$$

$$+ \frac{1}{(D-2)(D-1)} \left(\frac{M_0}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(M_0 r) \Big]. \quad (2.58)$$

Vamos aplicar este resultado para o caso em que $D = 4$ e verificar que encontramos a energia potencial conhecida da Gravitação de Ordem Superior em 4 dimensões (1+3).

$$E_4(r) = -\frac{\kappa_D m_1 m_2}{\sigma (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{2} 2^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{r} - \frac{2}{3} \left(\frac{M_2}{r} \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(M_2 r) + \frac{1}{(2)(3)} \left(\frac{M_0}{r} \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(M_0 r) \right].$$

Lembrando que $K_{\frac{1}{2}}(mr) = \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} e^{-mr}$, obtemos

$$E_4(r) = -\frac{\kappa_D m_1 m_2}{\sigma} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}} r} - \frac{2}{3(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{M_2}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2M_2 r}} e^{-M_2 r} + \frac{1}{6(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{M_0}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2M_0 r}} e^{-M_0 r} \right],$$

$$E_4(r) = -\frac{\kappa_D m_1 m_2}{\sigma} \left[\frac{1}{8\pi r} - \frac{1}{6\pi r} e^{-M_2 r} + \frac{1}{24\pi r} e^{-M_0 r} \right].$$

Considerando $\sigma = 1$ e utilizando K_D para $D = 4$, (2.53), concluímos que

$$E_4(r) = -G_4 m_1 m_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{4}{3} \frac{e^{-M_2 r}}{r} + \frac{1}{3} \frac{e^{-M_0 r}}{r} \right].$$

2.4.6 A energia potencial da Gravitação de Ordem Superior para $D = 3$

É trivial mostrar que quando $D = 3$

$$E_3(r) = -\frac{\kappa_3 m_1 m_2}{4\pi\sigma} \left[-K_0(M_2 r) + K_0(M_0 r) \right].$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Lembrando que $K_\nu(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$ para $r \rightarrow \infty$, concluímos que quando $\sigma = 1$ e $D > 3$ (2.58) reproduz assintoticamente a energia potencial newtoniana. Por outro lado, se $\sigma = \pm 1$ e $D = 3$, obtemos assintoticamente a energia potencial da gravitação einsteiniana tridimensional.

2.5 Comportamento para pequenas distâncias da energia potencial da Gravitação de Ordem Superior D-dimensional

Procedendo exatamente como quando estudamos o comportamento para pequenas distâncias da energia potencial D-dimensional de Lee e Wick, concluímos que no caso da gravitação se apresentam as seguintes situações:

1. Se D é um número par > 3 e $\sigma = 1$ (condição necessária para que possamos recobrar o potencial newtoniano), a energia potencial será finita na origem caso D seja igual a 4. Nesta situação,

$$E_4(r=0) = \frac{G_4 m_1 m_2}{3} (M_0 - 4M_2), \quad (2.59)$$

onde estamos supondo que $M_0 < 4M_2$, de modo a termos uma gravitação atrativa. Portanto, diferentemente do potencial de Newton, o potencial em D=4 não é singular na origem. Para D>4 e par, o potencial será sempre divergente na origem para valores arbitrários das constantes α e β . No entanto se D=6 e $\alpha = -\frac{5}{6}\beta$, o potencial é finito na origem e a energia potencial tem o seguinte valor

$$E_6(r=0) = -\frac{16}{45} G_6 m_1 m_2 M_2^3, \quad \text{para } M_0^2 = 16M_2^2. \quad (2.60)$$

2. Se D é um número ímpar > 3 , $\sigma = 1$ (condição necessária para que possamos recobrar o potencial newtoniano) e não existem vínculos entre os parâmetros α e β , a energia potencial será divergente na origem. Porém, se $D=5$ e $\alpha = -\frac{1}{3}\beta$, o potencial é finito na origem e a energia potencial é dada por

$$E_5(r=0) = -\frac{9}{32}(\ln 3)G_5 m_1 m_2 M_2^2, \quad \text{para } M_0^2 = 9M_2^2. \quad (2.61)$$

3. Se $D=3$ e $\sigma = -1$, M_2 deve ser necessariamente menor que M_0 a fim de que o modelo resultante descreva uma interação atrativa. Neste caso,

$$E_3(r=0) = \frac{\kappa_3 m_1 m_2}{4\pi} \ln \left(\frac{M_2}{M_0} \right).$$

4. Se $D=3$ e $\sigma = 1$, M_0 deve ser necessariamente menor que M_2 a fim de garantir uma gravitação atrativa. Como resultado,

$$E_3(r=0) = \frac{\kappa_3 m_1 m_2}{4\pi} \ln \left(\frac{M_0}{M_2} \right).$$

2.6 Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial interpartícula no contexto de um modelo gravitacional D-dimensional

Analisando cuidadosamente os cálculos que nos permitiram computar a energia potencial para a gravitação D-dimensional com derivadas de ordem mais alta, podemos concluir que a energia potencial de interação entre duas massas pontuais estáticas é dada por

$$E_D = \frac{\kappa_D}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \vec{k} \mathcal{P}_{\mu\nu, \kappa\lambda}(\vec{k}) \Delta^{\mu\nu, \kappa\lambda}(\vec{k}), \quad (2.62)$$

onde $\mathcal{P}(\vec{k})_{\mu\nu, \kappa\lambda}$ é o “propagador de Feynman” para a teoria gravitacional livre no espaço dos momenta com os termos ortogonais às correntes conservadas omitidos e

com $k^0 = 0$, κ_D é a constante de Einstein D - dimensional, e

$$\Delta^{\mu\nu,\kappa\lambda}(\vec{k}) = \int \int d^{D-1}\vec{x}d^{D-1}\vec{y}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}\frac{1}{2}T^{\mu\nu}(x)T^{\kappa\lambda}(y). \quad (2.63)$$

Tendo em conta que $T^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0}\left[m_1\delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) + m_2\delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_2)\right]$, concluímos que [11]

$$E_D(r) = \frac{\kappa_D m_1 m_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathcal{P}_{00,00}(\vec{k}). \quad (2.64)$$

No caso da gravitação de ordem superior,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu,\kappa\lambda}(\vec{k}) = & \frac{1}{\sigma} \left\{ \left[-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 + M_2^2} \right] \left[\frac{1}{2}(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} \right] + \frac{1}{D-2} \left[\frac{1}{k^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{k^2 + M_0^2} \right] \frac{1}{D-1} \left[\eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Segue-se que o potencial D-dimensional pode ser computado via a expressão

$$\begin{aligned} E_D(r) = & \frac{\kappa_D}{\sigma(2\pi)^{D-1}} m_1 m_2 \left[\int d^{D-1}\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{3-D}{D-2} \frac{1}{k^2} + \int d^{D-1}\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{k^2 + M_2^2} - \right. \\ & \left. \int d^{D-1}\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{1}{k^2 + M_0^2} \right], \end{aligned} \quad (2.66)$$

a qual, como era de se esperar, coincide com (2.57).

Referências Bibliográficas

- [1] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1974).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- [3] H. C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime* (W. W. Norton and Company, New York, 1976).
- [4] A. Accioly, A. Azeredo and H. Mukai, *J. Math. Phys.* **43** 473 (2002).
- [5] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Pol.* **24**, 734 (1963).
- [6] P. Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* **60** 478 (1973).
- [7] I. Antoniadis and E. Tombouli, *Phys. Rev. D* **33** 2756 (1986).
- [8] A. Accioly and M. Dias, *Int. J. Theor. Phys.* **44** 1123 (2005).
- [9] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102** 201301 (2009).
- [10] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati, and B. Pereira-Dias, *Class. Quantum Grav.* **28** 225008 (2011).

- [11] A. Accioly, F. E. Barone, F. A. Barone, and W. Herdy, *A simple prescription for computing the interparticle potential energy for D-dimensional gravity theories* (submetido à publicação na Classical and Quantum Gravity).

Epílogo

O alvo principal desta Dissertação era construir uma prescrição simples, baseada na integral de trajetória de Feynman, para o cálculo da energia potencial D-dimensional, tanto para modelos eletromagnéticos quanto gravitacionais. Utilizando os modelos de Lee e Wick e da gravitação com derivadas de ordem superior como ponto de partida, conseguimos inferir como seria a expressão procurada. Vamos mostrar agora como construir esta prescrição usando apenas as ferramentas usuais da Teoria Quântica de Campos. A nossa prescrição será obtida, sem perda de generalidade, no contexto de um modelo eletromagnético arbitrário.

Como é bem conhecido o funcional gerador para os diagramas de Feynman conexos $W_D(J)$, está relacionado ao funcional gerador de uma dada teoria eletromagnética $Z_D(J)$, por $Z_D(J) = e^{iW_D(J)}$, onde

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \int d^D x d^D y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y).$$

Aqui $J_\mu(x)$ e $D_{\mu\nu}(x-y)$ são, respectivamente, a corrente conservada e o propagador.

Tendo em conta, por outro lado, que

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} D_{\mu\nu}(k),$$

$$J_\mu(k) = \int d^D x e^{-ikx} J_\mu(x),$$

obtemos prontamente

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} J^\mu(k)^* D_{\mu\nu}(k) J^\nu(k). \quad (2.67)$$

Esta expressão pode ser escrita como

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} J^\mu(k)^* \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) J^\nu(k), \quad (2.68)$$

onde $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ é o “propagador” no espaço dos momenta obtido negligenciando-se todos os termos do propagador usual de Feynman no espaço dos momenta que sejam ortogonais às correntes externas conservadas.

De (2.68), obtemos

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \left[\delta(k^0) T \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) \int \int d^{D-1} \vec{x} \right. \\ \left. \times d^{D-1} \vec{y} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} J^\mu(x) J^\nu(y) \right], \quad (2.69)$$

onde o intervalo de tempo T é produzido pelo fator $(\int dx^0)$.

Algumas manipulações algébrica simples, por sua vez, permitem reescrever (2.69) como

$$W_D(J) = -T \int \frac{d^{D-1} \vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} \mathcal{P}_{\mu\nu}(\vec{k}) \Delta^{\mu\nu}(\vec{k}), \quad (2.70)$$

onde $\mathcal{P}_{\mu\nu}(\vec{k}) \equiv \mathcal{P}_{\mu\nu}(k)|_{k^0=0}$, e

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{k}) = \int \int d^{D-1} \vec{x} d^{D-1} \vec{y} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} \frac{J^\mu(x) J^\nu(y)}{2}. \quad (2.71)$$

No caso específico de duas cargas Q_1 e Q_2 localizadas, respectivamente, em \vec{a}_1 e \vec{a}_2 , a corrente assume a forma

$$J^\mu(x) = \eta^{\mu 0} \left[Q_1 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) + Q_2 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_2) \right]. \quad (2.72)$$

Portanto,

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{k}) = Q_1 Q_2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}, \quad (2.73)$$

onde $\vec{r} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, e

$$W_D(J) = -T \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathcal{P}_{00}(\vec{k}). \quad (2.74)$$

Porém,

$$Z_D(J) = \langle 0 | e^{-iH_D T} | 0 \rangle = e^{-iE_D T}, \quad (2.75)$$

o que implica em

$$E_D = -\frac{W_D(J)}{T}. \quad (2.76)$$

Consequentemente, a energia potencial D-dimensional pode ser computada através da expressão simples [1]

$$E_D(r) = \frac{Q_1 Q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathcal{P}_{00}(\vec{k}). \quad (2.77)$$

Chamamos atenção para o fato que esta expressão, *mutatis mutandis*, pode ser facilmente estendida para modelos escalares e tensoriais. Por exemplo, para a interação

de duas massas m_1 e m_2 , onde $T^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0} \left[m_1 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) + m_2 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_2) \right]$, a energia potencial D-dimensional pode ser computada via a expressão [2]

$$E_D(r) = \frac{\kappa_D m_1 m_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\vec{k}). \quad (2.78)$$

No caso de duas cargas escalares σ_1 e σ_2 , com $J(x) = \sigma_1 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_1) + \sigma_2 \delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{a}_2)$, o potencial D-dimensional obedece à expressão

$$E_D(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathcal{P}(\vec{k}). \quad (2.79)$$

Esta simples prescrição para o cálculo da energia potencial interpartículas concernente à modelos escalares, eletromagnéticos e tensoriais D-dimensionais, baseada na integral de caminho de Feynman, converte a árdua tarefa de computar este potencial em um exercício algébrico trivial. Assim sendo, acreditamos que atingimos o objetivo proposto.

Um outro resultado importante obtido neste trabalho foi a descoberta de dois modelos gravitacionais de ordem superior, em $D = 5$ e $D = 6$, cuja energia potencial é finita na origem.

Concluindo, apresentamos três possíveis e interessantes continuações deste trabalho:

(i) Como o método que construímos é equivalente ao método baseado na fusão da mecânica quântica (em ordem principal, ou seja, na primeira aproximação de Born) com o limite não relativístico da teoria quântica de campos, e tendo em conta que este último se apóia basicamente no cálculo da amplitude não relativística de Feynman (\mathcal{M}_{NR}), seria interessante obter-se uma expressão simples para o cálculo de \mathcal{M}_{NR} como um subproduto da nossa prescrição.

(ii) Determinação do potencial D-dimensional para a bem conhecida extensão do Modelo Padrão na qual a eletrodinâmica sem massa $U(1)_{\text{QED}}$ está acoplada ao setor escondido $U(1)_h$ [3]. Este modelo é definido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2 B_\mu^2 - \frac{\chi}{2}F^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + J_{(A)}^\mu A_\mu + J_{(B)}^\mu B_\mu.$$

Lembrando que a nossa prescrição envolve apenas uma corrente, será necessário adaptar o modelo para o caso de duas correntes a fim de calcular a energia potencial relativa à extensão do Modelo Padrão acima mencionado.

(iii) Obtenção do potencial D-dimensional para o modelo de Kalb-Ramon que obedece à Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6}G_{\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma},$$

onde o tensor $G_{\alpha\beta\gamma}$ é totalmente antissimétrico. Tendo em conta que a corrente associada a este modelo é um tensor antissimétrico $J^{\mu\nu}$, implicando em $J^{00} = 0$, precisamos modificar a prescrição original para acomodar esta antissimetria.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, G. Correia, P. Gaete, and W. Herdy, *Coulomb's law modification in D-dimensional electromagnetic models* (submetido à publicação no International Journal of Modern Physics A).
- [2] A. Accioly, F. E. Barone, F. A. Barone, and W. Herdy, *A simple prescription for computing the interparticle potential energy for D-dimensional gravity theories* (submetido à publicação na Classical and Quantum Gravity).
- [3] M. Ahlers, H. Gies, J. Jaeckel, J. Redondo, and A. Ringwald, *Phys. Rev. D* **77**, 095001 (2008).

Apêndice **A**

Elemento de volume em coordenadas esféricas D-dimensionais

Para encontrarmos o elemento de volume em coordenadas esféricas em uma dimensão arbitrária D , precisamos calcular antes de mais nada o Jacobiano da transformação que realiza a mudança de variáveis cartesianas para esféricas.

Quando $D=2$, as coordenadas x_1 e x_2 transformam-se em r e θ_1 , onde $0 \leq \theta_1 < 2\pi$.

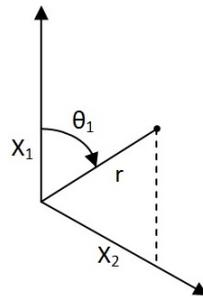


Figura A.1: Transformação de coordenadas em duas dimensões

$$x_1 = r \cos \theta_1; \quad x_2 = r \sin \theta_1.$$

Conseqüentemente, podemos calcular o Jacobiano

$$J(2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -r\text{sen}\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 & r\cos\theta_1 \end{vmatrix},$$

$$J(2) = r(\cos^2\theta_1 + \text{sen}^2\theta_1) = r.$$

Logo, o "elemento de volume" em duas dimensões assume a forma

$$dV_2 = dx_1 dx_2 = r dr d\theta_1.$$

Obviamente o termo *elemento de volume* só se aplica para $D > 2$, sendo este dV_2 acima na verdade o elemento de superfície em coordenadas polares.

Quando $D=3$, as coordenadas x_1 , x_2 e x_3 transformam-se em r , θ_1 e θ_2 , onde $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ e $0 \leq \theta_2 < 2\pi$.

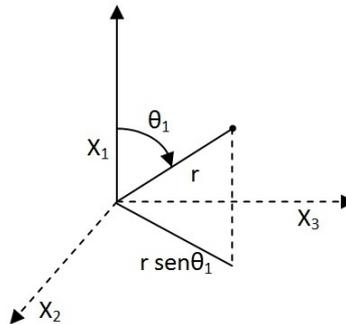


Figura A.2: Transformação de coordenadas em três dimensões (x_1)

$$x_1 = r\cos\theta_1.$$

Na Figura A.2, vemos a projeção de r à 90° de x_1 , em um espaço bidimensional.

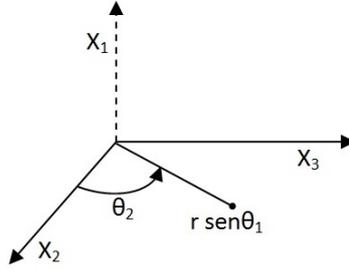


Figura A.3: Transformação de coordenadas em três dimensões (x_2 e x_3)

Finalmente, na Figura A.3, visualizamos as coordenadas x_2 e x_3 .

$$x_2 = r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$x_3 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2.$$

Podemos agora calcular o Jacobiano em três dimensões.

$$J(3) = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -r \operatorname{sen} \theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 & r \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \\ \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 & r \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 & r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \end{vmatrix},$$

$$J(3) = r^2 \operatorname{sen} \theta_1.$$

Logo, o elemento de volume em três dimensões pode ser escrito como

$$dV_3 = dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \operatorname{sen} \theta_1 dr d\theta_1 d\theta_2,$$

que nada mais é que o elemento de volume tridimensional em coordenadas esféricas.

Quando $D=4$, as coordenadas x_1, x_2, x_3 e x_4 transformam-se em r, θ_1, θ_2 e θ_3 , onde $0 \leq \theta_1 \leq \pi, 0 \leq \theta_2 \leq \pi$ e $0 \leq \theta_3 < 2\pi$.

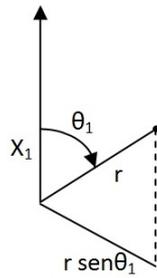


Figura A.4: Transformação de coordenadas em quatro dimensões (x_1)

$$x_1 = r \cos \theta_1$$

Na Figura A.4, vemos a projeção de r à 90° de x_1 , em um espaço tridimensional.

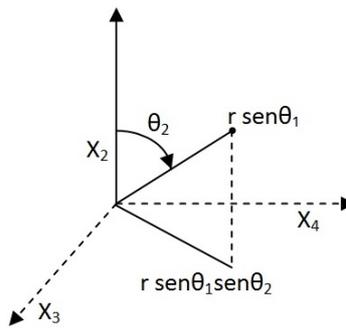


Figura A.5: Transformação de coordenadas em quatro dimensões (x_2)

Enquanto que na Figura A.5, visualizamos a coordenada x_2 ; e notamos também a projeção de $r \text{sen} \theta_1$ à 90° de x_2 , em um espaço bidimensional.

$$x_2 = r \text{sen} \theta_1 \cos \theta_2.$$

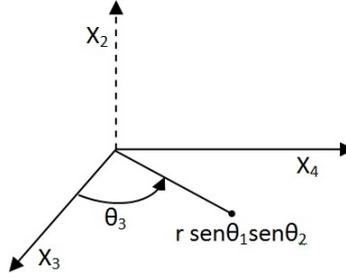


Figura A.6: Transformação de coordenadas em quatro dimensões (x_3 e x_4)

E por fim, na Figura A.6, visualizamos as coordenadas x_3 e x_4 .

$$x_3 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3,$$

$$x_4 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3.$$

Podemos agora calcular o Jacobiano em quatro dimensões.

$$J(4) = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -r \operatorname{sen} \theta_1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 & r \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 & r \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 & r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \\ \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 & r \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 & r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 & r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante através do Teorema de Laplace, encontramos

$$J(4) = r^3 \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2.$$

Logo, o elemento de volume em quatro dimensões pode ser escrito como

$$dV_4 = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = r^3 \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3.$$

Por recorrência, obtemos então

$$dV_2 = r dr d\theta_1,$$

$$\begin{aligned}
dV_3 &= r^2 \text{sen} \theta_1 dr d\theta_1 d\theta_2 \\
dV_4 &= r^3 \text{sen}^2 \theta_1 \text{sen} \theta_2 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\
dV_5 &= r^4 \text{sen}^3 \theta_1 \text{sen}^2 \theta_2 \text{sen} \theta_3 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4, \\
dV_6 &= r^5 \text{sen}^4 \theta_1 \text{sen}^3 \theta_2 \text{sen}^2 \theta_3 \text{sen} \theta_4 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5, \\
dV_7 &= r^6 \text{sen}^5 \theta_1 \text{sen}^4 \theta_2 \text{sen}^3 \theta_3 \text{sen}^2 \theta_4 \text{sen} \theta_5 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5 d\theta_6 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

O que nos leva à expressão:

$$dV_D = r^{D-1} \text{sen}^{D-2} \theta_1 \text{sen}^{D-3} \theta_2 \text{sen}^{D-4} \theta_3 \dots \text{sen} \theta_{D-2} dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_{D-1}.$$

Finalmente, obtemos a expressão do elemento de volume usual em coordenadas esféricas D-dimensionais:

$$dV_D = r^{D-1} dr \prod_{i=1}^{D-1} \text{sen}^{D-1-i} \theta_i d\theta_i \quad (0 \leq \theta_1 \dots \theta_{D-2} \leq \pi \quad e \quad 0 \leq \theta_{D-1} < 2\pi). \quad (\text{A.1})$$

Utilizando a expressão anterior, encontramos o volume de uma D-esfera de raio R.

$$V_D(R) = \int_0^R r^{D-1} dr \int_0^\pi \text{sen}^{D-2} \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \text{sen}^{D-3} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \text{sen} \theta_{D-2} d\theta_{D-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{D-1},$$

$$V_D(R) = \frac{R^D}{D} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{D-3}{2})}{\Gamma(\frac{D-2}{2})} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{D-4}{2})}{\Gamma(\frac{D-3}{2})} \dots \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi = \frac{\pi^{\frac{D}{2}} R^D}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)}.$$