

CBPF-MO-006/85  
STRINGS CLÁSSICOS RELATIVÍSTICOS, II

por

Carlos A.P. Galvão

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq  
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150  
22290 - Rio de Janeiro - Brasil

## SUMÁRIO

Capítulo 2: STRINGS EM INTERAÇÃO COM CAMPOS EXTERNOS .....	286
2.1 <u>A interação eletromagnética</u> .....	286- 96
2.2 <u>A interação com campos tensoriais antisimétricos</u> .....	297
2.2.1 Aspectos gerais sobre as teorias dos campos antisimétricos.....	297-302
2.2.2 Teoria do campo antisimétrico de segunda ordem.....	303- 10
2.2.3 Strings em interação com campos tensoriais antisimétricos de segunda ordem.....	310- 15
2.3 <u>A interação gravitacional</u> .....	315- 19
2.4 <u>Strings cósmicos</u> .....	319- 26
2.5 <u>Strings na variedade de Kaluza-Klein</u> .....	326- 29
2.5.1 Revisão de alguns conceitos de geometria diferencial...	330- 38
2.5.2 Construção da variedade de Kaluza-Klein.....	338- 51
2.6 <u>O movimento geodésico na variedade de Kaluza-Klein</u> .....	351- 60
2.7 <u>O movimento de strings na variedade de Kaluza-Klein</u> .....	361- 66
2.8 <u>A variedade de Kaluza-Klein generalizada</u> .....	366- 67
2.8.1 Campos de Yang-Mills: notação e convenções.....	368- 73
2.8.2 A geometria da variedade de Kaluza-Klein generalizada.	374- 83
2.8.3 Especificação do espaço interno.....	383- 90
2.9 <u>O movimento geodésico na variedade de Kaluza-Klein generalizada</u> .....	390- 93
2.10 Strings com carga não-abeliana.....	393- 96

### Capítulo 3: EXTENSÕES DA TEORIA E OUTROS DESENVOLVIMENTOS FOR

MAIS.....397

3.1	<u>Strings com massas nas extremidades</u> .....	397-412
3.2	<u>Strings supersimétricos</u> .....	412
3.2.1	Construção dos vínculos, a fixação do super-gauge, e as equações de movimento.....	412- 20
3.2.2	A interação gravitacional do string com spin.....	420- 23
3.3	<u>Lagrangianas alternativas para o string</u> .....	423
3.3.1	A lagrangiana de Schild e os strings nulos.....	423- 32
3.3.2	A lagrangiana de Zheltukhin.....	432- 38
3.3.3	A lagrangiana de Polyakov.....	438- 47
3.4	<u>Uma introdução à teoria do campo de Liouville</u> .....	447- 57
3.5	<u>Formulação da teoria em termos de bivectores</u> .....	457
3.5.1	Introdução a teoria dos bivectores.....	457- 72
3.5.2	Aplicação a teoria dos strings.....	473- 82

### Capítulo 4: STRINGS EM TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS..... 483

4.1	<u>Strings na teoria do monopolo de Dirac</u> .....	483- 91
4.2	<u>A dualidade de Born, strings e as teorias de Born-Infeld</u> ....	492-502
4.3	<u>Uma teoria de campos para o string: o modelo de Nielsen-Olense</u> .....	502
4.4	<u>Configurações de string em teorias de gauge I</u> .....	513- 22
4.5	<u>Configurações de string em teorias de gauge II</u> .....	522- 32
4.6	<u>Soluções tipo string nos modelos de Higgs e Higgs-Born-Infeld</u> .....	532- 39

REFERÊNCIAS .....	540- 45
-------------------	---------

## Capítulo 2: STRINGS EM INTERAÇÃO COM CAMPOS EXTERNOS

"So how do you go about teaching them something new? By mixing what they know with what they don't know. Then, when they see in their fog something they recognize they think, "Ah I know that!" And then it's just one more step to "Ah, I know the whole thing". And their mind thrusts forward into the unknown and they begin to recognize what they didn't know before and they increase their powers of understanding".

Picasso

(F. Gilot and C. Loke, "Life with Picasso", McGraw Hill, New York, 1964)

### 2.1 A interação eletromagnética

Denotaremos por  $A_\mu$  o potencial vetor e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  o tensor intensidade de campo associados a um dado campo eletromagnético. Para descrever a interação entre um string e o campo eletromagnético procederemos da maneira usual, construindo um termo de interação que deverá ser adicionado à integral de ação do string livre. Este termo, que além de ser um escalar de Lorentz, deverá depender de  $\dot{y}$ ,  $y'$  e  $F_{\mu\nu}$  (ou  $A_\mu(y)$ ) de uma forma invariante por reparametrizações em  $\tau$  e  $\sigma$ , isto é, pelas transformações conformes sobre  $\Sigma$ , e pelas transformações de gauge do campo eletromagnético,  $A_\mu(y) \rightarrow A_\mu(y) + \partial_\mu \Delta(\bar{y})$ . A única escolha possível que satisfaz a estas condições é

$$S_I = -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma F_{\mu\nu}(y) \dot{y}^\mu y'^\nu, \quad (2.1-1)$$

onde  $q$  é uma constante de acoplamento.

Antes de prosseguir com os desenvolvimentos da teoria vamos examinar algumas consequências da escolha (2.1-1). A lagrangeana de interação é

-287-

$$\mathcal{L}_I = -q F_{\mu\nu} \dot{y}^\mu y'^\nu . \quad (2.1-2)$$

Consideremos a parametrização definida pelas equações (1.7-6)

$$y^0 = \tau , \quad y'^i = t^i , \quad \vec{v} = \{\dot{y}^i \equiv v^i\} , \quad \vec{v} \cdot \vec{\xi} = 0 , \quad t^2 = 1 - v^2 .$$

Com esta parametrização (2.1-1) fica sob a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -q(F_{0j} t^j + F_{ij} v^i t^j) = \\ &= -q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\xi} . \end{aligned} \quad (2.1-3)$$

Vê-se que (2.1-3) descreve a energia de um dipolo elétrico em interação com um campo eletromagnético. Logo, nesta descrição, o string é eletricamente neutro. De fato, como veremos logo a seguir, a lagrangiana de interação (2.1-2) corresponde a um string neutro, com cargas  $-q$  e  $+q$  em suas extremidades.

Consideremos agora um string rígido de comprimento  $2\ell$  em rotação, com velocidade angular  $\omega$ . Se colocarmos uma carga  $q$  numa das extremidades, a corrente que é gerada pelo movimento da carga é  $I = q\omega/2\pi = q/2\pi\ell$ , ( $c=1$ ). O momento magnético correspondente é  $\mu = IA = I\pi\ell^2$ , onde  $A$  é a área da superfície limitada pela trajetória da carga. Denotando por  $J$  o momento angular do string (ver Seção 1.7), podemos escrever  $\mu = qJ/m$ .

Da teoria dos modelos duais ressonantes sabe-se que o acoplamento de um fóton com qualquer estado físico do modelo resulta numa razão giromagnética  $g=2$ , com  $g$  definido por

$\mu = qgJ/2m$  e onde  $m$  é a massa do estado em questão. Este resultado é reproduzido pela teoria do string: da discussão acima resulta que  $g = 2$ . Pode-se mostrar que este resultado é válido para o movimento mais geral do string. Este modelo simples, no entanto, conflita com o que se sabe sobre a estrutura eletromagnética dos hádrons e não se conhece nenhum procedimento razoável para se introduzir uma corrente eletromagnética na "matéria de string". No final desta seção analisaremos uma tentativa de se introduzir uma corrente na teoria dos strings.

Retornemos à integral de ação (2.1-1), e explicitemos o integrando:

$$\begin{aligned}
 S &= -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\sigma \int_0^\pi d\sigma \left[ (\partial_\mu A_\nu) \dot{y}^\mu y'^\nu - (\partial_\nu A_\mu) y'^\nu \dot{y}^\mu \right] = \\
 &= -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[ \frac{dA_\nu}{d\tau} y'^\nu - \frac{dA_\nu}{d\sigma} \dot{y}^\nu \right] = \\
 &= -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[ (\dot{y}^\mu A_\mu)_{\sigma=\pi} - (\dot{y}^\mu A_\mu)_{\sigma=0} \right] + \\
 &\quad + \int_0^\pi d\sigma (y'^\nu A_\nu) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}.
 \end{aligned}$$

O último termo da expressão acima não contribui para as equações de movimento de modo que, efetivamente, a integral de ação de interação se escreve

$$S = -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[ (\dot{y}^\mu A_\mu)_{\sigma=\pi} - (\dot{y}^\mu A_\mu)_{\sigma=0} \right], \quad (2.1-4)$$

e a lagrangiana de interação correspondente é

$$\mathcal{L}_I = \rho(\sigma) \dot{y}^\mu A_\mu, \quad (2.1-5)$$

onde  $\rho(\sigma)$  é a densidade de carga associada com o string, dada por

$$\rho(\sigma) = q \left[ \delta(\sigma - \pi) - \delta(0) \right]. \quad (2.1-6)$$

Este resultado mostra que a carga elétrica do string se localiza em suas extremidades, em acordo com a análise feita anteriormente, e uma consequência imediata é que strings fechados não interagem com campos eletromagnéticos porque, neste caso,  $\rho(\sigma) = 0$ .

Dos resultados obtidos vê-se que a imposição de invariância da teoria por reparametrizações impõe severas restrições na interação do string com um campo eletromagnético: a carga de um string aberto se localiza em suas extremidades, e strings fechados são desprovidos de carga. É claro que isto não significa que não se pode construir um modelo de strings dotados de uma distribuição de carga e corrente. De fato, isto pode ser feito numa teoria do tipo de Kaluza-Klein onde o espaço-tempo tem cinco dimensões e o campo eletromagnético é uma parte integrante da geometria. A relação entre as propriedades físicas dos strings e a dimensionalidade do espaço-tempo é curiosa. Além do exemplo mencionado acima pode-se, por exemplo, construir um modelo de strings com massa de repouso não nula em um espaço penta-dimensional. Ocorre também um fato importante na teoria quântica onde a invariância de Lorentz requer que o número de dimensões do espaço-tempo seja 26 no caso de strings sem spin, e 10 no caso de strings com spin.

Vamos obter as equações de movimento do string em interação com o campo eletromagnético. A integral de ação

total se escreve

$$S = -N \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{y}^\mu \cdot y'^\nu)^2 - y'^\mu y'^\nu} - \\ - q \int d\tau d\sigma F_{\mu\nu} \dot{y}^\mu y'^\nu \equiv \int d\tau d\sigma (\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_I) . \quad (2.1-7)$$

O processo variacional conduz exatamente à expressão (1.3-4) para a lagrangiana total. No entanto, é trivial verificar que  $\mathcal{L}_I$  não contribui para as equações de movimento, que resultam ser as mesmas que no caso livre

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial y'^\mu} \right) = 0 . \quad (2.1-8)$$

As condições de bordo agora são

$$\frac{\partial}{\partial y'^\mu} (\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_I) = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi , \quad (2.1-9)$$

ou

$$\frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial y'^\mu} \mp q F_{\mu\nu} \dot{y}^\nu = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi , \quad (2.1-10)$$

respectivamente. Estas condições podem ainda ser escritas sob a forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial y'^\mu} - q \left( \frac{dA_\mu}{d\tau} - \dot{y}^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial y'^\mu} \right) = 0 \quad \text{em } \sigma = 0 , \quad (2.1-11a)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}} + q \left( \frac{dA_{\mu}}{d\tau} - \dot{y}^{\alpha} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial y'^{\mu}} \right) = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = \pi \quad (2.1_{-11}b)$$

Fisicamente, estas equações expressam a troca de energia e momento entre o string e o campo eletromagnético. Como a carga do string se localiza em suas extremidades, a interação com o campo eletromagnético ocorre apenas com aqueles pontos, como era de se esperar.

Devido à presença do campo eletromagnético e das cargas nas extremidades do string, poderíamos ser levados a considerar  $\sigma_i = \sigma_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2$ . Neste caso a integral de ação ficaria sob a forma

$$\begin{aligned} S &= -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma F_{\mu\nu}(y) \dot{y}^{\mu} y'^{\nu} = \\ &= -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left. \frac{dy^{\nu}}{d\tau} A_{\nu}(y) \right|_{\sigma=\sigma_1(\tau)} + q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left. \frac{dy^{\nu}}{d\tau} A_{\nu}(y) \right|_{\sigma=\sigma_2(\tau)} \end{aligned}$$

com  $dy^{\mu}/d\tau = \dot{y}^{\mu} + y'^{\nu} \dot{\sigma}(\tau)$ . As condições de bordo, obtidas da ação total no gauge ortonormal, se escrevem

$$\left( y'^{\mu} \mp F^{\mu}_{\alpha} \dot{y}^{\alpha} \right)_{\sigma=\sigma_i} + \left( \dot{y}^{\mu} \mp F^{\mu}_{\alpha} y'^{\alpha} \right) \dot{\sigma}_i = 0 \quad .$$

As equações de movimento não mudam. Assim, como no caso do string livre, podemos tomar  $\dot{\sigma}_i = 0$  sem introduzir nenhuma restrição na dinâmica do sistema.

Passemos agora à formulação hamiltoniana. Da mesma forma que no caso do string livre a invariância da integral de ação (2.1\_7) por reparametrizações em  $\tau$  e  $\sigma$  implica na

existência de vínculos, e a homogeneidade da lagrangiana em  $\dot{y}$  e  $y'$  implica em que a hamiltoniana canônica é identicamente nula. Definamos os momentos

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{y}^\mu} = \mathcal{P}_\mu - q F_{\mu\nu} y'^\nu . \quad (2.1-12)$$

Um cálculo direto mostra que

$$\{ \mathcal{P}_\alpha(\sigma), \mathcal{P}_\beta(\sigma') \} = y'^\mu \partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]} \delta(\sigma - \sigma') = 0 , \quad (2.1-13)$$

onde usamos os colchetes de Poisson fundamentais (1.6-17,18). (Note que  $\mathcal{P}_\mu$  é o momento canonicamente conjugado a  $y^\mu$  e que (2.1-13) é consequência das equações de Maxwell.)

As funções de vínculo podem ser obtidas do mesmo modo que no caso livre usando-se as identidades (1.5-11), que continuam sendo válidas. Assim, temos

$$\phi_1 = \mathcal{P}^2 + N^2 y'^2 \approx 0 , \quad (2.1-14a)$$

$$\phi_2 = \mathcal{P} \cdot y' \approx 0 . \quad (2.1-14b)$$

Estes vínculos formam uma álgebra fechada, a mesma que no caso do string livre, equações (1.8-12).

A hamiltoniana fica dada por

$$H = \int d\sigma \left[ C_1(\sigma) \phi_1(\sigma) + C_2(\sigma) \phi_2(\sigma) \right] ,$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são funções arbitrárias. Impondo as condições do gauge ortonormal,  $2NC_1 = 1$  e  $C_2 = 0$ , as equações de Ha -

milton se escrevem

$$\dot{y}^\mu = \frac{\delta H}{\delta p_\mu} = \frac{1}{N} (\mathcal{P}^\mu - qF^\mu{}_\alpha y'^\alpha) \quad (2.1-15)$$

$$\mathcal{G}_\mu = - \frac{\delta H}{\delta y'^\mu} = - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ - (\mathcal{P}_\alpha - qF_{\alpha\rho} y'^\rho) F^\alpha{}_\mu + N y'^\mu \right] \quad (2.1-16)$$

com as condições de bordo

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y'^\mu} = (\mathcal{P}_\alpha - qF_{\alpha\rho} y'^\rho) qF^\alpha{}_\mu + N y'^\mu = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi \quad (2.1-17)$$

Destas equações resultam as equações de movimento

$$\ddot{y}^\mu - y''^\mu = 0 \quad (2.1-18)$$

e as condições de bordo ficam sob a forma

$$y'^\mu + F^\mu{}_\alpha \dot{y}^\alpha = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi \quad (2.1-19)$$

As equações de movimento (1.1-18) com as condições (1.1-19) admitem soluções exatas para várias escolhas do campo eletromagnético como, por exemplo, campos eletromagnéticos homogêneos e campos tipo ondas planas com polarização circular ( $A_\mu(y) = \varepsilon_\mu e^{ik \cdot y}$ ,  $k^2 = 0$ ,  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $k \cdot \varepsilon = 0$ ).

Abordemos agora o problema da definição de uma corrente eletromagnética associada ao string. O esquema que vamos discutir é devido a Nambu. Suponhamos que existe uma corrente conservada,  $J^a(\xi, y(\xi))$ , no espaço interno:

$$\frac{\partial J^a}{\partial \xi^a} = 0 \quad (2.1-20)$$

Pode-se construir uma corrente conservada  $j^\mu(y)$ , no espaço-tempo, fazendo-se uma escolha conveniente de  $J^a$ . Definamos

$$j^\mu(y) = \int d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^a} (J^a z^\mu)^{(4)} \delta(z(\xi)-y) = \quad (2.1-21a)$$

$$= \int d^2\xi J^a \partial_a z^\mu \delta(z(\xi)-y) \quad (2.1-21b)$$

Calculemos a divergência de  $j^\mu(y)$ :

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(y) &= \int d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^a} (J^a z^\mu) \partial_\mu \delta(z(\xi)-y) = \\ &= - \int d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left[ J^a \delta(z(\xi)-y) \right] = \\ &= - \int d\sigma \left[ J^0 \delta(z(\xi)-y) \right]_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} + \int d\tau \left[ J_1 \delta(z(\xi)-y) \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} . \end{aligned}$$

Vê-se que  $j^\mu(y)$  será conservada se

$$J^1(\tau, \sigma=0) = J^1(\tau, \sigma=\pi) = 0 \quad (2.1-22)$$

e

$$z^0(\tau=\pm\infty, \sigma) = 0 \quad , \quad (2.1-23)$$

de modo que

$$J^0(\tau=\pm\infty, \sigma) = 0 \quad . \quad (2.1-24)$$

Uma classe de soluções triviais para  $J^a$  é

$$J_0 = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad , \quad J_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad , \quad (2.1-25)$$

onde  $\phi(\xi)$  é um campo arbitrário que toma valores fixos em  $\sigma = 0, \pi$ . (Trivial aqui significa que (2.1-20) é automaticamente satisfeita.) Um caso particular de (2.1-25) que é de inte-

resse é

$$J_0 = \rho(\xi) \quad \text{e} \quad J_1 = 0 \quad . \quad (2.1-26)$$

Escrevamos a lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_I = j_\mu(y) A^\mu(y) \quad . \quad (2.1-27)$$

A lagrangiana correspondente no espaço interno pode ser obtida sem dificuldades. Temos que

$$\begin{aligned} S_I &= \int d^4y \, j_\mu(y) A^\mu(y) = \\ &= \int d^2\xi \int d^4y \, J^a \partial_a z^\mu A_\mu(y) \delta^{(4)}(z(\xi)-y) = \\ &= \int d^2\xi \, J^a \partial_a z^\mu A_\mu(z(\xi)) \quad , \end{aligned} \quad (2.1-28)$$

donde se obtém

$$\mathcal{L}_I = J^a \partial_a z^\mu A_\mu(z(\xi)) \quad . \quad (2.1-29)$$

Examinemos a invariância de gauge de (2.1-28). Fazendo  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Delta$ , verifica-se que

$$\begin{aligned} S_I + S_I + \int d^2\xi J^a \partial_a z^\mu \partial_\mu \Delta(z) = \\ = S_I + \int d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^a} (J^a \Delta) \end{aligned}$$

Para que o segundo termo da expressão acima não contribua para as equações de movimento, é necessário que as projeções

de  $J^a$  nas direções normais à fronteira sejam nulas. Estas condições são satisfeitas pela escolha (2.1-22-26).

A lagrangiana de interação associada com a escolha (2.1-25) é

$$\mathcal{L}_I = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \dot{y}^\mu - \frac{\partial \phi}{\partial \tau} y'^\mu \right) A_\mu(y) \quad (2.1-30)$$

Esta lagrangiana é equivalente, a menos de uma divergência, a uma lagrangiana de interação do tipo de Pauli,

$$\mathcal{L}'_I = \frac{1}{2} \phi(\xi) \Sigma^{\mu\nu}(y) F_{\mu\nu}(y) \quad (2.1-31)$$

Com  $\phi = c \frac{te}{\dots}$  esta é a lagrangiana que foi usada por Dirac em sua discussão do monopolo magnético. Neste caso, a integral de ação correspondente é equivalente a (2.1-1).

A lagrangiana correspondente à escolha (2.1-26) é

$$\mathcal{L}'_I = \rho(\xi) \dot{y}^\mu A_\mu(y) \quad (2.1-32)$$

Neste caso tem-se uma distribuição de cargas sobre o string com função de peso  $\rho(\xi)$ . A lagrangiana (2.1-5) é um caso particular de (2.1-32), com a função  $\rho$  dada por (2.1-6).

Finalmente, observemos que a lagrangiana de interação (2.1-30) conduz a uma teoria onde o acoplamento com o campo eletromagnético não é o acoplamento mínimo. Isto se deve à presença do termo  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} y'^\mu$  na corrente  $J^a$ , e de certa forma, já antecipa efeitos como aqueles devidos a um "termo anômalo de Pauli" e a equivalência de (2.1-30) e (2.1-31).

## 2.2 A interação com campos tensoriais antisimétricos

### 2.2.1 Aspectos gerais sobre as teorias dos campos antisimétricos

Recentemente potenciais tensoriais antisimétricos de segunda e terceira ordem,  $A_{\mu\nu}(x) = -A_{\nu\mu}(x)$  e  $A_{\mu\nu\lambda}(x) = A_{[\mu\nu\lambda]}(x)$ , têm sido objeto de estudos devido à necessidade de sua incorporação em algumas das modernas teorias da Física. Por exemplo, o campo  $A_{\mu\nu}(x)$  surge naturalmente como um bom candidato para uma teoria da dominância vetorial da parte anti-simétrica do tensor momento-energia dos nucleons; este campo surge também no estudo da dinâmica dos vórtices, na teoria dos modelos duais ressonantes e como um campo auxiliar em teorias de super-gravidade estendidas. O campo  $A_{\mu\nu\lambda}$ , por seu lado, aparece na forma de uma força de longo alcance (tipo coulombiana) em teorias de gauge não abelianas com cargas topológicas não nulas, e também numa abordagem fenomenológica ao problema do grupo  $U(1)$  em QCD.

O nosso interesse particular é no papel que estes campos desempenham nas teorias dos objetos com extensão espacial (strings, membranas, bags) e, conseqüentemente, nas interações fortes, onde hadrons podem ser tratados como objetos destes tipos. O potencial  $A_{\mu\nu}(x)$  é o mediador da interação entre strings enquanto que o potencial  $A_{\mu\nu\lambda}(x)$  é o responsável pela interação entre os elementos de superfície de uma membrana. Este último potencial,  $A_{\mu\nu\lambda}(x)$ , tem um comportamento muito especial já que em 3+1 dimensões ele não desempenha um papel dinâmico, isto é, não se propaga. No modelo

de "bag" para hadrons ele conduz a uma auto-energia finita proporcional ao volume incluído na membrana, e atua como uma pressão efetiva responsável pelo confinamento dos quarks. O significado físico destes potenciais (com massa nula) juntamente com o potencial eletromagnético  $A_\mu(x)$  pode ser resumido da seguinte forma:

- $A_\mu(x)$  - dois estados de polarização, mediador da interação entre cargas elétricas pontuais;
- $A_{\mu\nu}(x)$  - um estado de polarização, mediador da interação entre strings fechados;
- $A_{\mu\nu\lambda}(x)$  - nenhum estado de polarização, responsável pela interação entre os elementos de superfície de uma membrana.

Tratados como campos livres, os potenciais  $A_{\mu\nu}$  e  $A_{\mu\nu\lambda}$  apresentam certas peculiaridades. O primeiro é apropriado para a descrição de partículas de spin nulo e massa nula, enquanto que o segundo não se propaga (é do tipo "puro gauge"). Neste sentido, pode-se perguntar qual a utilidade de se usar, no caso de  $A_{\mu\nu}$ , uma representação tão complicada para campos de spin nulo e massa nula. A resposta está na estrutura das transformações de gauge admissíveis na teoria, que é muito rica. Além disto, é um fato bastante conhecido que, na presença de interações, diferentes representações de campos com o mesmo número de graus de liberdade não são necessariamente equivalentes. No caso do potencial  $A_{\mu\nu\lambda}$ , embora não sendo capaz de irradiar, ele pode interagir e contribuir, através do tensor momento-energia, para a energia de fundo de um

sistema físico. Daí a sua contribuição para o modelo de "bag" dos hadrons que mencionamos anteriormente.

Se for introduzido um termo de massa nas teorias destes potenciais, o caráter dos mesmos muda profundamente. O campo  $A_{\mu\nu}(x)$  descreve uma partícula massiva com spin 1, e o campo  $A_{\mu\nu\lambda}(x)$  uma partícula massiva de spin zero. Assim, a transição do caso massivo para o caso sem massa não preserva o número de graus de liberdade. Um outro aspecto interessante da presença do termo de massa é que no caso do potencial  $A_{\mu\nu}$ , a invariância de gauge é quebrada enquanto que no caso de  $A_{\mu\nu\lambda}$  esta invariância é preservada. Ainda com relação à massa destes campos, pode-se construir uma teoria envolvendo os potenciais  $A_{\mu\nu}$  e  $A_{\mu\nu\lambda}$ , por exemplo, que é invariante pelas transformações de gauge associadas com os dois campos. Tal mistura dos potenciais é, na verdade, um mecanismo de geração de massa, e as equações de movimento resultam invariantes de gauge apesar do termo da massa.

Considerando-se uma hierarquia de potenciais  $\{A(x), A_{\mu}(x), A_{\mu\nu}(x), A_{\mu\nu\lambda}(x)\}$  e os respectivos tensores intensidade de campo, pode-se construir uma teoria do tipo da de Maxwell para cada um deles. (De modo geral, pode-se formular uma teoria de Maxwell generalizada para um potencial anti-simétrico de ordem  $R$ ). Ao se comparar as teorias dos diversos potenciais observa-se uma curiosa manifestação de um aspecto complementar entre elas.

O nosso interesse é, fundamentalmente, o potencial  $A_{\mu\nu}(x)$  devido ao papel que desempenha na teoria dos strings. Alguns aspectos da teoria geral da hierarquia de potenciais serão apresentados e, em seguida, estudaremos o potencial  $A_{\mu\nu}$

em detalhes. A interação entre strings e este potencial será apresentada na parte final da seção.

A - A hierarquia de potenciais de gauge: definições e propriedades.

Potenciais	$A(x)$	$A_\mu(x)$	$A_{\mu\nu}(x)$	$A_{\mu\nu\lambda}(x)$
Nº de componentes	1	4	6	4
Tensor intensidade de campo	$F_\mu \equiv \partial_\mu A$	$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu} + \partial_\lambda A_{\mu\nu}$	$F_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \partial_\mu A_{\nu\lambda\rho} + \partial_\nu A_{\lambda\rho\mu} + \partial_\lambda A_{\rho\mu\nu} + \partial_\rho A_{\nu\lambda\mu}$
Nº de componentes	4	6	4	1
Transformações de gauge	$A(x) \rightarrow A(x) + C$	$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Delta(x)$	$A_{\mu\nu}(x) \rightarrow A_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \Delta_\nu - \partial_\nu \Delta_\mu$	$A_{\mu\nu\rho}(x) \rightarrow A_{\mu\nu\rho}(x) + \partial_\mu \Delta_{\nu\rho} + \partial_\nu \Delta_{\rho\mu} + \partial_\rho \Delta_{\mu\nu}$ ( $\Delta_{\mu\nu} = -\Delta_{\nu\mu}$ )
Identities de Bianchi	$\partial_\mu [F_\nu] = 0$	$\partial_\mu [F_{\alpha\beta}] = 0$	$\partial_\mu [F_{\nu\lambda\rho}] = 0$	$\partial_\mu [F_{\alpha\beta\gamma\nu}] = 0$
Quantidades duais	$F^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho} F_\rho = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho A$ $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$	$F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda$ $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$	$F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda$ $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$	$F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_{\nu\beta} - \partial_\beta A_{\nu\alpha}$
Lagrangiana	$-\frac{1}{2} F_\mu F^\mu$	$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$-\frac{1}{12} F_{\mu\alpha\beta} F^{\mu\alpha\beta}$	$-\frac{1}{48} F_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu\alpha\beta}$

## Observações:

(a) O número de componentes independentes é dado por

$$\frac{d!}{n! (d-n)!}$$

onde  $d$  é a dimensão do espaço-tempo, e  $n$  é a ordem do tensor.

(b) As identidades de Bianchi implicam nas definições dos tensores intensidade de campo, isto é, na existência dos potenciais, a menos do último caso que é verdade, não importando a definição de  $F_{\alpha\beta\mu\nu}$ .

(c)  $\partial_{\mu} \overset{*}{F}^{\mu\nu\lambda} = 0$  e  $\partial_{\mu} \overset{*}{F}^{\mu\nu} = 0$  mais a anti-simetria implicam nas definições de  $\overset{*}{F}^{\mu\nu\lambda}$  e  $\overset{*}{F}^{\mu\nu}$ , isto é, na existência de  $A(x)$  e  $A_{\mu}(x)$ . Por outro lado,  $\partial_{\mu} \overset{*}{F}^{\mu} = 0$  nem sempre implica na definição de  $\overset{*}{F}^{\mu}$  dada na tabela.

(d) A sequência dos números de componentes dos diversos tensores apresenta um dos aspectos da complementariedade que existe entre eles.

## 2.2.2 Teoria do campo antisimétrico de segunda ordem

A lagrangiana livre se escreve

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F^{\mu\nu\lambda} , \quad (2.2-1)$$

onde

$$F_{\mu\nu\lambda} = \partial_{\mu} A_{\nu\lambda} + \partial_{\lambda} A_{\mu\nu} + \partial_{\nu} A_{\lambda\mu} \quad (2.2-2)$$

é o tensor intensidade de campo. As equações de Euler-Lagrange são

$$\partial_{\mu} F^{\mu\alpha\beta} = 0 , \quad (2.2-3)$$

ou, em termos dos potenciais ,

$$\square A_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \partial_{\rho} A_{\nu}{}^{\rho} + \partial_{\nu} \partial_{\rho} A^{\rho}{}_{\mu} = 0 . \quad (2.2-4)$$

A teoria é invariante pelas transformações de gauge

$$A_{\mu\nu}(x) \rightarrow A'_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}(x) + \partial_{\mu} \Delta_{\nu}(x) - \partial_{\nu} \Delta_{\mu}(x) . \quad (2.2-5)$$

Em termos das quantidades duais

$$F^{*\mu} \equiv \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_{\nu} A_{\lambda\rho} , \quad (2.2-6)$$

as equações de movimento se escrevem

$$\partial_{\rho} (\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} F_{\mu}^{*\lambda}) = 0 . \quad (2.2-7)$$

Lembremos que  $F^{*\mu}$  tem divergência nula,

$$\partial_{\mu} \overset{*}{F}^{\mu} = 0. \quad (2.2-8)$$

Denotemos  $\overset{*}{F}_{\mu} \equiv \phi_{\mu}$ , e construíamos uma lagrangiana para o potencial  $A_{\mu\nu}$  usando  $\phi_{\mu}$  e a condição (2.2.8):

$$\overset{\sim}{\mathcal{L}} = -\phi_{\mu} \phi^{\mu} - 2\beta(x) \partial_{\mu} \phi^{\mu}, \quad (2.2-9)$$

onde  $\beta(x)$  é um multiplicador de Lagrange. Tem-se então que

$$\begin{aligned} 0 = \delta \overset{\sim}{S} &= \delta \int d^4x \overset{\sim}{\mathcal{L}} = \\ &= \int d^4x \left\{ -2\phi^{\mu} \delta\phi_{\mu} - 2\beta \delta(\partial_{\mu} \phi^{\mu}) - 2(\delta\beta) \partial_{\mu} \phi^{\mu} \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ -2\phi^{\mu} \delta\phi_{\mu} - 2(\partial^{\mu} \beta) \delta\phi_{\mu} - 2\partial^{\mu} \phi_{\mu} \delta\beta - 2\partial_{\mu} (\beta \delta\phi^{\mu}) \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\delta \overset{\sim}{S}}{\delta \beta} = 0 \longrightarrow \partial_{\mu} \phi^{\mu} = 0 \quad (2.2-10)$$

e

$$\frac{\delta \overset{\sim}{S}}{\delta \phi_{\mu}} = 0 \longrightarrow \phi_{\mu} = \partial_{\mu} \beta. \quad (2.2-11)$$

Esta última equação mostra que  $\phi_{\mu}$  é o gradiente de um campo escalar que satisfaz à equação de Klein-Gordon (sem termo de massa), isto é, denotando  $\beta \equiv \phi$ ,

$$\phi_{\mu} = \partial_{\mu} \phi \quad (2.2-12)$$

e

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi = 0 \quad (2.2-13)$$

A lagrangiana fica sob a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad . \quad (2.2-14)$$

De acordo com a teoria das representações do grupo de Lorentz o potencial  $A_{\mu\nu}(x)$  deveria descrever uma partícula de spin 1. Os resultados acima nos mostram que este potencial é equivalente a um campo escalar com spin 0, como consequência da invariância de gauge da teoria. Agora, se for introduzido um termo de massa na lagrangiana,  $-\frac{1}{4} m^2 A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}$ , quebrando a invariância de gauge, o campo  $A_{\mu\nu}$  adquire spin 1. A transição do caso  $m \neq 0$  para o caso  $m = 0$  não preserva o número de graus de liberdade que, neste último caso, é apenas um.

É instrutivo obter estes resultados por outro procedimento. Vamos introduzir um campo vetorial auxiliar em interação com  $A_{\mu\nu}$  pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{12} B_\mu (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\nu\alpha\beta}) - \frac{1}{8} B_\mu B^\mu \quad . \quad (2.2-15)$$

As equações de movimento para  $B_\mu$  conduzem a

$$B_\mu = \frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\nu\alpha\beta} \quad . \quad (2.2-16)$$

O campo auxiliar  $B_\mu$  é, portanto, proporcional a  $F_\mu^*$  e assim tem divergência nula,

$$\partial_\mu B^\mu = 0 \quad . \quad (2.2-17)$$

Substituindo (2.2-16) em (2.2-15) vê-se que  $\mathcal{L}$  é equivalente à  $\mathcal{L}$  dada por (2.2-1).

As equações de movimento para  $A_{\mu\nu}$  resultam em

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu B_\nu = 0 \longrightarrow \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = 0 \quad (2.2-18)$$

Desta última equação segue que  $B_\mu \sim \partial_\mu \phi$ , onde  $\phi$  é um campo escalar que, devido a (2.2-17), satisfaz à equação de Klein - Gordon  $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$ .

Para tornar as coisas mais claras, vamos comparar as teorias do campo  $A_\mu$ , campo de Maxwell, e do campo  $A_{\mu\nu}$ , para mostrar como o número de graus de liberdade muda no limite de massa nula. As equações de movimento nos dois casos se escrevem

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu - m^2 A_\mu = 0 \quad (2.2-19)$$

e

$$\square A_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\alpha A_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha A_{\alpha\mu} - m^2 A_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2-20)$$

A primeira equação descreve uma partícula massiva, com spin 1, e três estados de polarização, helicidade:  $\pm 1$  e 0. O mesmo ocorre com a segunda equação.

No limite de massa nula o campo  $A_\mu$  descreve uma partícula com dois estados de polarização, helicidade  $\pm 1$ . O estado de helicidade 0 desaparece. No caso do campo  $A_{\mu\nu}$  ocorre uma situação complementar: os estados de helicidade  $\pm 1$  desaparecem, permanecendo apenas o estado de helicidade 0.

A razão do que foi dito acima reside na invariância de gauge que as teorias admitem quando a massa é nula. Isto pode ser demonstrado da seguinte maneira. Consideremos as equações (2.2-19, 20) com  $m=0$ , e imponhamos as condições do gauge

de Lorentz,

$$\left\{ \begin{array}{l} \square A_\mu = 0 \quad , \\ \partial_\mu A^\nu = 0 \quad , \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.2-21a) \\ (2.2-21b) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square A_{\mu\nu} = 0 \quad , \\ \partial_\mu A^\mu_\nu = 0 \quad . \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.2-22a) \\ (2.2-22b) \end{array}$$

Ainda permanece uma liberdade de gauge mas as funções de gauge devem satisfazer às condições

$$\square \Delta = 0 \quad \text{e} \quad \square \Delta_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \Delta_\nu = 0 \quad ,$$

respectivamente.

Vamos introduzir as representações nos espaços dos momentos:

$$A_\mu(x) = \int d^3p A_\mu(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + \text{H.C.} \quad ,$$

$$A_{\mu\nu}(x) = \int d^3p A_{\mu\nu}(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + \text{H.C.} \quad ,$$

onde  $p_\mu x^\mu = -p_0 x^0 + \vec{p} \cdot \vec{x}$  ,  $p_0 = |\vec{p}|$ . Em termos da base  $(p_\mu, e_\mu^{(1)}, e_\mu^{(2)}, \eta_\mu)$  definida por

$$e^{(i)\mu} p_\mu = 0 \quad , \quad e^{(i)\mu} e_\mu^{(j)} = \delta^{ij} \quad ,$$

$$e^{(i)\mu} \eta_\mu = 0 \quad , \quad p^2 = 0 \quad , \quad \eta^2 = -1 \quad ,$$

tem-se as seguintes expansões:

$$A_{\mu}(\vec{p}) = a_1 e_{\mu}^{(1)} + b p_{\mu} + c \eta_{\mu}$$

$$A_{\mu\nu}(\vec{p}) = \alpha \left( e_{\mu}^{(1)} e_{\nu}^{(2)} - e_{\mu}^{(2)} e_{\nu}^{(1)} \right) + \beta_1 \left( e_{\mu}^{(1)} p_{\nu} - e_{\nu}^{(1)} p_{\mu} \right) \\ + \lambda_1 \left( e_{\mu}^{(1)} \eta_{\nu} - e_{\nu}^{(1)} \eta_{\mu} \right) + \rho \left( p_{\mu} \eta_{\nu} - p_{\nu} \eta_{\mu} \right) .$$

Das condições de gauge (2.2.21b) e (2.2.22b) segue que todos os termos que contêm  $\eta_{\mu}$  se anulam, e, pela invariância de gauge, os termos em  $p_{\mu}$  podem ser eliminados. Assim, ficamos com

$$A_{\mu}(\vec{p}) = a_1 e_{\mu}^{(1)}(\vec{p}) ,$$

$$A_{\mu\nu}(\vec{p}) = \alpha \left( e_{\mu}^{(1)} e_{\nu}^{(2)} - e_{\nu}^{(1)} e_{\mu}^{(2)} \right) ,$$

que mostra que  $A_{\mu}$  tem dois estados de polarização e  $A_{\mu\nu}$  apenas um. As helicidades podem ser calculadas da maneira usual, resultando  $\pm 1$  no primeiro caso e 0 no segundo.

Finalmente, vamos apresentar a formulação hamiltoniana da teoria. Com a lagrangiana dada por (2.2-1) os momentos canônicos são definidos por

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\delta}{\delta(\partial_0 A_{\mu\nu})} = - F^{0\mu\nu} . \quad (2.2-23)$$

Temos então três vínculos primários:

$$\phi_1^i = \pi^{0i} \approx 0 . \quad (2.2-24)$$

A hamiltoniana canônica se escreve

$$H_C = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \pi^{\mu\nu} \partial_0 A_{\mu\nu} + \frac{1}{12} F_{\alpha\beta\lambda} F^{\alpha\beta\lambda} \right\} . \quad (2.2-25)$$

Da definição (2.2-23) obtêm-se

$$\partial_0 A_{\mu\nu} = \pi_{\mu\nu} - \partial_\mu A_{\nu 0} - \partial_\nu A_{\mu 0} ,$$

que substituído em (2.2-25) e feitas algumas simplificações , se reduz a

$$H_C = \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} \pi^{ij} \pi_{ij} + \frac{1}{12} F_{ijh} F^{ijh} + \pi^{0i} \partial_0 A_{0i} - A_{0j} \partial_j \pi^{ij} \right\} . \quad (2.2-26)$$

Introduzindo os colchetes de Poisson

$$\{A^{\alpha\beta}(x^0, \vec{x}), \pi_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}')\} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) \delta(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (2.2-27)$$

verifica-se que a condição de consistência  $\dot{\phi}_1^i \approx 0$  conduz aos vínculos secundários

$$\phi_2^i = \partial_j \pi^{ij} \approx 0 . \quad (2.2-28)$$

Observe que de (2.2.28) tem-se apenas dois vínculos já que  $\partial_i \partial_j \pi^{ij} \equiv 0$ . O conjunto  $(\phi_1^i, \phi_2^j)$  constitui uma álgebra fechada. São portanto de primeira classe, e os únicos vínculos da teoria. Assim, a hamiltoniana estendida fica sob a forma

$$H_E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} \pi^{ij} \pi_{ij} + \frac{1}{12} F_{ijk} F^{ijk} \right\} + \int d^3x \left\{ v_1(x) \pi^{0i} + w_1(x) \partial_j \pi^{ij} \right\} . \quad (2.2-29)$$

Nesta expressão  $v_i(x)$  são três funções arbitrárias independentes, enquanto que das funções  $w_i(x)$  apenas duas são independentes.

É fácil verificar que a teoria tem apenas um grau de liberdade. De fato, tem-se seis pares de coordenadas canônicas  $(A^{\mu\nu}, \pi_{\mu\nu})$  e cinco vínculos de primeira classe; deve-se impor cinco condições para fixar o gauge, de modo que resta apenas um par  $(A^{\mu\nu}, \pi_{\mu\nu})$  independente. Logo, tem-se efetivamente um grau de liberdade.

### 2.2.3 Strings em Interação com Campos Tensoriais Anti-Simétricos de Segunda Ordem

A integral de ação de interação  $S_I$  entre o string e o campo  $A_{\mu\nu}(y)$  deve satisfazer às condições de invariância por reparametrizações e pelas transformações de gauge do campo  $A_{\mu\nu}$ , equações (2.2.5). Em contraste com o caso do campo eletromagnético,  $S_I$  não pode ser construída com o tensor intensidade de campo  $F_{\mu\nu\lambda}$ . Assim, a única possibilidade que temos é

$$S_I = e_1 \int d\tau d\sigma A_{\mu\nu}(y) \dot{y}^\mu y'^\nu \quad (2.2.30)$$

Esta integral de ação foi usada por Kalb e Ramond para descrever a interação entre strings fechados, o campo  $A_{\mu\nu}(y)$  desempenhando o papel de mediador da interação.

A integral de ação (2.2.30) é claramente invariante por reparametrizações. A invariância de gauge deve ser examinada com cuidado. Usando (2.2.5) encontra-se que

$$\begin{aligned}
S_I + S_I + e_1 \int d\tau d\sigma \left( \frac{d\Delta_\mu}{d\tau} y'^\mu - \frac{d\Delta_\mu}{d\sigma} \dot{y}^\mu \right) = \\
= S_I + e_1 \int_0^\pi d\sigma (y'^\mu \Delta_\mu) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - e_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{y}^\mu \Delta_\mu) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} .
\end{aligned}
\tag{2.2.31}$$

O segundo termo da expressão acima não contribui para as equações de movimento em virtude das condições impostas sobre  $\delta y^\mu$  em  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , equações (1.3.3). O terceiro termo, no entanto, contribuirá para as equações de movimento a menos que o string seja fechado. Logo, como consequência da imposição de invariância de gauge, a interação entre strings e o campo  $A_{\mu\nu}$  fica restrita a strings fechados. Compare com o caso da interação com o campo eletromagnético: naquele caso a interação só é possível com strings abertos.

No entanto, temos ainda uma outra possibilidade para construir uma integral de ação invariante. Observe que o termo que quebra a invariância de gauge é o produto escalar de  $\dot{y}^\mu$  com o campo vetorial  $\Delta_\mu$ . Assim, pode-se tentar introduzir um campo vetorial auxiliar na teoria, com um comportamento sob transformações de gauge a ser especificado, que se acople com o string e o campo  $A_{\mu\nu}$  de tal modo que a teoria resultante seja invariante de gauge. Esta possibilidade será analisada mais adiante.

Consideremos então strings fechados de modo que  $S_I$  é invariante de gauge. A integral de ação total se escreve

$$\begin{aligned}
S \int d\tau d\sigma (\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_I) = \\
= \int d\tau d\sigma \left[ \sqrt{-g} + e_1 A_{\mu\nu}(y) \dot{y}^\mu y'^\nu \right] .
\end{aligned}
\tag{2.2.32}$$

Os momentos conjugados são definidos por

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^\mu} = \mathcal{P}_\mu + e_1 A_{\mu\nu} y'^\nu . \quad (2.2-33)$$

Usando os colchetes de Poisson fundamentais (1.6-17,18) encontra-se que

$$\{ \mathcal{P}_\mu(\sigma), \mathcal{P}_\nu(\sigma') \} = y'^\lambda F_{\mu\lambda\nu} \delta(\sigma - \sigma') . \quad (2.2-34)$$

Os vínculos da teoria são

$$\phi_1 = (\mathcal{P}_\mu - e_1 A_{\mu\nu} y'^\nu) (\mathcal{P}^\mu - e_1 A^\mu_\alpha y'^\alpha) + N^2 y'^2 \approx 0 , \quad (2.2-35a)$$

$$\phi_2 = (\mathcal{P}_\mu - e_1 A_{\mu\nu} y'^\nu) y'^\mu \approx 0 , \quad (2.2-35b)$$

e formam uma álgebra fechada. A hamiltoniana é, portanto, uma combinação linear de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ,

$$H = \int d\sigma' \left[ C_1(\sigma') \phi_1 + C_2(\sigma') \phi_2 \right] .$$

Por simplicidade vamos impor as condições do gauge ortonormal,  $2NC_1 = 1$  e  $C_2 = 0$ . As equações de movimento que se obtêm da hamiltoniana acima se escrevem

$$\dot{y}^\mu = \frac{1}{N} (\mathcal{P}^\mu - e_1 A^\mu_\nu y'^\nu) , \quad (2.2-36a)$$

$$\dot{\mathcal{P}}_\mu = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ -\frac{1}{N} (\mathcal{P}_\beta - e_1 A_{\beta\lambda} y'^\lambda) A^\beta_\mu + N y'_\mu \right] + \frac{1}{N} \dot{y}^\beta y'^\alpha \partial_\mu A_{\beta\alpha} , \quad (2.2-36b)$$

com a condição de bordo

$$\left[ (\mathcal{P}_\mu - e_1 A_{\mu\nu} \dot{y}^\nu) A^\mu_\alpha + N^2 \dot{y}^\alpha \right] \delta y^\alpha \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0 \quad (2.2.37)$$

Esta condição é automaticamente satisfeita para strings fechados; para strings abertos não há como satisfazê-la sem restringir a dinâmica do sistema. Das equações (2.2.36) obtêm-se

$$\ddot{y}^\mu - y''^\mu = \frac{e_1}{N} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \phi_\nu \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta \quad (2.2.38)$$

Incluindo a integral ação do campo  $A_{\mu\nu}$  e impondo a condição do gauge de Lorentz, equação (2.2.22b), as equações de movimento para este campo se escrevem

$$\begin{aligned} \square A^{\mu\nu} &= -2e_1 \int d\tau d\sigma \delta^4(Z-y(\tau, \sigma)) (\dot{y}^\mu \dot{y}^\nu - \dot{y}^\nu \dot{y}^\mu) = \\ &= -2e_1 \int d\tau d\sigma \delta^4(Z-y(\tau, \sigma)) \Sigma^{\mu\nu}(y) \quad (2.2.39) \end{aligned}$$

Vamos agora apresentar uma maneira de se recobrar a invariância de gauge da teoria. Como vimos no início desta seção a invariância de gauge é destruída pelo terceiro termo da expressão (2.2.31). Tem-se que

$$\delta S_I = e_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{y}^\mu \Delta_\mu) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \quad .$$

Já observamos que este termo tem a estrutura típica de um termo de interação eletromagnética, isto é,  $j^\mu A_\mu \sim e_1 \dot{y}^\mu \Delta_\mu$ . A idéia é, então, introduzir um campo vetorial  $A_\mu$  para recobrar

a invariância de gauge. Como vimos, no caso da interação eletromagnética, este campo interage com o string via tensor intensidade de campo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , equação (2.1-1). Assim, vamos definir uma nova integral de ação de interação

$$\bar{S}_I = e_2 \int d\tau d\sigma \left( \frac{e_1}{e_2} A_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \right) \dot{Y}^\mu Y'^\nu \quad (2.2-40)$$

É trivial verificar que a integral de ação  $\bar{S}_I$  é invariante pelas transformações de gauge simultâneas

$$A_{\mu\nu} + A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + \partial_\mu \Delta_\nu - \partial_\nu \Delta_\mu \quad (2.2-41a)$$

$$A_\mu + A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Delta - \frac{e_1}{e_2} \Delta_\mu \quad (2.2-41b)$$

Com o termo de interação dado por (2.2-40) pode-se construir uma teoria para a interação entre strings abertos. O estudo desta teoria foge do nosso esquema; ao leitor interessado indicamos o trabalho de Kalb e Ramond.

Introduzindo o campo  $A_\mu$  via termo de interação (2.2-40), as características do campo que media a interação (agora entre strings abertos) mudam completamente. É instrutivo verificar o que ocorre, e para isto devemos construir a lagrangiana total dos campos  $A_{\mu\nu}$  e  $A_\mu$ . A forma desta lagrangiana já é ditada pela combinação invariante pelas transformações de gauge (2.2-41) em que estes campos aparecem na ação (2.2-40). De fato, a lagrangiana invariante de gauge mais simples que se pode construir é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{12} F_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad (2.2-42)$$

onde

$$H_{\mu\nu} = gA_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \quad , \quad (2.2_{-43})$$

e  $g = e_1/e_2$ . Note que  $g$  tem dimensão de massa, e que  $H_{\mu\nu}$  é o campo que efetivamente media a interação

Segue de (2.2\_{-43}) e da definição de  $F_{\mu\nu\rho}$ , equação (2.2\_{-2}), que

$$F_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{g} (\partial_\mu H_{\nu\rho} + \partial_\rho H_{\mu\nu} + \partial_\nu H_{\rho\mu}) \quad . \quad (2.2_{-44})$$

Agora, as equações de movimento para  $H_{\mu\nu}$ , que se obtêm da lagrangiana (2.2\_{-42}), se escrevem

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha\beta} = gH^{\alpha\beta} \quad . \quad (2.2_{-45})$$

Portanto, a interação entre strings abertos é mediada por um campo vetorial, com massa  $g \neq 0$  e spin 1, em contraste com a interação entre strings fechados que é mediada por um campo de massa zero e spin zero. É interessante observar que a massa  $g$  do campo vetorial é gerada por um mecanismo de mistura de campos de gauge que é invariante por um grupo de gauge mais amplo que o associado com cada campo, equações (2.2\_{-41}).

### 2.3 A interação gravitacional

Para abordar o problema da interação entre um string

e um campo gravitacional faremos uso do princípio do acoplamento mínimo que consiste em considerar a lagrangiana com a mesma forma funcional que no caso do espaço-tempo de Minkowski, e fazer as substituições

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(y) \quad , \quad \partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu} \quad ,$$

onde  $g_{\mu\nu}(y)$  é a métrica do espaço-tempo, e  $\nabla_{\mu}$  é o operador de derivação covariante com relação à métrica  $g_{\mu\nu}$ . Assim, a integral de ação para o string se escreve

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(y, \dot{y}, y') \quad (2.3-1)$$

onde

$$\mathcal{L} = -N \left[ \left( g_{\mu\nu}(y) \dot{y}^{\mu} y'^{\nu} \right)^2 - \left( g_{\mu\nu}(y) y'^{\mu} y'^{\nu} \right) \left( g_{\mu\nu}(y) \dot{y}^{\mu} \dot{y}^{\nu} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3-2a)$$

As equações de movimento de Euler-Lagrange podem ser obtidas usando-se o mesmo procedimento que no caso livre. O resultado é

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\mu}} \right) + \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{\mu}} = 0 \quad , \quad (2.3-2b)$$

com as condições

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad .$$

Passemos agora ao formalismo hamiltoniano. Vê-se de

(2.3-1,2) que, em virtude de termos adotado o princípio do acoplamento mínimo, a integral de ação tem a mesma simetria sob reparametrizações que no caso livre. Então, definindo-se os momentos da maneira usual, verifica-se que os vínculos são

$$\phi_1 = g^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu + N^2 g_{\alpha\beta} Y'^\alpha Y'^\beta \approx 0, \quad (2.3-3a)$$

$$\phi_2 = \mathcal{P}_\alpha Y'^\alpha \approx 0. \quad (2.3-3b)$$

Estes vínculos constituem uma álgebra fechada, a mesma que no caso do espaço plano, equações (1.8-12).

Com a hamiltoniana dada por uma combinação linear dos vínculos, obtém-se as seguintes equações de movimento:

$$\dot{y}^\mu = 2C_1 g^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu + C_2 y'^\mu, \quad (2.3-4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_\alpha = & -C_1 (\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\lambda - N^2 g_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu} y'^\mu y'^\nu) \partial_\beta g^{\alpha\lambda} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} (2N^2 C_1 g_{\alpha\beta} Y'^\alpha + C_2 \mathcal{P}_\beta), \end{aligned} \quad (2.3-4b)$$

com a condição

$$(2N^2 C_1 g_{\alpha\beta} Y'^\alpha + C_2 \mathcal{P}_\beta) \delta y^\beta \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0. \quad (2.3-5)$$

A condição (2.3-5) pode ser satisfeita impondo-se as mesmas restrições que no caso do espaço plano,  $C_2 = 0$  e  $y'^\mu = 0$  em  $\sigma = 0, \pi$ .

No gauge ortonormal,  $2NC_1 = 1$  e  $C_2 = 0$ , as equações (2.3-4a,b) tomam a forma

$$\dot{Y}^\mu = \frac{1}{N} g^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu \quad , \quad (2.3-6a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\beta = \frac{1}{2N} (\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\lambda g^{\lambda\mu} g^{\alpha\nu} - N^2 Y'^\mu Y'^\nu) \partial_\beta g_{\mu\nu} + \\ N (g_{\alpha\beta} Y''^\alpha + \partial_\mu g_{\nu\beta} Y'^\mu Y'^\nu) \quad , \quad (2.3-6b) \end{aligned}$$

donde resulta que

$$\ddot{Y}^\alpha - Y''^\alpha = - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) (\dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu - Y'^\mu Y'^\nu)$$

ou

$$\ddot{Y}^\alpha - Y''^\alpha = - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} (\dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu - Y'^\mu Y'^\nu) \quad . \quad (2.3-7)$$

As equações (2.3-7) admitem soluções exatas no caso em que o string é fechado e o campo gravitacional é uma onda monocromática com uma dada helicidade. O tensor métrico, neste caso, se escreve

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon_\alpha \epsilon_\beta e^{ik_\mu y^\mu} \quad , \quad g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon^\alpha \epsilon^\beta e^{-ik_\mu y^\mu} \quad (2.3-8)$$

com

$$\epsilon_\alpha \epsilon^\alpha = 0 \quad , \quad \epsilon^\alpha k_\alpha = 0 \quad , \quad k_\alpha k^\alpha = 0 \quad . \quad (2.3-9)$$

Este modelo é de particular importância porque no modelo de Shapiro-Virasoro a partícula fundamental de massa zero é um "graviton forte" (strong graviton), com spin 2. Com a métrica dada por (2.3-8) o termo de interação da lagrangiana linearizada reproduz exatamente o vértice do graviton do modelo

de Shapiro-Virasoro.

Em princípio não há dificuldades para se resolver o mesmo problema para o caso de um string aberto.

## 2.4 Strings cósmicos

Recentemente tem havido um interesse crescente no estudo da interação entre strings e campos gravitacionais. Este fato abriu um novo e amplo cenário para aplicações da teoria dos strings em Cosmologia, e teve sua origem na verificação de que transições de fase nas origens do universo propiciam a formação de uma malha de strings e outras possíveis configurações topológicas (como monopolos e estruturas de domínios ("paredes")). Estes strings, conhecidos na literatura como "strings cósmicos", podem, sob certas circunstâncias, formar buracos-negros pelo colapso de strings fechados. No que se segue, vamos fazer um breve estudo sobre a dinâmica dos strings cósmicos. Não entraremos em detalhes sobre as transições de fase nem sobre a formação das possíveis estruturas topológicas por se tratar de um assunto que foge do contexto do presente trabalho. Sobre estes assuntos apresentaremos apenas um quadro geral.

Em teorias de gauge com quebra espontânea de simetria, as massas dos férmions e bósons vetoriais estão ausentes na lagrangiana inicial e se originam devido ao aparecimento de um valor médio no vácuo do escalar de Higgs  $\phi$ . A simetria original da lagrangiana pode ser reestabelecida em temperaturas suficientemente altas,  $T > T_0$ . Este fenômeno, combi

nado com o modelo cosmológico do "big-bang", prediz a formação de uma estrutura de domínio do vácuo para o universo.

Quando o universo esfria e sua temperatura se torna mais baixa que a temperatura crítica  $T_c$ , o campo de Higgs  $\phi$  adquire um valor esperado diferente de zero,  $\langle \phi \rangle \neq 0$ . A direção de  $\langle \phi \rangle$  na variedade  $M$  de estados de vácuo degenerados pode ser diferente em diferentes regiões do espaço. Pode-se então introduzir uma função de correlação  $\zeta(t)$  tal que os valores de  $\langle \phi \rangle$  em pontos separados por muito mais que  $\zeta$  não sejam correlacionados.  $\zeta$  não pode ser maior que o horizonte. A escala inicial da estrutura de domínio do vácuo é dada aproximadamente por  $\zeta(t_0)$ , onde  $t_0$  é o instante em que ocorre a transição de fase.

À medida que o universo se expande, a maior parte da variação caótica de  $\langle \phi \rangle$  desaparece. No entanto, uma estrutura de vácuo residual pode permanecer, e pode tomar a forma de paredes, strings ou monopolos, dependendo da topologia da variedade  $M$ . A produção cosmológica de monopolos já foi estudada amplamente, e encontrou-se que o número de monopolos criados é muito grande e incompatível com as observações. Foram feitas recentemente algumas propostas para remediar esta situação. No que se refere aos efeitos cosmológicos da estrutura de domínios, mostrou-se que as paredes são gravitacionalmente instáveis e colapsam depois de um certo tempo  $t_p$  após a sua criação, sendo necessário se construir um mecanismo pelo qual as paredes desaparecem em  $t < t_p$ . Ocorre que o campo gravitacional criado pelas paredes é extremamente forte e, portanto, se elas existiram, devem ter desaparecido antes do final da era de radiação de modo a haver tempo suficiente para a isotropização da radiação via o espalhamento Compton. A evo

lução de strings cósmicos foi bastante estudada por Kibble. Sob certas hipóteses sobre a interação de strings entre si e com outros tipos de matéria, ele mostrou que devem existir muito poucos strings no universo visível atual. Ele mostrou também que a existência de uma malha de strings, em grande escala, não contradiz as observações e que strings podem ter desempenhado um papel muito importante nos instantes iniciais do universo.

Vamos a seguir analisar um modelo simples de strings em um universo em expansão. Primeiramente consideremos o string livre (espaço plano) e façamos uma hipótese simplificadora e uma escolha de parametrização. Suponhamos que o string permanece no plano XY, ( $Z=0$ ), e façamos a seguinte mudança de parâmetros:

$$\bar{t} = t, \quad \bar{\sigma}(t, \sigma) = x(t, \sigma) \quad (2.4-1)$$

Com esta parametrização a integral de ação do string fica sob a forma

$$S = -N \int dt dx (1 + \dot{y}'^2 - y'^2)^{1/2} \quad (2.4-2)$$

e a equação de movimento para  $y = y(t, x)$  é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}'^2 - y'^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + \dot{y}'^2 - y'^2}} \right) = 0, \quad (2.4-3)$$

onde  $y' = \partial y / \partial x$ . A energia associada com o string pode ser calculada sem dificuldades e o resultado é

$$E = N \int dx \frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2-y^2}} = \quad (2.4.4)$$

$$= N \int dl \frac{1}{\sqrt{1-v_{\perp}^2}} \quad (2.4.5)$$

onde  $v_{\perp} = \dot{y} \frac{\partial x}{\partial l}$ , e  $l$  é o comprimento do string. (ver seção 1.7).

Verifica-se que

$$y = f(x+t) \quad e \quad y = f(x-t), \quad (2.4.6)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária, são soluções da equação (2.4.3), e descrevem ondas que se propagam sem mudança de forma e com a velocidade da luz. Observemos que a solução geral de (2.1.3) não pode ser escrita como uma superposição das soluções (2.4.6) porque aquelas equações não são lineares. No caso de pequenas perturbações,  $y^2, y'^2 \ll 1$ , a equação (2.4.3) se reduz à equação de ondas

$$\ddot{y} - y'' = 0$$

que nos é bastante familiar, e tem como solução geral  $y = f(x+t) + f(x-t)$ . (Observe que estamos supondo que o string não perturbado está paralelo ao eixo  $x$ ).

No caso de um string circular de raio  $R$ , com a parametrização (2.4.1), tem-se que

$$y = \pm \sqrt{R^2(t) - x^2} \quad (2.4.7)$$

e a ação é dada por

$$\begin{aligned}
 S &= -2N \int dt R \sqrt{1-\dot{R}^2} \int_{-R}^R dx \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} = \\
 &= -2\pi N \int dt R \sqrt{1-\dot{R}^2} .
 \end{aligned} \tag{2.4-8}$$

A equação de movimento se escreve

$$(1-\dot{R}^2)^{-1} \ddot{R} + R^{-1} = 0 , \tag{2.4-9}$$

e a energia do string é dada por

$$E = 2N\pi \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} . \tag{2.4-10}$$

Com as condições iniciais  $R = R_0$  e  $\dot{R}(0) = 0$  em  $t=0$ ,  $R(t) = R_0 \cos \frac{t}{R_0}$ . Para  $t = \frac{R_0 \pi}{2}$  o string colapsa para um ponto.

Vamos agora analisar a dinâmica dos modelos que discutimos acima em um universo em expansão. Vamos considerar um modelo cosmológico simples, com métrica dada por

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \tag{2.4-11}$$

com  $dt = a(\eta)d\eta$ . Com a escolha de parametrização  $\tau = \eta$  e  $\sigma = x$ , e admitindo que o string está no plano, a lagrangiana se escreve

$$\mathcal{L} = - Na^2(\eta) \sqrt{1+y'^2 - \dot{y}^2} , \tag{2.4-12}$$

onde  $\dot{y} = \partial y / \partial \eta$ . A equação de movimento fica sob a forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \right) \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+y'^2-\dot{y}^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2-\dot{y}^2}} \right) \quad (2.4-13)$$

e para pequenas perturbações, se reduz a

$$\ddot{y} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{y} - y'' = 0 \quad (2.4-14)$$

No caso de um universo em que há apenas radiação ( $p = \rho/3$ ), tem-se que  $a(\eta) \sim \eta$  e a equação (2.4-14) se escreve

$$\ddot{y} + \frac{2}{\eta} \dot{y} - y'' = 0 \quad (2.4-15)$$

e tem como soluções

$$y(\eta, x) = \frac{1}{\eta} f(x \pm \eta) \quad , \quad (2.4-16)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária. Qualquer solução da equação (2.4-15) pode ser representada como uma superposição de ondas estacionárias

$$y = \frac{1}{\eta} (\text{sen}k\eta \text{cos}kx, \text{sen}k\eta \text{sen}kx) \quad , \quad (2.4-17a)$$

$$y = \frac{1}{\eta} (\text{sen}k\eta \text{cos}kx, \text{cos}k\eta \text{sen}kx) \quad . \quad (2.4-17b)$$

Vamos supor que em  $\eta = \eta_0$  o string está em repouso com relação ao resto do universo, isto é,

$$\dot{y}(\eta_0) = 0 \quad . \quad (2.4-18)$$

Para  $k\eta_0 \ll 1$ , ondas suficientemente longas, a condição acima pode ser substituída por

$$\dot{y}(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad \eta \rightarrow 0 \quad . \quad (2.4-19)$$

A condição  $k\eta_0 \ll 1$  significa que em  $t = t_0$  o comprimento de onda  $\lambda_0 = 2\pi a(\eta_0)k^{-1}$  é muito maior que o horizonte  $t = \frac{1}{2} a(\eta_0)\eta_0$ . Isto seleciona ondas da forma  $y = \eta^{-1} \text{sen}k\eta \text{cos}kx$  e proíbe as outras formas.

Um quadro físico da evolução de um string com uma onda estacionária da forma  $y = \eta^{-1} \text{sen}k \text{cos}kx$  pode ser obtido em dois casos limites quando  $\lambda(t)$  é muito maior que o horizonte  $t$ . Se  $\lambda \gg t$  ( $k\eta \ll 1$ ), então  $\dot{y} \approx 0$ . Isto significa que o string é (conformalmente) esticado pela expansão do universo. Quando  $\lambda$  se torna muito menor que o horizonte,  $\lambda \ll t$  ( $k\eta \gg 1$ ), então o comprimento de onda aumenta proporcionalmente ao fator de escala  $a(\eta)$ , mas a amplitude permanece constante ( $a(\eta)k^{-1} = \text{constante}$ ).

A energia da perturbação com relação a um comprimento de onda é

$$E = \frac{1}{2} N \int_0^{2\pi k^{-1}} dx (y'^2 + y^2) \quad (2.4-20)$$

e cresce proporcionalmente ao fator de escala quando  $\lambda \gg t$ , e decresce com  $a^{-1}$  quando  $\lambda \ll t$ .

Para um string circular, com a métrica (2.4-11), a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -2\pi N a^2(\eta) r (1 - \dot{r}^2)^{1/2} \quad (2.4-21)$$

$r$  é o raio do string. A equação de movimento se escreve

$$\ddot{r}(1-r^2)^{-1} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{r} + r^{-1} = 0 \quad (2.4-22)$$

Uma análise de pequenas perturbações mostra que o string se deforma conformalmente até que seu raio se torna menor que o horizonte. A partir daí o string colapsa com velocidade relativística.

Uma discussão mais profunda da evolução de strings cósmicos deve levar em conta a interação entre os strings e entre strings e o resto da matéria. Este é um problema muito complicado. Um aspecto importante é que, devido a interação entre strings podem resultar strings fechados, que colapsam podendo dar origem a buracos negros. Por outro lado, strings fechados de grandes dimensões podem servir de germe para a formação de galáxias. Este é o caso, por exemplo, dos strings que surgem nas teorias grande unificadas onde, se a superprodução de buracos negros puder ser evitada sem dar origem a contradições, a formação de galáxias pode ser explicada de maneira natural.

## 2.5 Strings na Variedade de Kaluza-Klein

Na Seção 2.1 abordamos o problema da interação entre strings e campos eletromagnéticos no espaço-tempo de Minkowski, segundo as prescrições usuais das teorias de campos. Chegamos às conclusões que strings fechados são desprovidos de carga e, portanto, não interagem com campos eletromagnéticos, e que no caso de strings abertos a carga necessariamente se localiza em suas extremidades. A teoria foi construída com base em três simetrias fundamentais: invariância de Lorentz, invariância de gauge (eletromagnético) e invariância por repara

metrizações da superfície de evolução, esta última sendo uma peculiaridade do sistema em questão. As restrições sobre a distribuição de cargas do string são consequências das imposições destas simetrias, e são inevitáveis. Sob o ponto de vista formal (pelo menos) estas conclusões são desagradáveis, de modo que nos propomos a construir um modelo de strings dotados de carga. O modelo é uma simples generalização da teoria usual: ao invés do espaço-tempo de Minkowski consideraremos a variedade penta-dimensional de Kaluza-Klein como o universo onde o string evolui. Esta seção será devotada à geometria da variedade de Kaluza-Klein  $v^5$ , e será bem mais longa que as precedentes em virtude da importância da teoria de Kaluza-Klein em muitos aspectos das modernas teorias unificadas.

Antes de entrar nos detalhes técnicos da construção da geometria de  $v^5$ , vamos fazer um preâmbulo sobre a teoria de Kaluza-Klein, objetivando particularmente os não especialistas.

Em 1921 Th. Kaluza descobriu que as interações gravitacional e eletromagnética poderiam ser unificadas na estrutura geométrica de uma variedade penta dimensional  $v^5$  na qual o espaço-tempo está imerso.

O mecanismo proposto por Kaluza é muito profundo mas fácil de explicar usando as idéias originais. Suponhamos que o universo tem 5 dimensões mas que a quinta dimensão foi curvada em um pequeno círculo. Em outras palavras, suponhamos que cada ponto é um pequeno círculo com raio muito pequeno (da ordem do comprimento de Planck), indetectável experimentalmente. Denotemos as coordenadas de  $v^5$  por

$$z \equiv \{z^A\} \equiv \{z^\mu, z^5\}$$

$$A = 1, 2, \dots, 5 ; \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

com  $z^5$  variando entre 0 e  $2\pi$ . As transformações de coordenadas admissíveis sobre  $v^5$  são tais que as transformações de  $z^\mu$  e  $z^5$ , individualmente, não dependem de  $z^5$ . Assim, por estas transformações os círculos são girados de certas quantidades que dependem de  $z^\mu$ . A métrica  $(\gamma_{AB})$  de  $v^5$  contém uma parte  $\gamma_{\mu 5}$  que se transforma como um quadrivetor. Verifica-se que a sua lei de transformação é exatamente a combinação de uma transformação usual de coordenadas e uma de gauge do tipo ele tromagnético. Identificando-se  $\gamma_{\mu 5}$  como proporcional ao po - tencial vetor eletromagnético este passa a ser uma parte in tegrante da geometria de  $v^5$ , e as transformações de gauge são um caso especial das transformações de coordenadas.

A métrica de  $v^5$  fica constituída de uma parte que é identificada com a métrica do espaço-tempo e uma outra que contém o potencial vetor  $A_\mu$ . Construindo uma integral de ação do tipo gravitacional em  $v^5$ , verifica-se que esta se reduz a soma da integral de ação do campo gravitacional em quatro dimensões com a do campo de Maxwell. Sob certo aspecto, isto não é surpresa pois a integral de ação em  $v^5$  é invariante pe las transformações gerais de coordenadas que, por sua vez, contém as transformações de coordenadas do espaço-tempo e as de gauge do eletromagnetismo. Mesmo raciocinando nestes termos a redução da integral de ação  $S_{v^5} \rightarrow S_{\text{Einstein}} + S_{\text{(Maxwell)}} \times \times (\text{Einstein})$  é surpreendente.

Mas, as surpresas da construção de Kaluza não fi-

cam por aí. Das três simetrias discretas fundamentais da natureza, paridade, inversão temporal  $T$  e conjugação da carga  $C$ , esta última tem um caráter diferente das demais não sendo uma simetria geométrica. Na teoria de Kaluza a conjugação da carga também é uma simetria do espaço-tempo. De fato, a carga de uma partícula na variedade de Kaluza é identificada com o momento canonicamente conjugado com a quinta coordenada da partícula. Em outras palavras, a carga da partícula é a quantidade que se conserva por translações ao longo da quinta dimensão, o que dá um caráter geométrico ao operador de carga. A invariância  $CP$  significa invariância sob reflexões simultâneas das quatro coordenadas tipo espaço.

Após ficar praticamente esquecida por quase 60 anos (!) a teoria de Kaluza-Klein<sup>(\*)</sup> foi revivida, principalmente como consequência dos desenvolvimentos das teorias de gauge e o advento da supergravidade, que conduz naturalmente a se considerar a variedade espaço-tempo com dimensão maior que quatro. Estes desenvolvimentos levantaram a questão da generalização da teoria de Kaluza-Klein para  $4+N$  dimensões. A concepção original de Kaluza envolve o grupo abeliano  $U(1)$  do eletromagnetismo através do círculo associado com cada ponto do espaço-tempo, que é a "variedade" onde atua o grupo  $U(1)$ . A generalização da teoria consiste em se considerar uma variedade  $M$  associada com cada ponto do espaço-tempo sobre a qual atua um grupo não-abeliano  $G$ . Desta construção resulta a teoria da gravitação de Einstein e uma teoria de gauge com grupo

---

(\*) A teoria de Th. Kaluza foi posteriormente desenvolvida por O. Klein (1926), a teoria resultante ficou conhecida como "Teoria de Kaluza-Klein", denominação que adotaremos daqui por diante.

G. Esta generalização será estudada mais adiante.

### 2.5.1 Revisão de alguns conceitos de geometria diferencial

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $\{z^\mu\}$  as coordenadas de um ponto  $P$  de  $M$ . O espaço tangente a  $M$  em  $P$  será denotado por  $T_M(P)$  e uma base neste espaço por  $\{\vec{L}_\mu\}$ . De modo geral um vetor  $\vec{A} \in T_M(P)$  pode ser expresso como

$$\vec{A} = A^\mu \vec{L}_\mu .$$

Nesta expressão o índice  $\mu$  em  $\vec{L}_\mu$  identifica um vetor da base e em  $A^\mu$  a componente de  $\vec{A}$  ao longo da direção definida por  $\vec{L}_\mu$ .

A base  $\{\vec{L}_\mu\}$  é local. Assim, se nos deslocarmos para um ponto vizinho seus vetores mudam. Suponhamos que nos deslocamos ao longo da direção  $\nu$ ; a variação em  $\vec{L}_\mu$  é medida pela derivada  $\nabla_\nu \vec{L}_\mu \in T_M(P)$ , e se expressa como

$$\nabla_\nu \vec{L}_\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \vec{L}_\lambda . \quad (2.5-1)$$

Esta expressão define os coeficientes de conexão  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ . Observe que estes coeficientes não são necessariamente simétricos.

Para um vetor arbitrário  $\vec{A}$  podemos escrever

$$\nabla_\nu \vec{A} = \nabla_\nu (A^\mu \vec{L}_\mu) \equiv (\partial_\nu A^\mu) \vec{L}_\mu + A^\mu (\nabla_\nu \vec{L}_\mu) , \quad (2.5-2)$$

que simplesmente nos diz que

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Variação no} \\ \text{vetor} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{Variação nas} \\ \text{componentes} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Variação na} \\ \text{base} \end{array} \right\} .$$

Usando (2.5-1),

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} \vec{A} &= (\partial_{\nu} A^{\alpha}) \vec{L}_{\alpha} + (A^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) \vec{L}_{\alpha} \\ &\equiv A^{\alpha} \parallel_{\nu} \vec{L}_{\alpha} \quad , \end{aligned} \quad (2.5-3)$$

com

$$A^{\alpha} \parallel_{\nu} = \partial_{\nu} A^{\alpha} + \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} A^{\beta} . \quad (2.5-4)$$

O operador  $\nabla_{\nu}$  é denominado de operador de derivação covariante na direção  $\nu$ , definida pelo vetor  $\vec{L}_{\nu}$  da base considerada. A definição de  $\nabla_{\nu}$  pode ser generalizada definindo-se o operador de derivação covariante na direção de um vetor qualquer

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{A} \equiv v^{\nu} \nabla_{\nu} \vec{A} = v^{\nu} A^{\mu} \parallel_{\nu} \vec{L}_{\mu} . \quad (2.5-5)$$

Consideraremos dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  no mesmo ponto e os deslocamentos  $\varepsilon_1 \vec{v}$  e  $\varepsilon_2 \vec{w}$ . A variação nas coordenadas de P devida a estes deslocamentos, nesta ordem, é

$$\begin{aligned} \bar{\delta} Z^{\mu} &= \varepsilon_1 v^{\mu} + \varepsilon_2 w^{\mu} (Z + \varepsilon v) \approx \\ &\approx \varepsilon_1 v^{\mu} + \varepsilon_2 w^{\mu} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 v^{\nu} \partial_{\nu} w^{\mu} . \end{aligned}$$

Efetuando os deslocamentos na ordem contrária obtém-se

$$\bar{\delta} Z^{\mu} \approx \varepsilon_2 w^{\mu} + \varepsilon_1 v^{\mu} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 w^{\nu} \partial_{\nu} v^{\mu} .$$

A diferença destes deslocamentos fica dada por

$$\delta z^\mu = \epsilon (v^\nu \partial_\nu w^\mu - w^\nu \partial_\nu v^\mu) \quad (2.5-6)$$

$$(\epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2)$$

ou

$$\begin{aligned} \delta \vec{z} &= \epsilon (v^\nu \partial_\nu w^\mu - w^\nu \partial_\nu v^\mu) \vec{L}_\mu \\ &\equiv \epsilon [\vec{v}, \vec{w}] \quad , \end{aligned} \quad (2.5-7)$$

onde  $[\vec{v}, \vec{w}]$  é o colchete de Lie dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Note que  $[\vec{L}_\mu, \vec{L}_\nu] = 0$ .

Por uma transformação das coordenadas de M,

$$z^\mu + z'^\mu = z^\mu - \eta^\mu(z) \quad (2.5-8)$$

um campo vetorial  $v^\mu(z)$  sofre a transformação

$$v^\mu(z) \rightarrow v'^\mu(z')$$

A diferença  $v'^\mu(z) - v^\mu(z)$  é, por definição, a derivada de Lie do vetor  $\vec{v}$ . Calculando,

$$\begin{aligned} v'^\mu(z) &= v'^\mu(z' + \eta) = v'^\mu(z') + \eta^\alpha \partial_\alpha v'^\mu = \\ &= \frac{\partial z'^\mu}{\partial z^\beta} v^\beta(z) + \eta^\alpha \partial_\alpha v^\mu = \\ &= v^\mu(z) - (\partial_\beta \eta^\mu) v^\beta + \eta^\beta \partial_\beta v^\mu \end{aligned}$$

donde

$$\xi_{\vec{\eta}} v^{\mu} \equiv v'^{\mu}(z) - v^{\mu}(z) = \eta^{\alpha} \partial_{\alpha} v^{\mu} - (\partial_{\alpha} \eta^{\mu}) v^{\alpha} \quad (2.5-9a)$$

ou, usando o colchete de Lie,

$$[\xi_{\vec{\eta}} v^{\mu}(z)] \vec{L}_{\mu} = [\vec{\eta}, \vec{v}] \quad (2.5-9b)$$

Esta expressão nos diz que a derivada de Lie do vetor  $\vec{v}$  ao longo do vetor  $\vec{\eta}$  é dada pelo colchete de Lie de  $\vec{\eta}$  com  $\vec{v}$ .

Procedendo do mesmo modo pode-se calcular a derivada de Lie de qualquer tensor. Por exemplo,

$$\xi_{\vec{\eta}} T_{\alpha\beta} \equiv T'_{\alpha\beta}(z) - T_{\alpha\beta}(z) = \eta^{\mu} \partial_{\mu} T_{\alpha\beta} + (\partial_{\alpha} \eta^{\mu}) T_{\mu\beta} + (\partial_{\beta} \eta^{\mu}) T_{\alpha\mu} \quad (2.5-10)$$

Vamos introduzir a noção de distância em  $M$  definindo o tensor métrico  $g = (g_{\mu\nu})$  pelo produto escalar dos vetores da base  $\{\vec{L}_{\mu}\}$ :

$$g_{\mu\nu} \equiv (\vec{L}_{\mu} \cdot \vec{L}_{\nu}) \quad (2.5-11)$$

O quadrado da distância infinitesimal entre  $\vec{z}$  e  $\vec{z} + \delta\vec{z}$  é

$$ds^2 = \delta\vec{z} \cdot \delta\vec{z} = g_{\mu\nu} dz^{\mu} dz^{\nu} \quad (2.5-12)$$

De (2.5-11) e usando (2.5-1), tem-se que

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} &= \nabla_{\lambda} (\vec{L}_{\mu} \cdot \vec{L}_{\nu}) = (\nabla_{\lambda} \vec{L}_{\mu} \cdot \vec{L}_{\nu}) + (\vec{L}_{\mu} \cdot \nabla_{\lambda} \vec{L}_{\nu}) = \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} g_{\alpha\mu} \quad (2.5-13) \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$g_{\mu\nu||\lambda} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\alpha\mu} = 0 \quad (2.5-14)$$

Desta última expressão pode-se obter

$$\begin{aligned} \partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha\lambda} + (\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha) g_{\alpha\nu} + \\ &+ (\text{o mesmo com } \mu \longleftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

que nos mostra que se os coeficientes da conexão forem simétricos estes ficam inteiramente determinados em termos da métrica e suas derivadas primeiras,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \equiv \{\begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix}\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (2.5-15)$$

Neste caso diz-se que a variedade  $M$  tem torção nula,  $\tau_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = 0$ .

Usando a simetria da conexão e (2.5-10) podemos escrever a derivada de Lie da métrica,

$$\begin{aligned} \xi_\eta g_{\alpha\beta} &= \eta^\lambda g_{\alpha\beta||\lambda} + \eta^\lambda_{||\alpha} g_{\lambda\beta} + \eta^\lambda_{||\beta} g_{\alpha\lambda} = \\ &= \eta_{\beta||\alpha} + \eta_{\alpha||\beta} \end{aligned} \quad (2.5-16)$$

Se a transformação de coordenadas (2.5-8) for tal que  $g'_{\alpha\beta}(Z) = g_{\alpha\beta}(Z)$  então

$$\xi_\eta g_{\alpha\beta} = 0 \longleftrightarrow \eta_{\alpha||\beta} + \eta_{\beta||\alpha} = 0 \quad (2.5-17)$$

Uma transformação de coordenadas que satisfaz a estas condições é denominada de uma isometria da métrica. O conjunto de todas as isometrias de uma métrica constitui um grupo, o grupo de isometrias (ou de movimentos) da variedade. Os vetores  $\vec{\eta}$  que satisfazem a (2.5-17) são denominados de vetores de Killing.

Os vetores  $\vec{L}_\mu$  de modo geral não são ortonormais. No entanto, é sempre possível escolher uma base local  $\{\vec{e}_a\}$  em  $T_M(P)$  de tal modo que

$$(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b) = \eta_{ab} \quad , \quad (2.5-18)$$

onde  $\eta_{ab}$  é a métrica de Minkowski (\*). (Note que (2.5-18) é uma escolha e significa considerar M como localmente minkowskiana.)

Os vetores  $\vec{e}_a$  podem ser expressos em termos da base  $\{\vec{L}_\mu\}$  como

$$\vec{e}_a = e^\mu_{(a)} \vec{L}_\mu \quad . \quad (2.5-19)$$

De (2.5-18,19) segue que

$$e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \quad , \quad (2.5-20)$$

e

$$e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \eta_{ab} = g_{\mu\nu} \quad . \quad (2.5-21)$$

Consideraremos agora a variação da base  $\{\vec{e}_a\}$  de pon-

---

(\*) Nesta seção vamos usar  $\eta_{ab} = \text{diag}(+, -, -, -)$ .

to a ponto. Imitando o que fizemos no caso da base  $\{\vec{L}_\mu\}$  vamos introduzir as conexões  $\omega_{va}^b$  por

$$\nabla_v \vec{e}_a = \omega_{va}^b \vec{e}_b \quad (2.5-22)$$

Agora

$$\begin{aligned} \nabla_v \vec{e}_a &= \nabla_v \left( e^\mu_{(a)} \vec{L}_\mu \right) \equiv e^\mu_{(a)} \nabla_v \vec{L}_\mu = \\ &= e^\mu_{(a)} \nabla_v e_{\mu}^{(b)} \vec{e}_b \end{aligned}$$

portanto

$$\omega_{va}^b = e^\mu_{(a)} \nabla_v e_{\mu}^{(b)} \quad (2.5-23)$$

Uma propriedade importante dos objetos  $\omega_{vab}$  pode ser demonstrada como segue. Tomando a derivada covariante de (2.5-18) e usando a definição (2.5-22), obtém-se

$$\omega_{\mu a}^c (\vec{e}_c \cdot \vec{e}_b) + \omega_{\mu b}^c (\vec{e}_a \cdot \vec{e}_c) = 0$$

ou

$$\omega_{\mu a}^c \eta_{cb} + \omega_{\mu b}^c \eta_{ac} = 0$$

donde

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba} \quad (2.5-24)$$

Finalmente lembremos a definição do tensor de Riemann,

$$\begin{aligned}
R^\alpha_{\lambda\mu\nu}\vec{L}_\alpha &\equiv -[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\vec{L}_\lambda = -(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\vec{L}_\lambda = \\
&= -\nabla_\mu(\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\vec{L}_\rho) + \nabla_\nu(\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\vec{L}_\rho) = \\
&= -(\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\Gamma^\alpha_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\alpha_{\rho\mu})\vec{L}_\alpha \quad (2.5-25)
\end{aligned}$$

Em termos das conexões  $\omega_{\mu ab}$ , isto é, relativamente à base  $\{\vec{e}_a\}$ ,

$$\begin{aligned}
R^b_{a\nu\mu}\vec{e}_b &\equiv -[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\vec{e}_a = \\
&= -(\partial_\mu\omega_{\nu a}^b - \partial_\nu\omega_{\mu a}^b + \omega_{\mu a}^c\omega_{\nu c}^b - \omega_{\nu a}^c\omega_{\mu c}^b)\vec{e}_b \quad (2.5-26)
\end{aligned}$$

Os conceitos que apresentamos são suficientes para os desenvolvimentos que faremos a seguir. Eventuais extensões serão feitas quando necessário. Para os leitores habituados com o uso de formas diferenciais apresentamos abaixo um resumo de fórmulas e equações com o objetivo de fixar a notação e convenções.

Elemento de Linha:  $ds^2 = g_{\alpha\beta}(z)dz^\alpha dz^\beta = \eta_{ab}\theta^a\theta^b$

$$\theta^a = e^a_\alpha dz^\alpha, \quad dz^\alpha = e^\alpha_a \theta^a$$

$$d\theta^a = e^a_{\alpha|\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta = e^\alpha_b e^\beta_c e^a_{\alpha|\beta} \theta^b \wedge \theta^c$$

Coeficientes de Ricci:  $\gamma^a_{bc} = -e^a_{\alpha|\beta} e^\alpha_b e^\beta_c, \quad \gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$

$$d\theta^a = \gamma^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c = \frac{1}{2} C^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c$$

$$C_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} \quad , \quad \gamma_{abc} = \frac{1}{2}(C_{abc} - C_{bac} - C_{cab})$$

1-Formas de Rotação:  $\omega^a_b = \gamma^a_{bc} \theta^c$  ,  $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$

Primeira Equação de Estrutura de Cartan:  $d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b$

2-Formas de Curvatura:  $\Omega^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d$

Segunda Equação de Estrutura de Cartan:  $\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_d \wedge \omega^d_b$

### 2.5.2 Construção da variedade de Kaluza-Klein

Denotemos por  $\{z^\Omega\}$ ,  $\Omega = 1, \dots, 5$ , as coordenadas dos pontos de uma variedade penta dimensional  $v^5$ , dotada de uma métrica  $(\gamma_{\Omega\Sigma})$  com assinatura -3. Vamos supor que  $v^5$  admite um grupo de isometrias definido pelo campo de vetores de Killing  $\vec{\xi} = \{\xi_\Gamma\}$ . Temos então que

$$\xi^\Gamma \gamma_{\Omega\Sigma} = 0 \quad (2.5-27)$$

ou

$$\nabla_\Omega \xi_\Sigma + \nabla_\Sigma \xi_\Omega = 0 \quad (2.5-28)$$

Imporemos que os vetores de Killing são tipo espaço,

$$\xi^2 = \xi_\Omega \xi^\Omega < 0 \quad (2.5-29)$$

O campo de vetores  $\vec{\xi}$  define uma congruência de curvas tal que por cada ponto de  $v^5$  passa uma e somente uma cur-

va da congruência.  $\xi$  tem a direção da tangente à curva em cada ponto. Estas curvas admitem a representação paramétrica

$$\frac{dz^\Omega}{d\lambda} = \frac{\xi^\Omega}{\sqrt{-\xi^\Sigma}} \quad (2.5-30)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de arco, e são usualmente denominados de "curvas- $\xi$ ".

A variedade  $v^5$  pode ser decomposta em dois sub-espacos: um quadri-dimensional,  $v^4$ , ortogonal às curvas  $\xi$ , e outro uni-dimensional "paralelo" às curvas  $\xi$ . O projetor sobre  $v^4$  é dado por

$$\mathcal{P}_{\Omega\Sigma} = \gamma_{\Omega\Sigma} - \frac{\xi_\Sigma \xi_\Omega}{\xi^2} \quad (2.5-31)$$

e satisfaz às seguintes propriedades:

$$\mathcal{P}_{\Omega\Sigma} \xi^\Sigma = 0, \quad \mathcal{P}_\Sigma^\Delta \mathcal{P}_\Delta^\Omega = \mathcal{P}_\Sigma^\Omega, \quad \mathcal{P}_\Delta^\Delta = 4 \quad (2.5-32)$$

onde  $\mathcal{P}_\Sigma^\Omega = \mathcal{P}_{\Sigma\Delta} \gamma^{\Delta\Omega}$  e  $\gamma^{\Delta\Omega}$  é a inversa de  $\gamma_{\Delta\Omega}$ ,  $\gamma_{\Delta\Omega} \gamma^{\Delta\Sigma} = \delta_\Delta^\Sigma$ .

O quadrado do elemento de linha em  $v^5$  se decompõe na soma dos quadrados dos elementos de linha em  $v^4$  e na direção  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma_{\Omega\Sigma} dz^\Omega dz^\Sigma = \left( \mathcal{P}_{\Omega\Sigma} + \frac{\xi_\Sigma \xi_\Omega}{\xi^2} \right) dz^\Omega dz^\Sigma = \\ &= \mathcal{P}_{\Omega\Sigma} dz^\Omega dz^\Sigma + \frac{(\xi_\Omega dz^\Omega)^2}{\xi^2} \end{aligned} \quad (2.5-33)$$

O primeiro termo na expressão acima é definido como o quadrado da distância entre as curvas  $\xi$  que passam pelos pontos de

coordenadas  $Z$  e  $Z+dZ$ . Como consequência das equações de Killing esta definição é independente da escolha dos pontos sobre as linhas  $\xi$ .

Vamos utilizar uma classe de sistemas de coordenadas nos quais os vetores de Killing assumem a forma

$$\xi = \{\xi^\Omega\} = \{\xi^\mu=0, \xi^5=1\} \quad (2.5-34)$$

$$(\mu = 1, 2, 3, 4)$$

Nos referiremos a estes sistemas de coordenadas como "sistemas (de coordenadas) adaptados às curvas  $\xi$ " ou, simplesmente, "sistemas  $\xi$ ". Por uma transformação das coordenadas de  $v^5$ ,  $Z^\Omega \rightarrow Z'^\Omega$ ,

$$\xi^\Omega + \xi'^\Omega = \frac{\partial Z'^\Omega}{\partial Z^\Sigma} \xi^\Sigma.$$

Assim, as transformações de coordenadas admissíveis entre os sistemas  $\xi$  devem satisfazer a

$$0 = \xi'^\mu = \frac{\partial Z'^\mu}{\partial Z^\Sigma} \xi^\Sigma,$$

e

$$1 = \xi'^5 = \frac{\partial Z'^5}{\partial Z^\Sigma} \xi^\Sigma.$$

Da primeira das expressões acima segue que

$$0 = \frac{\partial Z'^\mu}{\partial Z^\alpha} \xi^\alpha + \frac{\partial Z'^\mu}{\partial Z^5} \xi^5 = \frac{\partial Z'^\mu}{\partial Z^5}$$

de modo que  $Z'^\mu$  é uma função arbitrária das quatro coordena-

das  $Z^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ . Da segunda equação segue que

$$1 = \frac{\partial Z'^5}{\partial Z^\alpha} \xi^\alpha + \frac{\partial Z'^5}{\partial Z^5} = \frac{\partial Z'^5}{\partial Z^5} .$$

Logo,  $Z'^5$  fica dado pela soma de  $Z^5$  com uma função arbitrária das quatro coordenadas  $Z^\alpha$ . Portanto, as transformações de coordenadas mais gerais entre os sistemas- $\xi$  têm a forma

$$\begin{aligned} Z'^\mu + Z'^5 &= Z'^\mu(Z^\alpha) , \\ Z^5 + Z'^5 &= Z^5 + \Delta(Z^\alpha) . \end{aligned} \quad (2.5-35)$$

Examinemos as consequências da escolha dos sistemas- $\xi$ . É fácil de ver que as equações de Killing (2.5-28) se reduzem a

$$\partial_5 \gamma_{\Omega\Sigma} = 0 \quad (2.5-36)$$

de modo que a métrica de  $v^5$  é independente de  $Z^5$ . Tem-se também que

$$\xi^2 = \gamma_{\Omega\Sigma} \xi^\Omega \xi^\Sigma = \xi_5 = \gamma_{55} . \quad (2.5-37)$$

Da definição (2.5-4) do projetor sobre  $v^4$  segue que

$$\mathcal{P}_{5\Omega} = \gamma_{5\Omega} - \frac{\xi_5 \xi_\Omega}{\xi^2} = \gamma_{5\Omega} - \gamma_{\Omega\Delta} \xi^\Delta = 0 . \quad (2.5-38)$$

Assim, o tensor de projeção tem apenas dez componentes independentes não nulas,  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ . É fácil verificar que pelas trans-

formações (2.5\_35)  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$  se comporta como um quadri-tensor, isto é, como um tensor em  $v^4$ ,

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z'^\mu} \frac{\partial z^\beta}{\partial z'^\nu} \mathcal{P}_{\alpha\beta} .$$

Além disto, segue de (2.5\_32) que  $\mathcal{P}_{\mu\nu} \mathcal{P}^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$ .

Como consequência destes resultados, somos levados de maneira natural a identificar  $\mathcal{P}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ , e  $\mathcal{P}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$  como as componentes covariantes e contravariantes, respectivamente, do tensor métrico de  $v^4$ . Mais ainda, identificaremos  $v^4$  com o espaço-tempo físico

Ainda com relação à escolha dos sistemas- $\xi$ , verifica-se que as equações paramétricas (2.5\_30) ficam sob a forma

$$\frac{dz^\mu}{d\ell} = 0 \quad , \quad \frac{dz^5}{d\ell} = \frac{1}{\sqrt{-\xi^2}} \quad , \quad (2.5_39)$$

donde se conclui que as curvas  $\xi$  são as linhas coordenadas de  $z^5$ .

Por um cálculo direto pode-se verificar a seguinte relação entre os determinantes de  $(\gamma_{\Omega\Sigma})$  e  $(g_{\mu\nu})$ :

$$\det(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \xi^2 \det(g_{\mu\nu}) \quad , \quad (2.5_40)$$

que é um resultado crucial para a interpretação física da teoria.

Examinemos a lei de transformações dos vetores de Killing por (2.5\_30):

-343-

$$\xi'_{\Omega} = \frac{\partial Z^{\Delta}}{\partial Z'^{\Omega}} \xi_{\Delta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_{\mu} = \frac{\partial Z^{\beta}}{\partial Z'^{\mu}} (\xi_{\beta} - \xi^2 \partial_{\beta} \Delta) \quad , \quad (2.5-41) \\ \xi'_5 = \xi_5 \quad . \quad (2.5-42) \end{array} \right.$$

Definindo os quadri-vetores  $A_{\mu}(Z^{\alpha})$  por

$$\xi_{\mu} = -\xi^2 A_{\mu} \quad , \quad (2.5-43)$$

segue de (2.5-13) que

$$A'_{\mu} = \frac{\partial Z^{\beta}}{\partial Z'^{\mu}} (A_{\beta} + \partial_{\beta} \Delta) \quad . \quad (2.5-44)$$

Esta expressão é idêntica à lei de transformação dos potenciais eletromagnéticos por transformações simultâneas de coordenadas e de gauge. Assim, as quantidades  $A_{\mu}(Z^{\alpha})$  serão identificadas como as componentes do vetor potencial eletromagnético que, desta forma, passa a ser uma parte integrante da geometria via a sua relação com os vetores de Killing,  $\{\xi_{\Omega}\} = \{-\xi^2 A_{\mu}, \xi_5\}$ , como segue de (2.5-43). As transformações de gauge puras são os casos particulares (2.5-30) com  $Z'^{\mu} = Z^{\mu}$  e  $Z'^5 = Z^5 + \Delta(Z^{\alpha})$ .

De (2.5-31) e (2.5-43) obtêm-se a seguinte expressão para o tensor métrico de  $v^5$ :

$$(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \left( \begin{array}{c|c} \gamma_{\mu\nu} & \gamma_{\mu 5} \\ \hline \gamma_{\nu 5} & \gamma_{55} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + \xi^2 A_{\mu} A_{\nu} & -\xi^2 A_{\mu} \\ \hline -\xi^2 A_{\nu} & \xi^2 \end{array} \right) \quad . \quad (2.5-45)$$

Vê-se que  $\gamma_{\Omega\Sigma}$  tem 15 elementos independentes dos quais apenas

14 têm uma correspondência clara com quantidades físicas: as quatro componentes do potencial eletromagnético  $A_\mu$ , e as dez componentes da métrica de  $v^4$ ,  $g_{\mu\nu}$ . A quantidade  $\xi^2 = \xi_\Omega \xi^\Omega$  não tem significado físico.

A maneira natural de eliminar  $\xi^2$  da teoria é via uma condição geométrica. Assim, vamos impor que as curvas- $\xi$  são geodésicas de  $v^5$ , condição que se escreve

$$\xi^\Omega \nabla_\Omega \xi_\Sigma = 0 \quad . \quad (2.5-46)$$

Esta condição juntamente com as equações de Killing (2.5-28) implicam que  $\xi^2$  é uma constante que, com uma escolha conveniente das unidades, tomaremos como igual a -1 (em acordo com (2.5-29)):

$$\xi^2 = \xi_\Omega \xi^\Omega = -1 \quad . \quad (2.5-47)$$

Os vetores de Killing de  $v^5$  ficam sob a forma:

$$\vec{\xi} = \{\xi_\mu, \xi_5\} = \{A_\mu, -1\} \quad , \quad (2.5-48)$$

e o tensor métrico se escreve

$$(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} - A_\mu A_\nu & A_\mu \\ \hline A_\nu & -1 \end{array} \right) , \quad (\gamma^{\Omega\Sigma}) = \left( \begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & g^{\mu\alpha} A_\alpha \\ \hline g^{\nu\alpha} A_\alpha & -1 + g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \end{array} \right) \quad . \quad (2.5-49)$$

O quadrado do elemento de linha em  $v^5$  fica dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu - (d\zeta - A_\alpha dz^\alpha)^2, \quad (2.5-50)$$

onde introduzimos a notação  $z^5 \equiv \zeta$ .

Uma consequência muito importante da escolha (2.5-46,47) é que o determinante de  $(\gamma_{\Omega\Sigma})$  torna-se independente de  $\xi^2$ . De fato, segue diretamente de (2.5-40) que

$$\det(\gamma_{\Omega\Sigma}) = -\det(g_{\mu\nu}). \quad (2.5-51)$$

Outras consequências da escolha (2.5-46) serão analisadas na seção seguinte.

Apresentamos abaixo os símbolos de Christoffel de  $v^5$  definidos por (2.5-15):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\xi\xi}^\Omega &= 0, \\ \Gamma_{\xi\beta}^\alpha &= \frac{1}{2} F_{\beta}^\alpha, \\ \Gamma_{\xi\mu}^s &= \frac{1}{2} A^\alpha F_{\alpha\mu}, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^s &= -\frac{1}{2} (\nabla_\beta A_\alpha + \nabla_\alpha A_\beta) - \frac{1}{2} A^\mu (A_\alpha F_{\mu\beta} + A_\beta F_{\mu\alpha}), \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \{\alpha_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} (A_\mu F_{\nu}^\alpha + A_\nu F_{\mu}^\alpha), \end{aligned} \quad (2.5-52)$$

$\{\alpha_{\mu\nu}\}$  são os símbolos de Christoffel de  $v^4$ , calculados com  $(g_{\mu\nu})$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , e  $\nabla_\alpha$  é o operador de derivação covariante em  $v^4$ .

Vamos agora introduzir uma base local ("fünftbein") em  $v^5$ :

$$e_{(A)}^{\Omega} e_{(B)}^{\Sigma} \gamma_{\Omega\Sigma} = \eta_{AB} = \text{diag}(+1-1-1-1-1) \quad ,$$

$$e_{\Omega}^{(A)} e_{\Sigma}^{(B)} \eta_{AB} = \gamma_{\Omega\Sigma} \quad . \quad (2.5-53)$$

Nestas expressões os índices têm os seguintes significados : índices gregos maiúsculos são, como anteriormente, índices de  $v^5$ ,  $\Omega = (\mu, s)$ , onde  $\mu = 1, 2, 3, 4$  são índices do espaço-tempo  $v$ ; índices latinos maiúsculos são índices do espaço tangente  $(A) = ((a), (s))$  com  $a = 1, 2, 3, 4$ . A correspondência é então

$$\begin{array}{ccc} \Omega = (\mu, s) & \mu = 1, 2, 3, 4 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (A) = ((a), (s)) & a = 1, 2, 3, 4 & . \end{array}$$

Consideremos agora um deslocamento infinitesimal do ponto  $P$ , onde definimos a base local, parametrizado pelo vetor  $\delta\eta^{(A)} = \varepsilon\eta^{(A)}$ . Isto induz uma variação nas coordenadas  $Z^{\Omega}$  de  $P$  dada por

$$\delta Z^{\Omega} = e_{(A)}^{\Omega} \delta\eta^{(A)} \quad . \quad (2.5-54)$$

Desta expressão obtém-se

$$\delta Z^{\mu} = e_{(A)}^{\mu} \delta\eta^{(A)} = e_{(a)}^{\mu} \delta\eta^{(a)} + e_{(s)}^{\mu} \delta\eta^{(s)}$$

e

$$\delta Z^s = e_{(A)}^s \delta\eta^{(A)} = e_{(a)}^s \delta\eta^{(a)} + e_{(\bar{s})}^s \delta\eta^{(\bar{s})} \quad .$$

Da decomposição que fizemos da variedade  $v^5$  podemos usar o argumento de que um deslocamento na direção (5) não deve alte -

-347-

rar as coordenadas  $z^\mu$ . Segue da primeira das equações acima que

$$\delta z^\mu = 0 = e^\mu_{(s)} \delta \eta^{(s)}$$

e portanto

$$e^\mu_{(s)} = 0 \quad . \quad (2.5.55)$$

De (2.5.53) obtêm-se

$$e^\Omega_{(A)} e_{\Omega(B)} = 0$$

e, em particular,

$$e^\Omega_{(s)} e_{\Omega(a)} = 0$$

Desta última expressão segue que

$$e^\Omega_{(s)} e_{\mu(a)} + e_{(s)} e_s(a) = e^s_{(s)} e_s(a) = 0$$

donde

$$e_s(a) = 0 \quad . \quad (2.5.56)$$

Obtivemos assim as seguintes condições sobre as "füftbein":

$$\begin{aligned} e^\mu_{(s)} = 0 = e^\mu_{(\bar{s})} \quad , \\ e_s(a) = 0 = e_s(a) \quad . \end{aligned} \quad (2.5.57)$$

Estas condições juntamente com as equações (2.5.53) nos per-

tem construir a métrica  $(\gamma_{\Omega\Sigma})$  de  $v^5$ . De fato,

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{AB} e_{\mu}^{(A)} e_{\nu}^{(B)} = \eta_{ab} e_{\mu}^{(a)} e_{\nu}^{(b)} + \eta_{55} e_{\mu}^{(5)} e_{\nu}^{(5)} = g_{\mu\nu} - e_{\mu}^{(5)} e_{\nu}^{(5)},$$

$$\gamma_{5\nu} = \eta_{AB} e_5^{(A)} e_{\nu}^{(B)} = \eta_{55} e_5^{(5)} e_{\nu}^{(5)} = -e_5^{(5)} e_{\nu}^{(5)},$$

$$\gamma_{55} = \eta_{AB} e_5^{(A)} e_5^{(B)} = \eta_{55} e_5^{(5)} e_5^{(5)} = - (e_5^{(5)})^2.$$

Matricialmente,

$$(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - e_{\mu}^{(5)} e_{\nu}^{(5)} & -e_5^{(5)} e_{\nu}^{(5)} \\ \dots & \dots \\ -e_5^{(5)} e_{\nu}^{(5)} & -(e_5^{(5)})^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5-58)$$

Fazendo agora a identificação

$$e_{\mu}^{(5)} = -A_{\mu}(Z^{\alpha}), \quad (2.5-59)$$

$$e_5^{(5)} = 1,$$

vê-se que (2.5-58) se reduz a (2.5-49). É importante observar que, em particular,  $e_5^{(5)}$  não depende das coordenadas de  $v^4$ ,

$$\frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}} e_5^{(5)} = 0, \quad (2.5-60)$$

e que a condição da métrica de  $v^4$  não depender de  $Z^5$  está implícita em

$$\frac{\partial}{\partial z^s} e_{\mu}^{(a)} = 0 \quad (2.5-61)$$

Concluimos então que utilizando o formalismo de "fünftbein" com os argumentos simples que conduziram às equações (2.5-57) e a identificação (2.5-59), a métrica de Kaluza-Klein pode ser construída sem dificuldades. Com as devidas generalizações os mesmos argumentos podem ser utilizados para a construção da métrica da variedade de Kaluza-Klein generalizada  $v^{4+n}$ , como faremos mais adiante. No nosso entender, a simplicidade e a clareza deste procedimento o justificam plenamente, apesar da ausência de rigor matemático.

A seguir apresentamos um resumo do cálculo do tensor curvatura para o caso em que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

$$ds^2 = \eta_{ab} \theta^a \theta^b, \quad \eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1, +1, -1, -1)$$

$$\theta^a = e_A^{(a)} dz^A \quad \begin{cases} \theta^\mu = dz^\mu \\ \theta^5 = d\zeta - A_\mu dz^\mu = d\zeta - A_\mu \theta^\mu \end{cases}$$

$$e^1_{(1)} = e^2_{(2)} = e^3_{(3)} = e^4_{(4)} = e^5_{(5)} = 1, \quad e^5_{(\mu)} = A_\mu$$

$$e_i^{(1)} = e_2^{(2)} = e_3^{(3)} = e_4^{(4)} = e_5^{(5)} = 1, \quad e_5^{(\mu)} = -A_\mu$$

$$d\theta^a = 0, \quad d\theta^5 = -\frac{1}{2} F_{\alpha\mu} \theta^\alpha \wedge \theta^\mu$$

$$d\theta^a = \frac{1}{2} C^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c \Rightarrow \begin{cases} C^\mu_{bc} = 0 \\ C^5_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta} \end{cases}$$

$$\gamma_{\alpha\beta 5} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} = -\gamma_{5\alpha\beta}$$

$$\omega^5_{\alpha} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \theta^{\beta} = -\omega_{5\alpha} = \omega_{\alpha 5}, \quad \omega^{\alpha}_{\beta} = -\frac{1}{2} F^{\alpha}_{\beta} \theta^5$$

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_d \wedge \omega^d_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{5\alpha 5\beta} = \frac{1}{4} F_{\lambda\beta} F^{\lambda}_{\alpha} \\ R_{5\alpha\mu\nu} = \partial_{\mu} F_{\alpha\nu} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} - F_{\alpha\nu} F_{\beta\mu}) \end{array} \right.$$

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\lambda} F^{\lambda}_{\beta}, \quad R_{55} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\lambda} F^{\lambda\alpha}$$

Destes resultados obtêm-se o escalar de curvatura de  $v^5$ :

$$R^{(5)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.5.62)$$

No caso geral encontra-se

$$R^{(5)} = R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.5.63)$$

onde  $R^{(4)}$  é o escalar de curvatura de  $v^4$ , um resultado que é realmente surpreendente.

Usando (2.5.51) e (2.5.63),

$$\sqrt{\gamma} R^{(5)} = \sqrt{-g} \left( R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (2.5.64)$$

Vê-se que uma lagrangiana de Einstein em  $v^5$  resulta na lagran

giana para o campo gravitacional em  $v^4$  acoplado ao campo de Maxwell. (Note que o sinal relativo dos dois termos de (2.5-64) é consequência da escolha  $\xi^2 = -1$ ). Alguns detalhes sobre a construção da integral de ação usando (2.5-64) como lagrangiana serão dados mais adiante.

## 2.6 O movimento geodésico na variedade de Kaluza-Klein

No Capítulo 0 vimos que a trajetória de uma partícula de teste numa variedade riemanniana, isto é, sob a ação de um campo gravitacional, é uma geodésica. Em outras palavras, a trajetória da partícula é a curva que extremiza o funcional de ação

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda L(\dot{Z}, Z) \quad , \quad (2.6-1)$$

$\delta S = 0$ , com as condições  $\delta Z(\lambda_1) = 0 = \delta Z(\lambda_2)$ . A lagrangiana  $L(\dot{Z}, Z)$  pode ser escolhida como

$$L_1 = \frac{1}{2} \gamma_{\Omega\Sigma}(Z) \frac{dz^\Omega}{d\lambda} \frac{dz^\Sigma}{d\lambda} \quad (2.6-2)$$

ou

$$L_2 = \sqrt{\gamma_{\Omega\Sigma}(Z) \frac{dz^\Omega}{d\lambda} \frac{dz^\Sigma}{d\lambda}} \quad . \quad (2.6-3)$$

É importante lembrar algumas consequências da escolha da lagrangiana,  $L_1$  ou  $L_2$ . Escolhendo-se  $L_2$ , que é uma função homogênea de 1ª ordem em  $\dot{Z}$ , a integral de ação fica

invariante por reparametrizações  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}(\lambda)$ . Como consequência, o parâmetro  $\lambda$  é indeterminado. As variações de  $S_2$  em torno de  $\dot{Z} = 0$  não são bem definidas de modo que as soluções de  $\delta S_2 = 0$  não incluem a classe de geodésicas nulas. A escolha de  $L$  conduz a uma integral de ação que não é invariante por reparametrizações arbitrárias.  $\lambda$  fica restrito a ser um parâmetro afim que é único, a menos de transformações lineares,  $d\bar{\lambda} = ad\lambda$ ,  $a = c^{te}$ . As soluções de  $\delta S_1 = 0$  incluem todos os tipos de geodésicas, tipo tempo, tipo espaço e nulas.

Consideremos a lagrangiana (2.6-2), com  $\gamma_{\Omega\Sigma}(Z)$  dada por (2.5-49):

$$L = \frac{1}{2} \gamma_{\Omega\Sigma} \frac{dz^\Omega}{d\lambda} \frac{dz^\Sigma}{d\lambda} = \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\nu} z'^\mu z'^\nu - (\zeta' - A_\alpha dz^\alpha)^2 \right], \quad (2.6-4)$$

onde  $z' = dz/d\lambda$  e  $\xi \equiv z^5$ .

Com os momentos canônicos  $p_\Delta = (p_\mu, p_5 \equiv \pi)$  definidos da maneira usual

$$p_\Delta = \frac{\partial L}{\partial z'^\Delta} = \gamma_{\Delta\Sigma} z'^\Sigma, \quad (2.6-5)$$

encontra-se que

$$\pi = -(\zeta' - A_\alpha z'^\alpha) \quad (2.6-6)$$

e

$$p_\mu = g_{\mu\nu} z'^\nu - A_\mu (\zeta' - A_\alpha z'^\alpha) = \quad (2.6-7a)$$

$$= g_{\mu\nu} z'^\nu - \pi A_\mu. \quad (2.6-8)$$

Com esta definição a hamiltoniana canônica fica dada por

-353-

$$\begin{aligned}
 H_C &= p_\Omega z'^\Omega - L = \\
 &= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (p_\alpha - \pi A_\alpha) (p_\beta - \pi A_\beta) \quad . \quad (2.6-9)
 \end{aligned}$$

Utilizando os colchetes de Poisson fundamentais

$$\{z^\Omega, p_\Sigma\} = \delta^\Omega_\Sigma \quad , \quad (2.6-10)$$

$$\{z^\Omega, z^\Sigma\} = 0 = \{p_\Delta, p_\Gamma\} \quad , \quad (2.6-11)$$

a hamiltoniana acima gera as equações de movimento

$$z'^\Omega = \gamma^{\Omega\Sigma} p_\Sigma \quad , \quad (2.6-12a)$$

$$p'_\Sigma = (\partial_\Sigma \gamma^{\Gamma\Delta}) p_\Gamma p_\Delta \quad . \quad (2.6-12b)$$

donde seguem as equações da trajetória (geodésica) da partícula de teste em  $v^5$  :

$$\frac{d^2 z^\Omega}{d\lambda^2} = - \Gamma_{\Delta\Gamma}^\Omega \frac{dz^\Delta}{d\lambda} \frac{dz^\Gamma}{d\lambda} \quad . \quad (2.6-13)$$

Examinemos separadamente as equações que seguem de (2.6-13) para  $\Omega = 5$  e  $\Omega = \mu$ . Obtém-se

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\lambda^2} = - \{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \} z'^\alpha z'^\beta - g^{\mu\rho} \pi F_{\rho\alpha} z'^\alpha \quad , \quad (2.6-14)$$

e

$$\frac{d}{d\lambda} (\zeta' - A_\alpha z'^\alpha) = 0 \quad . \quad (2.6-15)$$

Observe que para obter esta última equação fizemos uso da anterior. Segue então que

$$\pi = -(\zeta' - A_{\alpha} Z'^{\alpha}) = c \frac{te}{\lambda} \quad , \quad (2.6_{-16})$$

um resultado que era de se esperar porque  $\gamma_{\Omega\Sigma} \xi^{\Omega} Z'^{\Sigma}$  é uma integral primeira das equações da geodésica. Com  $\xi^{\Omega} = (0, 1)$  , conforme (2.5\_{-48}), tem-se que  $\gamma_{\Omega\Sigma} \xi^{\Omega} Z'^{\Sigma} = -\pi = c \frac{te}{\lambda}$  ao longo da geodésica.

Façamos um parêntesis nos nossos desenvolvimentos para obter as equações (2.6\_{-14}) e (2.6\_{-15}) usando as propriedades formais das geodésicas.

Denotando por  $v = \left\{ \frac{dz^{\Omega}}{d\lambda} \right\}$  o vetor tangente à curva , devemos ter  $v_{\Omega} v^{\Omega} = c \frac{te}{\lambda}$  e

$$v^{\Sigma} \nabla_{\Sigma} v^{\Omega} = 0 \quad .$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (\xi_{\Omega} v^{\Omega}) &= v^{\Sigma} \nabla_{\Sigma} (\xi_{\Omega} v^{\Omega}) = \\ &= \frac{1}{2} v^{\Sigma} v^{\Omega} (\nabla_{\Omega} \xi_{\Sigma} + \nabla_{\Sigma} \xi_{\Omega}) + v^{\Sigma} \xi_{\Omega} \nabla_{\Sigma} v^{\Omega} = \\ &= 0 \quad , \end{aligned}$$

de acordo com o que já vimos na seção 0.  $\xi_{\Omega} v^{\Omega} = c \frac{te}{\lambda}$  resulta ser a lei de conservação (2.6\_{-16}).

Agora,

$$v^{\Omega} v_{\Omega} = v^{\mu} v_{\mu} + (\xi_{\Omega} v^{\Omega})^2 = c \frac{te}{\lambda} \quad ,$$

-355-

donde segue que  $v^\mu v_\mu$  também é constante ao longo da geodésica.

Consideremos agora as equações  $v^\Sigma \nabla_\Sigma v^\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= v^\Sigma \nabla_\Sigma v^\mu = v^5 \nabla_5 v^\mu + v^\alpha \nabla_\alpha v^\mu \\ &= v^5 (\Gamma_{5\alpha}^\mu v^\alpha) + v^\alpha (\partial_\alpha v^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\beta) + v^\alpha \Gamma_{\alpha 5}^\mu v^5 = \\ &= (v^5 - v_\alpha A^\alpha) F_\beta^\mu v^\beta + v^\alpha \overset{(4)}{\nabla_\alpha} v^\mu \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} v^\alpha \overset{(4)}{\nabla_\alpha} v^\mu &= (v^5 - v_\alpha A^\alpha) F_\beta^\mu v^\beta \\ &= (\xi_\Omega v^\Omega) F_\beta^\mu v^\beta \end{aligned}$$

que é a equação (2.6-14).

A equação (2.6-14) tem a forma da equação de Lorentz para uma partícula carregada com a relação (carga)/(massa)  $\equiv \frac{e}{m}$  dada por

$$\frac{e}{m} = -\pi$$

com o parâmetro  $\lambda$  arbitrário.

Expressemos a equação (2.6-14) em termos do tempo próprio  $d\tau^2 = g_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu$ . Neste sentido, façamos  $d\lambda = dS$  onde  $S$  é o comprimento da curva; de (2.5-50) segue que

$$dS^2 = d\tau^2 - \pi^2 dS^2 \implies dS = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} d\tau ,$$

de modo que as equações (2.6-14) se escrevem

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2} = -\{\begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \frac{dz^\beta}{d\tau} - g^{\mu\rho} \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}} F_{\rho\alpha} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \quad (2.6-17)$$

Estas são as equações de Lorentz se identificarmos

$$\frac{e}{m} = - \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}} \quad (2.6-18)$$

Pode-se verificar que a integral de ação construída com (2.6-4) é equivalente à integral de ação usual. Para isto basta fazer uma transformação de Legendre para eliminar  $\dot{\zeta}$ :

$$\bar{S} = \int (a \sqrt{1+\pi^2} d\tau - a\pi A_\alpha \dot{z}^\alpha d\tau)$$

onde introduzimos uma constante  $a$  tal que

$$a \sqrt{1+\pi^2} = m \quad , \quad a\pi = -e \quad .$$

Deste modo obtém-se

$$\bar{S} = \int (m d\tau + e A_\alpha \dot{z}^\alpha d\tau) \quad , \quad (2.6-19)$$

que é a ação usual para uma partícula carregada em interação com um campo eletromagnético. Vemos então que a menos de uma constante, o momento  $\pi$  conjugado com a coordenada  $z^5 \equiv \zeta$  pode ser identificado com a carga da partícula. Esta interpretação fica reforçada se levarmos em conta a definição da corrente elétrica  $j^\mu(z)$  associada com a partícula,

$$\begin{aligned}
 j^\mu(Z) &= \frac{\delta S}{\delta A_\mu(Z)} = \int -(\zeta^\alpha - A_\alpha Z^\alpha) Z^{\tau\mu} \delta^{(4)}(Z-Z(\lambda)) d\lambda \\
 &= \int (-a\pi) \dot{Z}^\mu \delta^{(4)}(Z-Z(\tau)) d\tau .
 \end{aligned}$$

A integral de ação total para o sistema, campo gravitacional, campo eletromagnético e partícula, se escreve

$$\begin{aligned}
 S &= S_{G,EM} + S_P = \\
 &= \int d^5Z \sqrt{-\gamma} R^{(5)} + S_P = \\
 &= \int d^5Z \sqrt{-g} (R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + S_P
 \end{aligned}
 \tag{2.6.20}$$

com  $S_P$  dada por (2.6.19).

Temos agora o problema de como calcular a integral sobre  $Z^5$  na expressão (2.6.20). Neste sentido, lembremos que as quantidades que aparecem no integrando daquela expressão são independentes de  $Z^5$ .

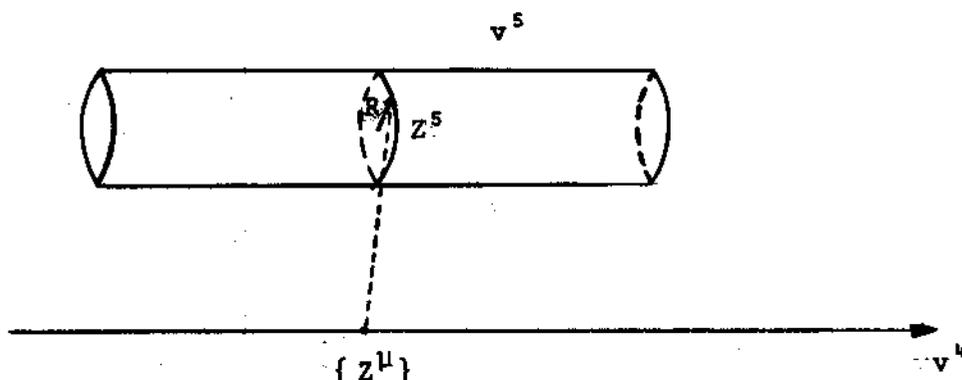
Na verdade, a hipótese de que todas as quantidades físicas são independentes de  $Z^5$  foi feita por Kaluza na sua versão original da teoria, com a denominação de "hipótese de cilíndricidade". Assim, se admitirmos que a coordenada  $Z^5$  é limitada a integração sobre esta variável poderá ser efetuada e contribuirá com um fator constante para (2.6.20), que pode ser omitido. (É importante observar que ao se aplicar o princípio variacional a integral de ação (2.6.20) as variações da métrica do espaço-tempo  $v^4$  e do potencial eletro-

magnético deverão satisfazer à condição de cilíndricidade,  $\partial_s(\delta g_{\mu\nu}) = 0$  e  $\partial_s(\delta A_\mu) = 0$ ).

Uma hipótese mais fraca que a de Kaluza foi proposta por Klein, e consiste em supor que todas as quantidades físicas, inclusive a métrica de  $v^5$ , são funções periódicas da quinta coordenada. O período deve ser suficientemente pequeno de modo que qualquer medida macroscópica de uma certa quantidade necessariamente se estende sobre muitos períodos, dando como resultado o valor médio da quantidade em questão sobre um período. Deste modo, os pontos com coordenadas  $\{Z^{\bar{0}}\} = \{Z^\mu, Z^5 + 2n\pi R\}$ ,  $R$  é uma constante e  $n = 0, 1, 2, \dots$ , são identificados. No que se refere à integral de ação, deve-se fazer uma decomposição de Fourier para o integrando e efetuar a integração sobre um período de  $Z^5$ , obtendo-se assim uma integral quadri-dimensional à qual se aplica o princípio variacional.

A hipótese de periodicidade na quinta coordenada pode ser posta de uma maneira mais precisa seguindo-se as idéias de Einstein-Bargmann-Bergmann, assumindo-se que a variedade de Kaluza-Klein é fechada com relação à quinta dimensão. Já vimos que as curvas- $\xi$ , ou melhor, as geodésicas- $\xi$  são as linhas coordenadas de  $Z^5$ . Dizer que a variedade é fechada com relação à quinta dimensão significa que as geodésicas- $\xi$  são curvas fechadas, que admite-se serem contínuas e que se interceptam com ângulo zero. Por cada ponto de  $v^5$  passa uma e somente uma geodésica- $\xi$  e, além disto, pode-se provar que todas estas geodésicas têm o mesmo comprimento. Assim, a condição de Klein é, na verdade, uma hipótese sobre a topologia de  $v^5$ , e diz que  $v^5$  é um produto direto de  $v^4$  (es-

paço-tempo) por um círculo. Quando  $z^5$  descreve o círculo, isto é, cresce de um período, retornamos ao ponto inicial. Pode-se fazer uma ilustração como na figura abaixo.



Podemos então escrever a integral de ação (2.6-20) sob a forma

$$S = \int d^4z \frac{(5)}{R} \sqrt{-g} + S_p \quad (2.6-21)$$

Denotando por  $G_{\Sigma\Omega}$  o tensor de Einstein em  $v^5$ ,

$$G_{\Sigma\Omega} = R_{\Sigma\Omega} - \frac{1}{2} \frac{(5)}{R} \gamma_{\Sigma\Omega}$$

as equações que se obtêm de (2.6-21) são

$$G_{\mu\nu}^{(5)} \equiv G_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{1}{2} (F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = -T_{\mu\nu} \quad (2.6-22)$$

e

$$G^{\mu}_s^{(5)} - \frac{1}{2} \frac{(4)}{v_\alpha} F^{\mu\alpha} = -\frac{1}{2} j^\mu \quad (2.6-23)$$

onde

$$T^{\mu\nu} = \frac{m}{\sqrt{-g}} \int \dot{z}^\mu z^\nu \delta^{(4)}(z-z(\tau)) d\tau, \quad (2.6-24)$$

$$j^\mu = \frac{e}{\sqrt{-g}} \int \dot{z}^\mu \delta^{(4)}(z-z(\tau)) d\tau. \quad (2.6-25)$$

Relembremos os pontos fundamentais da discussão que fizemos. A hipótese fundamental de Kaluza é que o universo tem cinco dimensões, uma tipo tempo e quatro espaciais. Destas, uma é curvada formando um círculo de raio muito pequeno, não observável. Com esta hipótese uma relatividade geral em cinco dimensões contém a teoria de Einstein, e uma simetria de gauge local  $U(1)$  que se origina da isometria da quinta dimensão. As componentes extras do tensor métrico constituem os campos de gauge desta simetria, e podem ser identificadas com o vetor potencial eletromagnético. A teoria de Kaluza-Klein resulta portanto numa unificação do eletromagnetismo com a gravitação.

As trajetórias de partículas de teste são geodésicas da variedade de Kaluza-Klein. Destas equações, uma resulta ser a lei de conservação do momento canonicamente conjugado com a quinta coordenada (que é uma integral primeira das equações das geodésicas). Esta lei de conservação é identificada com a conservação da carga da partícula de teste. Com esta identificação as outras componentes das equações das geodésicas se reduzem às equações de movimento para uma partícula com carga  $e$  e massa  $m$  em interação com campos eletromagnéticos e gravitacionais.

## 2.7 O movimento de strings na variedade de Kaluza-Klein

Denotemos por  $Z^\Omega(\tau, \sigma) = (y^\mu(\tau, \sigma), \zeta(\tau, \sigma))$  as coordenadas dos pontos da superfície de evolução cujas equações paramétricas são  $Z^\Omega = Z^\Omega(\xi)$ , com  $\xi = (\xi^i) = (\tau, \sigma)$ ,  $i = 1, 2$ . Como vimos na seção 2.3 a integral de ação do string se escreve

$$S = -N \int d^2\xi \sqrt{-\det(\gamma_{ij})} =$$

$$= -N \int d^2\xi \left[ (\gamma_{\Omega\Sigma} \dot{Z}^\Omega \dot{Z}^\Sigma) - (\gamma_{\Omega\Sigma} \dot{Z}^\Omega \dot{Z}^\Sigma) (\gamma_{\Delta\Gamma} Z'^\Delta Z'^\Gamma) \right]^{1/2}. \quad (2.7-1)$$

Nesta expressão  $(\gamma_{ij})$  é a métrica induzida sobre a superfície de evolução, e o ponto e a linha indicam derivação com relação a  $\tau$  e  $\sigma$ , respectivamente.

Um cálculo direto usando (2.5-49) com

$$\gamma_{ij} = \gamma_{\Omega\Sigma} \frac{\partial Z^\Omega}{\partial \xi^i} \frac{\partial Z^\Sigma}{\partial \xi^j}$$

conduz a

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= g_{\mu\nu} \dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu - (\dot{\zeta} - A_\alpha \dot{Y}^\alpha)^2, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} &= g_{\mu\nu} \dot{Y}^\mu Y'^\nu - (\dot{\zeta} - A_\alpha \dot{Y}^\alpha) (\zeta' - A_\alpha Y'^\alpha), \\ \gamma_{22} &= g_{\mu\nu} Y'^\mu Y'^\nu - (\zeta' - A_\alpha Y'^\alpha)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.7-2)$$

Os momentos  $\mathcal{P}_\Omega$  e as quantidades  $\pi_\Omega$  são definidas da maneira usual

$$\mathcal{P}_\Omega = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{Z}^\Omega} \quad , \quad \pi_\Omega = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial Z'^\Omega} \quad . \quad (2.7-3)$$

As equações de vínculo para o sistema se escrevem

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \gamma^{\Omega\Sigma} \mathcal{P}_\Omega \mathcal{P}_\Sigma + N^2 \gamma_{\Delta\Gamma} Z'^\Delta Z'^\Gamma = \mathcal{P}^2 + N^2 Z'^2 \approx 0, \\ \phi_2 &= \mathcal{P}_\Sigma Z'^\Sigma = \mathcal{P} \cdot Z' \approx 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.7-4)$$

$\phi_1$  e  $\phi_2$  são de primeira classe e sua álgebra é a mesma que (1.8-12).

Por simplicidade, vamos impor as condições do gauge ortonormal

$$\begin{aligned} \dot{Z} \cdot Z' &\approx 0 \quad , \\ \dot{Z}^2 + Z'^2 &\approx 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.7-5)$$

Segue de (2.7-3) que

$$\mathcal{P}_5 = -N(\dot{\zeta} - A_\alpha \dot{y}^\alpha) \quad , \quad (2.7-6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu &= N \left[ g_{\mu\alpha} \dot{y}^\alpha + (\dot{\zeta} - A_\alpha \dot{y}^\alpha) A_\mu \right] = \\ &= N g_{\mu\alpha} \dot{y}^\alpha - \mathcal{P}_5 A_\mu \quad , \end{aligned} \quad (2.7-7)$$

e

$$\pi_5 = N(\zeta' - A_\alpha y'^\alpha) \quad , \quad (2.7-8)$$

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= -N \left[ g_{\mu\alpha} y'^\alpha + (\zeta' - A_\alpha y'^\alpha) A_\mu \right] = \\ &= -N g_{\mu\alpha} y'^\alpha - \pi_5 A_\mu \quad . \end{aligned} \quad (2.7-9)$$

De acordo com o que vimos na seção 2.3 as equações de movimento no gauge ortonormal são

$$\ddot{z}^{\Omega} - z''^{\Omega} = -\Gamma_{\Sigma\Delta}^{\Omega} (\dot{z}^{\Sigma}\dot{z}^{\Delta} - z'^{\Sigma}z'^{\Delta}) \quad , \quad (2.7-10)$$

com as condições de bordo

$$\pi_{\Gamma} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad . \quad (2.7-11)$$

Separando estas equações para  $\Omega = 5$  e  $\Omega = \mu$ , e usando os símbolos de Christoffel calculados na seção 2.5, obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{z}^5 - z''^5 = \nabla_{\mu} A_{\nu} (\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} - y'^{\mu}y'^{\nu}) - \\ - A^{\alpha} F_{\alpha\nu} \left[ (\dot{z}^5 - A_{\beta}\dot{y}^{\beta})\dot{y}^{\nu} - (z'^5 - A_{\beta}y'^{\beta})y'^{\nu} \right] \quad , \quad (2.7-12a) \\ z'^5 - A_{\beta}y'^{\beta} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad , \quad (2.7-12b) \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}^{\mu} - y''^{\mu} = -\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \alpha\beta \end{array} \right\} (\dot{y}^{\alpha}\dot{y}^{\beta} - y'^{\alpha}y'^{\beta}) - \\ - F^{\mu}_{\nu} \left[ (\dot{z}^5 - A_{\alpha}\dot{y}^{\alpha})\dot{y}^{\nu} - (z'^5 - A_{\alpha}y'^{\alpha})y'^{\nu} \right] \quad , \quad (2.7-13a) \\ g_{\mu\alpha}y'^{\alpha} + (z'^5 - A_{\beta}y'^{\beta}) = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad . \quad (2.7-13b) \end{array} \right.$$

Das equações (2.7-12b) e (2.7-13b) acima vê-se que as condições de bordo podem ser expressas como

$$g_{\alpha\mu} \dot{Y}'^{\mu} = 0 \quad \text{e} \quad \zeta' - A_{\beta} \dot{Y}'^{\beta} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi$$

Em analogia com o caso da partícula esperamos obter da equação de movimento para a quinta coordenada, equação (2.7-12a), uma lei de conservação para uma corrente associada com o string. Para isto é necessário converter (2.7-12a) numa equação de primeira ordem em  $\tau$  e  $\sigma$ . Este procedimento, no entanto, é muito trabalhoso, sendo mais conveniente usar a forma (2.3-2) das equações de movimento. De fato, como a lagrangiana não depende de  $\zeta$ , segue de (2.3-2) que

$$\frac{\partial \mathcal{P}_5}{\partial \tau} + \frac{\partial \pi_5}{\partial \sigma} = 0 \quad , \quad (2.7-14)$$

ou, usando (2.7-6) e (2.7-7),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\dot{\zeta} - A_{\alpha} \dot{Y}'^{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\zeta' - A_{\alpha} \dot{Y}'^{\alpha}) = 0 \quad . \quad (2.7-15)$$

Esta equação nos sugere interpretar as quantidades

$$Q = \dot{\zeta} - A_{\alpha} \dot{Y}'^{\alpha} \quad , \quad (2.7-16)$$

$$J = \zeta' - A_{\alpha} \dot{Y}'^{\alpha} \quad , \quad (2.7-17)$$

como a carga e a corrente sobre o string. Denotando  $J = (J^i) = (Q, J)$  a equação (2.7-14) toma a forma de uma lei de conservação da corrente

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} J^i = 0 \quad . \quad (2.7-18)$$

Usando (2.7-16,17) a equação (2.7-13a) assume a forma de uma equação de Lorentz generalizada,

$$\ddot{y}^\mu - y''^\mu = -\{_{\alpha\beta}^\mu\} (\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta - y'^\alpha y'^\beta) - (Q\dot{y}^\nu - Jy'^\nu) F^\mu{}_\nu \quad (2.7-19)$$

A corrente associada com o string no espaço-tempo fica dada por

$$\begin{aligned} j^\mu(y) &\equiv \frac{\delta S}{\delta A_\mu(y)} = \\ &= N \int d\tau d\sigma \left[ (\zeta' - A_\alpha \dot{y}^\alpha) \dot{y}^\mu - (\zeta' - A_\beta y'^\beta) y'^\mu \right] \delta^{(4)}(y - y(\tau, \sigma)) = \\ &= N \int d\tau d\sigma \left[ Q\dot{y}^\mu - Jy'^\mu \right] \delta^{(4)}(y - y(\tau, \sigma)) \quad , \quad (2.7-20) \end{aligned}$$

e é conservada a menos de termos de superfície em  $\tau_i$  e  $\tau_f$ . A expressão acima pode ser reescrita sob a forma

$$\begin{aligned} j^\mu(y) &= N \int d\tau d\sigma (J^1 \partial_1 y^\mu) \delta^{(4)}(y - y(\tau, \sigma)) = \\ &= N \int d\tau d\sigma \partial_1 (J^1 y^\mu) \delta^{(4)}(y - y(\tau, \sigma)) \quad , \quad (2.7-21) \end{aligned}$$

onde se observa a analogia formal com expressão (2.1-21a) da corrente definida por Nambu.

Uma observação sobre a corrente  $J = \zeta' - A_\alpha y'^\alpha$  é que sua forma é idêntica à da corrente de Landau-Ginzburg para supercondutores. O termo  $\zeta'$  corresponde ao gradiente da fase do parâmetro de ordem, e o termo  $A_\alpha y'^\alpha$  - projeção do campo A sobre o string - corresponde ao termo de Landau. É de se

esperar que a matéria de strings partilhe de muitas das propriedades dos supercondutores. Este é um ponto que certamente merece elaboração.

Vimos então que a análise do movimento do string na variedade de Kaluza-Klein conduz de maneira natural um modelo de strings dotados de uma distribuição de cargas. Uma das equações de movimento é a lei de conservação da carga do string, enquanto que as outras são generalizações das equações de Lorentz. As condições de bordo expressam a ausência de corrente nos pontos  $\sigma = 0, \pi$ .

## 2.8 A Variedade de Kaluza-Klein generalizada

"Nature is not worth studying if She does not in fact use the Kaluza mechanism at some level"  
G. Marx

Na Seção 2.5 construímos a variedade de Kaluza-Klein  $v^5$  ( $\equiv v^{4+1}$ ), na qual o campo eletromagnético é uma parte integrante da geometria. A construção foi feita de tal modo que o espaço-tempo  $v^5$  se separa em duas partes complementares: uma quadri-dimensional,  $v^4$ , que foi identificada com o espaço-tempo físico, e uma uni-dimensional constituída pelas curvas cujos vetores tangentes são vetores de Killing de  $v^5$ . Nos sistemas de coordenadas adaptados, estas curvas são as linhas coordenadas de  $Z^5$ . Foi imposta a condição destas curvas serem geodésicas de  $v^5$ , o que nos possibilitou escrever os vetores de Killing sob a forma  $\vec{\xi} = \{\xi_\mu, \xi_5\} \equiv \{A_\mu, -1\}$ , onde  $A_\mu$  é o potencial vetor eletromagnético. As transforma-

ções de coordenadas admissíveis sobre  $v^5$ , equações (2.5.35), são tais que conduzem diretamente à lei de transformações do potencial vetor  $A_\mu$  por transformações simultâneas de coordenadas (de  $v^4$ ) e de gauge. As transformações de gauge puras com função de gauge  $\Delta(Z^\alpha)$  são casos particulares de (2.5.35) onde só a quinta coordenada se transforma,  $Z^{15} = Z^5 + \Delta(Z^\alpha)$ . A hipótese das geodésicas- $\xi$  serem curvas fechadas conduz a que todas elas têm o mesmo comprimento, resultando que a topologia de  $v^5$  é um produto direto de  $v^4$  por um círculo.

A imagem geométrica que esta construção nos fornece é de um espaço-tempo no qual em cada ponto tem-se associado um "espaço interno" com uma estrutura de grupo, no caso o grupo abeliano  $U(1)$ . O nosso objetivo agora é generalizar esta construção para o caso em que o grupo em questão é um grupo não-abeliano  $G$ . A variedade resultante é denominada de variedade de Kaluza-Klein generalizada  $v^{4+n}$ . Seguindo basicamente os mesmos passos que no caso de  $v^5$  a teoria que se obtém é a de um campo de gauge acoplado com um campo gravitacional.

É importante observar que o aspecto matemático do problema fica substancialmente mais complexo com a introdução do grupo de gauge não-abeliano. Um procedimento rigoroso para a construção da variedade  $v^{4+n}$  requer uso da teoria dos espaços fibrados, o que vamos evitar. Optamos por um procedimento mais simples, sem rigor matemático, porém mais intuitivo. Essencialmente, faremos uma generalização direta do caso anterior. Ao leitor interessado recomendamos a vasta e excelente bibliografia sobre o assunto.

## 2.8.1 Campos de Yang-Mills: notação e convenções

Denotaremos por  $G$  um grupo de Lie  $n$ -paramétrico, com parâmetros  $\omega^a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , que suporemos semi-simples e compacto. Seja  $\mathcal{G}$  a álgebra de Lie associada com  $G$  e

$$\{T_a\}, \quad T_a \in \mathcal{G}$$

$$(a=1, \dots, n)$$

uma base em  $\mathcal{G}$ , com lei de composição

$$[T_a, T_b] = i C_{ab}^c T_c \quad (2.8-1)$$

$C_{ab}^c$  são as constantes de estrutura de  $\mathcal{G}$ ,  $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$ . Os elementos  $T_a$  da base em  $\mathcal{G}$  satisfazem à identidade de Jacobi

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0 \quad (2.8-2)$$

que conduz à seguinte identidade para as constantes de estrutura:

$$C_{ab}^e C_{ec}^d + C_{bc}^e C_{ea}^d + C_{ca}^e C_{eb}^d = 0 \quad (2.8-3)$$

Os "vetores"  $T_a$  podem ser representados por matrizes hermitianas, e os elementos de  $G$  por matrizes unitárias finitas. Assim, qualquer  $U \in G$  pode ser escrito sob a forma

$$U = e^{-i\omega^a T_a} \quad (2.8-4)$$

$\{T_a\}$  é o conjunto de geradores da representação que suporemos ser a representação fundamental de G.

Na representação adjunta de G os geradores são definidos por

$$(T_a)_b^c = -iC_{ab}^c \quad . \quad (2.8-5)$$

Tem-se que

$$[T_a, T_b]_c^d = C_{ab}^e (T_e)_c^d \quad . \quad (2.8-6)$$

A dimensionalidade desta representação é n.

A álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  pode ser tratada como um espaço métrico, definindo-se a métrica  $g_{ab}$  pelo produto escalar

$$g_{ab} \equiv \text{Tr}(T_a T_b)_{\text{Ad}} = -C_{an}^m C_{bm}^n \quad . \quad (2.8-7)$$

Como  $T_a$  é hermitiana a sua norma é positiva definida,  $g_{aa} \geq 0$ . Além disto, como G é semi-simples,  $\det(g_{ab}) \neq 0$ . O teorema de Cartan diz que G é semi-simples e compacto se e somente se  $\det(g_{ab}) \neq 0$ . Se G é um grupo simples,  $g_{ab}$  pode ser diagonalizada e todos os seus autovalores podem ser feitos iguais +1 ou -1. Se, além de simples, g for compacto os autovalores podem ser feitos iguais a +1,

$$g_{ab} = \delta_{ab} \quad . \quad (2.8-8)$$

(Observe que para um grupo simples a expressão (2.8-8) acima pode ser generalizada para  $\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab}$  onde  $\lambda$  depende apenas da representação).

Definindo

$$C_{abc} = g_{ec} C^e_{ab} \quad (2.8_9)$$

tem-se que  $C_{abc}$  é totalmente anti-simétrica. Com  $g_{ab}$  dada por (2.8\_8) segue que  $C^e_{bc}$  também é totalmente anti-simétrica, e numericamente igual a  $C_{abc}$ . (A anti-simetria das constantes de estrutura é verdade para qualquer grupo de Lie semi-simples compacto).

Mencionemos, finalmente, que ao invés das matrizes hermitianas  $T_a$ , pode-se usar matrizes reais anti-simétricas  $L_a$  definidas por

$$L_a \equiv i T_a \quad (2.8_{10})$$

Neste caso,

$$[L_a, L_b] = -C^c_{ab} L_c \quad (2.8_{11})$$

e os geradores da representação adjunta são

$$(L_a)_b^c = -C^c_{ab} \quad (2.8_{12})$$

Os elementos de  $G$  são representados por

$$U = e^{\omega^a} L_a \quad (2.8_{13})$$

Consideremos agora um campo  $\psi \equiv \{\psi^A(x)\}$  que se transforma sob  $G$  de acordo com

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathbb{U}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.8-14)$$

Introduzindo os campos de Yang-Mills

$$\vec{A}_\mu = A_\mu^a T_a \quad (2.8-15)$$

com a lei de transformação

$$\vec{A}_\mu \rightarrow \vec{A}'_\mu = \mathbb{U}\vec{A}_\mu\mathbb{U}^{-1} - \frac{i}{g}\mathbb{U}\partial_\mu\mathbb{U}^{-1} \quad , \quad (2.8-16)$$

tem-se que as quantidades

$$D_\mu\psi \equiv (\partial_\mu + ig\vec{A}_\mu)\psi \quad (2.8-17)$$

se transformam da mesma maneira que os campos  $\psi$  .

O operador  $D_\mu$  definido acima é denominado de "derivada covariante de gauge", e satisfaz à relação

$$[D_\mu, D_\nu] = \frac{i}{g}\vec{F}_{\mu\nu} \quad , \quad (2.8-18)$$

onde

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu\vec{A}_\mu - \partial_\mu\vec{A}_\nu + ig[\vec{A}_\mu, \vec{A}_\nu] \equiv F_{\mu\nu}^a T_a \quad (2.8-19)$$

é o tensor intensidade de campo. Explicitando a expressão acima,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gC_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad . \quad (2.8-20)$$

A lei de transformação de  $\vec{F}_{\mu\nu}$  pelo grupo  $G$  é

$$\vec{F}_{\mu\nu} \rightarrow \vec{F}'_{\mu\nu} = \mathbb{U} \vec{F}_{\mu\nu} \mathbb{U}^{-1} \quad (2.8-21)$$

Portanto,  $\vec{F}_{\mu\nu}$  se transforma segundo a representação adjunta de G.

A forma infinitesimal das transformações de  $\psi$ ,  $\vec{A}_\mu$  e  $\vec{F}_{\mu\nu}$  se escrevem

$$\psi' = (1 + i\omega^a T_a) \psi = (1 + i\vec{\omega}) \psi, \quad (2.8-22)$$

$$\vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\omega} - i[\vec{\omega}, \vec{A}_\mu] \quad (2.8-23)$$

$$\vec{F}'_{\mu\nu} = \vec{F}_{\mu\nu} - i[\vec{\omega}, \vec{F}_{\mu\nu}] \quad (2.8-24)$$

Passemos à dinâmica dos campos de gauge. A densidade de lagrangiana invariante de gauge para o sistema de campos  $(\psi(x), A_\mu^a(x))$  se escreve

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\psi, D\psi) - \frac{1}{4} \text{Tr}(\vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu}) \quad (2.8-25)$$

Desta lagrangiana resultam as seguintes equações de movimento para os campos de Yang-Mills:

$$D_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = \vec{j}_\nu \quad (2.8-26)$$

ou

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu} - g C_{ab}^c A_\mu^b F_c^{\mu\nu} = j_a^\nu, \quad (2.8-27)$$

onde  $j_a^\nu$  é a corrente associada com os campos de matéria  $\psi(x)$ . Esta corrente, de modo geral, é covariante de gauge mas não é conservada. Por outro lado,

-373-

$$J_a{}^\nu = j_a{}^\nu + g C_{ab}{}^{cA}{}^b{}_\mu F_c{}^{\mu\nu} \quad (2.8-28)$$

é conservada mas não é covariante de gauge.

O dual do tensor intensidade de campo é definido da maneira usual,

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \overset{*}{F}{}_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.8-29)$$

e satisfaz às identidades de Bianchi

$$D_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_\mu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} + ig [\overset{*}{A}{}^\mu, \overset{*}{F}{}_\mu{}^\nu] = 0 \quad (2.8-30)$$

Finalmente mencionemos que o tensor momento energia associado com os campos de Yang-Mills, calculado usando-se a expressão (0.6-23), resulta ser

$$T^{\mu\nu} = + \text{Tr} [\overset{*}{F}{}^\mu{}_\alpha \overset{*}{F}{}^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} \overset{*}{F}{}_{\alpha\beta}] \quad . \quad (2.8-31)$$

Usando as equações de movimento (2.8-26) pode-se demonstrar que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F_a{}^{\alpha\nu} j^a \quad . \quad (2.8-32)$$

O tensor momento-energia total é conservado:

$$\partial_\mu (T^{\mu\nu} [A] + T^{\mu\nu} [\psi]) = 0 \quad . \quad (2.8-33)$$

### 2.8.2 A geometria da variedade de Kaluza-Klein generalizada

As coordenadas dos pontos de  $v^{4+n}$  serão denotadas  $z^\Omega$ ,  $\Omega = 1, \dots, (4+n)$ , com a seguinte separação :

$$\{z^\Omega\} = \{z^\mu, \zeta^i\} \quad ,$$

$z^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, 4$ , são as coordenadas do "espaço-tempo"

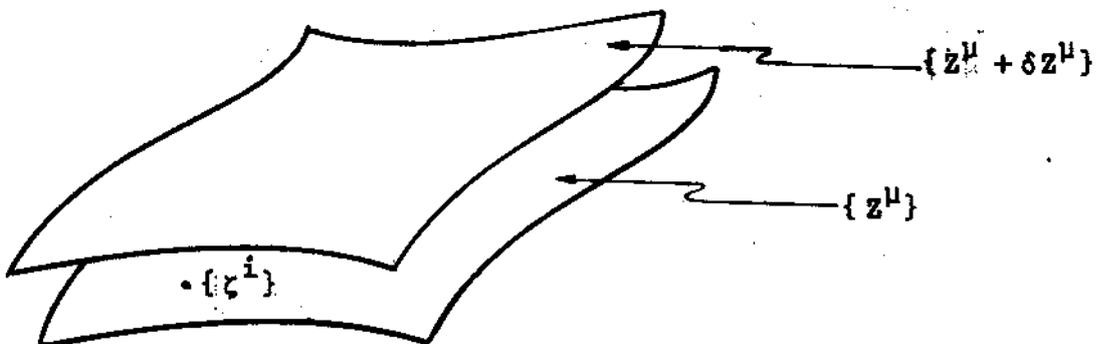
$\zeta^i$ ,  $i=5, \dots, (4+n)$ , são as coordenadas do "espaço-interno",

em analogia com a construção da variedade  $v^5$ .

Escreveremos o tensor métrico de  $v^{4+n}$  sob a forma

$$(g_{\Omega\Sigma}) = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu} & | & \gamma_{\mu j} \\ \hline \gamma_{i\nu} & | & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.8_{-}34)$$

Passemos à identificação dos diversos blocos da matriz acima. Para que o raciocínio intuitivo fique claro, vamos imaginar que  $v^{4+n}$  tem uma "estrutura de folheação", como na figura abaixo.



Nesta construção cada folha é rotulada por um conjunto  $\{z^\mu\}$ , e os pontos na folha são rotulados pelas coordenadas internas  $\{\zeta^i\}$ .

Consideremos dois pontos vizinhos em  $v^{4+n}$ , com as coordenadas  $z^\Omega$  e  $z^\Omega + dz^\Omega$ . O quadrado da distância entre estes pontos é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma_{\Omega\Sigma} dz^\Omega dz^\Sigma = \\ &= \gamma_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu + \gamma_{\mu j} dz^\mu d\zeta^j + \gamma_{i\nu} d\zeta^i dz^\nu + \gamma_{ij} d\zeta^i d\zeta^j. \end{aligned} \quad (2.8.35)$$

Para um deslocamento contido numa dada folha  $dz^\mu = 0$ , e

$$ds^2 = \gamma_{ij} d\zeta^i d\zeta^j.$$

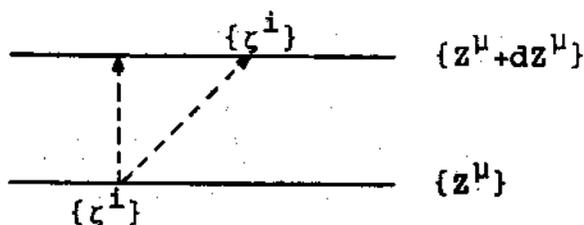
Deste modo, somos levados a identificar  $\gamma_{ij}$  como a métrica no "espaço interno"; denotaremos

$$\gamma_{ij} \equiv g_{ij}.$$

A inversa de  $g_{ij}$  será denotada  $g^{ij}$ . Deslocamentos em  $v^{4+n}$  com  $dz = 0$  serão denominados de "paralelos à folha".

Um deslocamento "perpendicular à uma folha" será identificado como um deslocamento no espaço-tempo. Aqui é preciso ter um pouco de cuidado com a noção de "deslocamento perpendicular à uma folha". Ocorre que um ponto da folha  $\{z^\mu\}$ , com coordenadas  $\{\zeta^i\}$ , de modo geral não está "alinhado" com o seu correspondente na folha  $\{z^\mu + dz^\mu\}$ . Com isto queremos di-

zer que um deslocamento no espaço-tempo, no sentido dado acima, de modo geral implica numa variação nas coordenadas  $\zeta^i$ , como na figura abaixo.



Uma definição mais precisa de um deslocamento  $(\delta Z^\mu, \delta \zeta^i)$  perpendicular à folha é a seguinte:  $(\delta Z^\mu, \delta \zeta^i)$  deve ser perpendicular a qualquer deslocamento  $(0, \bar{\delta} \zeta^i)$  paralelo à folha. Deve-se ter então

$$(\delta Z^\mu, \delta \zeta^i) (\gamma_{\Omega\Sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\delta} \zeta^i \end{pmatrix} = 0$$

donde resulta que

$$\delta \zeta^i = -g^{ij} \gamma_{\mu j} \delta Z^\mu \quad . \quad (2.8_{-36})$$

Esta é a condição que  $\delta \zeta^i$  deve satisfazer para que  $\delta Z^\Omega = (\delta Z^\mu, \delta \zeta^i)$  seja perpendicular à folha no sentido dado acima.

Com esta condição, o deslocamento  $(\delta Z^\mu, -g^{ij} \gamma_{\nu j} \delta Z^\nu)$  não está contido na folha, e é definido como contido no espaço-tempo. Em outras palavras, este deslocamento está contido no espaço complementar a uma folha. O quadrado do seu comprimento fica dado por

$$\begin{aligned} & (\delta Z^\mu - g^{ij} \gamma_{j\nu} \delta Z^\nu) (\gamma_{\Omega\Sigma}) \begin{pmatrix} \delta Z^\mu \\ -g^{ik} \gamma_{k\nu} \delta Z^\nu \end{pmatrix} = \\ & = (\gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu j} g^{ij}) \delta Z^\mu \delta Z^\nu \equiv g_{\mu\nu} \delta Z^\mu \delta Z^\nu \quad , \quad (2.8_{-37}) \end{aligned}$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu j} g^{ij} \quad (2.8-38)$$

é identificada como a métrica do espaço-tempo  $v^4$ .

Obtivemos assim a seguinte forma geral para o tensor métrico da variedade de Kaluza-Klein generalizada:

$$(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu j} g^{ij} & \gamma_{\mu i} \\ \hline \gamma_{\nu j} & g_{ij} \end{array} \right) \quad (2.8-39)$$

A expressão acima nos mostra que as geometrias do espaço interno e do espaço-tempo são acopladas. A pergunta que se pode por neste ponto, é se existe algum sistema de coordenadas no qual as duas geometrias sejam desacopladas. Em tal sistema de coordenadas a forma de  $(\gamma_{\Omega\Sigma})$  seria

$$(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{g}_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & g_{ij} \end{array} \right) .$$

Se lembrarmos da forma final da métrica da variedade de Kaluza-Klein  $v^5$ , equação (2.5-49), podemos concluir que tal desacoplamento, naquele caso, só seria possível se  $A_\mu = 0$ . No nosso caso, se isto for possível, não poderemos introduzir uma estrutura de campos de gauge na geometria. A condição para que as duas geometrias se desacoplem será obtida mais adiante.

Vamos introduzir uma base local ("vielbein")  $\{e_{\Omega}^{(A)}\}$ ,  $A, B$ , são índices do espaço tangente, definida por

$$\gamma_{\Omega\Sigma} e^{(A)}_{\Sigma} e^{(B)}_{\Omega} = \eta_{AB} = \text{diag}(+1-1\dots) \quad , \quad (2.8-40)$$

$$\eta_{AB} e^{(A)}_{\Sigma} e^{(B)}_{\Omega} = \gamma_{\Omega\Sigma} \quad . \quad (2.8-41)$$

Os índices de "vielbein" serão separados de acordo com a correspondência

$$\begin{array}{ccc} \Omega & = & (\mu, i) \\ & & \downarrow \downarrow \\ A & = & (m, a) \quad . \end{array}$$

O nosso objetivo agora é reexpressar as conclusões a que chegamos no início desta seção em termos da base  $\{e^{(A)}_{\Omega}\}$ . Isto é, queremos expressar em termos desta base as condições de deslocamento paralelo e ortogonal a uma folha, e, finalmente, a métrica.

Consideremos então um deslocamento na direção  $A$ , parametrizado por  $\delta\varepsilon_{(A)}$ . A variação correspondente nas coordenadas se expressa por

$$\begin{aligned} \delta Z^{\Omega} &= e^{\Omega}_{(A)} \delta\varepsilon^{(A)} = \\ &= e^{\Omega}_{(m)} \delta\varepsilon^{(m)} + e^{\Omega}_{(a)} \delta\varepsilon^{(a)} \quad . \end{aligned}$$

Esta última expressão se separa em

$$\delta Z^{\mu} = e^{\mu}_{(m)} \delta\varepsilon^{(m)} + e^{\mu}_{(a)} \delta\varepsilon^{(a)} \quad , \quad (2.8-42)$$

$$\delta z^i = e^i_{(m)} \delta\varepsilon^{(m)} + e^i_{(a)} \delta\varepsilon^{(a)} \quad . \quad (2.8-43)$$

De acordo com os argumentos que usamos anteriormente,  $z^\mu$  não deve se alterar se o deslocamento for na direção (a). Neste caso,

$$\delta z^\mu = 0 = e^\mu_{(a)} \delta \varepsilon^{(a)} ,$$

donde resulta

$$e^\mu_{(a)} = 0 . \quad (2.8_{-}44)$$

Usando a definição (2.8\_7) e a condição acima tem -  
-se que

$$e^{(m)}_{\Omega} e^{(a)\Omega} = 0 = e^{(m)}_{\mu} e^{(a)\mu} + e^{(m)}_i e^{(a)i} = e^{(m)}_i e^{(a)i} ,$$

donde se obtém

$$e^{(m)}_i = 0 . \quad (2.8_{-}45)$$

Note que  $e^{(a)}_i$  relaciona índices correspondentes e, evidentemente, não podem ser todos iguais a zero, donde se conclui que (2.8\_45) é válida.

Obtivemos assim o seguinte conjunto de condições sobre os "vielbein":

$$e^\mu_{(a)} = 0 = e^\mu^{(a)} , \quad (2.8_{-}46)$$

$$e^{(m)}_i = 0 = e_{(m)i} . \quad (2.8_{-}47)$$

Finalmente, vamos impor as condições análogas a (2.5\_60) e

(2.5\_61), isto é, vamos impor que  $e^i_{(a)}$  e  $e^\mu_{(m)}$  não dependam das coordenadas externas e internas, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial z^\mu} e^i_{(a)} = 0 \quad , \quad (2.8_48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^I} e^\mu_{(m)} = 0 \quad . \quad (2.8_49)$$

Usando as condições (2.8\_46,47) e (2.8\_48,49) e a definição (2.8.40), podemos escrever que

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \eta_{AB} e^{(A)}_{\mu} e^{(B)}_{\nu} = \eta_{mn} e^{(m)}_{\mu} e^{(n)}_{\nu} + \eta_{ab} e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} = \\ &= \eta_{mn} e^{(m)}_{\nu} e^{(n)}_{\mu} + (e_{(a)\mu} e^{(a)}_{(h)}) g^{hj} (e_{(b)\nu} e^{(b)}_{(j)}) \equiv \\ &= g_{\mu\nu} + B_{\mu k} g^{kj} B_{\nu j} \quad , \end{aligned} \quad (2.8_50)$$

$$\gamma_{\mu j} = \eta_{AB} e^{(A)}_{\mu} e^{(B)}_j = \eta_{ab} e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_j \equiv B_{\mu j} \quad , \quad (2.8_51)$$

$$\gamma_{ij} = \eta_{AB} e^{(A)}_i e^{(B)}_j = \eta_{ab} e^{(a)}_i e^{(b)}_j \equiv g_{ij} \quad . \quad (2.8_52)$$

Observe que, das equações (2.8\_48,49),  $e^i_{(a)} = e^i_{(a)}(\zeta^j)$  e  $e^\mu_{(m)} = e^\mu_{(m)}(z^\alpha)$  e portanto  $g_{ij} = g_{ij}(\zeta)$  e  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(z^\alpha)$ . Tem-se também que

$$B_{\mu j} \equiv \eta_{ab} e^{(a)}_{\mu}(z) e^{(b)}_j(\zeta) = B_{\mu j}(z, \zeta) \quad , \quad (2.8_53)$$

de modo que as dependências em  $z^\alpha$  e  $\zeta^i$  estão separadas. Isto é importante para que vamos fazer mais adiante.

Finalmente, podemos escrever a métrica de  $v^{4+n}$  em termos das quantidades definidas acima:

$$(\gamma_{\Sigma\Omega}) = \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + B_{\mu h} g^{hj} B_{\nu j} & B_{\mu j} \\ \hline B_{vh} & g_{jh} \end{array} \right) \quad (2.8.54)$$

Observemos que o procedimento que conduziu à expressão acima nos fornece, de maneira clara, muitas informações sobre as diversas quantidades envolvidas. Estas informações também estão contidas na expressão (2.8.39), embora não esteja tão claro.

Vamos agora procurar as condições tais que num dado sistema de coordenadas as geometrias do espaço-tempo e do espaço interno se desacoplem. Por covariância, se tais condições se verificarem num sistema de coordenadas, então elas se verificarão em todos os outros. Suporemos que todas as transformações são inversíveis.

Consideremos a lei de transformação dos "veilbein",

$$e_{\Omega}^{(A)} = \frac{\partial Z^{\Sigma}}{\partial z^{\Omega}} e_{\Sigma}^{(A)} .$$

Como as condições (2.8.54) devem ser preservadas, deve-se ter

$$0 = \bar{e}_{\bar{j}}^{(m)} = \frac{\partial Z^{\Sigma}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} e_{\Sigma}^{(m)} = \frac{\partial Z^{\mu}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} e_{\mu}^{(m)} + \frac{\partial \zeta^h}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} e_{\kappa}^{(m)} = \frac{\partial Z^{\mu}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} e_{\mu}^{(m)} .$$

Logo, as transformações de coordenadas devem ser tais que

$$\frac{\partial Z^{\mu}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} = 0 \quad \text{e, portanto, } Z^{\mu} \text{ não pode depender de } \bar{z}^{\bar{j}} .$$

O tensor métrico se transforma de acordo com

$$\bar{\gamma}_{\Omega\Sigma} = \frac{\partial Z^\Gamma}{\partial \bar{Z}^\Omega} \frac{\partial Z^\Delta}{\partial \bar{Z}^\Sigma} \gamma_{\Gamma\Delta}$$

A condição para que as geometrias se desacoplem nas novas coordenadas é que  $\bar{\gamma}_{\mu i} = 0$ . Usando a expressão acima esta condição conduz a

$$\frac{\partial Z^\Gamma}{\partial \bar{Z}^\mu} \frac{\partial \zeta^k}{\partial \bar{\zeta}^j} \gamma_{\Gamma k} = \frac{\partial \zeta^k}{\partial \bar{\zeta}^j} \left( \frac{\partial Z^\nu}{\partial \bar{Z}^\mu} \gamma_{\nu k} + \frac{\partial \zeta^i}{\partial \bar{Z}^\mu} \gamma_{ik} \right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial Z^\nu}{\partial \bar{Z}^\mu} \gamma_{\nu k} + \frac{\partial \zeta^i}{\partial \bar{Z}^\mu} \gamma_{ik} = 0 \quad (2.8-55)$$

Mas,

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial \bar{Z}^\mu} = \left( \frac{\partial \zeta^i}{\partial Z^\nu} \right)_{\bar{\zeta}} \frac{\partial Z^\nu}{\partial \bar{Z}^\mu}$$

onde  $\left( \frac{\partial \zeta^i}{\partial Z^\nu} \right)_{\bar{\zeta}}$  significa que a derivada é calculada com  $\bar{\zeta}$  mantido fixo. Segue de (2.8-55) que

$$-\left( \frac{\partial \zeta^i}{\partial Z^\nu} \right)_{\bar{\zeta}} = \gamma^{ik} B_{\nu k} = B_\nu^i \quad (2.8-56)$$

onde definimos  $B_\nu^i = \gamma^{ik} B_{\nu k}$ . Diferenciando a expressão acima,

$$-\left( \frac{\partial^2 \zeta^i}{\partial Z^\nu \partial Z^\mu} \right)_{\bar{\zeta}} = \left( \frac{\partial}{\partial Z^\mu} \right)_{\bar{\zeta}} B_\nu^i = \frac{\partial B_\nu^i}{\partial Z^\mu} + \left( \frac{\partial \zeta^k}{\partial Z^\mu} \right)_{\bar{\zeta}} \frac{\partial B_\nu^i}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial B_\nu^i}{\partial Z^\mu} - B_\mu^k \frac{\partial B_\nu^i}{\partial \zeta^k}$$

As condições de desacoplamento das geometrias podem ser expressas por

$$\left( \frac{\partial^2 \zeta^i}{\partial z^\nu \partial z^\mu} \right)_{\bar{z}} = \left( \frac{\partial^2 \zeta^i}{\partial z^\mu \partial z^\nu} \right)_{\bar{z}} . \quad (2.8.57)$$

Definindo as quantidades

$$f_{\mu\nu}^i = \frac{\partial B_\nu^i}{\partial z^\mu} - \frac{\partial B_\mu^i}{\partial z^\nu} - B_\mu^k \frac{\partial B_\nu^i}{\partial z^k} + B_\nu^k \frac{\partial B_\mu^i}{\partial z^k} , \quad (2.8.58)$$

a condição (2.8.58) se escreve

$$f_{\mu\nu}^i = 0 . \quad (2.8.59)$$

Encerramos neste ponto os desenvolvimentos sobre a geometria da variedade  $v^{4+n}$ .

### 2.8.3 Especificação do espaço interno

O espaço interno de  $v^{4+n}$  será considerado como a variedade  $\mu$  associada a um grupo de Lie  $G$  (semi-simples, compacto, não-abeliano); as coordenadas dos pontos em  $\mu$  são os  $\zeta^i$ , como na seção anterior. Como na seção 2.8,  $\{T_a\}$  é uma base em  $\mathcal{G}$  (álgebra de Lie associada com  $G$ ), cujos elementos satisfazem à equação de estrutura (2.8.11). (Observe a mudança de notação; os índices  $a, b, c, \dots$ , têm o mesmo significado que na seção 2.8-1, isto é, são índices de  $\mathcal{G}$ ).

Por uma transformação infinitesimal em  $G$ ,  $U = 1 + i\omega^a T_a$ ,

os pontos de  $\mu$  sofrem um deslocamento infinitesimal  $\zeta^i \rightarrow \bar{\zeta}^i = \zeta^i + \omega^a N_a^i$ , onde introduzimos o campo de vetores  $\vec{N}_i = \{N_a^i\}$ . Na variedade  $\mu$  o gerador  $iT_a$  é representado pelo operador diferencial  $N_a^i \frac{\partial}{\partial \zeta^i}$ ,

$$iT_a \equiv N_a^{-1 i} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \quad . \quad (2.8-60)$$

Note que  $\det(N_a^i) \neq 0$  porque os  $T_a$  são linearmente independentes. Das equações de estrutura (2.8-11) segue que

$$N_a^i \frac{\partial N_b^j}{\partial \zeta^i} - N_b^i \frac{\partial N_a^j}{\partial \zeta^i} = C^c_{ab} N_c^j \quad , \quad (2.8-61)$$

ou

$$\varepsilon_{\vec{N}_a} \vec{N}_b = [\vec{N}_a, \vec{N}_b] = C^c_{ab} \vec{N}_c \quad . \quad (2.8-62)$$

Estas equações são denominadas de equações de Lie. De (2.8-62) acima vê-se que estas equações têm uma interpretação geométrica clara, já que o lado direito representa uma rotação com relação ao índice  $b$ , que é um índice do grupo.

A métrica sobre o grupo será escolhida como a métrica de Cartan  $\delta_{ab}$ . A questão agora é escolher uma métrica em  $\mu$ . Na verdade, tem-se uma maneira "natural" de definir esta métrica como aquela induzida pela ação de  $G$ . É suficiente impor que as operações do grupo correspondam a isometrias de  $\mu$ , o que significa dizer que as distâncias entre pontos de  $\mu$  são preservadas pela ação de  $G$ . Assim, para cada gerador em  $\mathcal{G}$  tem-se um vetor de Killing associado, e estes são precisamente os vetores  $\vec{N}_a = \{N_a^i\}$ . Denotando por  $g_{ij}$  a métrica so -

bre  $\mu$ , devemos ter então

$$\varepsilon_{\vec{N}_a} g_{ij} = 0 \iff \nabla_j N_{ai} + \nabla_i N_{aj} = 0, \quad (2.8.63)$$

onde  $\nabla_i$  denota derivação covariante com relação à métrica  $g_{ij}$  (e coordenadas  $\zeta^i$ ). A solução mais simples que podemos escrever para esta equação é

$$g^{ij} = \delta_{ab} N_a^i N_b^j. \quad (2.8.64)$$

Da teoria das variedades de grupos sabe-se que os vetores de Killing são os "vielbein"  $e_{(a)}^j(\zeta)$ . Lembrando o que foi feito no caso da variedade de Kaluza-Klein, vamos introduzir os isovetores  $\vec{A}_\mu = \{A_\mu^a(Z^\alpha)\}$  pela relação

$$B_\mu^j(Z, \zeta) \equiv A_\mu^a(Z) N_a^j(\zeta). \quad (2.8.65)$$

Os vetores  $\vec{A}_\mu$  serão identificados com os potenciais de gauge. Observe que para isto é necessário ajustar as dimensões destas quantidades, o que será feito mais adiante introduzindo-se constantes com dimensões apropriadas.

O tensor intensidade de campo  $F_{\mu\nu}^a$  surge na teoria através da definição (2.8.57). De fato, usando (2.8.65) encontra-se que

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^i = F_{\mu\nu}^a N_a^i, \quad (2.8.66)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + iC_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.8.67)$$

Reescrevamos o tensor métrico de  $v^{4+n}$  usando (2.8-57):

$$(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + \delta_{ab} A_{\mu}^a A_{\nu}^b & A_{\mu}^a N_{ai} \\ \hline A_{\nu}^b N_{bj} & \delta_{ab} N_i^a N_j^b \end{array} \right) \quad (2.8-68a)$$

Usando (2.8-68) o quadrado do elemento de linha em  $v^{4+n}$  se escreve

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dz^{\mu} dz^{\nu} + \delta_{ab} (N_i^a d\zeta^i + A_{\alpha}^a dz^{\alpha}) (N_j^b d\zeta^j + A_{\beta}^b dz^{\beta}) = \\ &= \overset{(4)}{ds^2} + \overset{(\mu)}{ds^2} \quad . \quad (2.8-68b) \end{aligned}$$

A parte correspondente à variedade do grupo,  $\overset{(\mu)}{ds^2}$ , pode ser escrita sob outra forma que nos será mais útil. De fato,

$$\begin{aligned} \overset{(\mu)}{ds^2} &= -T_R (iN_i^a T_a d\zeta^i + iA_{\alpha}^a T_a dz^{\alpha}) (iN_j^b T_b d\zeta^j + iA_{\beta}^b T_b dz^{\beta}) = \\ &= -T_R (i\vec{N}_i d\zeta^i + i\vec{A}_{\alpha} dz^{\alpha}) (i\vec{N}_j d\zeta^j + i\vec{A}_{\beta} dz^{\beta}) \quad . \end{aligned}$$

As quantidades  $i\vec{N}_i d\zeta^i$  são as 1-forma diferenciais de Maurer-Cartan. Pode-se demonstrar que se  $g \in G$  é o elemento correspondente no grupo,

$$g^{-1} dg = iN_i^a T_a d\zeta^i \quad (2.8-69)$$

De fato, consideremos a ação de  $T = e^{i\omega^a T_a}$  sobre  $g(\lambda) \in G$  onde  $\lambda$  é um parâmetro:

-387-

$$Tg(\lambda) \equiv g[\zeta(\lambda, \omega)] = e^{i\omega^a T_a} g[\zeta(\lambda)] .$$

Diferenciando esta expressão com relação a  $\omega^a$  e calculando em  $\omega = 0$ , obtêm-se

$$\begin{aligned} iT_a g[\zeta(\lambda)] &= \left( \frac{\partial \zeta^i(\lambda, \omega)}{\partial \omega^a} \right)_{\omega=0} \frac{\partial g}{\partial \zeta^i} \\ &= N_a^{-1} i \frac{\partial}{\partial \zeta^i} g , \end{aligned}$$

o que está em acordo com (2.8-60). Podemos escrever que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^i} = i N_i^a T_a$$

e

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \zeta^i} d\zeta^i = i N_i^a d\zeta^i .$$

Desta última expressão obtêm-se (2.8-69).

Definamos as 1-forma diferenciais

$$A(Z) \equiv i \vec{A}_\beta dZ^\beta , \quad (2.8-70)$$

e as quantidades

$$\omega = g^{-1} dg + g^{-1} A(Z)g \equiv g^{-1} Dg . \quad (2.8-71)$$

Geometricamente  $\omega$  são as 1-forma de conexão no espaço cotan-gente, tomando valores em  $\mathcal{G}$ . Com estas definições, segue que

$$\begin{aligned} dS^{(\mu)} &= -T_R(\omega, \omega) = \\ &= -T_R(g^{-1} Dg, g^{-1} Dg) . \end{aligned} \quad (2.8-72)$$

Verifica-se sem dificuldades que pelas transformações

$$g \rightarrow \bar{g} = U g \quad , \quad (2.8.73)$$

$$A \rightarrow \bar{A} = U A U^{-1} + U dU^{-1} \quad ,$$

tem-se que  $\omega \rightarrow \bar{\omega} = \omega$ . Neste sentido, diz-se que  $\omega$  é invariante de gauge. Consequentemente,  $dS^{(\mu)}$  também é invariante de gauge (o que está de acordo com a hipótese que nos conduziu a (2.8.64) de que G é grupo de isometrias de  $\mu$  ).

Estes resultados nos permitem escrever o quadrado do elemento de linha em  $v^{4+n}$  sob a forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu - T_R (g^{-1} Dg g^{-1} Dg). \quad (2.8.74)$$

Na expressão (2.8.65) os campos  $\vec{A}_\mu(Z)$  foram identificados com os campos de gauge mas, naquelas expressões, estes objetos são adimensionais. Como se sabe, em unidades naturais, os campos de gauge num espaço-tempo D-dimensional tem dimensão de  $[M]^{D-1}$  onde [M] significa dimensão de massa. Assim, se faz necessário introduzir na teoria um parâmetro,  $\rho$ , com dimensão de massa. O procedimento é o seguinte. Tomemos as constantes de estrutura como números adimensionais; os geradores da álgebra de Lie tem dimensão de inverso de comprimento, isto é, de massa:  $[L]^{-1} = [M]$ . Para que as dimensões dos dois membros das equações de estrutura (2.8.1a) coincidam devemos escrever

$$[T_a, T_b] = i\rho C_{ab}^c T_c \quad .$$

Denotando por  $g$  a constante de acoplamento (como em (2.8.19), devemos introduzir na definição (2.8.65) o fator  $g\rho^{-1}$ , isto é, os campos de gauge devem ser definidos como

$$g\rho^{-1} A^a_{\mu}(z) .$$

Agora,  $[g] = [M]^{2 - \frac{D}{2}}$  de modo que

$$[g\rho^{-1}A] = [M]^{2 - \frac{D}{2}} [M]^{-1} [M]^{\frac{D}{2}-1} = [M]^0 .$$

O parâmetro  $\rho$  é fixado da seguinte maneira. Com o tensor intensidade de campo definido por (2.8.19), o escalar de curvatura em  $v^{4+n}$  se escreve

$$R^{(4+n)} = R^{(4)} + R_G^{(n)} - \frac{1}{4} g^2 \rho^{-2} T_R (\tilde{F}^{\mu\nu} \cdot \tilde{F}_{\mu\nu}) , \quad (2.8.75)$$

de modo que a integral de ação de Einstein fica sob a forma

$$S = \frac{1}{k^2 V_G} \int dV^{(4+n)} R^{(4+n)} = \frac{1}{k^2} \int d^4z (R^{(4)} + R_G^{(n)}) \sqrt{-g} + \left(\frac{g^2}{k^2 \rho^2}\right) \frac{1}{4} \int d^4z \sqrt{-g} T_R (\tilde{F}^{\mu\nu} \cdot \tilde{F}_{\mu\nu}) , \quad (2.8.76)$$

onde  $V_G = C \frac{te}{k^2}$  é o volume na variedade do grupo e  $k = 16\pi G_N$ , onde  $G_N$  é a constante gravitacional de Newton. Para que o último termo de (2.8.76) seja identificado com a integral de ação de Yang-Mills deve-se ter

$$\frac{g^2}{k^2 \rho^2} = 1 \implies \rho = \frac{|g|}{4\sqrt{\pi} N} G^{-1/2} = \frac{|g|}{4\sqrt{\pi}} m_P , \quad (2.8.77)$$

onde  $m_P = G_N^{-1/2}$  é a "massa de Planck". Com este esquema todas as constantes ficam ajustadas, e serão omitidas por simplicidade de notação.

## 2.9 O movimento geodésico na variedade de Kaluza-Klein generalizada

As equações da trajetória de uma partícula numa variedade riemanniana são as equações das geodésicas que, conforme vimos na seção 0, são as equações de Euler-Lagrange para a lagrangiana (0.3.4) ou (0.3.5). Uma análise detalhada destas equações na variedade  $v^{4+n}$  requer a separação das partes correspondentes ao espaço-tempo e ao espaço interno. A interpretação destas últimas é mais clara quando são escritas como equações diferenciais de primeira ordem já que, na verdade, elas expressam a lei de conservação da "carga de cor" associada com a partícula. Assim, vamos utilizar o formalismo hamiltoniano que nos conduzirá de maneira mais simples à forma desejada das equações de movimento.

Consideremos então a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \gamma_{\Omega\Sigma} \frac{dz^\Omega}{d\tau} \frac{dz^\Sigma}{d\tau} \quad , \quad (2.9.1)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio, (ver seção 2.6) e  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Usando (2.8.74)

$$L = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu - \frac{1}{2} T_R (g^{-1} \frac{Dg}{D\tau} g^{-1} \frac{Dg}{D\tau}) = \quad (2.9.2)$$

$$= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu + \frac{1}{2} T_R (\dot{I} \cdot \dot{I}) \quad , \quad (2.9.3)$$

onde definimos o isovetor

$$\dot{\mathbb{I}} = -ig^{-1} \frac{Dg}{Dt} \equiv I^a T_a = (N^a{}_i \dot{\zeta}^i + A^a{}_\alpha \dot{z}^\alpha) T_a \quad (2.9.4)$$

Denotando por  $p_\Omega = (p_\mu, \pi_i)$  os momentos canonicamente conjugados com as coordenadas  $Z^\Omega = (z^\mu, \zeta^i)$ , encontra-se que

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}^i} = N^a{}_i T_a \quad , \quad (2.9.5)$$

$$p_\mu = \dot{z}_\mu + I^a A_{a\mu} \quad . \quad (2.9.6)$$

A hamiltoniana canônica fica sob a forma

$$\begin{aligned} H_C &= p_a \dot{z}^a + \pi_i \dot{\zeta}^i - L = \\ &= \frac{1}{2} I_a I_a + \frac{1}{2} (p_\alpha - A^a{}_\alpha I_a) (p^\alpha - A^a{}_\alpha I_a) = \\ &= \frac{1}{2} T_R (\dot{\mathbb{I}} \cdot \dot{\mathbb{I}}) + \frac{1}{2} (p_\alpha - T_R (\dot{\mathbb{I}} \cdot \dot{A}_\alpha)) (p^\alpha - T_R (\dot{\mathbb{I}} \cdot \dot{A}^\alpha)) \quad . \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

Os colchetes de Poisson fundamentais são

$$\{z^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu{}_\nu \quad , \quad \{\zeta^i, \pi_j\} = \delta^i{}_j \quad . \quad (2.9.8)$$

Como a hamiltoniana está expressa em termos de  $I_a$  e não de  $\pi_j$ , precisamos dos colchetes de Poisson entre estas variáveis. Usando (2.8.60) podemos escrever

$$\{g(\zeta), \pi_j\} = \frac{\partial g}{\partial \zeta^j} = iN^a{}_j T_a g \quad ,$$

donde segue que

$$\{g(\zeta), I_b\} = iT_b g \quad . \quad (2.9_9)$$

Usando a identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} \{\{I_a, I_b\}, g\} &= \{\{I_b, g\}, I_a\} + \{\{g, I_a\}, I_b\} = \\ &= -i\{T_b g, I_a\} + i\{T_a g, I_b\} = \\ &= -[T_a, T_b]g = -i C^c_{ab} T_c g \quad . \end{aligned}$$

Comparando este resultado com (2.9\_9), obtem-se

$$\{I_a, I_b\} = C^c_{ab} I_c \quad . \quad (2.9_{10})$$

As equações de movimento para a partícula podem agora ser obtidas sem dificuldades. Consideremos primeiramente as equações para o vetor  $\vec{I}$ :

$$\dot{I}_b = \{\vec{I}_b, H_c\} = -C^a_{bc} I_a A_\alpha^c \dot{Z}^\alpha \quad ,$$

ou

$$\frac{d\vec{I}}{d\tau} = [\vec{I}, \vec{A}_\alpha] \dot{Z}^\alpha \quad . \quad (2.9_{11})$$

Tem-se também que

$$\frac{d}{d\tau} T_R(\vec{I}, \vec{I}) = \frac{d}{d\tau} (I_a, I_a) = 0 \quad , \quad (2.9_{12})$$

de modo que o vetor  $\vec{I}$  executa um movimento de precessão no es

paço interno. As componentes deste vetor são identificadas com a carga isotópica da partícula. A corrente associada com a partícula fica dada por

$$j_a^\mu = \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} = \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \int -T_R (g^{-1} \frac{Dg}{D\tau} g^{-1} \frac{Dg}{D\tau}) d\tau =$$

$$= \int d\tau I_a(\tau) \dot{Z}^\mu(\tau) \delta^{(4)}(Z-Z(\tau)) \quad (2.9_{-13})$$

Das equações da trajetória são obtidas a partir de (2.9\_6) e

$$\dot{p}_\nu = \{p_\nu, H_C\} = (p_\alpha - A_\alpha^a I_a) I_b \partial_\nu A^{ba}.$$

Destas equações obtém-se

$$\ddot{Z}^\mu = T_R (\vec{F}^\mu_\alpha \cdot \vec{I}) \dot{Z}^\alpha \quad (2.9_{-14})$$

As equações (2.9\_11) e (2.9\_14) são as equações de Wong, obtidas na seção 0.5.

## 2.10 Strings com Carga Não-Abeliana

Com os resultados das seções anteriores, a obtenção das equações de movimento para o string na variedade de Kaluza-Klein generalizada não apresenta dificuldades. A métrica induzida sobre a superfície de evolução  $\Sigma$  fica dada por:

$$\gamma_{mn} = \gamma_{\Omega\Sigma} \frac{\partial z^\Omega}{\partial \xi^m} \frac{\partial z^\Sigma}{\partial \xi^n} \quad , \quad (m, n = 1, 2) \quad , \quad (2.10-1)$$

onde  $\{\xi^i\} = \{\tau, \sigma\}$ , e  $z^\Omega(\tau, \sigma) = (y^\mu(\tau, \sigma), \zeta^i(\tau, \sigma))$  são as coordenadas dos pontos de  $\Sigma$ . Usando (2.8-68a) obtém-se

$$(\gamma_{mn}) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu - T_R (g^{-1} \frac{Dg}{D\tau} g^{-1} \frac{Dg}{D\tau}) & g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu z'^\nu - T_R (g^{-1} \frac{Dg}{D\tau} g^{-1} \frac{Dg}{D\sigma}) \\ g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu z'^\nu - T_R (g^{-1} \frac{Dg}{D\tau} g^{-1} \frac{Dg}{D\sigma}) & g_{\mu\nu} z'^\mu z'^\nu - T_R (g^{-1} \frac{Dg}{D\sigma} g^{-1} \frac{Dg}{D\sigma}) \end{pmatrix} \quad . \quad (2.10-2)$$

Impondo as condições do gauge ortonormal as equações de movimento resultam ser

$$\ddot{z}^\Omega - z''^\Omega = -\Gamma_{\Sigma\Delta}^\Omega (\dot{z}^\Sigma \dot{z}^\Delta - z'^\Sigma z'^\Delta) \quad , \quad (2.10-3)$$

com as condições

$$z'^\Omega = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad , \quad (2.10-4)$$

de acordo com (2.3-7).

De modo a podermos definir a carga e a corrente isotópica associadas ao string, vamos passar para o formalismo hamiltoniano. Tem-se que

$$\mathcal{P}_\Omega = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{z}^\Omega} = \gamma_{\Omega\Sigma} \dot{z}^\Sigma$$

e

$$\pi_\Omega = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial z'^\Omega} = -\gamma_{\Omega\Sigma} z'^\Sigma \quad ,$$

(N=1), donde segue que

$$\mathcal{P}_i = N_i^a (N_{ja} \dot{\zeta}^j + A_{av} \dot{z}^v) = N_i^a I_a, \quad (2.10\_5a)$$

$$\mathcal{P}_\mu = g_{\mu\nu} \dot{z}^\nu + A_\mu^c I_c, \quad (2.10\_5b)$$

e

$$\pi_i = -N_i^a (N_{ja} \zeta'^j + A_{av} z'^v) = N_i^a J_a, \quad (2.10\_6a)$$

$$\pi_\mu = g_{\mu\nu} z'^\nu - A_\mu^c J_c, \quad (2.10\_6b)$$

onde definimos os isovetores

$$\vec{I} = \{I_a = N_a^i \mathcal{P}_i\}, \quad \vec{J} = \{J_a = -N_a^i \pi_i\}.$$

Procedendo como no caso da partícula, seção anterior, os colchetes de Poisson para as variáveis  $\vec{I}$  e  $\vec{J}$  são definidos por

$$\{I_a(\sigma), I_b(\sigma')\} = C_{ab}^c I_c \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.10\_7a)$$

$$\{J_a(\sigma), J_b(\sigma')\} = C_{ab}^c J_c \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.10\_7b)$$

$$\{I_a, J_b\} = 0. \quad (2.10\_7c)$$

Com a hamiltoniana dada por

$$H = \int d\sigma (\gamma^{\Omega\Sigma} \mathcal{P}_\Omega \mathcal{P}_\Sigma + \gamma_{\Gamma\Delta} z'^\Gamma z'^\Delta) \approx 0,$$

obtem-se (\*)

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial \tau} - \frac{\partial \vec{J}}{\partial \sigma} = +[\vec{I}, \vec{A}_\mu] \dot{z}^\mu - [\vec{J}, \vec{A}_\mu] z'^\mu, \quad (2.10_8)$$

com

$$\vec{J} = 0 \quad \text{em } \sigma=0, \pi. \quad (2.10_9)$$

A corrente isotópica associada com o string fica dada por

$$J_a^\mu = \frac{\delta S}{\delta A_a^\mu} = \int d^2 \xi [I_a^\mu \dot{z}^\mu - J_a^\mu z'^\mu] \delta^{(4)}(z - z(\xi)), \quad (2.10_{10})$$

de modo que  $\vec{I}$  é identificado com a carga isotópica, e  $\vec{J}$  com a corrente isotópica sobre o string.

As equações da trajetória ficam sob a forma

$$\begin{aligned} \ddot{z}^\mu - z''^\mu = & - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} (\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta - z'^\alpha z'^\beta) \\ & + g^{\mu\nu} T_R [\vec{F}_{\beta\nu} \cdot \vec{I}] z'^\beta - g^{\mu\nu} T_R [\vec{F}_{\beta\nu} \cdot \vec{J}] z'^\beta. \end{aligned} \quad (2.10_{11})$$

(\*) Os cálculos que conduzem às equações (2.10\_8/11) não apresentam dificuldades mas são longos, e foram omitidos por economia de espaço.

### Capítulo 3: EXTENSÕES DA TEORIA E OUTROS DESENVOLVIMENTOS FORMAIS

#### 3.1 Strings com massas nas extremidades

Apesar de toda a beleza da estrutura da teoria dos strings não foi possível (até agora) se construir uma teoria quântica consistente num espaço-tempo com dimensão  $D \neq 26$ . Outras dificuldades surgem quando se constroi o modelo de strings para a teoria dual das interações fortes. Por exemplo, o modelo teórico prevê uma trajetória de Regge para os hadrons com interseção igual a 1, resultado que difere dos dados experimentais por um fator de 2.

A impossibilidade de se construir uma teoria quântica consistente nos leva a pensar em modificar a ação de Nambu associando-se ao string estruturas com carga, massa e spin.

O modelo de strings com cargas (localizadas nas extremidades por imposição da invariância por reparametrizações, no espaço-tempo de Minkowski) não conduz à solução de nenhum destes problemas. A introdução de massas localizadas nas extremidades (pela mesma exigência referida acima) também não produz resultados significativos com relação a estes problemas. Para um dos modelos que vamos considerar, a trajetória de Regge é deslocada para baixo, mas não o suficiente para ficar em acordo com os dados experimentais. Alguns autores levantaram a possibilidade de que a dimensão crítica de  $D=26$  poderia ser consequência da ausência dos modos longitudinais de vibração no modelo de Nambu. Estes modos surgem de maneira natural quando a ação do string é generalizada para incluir massas nas extremidades. Uma análise profunda destes modos de vibração mostrou que a sua presença não altera substancialmente

a situação, já que a dimensão crítica se reduz apenas a  $D=25$ . No entanto, estes modelos têm seu valor sob o ponto de vista teórico e uma análise dos mesmos é bastante instrutiva.

Como já mencionamos, a invariância sob reparametrizações requer que a massa seja localizada nos extremos do string. Assim, a integral de ação fica sob a forma geral

$$S = -N \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{-g} - \sum_{i=1}^2 m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} V_{-\dot{y}^2(\tau, \sigma_i(\tau))} d\tau, \quad (3.1-1)$$

onde admitimos que os valores de  $\sigma$  nos pontos extremos, onde se localizam as massas  $m_1$  e  $m_2$ , possam depender de  $\tau$ . Esta mesma hipótese foi feita no caso das cargas nos extremos do string e, naquele caso, vimos que a escolha  $\sigma_i = c \frac{te}{\tau}$  não afeta a dinâmica de sistema. Isto também é verdade no caso que estamos considerando só que, como veremos a seguir, não é tão óbvio devido à forma das condições de bordo.

No gauge ortonormal,

$$\dot{y} \cdot y' = 0, \quad \dot{y}^2 + y'^2 = 0 \quad (3.1-2)$$

o princípio da ação conduz às equações de movimento

$$\ddot{y}^\mu - y''^\mu = 0, \quad (3.1-3)$$

e as condições de bordo

$$\frac{m_i}{N} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{y}^\mu + y'^\mu \dot{\sigma}}{\sqrt{-\dot{y}^2 (1 - \dot{\sigma}^2)}} \right) = y'^\mu + \dot{y}^\mu \dot{\sigma}, \quad \sigma = \sigma_i(\tau), \quad (3.1-4a)$$

$$\frac{m_2}{N} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{y}^\mu + u^{\mu\sigma}}{\sqrt{-\dot{y}^2 (1 - \dot{\sigma}^2)}} \right) = -y^{\prime\mu} - \dot{y}^\mu \dot{\sigma} \quad , \quad \sigma = \sigma_2(\tau) \quad (3.1-4b)$$

Como já sabemos, a solução geral das equações de movimento (3.1-3) é

$$y^\mu(\tau, \sigma) = f^\mu(\sigma + \tau) + g^\mu(\sigma - \tau) \equiv f^\mu(\alpha) + g^\mu(\beta) \quad , \quad (3.1-5)$$

onde as funções  $f^\mu$  e  $g^\mu$  devem satisfazer a

$$f^{\prime 2}(\alpha) = 0 \quad , \quad g^{\prime 2}(\beta) = 0 \quad , \quad (3.1-6)$$

como consequência das condições (3.1-2). Nestas expressões (') significa derivada com relação ao argumento.

Substituindo (3.1-5) em (3.1-4a,b) obtêm-se

$$\frac{m_1}{N} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{f^{\prime\mu}(\alpha) \dot{\alpha} + g^{\prime\mu}(\beta) \dot{\beta}}{\sqrt{2f^{\prime\mu}(\alpha) g^{\prime\mu}(\beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}}} \right) = f^{\prime\mu}(\alpha) \dot{\alpha} - g^{\prime\mu}(\beta) \dot{\beta} \begin{cases} \alpha = \alpha_1(\tau) = \sigma_1(\tau) + \tau \\ \beta = \beta_1(\tau) = \sigma_1(\tau) - \tau \end{cases} \quad (3.1-7a)$$

$$\frac{m_2}{N} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{f^{\prime\mu}(\alpha) \dot{\alpha} + g^{\prime\mu}(\beta) \dot{\beta}}{\sqrt{2f^{\prime\mu}(\alpha) g^{\prime\mu}(\beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}}} \right) = -f^{\prime\mu}(\alpha) \dot{\alpha} + g^{\prime\mu}(\beta) \dot{\beta} \begin{cases} \alpha = \alpha_2(\tau) = \sigma_2(\tau) + \tau \\ \beta = \beta_2(\tau) = \sigma_2(\tau) - \tau \end{cases} \quad (3.1-7b)$$

Integrando estas expressões com relação a  $\tau$  resulta:

$$\frac{m_1}{N} \frac{\dot{y}^\mu + y^{\prime\mu} \dot{\sigma}_1}{\sqrt{-\dot{y}^2 (1 - \dot{\sigma}_1^2)}} = f^\mu(\alpha_1) - g^\mu(\beta_1) + C_1^\mu \equiv \lambda_1^\mu(\alpha_1, \beta_1) \quad , \quad (3.1-8a)$$

$$\frac{m_2}{N} \frac{\dot{y}^\mu + y'^\mu \dot{\sigma}_2}{\sqrt{-\dot{y}^2 (1 - \dot{\sigma}_2^2)}} = -f^\mu(\alpha_2) + g^\mu(\beta_2) + C_2^\mu \equiv \lambda_2^\mu(\alpha_2, \beta_2) \quad (3.1-8b)$$

donde segue que

$$\lambda_1^2(\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{m_1}{N}\right)^2 \quad (3.1-9)$$

Projetando as equações (3.1-8a,b) ao longo de  $y'^\mu(\tau, \sigma_1(\tau))$ , e levando em conta que

$$y'^\mu(\tau, \sigma_1(\tau)) = \dot{\lambda}_1^\mu(\alpha_1, \beta_1)$$

obtêm-se

$$\frac{m_1}{N} \frac{y'^{\nu 2} \dot{\sigma}_1}{\sqrt{-\dot{y}^2 (1 - \dot{\sigma}_1^2)}} = \dot{\lambda}_1^\mu(\alpha_1, \beta_1) \lambda_{1\mu}(\alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_1^2(\alpha_1, \beta_1) = 0 \quad .$$

Logo,  $\dot{\sigma}_1 = 0$  e os pontos extremos podem ser determinados fazendo-se a escolha usual  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \pi$ .

Com os resultados obtidos acima as condições de bordo se tornam mais simples, mas continuam não lineares:

$$\frac{m_1}{N} \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{y}^\mu}{\sqrt{-\dot{y}^2}} = y'^\mu \quad (\sigma=0) \quad , \quad (3.1-10a)$$

$$\frac{m_2}{N} \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{y}^\mu}{\sqrt{-\dot{y}^2}} = -y'^\mu \quad (\sigma=\pi) \quad . \quad (3.1-10b)$$

Estas condições, como se vê, são equações de movimento para

partículas de massa  $m_i$  sob a ação de uma tensão  $\pm N y'^{\mu} = \pm \pi^{\mu}$ .

A solução geral das equações (3.1.3) com as condições (3.1.10) é obviamente muito difícil de se obter em virtude da não linearidade destas últimas. Observe que estas condições resultariam lineares se tivéssemos tomado como integral de ação para as partículas

$$S_m = - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{y}^2(\tau) .$$

Isto é equivalente a se tomar o parâmetro  $\tau$  como proporcional ao tempo próprio das partículas. Esta escolha pode ser implementada através da liberdade de escolha dos parâmetros que ainda é admitida pelas equações (3.1.5).

Passemos à análise de um modelo específico. Sem especificar o gauge ortonormal e escolhendo o parâmetro  $\tau = y^0 = t$  integral de ação fica sob a forma

$$S = -N \int dt \int d\sigma \sqrt{(1 - \dot{\vec{y}}^2) \vec{y}'^2 + (\dot{\vec{y}} \cdot \vec{y}')^2} - m \sum_{i=1}^2 \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{y}}_i^2} , \quad (3.1.11)$$

onde tomamos massas iguais  $m_1 = m_2 = m$ . As equações de movimento do string são

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{\vec{y}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \vec{y}'} \right) = 0 , \quad (3.1.12)$$

e as condições de bordo se escrevem

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_p^{(1)}}{\partial \dot{\vec{y}}_1} \right) = - \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \vec{y}^1} \quad \text{em } \sigma = 0, \quad (3.1-13a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_p^{(2)}}{\partial \dot{\vec{y}}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \vec{y}^1} \quad \text{em } \sigma = \pi. \quad (3.1-13b)$$

Escolhamos

$$\vec{y} = \rho(\sigma) \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1-14)$$

onde  $\rho(\sigma)$  é uma função monotônica, de modo que o string não se dobra sobre si mesmo. Esta escolha corresponde a uma rotação rígida do string no plano  $y^1, y^2$ , e é uma generalização do modelo que analisamos na seção 1.7.

As equações de movimento (3.1-12) são identicamente satisfeitas por (3.1-14) enquanto que das condições de bordo (3.1-13) obtém-se

$$\frac{m\omega^2}{N} = - \frac{1 - \omega^2 \rho^2(\pi)}{\rho(\pi)} = \frac{1 - \omega^2 \rho^2(0)}{\rho(0)}, \quad (3.1-15)$$

donde segue que

$$\rho(0) = -\rho(\pi) = \frac{\sqrt{1 + (\pi\alpha^1 m\omega)^2}}{\omega} - \pi\alpha^1 m\omega \equiv a, \quad (3.1-16)$$

onde usamos que  $N = 1/2\pi\alpha^1$ . Esta solução corresponde a se tomar  $\omega\rho(0) < 1$  de modo que a velocidade dos pontos extremos é menor que a velocidade da luz,  $v < c$ .

A densidade de momento do sistema fica dada por

-403-

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} = \mathcal{P}_\mu + \frac{m\dot{y}_\mu}{\sqrt{-\dot{y}^2}} (\delta(\sigma) + \delta(\pi - \sigma)) \quad (3.1-17)$$

A energia E e o momento angular J,

$$E = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}_0 \quad , \quad (3.1-18)$$

$$J = \int_0^\pi d\sigma (y_1 \mathcal{P}_1 - y_2 \mathcal{P}_2) \quad (3.1-19)$$

podem ser calculadas sem dificuldades:

$$E = \frac{a}{\pi\alpha'} \sqrt{1 + \frac{2\pi m\alpha'^2}{a}} \left( \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\pi m\alpha'^2}{a}}} + \sqrt{\frac{2\pi m\alpha'^2}{a}} \right) \quad (3.1-20)$$

$$J = \frac{a^2}{2\pi\alpha'} \left[ \left(1 + \frac{2\pi m\alpha'^2}{a}\right) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\pi m\alpha'^2}{a}}} + \sqrt{\frac{2\pi m\alpha'^2}{a}} \right] \quad (3.1-21)$$

A trajetória de Regge principal (a que corresponde ao momento angular máximo para uma dada energia)  $J = J(E^2)$  se obtém eliminando-se a destas expressões.

Para  $(2\pi m\alpha')/a \ll 1$  tem-se que

$$J = \alpha' E^2 \left[ 1 - \frac{8}{3\pi} \left(\frac{m\pi}{E}\right)^{3/2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{m}{E}\right)^{5/2}\right) \right] \quad (3.1-22)$$

Esta equação é válida para  $E \gg m$  e  $J \gg \alpha' m^2$ . No limite  $m \rightarrow 0$  reobtem-se o resultado para o caso sem massa. A trajetória principal é assintoticamente reta,  $J \rightarrow \alpha' E^2$  com  $E \rightarrow \infty$ .

A diferença qualitativa essencial entre este modelo e o modelo sem massa está na presença dos modos de oscilações longitudinais. Para fazer uma análise simples destes movimentos basta restringir o movimento ao eixo Z. As equações de movimento e condições de bordo para este caso são:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{Z'}{\sqrt{Z'^2}} = 0 \quad (3.1-23)$$

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{Z}_1}{\sqrt{1-\dot{Z}_1^2}} = -N(\text{sgn } Z') \quad , \quad (3.1-24a)$$

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{Z}_2}{\sqrt{1-\dot{Z}_2^2}} = N(\text{sgn } Z') \quad . \quad (3.1-24b)$$

De (3.1-23) segue que  $\text{sgn } Z'$  é independente de  $\sigma$ , isto é,  $\text{sgn } Z' = \text{sgn}(Z_2 - Z_1)$ . Suponhamos que em  $\tau = 0$  tem-se  $Z_2 > Z_1$ . De (3.1-24a,b) segue que  $Z_2$  e  $Z_1$  se aceleram um na direção do outro sob a ação de uma força constante. No instante em que  $Z_2 = Z_1$  a força muda de sinal, de modo que quando  $Z_2 < Z_1$  os dois extremos continuam a se acelerar um na direção do outro. O movimento é portanto oscilatório (mas, certamente, não é harmônico simples). O período de oscilações depende dos dados iniciais; por exemplo, quando a separação máxima é  $2Z_0$ , o período é  $T = 4 \sqrt{(Z_0 + 2\pi\alpha')^2 - (2\pi\alpha')^2}$  e a velocidade máxima dos extremos é  $\sqrt{1 - [(2\pi\alpha')/Z_0 + 2\pi\alpha']^2}$ .

Um limite não relativístico da teoria do string foi estudado em detalhes por Chernikov e Shavokhina<sup>(\*)</sup>. Eles mostraram que as duas partículas ligadas pelo string se movem co

(\*) Não sabemos exatamente qual foi o "limite não-relativístico" estudado por estes autores.

mo sob a ação de um potencial efetivo que cresce linearmente com a distância entre as massas:

$$V(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2) = NC |\vec{Z}_2(t) - \vec{Z}_1(t)| \quad .$$

Este potencial tem caráter universal no sentido de que não depende das propriedades das partículas. É interessante observar que na cromodinâmica quântica, quando se ignora o "loop" de férmions, obtém-se um potencial linear com as mesmas características.

Abandonando-se a imposição de invariância sob reparametrizações, em  $\sigma$  pelo menos, pode-se construir muitos modelos de string com distribuição contínua de massa que se reduzem ao modelo usual no limite de massa nula. Um modelo interessante que mantém a invariância por reparametrizações em  $\tau$ , é descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = -N \sqrt{(\dot{y} \cdot y')^2 - \dot{y}^2 y'^2 - \mu^2 \dot{y}^2} \quad , \quad (3.1-25)$$

onde  $\mu = c \frac{te}{\dots}$  (por simplicidade) descreve uma distribuição uniforme de massa ao longo do string.

Esta lagrangiana reproduz, a menos de um termo constante, a lagrangiana usual do string não-relativístico. Realmente, caracterizando o limite não-relativístico como aquele em que a velocidade é pequena comparada com a unidade,  $c = 1$ ,

$$-\dot{y}^2 = 1 - \dot{y}^2 \quad , \quad \dot{y}^2 \ll 1$$

e energia potencial pequena comparada com a energia da massa

de repouso

$$|\dot{\vec{y}}'| \ll 1 ,$$

tem-se

$$\mathcal{L}_0 \approx N\mu \left( -1 + \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^2 - \frac{1}{2\mu^2} \dot{\vec{y}}'^2 \right) .$$

As equações de movimento e condições de bordo que se obtêm com a lagrangiana (3.1-25) são formalmente as mesmas que no caso sem massa,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{y}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( -\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y'^\mu} \right) = 0 , \quad y'^\mu = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi .$$

Com a escolha  $y^0 = \tau$  ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\vec{y}}} = N \frac{\dot{\vec{y}}' (\dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}}') - \dot{\vec{y}} (\dot{\vec{y}}'^2 + \mu^2)}{\sqrt{(\dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}}')^2 + (1 - \dot{\vec{y}}^2) (\dot{\vec{y}}'^2 + \mu^2)}} , \quad (3.1-26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\vec{y}}'} = -N \frac{\dot{\vec{y}} (\dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}}') + \dot{\vec{y}}' (1 - \dot{\vec{y}}^2)}{\sqrt{(\dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}}')^2 + (1 - \dot{\vec{y}}^2) (\dot{\vec{y}}'^2 + \mu^2)}} . \quad (3.1-27)$$

Procurando-se uma solução da forma (3.1-14) tem-se que

$$\dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}}' = 0 , \quad \dot{\vec{y}}^2 = \omega^2 \rho^2 , \quad \dot{\vec{y}}'^2 = \rho'^2 . \quad (3.1-28)$$

As equações de movimento não se reduzem a uma identidade, como no caso anterior. Obtêm-se

$$\mu^2 [\rho'' + (\delta\mu)^2 \rho - \omega^2 \rho (\rho\rho'' - \rho'^2)] = 0 \quad (3.1.29)$$

Note que se  $\mu = 0$  as equações de movimento ficam identicamente satisfeitas.

Apesar da equação (3.1.29) ser muito complicada, existe uma solução particular bastante simples e que se adapta aos nossos objetivos. Façamos

$$\rho(\sigma) = A \cos \sigma, \quad (3.1.30)$$

que é unívoca ao longo do string, e satisfaz às condições  $\rho'(0) = 0$ ,  $\rho'(\pi) = 0$ . Vê-se que (3.1.30) satisfaz a

$$\rho\rho'' - \rho'^2 = -A^2,$$

de modo que a equação (3.1.29) ficará satisfeita se

$$A = \frac{1}{\omega^2} (1 - \mu^2 \omega^2) \quad (3.1.31)$$

Note que  $A^2 \omega^2 < 1$ , e portanto todos os pontos do string se movem com velocidade menor que a da luz. Note também que a imposição  $A^2 \geq 0$  põe um limite superior sobre as frequências admissíveis,

$$\omega \leq \frac{1}{\mu} \quad (3.1.32)$$

A densidade de energia  $\mathcal{E}$  fica dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_0} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{\frac{\rho'^2 + \mu^2}{1 - \omega^2 \rho^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha' \omega}$$

que é independente de  $\sigma$ , e a densidade de momento por

$$\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} = \frac{\dot{Y}}{2\pi\alpha' \omega}$$

Segue que

$$E = \frac{1}{2\alpha' \omega}$$

$$J = \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2\pi\alpha' \omega} (y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_1) = \frac{A^2}{4\alpha'} = \frac{1}{4\alpha'} \left( \frac{1}{\omega^2} - \mu^2 \right)$$

donde

$$J = \alpha E^2 - \frac{\mu^2}{4\alpha'}$$

A trajetória de Regge é linear, e sua interseção foi deslocada para baixo, comparada com o caso sem massa, por uma quantidade proporcional a  $\mu^2$ .

A lagrangiana (3.1-25) exibe muitas propriedades interessantes mas conduz a uma integral de ação que não é invariante por reparametrizações em  $\sigma$ . Esta desvantagem pode ser remediada da seguinte maneira. Vamos aumentar a dimensão do espaço-tempo, introduzindo uma nova coordenada  $\phi(\tau, \sigma)$  definida por

$$\phi(\tau, \sigma) = \mu\sigma + c$$

(3.1-33)

$$\dot{\phi}(\tau, \sigma) = 0, \quad \phi'(\tau, \sigma) = \mu$$

Neste espaço-tempo penta-dimensional as coordenadas serão denotadas

$$x^A = (y^0, \vec{y}, \phi) \equiv (y^\mu, \phi) .$$

É fácil verificar que a lagrangiana (3.1\_25) se expressa em termos das coordenadas  $x^A$  por

$$\mathcal{L}_0 = -N \sqrt{(\dot{x} \cdot x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} . \quad (3.1_34)$$

A integral de ação construída com esta lagrangiana é invariante por reparametrizações de modo que podemos proceder como no caso usual.

Ao se aplicar o princípio de ação deve-se levar em conta que, da definição (3.1\_33) ,

$$\phi(\tau, 0) = c = c \frac{te}{\dots} , \quad \phi(\tau, \pi) = \mu\pi + c , \quad (3.1_35)$$

condições que devem ser respeitadas ao se fazer  $\delta S = 0$ . Em outras palavras, o princípio de ação só fará sentido se os valores de  $\phi(\tau, 0)$  e  $\phi(\tau, \pi)$  ficarem inalterados.

As condições (3.1\_35) podem ser introduzidas no princípio da ação se ao se variar  $\phi$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  forem variados simultaneamente de modo a manter  $\phi(\sigma_i)$  com valores fixos. As variações de  $\sigma$  nos pontos extremos podem ser facilmente calculadas. Deve-se ter

$$0 = \bar{\phi}(\bar{\sigma}_i) - \phi(\sigma_i) = \delta\phi(\sigma_i) + \frac{\partial\phi(\sigma_i)}{\partial\sigma} \delta\sigma_i ,$$

donde se obtém

$$\delta\sigma_1 = \frac{\delta\phi(\sigma_1)}{\dot{\phi}'(\sigma_1)} \quad (3.1-36)$$

A variação da ação agora é uma variação onde os pontos extremos devem ser variados de acordo com (3.1-36). Tem-se então

$$\begin{aligned} 0 = \Delta S &= \Delta \int d^2\xi \tilde{\mathcal{L}} = \int d\tau \int_{\sigma_1+\delta\sigma_1}^{\sigma_2+\delta\sigma_2} d\sigma \tilde{\mathcal{L}} - \int d^2\xi \tilde{\mathcal{L}} = \\ &= \delta S + \int d\tau \tilde{\mathcal{L}}(\sigma_1) \delta\sigma_1 \Big|_1^2 \end{aligned}$$

O primeiro termo da expressão acima conduz às equações de movimento e condições de bordo usuais e ao termo

$$\int d\tau \left. \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi'} \delta\phi \right|_1^2$$

Assim, quando as equações de movimento e as condições de bordo são satisfeitas, deve-se ter

$$\int d\tau \left( \left. \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi'} \delta\phi + \tilde{\mathcal{L}} \delta\sigma \right) \Big|_1^2 = 0 \quad ,$$

ou

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi'} - \frac{1}{\phi'} \tilde{\mathcal{L}} = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi \quad , \quad (3.1-37)$$

que são as condições de bordo para a nova coordenada  $\phi$ . Mas,  $\tilde{\mathcal{L}}$  é homogênea de primeira ordem em  $X^A$  e como  $X'^A \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial X'^A} = 0$ , nos bordos exceto para  $X = \phi$ , a condição (3.1-37) é automaticamente satisfeita.

Na quantização deste modelo a quinta coordenada é usada para eliminar parte dos graus de liberdade espúrios, e

consegue-se a covariância em  $D = 25$ .

Os resultados acima nos mostram que é possível do-  
tar o string de uma distribuição de massa aumentando-se o nú-  
mero de dimensões do espaço-tempo para 5. A quinta dimensão,  
 $\phi = \mu\sigma + c$  é essencialmente a massa do string. Isto nos leva  
a pensar num modelo do tipo Kaluza-Klein, seção 2.5, com mé-  
trica do tipo

$$(\gamma_{\Omega\Sigma}) = \left( \begin{array}{c|c} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & \Delta(Z) \end{array} \right), \quad \Omega, \Sigma = 0, 1, \dots, 4, \quad (3.1-38)$$

onde  $\Delta(Z)$  é uma função escalar da posição  $Z = (Z^\mu, \zeta)$ .

A métrica induzida sobre a superfície de evolução é

$$\gamma_{ij} = \gamma_{\Omega\Sigma} \frac{\partial Z^\Omega}{\partial \xi^i} \frac{\partial Z^\Sigma}{\partial \xi^j} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial Z^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial Z^\nu}{\partial \xi^j} + \Delta(Z) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi^i} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi^j}. \quad (3.1-39)$$

No gauge ortonormal

$$(\gamma_{ij}) = \left( \begin{array}{c|c} \dot{Z}^2 + \Delta(Z) \dot{\zeta}^2 & 0 \\ \hline 0 & \dot{Z}'^2 + \Delta(Z) \zeta'^2 \end{array} \right). \quad (3.1-40)$$

Como vimos na seção 4.2-7 as equações de movimento se escre-  
vem

$$\ddot{Z}^\Omega - Z''^\Omega = -\Gamma_{\Sigma\Delta}^\Omega (\dot{Z}^\Sigma \dot{Z}'^\Delta - Z'^\Sigma Z'^\Delta).$$

Usando (3.1-40) obtêm-se

$$\ddot{z}^\mu - z''^\mu = -\frac{1}{2} \partial^\mu \Delta (\dot{\zeta}^2 - \zeta'^2) \quad (3.1-41)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta \dot{\zeta}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Delta \zeta') = 0 \quad (3.1-42)$$

O modelo que estudamos anteriormente é obtido no caso  $\Delta(Z)\zeta' = \mu = \underline{cte}$ .

## 3.2 Strings supersimétricos

### 3.2.1 Construção dos vínculos, a fixação do super-gauge, e as equações de movimento

Seguindo basicamente o mesmo procedimento que usamos no caso da partícula clássica supersimétrica, Seção 0.12, vamos construir um modelo de strings super-simétricos. O tratamento será essencialmente hamiltoniano porque, baseando-se no que já sabemos sobre a partícula super-simétrica, é possível construir um conjunto de vínculos de primeira classe em termos dos quais podemos expressar a hamiltoniana total do sistema. Esta hamiltoniana gera as equações de movimento obtidas por Mandelstan e Iwasaki e Kikkawa. A passagem para o formalismo lagrangiano não nos parece um problema trivial, e não será abordado.

A primeira dificuldade que encontramos é a não existência de uma equação de Dirac para o string que nos permita construir os vínculos clássicos correspondentes. No entanto,

como vimos na seção 1.9, definindo-se as funções

$$Q_{\pm}^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu} \pm y'^{\mu} \quad (N = 1) \quad (3.2-1)$$

no intervalo  $-\pi \leq \sigma \leq \pi$ , tem-se que as condições

$$Q_{\pm}^2 = \mathcal{P}^2 + y'^2 \pm 2\mathcal{P} \cdot y' \approx 0 \quad (3.2-2)$$

são equivalentes aos vínculos (1.8-10,11). Assim, temos duas funções  $Q_{\pm}^{\mu}(\tau, \sigma)$  cujos quadrados, equações (3.2-2), geram dois vínculos tipo Klein-Gordon em termos dos quais pode-se construir a teoria usual do string sem spin.

Consideremos dois conjuntos de variáveis anti-comutativas reais  $\Gamma_A^{\mu}(\tau, \sigma)$ ,  $A = 1, 2$ , satisfazendo aos seguintes colchetes de Poisson

$$\{\Gamma_A^{\mu}(\sigma), \Gamma_B^{\nu}(\sigma')\} = i\delta_{AB}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') \quad (3.2-3)$$

O gerador de rotações locais destas variáveis,  $S^{\alpha\beta}$ , é definido por

$$\{\Gamma_A^{\mu}(\sigma), \frac{1}{2} \int \omega_{\alpha\beta}(\sigma') S^{\alpha\beta}(\sigma') d\sigma'\} = \omega^{\mu}_{\nu}(\sigma) \Gamma_A^{\nu}(\sigma) \quad (3.2-4)$$

Encontra-se que

$$S^{\alpha\beta} = i(\Gamma_1^{\alpha} \Gamma_1^{\beta} + \Gamma_2^{\alpha} \Gamma_2^{\beta}) \quad (3.2-5)$$

e, por um cálculo direto usando (3.2-3),

$$\{S^{\alpha\beta}(\sigma), S^{\mu\nu}(\sigma')\} = C_{\rho\sigma}^{\alpha\beta\mu\nu} S^{\rho\sigma} \delta(\sigma-\sigma') \quad (3.2-6)$$

onde  $C_{\rho\sigma}^{\alpha\beta\mu\nu}$  são as constantes de estrutura do grupo de Lorentz. As quantidades  $S^{\alpha\beta}$  dadas por (3.2-5) serão identificadas com o tensor de spin do string.

Vamos agora definir as seguintes funções de vínculo

$$\mathcal{L}_1 = \Gamma_1^\mu (\mathcal{P}_\mu + Y_\mu) \equiv \Gamma_1^\mu Q_\mu^\pm \approx 0 \quad (3.2-7a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \Gamma_2^\mu (\mathcal{P}_\mu - Y_\mu) \equiv \Gamma_2^\mu Q_\mu^\pm \approx 0 \quad (3.2-7b)$$

Verifica-se que

$$\{\mathcal{L}_{1,2}(\sigma), \mathcal{L}_{1,2}(\sigma')\} = 2i \mathcal{H}_{1,2} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.2-8)$$

$$\{\mathcal{H}_{1,2}(\sigma), \mathcal{L}_{2,1}(\sigma')\} = 0 \quad (3.2-9)$$

onde

$$\mathcal{H}_{1,2} = \frac{1}{2} Q_\pm^2 + \Gamma_{1,2}^\mu \frac{\partial \Gamma_{1,2}^\nu}{\partial \sigma} \eta_{\mu\nu} \quad (3.2-10)$$

Para que se tenha uma teoria consistente vamos impor que as funções  $\mathcal{H}_{1,2}$  definidas acima sejam fracamente nulas,

$$\mathcal{H}_{1,2}(\sigma) \approx 0 \quad (3.2-11)$$

Obtivemos assim um conjunto de quatro vínculos dados pelas equações (3.2-7a,b) e (3.2-10). Os vínculos  $\mathcal{L}_{1,2}$  lineares nos momentos e nas variáveis de Grassmann - correspondem ao vínculo de Dirac (0.12-50) enquanto que os vínculos  $\mathcal{H}_{1,2}$  - quadráticos nos momentos - correspondem ao vín-

culo de Klein-Gordon (0.12-51). Pode-se verificar que este conjunto de vínculos é de primeira classe e portanto são os únicos vínculos na teoria. De fato, encontramos que

$$\{\phi_{1,2}(\sigma), \mathcal{H}_{1,2}(\sigma')\} = \pm 2(\phi_{1,2}(\sigma')) + \frac{1}{2} \phi_{1,2}(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \quad (3.2-12a)$$

$$\{\phi_{1,2}, \mathcal{H}_{2,1}\} = 0, \quad (3.2-12b)$$

$$\{\mathcal{H}_{1,2}(\sigma), \mathcal{H}_{1,2}(\sigma')\} = (\mathcal{H}_{1,2}(\sigma) + \mathcal{H}_{1,2}(\sigma')) \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma - \sigma') \approx 0, \quad (3.2-12c)$$

$$\{\mathcal{H}_{1,2}, \mathcal{H}_{2,1}\} = 0. \quad (3.2-12d)$$

As seguintes combinações lineares dos vínculos serão mais úteis para os nossos objetivos.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\perp} &= \frac{1}{2} (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{P}^2 + Y'^2) - \frac{1}{2} (\Gamma_1^{\mu} \Gamma_{1\mu}^{\nu} - \Gamma_2^{\mu} \Gamma_{2\mu}^{\nu}), \end{aligned} \quad (3.2-13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\parallel} &= \frac{1}{2} (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) = \\ &= \mathcal{P} \cdot Y' - \frac{1}{2} (\Gamma_1^{\mu} \Gamma_{2\mu}^{\nu} + \Gamma_2^{\mu} \Gamma_{1\mu}^{\nu}). \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

Estas combinações têm a vantagem de separar as partes quadrática e linear no momento  $\mathcal{P}_{\mu}$  que, como já vimos no caso sem spin, são responsáveis pela dinâmica e por reparametrizações em  $\sigma$ , respectivamente.

Tem-se agora a seguinte álgebra para os vínculos:

$$\{H_{\perp}(\sigma), H_{\perp}(\sigma')\} = (H_{\perp}(\sigma) + H_{\perp}(\sigma')) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \quad (3.2-14a)$$

$$\{H_{\perp}(\sigma), H_{\parallel}(\sigma')\} = (H_{\perp}(\sigma) + H_{\perp}(\sigma')) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \quad (3.2-14b)$$

$$\{H_{\parallel}(\sigma), H_{\parallel}(\sigma')\} = (H_{\parallel}(\sigma) + H_{\parallel}(\sigma')) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \quad (3.2-14c)$$

$$\{S_{1,2}(\sigma), S_{\perp}(\sigma)\} = (S_{1,2}(\sigma') + \frac{1}{2} S_{1,2}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.2-14d)$$

$$\{S_{1,2}(\sigma), H_{\parallel}(\sigma')\} = (S_{1,2}(\sigma') + \frac{1}{2} S_{1,2}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.2-14e)$$

juntamente com (2.2-8,9).

Vamos introduzir um conjunto de matrizes de Dirac  $2 \times 2$  que com relação a uma base local obedecem à álgebra de Clifford,

$$\{\gamma_{(i)}, \gamma_{(j)}\} = 2\eta_{ij}, \quad (3.2-15)$$

com  $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, +1)$ . Usaremos a seguinte representação real para as matrizes  $\gamma$ :

$$\gamma^{\perp} \equiv -\gamma^{(0)} = \gamma_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^{\parallel} \equiv \gamma^{(1)} = \gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_{(0)} \gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos usar a seguinte notação:

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \Gamma_1^\mu \\ \Gamma_2^\mu \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\mu\dagger} = (\gamma_1^\mu \Gamma_2^\mu), \quad \bar{\Gamma}^\mu = \Gamma^{\mu\dagger} \gamma_{(0)}, \quad (3.2-16)$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \quad (3.2-17)$$

Os colchetes de Poisson para os vínculos (3.2-7a,b) ficam sob a forma

$$\{\mathcal{S}_A(\sigma), \bar{\mathcal{S}}_B(\sigma')\} = 2i\delta(\sigma-\sigma') (\gamma^{(j)})_{AB} \mathcal{H}_j \approx 0 \quad (3.2-18)$$

$$\{\mathcal{S}_A(\sigma), \mathcal{H}_j(\sigma')\} = \varepsilon_{jk} (\gamma^{(k)})_{AB} (\bar{\mathcal{S}}_B(\sigma') + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{S}}_B(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma-\sigma') \approx 0 \quad (3.2-19)$$

onde  $(\varepsilon_{jk}) = -\gamma_{(0)}$ ,  $j, k = 0, 1 \equiv \perp, \parallel$ . Os vínculos (3.2-13,14) se escrevem:

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2} (\mathcal{P}^2 + \mathbf{y}'^2) + \frac{i}{2} \Gamma_\mu^\dagger \gamma_5 \Gamma'^\mu, \quad (3.2-20)$$

$$\mathcal{H}_\parallel = \mathcal{P} \cdot \mathbf{y}' - \frac{i}{2} \Gamma_\mu^\dagger \Gamma'^\mu. \quad (3.2-21)$$

As expressões (3.2-18/21) exibem claramente a estrutura espinorial do modelo.

Os vínculos espinoriais (3.2-7a,b) são os geradores de transformações de supersimetria das variáveis dinâmicas do string. De fato, com

$$G = i \int d\sigma' (f(\sigma') \mathcal{S}_1(\sigma') + g(\sigma') \mathcal{S}_2(\sigma')). \quad (3.2-22)$$

encontramos que

$$\delta \Gamma_1^\mu = \{\Gamma_1^\mu(\sigma), \varepsilon G\} = \varepsilon f(\sigma) Q_+^\mu(\sigma) \quad , \quad (3.2_{-}23a)$$

$$\delta \Gamma_2^\mu = \{\Gamma_2^\mu(\sigma), \varepsilon G\} = \varepsilon g(\sigma) Q_-^\mu(\sigma) \quad , \quad (3.2_{-}23b)$$

$$\delta y^\mu = \{y^\mu(\sigma), \varepsilon G\} = \varepsilon (f(\sigma) \Gamma_1^\mu(\sigma) + g(\sigma) \Gamma_2^\mu(\sigma)) \quad , \quad (3.2_{-}23c)$$

$$\delta \mathcal{P}_\mu = 0 \quad , \quad (3.2_{-}23d)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções ímpares, restritas pelas condições

$$\dot{f} = f' \quad , \quad \dot{g} = -g \quad , \quad (3.2_{-}23e)$$

(necessárias para manter a invariância das equações de movimento. Ver equações (3.2\_{-}27,28).) As equações (3.2\_{-}13a/c) definem as "transformações de super-gauge" obtidas por Gervais e Sakita.

A hamiltoniana do string é dada por uma combinação linear dos vínculos:

$$H = \int d\sigma [N^\perp \mathcal{H}_\perp + N^\parallel \mathcal{H}_\parallel + iM_1 \mathcal{G}_1 + iM_2 \mathcal{G}_2] \quad , \quad (3.2_{-}24)$$

onde  $N^\perp$ ,  $N^\parallel$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  são funções arbitrárias, as duas últimas ímpares.

Para obter as equações de movimento para as variáveis dinâmicas vamos fazer a seguinte escolha do super-gauge:

$$2N_\perp = 1 \quad , \quad N^\parallel = 0 \quad , \quad (3.2_{-}25)$$

$$M_1 = 0 \quad , \quad M_2 = 0 \quad .$$

Um simples exame das transformações geradas por cada termo da hamiltoniana (3.2\_24) nos mostra que esta escolha é razoável.

As equações de Hamilton conduzem a

$$\ddot{y}^\mu - y''^\mu = 0 \quad , \quad (3.2_26)$$

$$\dot{\Gamma}_1^\mu = -\Gamma_1'^\mu \quad , \quad (3.2_27a)$$

$$\dot{\Gamma}_2^\mu = \Gamma_2'^\mu \quad . \quad (3.2_27b)$$

As equações (3.2\_27a,b) podem ser escritas sob a forma de uma equação de Dirac sem massa para o espinor  $\Gamma^\mu$ :

$$\eta^{ij} \gamma_{(i)} \partial_j \Gamma^\mu = 0 \quad . \quad (3.2_28)$$

As equações (3.2\_26,27) são as equações de movimento obtidas por Iwasaki e Kikkawa e também por Mandelstan.

As equações de movimento (3.2\_26/28) e as condições do gauge ortonormal ficam invariáveis pelas transformações admissíveis  $(\tau, \sigma) \rightarrow (\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$  desde que  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$  se transformem de acordo com

$$\tilde{\Gamma}_+^\mu = \sqrt{\frac{\partial(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})}{\partial(\tau, \sigma)}} \Gamma_+^\mu \quad , \quad \tilde{\Gamma}_-^\mu = \sqrt{\frac{\partial(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})}{\partial(\tau, \sigma)}} \Gamma_-^\mu \quad .$$

Observemos que se calcularmos a variação da hamiltoniana encontra-se as equações de movimento, as condições de bordo usuais  $y^i = 0$  e  $\sigma = 0, \pi$  e mais um termo de fronteira envolvendo as variáveis de Grassmann,

$$-\frac{i}{2} \Gamma_{+\mu} \delta \Gamma_{+\mu} \Big|_0^\pi + \frac{i}{2} \Gamma_{-\mu} \delta \Gamma_{-\mu} \Big|_0^\pi \quad (3.2-29)$$

Este termo também apareceria na variação da integral de ação e, como no caso da partícula com spin não podemos anulá-lo impondo duas condições sobre cada conjunto de variáveis. Seguindo o mesmo procedimento que no caso da partícula, podemos introduzir na integral de ação o termo

$$\int d\tau \frac{i}{2} (\Gamma_{+\mu}(0) \Gamma_{+\mu}(\pi) - \Gamma_{-\mu}(0) \Gamma_{-\mu}(\pi))$$

e impor as condições

$$\delta \Gamma_{\mu}^{\pm}(0) + \delta \Gamma_{\mu}^{\pm}(\pi) = 0$$

de modo a cancelar o termo de fronteira (3.2-29). Note que este termo se origina da variação do termo em  $\mathcal{H}_1$  na hamiltoniana que necessariamente estará presente na integral de ação.

A quantização canônica covariante deste modelo, com base na hamiltoniana (3.2-24) e no gauge definido por (3.2-25), pode ser feita num espaço-tempo com dimensão  $D = 10$ , o que representa um "progresso" comparado ao caso sem spin ( $D = 26$ ).

### 3.2.2 A interação gravitacional do string com spin

Os resultados da seção anterior podem ser generalizados sem dificuldades para incluir a interação com um campo gravitacional. Consideremos um campo de tetradas  $e^{\mu}_{(a)}(y)$  de

finidos da maneira usual,

$$e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} g_{\mu\nu} = \eta_{ab} ,$$

$$e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu \eta_{ab} = g_{\mu\nu} .$$

Com relação a esta base as variáveis de Grassmann se escrevem

$$\Gamma_A^a = e^{(a)}_\mu \Gamma_A^\mu , \quad (3.2-30)$$

e os colchetes de Poisson fundamentais são

$$\{\Gamma_A^a(\sigma), \Gamma_B^b(\sigma')\} = \delta_{AB} \eta^{ab} \delta(\sigma - \sigma') . \quad (3.2-31)$$

Definiremos o acoplamento mínimo do sistema com o campo gravitacional pela prescrição

$$\mathcal{P}_\mu + \mathcal{Q}_\mu = \mathcal{R}_\mu - \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab} , \quad (3.2-32)$$

onde  $\omega_{\mu ab}$  são os coeficientes da conexão espinorial e

$$S^{ab} = e^{(a)}_\alpha e^{(b)}_\beta S^{\alpha\beta} .$$

Tem-se os seguintes colchetes de Poisson:

$$\{\Gamma_A^c(\sigma), S^{ab}(\sigma')\} = (\eta^{ac} \Gamma_A^b - \eta^{bc} \Gamma_A^a) \delta(\sigma - \sigma') , \quad (3.2-33a)$$

$$\{\mathcal{P}_\mu(\sigma), \Gamma_A^b(\sigma')\} = -\omega_{\mu a}{}^b \Gamma_A^a \delta(\sigma - \sigma') , \quad (3.2-33b)$$

$$\{\mathcal{P}_\mu(\sigma), \Gamma_A^\alpha(\sigma')\} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \Gamma_A^\lambda \delta(\sigma - \sigma') \quad , \quad (3.2-33c)$$

$$\{\mathcal{P}_\mu(\sigma), \mathcal{P}_\nu(\sigma')\} = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu ab} S^{ab} \delta(\sigma - \sigma') \quad . \quad (3.2-33d)$$

Os vínculos espinoriais que generalizam (3.2-7a,b) são

$$\phi_1 = e^\mu (a) \Gamma_1^a (\mathcal{P}_\mu + g_{\mu\lambda} y'^\lambda) \approx 0 \quad , \quad (3.2-34a)$$

$$\phi_2 = e^\mu (b) \Gamma_2^a (\mathcal{P}_\mu - g_{\mu\lambda} y'^\lambda) \approx 0 \quad . \quad (3.2-34b)$$

Usando-se as relações (3.2-33) pode-se mostrar que os vínculos formam uma álgebra fechada, a mesma que no espaço de Minkowski, com  $\mathcal{H}_\perp$  e  $\mathcal{H}_\parallel$  dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2} (Q^2 + y'^2) - \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} \left( \Gamma_1^\lambda \frac{D\Gamma_1^\alpha}{D\sigma} - \Gamma_2^\lambda \frac{D\Gamma_2^\alpha}{D\sigma} \right) \\ + R_{\mu\nu\alpha\beta} S^{\mu\nu} S^{\alpha\beta} \approx 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.2-35a)$$

$$\mathcal{H}_\parallel = \mathcal{P} \cdot y' - \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} \left( \Gamma_1^\lambda \frac{D\Gamma_1^\alpha}{D\sigma} + \Gamma_2^\lambda \frac{D\Gamma_2^\alpha}{D\sigma} \right) \approx 0 \quad , \quad (3.2-35b)$$

Nas expressões acima usamos a notação

$$\frac{D\Gamma^\mu}{D\sigma} = \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial \sigma} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} y'^\alpha \Gamma^\beta \quad . \quad (3.2-36)$$

Para obter as equações de movimento podemos seguir o mesmo procedimento que no espaço de Minkowski. Com a hamiltoniana dada por uma combinação linear dos vínculos de primeira

ra classe (3.2-34) e (3.2-35), e com a escolha (3.2-25) para o super-gauge obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\frac{D^2 Y^\mu}{D\tau^2} - \frac{D^2 y^\mu}{D\sigma^2} = g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\rho\sigma}) S^{\alpha\beta} S^{\rho\sigma} + \frac{i}{2} [\Gamma_1^\alpha \Gamma_1^\beta (\dot{y}^\nu + y'^\nu) + \Gamma_2^\alpha \Gamma_2^\beta (\dot{y}^\nu - y'^\nu)] R^\mu_{\nu\alpha\beta} \quad (3.2-37)$$

$$\frac{D\Gamma_1^\mu}{D\tau} = -\frac{D\Gamma^\mu}{D\sigma} + R^\mu_{\nu\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \Gamma_1^\nu \quad (3.2-38a)$$

$$\frac{D\Gamma_2^\mu}{D\tau} = \frac{D\Gamma^\mu}{D\sigma} + R^\mu_{\nu\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \Gamma_2^\nu \quad (3.2-38b)$$

As equações (3.2-38) podem ser escritas sob a forma

$$\eta^{ij} \gamma(j) \frac{D\Gamma^\mu}{D\xi^i} = -R^\mu_{\nu\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \Gamma^\nu \quad (3.2-39)$$

### 3.3 Lagrangianas alternativas para o string

#### 3.3.1 A Lagrangiana de Schild e os strings nulos

Quando estudamos a partícula livre relativística, Seção 0.1, vimos que a lagrangiana pode ser escolhida sob a forma (0.1-5) ou (0.1-13). A integral de ação construída com a lagrangiana (0.1-13) não é invariante por reparametrizações arbitrárias mas tem a vantagem de conduzir, sem inconsistên -

cias, a geodésicas nulas, trajetórias de partícula de massa zero.

A lagrangiana de Nambu é análoga à lagrangiana (0.1-5) e, por consistência, deve-se ter  $\Sigma^2 = \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \neq 0$ . A lagrangiana proposta por Schild é a análoga de (0.1-13),

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{N}{2} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \equiv -\frac{N}{2} \Sigma^2 \quad (3.3-1)$$

A integral de ação

$$S = -\frac{N}{2} \int d^2 \xi \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \quad (3.3-2)$$

não é invariante por reparametrizações arbitrárias. O grupo de invariância agora é o sub-grupo das reparametrizações  $\xi \rightarrow \bar{\xi}(\xi)$  tais que o jacobiano da transformação é igual a 1,

$$J\left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \xi}\right) = 1 \quad (3.3-3a)$$

Para uma transformação infinitesimal com  $\delta \xi^a = \epsilon^a(\xi)$  segue de (3.3-3a) que

$$\partial_a \epsilon^a(\xi) = 0 \quad (3.3-3b)$$

Logo, apenas uma das funções  $\epsilon^a(\xi)$  é independente e a transformação dos parâmetros pode ser expressa por

$$\delta \xi^a = \epsilon^a(\xi) = \epsilon^{ab} \partial_b \phi(\xi) \quad (3.3-3c)$$

onde  $\phi(\xi)$  é um escalar sobre  $\Sigma$ . As variações corresponden -

tes nas coordenadas  $y^\mu(\xi)$  ficam dadas por

$$\delta y^\mu = \epsilon^{ab} \partial_b \phi(\xi) \partial_a y^\mu \quad (3.3-3d)$$

Observemos que da mesma maneira que a integral de ação (0.1-3) da partícula livre depende de  $t_1$  e  $t_2$  somente através de  $(t_2-t_1)$ , a ação de Schild (3.3-2) depende do domínio dos parâmetros somente através da sua área. Em outras palavras, a ação (0.1-13) é invariante por translações rígidas de  $(t_2, t_1)$  e a ação (3.3-2) é invariante por transformações simpléticas do domínio dos parâmetros. Estes resultados são consequências de um teorema de J. Moser.

O princípio variacional aplicado à ação (3.3-2) conduz às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial (\partial_a y^\mu)} \left( \frac{1}{2} \Sigma^2 \right) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^a} (-\epsilon^{ab} \Sigma_{\mu\nu} \partial_b y^\nu) = 0 \quad (3.3-4a)$$

e as condições de bordo

$$\Sigma_{\mu\nu} \dot{y}^\mu = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad (3.3-4b)$$

Usando a identidade

$$\partial_a y^\mu \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_b y^\mu)} \left( \frac{1}{2} \Sigma^2 \right) \right] \equiv \delta_a^b \Sigma^2 \quad (3.3-5)$$

e das equações de movimento (3.3-4a) tem-se que

$$0 = \partial_a y^\mu \partial_b \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_b y^\mu)} \left( \frac{1}{2} \Sigma^2 \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \partial_b \left\{ \partial_a y^\mu \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_b y^\mu)} \left( \frac{1}{2} \Sigma^2 \right) \right] \right\} - \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_b y^\mu)} \left( \frac{1}{2} \Sigma^2 \right) \right] \partial_a \partial_b y^\mu = \\
 &= \partial_a \left( \frac{1}{2} \Sigma^2 \right) .
 \end{aligned}$$

Então, as equações de movimento implicam que

$$\Sigma^2 = c \frac{te}{\dots} , \quad (3.3-6)$$

o que significa que  $\Sigma^2 = c \frac{te}{\dots}$  é uma integral primeira das equações (3.3-3). Quando a constante na expressão acima é diferente de zero, as equações de movimento (3.3-4a) implicam nas equações de movimento obtidas da ação de Nambu, e as condições de bordo se reduzem às condições usuais.

No entanto, temos agora uma nova possibilidade,

$$\Sigma^2 = 0 . \quad (3.3-7)$$

Strings cuja superfície de evolução satisfazem à esta condição serão denominados de strings nulos. Observe que neste caso as condições de bordo são bastante simples. Da análise que fizemos na seção 1.3, tem-se que

$$\Sigma^2 = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}^2 = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi ,$$

sem problemas adicionais já que  $\Sigma^2 = 0$  também no interior da superfície de evolução. A única novidade que ocorre no caso que estamos considerando é que as linhas  $\sigma = 0$  e  $\sigma = \pi$  não são apenas nulas, mas geodésicas nulas como mostraremos mais adiante.

Passemos agora à caracterização geométrica dos strings nulos. Uma subvariedade do espaço-tempo é denominada de uma subvariedade nula se, em cada um dos seus pontos, ela é tangente ao cone de luz com vértice naquele ponto. Equivalente-mente, uma subvariedade nula é caracterizada pela propriedade que, em cada um dos seus pontos, o espaço tangente contém exatamente uma direção nula,  $N = \{N^\mu\}$ ,  $N^2 = 0$ , e direções tipo espaço independentes  $S_\mu$ ,  $S^2 < 0$ , ortogonais a  $N$ ,  $N_\mu S^\mu = 0$ . Então, qualquer outra direção tangencial que não seja  $N$  é tipo espaço e ortogonal a  $N$ . Estas direções são da forma

$$\sum_i a_i \overset{(i)}{S}_\mu + N_\mu \quad ,$$

onde pelo menos algum dos coeficientes  $a_i$  é diferente de zero. Assim, uma subvariedade nula determina uma única congruência de curvas nulas, aquela que tem as direções nulas  $N$  como tangentes. Se estas curvas forem geodésicas, a subvariedade é denominada de uma subvariedade geodésica nula. Vamos demonstrar que a superfície de evolução de um string nulo é uma superfície geodésica nula. (Note que não é verdade que qualquer superfície bidimensional nula no espaço-tempo é geodésica).

Consideremos a história (superfície de evolução) de um string nulo. Podemos escrever

$$\Sigma_{\mu\nu} = S_\nu N_\mu - N_\nu S_\mu \quad (3.3-8)$$

com

$$S^2 < 0 \quad , \quad N^2 = 0 \quad , \quad S \cdot N = 0 \quad , \quad \Sigma_{\mu\nu} N^\nu = 0 \quad . \quad (3.3-9)$$

Qualquer outro vetor  $S'^\mu$  tangente à superfície de evolução tem

a forma

$$S'^{\mu} = \alpha S^{\mu} + \beta N^{\mu} \quad (3.3-10)$$

com  $\alpha$  necessariamente diferente de zero.  $S'$  é um vetor tipo espaço,  $S'^2 = \alpha^2 S^2 < 0$ , e é ortogonal a  $N$ ,  $S' \cdot N = 0$ . O vetor  $\Sigma_{\mu\nu} S'^{\nu} = -\alpha^2 S^2 N_{\nu}$  é nulo e diferente de zero.

Suponhamos que  $y^{\mu} = y^{\mu}(\xi)$  são as equações paramétricas da superfície de evolução, com  $\xi^a$  parâmetros afim.  $\dot{y}$  e  $y'$  são independentes e pelo menos um destes vetores é tipo espaço,  $y'^2 < 0$ , equação (1.1-2b). Definamos uma família uni-paramétrica de curvas nulas sobre a superfície de evolução por  $\phi(\tau, \sigma) = c \frac{te}{\sigma}$ , com  $\partial\phi/\partial\sigma \neq 0$ . O campo de vetores tangentes nulos será definido por

$$\Sigma_{\nu}^{\mu} y'^{\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} N^{\mu} \quad (3.3-11)$$

Ao longo de cada curva nula sobre a superfície de evolução definamos o parâmetro  $\lambda$  por

$$\frac{dy^{\mu}}{d\lambda} = N^{\mu} \quad (3.3-12)$$

Tem-se que

$$\frac{dy^{\mu}}{d\lambda} = \frac{d\tau}{d\lambda} \dot{y}^{\mu} + \frac{d\sigma}{d\lambda} y'^{\mu} = \quad (3.3-13)$$

$$= \frac{1}{\phi^{\tau}} [(\dot{y} \cdot y') y'^{\mu} - y'^2 y^{\mu}] \quad , \quad (3.3-14)$$

onde usamos (3.3-11). De (3.3-13,14) obtem-se

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = -\frac{1}{\dot{\phi}} \dot{y}^{\tau 2} \neq 0. \quad (3.3-15)$$

Por outro lado,

$$0 = \Sigma^{\mu}_{\nu} \frac{dy^{\nu}}{d\lambda} = (\Sigma^{\mu}_{\nu} \dot{y}^{\nu}) \frac{d\sigma}{d\lambda} + (\dot{\Sigma}^{\mu}_{\nu} \dot{y}^{\nu}) \frac{d\tau}{d\lambda}$$

e

$$0 = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \frac{d\tau}{d\lambda} + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \frac{d\sigma}{d\lambda},$$

donde segue que,

$$\Sigma^{\mu}_{\nu} \dot{y}^{\nu} = \dot{\phi} N^{\mu}. \quad (3.3-16)$$

Logo, podemos escrever

$$\Sigma^{\mu}_{\nu} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial \xi^a} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^a} N^{\mu}. \quad (3.3-17)$$

Substituindo este resultado nas equações de movimento (3.3-3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^a} (\epsilon^{ab} \Sigma^{\mu}_{\nu} \partial_a y^{\nu}) &= \frac{\partial}{\partial \xi^a} (\epsilon^{ab} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^b} N^{\mu}) = \epsilon^{ab} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^b} \frac{\partial N^{\mu}}{\partial \xi^a} = \\ &= -\frac{\partial N^{\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + \frac{\partial N^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \left(\frac{d\sigma}{d\phi}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial N^{\mu}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\lambda} + \frac{\partial N^{\mu}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\lambda}\right) = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^{-1} \frac{dN^{\mu}}{d\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Conclui-se então que

$$\frac{dN^{\mu}}{d\lambda} = 0, \quad (3.3-18)$$

e portanto as curvas nulas são geodésicas,  $\lambda$  é um parâmetro

afim ao longo de cada geodésica e a história do string nulo é uma superfície geodésica nula.

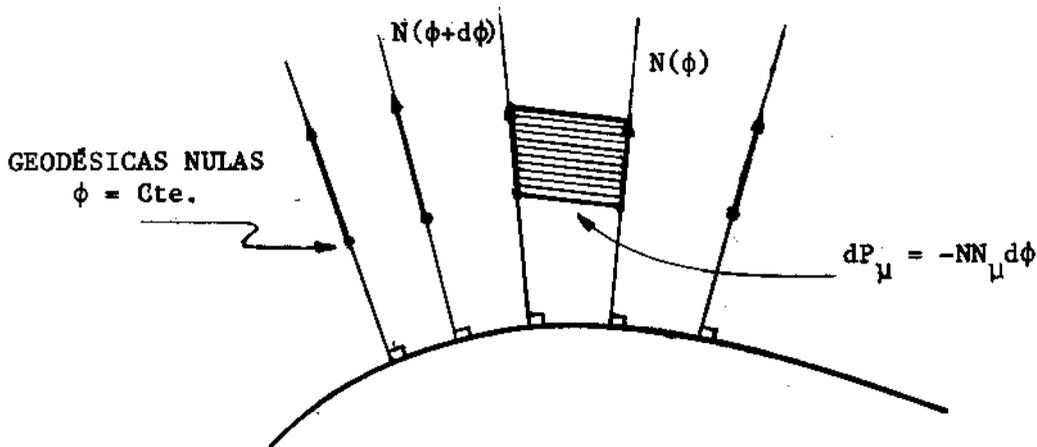
Para um string nulo o momento total

$$P_{\mu} = \int_C \mathcal{P}_{\mu} d\sigma = -N \int_C \Sigma_{\mu\nu} dy^{\nu} \quad (3.3-19)$$

é também conservado. Esta lei de conservação é mais forte que a lei de conservação do string de Nambu no sentido de que induz à conservação do elemento de momento entre duas geodésicas nulas vizinhas. Isto se vê de (3.3-19) usando (3.3-17):

$$dP_{\mu} = -N \Sigma_{\mu\nu} dy^{\nu} = -N \Sigma_{\mu\nu} \partial_a y^{\nu} d\xi^a = -N N_{\mu} d\phi \quad (3.3-20)$$

Este fato pode ser compreendido geometricamente observando-se que um pedaço infinitesimal de uma bisuperfície geodésica nula limitada por duas geodésicas nulas pode ser tratado como a história de um string nulo aberto com as condições de borda satisfeitas nos seus extremos (ver figura abaixo).

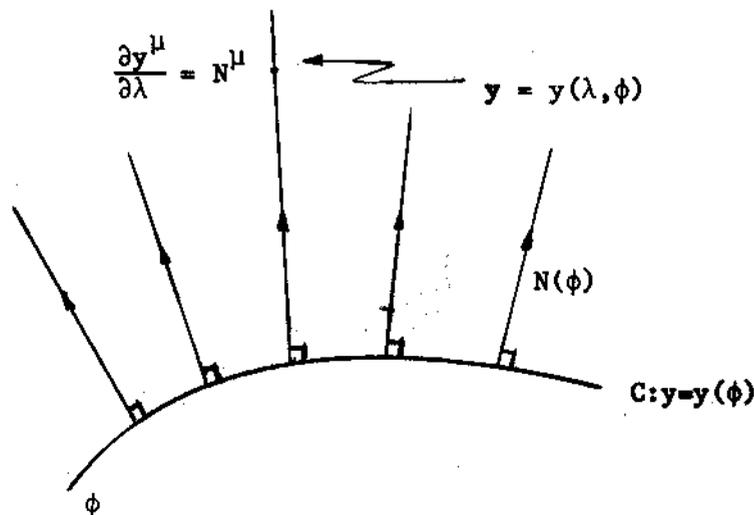


A construção de um string nulo pode ser feita da seguinte maneira. Escolhe-se uma curva  $C$  com parâmetro  $\phi$ ,  $y = y(\phi)$ , e ao longo desta curva escolhe-se um campo de vetores nulos  $N_\mu(\phi)$ , ortogonal a  $C$ , tal que  $N^2 = 0$  e  $N_\mu \frac{dy^\mu}{d\phi} = 0$ . Constrói-se as geodésicas nulas com  $N_\mu$  como vetores tangentes, e ao longo de cada uma escolhe-se um parâmetro afim  $\lambda$ , que é zero sobre  $C$  e tal que  $N^\mu = \partial y^\mu / \partial \lambda$  sobre  $C$ . Assim, os pontos das geodésicas nulas são dados por  $y = y(\lambda, \phi)$  e tem-se que

$$\dot{y}^2 = 0 \quad , \quad \dot{y} \cdot y' = 0 \quad , \quad \ddot{y} = 0 \quad (3.3_{-}21a)$$

$$\dot{y}^\mu = N^\mu \quad , \quad dP_\mu = -N N_\mu d\phi \quad . \quad (3.3_{-}21b)$$

Esta construção está esquematizada na figura abaixo.



Resta demonstrar que pode-se encontrar os parâmetros afim  $\xi^a$  tais que as equações de movimento (3.3\_3) são satisfeitas e  $dP_\mu$  fica dado por (3.3\_20). Isto se faz escolhendo-se

$$\sigma = \phi$$

$$\tau = \int_0^\lambda (-y'^2) d\lambda \quad , \quad (3.3-22)$$

onde a integração é ao longo de uma geodésica nula  $\sigma = \phi = c \frac{te}{c}$ . Para um string nulo com uma dada distribuição de momento estes parâmetros são únicos a menos de transformações com jacobiano  $J = 1$ .

O modelo de Schild pode ser generalizado sem dificuldades para um espaço-tempo curvo com métrica  $g_{\mu\nu}(y)$ . Neste caso a lagrangiana se escreve

$$\mathcal{L} = -\frac{N}{2} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma^{\alpha\beta} \quad , \quad (3.3-23)$$

e as equações de Euler-Lagrange são as generalizações covariantes das equações (3.3-3):

$$\frac{D}{D\xi^a} (-\varepsilon^{ab} \Sigma_{\mu\nu} \partial_b Y^\nu) = 0 \quad . \quad (3.3-24)$$

Nesta equação  $D/D\xi^a$  é a derivada covariante ao longo da curva parametrizada por  $\xi^a$ ,

$$\frac{D}{D\xi^a} = \partial_a Y^\mu \nabla_\mu \quad . \quad (3.3-25)$$

### 3.3.2 A lagrangiana de Zheltukhin

A teoria do string tem a peculiaridade de partir de diversos aspectos da teoria da relatividade geral e

da teoria eletromagnética, como consequência das características geométricas comuns a estas teorias. As semelhanças com a teoria do campo eletromagnético ficam claras quando as duas teorias são formuladas em termos de bivectores, como faremos mais adiante. Teremos a oportunidade de mostrar que em certas situações o campo de Maxwell pode ser simulado por strings e, mais ainda, que a teoria do string tem uma profunda relação com a teoria eletromagnética de Born-Infeld. Ainda com relação ao campo eletromagnético, os aspectos comuns às duas teorias não ficam só no nível clássico, a quantização canônica do string seguindo muito de perto o formalismo da quantização do campo eletromagnético.

Com relação à teoria da relatividade geral, as semelhanças com a teoria do string são óbvias da própria estrutura geométrica de ambas e se manifestam, de maneira particularmente clara, nas formulações canônicas das duas teorias. Apesar disto, até hoje não se demonstrou a existência de uma relação entre a física das duas teorias. Sendo teorias de caráter essencialmente geométrico, uma tentativa de se estabelecer um vínculo entre elas é, por exemplo, tentar descrever o string por uma lagrangiana do mesmo tipo da lagrangiana de Einstein, isto é,

$$\mathcal{S} = \frac{c}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{-g} R \quad , \quad (3.3-26)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura da superfície de evolução<sup>(\*)</sup>.

---

(\*) Note que é também possível fazer o procedimento inverso e tentar construir uma "teoria da relatividade geral à la string". Até o presente nada de fundamental foi obtido neste sentido.

Em princípio, esta é uma boa escolha de uma integral de ação para o string pelo menos sob o ponto de vista geométrico, porque a integral (3.3-26) é um invariante topológico da superfície.

Como queremos continuar a descrever o string pelas coordenadas  $y^\mu(\xi)$  da superfície de evolução, a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{-g} R \quad (3.3-27)$$

é, aparentemente, muito complicada para este objetivo. Além de ser altamente não-linear, esta lagrangiana contém as derivadas segundas do tensor métrico que, por sua vez, é construído com as derivadas primeiras dos campos  $y^\mu(\xi)$  com relação aos parâmetros. Mas, na verdade, esta complicação é só aparente, pois a lagrangiana (3.3-27) se reduz a uma divergência. Isto se demonstra por um cálculo direto usando a definição (1.10-32) do tensor de Riemann-Christoffel. Tem-se que

$$\begin{aligned} R &= g^{ab} R_{ab} = g^{ab} (\partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c) = \\ &= \partial_c (g^{ab} \Gamma_{ab}^c - g^{ac} \Gamma_{ab}^b) + g^{ab} (\Gamma_{bd}^c \Gamma_{ac}^d - \Gamma_{bd}^d \Gamma_{ac}^c) \quad , \end{aligned}$$

onde usamos que  $\nabla_a g^{cd} = 0$ . Usando um sistema de coordenadas ortogonal,  $g_{12} = g_{21} = 0$ , e que

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} \quad , \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \quad ,$$

$$g^{ab} \Gamma_{ab}^c = g^{ab} \partial_a \ln \sqrt{-g} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} g^{ac}) \quad ,$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 R &= -2 \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \sqrt{-g} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln \sqrt{-g} \right) \right. \\
 &\quad - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{1}{g_{11}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \left( \frac{1}{g_{22}} \right) - \frac{1}{2g^2} \left\{ g_{22} (g_{11}^{\prime 2} + \dot{g}_{11} \dot{g}_{22}) \right. \\
 &\quad \left. \left. + g_{11} (\dot{g}_{22}^2 + g_{11}^{\prime} g_{22}^{\prime}) \right\} \right] = \\
 &= -\dot{g}_{22} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{g} \right) - g_{11}^{\prime} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{g} \right) - \frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_{11}^{\prime} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{g} \right) + \frac{1}{2} \dot{g}_{22} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{g} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \sigma} \right) \right] .
 \end{aligned}$$

Logo,

$$R \sqrt{-g} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^a} v^a \quad (3.3-28)$$

com

$$v^a = \left( \frac{\dot{g}_{22}}{\sqrt{-g}}, \frac{g_{11}^{\prime}}{\sqrt{-g}} \right) .$$

A extremização da integral de ação (3.3-26) não conduz, portanto, à uma dinâmica para o string mas só a condições de bordo. Por esta razão Zheltukhin propôs a seguinte integral de ação para o string:

$$S = -N \int d^2 \xi \sqrt{-g} + \frac{c}{2\pi} \int d^2 \xi \sqrt{-g} R , \quad (3.3-29)$$

que não modifica as equações dinâmicas do string mas modifica as condições de bordo tornando-as não singulares.

No gauge ortonormal com

$$\dot{y} \cdot y' = 0 \quad , \quad \dot{y}^2 = -y'^2 = A(\tau, \sigma) \quad (3.3-30)$$

obtêm-se as equações de movimento

$$\ddot{y}^\mu - y''^\mu = 0 \quad , \quad (3.3-31)$$

e as condições

$$\left[ \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{2}{A} \dot{y}' + \frac{\dot{A}}{A^2} \dot{y} + \frac{\dot{A}}{A^2} y' \right) - 2\pi N y' \right]_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad , \quad (3.3-32a)$$

$$c \left[ -\ddot{y} + \frac{\dot{A}}{2A} \dot{y} + \frac{\dot{A}}{2A} y' \right]_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad , \quad (3.3-32b)$$

$$c \left[ -y'' + \frac{\dot{A}}{2A} \dot{y} + \frac{\dot{A}}{2A} y' \right]_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad . \quad (3.3-32c)$$

Vê-se que a ação modificada não leva a um problema mais simples que o da ação de Nambu, pois as condições de bordo (3.3-32, a, b, c) são bastante complicadas. A melhor maneira de estudar este problema é usar a abordagem geométrica por - que nesta abordagem as condições de bordo (não-lineares) são automaticamente levadas em conta, embora as equações dinâmicas permaneçam não-lineares.

Para termos uma idéia do que pode ser obtido desta teoria, consideremos um espaço-tempo com 3 dimensões. Neste

caso as condições (3.3\_32), no gauge ortonormal, se reduzem a

$$\dot{y}^2 = -y'^2 = 3N\pi c \quad , \quad \sigma = 0, \pi \quad , \quad (3.3_33)$$

onde

$$c = - \frac{1}{4N\pi R} \Big|_{\sigma=0, \pi} \quad , \quad (3.3_34)$$

com a condição adicional

$$\ddot{y} \cdot (\dot{y} \times y') = 0 \quad . \quad (3.3_35)$$

Como no caso geral ( $d \neq 3$ ) a teoria de Nambu é obtida no limite  $c = 0$ . Mas de (3.3\_33) vê-se que  $c = 0$  é um ponto de ramificação tipo raiz quadrada para  $y^2 = 2N\pi c$ , de modo que se faz necessário um procedimento apropriado para se passar ao limite. Sob o ponto de vista físico, para  $c \geq 0$  a primeira folha da superfície de Riemann da função  $\dot{y}^2(c)$  corresponde ao movimento dos pontos extremos com velocidade menor que a da luz, e a segunda corresponde ao movimento com velocidade maior que a da luz. A primeira situação é equivalente a uma descrição do string com massas nos extremos, enquanto que a segunda corresponde a tachyons.

Com relação à primeira situação mencionada acima, pode-se elaborar um pouco diretamente na integral de ação (3.3\_26). De fato, usando o teorema de Gauss-Bonnet a integral pode ser transformada em

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau k_G(\tau, \sigma_1) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau k_G(\tau, \sigma_2) \quad (3.3-36)$$

onde  $k_G(\tau, \sigma_i)$  é a curvatura geodésica das linhas  $\sigma_i = c \frac{te}{c}$ . As integrais acima podem ser multiplicadas por constantes, e identificadas com integrais de ação para massas nos extremos do string. Como condições de bordo, as integrais (3.3-36) não representam nenhuma melhoria em simplicidade com relação às anteriores. Mas, sob o ponto de vista físico são bastante interessantes porque o princípio variacional conduz à minimalidade da curvatura geodésica dos bordos da superfície de evolução e não à minimalidade do seu comprimento.

### 3.3.3 A lagrangiana de Polyakov

Consideremos uma superfície  $\Sigma$ , bidimensional, com uma métrica interna  $g^{ab} = g^{ab}(y)$ . Supondo que  $\Sigma$  é a superfície de evolução de um string, podemos escrever a seguinte integral de ação

$$S = - \frac{N}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{ab} h_{ab} \quad (3.3-37)$$

onde  $h_{ab}$  é um campo auxiliar. Esta integral de ação deve ser minimizada com relação a  $y^\mu$  e  $g^{ab}$  independentemente. Observe que  $S$  é invariante por reparametrizações arbitrárias que, sob forma infinitesimal, se escrevem

$$\delta \xi^a = \epsilon^a(\xi) \quad , \quad \delta y^\mu = \epsilon^a(\xi) \partial_a y^\mu \quad , \quad \delta g^{ab} = \nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a \quad (3.3-38)$$

(ver equação (0.5-18)), e também por transformações de Weyl

$$g_{ab} + \bar{g}_{ab} = \phi(\xi) g_{ab} \quad (3.3-39)$$

O princípio da ação conduz a

$$\frac{\delta S}{\delta y^\mu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b y^\mu) = 0 \quad (3.3-40)$$

+ (condições de bordo) ,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = 0 \quad \longrightarrow \quad T_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd} = 0 \quad (3.3-41)$$

Desta última equação segue que  $h_{ab}$  é proporcional a  $g_{ab}$ ; com este resultado as equações (3.3-40) se tornam as equações da superfície mínima. Assim,  $g^{ab}$  é proporcional à métrica induzida no mínimo da ação.

A ação (3.3-37) pode ser acrescida de um termo invariante paramétrico,

$$\lambda^2 \int d^2 \xi \sqrt{-g} \quad , \quad \lambda = c \frac{te}{\quad} \quad (3.3-42)$$

Na nomenclatura usual (3.3-42) é denominado de "termo cosmológico". É trivial de verificar que  $\lambda^2 = 0$  para que se tenha as equações de movimento corretas. Isto segue diretamente da equação correspondente a (3.3-41):

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = 0 \quad \longrightarrow \quad T_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} (\lambda^2 + g^{cd} h_{cd}) = 0 \quad (3.3-43)$$

donde segue que

$$0 = T^a_a = g^{ac} T_{ac} = \lambda^2 \quad .$$

A métrica  $g_{ab}$  sobre  $\Sigma$  pode sempre ser transformada na métrica conforme

$$g_{ab} = \lambda(\xi) \eta_{ab} \quad (3.3-44)$$

como vimos no Cap. 1 . A função  $\lambda(\xi)$  nesta expressão é estritamente positiva no domínio dos parâmetros, caso contrário poderia ocorrer uma mudança na assinatura da métrica, o que não é permitido. Vimos também que a escolha do gauge ortonormal, que conduz à forma (3.3-44) para a métrica, não fixa o gauge completamente (cf. seções 1.11, 12, 13) permanecendo uma liberdade de gauge residual.

As equações que determinam esta liberdade de gauge podem ser determinadas da seguinte maneira. Das equações (3.3-38) e (3.3-39) segue que a variação mais geral de  $g_{ab}$  pode ser escrita como

$$\delta g_{ab} = \delta\phi g_{ab} + \nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a \quad , \quad (3.3-45)$$

onde o primeiro termo corresponde a uma transformação de Weyl infinitesimal e os outros dois a transformações infinitesimais das coordenadas internas. Note que a transformação acima tem três parâmetros independentes, o que está em acordo com o fato de  $g_{ab}$  ter três componentes independentes no caso geral. As transformações do tipo (3.3-45) que mantêm a forma da métrica (3.3-44) invariante são definidas por  $\delta g_{ab} = 0$ , isto é,

$$\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a + \delta\phi g_{ab} = 0 \quad (3.3-46)$$

Os vetores  $\epsilon_a(\xi)$  que satisfazem a estas equações são denominados de "vetores de Killing conformes". Da equação (3.3-46) obtém-se

$$\delta\phi = -\nabla_c \epsilon^c, \quad (3.3-47)$$

de modo que o campo vetorial que determina a liberdade de gauge residual fica determinado pelas equações

$$\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a - (\nabla_c \epsilon^c) g_{ab} = 0, \quad (3.3-48)$$

com  $g_{ab}$  dado por (3.3-44).

A lagrangiana de Polyakov é formalmente semelhante à lagrangiana que aparece no integrando da ação (3.3-37) e se escreve

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{N}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a y^\mu \partial_b y_\mu, \quad (3.3-49)$$

e a integral de ação

$$S = -\frac{N}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a y^\mu \partial_b y_\mu \quad (3.3-50)$$

deve ser minimizada com relação a  $y^\mu(\xi)$  e  $g^{ab}$  independente - mente. As variações com relação a  $y^\mu$  conduzem às equações de movimento e condições de bordo (3.3-40), enquanto que com relação à  $g^{ab}$  resultam em

$$T_{ab} = \partial_a y^\mu \partial_b y_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c y^\mu \partial_d y_\mu = 0 \quad (3.3-51)$$

Desta equação obtém-se

$$g_{ab} = \partial_a y^\mu \partial_b y_\mu \quad , \quad (3.3-52)$$

de modo que, no mínimo da ação, a métrica intrínseca  $g_{ab}$  coincide com a métrica induzida na superfície de evolução.

Observe que o papel do multiplicador de Lagrange  $g^{ab}$  ( $h_{ab}$  no caso da ação (3.3-37)) é forçar que o tensor  $T_{ab}$  seja nulo. Por outro lado, o traço de  $T_{ab}$  é identicamente nulo, independentemente das equações de movimento, como consequência da invariância da ação por transformações de Weyl, equações (3.3-39). Como consequência desta simetria a métrica é determinada pelas equações de movimento a menos de um fator conforme, como já vimos.

Os resultados acima foram obtidos por Polyakov nos seus trabalhos sobre a teoria quântica dos strings através da anomalia conforme do traço. A forma (3.3-50) da integral de ação é particularmente apropriada para a quantização por integrais de trajetória, e dos resultados de Polyakov segue a possibilidade da quantização em espaços-tempos de qualquer dimensão.

Consideremos as equações da teoria de Polyakov:

$$\partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b y^\mu) = 0 \quad , \quad (3.3-53)$$

$$\partial_a y^\mu \partial_b y_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c y^\mu \partial_d y_\mu = 0 \quad . \quad (3.3-54)$$

No gauge ortonormal com a métrica dada por

$$g_{ab} = \lambda(\xi) \eta_{ab} \quad (3.3_{55})$$

estas equações se reduzem a

$$\ddot{y}^\mu - \dot{y}^\mu = 0 \quad , \quad \dot{y} \cdot \dot{y}' = 0 \quad , \quad \dot{y}^2 + \dot{y}'^2 = 0 \quad ,$$

como era de se esperar. O que se observa é que o fator conforme não aparece nestas equações (como consequência da invariância conforme (3.3\_39)). No entanto, para um espaço-tempo com dimensão  $d \neq 26$  verifica-se que um grau de liberdade escalar adicional se acopla ao string (quântico). Este campo escalar é dado por

$$\phi = \ln \lambda \quad . \quad (3.3_{56})$$

A lagrangiana e a correspondente equação de movimento se escrevem

$$\mathcal{L}_L = -\frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi + \mu^2 e^\phi \quad , \quad (3.3_{57})$$

$$\square \phi = -\mu^2 e^\phi \quad . \quad (3.3_{58})$$

Esta equação é denominada de equação de Liouville.

A maneira como Polyakov introduziu o campo de Liouville na teoria (através da anomalia do traço na quantização via integrais de trajetória) é um tanto artificial sob o ponto de vista clássico. Vamos mostrar que isto pode ser feito a partir da seguinte lagrangiana modificada para o string:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + C \mathcal{L}_1, \quad (3.3.59)$$

onde  $\mathcal{L}_S$  é a lagrangiana de Polyakov (com  $N = 1$ ) e

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \sqrt{-g} R \phi + \mu^2 \sqrt{-g}. \quad (3.3.60)$$

Na expressão (3.3.59)  $C$  é uma constante cujo valor

$$C = \frac{26-d}{48\pi} \quad (3.3.61)$$

resulta da imposição de invariância relativística da teoria.

Impondo que a métrica  $g^{ab}$  é dada pela equação (3.3.55) e o campo de Liouville por (3.3.56), a lagrangiana (3.3.59) se reduz a

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S - C \mathcal{L}_L \quad (3.3.62)$$

com

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_a y^\mu \partial_b y_\mu, \quad (3.3.63)$$

$$\mathcal{L}_L = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - \mu^2 e^\phi. \quad (3.3.64)$$

A teoria modificada do string fica dada pelas lagrangianas acima e as equações de vínculo

$$T_{ab} \equiv T_{ab}^S - C T_{ab}^L = 0, \quad (3.3.65)$$

onde

$$T_{ab}^S = \partial_a y^\mu \partial_b y_\mu - \eta_{ab} \mathcal{L}_S, \quad (3.3.66)$$

e

$$T_{ab}^L = \partial_a \phi \partial_b \phi - \eta_{ab} \frac{1}{2} L - 2(\partial_a \partial_b - \eta_{ab} \square) \phi \quad (3.3-67)$$

é o tensor momento anergia (conformalmente aumentado) da teoria de Liouville. Note que o traço de  $T_{ab}$  é nulo como consequência das equações de movimento, de modo que (3.3-65) representa apenas dois vínculos (como era de se esperar em virtude da invariância por reparametrizações). As equações de movimento (3.3-57,58) seguem diretamente do princípio variacional aplicado à integral de ação construída com a lagrangiana (3.3-62). (Note que o princípio variacional conduz à equação

$$\partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b \phi) = \sqrt{-g} R .$$

Usando (3.3-65) e as equações de movimento para os campos  $y^\mu(\xi)$  encontra-se que  $R = -\mu^2 = c \frac{te}{\mu^2}$ , de modo que a superfície de evolução  $\Sigma$  deve ser uma superfície de curvatura constante negativa.)

A solução geral da equação (3.3-58) já era conhecida por Liouville em 1853 e se escreve (\*)

$$\phi = \ln \left[ \frac{8}{\mu^2} \frac{f'(\zeta)g'(\eta)}{(f(\zeta)-g(\eta))^2} \right] , \quad (3.3-68)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias, (') significa derivada com relação ao argumento, e

$$\zeta = \tau + \sigma , \quad \eta = \tau - \sigma . \quad (3.3-69)$$

(\*) Não vamos tratar das condições de contorno que devem ser impostas sobre o campo  $\phi$ . Isto será feito na seção seguinte.

Para as coordenadas  $y^\mu$  resulta

$$\dot{y}^\mu + y'^\mu = f^\mu(\zeta) \quad , \quad \dot{y}^\mu - y'^\mu = g^\mu(\eta) \quad . \quad (3.3_{70})$$

É importante observar que para um dado  $\phi$ , as funções  $f$  e  $g$  não são únicas. A equação (3.3\_68) fica invariante se  $f$  e  $g$  forem submetidas a uma mesma transformação de Möbius, independente de  $\zeta$  e  $\eta$ ,

$$f \rightarrow \frac{Af+B}{Cf+D} \quad , \quad g \rightarrow \frac{Ag+B}{Cg+D} \quad , \quad (3.3_{71})$$

onde  $A, B, C, D$  são constantes satisfazendo a  $AD-BC=1$ . Este resultado foi obtido por Bianchi.

As funções  $f(\zeta)$  e  $g(\eta)$  representam ondas sem massa que se propagam para a esquerda e para a direita, e que se acoplam ao string via o campo de Liouville. Quando  $D = 26$  o campo não representa um grau de liberdade dinâmico. Na "região física"  $2 \leq D < 26$ , o string adquire modos longitudinais que se acoplam os graus de liberdade do campo de Liouville.

Sob o ponto de vista clássico as ações de Nambu e Polyakov são equivalentes. Aparentemente esta última introduz novas variáveis dinâmicas  $g^{ab}$  na teoria mas, como vimos, estas variáveis desaparecem e reobtem-se a ação de Nambu. Para quantização a ação de Polyakov tem a vantagem de ser uma forma bilinear em  $\partial y$ , e os métodos usuais de regularização podem ser aplicados. Como demonstrou Polyakov, isto torna a métrica uma variável dinâmica (via o campo de Liouville), e as flutuações quânticas da superfície bidimensional em torno de uma métrica de fundo são incorporadas na teoria. É este aspec

to da formulação de Polyakov que conduz à solução do problema da dimensão crítica dos antigos modelos duais. O modelo que consideramos, modelo bosônico, se reduz ao modelo de Nambu quando  $D = 26$  (. . .  $c = 0$ ). A extensão super-simétrica, modelo fermiônico, se reduz ao modelo de Neveu-Ramond-Schwartz quando  $D = 10$ . (No caso supersimétrico tem-se que  $c = (10-D)/8\pi$ ).

### 3.4 Uma introdução à teoria do campo de Liouville

A lagrangiana e a equação de movimento do campo de Liouville  $\phi(\xi)$  se escrevem

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - \mu^2 e^\phi \quad , \quad (3.4.1)$$

$$\square \phi + \mu^2 e^\phi = 0 \quad . \quad (3.4.2)$$

Usando unidades nas quais  $c = 1$ , a integral de ação e  $\phi$  são adimensionais.  $\mu^2$  é uma constante com dimensão de (massa)<sup>2</sup> e  $\mu^2 > 0$  para que se tenha a densidade de energia positiva definida:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + \mu^2 e^\phi \geq 0 \quad . \quad (3.4.3)$$

Como uma teoria de campo, o modelo de Liouville tem a peculiaridade de ser um sistema integrável como consequência das suas simetrias: a teoria é invariante por transformações que não misturam as coordenadas  $\xi^+ = \sigma + \tau$ ,  $\xi^- = \sigma - \tau$ . De fato, a solução geral da equação (3.4.2) foi construída por

Liouville, como mencionamos na seção anterior, e tem a forma

$$\phi = \ln \left\{ \frac{8}{\mu^2} \frac{A'(\xi^+)B'(\xi^-)}{[A(\xi^+) - B(\xi^-)]^2} \right\} \quad , \quad (3.4-4)$$

onde  $A(\xi^+)$  e  $B(\xi^-)$  são duas funções arbitrárias.

No caso específico da teoria do string as funções  $A$  e  $B$  devem ser periódicas com período  $2\pi$  no caso de strings fechados; no caso de strings abertos  $A$  é periódica com período  $2\pi$  e  $B(\sigma)$  se relaciona com  $A(2\pi - \sigma)$  por uma transformação de Möbius fixa. Ainda neste caso, o campo  $\phi$  deve satisfazer às condições de bordo

$$\phi' = -\rho \sqrt{2} e^{\phi/2} \quad \text{em} \quad \sigma = 0 \quad ,$$

$$\phi' = \rho \sqrt{2} e^{\phi/2} \quad \text{em} \quad \sigma = \pi \quad .$$

As demonstrações do que foi dito acima são matematicamente complicadas e não as faremos.

Observemos que a teoria de Liouville tem um significado geométrico importante. De fato, se a métrica da superfície bidimensional tem a forma  $g_{ab} = e^{\phi} \eta_{ab}$  então o escalar de curvatura fica dado por  $R = e^{-\phi} \square \phi$ . Consequentemente, quando  $\phi$  satisfaz à equação de movimento (3.4-2) a curvatura da superfície é constante.

Passemos à análise da estrutura conforme da teoria. Consideremos transformações infinitesimais das coordenadas in ternas

$$\xi^a \rightarrow \xi^a + \delta_f \xi^a = \xi^a + f^a(\xi) \quad , \quad (3.4-5)$$

onde  $f^a(\xi)$  é um campo de vetores de Killing conformes (ver equações (3.3-48)),

$$\partial_a f_b + \partial_b f_a - g_{ab} (\partial_c f^c) = 0 \quad (3.4-6)$$

A lei de composição das transformações (3.4-5) pode ser obtida facilmente:

$$[\delta_f, \delta_g]F = [f^a \partial_a, g^b \partial_b]F = (f^a \partial_a g^b - g^a \partial_a f^b) \partial_b F$$

donde

$$[\delta_f, \delta_g] = \delta_h \quad (3.4-7a)$$

$$h^b = f^a \partial_a g^b - g^a \partial_a f^b \quad (3.4-7b)$$

Consideremos primeiramente o "campo livre",

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi \quad (3.4-8)$$

Esta lagrangiana é invariante pelas transformações conformes infinitesimais das coordenadas se a transformação do campo  $\phi$  for dada pela sua derivada de Lie ao longo de  $f$ :

$$\delta_f \phi = \mathcal{L}_f \phi = f^a \partial_a \phi \quad (3.4-9)$$

Vamos introduzir o tensor momento energia simétrico:

$$\theta_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^c \phi \partial_c \phi \quad (3.4-10)$$

que tem traço nulo,

$$\theta^a_a = g^{ab} \theta_{ab} = 0 \quad , \quad (3.4_{-11})$$

e é conservado quando as equações de movimento são válidas:

$$\partial_a \theta^{ab} = (\square \phi) \partial^b \phi = 0 \quad . \quad (3.4_{-12})$$

As correntes conservadas são expressas em termos de  $\theta^{ab}$  por

$$j_f^a = \theta^{ab} f_b \quad , \quad \partial_a j_f^a = 0 \quad . \quad (3.4_{-13})$$

Em termos das coordenadas  $\xi^+$  e  $\xi^-$  a equação de ondas fica sob a forma

$$2\partial_+ \partial_- \phi = 0 \quad (3.4_{-14})$$

e suas soluções podem ser escritas como

$$\phi(\xi) = \phi^+(\xi) + \phi^-(\xi) \quad . \quad (3.4_{-15})$$

Usando esta decomposição pode-se verificar que

$$\theta_{--} = \theta_{--}(\xi^-) \quad , \quad \theta_{++} = \theta_{++}(\xi^+) \quad . \quad (3.4_{-16})$$

Além disto pode-se mostrar que qualquer solução da equação (3.4\_6) pode ser decomposta em componentes que dependem apenas de  $\xi^+$  e  $\xi^-$  respectivamente:

$$f_+ = f_+(\xi^+) \quad , \quad f_- = f_-(\xi^-) \quad . \quad (3.4-17)$$

Com estes resultados podemos construir dois conjuntos de (cargas) constantes do movimento:

$$Q_f^- = \int d\xi^- f^-(\xi^-) \theta_{--}(\xi^-) \quad , \quad (3.4-18a)$$

$$Q_f^+ = \int d\xi^+ f^+(\xi^+) \theta_{++}(\xi^+) \quad , \quad (3.4-18b)$$

$$Q_f = Q_f^+ + Q_f^- \quad . \quad (3.4-19)$$

Para construir o formalismo canônico em termo das variáveis  $\xi^+$  e  $\xi^-$ , vamos introduzir os colchetes de Poisson

$$\{\phi(\xi), \phi(\eta)\}_{\xi^+=\eta^+} = \frac{1}{4} \epsilon(\xi^- - \eta^-) \quad , \quad (3.4-20a)$$

$$\{\phi(\xi), \phi(\eta)\}_{\xi^-=\eta^-} = \frac{1}{4} \epsilon(\xi^+ - \eta^+) \quad , \quad (3.4-20b)$$

ou, equivalentemente,

$$\{\phi^-(\xi^-), \phi^-(\eta^-)\} = \frac{1}{4} \epsilon(\xi^- - \eta^-) \quad , \quad (3.4-21a)$$

$$\{\phi^+(\xi^+), \phi^+(\eta^+)\} = \frac{1}{4} \epsilon(\xi^+ - \eta^+) \quad , \quad (3.4-21b)$$

$$\{\phi^+, \phi^-\} = 0 \quad . \quad (3.4-21c)$$

Para duas funções quaisquer A, B das variáveis dinâmicas,

$$\{A, B\} = \frac{1}{4} \int d\xi d\xi' \epsilon(\xi - \xi') \left[ \frac{\delta A}{\delta \phi^+(\xi)} \frac{\delta B}{\delta \phi^+(\xi')} + \frac{\delta A}{\delta \phi^-(\xi)} \frac{\delta B}{\delta \phi^-(\xi')} \right] \quad . \quad (3.4-22)$$

Com estas definições a carga  $Q_f$  dada por (3.4-19) gera a transformação correta do campo  $\phi$ , equação (3.4-9),

$$\{Q_f, \phi\} = f^a \partial_a \phi \quad . \quad (3.4-23)$$

Supondo que as integrais de superfície se anulam, os colchetes de Poisson das cargas  $Q_f^+$  e  $Q_f^-$  reproduzem a lei de composição (3.4-7):

$$\{Q_f^\pm, Q_g^\pm\} = -Q_h^\pm \quad , \quad (3.4-24a)$$

$$\{Q_f^\pm, Q_g^\mp\} = 0 \quad . \quad (3.4-24b)$$

O campo  $\phi$  admite também a simetria (trivial):

$$\delta\phi = \Omega \quad , \quad \square \Omega = 0 \quad , \quad \Omega = \Omega^+(\xi^+) + \Omega^-(\xi^-) \quad . \quad (3.4-25)$$

Em particular, se  $\Omega = \partial_a f^a$ , tem-se que

$$\square \Omega = \square (\partial_a f^a) = 0 \quad (3.4-26)$$

como consequência das equações de Killing (3.4-6).

A corrente conservada associada com a simetria (3.4-25) é

$$J_\Omega^a = (\partial^a \phi) \Omega - \phi \partial^a \Omega \quad . \quad (3.4-27)$$

Do mesmo modo que no caso anterior, podemos construir duas cargas independentes:

-453-

$$q_{\Omega}^{+} = 2 \int d\xi^{+} \Omega^{+} \partial_{+} \phi^{+} \quad , \quad (3.4_{-}28a)$$

$$q_{\Omega}^{-} = 2 \int d\xi^{-} \Omega^{-} \partial_{-} \phi^{-} \quad , \quad (3.4_{-}28b)$$

$$q_{\Omega} = q_{\Omega}^{+} + q_{\Omega}^{-} \quad . \quad (3.4_{-}28c)$$

Vimos que a teoria do campo  $\phi$  admite duas simetrias independentes cujas cargas conservadas são dadas pelas equações (3.4\_{-}18) e (3.4\_{-}28). Estas simetrias podem ser combinadas definindo-se as cargas

$$\tilde{Q}_f = Q_f + \alpha q_{\Omega} \quad , \quad \Omega = \partial^a f_a \quad , \quad (3.4_{-}29)$$

$$(\alpha = \frac{te}{c}) \quad ,$$

que geram transformações não-homogêneas sobre  $\phi$  :

$$\{\tilde{Q}_f, \phi\} = f^a \partial_a \phi + \alpha \partial_a f^a \quad . \quad (3.4_{-}30)$$

A álgebra destas cargas não fecha,

$$\{\tilde{Q}_f, \tilde{Q}_g\} = -\tilde{Q}_h + \alpha^2 \Delta(f, g) \quad , \quad (3.4_{-}31)$$

onde

$$\Delta(f, g) = \int d\xi^{-} (f^{-} \partial^3 g^{-} - g^{-} \partial^3 f^{-}) + \int d\xi^{+} (f^{+} \partial^3 g^{+} - g^{+} \partial^3 f^{+}) \quad .$$

Mas, como  $\Delta(f, g)$  não dependem das variáveis dinâmicas a equação (3.4\_{-}30) pode ser adotada como uma realização das trans -

formações conformes do campo  $\phi$ .

Para as transformações combinadas às correntes conservadas são expressas por

$$J_f^a = \Xi^{ab} f_b, \quad (3.4.32)$$

onde

$$\begin{aligned} \Xi_{ab} &= \theta_{ab} + 2\alpha (g_{ab} \square - \partial_a \partial_b) \phi \\ &= \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial_c \phi \partial^c \phi - 2\alpha \partial_a \partial_b \phi \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

é o tensor momento energia conformalmente aumentado. Observe que o traço deste tensor é nulo quando  $\phi$  satisfaz à equação de movimento. As cargas conservadas neste caso são

$$\tilde{Q}_f^\pm = \int d\xi^\pm f^\pm(\xi^\pm) \left[ \partial_\pm \phi^\pm \partial_\pm \phi^\pm - 2\alpha \partial_\pm^2 \phi^\pm \right]. \quad (3.4.34)$$

Passemos agora ao caso geral da lagrangiana (3.4.1). A teoria neste caso também exhibe invariância conforme. Pela transformação infinitesimal

$$\delta\phi = f^a \partial_a \phi + \partial_a f^a \quad (3.4.35)$$

a lagrangiana (3.4.1) muda por uma derivada total. Estas transformações serão definidas como as transformações conformes do campo de Liouville. Observe que, em contraste com o caso anterior, para que se tenha uma simetria é preciso que se considere a transformação combinada (3.4.30) com  $\alpha = 1$ .

Como temos invariância conforme, é de se esperar que as correntes conservadas sejam expressas em termos de um tensor momento energia de traço nulo. De fato, com o tensor momento energia conformalmente aumentado dado por

$$\begin{aligned} \Xi_{ab} = & \partial_a \phi \partial_b \phi - g_{ab} \left( \frac{1}{2} \partial_c \phi \partial^c \phi - \mu^2 e^\phi \right) \\ & + 2(g_{ab} \square - \partial_a \partial_b) \phi \quad , \end{aligned} \quad (3.4_{-36})$$

$$\Xi^a_a = 2(\mu^2 e^\phi + \square \phi) = 0 \quad , \quad (3.4_{-37})$$

as correntes são expressas por

$$J_f^a = \Xi^{ab} f_b \quad . \quad (3.4_{-38})$$

Pode-se verificar que  $\Xi_{++}$  e  $\Xi_{--}$  dependem apenas de  $\xi^+$  e  $\xi^-$ , respectivamente, de modo que podemos construir dois conjuntos de cargas independentes,

$$Q_f^\pm = \int d\xi^\pm f^\pm(\xi^\pm) \Xi_{\pm\pm}(\xi^\pm) = \int d\xi^\pm f^\pm (\partial_\pm \phi \partial_\pm \phi - 2\partial_\pm^2 \phi) \quad . \quad (3.4_{-39})$$

Observe que estas expressões são formalmente idênticas às do caso livre. Mas, naquele caso,  $\phi$  depende  $\xi^+$  e  $\xi^-$  separadamente, enquanto que  $\phi = \phi(\xi^+, \xi^-)$ . No entanto, usando as equações de movimento, pode-se mostrar que  $\partial_\pm \phi \partial_\pm \phi - 2\partial_\pm^2 \phi$  depende apenas de  $\xi^\mp$ .

Postulando-se os colchetes de Poisson

$$\left\{ \phi(\xi), \phi(\eta) \right\}_{\xi^+ = \eta^+} = \frac{1}{4} \epsilon(\xi^- - \eta^-) \quad , \quad (3.4_{-40a})$$

$$\{\Phi(\xi), \Phi(\eta)\}_{\xi^{\pm}=\eta^{\pm}} = \frac{1}{4} \epsilon(\xi^+ - \eta^+) \quad , \quad (3.4_{-40b})$$

pode-se verificar que as transformações (3.4\_{-35}) são geradas pelas cargas

$$Q_f = Q_f^+ + Q_f^- \quad , \quad (3.4_{-41})$$

isto é,

$$\{Q_f, \Phi\} = f^a \partial_a \Phi + \partial_a f^a \quad . \quad (3.4_{-42})$$

Tem-se também que

$$\{Q_f, Q_g\} = -Q_h + \Delta(f, g) \quad , \quad (3.4_{-43})$$

do mesmo modo que no caso livre.

Mencionamos que a equação de Liouville (3.4\_{-2}) possui uma transformação de Bäcklund que relaciona suas soluções com as soluções do campo livre. Com

$$\partial_+ (\Phi - \phi) = \mu \alpha e^{\frac{1}{2}(\Phi + \phi)} \quad , \quad (3.4_{-44a})$$

$$\partial_- (\Phi + \phi) = -\mu \alpha e^{\frac{1}{2}(\Phi - \phi)} \quad , \quad (3.4_{-44b})$$

$\phi$  será uma solução de (3.4\_{-2}) se  $\square \phi = 0$ , com  $\alpha$  um parâmetro arbitrário. Observemos que esta não é a única transformação que relaciona os dois campos, existindo pelo menos uma outra transformação (canônica).

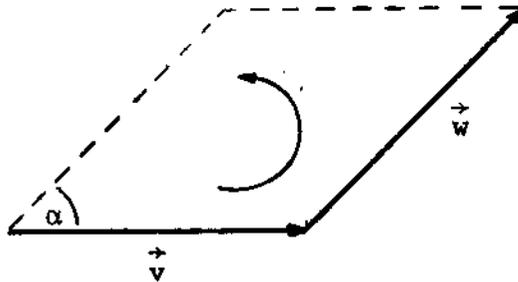
Apesar de haver sido introduzido na teoria clássica dos strings via os resultados obtidos por Polyakov na teoria quântica, o campo de Liouville é um objeto natural na formu-

lação geométrica da teoria do string. R. Omnes mostrou que a teoria geométrica do string num espaço-tempo tridimensional, se reduz à teoria de Liouville com o campo  $\Phi$  real; no espaço-tempo de Minkowski isto também ocorre, mas neste caso o campo  $\Phi$  é complexo.

### 3.5 Formulação da teoria em termos de bivectores

#### 3.5.1 Introdução à teoria dos bivectores

No espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  considere - mos dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e o segmento de plano por eles determinados, como na figura abaixo.



A este segmento de plano vamos associar as seguintes propriedades:

- 1) um módulo, dado pela área do paralelogramo determinado por  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ,  $|\vec{v}| |\vec{w}| \cdot \sin \alpha$  ;
- 2) uma direção, associada com o plano determinado pelo segmento;
- 3) uma orientação, definida pela circulação ao longo do contorno do segmento (identificada pela seta curva da figura).

Vamos agora definir uma operação sobre pares de vetores de tal modo que o resultado seja um objeto dotado das propriedades acima. Este objeto será denominado de um bivector, e denotaremos

$$\mathbb{B} = \vec{v} \odot \vec{w} \quad (3.5-1a)$$

onde  $\odot$  simboliza a operação de produto externo.

Quando as propriedades (1) e (2) são estabelecidas tem-se duas orientações possíveis para o bivector. Diz-se então que se dois bivectores diferem apenas pela orientação eles têm sinais opostos. Requeremos então que a operação de produtos externos seja anticomutativa,

$$\vec{v} \odot \vec{w} = -\vec{w} \odot \vec{v} \quad (3.5-2)$$

Observemos que a forma do segmento de plano que representa o bivector é irrelevante. Assim, a representação de um bivector pelo produto externo de dois vetores não é única. O segmento de plano não necessita ser um paralelogramo, podendo ser qualquer figura plana com uma orientação.

Bivectores podem ser somados e também multiplicados por escalares. Assim, o conjunto dos bivectores constitui um espaço vetorial  $\mathcal{B}$  sobre o corpo dos números reais. (É claro que isto pode ser estendido para o corpo dos números complexos). Se a dimensão do espaço vetorial dos vetores é  $n$ , pode-se construir  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$  bivectores linearmente independentes de modo que este número é a dimensão de  $\mathcal{B}$ . Considere-

remos uma base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ; com estes vetores podemos construir três bivectores linearmente independentes,

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3. \quad (3.5-3)$$

Estes constituem uma base para o espaço vetorial dos bivectores  $\mathcal{B}$ . Um bivetor  $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$  pode ser representado por

$$\mathbb{B} = B_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j), \quad (3.5-4)$$

onde  $B_{ij} = -B_{ji}$  são as componentes de  $\mathbb{B}$  na base (3.2-3).

Da definição (3.5-1a), segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= (v_i \vec{e}_i) \otimes (w_j \vec{e}_j) = \\ &= \frac{1}{2} (v_i w_j - v_j w_i) (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j), \end{aligned} \quad (3.5-5)$$

donde se conclui que

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (v_i w_j - v_j w_i). \quad (3.5-6)$$

Da expressão (3.5-4) segue que qualquer bivetor pode ser identificado com um tensor antissimétrico de segunda ordem. (Lembre que num espaço com dimensão  $n$  um tensor antissimétrico de segunda ordem tem  $\binom{n}{2}$  componentes independentes.)

No espaço tridimensional podemos associar a um bivetor  $\mathbb{B}$ , de maneira unívoca, um vetor ortogonal ao plano de

$\mathbf{B}$  e com o mesmo módulo. Este vetor,  $\vec{\mathbf{B}}$ , cuja orientação é dada pela "regra da mão direita", é obtido de  $\mathbf{B}$  pela aplicação dualidade,

$$\mathbf{B} \xrightarrow{*} \vec{\mathbf{B}} .$$

As componentes de  $\vec{\mathbf{B}}$  ficam dadas por

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} v_j w_k \quad (3.5.7)$$

com  $i, j, k$  cíclicos. É claro então que  $\vec{\mathbf{B}}$  é o produto vetorial de  $\vec{v}$  por  $\vec{w}$ :

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{B} = \vec{v} \times \vec{w} . \quad (3.5.8)$$

De modo geral bivectores correspondem a tensores antissimétricos e, no caso particular de três dimensões, correspondem a vetores axiais. (Observe que por inversão todos os vetores mudam de sinal, e os bivectores ficam inalterados. Portanto, os vetores duais ficam inalterados; são pseudo-vetores, ou vetores axiais).

Vamos definir uma outra operação entre vetores e bivectores. O produto interno é definido como uma operação que a cada par  $\vec{\xi}, \mathbf{B}$  associa um novo vetor  $\vec{\eta}$ ,

$$\vec{\eta} = \vec{\xi} \cdot \mathbf{B} , \quad (3.5.9)$$

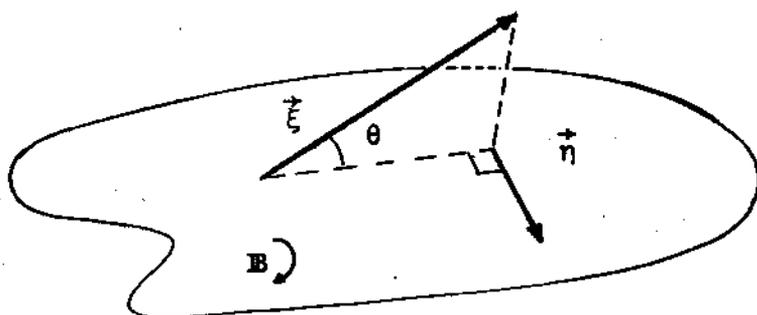
cujas componentes são

$$\eta_j = \xi_k B_{kj} . \quad (3.5.10)$$

O vetor  $\vec{\eta}$  assim definido tem as seguintes propriedades:

- 1)  $\vec{\eta}$  pertence ao plano de  $\mathbb{B}$ ;
- 2) se  $\vec{\xi} \perp \mathbb{B}$  então  $\vec{\eta} = 0$ ;
- 3)  $\vec{\eta}$  é ortogonal a  $\vec{\xi}$ ;
- 4)  $|\vec{\eta}| = |\vec{\xi}| |\vec{B}| \cos \theta$ .

A geometria de  $(\vec{\xi}, \mathbb{B}, \vec{\eta})$  está esquematizada na figura abaixo.



Note que da definição de  $\vec{\eta}$  e de  $\vec{B}$ , segue que

$$\vec{\eta} = \vec{\xi} \cdot \mathbb{B} = - \vec{\xi} \times \vec{B} \quad . \quad (3.5_{11})$$

Os desenvolvimentos apresentados até agora tiveram como objetivo desenvolver uma intuição no uso de bivectores. Vamos agora passar ao estudo dos bivectores numa variedade qualquer  $M$ . Os conceitos apresentados anteriormente serão generalizados e a abordagem será, por necessidade, um pouco mais sofisticada.

Consideremos uma variedade  $M$ , dotada de uma métrica  $g = (g_{\alpha\beta}(x))$ . Por definição um campo de bivectores  $\mathbb{B}$  é um campo tensorial antissimétrico de segunda ordem definido sobre  $M$ . No que segue estaremos considerando sempre bivectores definidos num ponto  $P$  de  $M$ ,  $\mathbb{B} = \mathbb{B}(x)$  onde  $x = \{x^\mu\}$  são as coordenadas de  $P$  numa base em  $M$ . Nesta base as componentes de  $\mathbb{B}(x)$  serão denotadas  $B^{\mu\nu}(x) = -B^{\nu\mu}(x)$ .

No espaço vetorial  $\mathcal{B}$  vamos definir um produto interno de dois bivectores  $A$  e  $B$  por

$$A \cdot B \equiv \frac{1}{4} g_{\mu\nu\alpha\beta} A^{\mu\nu} B^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad , \quad (3.5-12)$$

onde

$$g_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \quad . \quad (3.5-13)$$

O tensor  $g_{\mu\nu\alpha\beta}$  definido acima tem as seguintes propriedades:

$$g_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\nu\mu\alpha\beta} = g_{\mu\nu\beta\alpha} = g_{\alpha\beta\mu\nu} \quad , \quad (3.5-14a)$$

$$g_{\mu\nu\alpha\beta} + g_{\mu\beta\nu\alpha} + g_{\mu\alpha\beta\nu} = 0 \quad . \quad (3.5-14b)$$

Com um bivector arbitrário  $A \in \mathcal{B}$  pode-se associar um outro bivector  $\overset{*}{A} \in \mathcal{B}$  pela aplicação de dualidade. A operação de dualidade é um automorfismo de  $\mathcal{B}$ , e as componentes de  $\overset{*}{A}$  ficam definidas por

$$\overset{*}{A}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\alpha\beta} A^{\alpha\beta} \quad , \quad (3.5-15a)$$

$$\overset{*}{A}^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.5-15b)$$

Tem-se as seguintes propriedades (\*):

(\*) Note:

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -2\delta \begin{bmatrix} \rho & \sigma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = -2\delta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon^{\gamma\rho\sigma} = 4! \delta \begin{bmatrix} \gamma & \delta & \rho & \sigma \\ \alpha & \beta & \mu & \nu \end{bmatrix} = \delta_{\alpha\beta}^{\gamma\rho} \delta_{\mu\nu}^{\sigma} + \delta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \delta_{\mu\nu}^{\gamma} + 2\delta^{\rho[\gamma} \delta^{\sigma]\delta} \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - 2 \delta^{\sigma[\gamma} \delta^{\rho]\delta} \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} .$$

$$\overset{*}{A}{}^{\mu\nu} = -A^{\mu\nu} \quad , \quad (3.5-16a)$$

$$A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -\overset{*}{A}{}^{\mu\nu} \overset{*}{A}_{\mu\nu} \quad , \quad (3.5-16b)$$

$$A^{\mu\rho} B_{\nu\rho} - \overset{*}{B}{}^{\mu\rho} \overset{*}{A}_{\nu\rho} = (A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}) \delta^{\mu}_{\nu} \quad . \quad (3.5-16c)$$

Da última expressão acima segue, em particular, que

$$\overset{*}{A}_{\alpha\beta} A^{\gamma\beta} = \frac{1}{2} (\overset{*}{A}{}^{\mu\nu} A_{\mu\nu}) \delta^{\gamma}_{\alpha} \quad , \quad (3.5-17)$$

que mostra que o dual de um bivetor é, a menos de um fator, a matriz inversa da matriz associada ao bivetor.

Por definição um bivetor é simples quando pode ser escrito como o produto anti-simetrizado de dois vetores,

$$A^{\mu\nu} = v^{\mu} w^{\nu} - v^{\nu} w^{\mu} \quad , \quad (3.5-18)$$

onde  $v = \{v^{\mu}\}$  e  $w = \{w^{\mu}\}$  são vetores. Simbolicamente,  $A = v \odot w$ , onde  $\odot$  é o produto externo, como anteriormente. Observe que se  $v$  e  $w$  são objetos do espaço tangente a  $M$  então  $A = v \odot w = v \otimes w - w \otimes v$ , e  $\otimes$  é o produto direto. Se  $v$  e  $w$  são objetos do espaço dual (cotangente) então  $A = v \odot w = v \wedge w$ , e  $\wedge$  é o produto exterior usual.

Pode-se demonstrar que a condição necessária e suficiente para que um bivetor  $A$  seja simples é que

$$A_{[\alpha\beta} A_{\mu]\nu} = 0 \quad , \quad (3.5-19)$$

resultado que é válido em qualquer número dimensões. Em qua-

tro dimensões a condição acima pode ser expressa como

$$A_{\mu\nu} \overset{*}{A}{}^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (3.5.20)$$

ou, equivalentemente,  $\det(A_{\mu\nu}) = 0$ . Observe que se  $\mathbb{A}$  é simples então  $\overset{*}{\mathbb{A}}$  também é simples. (No espaço euclidiano tridimensional todos os bivectores são simples.)

Com um bivector simples  $A_{\mu\nu}$  tem-se associado um par de vetores  $v, w$  no espaço tangente a  $M$  no ponto em questão. Estes vetores geram um espaço vetorial bidimensional  $\Sigma^2$  denominado de segmento de plano ou lâmina associada a  $\mathbb{A}$ . Para qualquer par de vetores  $a, b \in \Sigma^2$ ,  $\mathbb{A}$  é proporcional a  $a \odot b$ . Observe que a expressão (3.5.18) não fixa os vetores  $v$  e  $w$  univocamente pois podemos somar a qualquer um dos vetores um múltiplo do outro sem alterar  $A_{\mu\nu}$ . A expressão (3.5.18) fixa apenas o segmento de plano que os contém.

Por definição o posto de um bivector é o posto da matriz construída com suas componentes. Se o posto de um bivector é  $k$ , o bivector pode ser decomposto em  $k/2$  bivectores simples. (Lembre que o determinante de uma matriz anti-simétrica de ordem ímpar é nulo.) Para  $\mathbb{A} = \{A_{\mu\nu}\}$ , tem-se então que:

- 1) se  $\det \mathbb{A} = 0$  e  $\mathbb{A} \neq 0 \Rightarrow k = 2$  e  $A_{\mu\nu} = v_{\mu} w_{\nu} - v_{\nu} w_{\mu}$ . Neste caso  $\mathbb{A}$  é simples e tem uma lâmina;
- 2) se  $\det \mathbb{A} \neq 0 \Rightarrow k = 4$  e  $\mathbb{A}$  pode ser expresso como uma combinação linear de dois bivectores simples gerados por  $a_{[\mu} b_{\nu]}$  e  $\alpha_{[\mu} \beta_{\nu]}$ .

Consideremos a seguinte transformação linear definida em  $\mathcal{B}$  :

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}(\theta) \equiv \mathbb{A} \cos\theta + \mathbb{A}^* \sin\theta \quad , \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad , \quad (3.5.21a)$$

ou

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A_{\mu\nu}(\theta) \equiv A_{\mu\nu} \cos\theta + \mathbb{A}_{\mu\nu}^* \sin\theta \quad . \quad (3.5.21b)$$

Esta transformação é denominada de rotação dual (generalização de rotação e dualidade). Pode-se mostrar sem dificuldades que

$$A_{\mu\nu}(\theta) \mathbb{A}^{\mu\nu}(\theta) \neq A_{\mu\nu} \mathbb{A}^{\mu\nu} \quad \text{para } \theta \text{ arbitrário,}$$

$$A_{\mu\nu}(\theta) = \mathbb{A}_{\mu\nu}^*(\theta) \iff \theta = \pi/2 \quad .$$

Por um cálculo direto encontra-se que

$$A_{\mu\nu}(\theta) \mathbb{A}^{\mu\nu}(\theta) = (A_{\mu\nu} \mathbb{A}^{\mu\nu}) \cos 2\theta - (A_{\mu\nu} \mathbb{A}^{\mu\nu}) \sin 2\theta \quad , \quad (3.5.22)$$

donde se conclui que existem quatro valores de  $\theta$  para os quais  $A_{\mu\nu}(\theta) \mathbb{A}^{\mu\nu}(\theta) = 0$ . Portanto, um bivector arbitrário pode sempre ser transformado num bivector simples por uma rotação dual apropriada.

Consideremos um bivector simples  $\mathbb{A}$ ,

$$\mathbb{A}^{\mu\nu} = 2 \sqrt{|w|} \mathbb{I}^{\mu\nu} \quad . \quad (3.5.23)$$

O dual de  $\mathbb{A}$  fica dado por

$$\mathbb{A}_{\mu\nu}^* = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^{\alpha\beta} \quad , \quad (3.5.24)$$

e pode sempre ser escrito como

$$\overset{*}{A}_{\mu\nu} = 2 \eta_{[\mu} \xi_{\nu]} \quad (3.5_{-25})$$

para algum par de vetores  $\eta = \{\eta_{\mu}\}$ ,  $\xi = \{\xi_{\mu}\}$ . Da equação (3.2\_{-24}) segue que

$$\overset{*}{A}_{\mu\nu} v^{\nu} = 0 \quad , \quad \overset{*}{A}_{\mu\nu} w^{\nu} = 0 \quad , \quad (3.5_{-26})$$

donde se conclui que as lâminas de  $A$  e  $\overset{*}{A}$  são ortogonais.

Quando os vetores  $v$  e  $w$  na expressão (3.5\_{-23}) são ortogonais,  $v_{\mu} w^{\mu} = 0$ , dizemos que o bivector está na forma canônica. Pode-se mostrar que um bivector simples pode sempre ser escrito na forma canônica. Em outras palavras, existe sempre um par de vetores  $a = \{a^{\mu}\}$  e  $b = \{b^{\mu}\}$  tais que

$$A_{\mu\nu} = 2 a_{[\mu} b_{\nu]} \quad (3.5_{-27a})$$

com

$$a_{\mu} b^{\mu} = 0 \quad . \quad (3.5_{-27b})$$

Expressando o bivector na sua forma canônica tem-se que

$$A.A = A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = (a^{\mu} a_{\mu}) (b^{\nu} b_{\nu}) \quad , \quad (3.5_{-28})$$

e, com base nesta expressão podemos fazer a seguinte classificação:

- I -  $A.A > 0 \Rightarrow a^{\mu}$  e  $b^{\mu}$  são tipo espaço. A lâmina de  $A$  é tipo espaço, e não contém vetores nulos;
- II -  $A.A < 0 \Rightarrow a^{\mu}$  é tipo espaço e  $b^{\mu}$  é tipo tempo (ou vice-versa). A lâmina de  $A$  é tipo tempo e contém dois

vetores nulos reais;

III -  $\underline{A} \cdot \underline{A} = 0 \implies a^\mu$  é nulo e  $b^\mu$  é tipo espaço (ou vice-versa).

A lâmina de  $\underline{A}$  é nula e contém um vetor nulo.

Os bivectores são classificados como tipo espaço (caso I), tipo tempo (caso II), e nulos (caso III).

Das equações (3.5-16) segue que a aplicação dualidade transforma bivectores tipo espaço (tipo tempo) em bivetores tipo tempo (tipo espaço), enquanto que bivectores nulos são transformados em bivectores nulos. Tem-se então que

I' - se  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} < 0$ , a lâmina de  $\underline{\underline{A}}$  é tipo tempo e contém dois vetores nulos reais;

II' - se  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} > 0$ , a lâmina de  $\underline{\underline{A}}$  é tipo espaço e não contém nenhum vetor nulo real;

III' - se  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = 0$ , a lâmina de  $\underline{\underline{A}}$  é nula e contém um vetor nulo.

Passemos agora a uma análise sucinta do problema de autovalores para bivectores. Consideremos um bivector  $\underline{A}$ , simples, tipo tempo. Então, de acordo com o que foi dito acima a lâmina de  $\underline{A}$  é gerada por um par de vetores nulos reais,  $k$  e  $\ell$ ,

$$A_{\mu\nu} = k_\mu \ell_\nu - k_\nu \ell_\mu \quad , \quad (3.5-28a)$$

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad , \quad \ell^\mu \ell_\mu = 0 \quad , \quad k_\mu \ell^\mu = \lambda \neq 0 \quad . \quad (3.5-28b)$$

É claro então que  $k$  e  $\ell$  são autovetores nulos de  $\underline{A}$ , com autovalores  $\pm\lambda$ . As equações de autovalores se escrevem  $A_{\mu\nu} h^\nu = \tau h_\mu$ , com  $h^\mu = (\ell^\mu, k^\mu)$  e  $\tau = (+\lambda, -\lambda)$ . Deve-se ter também

$\overset{*}{A}_{\mu\nu} \ell^\nu = 0$ . Com  $A_{\mu\nu}$  simples, tipo tempo, pode-se demonstrar que existem exatamente duas soluções destas equações, que são únicas a menos de um fator de proporcionalidade arbitrário. Uma análise semelhante pode ser feita para  $A$  tipo espaço.

Consideremos agora um bivector nulo  $N$ . Como todo bivector nulo é necessariamente simples, a lâmina de  $N$  contém um vetor nulo  $\ell^\mu$  e um vetor tipo espaço  $a^\alpha$  tal que

$$N_{\mu\nu} = \ell_\mu a_\nu - \ell_\nu a_\mu \quad (3.5.29a)$$

$$\ell^\mu a_\mu = 0 \quad , \quad N_{\mu\nu} \ell^\nu = 0 \quad (3.5.29b)$$

tem-se que

$$\overset{*}{N}_{\mu\nu} \ell^\nu = 0 \quad , \quad \overset{*}{N}_{\mu\nu} a^\nu = 0 \quad (3.5.30)$$

donde segue que  $\overset{*}{N}$  pode ser escrito sob a forma

$$\overset{*}{N}_{\mu\nu} = \ell_\mu b_\nu - \ell_\nu b_\mu \quad , \quad (3.5.31a)$$

$$b_\mu b^\mu < 0 \quad , \quad a_\mu b^\mu = 0 \quad , \quad \ell^\mu b_\mu = 0 \quad (3.5.31b)$$

Logo, se  $N$  é nulo existe um vetor real nulo que é autovetor de  $N$  e  $\overset{*}{N}$  ,

$$N_{\mu\nu} \ell^\nu = 0 \quad , \quad \overset{*}{N}_{\mu\nu} \ell^\nu = 0 \quad (3.5.32)$$

que é único a menos de um fator de proporcionalidade.

Os problemas de autovalores para os bivectores po-

dem ser resumidos como no quadro abaixo:

BIVETOR	Nº DE DIREÇÕES PRINCIPAIS NULAS
Tipo Espaço	Duas
Tipo Tempo	Duas
Nulo	Uma

Num ponto P de M pode-se visualizar geometricamente as direções principais dos bivectores considerando-se as possíveis interseções das lâminas de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}^*$  com o cone de luz do futuro  $C_P^+$  com vértice em P. Se a lâmina de  $\mathcal{A}$  é tipo espaço, ela está inteiramente fora de  $C_P^+$  e não há interseção. No entanto, a lâmina de  $\mathcal{A}^*$  é tipo tempo e, como está parcialmente contida em  $C_P^+$ , ela corta o cone de luz ao longo de um par de geratrizes. Um raciocínio análogo pode ser feito para o caso em que a lâmina de  $\mathcal{A}$  é tipo tempo. Agora, se as lâminas de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}^*$  são nulas, ambas tangenciam  $C_P^+$  ao longo de uma única geratriz.

Como ilustração consideremos a teoria de Maxwell.  $F_{\mu\nu}$  é o bivector intensidade de campo. Com relação a um observador cuja velocidade é  $v^\mu = \delta^\mu_0$  os campos elétrico e magnético são definidos por  $E_\mu = F_{\mu\nu} v^\nu$  e  $B_\mu = -F_{\mu\nu}^* v^\nu$ , onde  $E_\mu = (0, \vec{E})$ ,  $B_\mu = (0, \vec{B})$ . Tem-se que

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2, \quad (3.5_{-33})$$

$$F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = 4\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (3.5_{-34})$$

Suponhamos que  $\ell = (1, \vec{v})$  é uma direção principal nula de  $F_{\mu\nu}$ .

Então  $\ell_\mu \ell^\mu = 0$  é equivalente a  $\vec{v}$  ser unitário e  $F_{\mu\nu} \ell^\nu = (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \vec{v} \cdot \vec{E})$ . A equação de autovalores  $F_{\mu\nu} \ell^\nu = \lambda \ell_\mu$  se reduz ao par de equações vetoriais

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \lambda \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{E} = \lambda \quad ,$$

donde se obtém

$$\vec{E} = (\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{v} - \vec{v} \times \vec{B} \quad ,$$

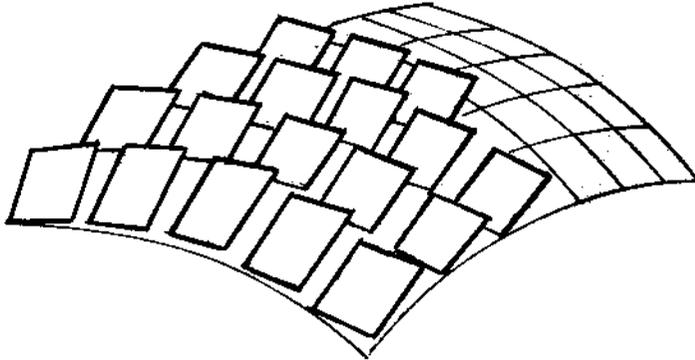
$$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E} + (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v} \quad .$$

No caso em que  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \neq 0$  existem duas direções principais nulas que (por uma transformação de Lorentz) podem ser escolhidas como  $k = (1, \vec{v})$  e  $\ell = (1, -\vec{v})$ . Neste caso,  $\vec{E} \times \vec{B} = 0$  e  $\vec{E} = \lambda \vec{v}$  de modo que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são paralelos a  $\vec{v}$ .

Se  $F_{\mu\nu}$  é nulo,  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$ , e simples, então  $\vec{v} \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ , e  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{v})$  formam um triedro ortogonal. As condições  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  e  $|\vec{E}| = |\vec{B}|$  caracterizam uma onda plana. Observe que se tivermos apenas  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = |B|^2 - |E|^2 \neq 0$ , é sempre possível encontrar um referencial no qual  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} < 0$  (e o campo se reduz a uma componente puramente elétrica) ou  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} > 0$  (e o campo se reduz a uma componente puramente magnética).

Consideremos agora um campo de bivectores simples  $A = \{A_{\mu\nu}\}$  definido numa região do espaço tempo. Este campo de bivectores gera um "campo de lâminas" ou elementos de superfície que poderão se juntar de maneira contínua, de modo a formar famílias de superfícies bidimensionais como na figura

abaixo.



Pode-se demonstrar que a condição para que um bivetor simples seja gerador de superfícies é que

$$\overset{*}{A}_{\mu\nu} \partial_\lambda A^{\nu\lambda} = 0 \quad . \quad (3.5_{-35})$$

(Na verdade, esta equação é uma maneira de se expressar que o colchete de Lie de  $v$  e  $w$  pertence ao espaço bidimensional gerado por estes vetores.)

Se  $A$  é tipo tempo a superfície que ele gera é tipo tempo;  $A$  pode ser expresso como o produto exterior de um vetor tipo tempo com um vetor tipo espaço. O dual  $\overset{*}{A}$  é portanto tipo espaço, e pode ser expresso pelo produto exterior de dois vetores tipo espaço linearmente independentes. Os quatro vetores que geram  $A$  e  $\overset{*}{A}$  podem ser usados como base no espaço tangente do espaço tempo em cada ponto.

No caso de bivectores simples nulos,  $N.N = 0$ , tem-se, como já vimos,

$$N_{\mu\nu} = N_\mu W_\nu - N_\nu W_\mu$$

com

$$N_{\mu} N^{\mu} = 0 \quad , \quad N_{\mu} W^{\mu} = 0 \quad , \quad W_{\mu} W^{\mu} < 0 \quad .$$

Em contraste com os outros tipos de bivectores simples, os bivectores nulos especificam uma única direção nula no espaço-tempo. O dual  $\overset{*}{N}$  é também nulo, e sua lâmina é ortogonal a de  $N$ . Assim, podemos escrever

$$\overset{*}{N}{}^{\mu\nu} = N^{\mu} v^{\nu} - N^{\nu} v^{\mu}$$

com

$$N^{\mu} v_{\mu} = 0 \quad , \quad v^{\mu} W_{\mu} = 0 \quad , \quad v^{\mu} v_{\mu} < 0$$

que são as equações (3.2\_31). Segue então que um bivector nulo e seu dual não geram todo o espaço-tempo, devendo ser suplementados por um outro vetor linearmente independente que, naturalmente, pode ser escolhido como nulo.

Da condição (3.2\_35) obtém-se, para o caso nulo,

$$[N, W]{}^{\mu}{}_{\nu} = (N^{\alpha} \nabla_{\alpha} W^{\mu} - W^{\alpha} \nabla_{\alpha} N^{\mu}) v_{\nu} = 0 \quad , \quad (3.5_36)$$

$$[N, W]{}^{\mu}{}_{\mu} = (N^{\alpha} \nabla_{\alpha} W^{\mu} - W^{\alpha} \nabla_{\alpha} N^{\mu}) N_{\mu} = 0 \quad . \quad (3.5_37)$$

Estas equações nos dizem que o colchete de Lie de  $N$  e  $W$  é uma combinação linear dos mesmos (campos de) vetores, que é uma condição para que estes campos gerem superfícies. Lembrando que  $N_{\mu} N^{\mu} = 0$ , segue de (3.2\_37) que

$$N^{\alpha} N^{\nu} \nabla_{\alpha} W_{\nu} = 0 \quad . \quad (3.5_38)$$

### 3.5.2 Aplicação à teoria dos strings

Sobre a superfície de evolução  $\Sigma$  do string definamos o campo de bivectores (\*)

$$\Sigma^{\mu\nu} = \varepsilon^{ab} \partial_a y^\mu \partial_b y^\nu \equiv \dot{y}^\mu \dot{y}^{\nu} - \dot{y}^\nu \dot{y}^\mu \quad . \quad (3.5_{-39})$$

Por construção  $\Sigma^{\mu\nu}$  é simples. Pode-se verificar sem dificuldades que as condições (3.5\_{-19}) ou (3.5\_{-20}) são satisfeitas. Esta última será de particular interesse mais adiante:

$$\Sigma^*_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (3.5_{-40})$$

com

$$\Sigma^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} \quad . \quad (3.5_{-41})$$

Segue da definição (3.3\_{-1}) que

$$\Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = 2 \det(g_{ab}) \equiv 2g \quad . \quad (3.5_{-42})$$

Vamos completar uma base local nos pontos de  $\Sigma$  introduzindo os vetores  $\zeta_A^\mu$ ,  $A = 2, 3$ , satisfazendo às condições

$$\eta_{\mu\nu} \partial_a y^\mu \zeta_A^\nu = 0 \quad . \quad (3.5_{-43})$$

Com estes vetores podemos construir o campo de bivectores tipo espaço

---

(\*) Estes bivectores são as mesmas quantidades que foram definidas na Seção 1.7 e denominadas de coordenadas de Plücker de  $\Sigma$ .

$$\lambda^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \zeta_A^\mu \zeta_B^\nu, \quad (3.5-44)$$

onde  $\epsilon^{33} = \epsilon^{44} = 0$ ,  $\epsilon^{34} = -\epsilon^{43} = 1$ . Tem-se de imediato que

$$\Sigma_{\mu\nu} \lambda^{\mu\nu} = 0,$$

de modo que, de (3.5-40),  $\lambda^{\mu\nu}$  deve ser proporcional a  $\overset{*}{\Sigma}^{\mu\nu}$ . De notando

$$\overset{*}{\Sigma}^{\mu\nu} = \Delta(y) \lambda^{\mu\nu}, \quad (3.5-45)$$

tem-se que

$$\overset{*}{\Sigma}_{\mu\nu} \lambda^{\mu\nu} = \Delta \lambda_{\mu\nu} \lambda^{\mu\nu} = 2\Delta.$$

Usando que  $\overset{*}{\Sigma}_{\mu\nu} = -\Sigma_{\mu\nu}$  segue que

$$\overset{*}{\Sigma}_{\mu\nu} \lambda^{\mu\nu} = 2\Delta = \Sigma_{\mu\nu} \overset{*}{\lambda}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\Delta} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = -\frac{2g}{\lambda}$$

donde se obtém  $\Delta = \sqrt{-g}$ . Logo,

$$\overset{*}{\Sigma}_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \lambda_{\mu\nu}. \quad (3.5-46)$$

Passemos à dinâmica do string. Em termos de  $\Sigma_{\mu\nu}$  a integral de ação do string se escreve

$$S = -N \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}}. \quad (3.5-47)$$

Calculando a variação obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta S &= -N \int d^2 \xi \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \Sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \Sigma^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_a Y^\mu)} \delta (\partial_a Y^\mu) = \\
&= -N \int d^2 \xi \Sigma^{\nu\alpha} \partial_\alpha \left[ \frac{\Sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \right] \delta Y^\mu \\
&\quad - N \int d\tau \frac{\dot{Y}^\alpha}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \Sigma_{\alpha\beta} \delta Y^\beta \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} + \int d\sigma \frac{Y'^\alpha}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \Sigma_{\alpha\beta} \delta Y^\beta \Big|_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2}.
\end{aligned}$$

Com as variações  $\delta Y^\beta$  satisfazendo às condições (1.3-3), segue de  $\delta S = 0$  as equações de movimento

$$\Sigma^{\mu\alpha} \partial_\alpha \left( \frac{\Sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \right) = 0 \quad (3.5-48)$$

e as condições de bordo

$$\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \dot{Y}^\mu \Sigma_{\mu\nu} = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \pi \quad (3.5-49)$$

Pode-se verificar que estas condições se reduzem às condições (1.3-11), que por sua vez implicam que  $\Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \equiv \Sigma^2 = 0$  em  $\sigma = 0, \pi$ , de modo que o bivector  $\Sigma_{\mu\nu}$  é nulo nos bordos da superfície de evolução. Observe que isto significa que  $g = 0$  em  $\sigma = 0, \pi$ , em acordo com (1.3-12). Salvo observação em contrário, vamos considerar strings fechados daqui por diante.

Vamos elaborar um pouco sobre as equações (3.5-48).

Definamos o bivector

$$\Phi^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2}} \Sigma^{\mu\nu} \quad , \quad (3.5_{-50})$$

$$\Phi_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} = -2 \quad . \quad (3.5_{-51})$$

Em termos deste bivector as equações de movimento (3.5-48) se escrevem

$$\Phi^{\mu\beta} \partial_{\beta} \Phi_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (3.5_{-52})$$

É fácil verificar que

$$\Phi^{\mu\beta} \partial_{\beta} \Phi_{\mu\nu} = - \Phi^*_{\lambda\nu} \partial_{\beta} \Phi^{*\lambda\beta} = \lambda_{\lambda\nu} \partial_{\beta} \lambda^{\lambda\beta} \quad , \quad (3.5_{-53})$$

de modo que as equações de movimento podem ser expressas sob as seguintes formas alternativas:

$$\Phi^*_{\lambda\nu} \partial_{\beta} \Phi^{*\lambda\beta} = 0 \quad , \quad (3.5_{-54})$$

$$\lambda_{\lambda\nu} \partial_{\beta} \lambda^{\lambda\beta} = 0 \quad . \quad (3.5_{-55})$$

Usando a definição (3.5-44) tem-se que

$$\partial_{\beta} \lambda^{\alpha\beta} = (\partial_{\beta} \xi^a) \partial_a (\epsilon^{AB} \zeta_A^{\alpha} \zeta_B^{\beta}) = \epsilon^{AB} \zeta_A^{\alpha} (\partial_{\beta} \xi^a) \partial_a \zeta_B^{\beta} \quad , \quad (3.5_{-56})$$

onde usamos que  $(\partial_{\beta} \zeta^a) \zeta_B^{\beta} = 0$  porque os dois vetores são ortogonais. As derivadas dos vetores normais  $\zeta_A^{\alpha}$  podem ser expressas como

$$\partial_a \zeta^\beta_B = \sum_A S_{ABa} \zeta^\beta_A + b_{BCd} g^{cd} \partial_c Y^\beta, \quad (3.5-57)$$

onde  $S_{ABa}$  são as componentes do vetor de torção,

$$S_{ABa} = -S_{BAa} = \zeta_{cA} \partial_a \zeta^c_B, \quad (3.5-58)$$

e  $b_{BCd}$  são os coeficientes da segunda forma fundamental de  $\Sigma$ . Segue então que

$$(\partial_\beta \xi^a) \partial_a \zeta^\beta_B = -b_{Bac} g^{ac} = -h_B, \quad (3.5-59)$$

onde  $h_B$  é a curvatura média de  $\Sigma$  na direção da normal correspondente ao índice B. Substituindo estes resultados nas equações (3.5-55) e usando (3.3-6) resulta que

$$\sum_A h_A \zeta^v_A = 0, \quad (3.5-60)$$

donde

$$h_A = 0 \quad (3.5-61)$$

como consequência da independência dos vetores normais  $\zeta^v_A$ . Estas são as condições para que  $\Sigma$  seja uma superfície mínima. (Veja os comentários feitos na Seção 1.5.)

As condições (3.5-61) se verificam sempre que as equações de movimento são válidas e, como consequência tem -se de (3.3-17) que  $\partial_\beta \lambda^{\alpha\beta} = 0$  ou

$$\partial_\beta \phi^{*\alpha\beta} = 0. \quad (3.5-62)$$

Usando a definição (3.5.50) obtêm-se da equação acima

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\beta} \overset{*}{\Sigma}^{\alpha\beta} + \overset{*}{\Sigma}^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \right) = 0 .$$

Mas,

$$\overset{*}{\Sigma}^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \equiv \sqrt{-g} \epsilon^{AB} \zeta_A^{\beta} \zeta_B^{\alpha} (\partial_a \xi^a) \partial_a \equiv 0 \quad (3.5.63)$$

de modo que

$$\partial_{\beta} \overset{*}{\Sigma}^{\alpha\beta} = 0 . \quad (3.5.64)$$

Por outro lado, pode-se verificar por um cálculo direto que

$$\partial_{\beta} \phi^{\alpha\beta} = 0 , \quad (3.5.65)$$

sem que se faça uso das equações de movimento.

Façamos um resumo do que obtivemos até agora. Partindo da integral de ação (3.5.47) com

$$= -N \sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}} \quad (3.5.66)$$

obtivemos as equações de movimento (3.5.48),

$$\Sigma^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \left( \frac{\Sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \right) = 0 .$$

Definimos o bivector  $\phi_{\mu\nu}$ , equação (3.3.11), e mostramos que o seu dual  $\overset{*}{\phi}_{\mu\nu}$  tem divergência nula. Por sua vez este resultado conduz a que  $\overset{*}{\Sigma}_{\mu\nu}$  também tem divergência nula. Agora, o ingre-

diente fundamental para demonstrar estes resultados são as condições (3.3.22), isto é, o fato da superfície de evolução ser mínima.

Analisemos os resultados obtidos. Para a teoria formulada em termos de  $\Sigma_{\mu\nu}$ :

Equações de movimento  $\longrightarrow$  A superfície de evolução é mínima  $\longrightarrow \partial_\alpha \Sigma^{*\alpha\beta} = 0$

$$\Sigma^{\mu\alpha} \partial_\alpha \left( \frac{\Sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^2}} \right) = 0$$

Eq. (3.5.48)

Eq. (3.5.64)

As equações (3.5.64) são as condições de integralidade que garantem a existência de potenciais  $A_\mu(y)$  tais que

$$\Sigma_{\alpha\beta}(A) = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \equiv \mathcal{F}_{\alpha\beta} \quad (3.5.67)$$

Em virtude da condição (3.5.40),  $\Sigma \cdot \vec{\Sigma}^* = 0$ , as componentes elétrica e magnética do tensor intensidade de campo,  $\vec{\mathcal{E}}$  e  $\vec{\mathcal{B}}$  respectivamente, devem satisfazer à condição

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} \vec{\Sigma}^{*\alpha\beta} = 4 \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (3.5.68)$$

Agora, para formular a teoria em termos do potencial  $A_\mu(y)$  é necessário fazer modificações a partir do início. De fato, a integral de ação passa a ser escrita sob a forma (\*)

(\*) Note que  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  é uma notação para indicar que o bivector  $\Sigma^{\alpha\beta}$  está expresso em termos dos potenciais  $A_\mu$ . Na equação (3.5.69) o fator 1/2 (que aparece em (3.5.47)) foi englobado na definição de  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ .

$$S = -N \int d^4z \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{\phi}^{\alpha\beta}} \quad , \quad (3.5-69)$$

e o princípio de Hamilton agora é no espaço-tempo, e não no espaço  $(\tau, \sigma)$  como em (3.5-57). Se faz necessário também demonstrar que as duas formulações conduzem aos mesmos resultados. Essencialmente, é necessário demonstrar que as soluções das equações de movimento que se obtém na ação (3.5-69) são também soluções das equações (3.5-48). Neste ponto é importante observar que o potencial  $A(y)$  e/ou o tensor intensidade de campo devem ser singulares, definidos apenas sobre  $\Sigma$ . É claro também que a teoria deverá admitir uma interpretação física razoável.

Para a teoria formulada em termos de  $\phi_{\mu\nu}$  :

$$\begin{array}{l} \text{Equações de movimento} \longrightarrow \text{A superfície de} \\ \text{evolução é mínima} \longrightarrow \partial_{\beta} \overset{*}{\phi}^{\alpha\beta} = 0 \\ \phi^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi_{\mu\nu} = 0 \end{array}$$

Da mesma forma que no caso anterior o bivetor  $\phi_{\alpha\beta}$  pode ser expresso em termos de potenciais,

$$\phi_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} Q_{\beta} - \partial_{\beta} Q_{\alpha} \quad , \quad (3.5-70)$$

e satisfaz à condição  $\phi \cdot \overset{*}{\phi} = 0$ . Mas agora temos uma equação a mais, equação (3.5-65),

$$\partial_{\alpha} \phi^{\alpha\beta} = 0$$

que não ocorre no caso anterior. O par de equações

$$\partial_{\alpha} \phi^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \partial_{\alpha} \overset{*}{\phi}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.5-71)$$

com  $\phi_{\alpha\beta}$  expresso em termos de potenciais nos sugere a construção de uma teoria linearizada, tipo Maxwell, para o string com integral de ação

$$S = \int -\frac{1}{4} \phi_{\alpha\beta} \phi^{\alpha\beta} d^4z \quad (3.5.72)$$

Esta teoria apresenta todas as dificuldades da anterior, é claro, e outras mais devido à presença das equações (3.5.62). Partindo da ação (3.5.72) as equações (3.5.62) representam apenas as condições de integrabilidade e, portanto, não são dinâmicas, enquanto que as equações (3.5.65) são equações dinâmicas. Lembremos que as equações (3.5.62) foram obtidas a partir das equações de movimento no sentido que o fato da superfície ser mínima é essencial para sua obtenção; isto significa que estas equações contêm a informação dinâmica fundamental da teoria. Por seu lado, as equações (3.5.65) são, no esquema anterior, puras consequências da construção do bivector  $\Sigma_{\mu\nu}^*$  e não consequências da dinâmica do sistema.

Um ponto importante desta abordagem é garantir que as soluções das equações de movimento que se obtêm de (3.5.72) são também soluções das equações (3.5.52). Isto pode ser feito impondo-se que o tensor momentum-energia tenha divergência nula. De fato, tem-se que

$$T^\mu_\nu = \phi^\mu_\lambda \phi^\lambda_\nu + \frac{1}{4} \eta^\mu_\nu \phi^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} = \quad , \quad (3.5.73)$$

$$= \phi^\mu_\lambda \phi^\lambda_\nu - \frac{1}{2} \eta^\mu_\nu \quad , \quad (3.5.74)$$

$$T^\alpha_\alpha = 0 \quad , \quad (3.5.75)$$

onde usamos que o bivector  $\Phi$  está normalizado, equação (3.5.51).  
Impondo que  $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$  obtém-se

$$0 = \Phi^\mu_\lambda \partial_\mu \Phi^\lambda_\nu + \Phi^\lambda_\nu \partial_\nu \Phi^\mu_\lambda = \Phi^\mu_\lambda \partial_\mu \Phi^\lambda_\nu ,$$

que são as equações (3.5.52). Mais detalhes sobre esta abordagem para a teoria dos strings serão apresentados mais adiante.

A análise feita acima nos leva a pensar em construir uma teoria de campos para o string. Mais ainda, como o string parece estabelecer um elo entre as teorias tipo Maxwell e Born-Infeld, surge também a perspectiva de se representar campos eletromagnéticos por configurações tipo string.

Uma abordagem tipo teoria de campos para o string é realmente muito atraente pois nos permitiria aplicar todo o conhecimento que se tem sobre campos clássicos ao modelo de strings. Em particular, poderíamos quantizar o "campo de strings" e, eventualmente, evitar os problemas característicos da quantização do modelo usual em termos das coordenadas  $y^\mu(\xi)$ . Uma outra motivação para se construir uma teoria de campo para os strings seria a possibilidade de podermos analisar, de maneira (talvez) mais simples, o problema da interação entre strings e entre strings e outros campos. Um ponto crucial desta abordagem é a relação entre o tensor intensidade de campo (ou potenciais) e as coordenadas da superfície de evolução, conforme veremos nos capítulos seguintes.

## Capítulo 4: STRINGS EM TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS

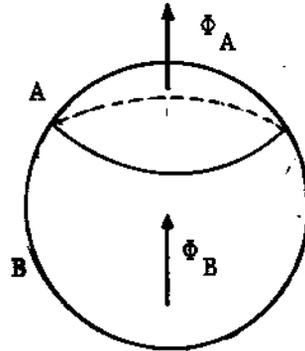
### 4.1 Strings na teoria do monopolo de Dirac

Os strings foram introduzidos na física por Dirac na sua teoria do eletromagnetismo com cargas magnéticas (monopolos). É fácil verificar que o potencial vetor associado a um monopolo magnético é necessariamente singular. Para isto, é suficiente considerar um monopolo de intensidade  $g \neq 0$  localizado na origem do sistema de coordenadas e uma esfera de raio arbitrário com centro na origem. Supondo que o potencial vetor  $A_\mu(x)$  é não singular sobre a esfera, tem-se que

$$\Phi = \oint A_\mu dx^\mu = \text{fluxo total que sai da esfera} = 4\pi g.$$

Agora, se cortamos a esfera em duas partes, A e B, como na figura, segue do teorema de Stokes que

$$\Phi = \Phi_A - \Phi_B = 0.$$



Esta contradição se deve à hipótese de que  $A_\mu(x)$  é não singular sobre a esfera. Logo, o potencial vetor deve ser singular em algum ponto da esfera. Como o raio da esfera é arbitrário, segue que ele é singular sobre uma linha no espaço-tempo. Neste sentido diz-se que o potencial vetor que descreve o campo de um monopolo é singular ao longo de um string. Por outro lado, o campo magnético

de um monopolo é livre de singularidades, de modo que o "String de Dirac" não deve ter realidade física. De fato, na teoria de Dirac os strings não transportam energia e todos os observáveis da teoria são independentes dos seus movimentos.

Passemos a uma análise da teoria de Dirac. Na presença de cargas elétrica e magnética as equações de Maxwell se escrevem

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \quad , \quad (4.1-1a)$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = -k^\mu \quad , \quad (4.1-1b)$$

onde

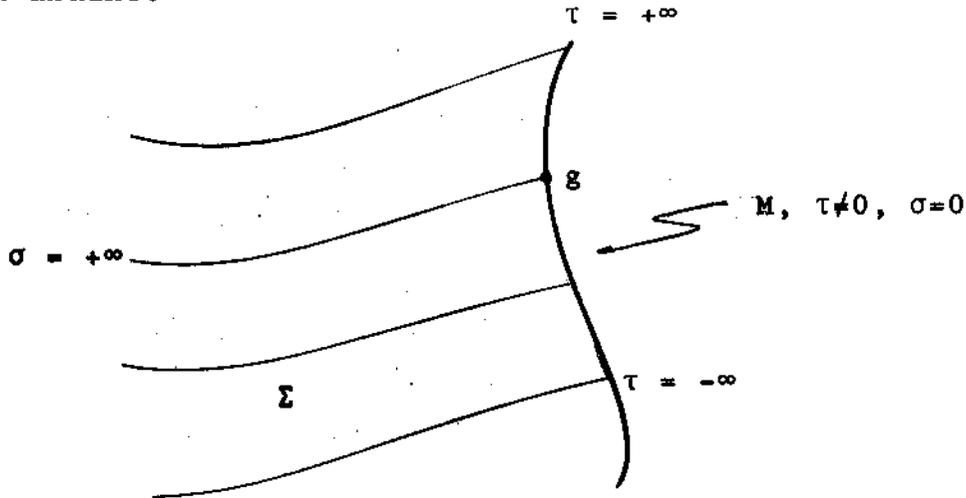
$$j^\mu = e \int_E dZ^\mu \delta^{(4)}(x-Z) \quad , \quad (4.1-2a)$$

$$k^\mu = g \int_M dZ^\mu \delta^{(4)}(y-Z) \quad (4.1-2b)$$

são as correntes elétrica e magnética, respectivamente. Por simplicidade vamos considerar uma carga de cada tipo, e e g ; E, M denotam suas trajetórias.

Pelos argumentos dados anteriormente não podemos introduzir globalmente um potencial  $A_\mu(x)$  de modo a podermos expressar o tensor  $F_{\mu\nu}$  da maneira usual,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . De acordo com Dirac, esta relação é violada em cada instante sobre uma linha (string) que se origina no monopolo e se estende até o infinito, ou termina em outro monopolo. O string pode ser qualquer linha no espaço-tempo que satisfaça à condição acima. Devido ao movimento do monopolo o string descreve uma superfície bidimensional  $\Sigma$  cuja fronteira é a trajetória M do monopolo .

A superfície  $\Sigma$  será parametrizada por  $(\tau, \sigma)$ , com  $M$  correspondendo a  $\sigma = 0$ . As coordenadas em  $M$  são  $y^\mu = y^\mu(\tau, \sigma=0)$  como na figura abaixo.



Dirac sugeriu modificar a definição do tensor intensidade de campo  $F_{\mu\nu}$ , introduzindo um termo extra,  $\overset{*}{G}_{\mu\nu}$ , que deve se anular em todo espaço, exceto sobre a superfície de evolução:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \overset{*}{G}_{\mu\nu} \quad . \quad (4.1.3)$$

Substituindo esta expressão na equação (4.1.1b) e usando (4.1.2b), obtém-se a equação

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = g \int \frac{dy^\mu}{d\tau} \delta^{(4)}(x-y(\tau)) d\tau \quad ,$$

cuja solução é

$$G_{\mu\nu} = \int d^2\xi \Sigma_{\mu\nu}(y) \delta^{(4)}(x-y(\xi)) \quad . \quad (4.1.4)$$

Observe que  $G_{\mu\nu}$  é independente da parametrização da superfi -

cie de evolução.

Usando este resultado a ação de Dirac para o sistema se escreve

$$S = -m_E \int d\tau - m_M \int d\tau - \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \int A_\mu(z) \dot{z}^\mu d\tau \quad (4.1-5)$$

Observe que o termo de interação na expressão acima contém apenas o acoplamento da carga elétrica com o campo. As informações sobre o monopolo magnético estão contidas na parte da ação associada com os campos, terceiro termo da expressão (4.1-5).

A integral de ação (4.1-5) deve ser variada independentemente com relação a  $A_\mu$  e com relação às coordenadas das cargas elétrica e magnética. As equações de Maxwell (4.1-1a) seguem das variações com relação a  $A_\mu(x)$ . O outro conjunto de equações, (4.1-1b), é consequência de (4.1-3) e (4.1-4), e tem caráter cinemático.

As equações de movimento para o monopolo seguem das variações com relação a  $y^\mu$ , e se escrevem

$$m_M \frac{d^2 y^\mu}{d\tau^2} = -g F_{\nu}^{*\mu} \dot{y}^\nu \quad (4.1-6)$$

Para a partícula com carga elétrica obtém-se

$$m_E \frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2} = e (\partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu) \dot{z}^\nu \quad (4.1-7)$$

Vê-se que estas equações são coincidentes com as equações de Lorentz

$$m_E \frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2} = e F_{\nu}^{\mu} \dot{z}^\nu$$

se as trajetórias destas partículas nunca se cruzarem com as trajetórias dos monopolos magnéticos. Esta condição é denominada de "veto de Dirac".

Concluimos então que a integral de ação de Dirac, expressão (4.1.5), conduz a um conjunto de equações consistentes para o sistema de cargas elétrica e magnética e campos eletromagnéticos, desde que o veto de Dirac seja respeitado. Precisamos ainda nos certificar que o string não introduz graus de liberdade adicionais no sistema. Para verificar que isto realmente ocorre é suficiente aplicar o princípio variacional com relação às coordenadas do string. O resultado é

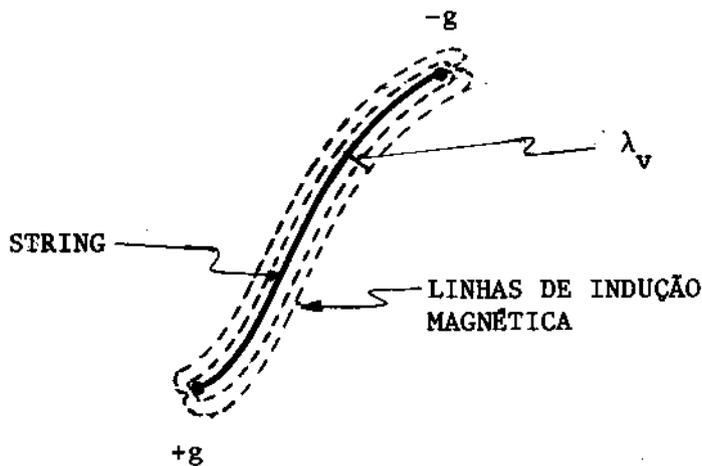
$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial y^\nu} \star_{\Sigma} \lambda_\mu = j^\mu \star_{\Sigma} \lambda_\mu = 0 \quad .$$

É óbvio que estas equações serão sempre satisfeitas se o veto de Dirac for respeitado, e assim a ação (4.1.5) não conduz a uma dinâmica para o string.

Nambu introduziu algumas modificações na teoria de Dirac e construiu um modelo de quarks com cargas magnéticas ligadas (aos pares) por strings — que neste caso têm realidade física. O ponto de partida de Nambu é a sugestão de Nielsen e Olesen que strings podem ser pensados como um modelo matemático de um tubo de fluxo magnético em equilíbrio sob a pressão de um meio superfluido carregado (um campo escalar de Higgs). Se o string é aberto as linhas de fluxo magnético terminarão nas suas extremidades surgindo um par de cargas magnéticas. Juntando-se esta idéia com o modelo de hadrons-strings abertos com quarks nas extremidades — emerge um quadro onde

os quarks atuam como fontes de cargas magnéticas.

Desta forma obtém-se um modelo no qual os quarks têm carga magnética  $g$  e o campo (bosônico) de Higgs transporta carga elétrica  $e$ . (Note que o que está sendo denominado de elétrico e magnético é uma questão de convenção.) A teoria contém dois parâmetros de massa  $m_V$  e  $m_S$ , associadas com os campos de Higgs  $A^\mu(x)$  (vetorial) e  $\phi(x)$  (escalar). Estes parâmetros se relacionam com dois comprimentos característicos  $\lambda_V = 1/m_V$  e  $\lambda_S = 1/m_S$  que determinam as dimensões transversais da concentração do campo escalar nas proximidades do string.



Com estes ingredientes básicos pode-se construir a teoria modificando-se a descrição dos monopolos de Dirac, sem se fazer uso de um modelo de Higgs particular. A modificação a ser feita na teoria de Dirac é introduzir o "ansatz" da teoria da supercondutividade de London,

$$j^\mu = -m_V^2 A^\mu \quad (4.1.8)$$

de modo que a equação (4.1.1a) fica substituída por

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - m_V^2 A^\mu = 0 \quad (4.1-9)$$

A equação (4.1-1b) fica satisfeita como consequência da definição (4.1-3) com

$$k_\mu^{(i)} = g \int \frac{d y^\mu}{d\tau} \delta^{(4)}(x-y) d\tau \quad (4.1-10)$$

onde  $g^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , são as cargas magnéticas localizadas nas extremidades do string. A equação (4.1-9) é portanto a única equação dinâmica.

Para obter as equações de movimento para o string e para os monopolos, vamos considerar a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_V^2 A_\mu A^\mu - \mathcal{L}_M \quad (4.1-11)$$

onde

$$\mathcal{L}_M = \sum_{i=1,2} m^{(i)} \int \sqrt{-\dot{y}^2} \delta^{(4)}(x-y) d\tau \quad (4.1-12)$$

é a contribuição dos monopolos. Variando a integral de ação com relação a  $A_\mu$  obtém-se a equação (4.1-9), que em termos dos potenciais se escreve

$$(\square - m_V^2) A^\mu = \partial_\nu G^{*\nu\mu} \quad (4.1-13)$$

Variações com relação a  $y^\mu(\tau, \sigma)$ , ponto do interior da superfície de evolução, obtém-se

$$\Sigma^{*\mu\nu} A_\mu(y) = 0 \quad (4.1-14)$$

Finalmente, as equações de movimento dos monopolos seguem das variações com relação a  $y^\mu(\tau, \sigma_1)$ :

$$m^{(i)} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{y^{(i)\cdot\mu}}{\sqrt{-y^{(i)\cdot 2}}} \right] = \frac{(i)}{g} F_{\nu}^{*\mu} \frac{(i)}{g} y^{(i)\cdot\nu} \quad (4.1-15)$$

As equações (4.1-13,14,15) são as equações da teoria. A novidade é a equação (4.1-14) que representa um vínculo sobre  $A_\mu(y)$ . A condição para que (4.1-14) tenha solução é que

$$\det(\Sigma_{\mu\nu}^*) = \frac{1}{16} (\Sigma_{\mu\nu}^* \Sigma^{\mu\nu})^2 = 0 \quad ,$$

condição esta que é sempre satisfeita de acordo com a equação (3.5-40). Como consequência de (4.1-14) o campo  $A_\mu(y)$  deve ser tangente à superfície de evolução. Em termos físicos, isto significa que a corrente de London flui ao longo do string.

$$A^\mu(x) = \int d^4z \Delta(x-z) \partial_\nu G^{*\mu\nu}(z) \quad , \quad (4.1-16)$$

onde  $\Delta(x-z)$  é a função de Green apropriada. Por um cálculo direto pode-se obter uma lagrangiana efetiva em termos da qual a integral de ação pode ser posta sob a forma

$$S = \int d^2\xi d^2_{EF} = \frac{1}{4} g^2 m_V^2 \int d^2\xi d^2\xi' \Sigma_{\mu\nu}(\xi) \Delta(Z-Z') \Sigma^{\mu\nu}(\xi') \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int d\tau d\tau' \frac{(i)}{g} \frac{(j)}{g} \frac{(i)}{y} \frac{(j)}{y} (\xi) \Delta(y-y') \frac{(i)}{y} \frac{(j)}{y} (\xi')$$

$$- \sum_i m_{(i)} \int d\tau \sqrt{-\dot{y}^{(i) \cdot 2}} \quad (4.1-17)$$

O primeiro termo representa uma interação tipo Yukawa entre dois elementos de superfície; o segundo representa outra interação tipo Yukawa entre as correntes magnéticas, incluindo a interação; o último termo é o termo mecânico. Note que a integral de ação está definida na superfície de evolução e é independente da parametrização, tendo assim uma interpretação geométrica.

Observe que se  $m_V = 0$  reobtem-se a teoria de cargas magnéticas interagindo via o campo de Maxwell (de longo alcance) e o string não tem realidade física, como no caso que estudamos anteriormente. No entanto, com  $m_V \neq 0$  todo o panorama muda e o string adquire realidade física.

Entendendo-se os quarks como os transportadores das cargas magnéticas pode-se mostrar que estes não podem existir livres porque seria necessário uma energia infinita para alongar os strings indefinidamente. Assim, neste modelo tem-se sempre pares quark-antiquark ligados por strings, não podendo ocorrer quarks livres.

Uma análise mais profunda conduz a muitos aspectos interessantes, alguns relevantes para uma teoria das interações fortes. No entanto, para ser um modelo mais realista, seria necessário a sua generalização para incluir um campo de gauge não-abeliano.

#### 4.2 A dualidade de Born, strings e as teorias de Born-Infeld

A teoria dos strings admite uma simetria bastante interessante. As coordenadas  $y^\mu(\tau, \sigma)$ , que são campos sobre a superfície de evolução, devem satisfazer às condições de integrabilidade

$$\partial_a \partial_b y^\mu - \partial_b \partial_a y^\mu = 0 \quad (4.2-1)$$

$$(a, b = 1, 2) \quad .$$

Denotando  $v_a^\mu = \{\partial_a y^\mu\} = \{\dot{y}^\mu, y'^\mu\}$ , as condições acima se expressam como

$$\partial_a v_b^\mu - \partial_b v_a^\mu = 0 \quad , \quad (4.2-2)$$

ou, simbolicamente,

$$\overset{(2)}{\nabla} \times v^\mu = 0 \quad , \quad (4.2-3)$$

onde  $\overset{(2)}{\nabla}$  é o operador de derivação covariante sobre  $\Sigma$ . (Lembre que os coeficientes da conexão sobre  $\Sigma$  são simétricos.)

Como vimos na Seção 1.6, as equações de movimento expressam a lei de conservação da corrente de Poincarê definida por

$$j_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_a y^\mu)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial v_a^\mu} \quad , \quad (4.2-4)$$

com  $j_\mu = \{j_\mu^a\} = \{S_\mu, \pi_\mu\}$ . Tem-se que

-493-

$$\partial_a j^a{}_\mu = 0 \quad .$$

Estas equações podem ser postas sob a forma (1.10-21),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_{ab} y^\mu) = 0 \quad . \quad (4.2-5)$$

O lado esquerdo destas equações é exatamente a divergência do vetor  $v^\mu$ , de modo que podemos escrevê-las sob a forma

$$\overset{(2)}{\nabla} \cdot v^\mu = 0 \quad . \quad (4.2-6)$$

Definindo o dual do vetor  $v^\mu$ ,

$${}^*v^{a\mu} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{ab} v_b{}^\mu \quad , \quad (4.2-7)$$

$${}^*v_a{}^\mu = + \sqrt{-g} \epsilon_{ab} v^{b\mu} \quad , \quad (4.2-8)$$

pode-se verificar que, pela operação de dualidade,

$$\overset{(2)}{\nabla} \times v^\mu = 0 \longrightarrow \overset{(2)}{\nabla} \cdot {}^*v^\mu = 0 \quad (4.2-9)$$

e

$$\overset{(2)}{\nabla} \cdot v^\mu = 0 \longrightarrow \overset{(2)}{\nabla} \times {}^*v^\mu = 0 \quad (4.2-10)$$

Portanto, pelas transformações duais definidas acima, as condições de integrabilidade (4.2-1) e as equações de Euler-Lagrange trocam de papéis. A lagrangiana do string, por sua vez, tem a mesma forma funcional em ambas as variáveis.

Observemos que a simetria exibida acima tem um significado profundo já que equações dinâmicas se transformam em

condições de integrabilidade e vice-versa, e os conteúdos destas equações são essencialmente distintos.

Um detalhe que deve ser salientado é que as equações de Euler-Lagrange não são todas independentes pois devem satisfazer às identidades de Bianchi (1.5-12). Assim, tem-se apenas duas equações independentes e este número é igual à dimensão de  $\Sigma$ . Quanto às condições de integrabilidade, estas são em número de quatro.

Passemos à uma análise geral desta simetria. A questão que se põe é a seguinte: Quais as condições que uma teoria de campos deve satisfazer para que seja possível intercambiar as equações dinâmicas e as condições de integrabilidade via uma transformação de dualidade? As teorias para as quais estas condições podem ser estabelecidas são denominadas de "teorias duais no sentido de Born".

Consideremos um campo  $\{\psi^A(x)\}$ ,  $A = 1, \dots, N$ , definido num espaço-tempo de dimensão  $n$ . Denotemos  $\partial_\mu \psi^A \equiv \psi_\mu^A$ ; ao todo tem-se  $n.N$  quantidades  $\psi_\mu^A$ . As condições de integrabilidade

$$\partial_\mu (\partial_\alpha \psi^A) - \partial_\alpha (\partial_\mu \psi^A) = 0 \quad , \quad (4.2-11)$$

ou

$$\partial_\mu \psi_\alpha^A - \partial_\alpha \psi_\mu^A = 0 \quad (4.2-12)$$

estabelecem a igualdade das derivadas mistas como condições suficientes para a existência local dos potenciais  $\psi^A(x)$ , tais que  $\psi_\mu^A = \partial_\mu \psi^A$ . Este é o "lema de Poincarê", e é uma afirmação topológica sobre os campos  $\psi^A(x)$  que devem ser pelo me-

nos continuamente diferenciáveis. Tem-se  $N \frac{n(n-1)}{2}$  condições de integrabilidade.

As equações dinâmicas do sistema são as equações de Euler-Lagrange obtidas pelo princípio de Hamilton, com a lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\psi^A, \psi_\mu^A) .$$

Tem-se  $N$  equações,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^A} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi_\mu^A} \right) = 0 . \quad (4.2-13)$$

Comparando-se as equações (4.2-12) e (4.2-13) vê-se que os dois conjuntos de equações poderão se transformar entre si se duas condições (necessárias) forem satisfeitas. A primeira condição é que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^A} = 0 , \quad (4.2-14)$$

o que significa que a teoria deverá descrever um campo sem massa e na ausência de fontes,  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\psi_\mu^A)$ . A segunda condição é que os dois conjuntos tenham o mesmo número de equações, isto é,

$$N \frac{n(n-1)}{2} = N \implies n = 2 . \quad (4.2-15)$$

Concluimos então que uma teoria de campos com as condições de integrabilidade (4.2-12) e equações dinâmicas

(4.2.13) sô pode ser dual no sentido de Born num espaço-tempo bidimensional, com a lagrangiana dependendo apenas das derivadas dos campos,

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\psi_i^A) \quad , \quad \psi_i^A = \frac{\partial \Psi^A}{\partial \xi^i} \quad , \quad i = 1, 2.$$

Vê-se que as condições de dualidade de Born selecionam a dimensão do espaço-tempo onde os campos evoluem e impõe restrições na dinâmica dos campos. Na verdade, o princípio de dualidade põe as estruturas geométrica e topológica em pé de igualdade com a dinâmica.

Vamos definir as quantidades

$$\pi_A^i = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi_i^A} \quad . \quad (4.2.16)$$

As equações de movimento do sistema se escrevem

$$\partial_i \pi_A^i = 0 \quad . \quad (4.2.17)$$

Introduzindo os duais

$$\psi_A^{*i} = \epsilon^{ij} \psi_j^A \quad , \quad \pi_i^{*A} = \epsilon_{ij} \pi_A^i \quad , \quad (4.2.18)$$

onde  $\epsilon^{ij}, \epsilon_{ij}$  são os tensores de Levi-Civita apropriados, as condições de integrabilidade (4.2.12) e as equações de movimento (4.2.17) se transformam em

$$\partial_i \pi_j^{*A} - \partial_j \pi_i^{*A} = 0 \quad (4.2.19)$$

e

$$\partial_i \psi_A^{*i} = 0 \quad , \quad (4.2-20)$$

respectivamente. As equações de movimento no espaço dual, equações (4.2-19), são as extremais da "ação hamiltoniana"

$$\tilde{S} = \int d^2 \xi H(\pi^*) \quad ,$$

onde

$$H(\pi^*) = -\pi_A^i \psi_i^A = +\pi_i^{*A} \psi_A^{*i} \quad . \quad (4.2-21)$$

Observe que  $\psi_A^i = \partial H / \partial \pi_i^{*A}$ .

As condições de integrabilidade nem sempre são da forma considerada na discussão anterior. Em algumas teorias de campo as condições de integrabilidade são ditadas pelas simetrias impostas sobre a teoria. A eletrodinâmica de Maxwell no vácuo é um exemplo típico. A lagrangiana de Maxwell obedece ao primeiro critério de dualidade pois é função apenas das derivadas do potencial vetor  $A_\mu(x)$ . A imposição de invariância de gauge da teoria requer que esta dependência seja através da combinação invariante de gauge  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Resulta então que as condições de integrabilidade (isto é, as condições para a existência do potencial  $A_\mu(x)$ ) são

$$\partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0 \quad . \quad (4.2-22)$$

Num espaço-tempo n-dimensional tem-se

$$\frac{n(n-2)(n-1)}{3!}$$

condições. Observe que, como consequência da liberdade de gauge, estas condições não são todas independentes.

Em termos do tensor intensidade de campo as equações de movimento se escrevem

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) = 0 \quad (4.2-23)$$

que são  $n$  equações. O segundo critério de dualidade requer que se tenha

$$\frac{n(n-2)(n-1)}{3!} = n \longrightarrow n = 4 .$$

Portanto, a teoria de Maxwell no vácuo só é dual num espaço-tempo com 4 dimensões. A simetria dual pode ser verificada, sem dificuldades. Dela se origina a reciprocidade entre campos elétricos e magnéticos que, pelo que concluímos acima, só se verifica em 4 dimensões.

Outras teorias que satisfazem aos critérios de dualidade de Born são as teorias de Born-Infeld, cujas lagrangianas são do tipo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(F, G) = -\alpha^{-2} \sqrt{1 + \alpha^2 F^2 - \alpha^4 G^2} , \quad (4.2-24a)$$

onde

$$F^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = B^2 - E^2 \quad (4.2-24b)$$

$$G = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \vec{B} . \quad (4.2-24c)$$

No espaço-tempo de Minkowski e para o caso particu

lar  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  a lagrangiana de Born-Infeld se escreve

$$\mathcal{L} = \alpha^{-2} \sqrt{1 + \alpha^2 F^2} \quad (4.2.25)$$

Com a intensidade dos campos medida relativamente ao parâmetro  $\alpha^{-1}$  esta lagrangiana, no "limite de campo forte"  $F^2 \gg \alpha^{-2}$ , se reduz a

$$\mathcal{L} = -\alpha^{-1} \sqrt{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \quad (4.2.26)$$

que, com  $\alpha^{-1} = N$ , é a lagrangiana de Nielsen-Olesen.

Como veremos mais adiante, uma teoria de campo baseada na lagrangiana (4.2.26) admite soluções tipo string. Uma possível interpretação destas soluções é que em regiões do espaço-tempo onde os campos são muito fortes (no sentido dado acima), estes tendem a se agregar em configurações estáveis tipo strings.

Levando em conta que as teorias tipo Born-Infeld, Maxwell e strings admitem uma estrutura topológica e geométrica semelhantes, não é de se estranhar que admitam (pelo menos) uma classe de soluções comuns. Todas satisfazem aos critérios de dualidade de Born, o que estabelece uma identidade estrutural entre elas. Estas teorias podem ser descritas geometricamente em termos de bivectores, o que permite exibir a sua semelhança formal.

Uma relação entre strings e campos de Maxwell de posto 2 ( $F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = 0$ ) foi desenvolvida por Kastrup e Rinke, com base na relação  $\Sigma_{\mu\nu} = \lambda F_{\mu\nu}$ ,  $\lambda = c \frac{te}{\dots}$ . As demonstrações apresentadas por estes autores não nos parecem convincentes e,

por esta razão não serão discutidas.

A relação entre a teoria do string e os modelos tipo Born-Infeld num espaço-tempo bidimensional pode ser exibida sem dificuldades. O modelo mais simples que pode ser construído é o de um campo escalar sem massa  $\phi(t,x)$  com lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = -\alpha^{-2} \sqrt{1 + \alpha^2 [(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 - (\frac{\partial \phi}{\partial t})^2]} \quad (4.2-27)$$

A equação de movimento se escreve

$$\left[ \alpha^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - \left[ \alpha^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2-28)$$

No limite  $\alpha \rightarrow \infty$  a lagrangiana (4.2-27) se reduz à lagrangiana livre do campo  $\phi(t,x)$  e a equação (4.2-28) é a equação de d'Alembert.

O problema pode ser formulado sob forma paramétrica da seguinte maneira. A função  $\phi(t,x)$  descreve uma superfície num espaço-tempo tridimensional com coordenadas  $t, x, Z = \alpha \phi(t,x)$ . Esta superfície pode ser especificada parametricamente introduzindo-se um vetor de Lorentz  $y^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2$ , que depende de dois parâmetros,  $\tau$  e  $\sigma$ , com componentes dadas por

$$\left[ y^\mu(\tau, \sigma) \right] = \left\{ t(\tau, \sigma), x(\tau, \sigma), Z(\tau, \sigma) = \alpha \phi(t(\tau, \sigma), x(\tau, \sigma)) \right\} \quad (4.2-29)$$

Tem-se que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^{-2} \frac{\dot{Z}x' - x'\dot{Z}}{x'\dot{t} - \dot{x}t'}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha^{-2} \frac{Z't - \dot{Z}t'}{x'\dot{t} - \dot{x}t'} \quad (4.2-30a)$$

$$dxdt = (x'\dot{t} - \dot{x}t')d\tau d\sigma \quad (4.2.30b)$$

Com estes resultados a integral de ação correspondente à lagrangiana (4.2.27) fica sob a forma

$$\begin{aligned} S &= -\alpha^{-2} \int dt dx \sqrt{1 + \alpha^2 \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right]} = \\ &= -\alpha^{-2} \int d\tau d\sigma \sqrt{(y \cdot y')^2 - y^2 y'^2} \quad , \quad (4.2.31) \end{aligned}$$

que é a integral de ação para um string relativístico infinito num espaço-tempo tridimensional (t,x,z).

A forma mais geral de uma lagrangiana do tipo Born-Infeld para N campos  $\phi_k$  num espaço-tempo bidimensional (t,x) que se reduz à lagrangiana do string num espaço (N+2)-dimensional quando se introduz os parâmetros  $\tau$  e  $\sigma$ , é dada pela expressão

$$\mathcal{L}_0 = -\alpha^{-2} \sqrt{\left[ 1 + \alpha^2 \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 \right] \left[ 1 - \alpha^2 \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial t} \right)^2 \right] + \left[ \alpha^2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} \right]^2} \quad (4.2.32)$$

Esta lagrangiana descreve, simultaneamente, um sistema de campos escalares não lineares tipo Born-Infeld e um string relativístico infinito.

Consideremos a lagrangiana da eletrodinâmica de Born-Infeld, expressão (4.2.24a), e suponhamos que o potencial  $A_\mu(x)$  descreve uma onda plana que se propaga ao longo do eixo  $x^1$ . Neste caso,  $A_\mu = A_\mu(t, x^1)$  e se eliminarmos o campo elétrico ao longo do eixo  $x^1$ ,  $F_{01} = 0$ , a lagrangiana

(4.2.24a) conterá apenas as componentes  $A_2(t, x)$  e  $A_3(t, x)$  do potencial. Pode-se verificar que

$$\mathcal{L}_0 = -\alpha^{-1} \sqrt{\left[ 1 + \alpha^{-2} \sum_{i=2,3} \left( \frac{\partial A_i}{\partial x} \right)^2 \right] \left[ 1 - \alpha^{-2} \sum_{i=2,3} \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] + \left[ \alpha^{-2} \sum_{i=2,3} \frac{\partial A_i}{\partial x} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right]^2} \quad (4.2.33)$$

Introduzindo-se as variáveis  $(\tau, \sigma)$  a integral de ação construída com esta lagrangiana corresponde a um string no espaço-tempo quadridimensional  $(t, x^1, \alpha A_2, \alpha A_3)$ .

#### 4.3 Uma teoria de campo para o string: o modelo de Nielsen - Olense

Vamos agora apresentar uma teoria de campo para o string desenvolvida por Nielsen e Olense, baseada na lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}} \quad (4.3.1)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.3.2)$$

Em virtude da lagrangiana (4.3.1) ser não linear e não analítica, a teoria geral é bastante complicada. Muitas dificuldades ocorrem inevitavelmente se considerarmos uma região do espaço-tempo onde exista um aglomerado de strings pois

neste caso teríamos que levar em conta a interação entre strings. Assim, vamos considerar uma região do espaço-tempo onde existe apenas um string. Uma outra dificuldade surge ao se considerar strings abertos devido às condições de bordo. Ao longo desta seção daremos alguns argumentos que nos mostram que no caso de strings abertos não é possível introduzir os potenciais. O modelo é, portanto, bastante simplificado: um único string fechado. Apesar disto, a teoria que resulta é bastante interessante e justifica a sua construção.

Começaremos por fazer uma "escolha" do tensor  $\mathcal{F}'_{\mu\nu}$ , relacionando-o com as coordenadas da superfície de evolução  $\Sigma$ . Como este tensor deve ser singular, definido apenas sobre  $\Sigma$ , vamos fazer a escolha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{\mu\nu}(y) &= \int d^2\xi \Sigma^*_{\mu\nu}(z) \delta^{(4)}(y-z(\xi)) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int d^2\xi \epsilon^{ab} \frac{\partial z^\alpha}{\partial \xi^a} \frac{\partial z^\beta}{\partial \xi^b} \delta^{(4)}(y-z(\xi)) \quad . \quad (4.3-3) \end{aligned}$$

Mostremos que este tensor pode ser expresso em termos de potenciais, equação (4.3-2). Para isto precisamos mostrar que o dual  $\mathcal{F}^*$  tem divergência nula. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{*\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \int d^2\xi \delta^{(4)}(y-z(\xi)) \epsilon^{ab} \frac{\partial z^\lambda}{\partial \xi^a} \frac{\partial z^\rho}{\partial \xi^b} = \\ &= \int d^2\xi \epsilon^{ab} \frac{\partial z^\alpha}{\partial \xi^a} \frac{\partial z^\beta}{\partial \xi^b} \delta^{(4)}(y-z(\xi)) \quad . \quad (4.3-4) \end{aligned}$$

Calculando a divergência

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} &= \int d^2\xi \epsilon^{ab} \frac{\partial Z^\beta}{\partial \xi^b} \frac{\partial Z^\alpha}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) = \\
&= - \int d^2\xi \epsilon^{ab} \frac{\partial Z^\beta}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial \xi^a} \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) = \\
&= \int d^2\xi \epsilon^{ab} \frac{\partial^2 Z^\beta}{\partial \xi^a \partial \xi^b} \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) - \\
&\quad - \int d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left( \epsilon^{ab} \frac{\partial Z^\beta}{\partial \xi^a} \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) \right) = \\
&= - \int d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left( \epsilon^{ab} \frac{\partial Z^\beta}{\partial \xi^b} \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) \right) .
\end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que o termo da direita da expressão acima se anula se o string for fechado e se  $(\tau_1, \tau_f) = (-\infty, +\infty)$ . Nestas condições

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.3.5)$$

e o tensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  pode ser expresso em termos de potenciais como em (4.3.2).

Demonstraremos agora que a integral de ação

$$S = - \frac{1}{2} \int d^4y \sqrt{\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}} = \quad (4.3.6a)$$

$$= - \frac{1}{2} \int d^4y \sqrt{-\overset{*}{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \overset{*}{\mathcal{F}}^{\mu\nu}} \quad (4.3.6b)$$

com  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  dado por (4.3.3) se reduz à integral de ação de Nambu. A demonstração é imediata: usando (4.3.4) podemos escrever que

$$\begin{aligned} \sqrt{-g^2} &= \left( \int d^2 \xi \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) \right)^{1/2} \sqrt{-\Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}} = \\ &= \int d^2 \xi \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) \sqrt{-\Sigma_{\mu\nu}(Z) \Sigma^{\mu\nu}(Z)}, \end{aligned} \quad (4.3-7)$$

onde na última passagem "extraímos a raiz quadrada" do quadrado da integral sobre a função  $\delta^{(4)}(y-Z(\xi))$ , uma operação que pode ser justificada pelo procedimento usual de aproximação de  $\delta(x)$  por um limite de seqüências de funções ordinárias. Substituindo (4.3-7) em (4.3-6) obtêm-se

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int d^2 \xi \int d^4 y \delta^{(4)}(y-Z(\xi)) \sqrt{-\Sigma_{\mu\nu}(Z) \Sigma^{\mu\nu}(Z)} = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^2 \xi \sqrt{-\Sigma_{\mu\nu}(g) \Sigma^{\mu\nu}(g)}, \end{aligned} \quad (4.3-8)$$

que, a menos de fatores constantes, é a ação de Nambu, expressão (4.3-8).

Passemos agora à análise das equações de movimento. Da integral de ação (4.3-6a) obtêm-se

$$\partial_\mu \left( \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{g^2}} \right) = 0, \quad (4.3-9)$$

enquanto que da ação de Nambu (1.3-1) obtêm-se as equações (4.5-48). Apesar de termos demonstrado que com a escolha (4.3-3) a ação (4.3-6) se reduz à ação de Nambu isto não significa que as equações de movimento são as mesmas. Este argumento pode ser levantado observando-se que os respectivos

princípios variacionais atuam em espaços diferentes. A demonstração de que as equações (4.3-9) se reduzem às equações de movimento do string em termos das coordenadas da superfície de evolução pode ser feita diretamente a partir de (4.3-9) ou usando a lei de conservação do tensor momento energia obtido de (4.3-6). Optaremos por este último procedimento por ser mais simples.

Utilizando os métodos apresentados no Capítulo 0, encontra-se que

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{G}_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\rho\beta}}{\sqrt{\mathcal{G}^2}} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \sqrt{\mathcal{G}^2} \quad (4.3-10)$$

$$= \frac{\mathcal{G}_{\alpha\rho}^* \mathcal{G}^{\rho\beta}}{\sqrt{-\mathcal{G}^2}} \quad (4.3-11)$$

Observe que o traço deste tensor não é nulo,

$$T^{\alpha}_{\alpha} = \sqrt{-\mathcal{G}^2} = \sqrt{\mathcal{G}^2} \quad (4.3-12)$$

Usando (4.4-4) podemos escrever que

$$T_{\alpha\beta} = \int d^2\xi \delta^{(4)}(\mathbf{y}-\mathbf{z}(\xi)) \frac{\Sigma_{\alpha\rho} \Sigma^{\rho\beta}}{\sqrt{-\Sigma^2}} \quad (4.3-13)$$

Impondo a lei de conservação de  $T_{\alpha\beta}$ ,

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{\beta} T^{\alpha\beta} &= \int d^2\xi \frac{1}{\sqrt{-\Sigma^2(\mathbf{z})}} \Sigma^{\alpha\rho} \Sigma_{\rho}^{\beta} \frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \delta^{(4)}(\mathbf{y}-\mathbf{z}(\xi)) = \\ &= \int d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^b} \left( \frac{\Sigma^{\alpha}_{\rho}}{\sqrt{-\Sigma^2}} \epsilon^{ab} \frac{\partial z^{\rho}}{\partial \xi^a} \right) \delta^{(4)}(\mathbf{y}-\mathbf{z}(\xi)) + \\ &+ (\text{termo de fronteira}) \quad . \end{aligned}$$

O termo de fronteira na expressão acima se anula pelas condições de contorno em  $Z^0 = \pm\infty$  e porque estamos considerando strings fechados. Segue então que deve-se ter

$$\frac{\partial}{\partial \xi^b} \left( \frac{\Sigma^\alpha_\rho}{\sqrt{-\Sigma^2}} \epsilon^{ab} \frac{\partial Z^\rho}{\partial \xi^a} \right) = 0 \quad (4.3-14)$$

Usando a expressão (1.2-15) das componentes  $g^{ab}$  da métrica sobre  $\Sigma$ , é trivial verificar que a equação acima se reduz à forma (1.10-21) das equações do string.

Finalmente precisamos demonstrar que  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  definido por (4.3-3) satisfaz às equações (4.3-9). Observe que já demonstramos que, impondo que  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  e usando (4.3-3), tem-se as equações de movimento (4.3-14). Agora, supondo que as equações (4.3-14) são válidas, queremos demonstrar que implica que as equações (4.3-9) são sempre satisfeitas. Das equações (4.3-5) tem-se

$$\mathcal{F}^*_{\alpha\nu} \partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.3-15)$$

donde se obtém

$$\mathcal{F}^*_{\mu\nu} \partial_\alpha \mathcal{F}^{\mu\nu} = 2 \mathcal{F}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{F}^*_{\alpha\nu} \quad (4.3-16)$$

Calculando a divergência de  $T_{\mu\nu}$  dado por (4.3-17) e usando (4.3-15) e (4.3-16), obtemos

$$0 = \partial_\mu T^\mu_\alpha = \mathcal{F}^\nu_\alpha \partial_\mu \left( \frac{\mathcal{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) + \frac{\mathcal{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \partial_\mu \mathcal{F}^\nu_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^{\mu\nu} \partial_\alpha \mathcal{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \quad (4.3-17)$$

donde segue que

$$\mathcal{F}^{\mu}{}_{\alpha} \partial_{\nu} \left( \frac{\mathcal{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) = 0 \quad (4.3-18)$$

Levando em conta que o bivetor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  é simples, tem-se que  $\det(\mathcal{F}_{\mu\nu}) = 0$  e portanto a matriz  $(\mathcal{F}_{\mu\nu})$  é degenerada. Logo, não podemos concluir a partir de (4.3-18) que as equações (4.3-9) são satisfeitas. Observe que este fato é consequência da existência de vínculos associados com o sistema. (Compare as equações (4.3-18) com (4.3-9).)

Os argumentos que precisamos para demonstrar o que queremos são simples: é suficiente demonstrar que as equações (4.3-9) seguem de (4.3-18) num referencial particular. A covariância da teoria garante a validade dos resultados em todos os referenciais. Assim, consideremos um referencial no qual apenas  $\mathcal{F}_{23} = -\mathcal{F}_{32}$  é diferente de zero. Neste caso, como  $\mathcal{F}_{\mu\nu}/\sqrt{\mathcal{F}^2}$  é uma função homogênea de grau zero, suas derivadas nas direções 2 e 3 são nulas. Levando em conta que

$$\frac{\mathcal{F}_{\mu\nu}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \frac{\mathcal{F}^{*\mu\nu}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} = 0 \quad (4.3-19)$$

tem-se

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\mathcal{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \partial_1 \left( \frac{\mathcal{F}^{\alpha\beta}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) \quad (4.3-20)$$

No referencial escolhido segue desta última equação que

$$\partial_1 \left( \frac{\mathcal{F}^{01}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) = 0 \quad (4.3-21)$$

Com a observação feita acima sobre a homogeneidade de  $\mathcal{F}_{\mu\nu}/\sqrt{\mathcal{F}^2}$  podemos escrever

$$\partial_\alpha \left( \frac{\mathcal{F}^{\alpha 1}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) = 0 \quad , \quad \partial_\alpha \left( \frac{\mathcal{F}^{\alpha 0}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) = 0 \quad (4.3-22a)$$

que são duas das equações (3.3-9). As outras duas equações,

$$\partial_\alpha \left( \frac{\mathcal{F}^{\alpha 1}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) = 0 \quad , \quad \partial_\alpha \left( \frac{\mathcal{F}^{\alpha 0}}{\sqrt{\mathcal{F}^2}} \right) = 0 \quad (4.3-22b)$$

seguem diretamente de (4.3-18). Assim, fica demonstrado que as equações (4.3-9) serão satisfeitas sempre que as equações (4.3-14) o forem.

Na demonstração precedente usamos que  $\mathcal{F}_{\mu\nu}/\sqrt{\mathcal{F}^2}$  é uma função homogênea de grau zero. Devido a este fato as equações de movimento (4.3-9) são invariantes pela transformação

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(y) \rightarrow \Delta(y) \mathcal{F}_{\mu\nu}(y) \quad (4.3-23)$$

onde  $\Delta(y)$  é uma função escalar. A validade das condições de integrabilidade (4.3-5) impõe restrições sobre  $\Delta(y)$ :

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta = 0 \quad (4.3-24)$$

Esta equação nos diz que  $\Delta(y)$  só pode variar em planos perpendiculares ao string. Isto também pode ser visto a partir da lei de conservação do tensor momento-energia (4.3-10). Para o campo transformado a lei de conservação  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  conduz a

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left( \frac{\Sigma^{\mu\nu}}{\sqrt{-\Sigma^2}} \epsilon^{ab} \frac{\partial g^{\nu}}{\partial \xi^b} \Delta(y) \right) = 0 \quad .$$

Usando as equações de movimento (4.3-14) resulta da expressão acima

$$\Sigma_{\mu\nu} \epsilon^{ab} \frac{\partial g^{\nu}}{\partial \xi^a} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi^b} = 0 \quad . \quad (4.3-25)$$

Contraindo esta expressão com  $\dot{g}^{\mu}$  e  $g^{\mu}$  obtêm-se

$$\frac{\partial \Delta(Y)}{\partial \tau} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Delta(Y)}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.3-26)$$

de modo que  $\Delta(y)$  é constante sobre  $\Sigma$ . A existência desta simetria nos diz que nem todas as soluções das equações (4.3-9) são fisicamente admissíveis mas só aquelas que satisfazem às condições de integrabilidade (4.3-5).

Com relação ao momento total e o momento angular total dados por

$$P_{\mu} = \int d^3z T_{0\mu} \quad ,$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^3z (z^{\mu} T_0^{\nu} - z^{\nu} T_0^{\mu})$$

pode-se verificar que conduzem aos mesmos resultados que foram obtidos na Seção 1.6 usando-se a lagrangiana de Nambu.

Um ponto muito importante é a construção explícita da solução singular tipo string para a teoria de campo com a lagrangiana (4.3-1). Sob o ponto de vista topológico a existência deste tipo de solução é bastante natural, e está em

perfeito acordo com o que foi feito na Seção 4.2. O campo  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  fica representado em todo espaço-tempo como o limite contínuo de uma superposição de superfícies de evolução de strings. Tratando os strings como singularidades do campo  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  suas equações de movimento são, de certa forma, consequências das equações do campo. Neste ponto tem-se uma analogia com a relatividade geral onde as singularidades do campo têm suas equações de movimento determinadas pelas equações do campo.

Uma possível interpretação física da teoria foi feita por Nielsen e Olesen. Fisicamente um string representa uma superposição de ressonâncias, e um aglomerado de string numa região do espaço-tempo representa uma concentração de matéria hadrônica. Assim, é natural tomar os campos básicos como quantidades que meçam esta concentração. (Mantemos a hipótese feita no início da seção de que os strings não colidem.)

A evolução temporal da matéria hadrônica fica descrita em termos de dois campos vetoriais,

$$\mathcal{B}_i(y) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} j_k(y) \quad , \quad \mathcal{E}_k(y) = \mathcal{F}_{0k}(y)$$

O campo  $\vec{\mathcal{B}}(t, \vec{y})$  representa a densidade de strings que se movem na direção  $\vec{\mathcal{B}}$ . A componente  $\mathcal{B}_z$ , por exemplo, é proporcional ao número de strings que se movem na direção Z, atravessando a unidade da área no plano XY, numa vizinhança de  $\vec{y}$  no instante t. É claro que esta definição só faz sentido se por cada ponto do espaço, num dado instante, passa apenas um string. O campo  $\vec{\mathcal{E}}$  é proporcional ao número de strings que passam pela unidade de comprimento na direção  $\vec{\mathcal{E}}$ , por unidade de

tempo. O fluxo total de strings através de um elemento de superfície  $dS^{\mu\nu}$  do espaço-tempo fica dado por  $d\Phi = \mathcal{F}_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ .

Usando esta interpretação pode-se dar um argumento segundo o qual só podemos introduzir potenciais na teoria se os strings forem fechados. Consideremos dois strings  $s_1$  e  $s_2$  e suponhamos que  $s_2$  é obtido de  $s_1$  por uma deformação. Suponhamos agora que movemos gradualmente  $s_1$  sobre  $s_2$ . De qualquer maneira que isto for feito tem-se uma deformação de  $s_1$  sobre  $s_2$  através de alguma superfície limitada por  $s_1$  e  $s_2$ . Se considerarmos duas destas superfícies a diferença na integral do fluxo de strings fica dada pelo teorema de Gauss,

$$\int_I \mathcal{F}_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} - \int_{II} \mathcal{F}_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = \int dV^\alpha (\epsilon_\alpha^{\beta\mu\nu} \partial_\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}) ,$$

onde  $dV^\alpha$  é o elemento de volume entre as duas superfícies. Se os pontos extremos de  $s_1$  e  $s_2$  não forem envolvidos no processo de deformação é de se esperar que não seja importante, sob o ponto de vista físico, sobre qual superfície  $s_1$  é deformado sobre  $s_2$ . Neste caso, segue da expressão anterior que  $\partial_\beta \mathcal{F}^{*\alpha\beta} = 0$ . Agora se os pontos extremos forem envolvidos na deformação, não se pode esperar que a deformação seja independente da superfície e a diferença entre os fluxos pode não se anular.

Muitas questões ficam em aberto. Uma delas é a obtenção dos potenciais  $A_\mu$ . Lembremos que as equações de movimento (4.3.9) foram obtidas (4.3.6a) por variações com relação aos potenciais mas a partir deste ponto todos os desenvolvimentos foram feitas em termos do tensor intensidade de cam-

po. A teoria admite uma liberdade de gauge tanto sob o ponto de vista dos potenciais como das coordenadas  $y^\mu$  da superfície de evolução. Pode-se perguntar então qual a relação entre as duas escolhas de gauge. Tem-se também a possibilidade de se formular toda a teoria em termos do tensor intensidade de campo, caso em que as condições de integrabilidade são tratadas como vínculos sobre o tensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ . Estes e outros aspectos da teoria estão sendo estudados e serão publicados em breve.

#### 4.4 Configurações de string em teorias de gauge I

Vamos considerar um sistema constituído de um campo de gauge não-abeliano e duas partículas com carga elétrica de cor. Escreveremos a integral de ação para o sistema sob a forma:

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} \mathbb{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbb{F}^{\mu\nu} + \mathbb{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbb{G}^{\mu\nu} \right] - m \int d\tau \left[ \sqrt{-\dot{X}_1^2} + \sqrt{-\dot{X}_2^2} \right], \quad (4.4-1)$$

onde

$$G_a^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma I_a(Z) \Sigma^{\mu\nu}(Z) \delta^4(X-Z(\xi)), \quad (4) \quad (4.4-2a)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.4-2b)$$

$$X_i^\mu(\tau) = Z^\mu(\tau, \sigma_i), \quad i = 1, 2. \quad (4.4-2c)$$

é a carga de cor transportada pelo string, e não está sendo tratada como uma variável dinâmica da teoria mas como um funcional de  $Z(\tau, \sigma)$ . Note que o string se acopla ao campo de gauge via um termo tipo de Pauli já que um acoplamento mínimo se reduziria ao do campo de gauge com as extremidades do string. É importante observar também que a ação (4.4-1) não contém a ação livre do string.

Do princípio da ação com relação aos potenciais obtém-se a seguinte equação para o campo de gauge:

$$D_{\mu}^{ab} F_b^{\mu\nu} = 2 D_{\mu}^{ab} G_b^{\mu\nu} \quad (4.4-3)$$

Fazendo uso da identidade

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\partial I_a}{\partial \tau} Z^{\mu} \delta^{(4)}(x-Z(\tau, \sigma)) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma I_a(Z) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ Z^{\mu} \delta^{(4)}(x-Z(\tau, \sigma)) \right] \quad (4.4-4)$$

e da definição (4.4-2a), a equação (4.4-3) pode ser escrita sob a forma

$$D_{\mu}^{ab} F_b^{\mu\nu} = \sum_{i=1,2} (-1)^i g \int d\tau I_a(x_i) \dot{Z}^{\nu}(\tau, \sigma_i) \delta^{(4)}(x-Z(\tau, \sigma_i)) + g \int d\tau \int d\sigma (D_{\mu}^{ab} I_b(Z)) \Sigma^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-Z(\tau, \sigma)) \quad (4.4-5)$$

Como a carga de cor do string não é uma variável dinâmica da teoria, e portanto não é fonte do campo de gauge, podemos sim

plificar a equação acima impondo o vínculo

$$D_{\mu}^{ab} I_b(z) = 0 \quad (4.4-6)$$

Com esta condição a equação (4.4-5) fica sob a forma

$$D_{\mu}^{ab} F_b^{\mu\nu} = \sum_{i=1,2} (-1)^i g \int d\tau I_a^{\mu}(x_i) \frac{dx_i^{\nu}}{d\tau} \delta^{(4)}(x-x_i) \quad (4.4-7)$$

onde apenas as cargas de cor  $\pm g I_a(x_i)$  atuam como fontes. (Observe que o vínculo (4.4-6) é compatível com a equação (4.4-7): usando que  $[D_{\mu}, D_{\nu}]^{ac} = g C^{abc} F_{b\mu\nu}$  tem-se que  $D_{\mu}^{ab} D_{\nu}^{bc} F_c^{\mu\nu} = 0$ ). Uma solução desta equação é

$$F_a^{\mu\nu}(x) = 2G_a^{\mu\nu}(x) = g \int d\tau d\sigma I_a(z) \Sigma^{\mu\nu}(z) \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \quad (4.4-8)$$

Esta expressão nos diz que a solução das equações de movimento dos campos de gauge correspondem ao movimento de um string. O campo  $F_a^{\mu\nu}(x)$ , dado pela expressão acima, se concentra ao longo do string (e se anula fora dele), e as linhas de força do campo cromoeletrico tem a direção da tangente ao string em cada ponto. De fato, no referencial  $z^0 = \tau$  encontra-se que

$$E_a^i(\tau, \vec{x}) = -g \int d\sigma I_a(z(\tau, \sigma)) \frac{\partial z^i}{\partial \sigma} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}) \quad (4.4-9)$$

Substituindo a solução (4.4-8) no segundo termo da ação (4.4-1) obtém-se

$$S_{EF} = \frac{g^2}{4} \int d\tau d\sigma \int d\bar{\tau} d\bar{\sigma} \Sigma_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(z) \Sigma^{\mu\nu}(\bar{z}) I_a^{\alpha}(z) I_a^{\beta}(\bar{z}) \delta^{(4)}(z-\bar{z}) \quad (4.4-10)$$

(Compare com a expressão (4.1-17).) Para calcular a integral sobre  $(\bar{\tau}, \bar{\sigma})$  vamos escolher um referencial no qual  $Z'^{\mu}$  coincide com o eixo 3, e admitir que o string tem uma espessura com raio  $a$ . Assim, a função  $\delta^{(4)}(Z - \bar{Z})$  pode ser "espalhada" de maneira "transversalmente constante" da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(Z(\tau, \sigma) - \bar{Z}(\bar{\tau}, \bar{\sigma})) &= \delta(Z^0 - \bar{Z}^0) \delta(Z^3 - \bar{Z}^3) \delta^{(2)}(\vec{Z}_{\perp} - \vec{\bar{Z}}_{\perp}) \\ &= \frac{\delta(\sigma - \bar{\sigma}) \delta(\tau - \bar{\tau})}{\sqrt{-g}} \frac{1}{\pi a^2}, \quad (4.4-11a) \end{aligned}$$

onde  $\sqrt{-g} = \dot{Z}^0 Z'^3 - Z'^0 \dot{Z}^3$ , e  $\delta^{(2)}(\vec{Z}_{\perp})$  é escolhida de tal modo que

$$\delta^{(2)}(\vec{Z}_{\perp}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & |\vec{Z}_{\perp}| < a \\ 0, & |\vec{Z}_{\perp}| > a \end{cases} \quad (4.4-11b)$$

Com estes resultados, e usando a forma covariante de  $\sqrt{-g}$ , a expressão (4.4-10) pode ser integrada resultando

$$S_{EF} = - \frac{g}{2\pi a^2} \int d\tau d\sigma (I^a(Z) I_a(\bar{Z})) \sqrt{-g} \quad (4.4-12)$$

Da equação de vínculo (4.4-6) segue que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \vec{I}^2 = \frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{I}^2 = 0 \quad (4.4-13)$$

o que significa que

$$\dot{\vec{I}}^2 = c \frac{te}{\alpha'} \quad (4.4-14)$$

Assim, a integral de ação efetiva para o string fica sob a forma

$$S_{EF} = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dt d\sigma \sqrt{-g} \quad (4.4-15)$$

com

$$\alpha' = \frac{a^2}{(g\dot{\vec{I}})^2} = c \frac{te}{\alpha'} \quad , \quad (4.4-16)$$

o que quer dizer que a inclinação da trajetória de Regge neste modelo é da mesma ordem que a espessura do string, e é constante como consequência do vínculo (4.4-6). Isto significa que, como o spin de cor dos "gluons" executa um movimento de precessão, a tensão do string permanece constante.

Usando (4.4-11) podemos calcular o tensor intensidade de campo sobre o string. No interior do string obtém-se

$$F_a^{\mu\nu}(z) = \frac{g}{\pi a^2} I_a(z) \frac{\Sigma^{\mu\nu}(z)}{\sqrt{-g}} \quad , \quad (4.4-17a)$$

e nas extremidades

$$F_a^{\mu\nu}(x_i) = \frac{g}{2\pi a^2} I_a(x_i) \frac{\Sigma^{\mu\nu}(x_i)}{\sqrt{-g}} \quad . \quad (4.4-17b)$$

De (3.5-51) e (4.4-17a) segue que

$$F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a = -2 \left( \frac{g\dot{\vec{I}}}{\pi a^2} \right)^2 = c \frac{te}{\alpha'} \quad . \quad (4.4-18)$$

Para obter as equações de movimento para o string

e para as cargas de cor calculemos a variação da ação com relação a  $Z^\mu(\xi)$  e  $X^\mu_i(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \delta S = & -m \int d\tau \left[ \frac{\dot{X}_1}{\sqrt{-\dot{X}_1^2}} \frac{d}{d\tau} (\delta X_1) + \frac{\dot{X}_2}{\sqrt{-\dot{X}_2^2}} \frac{d}{d\tau} (\delta X_2) \right] \\ & + \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) g \int d\tau d\sigma \left( \dot{Z}^\mu Z^\nu \delta Z^\alpha \frac{\partial I_a}{\partial Z^\alpha} \delta(X-Z(\xi)) \right. \\ & \left. - \dot{Z}^\mu Z^\nu I_a \delta Z^\alpha \frac{\partial}{\partial Z^\alpha} \delta(X-Z(\xi)) \right) \\ & + \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) g \int d\tau d\sigma \delta(\dot{Z}^\mu Z^\nu) I_a(Z) \delta(X-Z(\xi)) \end{aligned} \quad (4.4-19)$$

O segundo termo da expressão (4.4-19) dá contribuição nula para a variação. De fato, usando a equação de vínculo (4.4-6) e a equação (4.4-17a), obtém-se

$$\begin{aligned} \int d\tau d\sigma \dot{Z}^\mu Z^\nu F_{\mu\nu}^a(Z) \frac{\partial I_a(Z)}{\partial Z^\alpha} \delta Z^\alpha &= -\frac{g}{2} \int d\tau d\sigma \Sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a C_{abc} A^b_\alpha I_c \delta Z^\alpha \\ &\sim \frac{g}{2} \int d\tau d\sigma \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} I_a I_c C_{abc} A^b_\alpha \delta Z^\alpha = 0 \end{aligned}$$

devido à antissimetria das constantes de estrutura. Por outro lado, utilizando a relação

$$f(x)g(x') \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') = f(x')g(x') \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \delta(x-x')$$

segue que

$$\begin{aligned}
& \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) \dot{z}^\mu z'^\nu I_a(z) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \delta z^\alpha = \\
& = F_{\mu\nu}^a(z) \dot{z}^\mu z'^\nu I_a(z) \delta z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \int d^4x \delta^{(4)}(x-z(\xi)) + \\
& \quad + \int d^4x (\partial_\alpha F_{\mu\nu}^a) \dot{z}^\mu z'^\nu I_a \delta z^\alpha \delta^{(4)}(x-z(\xi)) = \\
& = (\partial_\alpha F_{\mu\nu}^a) \dot{z}^\mu z'^\nu I_a \delta z^\alpha = \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} (\partial_\alpha F_{\mu\nu}^a) I_a \delta z^\alpha
\end{aligned}$$

$$\sim (F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a) = 0$$

Com estes resultados a variação da ação com relação a  $z^\alpha(\xi)$  resulta em

$$+ g \int d\tau d\sigma F_{\mu\nu}^a(z) I_a(z) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta z^\mu) z'^\nu + \dot{z}^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta z^\mu) \right] \quad (4.4.20)$$

Podemos ainda fazer integrações parciais nesta expressão. Do primeiro termo resulta

$$\begin{aligned}
\int d\tau d\sigma F_{\mu\nu}^a I_a \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta z^\mu) z'^\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ F_{\mu\nu}^a I_a z'^\nu \delta z^\mu \right] \\
&\quad - \int d\tau d\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ F_{\mu\nu}^a I_a z'^\nu \right] \delta z^\mu,
\end{aligned}$$

onde o primeiro termo do lado direito se anula pelas condições usuais no infinito. Do segundo termo de (4.4.20) resulta

$$\begin{aligned}
& \int d\tau d\sigma F_{\mu\nu}{}^a I_a \dot{z}^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta z^\nu) = \int d\tau d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ F_{\mu\nu}{}^a I_a \dot{z}^\mu \delta z^\nu \right] \\
& \quad - \int d\tau d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ F_{\mu\nu}{}^a I_a \dot{z}^\mu \right] \delta z^\nu = \\
& = \sum_{i=1,2} (-1)^i \int d\tau F_{\mu\nu}{}^a (X_i) I_a (X_i) \dot{X}_i^\mu \delta X_i^\nu \\
& \quad - \int d\tau d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ F_{\mu\nu}{}^a I_a \dot{z}^\nu \right] \delta z^\nu .
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever a forma final da variação da ação:

$$\begin{aligned}
\delta S = & -m \int \left[ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{X}_1^\mu}{\sqrt{-\dot{X}_1^2}} \right) \delta X_1^\mu + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{X}_2^\mu}{\sqrt{-\dot{X}_2^2}} \right) \delta X_2^\mu \right] d\tau \\
& + \int d\tau \sum_{i=1,2} (-1)^i g F_{\mu\nu}{}^a (X_i) I_a \dot{X}_i^\mu \delta X_{i\nu} \\
& - \int d\tau d\sigma \left\{ - \frac{\partial}{\partial \tau} (I_a F_{\mu\nu}{}^a z'^\nu) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (I_a F_{\mu\nu}{}^a \dot{z}^\nu) \right\} \delta z^\mu , \quad (4.4-21)
\end{aligned}$$

donde seguem as equações de movimento

$$m \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{X}_i^\mu}{\sqrt{-\dot{X}_i^2}} \right) - (-1)^i g F_{\mu\nu}{}^a (X_i) I_a (X_i) \dot{X}_i^\nu = 0 , \quad (4.4-22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (I_a F_{\mu\nu}{}^a z'^\nu) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (I_a F_{\mu\nu}{}^a \dot{z}^\nu) = 0 . \quad (4.4-23)$$

As equações (4.4-22) são exatamente as equações de Wong ( ver Capítulo 0, Seção 10). Utilizando a relação (4.4-17b) podemos escrevê-las sob a forma

$$m \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{X}_i^\mu}{\sqrt{-\dot{X}_i^2}} \right) = (-1)^i \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\Sigma^\mu{}_\nu(X_i) \dot{X}_i^\nu}{\sqrt{-g}} = 0 \quad (4.4-24)$$

que exhibe claramente como o string se acopla com as partículas em suas extremidades. Por outro lado, usando (4.4-14) e (4.4-17a) as equações (4.4-24) podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\Sigma^\mu{}_\nu Z^{\nu}{}^\nu}{\sqrt{-g}} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\Sigma^\mu{}_\nu \dot{Z}^\nu}{\sqrt{-g}} \right) = 0 \quad (4.4-25)$$

que são as equações de movimento do string.

Finalmente, façamos uma análise da carga cromoeleétrica do sistema, definida por

$$Q^a = \int d^3x \nabla \cdot \vec{E}^a \quad (4.4-26)$$

Com o campo cromoeleétrico dado por (4.4-9), segue que

$$\begin{aligned} Q^a &= -g \int d\sigma \int d^3x I^a(z) \frac{\partial Z^k}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial X^k} \delta^{(3)}(\vec{X}-\vec{Z}) = \\ &= g \int d\sigma \int d^3x \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ I^a(z) \delta^{(3)}(\vec{X}-\vec{Z}) \right] - g \int d\sigma \int d^3x \frac{\partial I^a}{\partial \sigma} \delta^{(3)}(\vec{X}-\vec{Z}) \\ &= \sum_{i=1,2} (-1)^i g I^a(x_i) - g \int d\sigma \frac{\partial I^a}{\partial \sigma} \equiv 0 \quad (4.4-27) \end{aligned}$$

Nesta última linha o primeiro termo representa a carga das extremidades e o segundo a carga do string. O resultado acima,  $Q^a \equiv 0$ , significa que o sistema quark-antiquark ligados pelo

fluxo cromoeletrico está num estado "singlet". O último termo da expressão (4.4-27) pode ser escrito sob a forma

$$\int d^3x g C_{bc}^a A_j^b \mathcal{E}_c^j ,$$

o que implica que a carga de cor do string e a do campo de gauge são na verdade a mesma coisa.

#### 4.5 Configurações de string em teorias de gauge II

Para o string com quarks nas extremidades é possível se construir um modelo mais sofisticado que o estudado na seção anterior. A idéia é introduzir variáveis de Grassmann para descrever a distribuição de carga de cor do string, que passa a ser tratada como uma variável dinâmica da teoria, usando o formalismo desenvolvido na seção 0.12(b). Com este procedimento, e introduzindo na ação apenas um termo cinético para os campos de gauge, reobter-se-á muitos dos resultados do modelo anterior - inclusive a solução (4.4-8) - e outras informações relevantes para o sistema como, por exemplo, a existência de uma corrente cromomagnética.

A integral de ação pode ser construída com uma generalização da lagrangiana (0.12-122), introduzindo um termo para descrever a distribuição de carga de cor ao longo do string. Denotando por  $\zeta_a(\tau, \sigma)$ ,  $a = 1, \dots, N$ , as variáveis (complexas) de Grassmann a carga de cor será definida por

$$I_a(\tau, \sigma) = \zeta_b^* \left(\frac{T_a}{2}\right)_{bc} \zeta_c, \quad (4.5.1)$$

onde  $T_a$  são os geradores do grupo de gauge (SU(N)). Denotando

$$\frac{D}{D\xi} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} - ig \frac{T_a}{2} A_\mu^a \frac{dZ}{d\xi} \quad (4.5.2)$$

escrevemos a integral de ação (\*) sob a forma

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{4} \int d^4x \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} - m \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau (\sqrt{-\dot{X}_1^2} + \sqrt{-\dot{X}_2^2}) \\ & - \sum_{i=1,2} (-1)^i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\sigma i \zeta^*(\tau, \sigma_i) \frac{D}{D\tau} \zeta(\tau, \sigma_i) \\ & + \sum_{i=1,2} (-1)^i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma i \zeta^*(\tau_i, \sigma) \frac{D}{D\sigma} \zeta(\tau_i, \sigma). \quad (4.5.3) \end{aligned}$$

Variando a ação (4.5.3) com relação a  $\zeta(\tau, \sigma)$  obtêm-se as equações de movimento para  $I_a(\tau, \sigma)$ :

$$\frac{\partial I^a}{\partial \tau} + g [\vec{A}_\mu, \vec{I}] \dot{Z}^\mu = 0, \quad (4.5.4a)$$

$$\frac{\partial I^a}{\partial \sigma} + g [\vec{A}_\mu, \vec{I}] Z'^\mu = 0, \quad (4.5.4b)$$

(\*)

Esta integral de ação é, na verdade, a ação efetiva que se obtém da função de Green para mésons (usando operadores invariantes de gauge) na ordem mais baixa da expansão  $1/N$ .

donde segue que  $I^2 = \dot{\mathbf{I}} \cdot \dot{\mathbf{I}} = c \frac{te}{\dots}$ .

As variações com relação a  $A_\mu^a$  conduzem à equação

$$D_\mu^{ab} F_b^{\mu\nu} = j_1^{a\nu} + j_2^{a\nu} \quad , \quad (4.5-5)$$

donde  $j_i^{a\nu}$  é a corrente de cor dos quarks,

$$j_1^{a\nu}(x) = -g \sum_{i=1,2} (-1)^i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau I^a(\tau, \sigma_i) \dot{Z}^\nu \delta^{(4)}(X-Z(\tau, \sigma_i)) \quad (4.5-6)$$

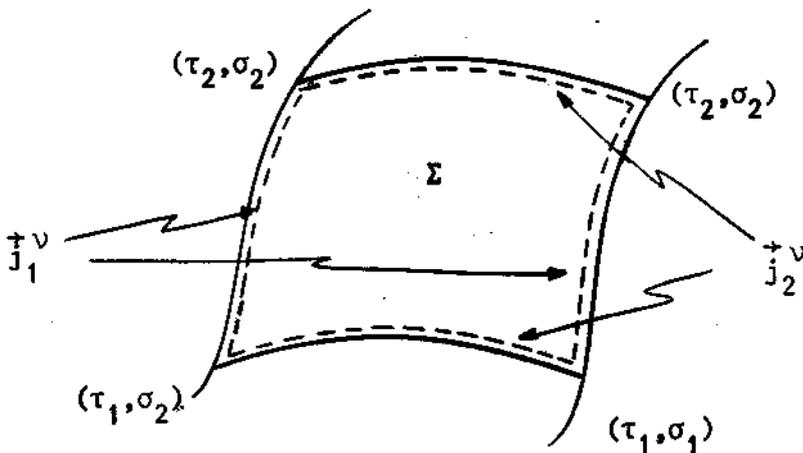
e  $j_2^{a\nu}$  é a corrente de cor ao longo do string,

$$j_2^{a\nu}(x) = -g \sum_{i=1,2} (-1)^i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma I^a(\tau_i, \sigma) Z'^\nu \delta^{(4)}(X-Z(\tau_i, \sigma)) \quad . \quad (4.5-7)$$

Denotando por  $J^{a\nu}$  a corrente total podemos escrever

$$J^{a\nu} = j_1^{a\nu} + j_2^{a\nu} = g \oint dZ^\nu I^a(\tau, \sigma) \delta^{(4)}(X-Z(\tau, \sigma)) \quad , \quad (4.5-8)$$

onde a integral é sobre um contorno fechado como na figura abaixo:



Pode-se verificar sem dificuldades que a corrente total (4.5-8) é conservada,

$$D_{\mu}^{ab} J_b^{\mu} = 0 \quad (4.5-9)$$

Vamos mostrar que

$$F_a^{\mu\nu}(x) = g \int_{\Sigma} d^2 \xi I_a(\tau, \sigma) \Sigma^{\mu\nu}(z) \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \quad (4.5-10)$$

satisfaz à equação (4.5-5). Calculemos a derivada covariante de  $F_a^{\mu\nu}$ : temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} &= g \int d^2 \xi I_a(z) \Sigma^{\mu\nu}(z) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \delta^{(4)}(x-z(\xi)) = \\ &= g \int d^2 \xi I_a(z) \left( z'^{\nu} \frac{\partial}{\partial \tau} - \dot{z}^{\nu} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \delta^{(4)}(x-z(\xi)) = \\ &= g \int d^2 \xi \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( I_a \dot{z}^{\nu} \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left( I_a z'^{\nu} \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial I_a}{\partial \tau} z'^{\nu} \delta^{(4)}(x-z(\xi)) - \frac{\partial I_a}{\partial \sigma} \dot{z}^{\nu} \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g[\tilde{A}_{\mu}, \tilde{F}^{\mu\nu}] &= g^2 \int d^2 \xi [\tilde{A}_{\mu}, \tilde{I}] \Sigma^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \\ &= g \int d^2 \xi \left[ \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \sigma} \dot{z}^{\nu} - \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \tau} z'^{\nu} \right] \delta^{(4)}(x-z(\xi)) \end{aligned}$$

Somando estes resultados obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 D_{\mu}^{ab} F_b^{\mu\nu} &= g \int d^2\xi \left[ \frac{\partial}{\partial\sigma} \left( I^a \dot{Z}^{\nu} \delta^{(4)}(X-Z(\xi)) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial\tau} \left( I^a Z^{\nu} \delta^{(4)}(X-Z(\xi)) \right) \right] = \\
 &= g \oint dZ^{\nu}(\xi) I^a(\xi) \delta^{(4)}(X-Z(\xi)) .
 \end{aligned}$$

Escolhendo a parametrização  $X^0 = \tau$  as componentes elétrica e magnética do tensor intensidade de campo se escrevem

$$\vec{E}^a(X^0, \vec{X}) = F^{ai0} = -g \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\partial \vec{Z}}{\partial\sigma} I^a(X^0, \sigma) \delta^{(3)}(\vec{X}_1 - Z(X^0, \sigma)) \quad (4.5-11)$$

$$\vec{B}^a(X^0, \vec{X}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a = g \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\partial \vec{Z}}{\partial\sigma} \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial X^0} I^a(X^0, \sigma) \delta^{(3)}(\vec{X} - \vec{Z}(X^0, \sigma)) \quad (4.5-12)$$

Para calcular a energia do string

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3x [(\vec{E}^a)^2 + (\vec{B}^a)^2] \quad (4.5-13)$$

é necessário primeiro regularizar as expressões (4.5-11,12) .

Introduzindo a função delta transversal no sistema de repouso do string, como em (4.4-11a,b). Usando que  $\sqrt{-g} = \sqrt{\dot{Z}^{\nu}{}^2(1-v^2)}$  obtém-se:

$$\vec{E}^a = - \frac{g}{\pi a^2} \int d\sigma' \frac{\partial \vec{Z}}{\partial\sigma'} I^a(\sigma') \frac{\delta(\sigma - \sigma')}{\sqrt{-g}} =$$

-527-

$$= -g \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma} I^a \frac{1}{\pi a^2 \sqrt{1-v^2} \left| \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma} \right|} \quad (4.5_{-14})$$

$$\vec{B}^a = \frac{g}{\pi a^2} \int d\sigma' \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma'} \times \vec{v} I^a \frac{\delta(\sigma-\sigma')}{\sqrt{-g}} \quad (4.5_{-15})$$

No gauge ortonormal podemos escrever

$$d^3X = d^2X_{\perp} \frac{\partial X_{\parallel}}{\partial \sigma} d\sigma = d^2X_{\perp} d\sigma \sqrt{1-v^2} \quad ,$$

$$\int d^3X = \int d\sigma \sqrt{1-v^2} \quad d^2X_{\perp} = \int d\sigma (1-v^2) \pi a^2 \quad .$$

Usando que

$$\left( \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma} \cdot \vec{v} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma} \cdot \vec{v} \right) = \left( \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma} \right)^2 v^2 - \left( \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma} \cdot \vec{v} \right)^2 = \left( \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \sigma} \right)^2 v^2$$

tem-se

$$\left( \vec{E}^a \right)^2 + \left( \vec{B}^a \right)^2 = \frac{g^2 I^2}{(\pi a^2)^2} \frac{1+v^2}{1-v^2} \quad , \quad (4.5_{-16})$$

que substituído em (4.5\_{-13}) resulta em

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d\sigma \frac{1}{2\pi \left( \frac{a}{gI} \right)^2} (1+v^2) \quad (4.5_{-16a})$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi \alpha'} \int d\sigma (1+v^2) \quad (4.5_{-16b})$$

com

$$\alpha' = \left( \frac{a}{gI} \right)^2 = c \frac{te}{\hbar} \quad (4.5_{-17})$$

Esta expressão para  $\alpha'$  é a mesma que obtivemos anteriormente, equação (4.4-16).

Seguindo basicamente os mesmos passos que na seção anterior o primeiro termo da integral de ação (4.5-2) pode ser transformado na ação do string, equação (4.4-15), e da ação efetiva resultante obtêm-se as equações de movimento para o string e para os quarks.

As equações (4.5-4a,b) podem ser reescritas sob a forma

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial \xi^1} + g[\vec{A}_1, \vec{I}] = 0, \quad (4.5-18)$$

onde usamos a notação

$$\vec{A}_1 = \frac{\partial Z^\mu}{\partial \xi^1} \vec{A}_\mu. \quad (4.5-19)$$

Podemos escrever uma equação correspondente a (4.5-18) no espaço-tempo. Definindo

$$\partial^\mu I^a = \frac{\partial Z^\mu}{\partial \xi^1} g^{ik} \frac{\partial I^a}{\partial \xi^k} \quad (4.5-20)$$

segue que

$$\partial^\mu \vec{I}(z) + g[\vec{A}^\mu(z), \vec{I}(z)] = 0 \quad (4.5-21)$$

Esta equação é análoga ao vínculo (4.4-6), e para uma dada função  $\vec{I}(z)$  pode ser resolvida explicitamente para o potencial:

$$\vec{A}^\mu(z) = \frac{1}{gI^2} [\partial^\mu \vec{I}(z), \vec{I}(z)] \quad . \quad (4.5-22)$$

Observe que esta expressão é determinada apenas sobre a superfície de evolução. O tensor intensidade de campo correspondente é

$$\vec{F}^{\mu\nu} = - \frac{g}{I^3} [\partial^\mu \vec{I}, \partial^\nu \vec{I}] \quad . \quad (4.5-23)$$

Uma escolha de  $\vec{I}(z)$  que conduz às expressões (4.5-11,12) é

$$I^a(z) = In^a(z) \quad , \quad n^a(z) = \frac{z^a(\xi)}{|\vec{z}(\xi)|} \quad (4.5-24)$$

$$(a = 1, 2, 3) \quad .$$

De fato, usando que (no gauge ortogonal,  $\vec{z} \cdot z' = 0$ ) ,

$$\partial^\mu \vec{I} = \frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^\nu} g^{00} \frac{\partial \vec{I}}{\partial \xi^\nu} + \frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^i} g^{ii} \frac{\partial \vec{I}}{\partial \xi^i} = \frac{\dot{z}^\mu}{\dot{z}^2} \frac{\partial \vec{I}}{\partial \tau} + \frac{z'^\mu}{z'^2} \frac{\partial \vec{I}}{\partial \sigma} \quad ,$$

as expressões (4.5-22) e (4.5-11) conduzem a

$$\begin{aligned} \vec{E}^i &= \vec{F}^{0i} = \frac{\vec{n}}{g} (\vec{n} \cdot [\partial^0 \vec{n}, \partial^i \vec{n}]) \\ &= - \frac{\vec{I} z'^i}{gI \sqrt{-\dot{z}^2 z'^2}} \frac{\epsilon^{abc} z^a \dot{z}^b z'^c}{|\vec{z}|^3 \sqrt{-\dot{z}^2 z'^2}} \quad . \quad (4.5-25) \end{aligned}$$

Comparando com (4.5-14) segue que devemos ter

$$\frac{I g^2}{\pi a^2} = \frac{\epsilon^{abc} z^a z^b z'^c}{|\vec{z}| \sqrt{-\dot{z}^2 z'^2}} = \frac{1}{\pi \alpha' I} \quad (4.5.26)$$

O lado direito desta última expressão pode ser escrito sob a seguinte forma covariante:

$$\frac{\vec{n} [\dot{z}_\mu \partial^\mu \vec{n}, z'_\nu \partial^\nu \vec{n}]}{\sqrt{-\dot{z}^2 z'^2}} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi^0}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi^1} \right] = \frac{1}{2} \frac{\vec{n}}{\sqrt{-g}} \epsilon^{ik} [\partial_i \vec{n}, \partial_k \vec{n}] \quad .$$

Usando a representação (4.5.24) o potencial (4.5.22) se escreve

$$\vec{A}^\mu(z) = \frac{1}{g} [\partial^\mu \vec{n}, \vec{n}] = \frac{1}{g} \left\{ \frac{\dot{z}^\mu [\dot{z}, \vec{z}]}{\dot{z}^2 (\dot{z})^2} + \frac{z'^\mu [z', \vec{z}]}{z'^2 (\dot{z})^2} \right\} \quad (4.5.27)$$

É fácil verificar que o potencial dado acima é tangente à superfície de evolução  $\Sigma$ . Por um cálculo direto mostra-se que sobre  $\Sigma$  - excluindo o contorno - o potencial (4.5.22) satisfaz às equações:

$$D_{\mu F_a}^{ab}{}^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad D_{\mu F_a}^{ab*}{}^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (4.5.28)$$

Note que isto não está em contradição com a equação (4.5.5) porque a corrente  $J_\mu^a$  só é diferente de zero nos bordos de  $\Sigma$ .

É importante notar que pode-se introduzir uma corrente cromomagnética na teoria pela equação

$$D_{\mu F_b}^{ab*}{}^{\mu\nu} = k^{a\nu} \quad (4.5.29)$$

com

$$k_a^\nu(x) = g \int d^2\xi \Sigma^{*\mu\nu} I_a \frac{\partial}{\partial X^\mu} \delta^{(4)}(X-Z(\xi)) \quad (4.5-30)$$

Esta corrente é conservada,

$$D_\nu^{ab} k_b^\nu(x) = \partial_\nu k_a^\nu = g \int d^2\xi \Sigma^{*\mu\nu} I_a \frac{\partial^2}{\partial X^\mu \partial X^\nu} \delta^{(4)}(X-Z(\xi)) = 0 \quad ,$$

onde usamos que  $\vec{A}^\mu$  é ortogonal a  $\Sigma^{*\mu\nu}$ . A parte espacial de  $k_a^\nu$  se escreve

$$k_a^i = g \int d^2\xi I_a(\xi) \epsilon^{ijk} v_j z'_k \frac{\partial}{\partial X^0} \delta^{(4)}(X-Z(\xi)) \\ - g \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma I_a(X^0, \sigma) \frac{\partial z^k}{\partial \sigma} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X^j} \delta^{(3)}(\vec{X}-\vec{Z}(\xi)) \quad (4.5-31)$$

A carga magnética total é nula:

$$M^a = \int d^3X k_a^0(x) = \int d^3x \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma I_a(X^0, \sigma) \epsilon_{ijk} z'^j v^k \frac{\partial}{\partial X^i} \delta^{(3)}(X-Z(\xi)) \\ = g \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma I_a(X^0, \sigma) \epsilon_{ijk} z'^j v^k \int d^3x \frac{\partial}{\partial X^i} \delta^{(3)}(\vec{X}-\vec{Z}(\xi)) = 0 \quad .$$

Encerramos neste ponto a análise das configurações de strings em teorias de gauge. Esta é uma área de pesquisas muito importante, sensivelmente complexa, e os resultados obtidos até agora são muito poucos. Além dos modelos que apresentamos, se conhece também uma relação entre o modelo de strings e modelos bidimensionais com o grupo de gauge  $U(N)$  ,

$N \rightarrow \infty$ , na eletrodinâmica escalar e no modelo de Schwinger. Uma questão que ainda permanece completamente inexplorada é a da estabilidade das soluções tipo string tanto a nível clássico como quântico. Ao leitor interessado sugerimos uma leitura nos trabalhos de Mandelstam e 't Hooft citados nas referências.

#### 4.6 Soluções tipo string nos modelos de Higgs e Higgs-Born-Infeld

A primeira solução tipo string em uma teoria clássica de campos foi construída por Nielsen e Olesen. Trata-se de uma solução estática tipo vórtice para o modelo de Higgs cuja lagrangiana se escreve

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - \frac{\beta}{2} (\phi^*\phi - \lambda^2)^2. \quad (4.6.1)$$

Intuitivamente, é de se esperar que existam soluções tipo vórtice para a lagrangiana de Higgs pois ela é uma generalização relativística da lagrangiana de Landau-Ginzburg da teoria da supercondutividade do tipo II, onde tais soluções existem. A ação efetiva correspondente ao modelo de Nielsen e Olesen se reduz à ação de Nambu, o que é característico de toda teoria de campo que admite soluções tipo string. Passemos a uma exposição resumida deste modelo.

As soluções que nos interessam são aquelas que decaem para o vácuo (que é degenerado, e corresponde a  $\phi = \lambda e^{i\alpha}$ )

no infinito. Para duas dimensões espaciais uma condição de contorno apropriada é

$$\phi \rightarrow \lambda e^{in\theta} \quad \text{com} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (4.6-2)$$

onde  $n$  é um inteiro para que se tenha  $\phi$  unívoca. Vamos considerar o caso mais simples,  $n = 1$ , e admitir que a solução tem simetria cilíndrica e é independente de  $Z$ . Usando coordenadas polares,

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta$$

vamos escolher

$$\begin{aligned} \phi &= \psi(r) e^{i\theta}, \\ \vec{A} &= \alpha(r) (\vec{r} \times \vec{e}_z), \\ A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6-3)$$

A ação fica dada por

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \mathcal{L} &= 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ -\frac{1}{4} r^2 \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 - \left( \frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{r} + g\alpha(r)r \right)^2 \psi^2 - \frac{\beta}{2} (\psi^2 - \lambda^2)^2 + \left( \alpha^2 + r\alpha \frac{d\alpha}{dr} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.6-4)$$

Admitindo que  $|\vec{A}| \rightarrow 0$  no infinito, os dois últimos termos não contribuem:

$$\int_0^\infty r dr \left( \alpha^2 + r\alpha \frac{d\alpha}{dr} \right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} (r^2 \alpha^2) = 0,$$

de modo que a ação se reduz a

$$S = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ -\frac{1}{4} r^2 \left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2 - \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 - \left(\frac{1}{r} + g r \alpha(r)\right)^2 \psi^2 - \frac{\beta}{2} (\psi^2 - \lambda^2)^2 \right] . \quad (4.6-5)$$

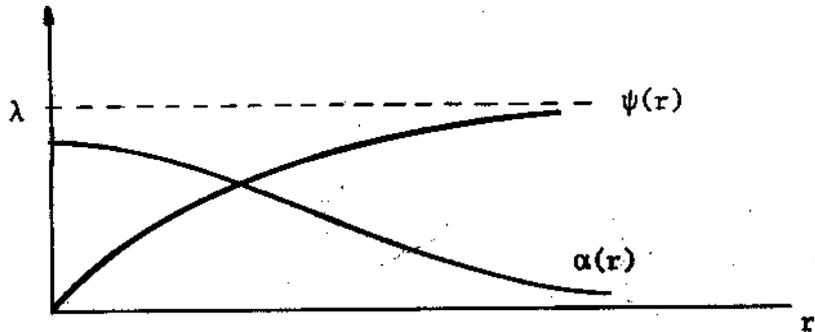
A convergência dos dois termos com  $r \rightarrow \infty$  requer que

$$\left. \begin{array}{l} \psi \rightarrow \lambda \\ \alpha \rightarrow \frac{1}{gr^2} \end{array} \right\} \text{ com } r \rightarrow \infty . \quad (4.6-6)$$

Devemos ter também

$$\left. \begin{array}{l} \psi \rightarrow 0 \\ \alpha \text{ finito} \end{array} \right\} \text{ com } r \rightarrow 0 .$$

O comportamento de  $\lambda_1(r)$  e  $\alpha(r)$  é, portanto, como na figura abaixo



Usando as condições (4.6-6) o fluxo fica dado por

$$\begin{aligned} \Phi &= \int F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = \oint A_\mu(x) dx^\mu \\ &= \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r^2 \alpha = -\frac{2\pi}{g} . \end{aligned} \quad (4.6-7)$$

As equações de movimento que se obtém da lagrangia-

na de Higgs (4.6-1) se escrevem

$$(\partial_\mu + igA_\mu)(\partial^\mu - igA^\mu)\phi = \beta(\lambda^2\phi - \phi^2\phi^*) \quad , \quad (4.6-8)$$

$$\partial_\nu F_\mu{}^\nu = j_\mu = ig(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*) - 2g^2A_\mu|\phi|^2 \quad , \quad (4.6-9)$$

ou, em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) - \left[ \left( \frac{1}{r} - g|A| \right)^2 - \beta\lambda^2 + \beta\psi^2 \right] \psi = 0 \quad (4.6-10)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r|A|) \right) - 2\psi^2 \left( |A|g^2 - g \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (4.6-11)$$

Embora não se conheçam as soluções analíticas das equações (4.6-10,11) pode-se encontrar o comportamento assintótico com  $r \rightarrow \infty$ . Para o potencial vetor tem-se

$$|\vec{A}| \sim \frac{1}{gr} - Cr^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{2} g\lambda r} \quad (4.6-12)$$

onde C é uma constante de integração.

O primeiro termo da equação (4.6-11) é a componente  $\theta$  de  $\partial_\nu F_\mu{}^\nu$ , isto é,

$$(\nabla \times \vec{B})_\theta = \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r|A|) \right) \quad . \quad (4.6-13)$$

Logo, para o campo  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  tem-se

$$B = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r|\vec{A}|) \sim \sqrt{2} g\lambda Ce^{-\frac{1}{2} \sqrt{2} g\lambda r} \quad . \quad (4.6-14)$$

O comportamento assintótico de  $\psi(r)$  fica dado por

$$\psi \sim \lambda + C' r^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{2\beta} \lambda r} \quad (4.6-15)$$

Introduzindo as massas do campo vetorial  $A_\mu$  e do campo escalar  $\phi$ , que se obtêm diretamente da lagrangiana (4.6-1),

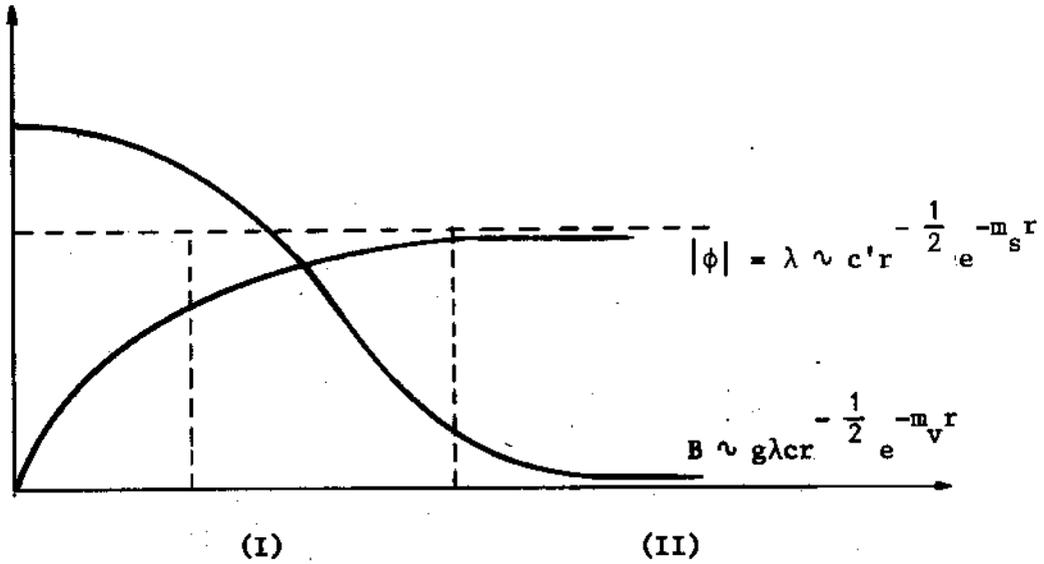
$$m_V = \sqrt{2} g \lambda, \quad m_S = \sqrt{2\beta} \lambda, \quad (4.6-16)$$

segue que

$$\left. \begin{aligned} B &\sim \sqrt{2} g \lambda C r^{-\frac{1}{2}} e^{-m_V r}, \\ \psi &\sim \lambda + C' r^{-\frac{1}{2}} e^{-m_S r}. \end{aligned} \right\} r \rightarrow \infty. \quad (4.6-17)$$

Devido à presença do termo  $-\frac{\beta}{2} \lambda^2 |\phi|^2$  na lagrangiana, o mecanismo de Higgs força o campo  $\phi$  a ir de 0 a  $\lambda$ . No entanto, tem-se também o termo  $g^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2$  de modo que se em alguma região do espaço  $A^2$  for suficientemente grande não ocorrerá mecanismo de Higgs e o estado fundamental será  $\phi = 0$ . É exatamente este fenômeno que conduz à estrutura de string da solução tipo vórtice.

Vamos dividir o espaço em duas regiões: I, onde  $B \neq 0$  e  $\phi \sim 0$ , e II, onde  $B = 0$ ,  $|\phi| = \lambda$ . As distâncias sobre as quais B e  $\phi$  diferem pronunciadamente de seus valores limites são caracterizadas pelos comprimentos de Compton  $m_V^{-1}$  e  $m_S^{-1}$ . Na figura da próxima página exibimos o comportamento de B e  $\phi$  com r:



A identificação da solução tipo vórtice com um string é feita da seguinte maneira. Para o string a energia (de repouso) por unidade de comprimento é dada por

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (4.6_{-18})$$

Para a solução tipo vórtice a energia magnética é

$$\mathcal{E}_{\text{vort}} = \frac{1}{2} \int B^2 2\pi r dr \quad (4.6_{-19})$$

e pode ser avaliada aproximadamente admitindo que, na região  $0 \leq r \leq m_v^{-1} = R$ ,  $B$  é igual ao seu valor médio:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{vort}} &= \frac{\pi}{2} B^2 R^2 = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2}{g^2} \frac{1}{\pi R^2} = \\ &= \frac{2\pi}{g^2} m_v^2 = 2\pi\lambda \quad (4.6_{-20}) \end{aligned}$$

(Há também uma contribuição para a energia por unidade de comprimento do string na região onde  $|\phi|$  se desvia de  $\lambda$ , e é

da mesma ordem de grandeza que  $\mathcal{E}_{\text{vort.}}$ .)

Segue do resultado acima que  $\alpha' \sim \lambda^2$ , que deve permanecer finito. Para que a solução tipo vórtice seja identificada com um string de espessura desprezível, devemos ter  $m_V = \sqrt{2} g \lambda$  e  $m_S = \sqrt{2\beta} \lambda \rightarrow \infty$ , o que significa que as constantes de acoplamento  $\lambda$  e  $\beta$  devem tender ao infinito. Este limite é denominado de "limite de acoplamento forte".

Neste limite o campo  $F_{\mu\nu}$  é diferente de zero apenas numa pequena região do espaço e  $\phi$  é aproximadamente igual ao vácuo em todos os pontos, a menos da região onde  $F_{\mu\nu} \neq 0$ , desde que tomemos  $m_V \approx m_S$ . Devido a este comportamento os termos  $-\frac{1}{4} F^2$  e  $-\frac{1}{2} \beta (\phi^2 - \lambda^2)^2$  na lagrangiana são diferentes de zero apenas no interior da linha do vórtice, onde são da ordem de  $m_V^2$  e  $m_S^2$  respectivamente. Portanto, estes termos se comportam como "funções delta espalhadas" ("smeared delta functions"). O termo restante  $((\partial + ig + A)\phi)^2$  permanece finito, e por uma escolha de gauge pode ser tomado nulo fora do vórtice no limite do acoplamento forte.

A ação para a linha de vórtice fica dada por

$$\begin{aligned} S_{\text{vort}} &= \int d^4x \mathcal{L}_{\text{vort}} = \\ &= \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta (\phi^2 - \lambda^2)^2 \right) \\ &= \int dt d\ell \left( -\frac{1}{4} \overline{F}_{\mu\nu} \overline{F}^{\mu\nu} \sigma_V - \frac{1}{2} \beta \overline{(\phi^2 - \lambda^2)^2} \sigma_S \right) \end{aligned}$$

onde a barra significa o valor médio, e  $\sigma_V$ ,  $\sigma_S$  são as áreas onde o campo vetorial e o campo de Higgs não se anulam;  $\ell$  é o

comprimento ao longo do string. Lembrando  $\sigma = \sigma_0 (1 - v_{\perp}^2)^{1/2}$  onde  $\sigma_0$  é a seção transversal no sistema de repouso, segue que

$$S_{\text{vort}} \sim \int dt d\ell \sqrt{1 - v_{\perp}^2}$$

que é a ação de Nambu.

É bastante curioso que uma generalização não linear do modelo de Higgs admita uma solução do mesmo tipo que a de Nielsen e Olense. De fato, considerando uma lagrangiana do tipo Higgs-Born-Infeld,

$$\mathcal{L} = -a \sqrt{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\beta}{2} |\phi|^2 A_{\mu} A^{\mu}} \quad (4.6_{-21})$$

pode-se mostrar que, com  $F_{\mu\nu}$  dado pela expressão (4.3\_3), reobtem-se a ação de Nambu desde que  $|\phi|^2$  seja suficientemente pequeno. Seguindo os mesmos passos que no caso anterior, pode-se verificar que este modelo admite soluções tipo vórtice com basicamente as mesmas propriedades que a solução de Nielsen-Olense.

## REFERÊNCIAS

Capítulo 0

Seções 0.1, 2, 3, 5, 6, 7 e 9

- A.O. Barut, "Electrodynamics and the classical theory of fields and particles", Mc. Millan, New York, 1964.
- J. Anderson, "Principles of Relativity Physics", Academic Press, New York, 1967.
- J.S. Jackson, "Classical Electrodynamics", Wiley, New York, 1975.
- L. Landau, E.M. Lifshitz, "The classical theory of fields", 5ª edição, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- R. Hagedorn, "Relativistic Kinematics", Benjamin/Cummings, Massachusetts, 1963.
- S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", Wiley, New York, 1972.

## Seção 0.4

- Carlos A.P. Galvão, Notas de Curso, CBPF, Rio de Janeiro, 1981.
- K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics", Springer, Lecture Notes in Physics, vol. 169, Berlin 1982.
- P.A.M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science, Yashiva University, New York, 1964.

## Seção 0.8

- A. Einstein, J. Grommer, Sb. Preuss, Akad. Wiss. 2 (1922).
- A. Einstein, L. Infeld, J. Math. 1, (1949) 109.
- A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, Ann. Math. 39, (1938) 65.
- A.S. Eddington, "The Mathematical Theory of Relativity", Cambridge Univ. Press, 1923.
- B. Mashhoon, Ann. of Physics 89, (1975), 254.
- J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 33 (1961) 63.
- J.N. Goldberg, Ed., "Gravitation - An Introduction to Current Research", L.Witten, Ed. (Wiley, New York, 1962).

M. Bailyn e S. Ragusa, Physics Rev. D15(1977), 3543 e D23(1981), 1258.

W.G. Dixon, em "Isolated Gravitating Systems in General Relativity" Scuola Internazionale di Fisica "Enrico Fermi" LXVII J. Ehlers, Ed., North Holland, Amsterdam, 1979.

Seções 0.7, 0.8, 0.9 e 0.10

F.J. Vanhecke, Rev. Bras. de Física 12 (1982), 343.

Seção 0.10

F.J. Vanhecke, Rev. Bras. de Física 12, nº 2 (1982), 343.

L. Infeld e A.Schild, Rev. Mod. Phys. 21, nº 3 (1949).

S.K. Wong, Il Nuovo Cimento Vol. LXV A, nº 4 (1970), 689.

S. Ragusa, IFQSC, Preprint 04 (1982).

Seção 0.11

M. Lakshnan, Th. W. Ruijgrok, C.J. Thompson, Physica 84A(1976), 577.

Seção 0.12 (a) e (b)

F.A. Berezin, "The Method of Second Quantization", Academic Press, New York (1966).

F.A. Berezin e M.A. Marinov, Ann. Phys. (N.Y.), 104(1977), 336.

C.A.P. Galvão e C. Teitelboim, J.Math., Phys. 21 (1980), 1863.

C.A.P. Galvão, "Lecture Notes in Mathematics" 775, Springer, New York (1980).

R. Casalbuoni, N. Cimento 433 (1976) 115.

Seção 0.12(c): as mesmas das seções 0.12(a), (b) e:

D.R. Brill e J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 465.

A. Lichnerowicz, em "Relativity, Groups and Topology", B. DeWitt, Ed., Gordon and Breach, London (1963).

Capítulo 1

Todas as seções:

- C. Rebbi, Phys. Rep. C12, (1974) 1.  
 J. Scherk, Rev. Mod. Phys. 47, (1975) 123.  
 M. Ademollo, et. al., N. Cimento A21 (1974) 77.  
 S. Mandelstan, Phys. Rep. C13 (1974) 260.

Capítulo 2

Seção 2.1 e 3

- M. Ademollo et al., N. Cimento A21 (1974) 77.

Seção 2.2

- C.B. Kim, H.Y. Lee, Phys. Lett. 131B, nº 1/3, (1983) 99.  
 D.Z. Freedman, P.K. Townsend, Nucl. Phys. B177 (1981) 282.  
 F. Lund, T. Regge, Phys. Rev. D14, 6 (1976) 1524.  
 N. Kemmer, Helv. Phys. Acta 33, (1960) 829.  
 M. Kalb, P. Ramond, Phys. Rev. D9, nº 8 (1974) 2223.  
 Y. Nambu, em "Quark Confinement and Field Theory", D.R. Stump  
 e D.H. Weingarten. Eds. Wiley, New York (1977).

Seção 2.4

- A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1169.  
 C.J. Hogan, Phys. Lett. 143B (1984), 87.  
 J. Silk, A. Vilenken, Tufts Univ., Preprint TUTP 84-5.

Seções 2.5 e 2.6

- P.G. Bergmann, Introduction to the Theory of Relativity, Prentice Hall, New York, 1955.

Capítulo 3

## Seção 3.1

W.A. Bardeen, I. Bars, A.J. Hanson, R.D. Peccei, Phys. Rev. D13 (1976), 2364.

A. Chodos, C.B. Thorn, Nucl. Phys. B72 (1974), 509.

N.A. Chernikov, N.S. Shavokhina, JINR Preprint R 2-10375 (1977).

P.H. Frampton, Phys. Rev. D12 (1975) 538.

A. Patrasciou, N. Cimento Lett. 10 (1974), 676.

## Seção 3.2

Y. Iwasaki, K. Kikkawa, Phys. Rev. D8 (1973) 440.

Carlos A.P. Galvão, "Supersymmetric Classical String Dynamics", a ser publicado.

J.L. Gervais, B. Sakita, Nucl. Phys. B34 (1971) 632.

S. Mandelstan, Phys. Rep. 13 (1974) 259.

## Seção 3.3 a

J. Moser, Trans. Amer. Math. Soc., 120 (1965), 286.

A. Schild, Phys. Rev. D16 (1977) 1722.

## Seção 3.3 b

A.A. Zheltukhin, Sov. J. of Nucl. Phys. 34(2) (1981) 311, Lett. Math. Phys., 5 (1981), 213.

## Seção 3.3 c

A.M. Polyakov, Phys. Letters 103B (1981), 207, 103B (1981) 211.

B. Durhuus, "Quantum Theory of Strings", Lectures Notes, Niels Bohr Institute, Nordita, Copenhagen.

- J. Liouville, *J. Math. Pures Appl.* 18 (1853), 71.  
 L. Bianchi, *Ann. Sci. Norm. Super. Piza, Ser. 1,2*(1879) 26.  
 R. Marnelius, *Nucl. Phys.* B211 (1983) 14, B211 (1983) 409.

#### Seção 3.4

- B.M. Barbashov, V.V. Nesterenko, A.M. Chervyakov, *Theor.Math. Phys.* 40 (1979) 572.  
 E. D'Hoker, R. Jackiw, *Phys. Rev. D* 26 (1982), 3517.  
 G.R. Dzhordzhadze, A.K. Rogrebkov, M.K. Poliakov, *Sov. Phys. Dokl.* 23 (11) (1978) 828, *Theor. Math. Phys.* 40(2) (1979), 221.  
 R. Marnelius, *Phys. Lett.* 123B (1983) 237.  
 R. Omnes, *Nucl. Phys.* B149 (1979) 269.

#### Seção 3.5

- A. Lichnerowicz, "Theories Relativistes de la Gravitation e de l'Electromagnetism", Masson et Cie., Paris(1955).  
 G.Y. Rainich, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 27(1925) 106.  
 J.A. Schouten, "Ricci-Calculus", Springer-Verlag, Berlin(1954).  
 J.L. Synge, *U. of Toronto Studies in Appl. Math.* 1 (1935), 1.  
 J. Stachel, *Phys. Rev.*, D21(8) (1980), 2171, 2182.  
 S.A. Wheeler, "Geometrodynamics", Academic Press, New York(1962).

### Capítulo 4

#### Seção 4.1

- Y. Nambu, *Phys. Rev.* D12 (1974), 4262.  
 P.A.M. Dirac, *Phys. Rev.* 74 (1948), 817.

#### Seção 4.2

- A. Kastrup, *Phys. Lett.* 78B (1978), 433 e 82B (1979), 237.

- B.M. Barbaskov, N.A. Chernikov, Sov. Phys. JETP 23 (1966), 861,  
Commun. Math. Phys. 3 (1966), 313.
- H.C. Tze, Lett. N. Cimento 11 (1973), 401.
- M. Born, Nature 132 (1933), 282.
- M. Born e L. Infeld, Nature 132 (1933) 970.
- M. Born, Ann. Inst. H. Poincaré, vol. 7 n° 4 (1937), 189.
- M.A. Tonnelat, "The Principles of Electromagnetic Theory and  
Relativity", D. Reidel, Dordrecht, 1966.
- M. Rinke, Commun. Math. Phys. 73 (1980), 265.

#### Seções 4.3 e 4.6

- H.B. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys. B61 (1973) 45; B57 (1973),  
367.

#### Seção 4.4

- J. Ishida e A. Hosoya, Progr. Theor. Phys. 62 (1979) 544.
- S. Ryoug e J. Ishida, Progr. Theor. Phys. 66 (1981) 685.

#### Seções 4.5 e 6

- G.S. Iroshinkov, Moscow Physicotechnical Inst., Preprint, 1982.
- G. t' Hooft, em "Particles and Fields", D.H. Boal e A.N. Kamal,  
Eds., Plenum Press, New York 1978.
- S. Mandelstan, Phys. Rep. C67 (1980), 109.