ISSN 0101 - 9236

CBPF-MO-006/85

STRINGS CLÁSSICOS RELATIVÍSTICOS, I

por

Carlos A.P. Galvão

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

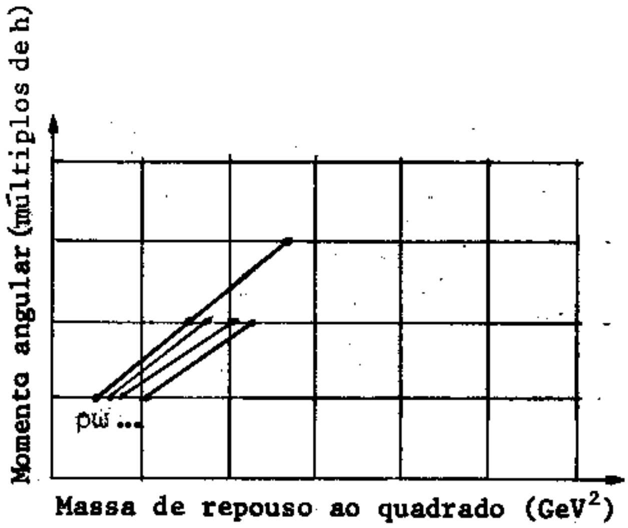
SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

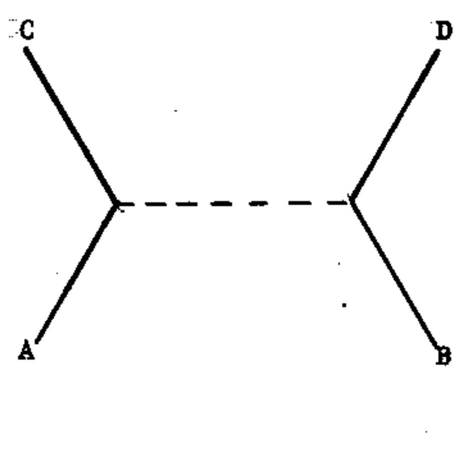
A idéia de se considerar os hadrons como objetos estendidos dotados de uma estrutura interna já é um tanto antiga, e foi bastante enriquecida nos últimos anos como consequência dos desenvolvimentos de teorias para as interações fortes, Uma delas é a teoria dos modelos ressonantes com dualidade - ou modelos duais, por simplicidade - que foi talvez a mais intensivamente estudada até hoje. Dos desenvolvimentos dos modelos duais emergiu um quadro físico muito simples e elegante para os hadrons, que são identificados com estados quânticos de um contínuo unidimensional, o string relativístico.

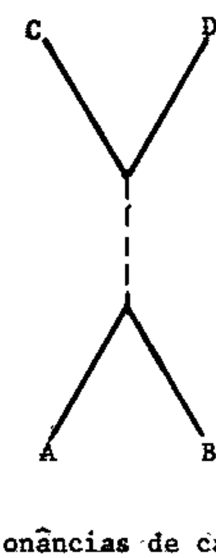
Segundo um esquema de classificação para os hadrons, estes são agrupados em famílias cujos membros têm valores distintos do momento angular e da massa, mas são semelhantes em todos os outros aspectos. Assim, diz-se que os membros de cada família se localizam sobre uma curva denominada "trajetória de Regge".

Dados observacionais sugerem que as trajetórias de Regge são aproximadamente lineares, o que significa que, em boa aproximação, o momento angular dos hadrons em uma dada trajetória é uma função linear do quadrado da massa. Além disto todas as trajetórias de Regge dos hadrons são aproximadamente paralelas (ver figura abaixo).



Os modelos duais são calculados por uma série de aproximações sucessivas a partir de uma primeira aproximação, que determina o comportamento de todo o restante da série. Sob o ponto de vista teórico, a palavra dualidade no nome do modelo diz respeito à primeira aproximação e significa que a amplitude de espalhamento, calculada pela soma das contribuições de todas as trocas de ressonâncias, é igual à calculada somando-se sobre todas as ressonâncias de canal direto. Isto é, dualidade significa a igualdade dos dois processos representados nos gráficos abaixo:





Troca de ressonâncias

Ressonâncias de canal direto

Os modelos duais têm a propriedade de que, em primeira aproximação, todos os hadrons se localizam em trajetórias de Regge lineares e paralelas.

Um aspecto importante dos môdelos duais é que eles se baseiam num número infinito de ressonâncias. Este aspecto dos modelos é que levou Y. Nambu, L. Suskind, H. Nielsen e outros a concluir que os hadrons (nos modelos duais) podem ser identificados com os estados quânticos de um string relativístico. Estes strings são muito especiais: não têm massa e suas extremidades se movem com a velocidade da luz. A massa de um hadron se origina da tensão no string (que é determinada pela inclinação da trajetória de Regge) e pela energia cinética de seu movimento com relação ao centro da massa.

Os modelos de strings satisfazem aos princípios da teoria da relatividade especial sem dificuldades. A inclusão das imposições da mecânica quântica por seu lado tem consequências muito sérias: a quantização canônica da teoria do modelo de strings mais simples só é covariante de Lorentz num espaço-tempo com uma dimensão temporal e vinte e cinco dimensões espaciais. Em outras palavras, tem-se uma dimensão crítica $D = 26$ para a covariância da teoria quântica. Refinamentos do modelo conduzem a dimensões mais baixas - 10 no caso de strings com spin, mas até agora nenhum modelo exibe consistência em quatro dimensões.

As possíveis reações entre hadrons são descritas por interações entre strings. As regras básicas destas interações foram estudadas por S. Mandelstan e consistem da quebra de um string em dois ou da junção de dois strings em um. Pode-se ter também um processo no qual dois strings se tocam nos seus interiores e se rompem, e cada segmento de um string se junta a um segmento do outro. Estes processos são obviamente muito complicados.

Um outro processo muito importante cuja presença é necessária por consistência matemática é a junção das extremidades de um string para formar um string fechado. Hadrons correspondentes a estados quânticos de strings fechados não estão presentes na primeira aproximação dos modelos duais. Mas a ocorrência destes estados é interessante para a explicação de alguns problemas associados com o comportamento do espalhamento elástico em altas energias que aparentemente envolve uma interação do tipo difrativo.

Não existe uma prova direta da estrutura de strings dos hadrons mas muitas evidências apontam nesta direção não só nos modelos duais como também, mais modernamente, no modelo de quarks. Este modelo se baseia em considerações de simetria. Em essência, supõe-se que os hadrons são formados a partir de constituintes fundamentais - os quarks - e suas antipartículas - os antiquarks. Quarks e antiquarks são ligados por um campo vetorial não-abeliano, usualmente denominado de campo de gluons. Este quadro é, de certa forma, reminiscente daquele de um sistema de partículas carregadas ligadas por um campo eletromagnético. Os gluons, no entanto, têm propriedades não usuais quando comparados com seus análogos abelianos, os fótons. Eles autointeragem (são dotados de uma "carga não-abeliana", carga de cor) e há indicações de que os campos de gluon não se dissipam, concentrando-se sob a forma de tubos estreitos que ligam as suas fontes, os quarks e antiquarks. É desta forma que se obtém uma estrutura de string no modelo de quarks: os strings são como que a materialização dos campos de gluons.

O modelo de quarks ligados por strings é muito interessante principalmente para a classe de hadrons denominada de mésons, que contém um quark e um antiquark, e para os estados denominados de Pomeron, que não têm quarks. Os baryons no entanto são compostos de três quarks, requerendo uma construção mais sofisticada, como um string com forma de "Y", e uma topologia que introduz sérias dificuldades matemáticas no modelo.

Neste esquema pode-se dar uma explicação bastante atraente para o confinamento de quarks. No caso de um meson, por exemplo, pode-se imaginar que ao se romper o string criam-se dois novos mesons ao invés de quarks livres. Em outras palavras, ao se romper o string em cada extremidade dos pedaços surge um quark ou um antiquark e assim dois mesons. Num outro esquema, encontra-se que a energia necessária para romper o string é infinita - os quarks estão como que sob a ação de um potencial que depende linearmente da distância entre eles - sendo assim impossível rompê-la para se obter quarks livres. Mas, isto está ainda a nível de conjectura.

Nos últimos anos tem-se observado o aparecimento de estruturas de strings nas diversas áreas da Física: nas teorias grande-unificadas, em modelos cosmológicos, em teorias sobre a formação de galáxias, etc. E vale a pena lembrar que os strings foram introduzidos na Física por P.A.M. Dirac a mais de quarenta anos atrás na sua teoria dos monopolos magnéticos.

Esta monografia é dedicada ao estudo da Mecânica Clássica dos strings relativísticos. Originou-se de notas de aula preparadas para um curso de mecânica hamiltoniana de sistemas com vínculos, onde a teoria do string era apresentada como um, exemplo de um sistema mecânico dotado de uma simetria exuberante. Motivado pelas minhas próprias pesquisas o trabalho evoluiu tomando esta forma final.

Como esta monografia se destina basicamente a não especialistas que pretendam ter um primeiro contato com o assunto eu tentei torná-la o mais fechada possível. Isto influenciou também a escolha dos assuntos e a sua organização que foi feita da seguinte maneira. O Capítulo 0 consiste de tópicos escolhidos sobre a dinâmica da partícula, que não consta dos livros-textos mais comuns. Os Capítulos 1 e 2 constituem o núcleo da monografia. O primeiro contém a teoria geral dos strings livres e o segundo trata da interação de strings com campos externos, e todos os desenvolvimentos se fundamentam na ação de Nambu. No Capítulo 3 são introduzidas outras integrais de ação para o string e estudamos extensões da ação de Nambu (strings com massa, spin, etc.) Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos alguns exemplos de estados de strings em teorias clássicas de campos.

Os Capítulos 3 e 4 foram escritos de maneira mais concisa que os precedentes, e o nível dos assuntos é um tanto mais elevado. Introduzimos algumas seções que podem ser consideradas como "extras" - como por exemplo, a teoria de Kauza - Klein e sua generalização, a teoria do campo de Liouville, etc. Isto foi feito não só pelo que dissemos acima, isto é, para tornar o trabalho o mais fechado possível, mas também pelo interesse atual destes assuntos.

Muitos aspectos e aplicações importantes da teoria dos strings foram omitidos. Dentre eles a abordagem geométrica, a aplicação do método inverso do espalhamento, o modelo de Polyakov e a teoria dos super-strings são os grandes ausentes. A teoria dos super-strings desenvolvida por Green e Schwartz é, hoje em dia, uma linha de pesquisas muito ativa e importante, que está polarizando as atenções dos físicos.

As referências constituem uma pequena amostra daqueles trabalhos que julgo importantes. Optamos por separá-los por seção no final do trabalho.

AGRADECIMENTOS

- A Juan Alberto Mignaco pelo apoio, pelo estímulo, pelas muitas sugestões, pelas críticas, pelas discussões, pela solidariedade nos (muitos) momentos difícies - uma arte que só os amigos conhecem;
- A Marco Aurélio do Rego Monteiro pelas inúmeras discussões sobre a Física e sobre a vida;
- A Luiz Jorge Negri (UFPb), João Batista Boechat, Heloisa Helena Ferreira, Bruto Max Pimental (IFT-SP) que leram partes deste trabalho, e o enriqueceram com sugestões e comentários;
- A Antonio Cesar Olinto, (LNCC) pelos estímulos sempre constantes;
- A Franciscus Joseph Vanhecke (UFRN) por me esclarecer muitos aspectos das teorias de "objetos com extensão espacial";

- A Antares Kleber Grijó (ON) pelo incentivo e pela ajuda em parte das correções;

- A Rosangela Castro Marques, secretária do DCP, que com infinita paciência e boa vontade, transformou o manuscrito numa versão datilografada;

- A Helena Cicarino pelo excelente trabalho de datilografia da segunda parte deste trabalho;

- A Valéria F. Gomes e Marie Monteiro, CDI, pela eficiência na datilografia e pela paciência durante as correções;

- A Prof. Elza Lima e Silva Maia (CDI) pela eficiente ajuda e pelas tantas críticas construtivas na preparação e organização desta monografia;

- A Solange por tanta coisa que não sei traduzir.

CARLOS A.P. GALVÃO

DCP/CBPF/1985

Capítulo 0: A PARTÍCULA CLÁSSICA RELATIVÍSTICA

0.1 A formulação covariante da dinâmica da partícula

Consideremos uma partícula livre que se move no espaço-tempo de Minkowski. Sua trajetória é descrita pelas equações paramétricas $z^{\mu} = z^{\mu}(\lambda)$, onde z^{μ} são as coordenadas dos pontos da trajetória. O parâmetro λ deve satisfazer à condição de ser monótono ao longo da trajetória, e $z^{\mu}(\lambda)$ é uma função unívoca e pelo menos duas vezes diferenciável com relação a λ.

O quadrado da distância entre dois pontos próximos na trajetória é dado por

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dz^{\mu} dz^{\nu}, \qquad (0.1\text{-}1a)$$

e o comprimento da curva entre dois pontos com coordenadas $z^{\mu}(\lambda_1)$ e $z^{\mu}(\lambda_2)$ é dado por

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dz^{\mu}}{d\lambda} \frac{dz^{\nu}}{d\lambda}} \quad . \qquad (0.1\text{-}1b)$$

Esta definição é independente do sistema de coordenadas usado e também da escolha da parametrização.

Em cada ponto da trajetória as componentes do vetor tangente são definidas por

$$z'^{\mu} = \frac{dz^{\mu}}{d\lambda} \quad , \qquad (0.1\text{-}2)$$

e sua norma fica dada por

$$z'^2 = -\eta_{\mu\nu} z'^{\mu} z'^{\nu} = -\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 \quad . \tag{0.1-3}$$

O vetor tangente assim definido é identificado com a velocidade $\underline{v}$ da partícula, $v = \{v^{\mu}\} \equiv \{z'^{\mu}\}$.

O comprimento de curva, definido pela expressão (0.1.13), é o candidato natural para a integral de ação associada com a partícula. Denotaremos

$$S_1 = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda L_1(z') \tag{0.1-4}$$

onde L_1 é a lagrangiana(*),

$$L_1 = -\sqrt{-\eta_{\mu\nu} z'^{\mu} z'^{\nu}} = -\sqrt{-z'^2} \tag{0.1-5}$$

As equações de movimento para a partícula são obtidas da integral de ação (0.1-4) pelo princípio variacional $\delta S = 0$ com $\delta z(\lambda_1) = 0 = \delta z(\lambda_2)$. De modo geral as equações de movimento de Euler-Lagrange se escrevem

$$E_{\mu} \equiv \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L_1}{\partial z'^{\mu}}\right) - \frac{\partial L_1}{\partial z^{\mu}}$$

que, para o caso específico que estamos considerando, com a lagrangiana dada por (0.1-5), resultam ser

(*) Omitiremos a massa m da partícula pois sua inclusão não é importante para a discussão que se segue.

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{z'^{\mu}}{\sqrt{-z'^{2}}}\right) = 0 \qquad (0.1\text{-}6)$$

As equações (0.1-6) acima não têm a forma que se espera para as equações de movimento de uma partícula livre, que devem expressar o fato da aceleração da partícula ser nula, $(d^2z^{\mu}/d\lambda^2) = 0$. É claro que isto se deve a estarmos usando um parâmetro arbitrário na definição da integral de ação. Definindo-se um novo parâmetro $\bar{\lambda}$ por

$$\frac{d}{d\bar{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{-z'^{2}}}\frac{d}{d\lambda}$$

as equações (0.6) assumem a forma desejada,

$$\frac{d}{d\bar{\lambda}}\left(\frac{dz^{\mu}}{d\bar{\lambda}}\right) = 0 \qquad (0.1\text{-}7)$$

No entanto, é óbvio que este não é o melhor procedimento para resolver o problema. De fato, segue da equação (0.1-3) que tomando-se o parâmetro λ como o comprimento de arco s tem-se que

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \dot{z}^2 = -1 \qquad (0.1\text{-}8)$$

e as equações de movimento (0.1-6) se reduzem a

$$\frac{d^2z^{\mu}}{ds^2} = \ddot{z}^{\mu} = 0 \qquad (0.1\text{-}9)$$

Estas equações admitem a integral primeira

$$\eta_{\mu\nu}\dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu} = c^{te} = k, \qquad (0.1\text{-}10a)$$

onde a constante k deve ser tomada como igual a -1, em acordo com (0.1-8), de modo que a lagrangiana L_1 é uma constante.

A escolha (0.1-8), que significa tomar como parâmetro o tempo próprio, caracteriza a partícula em questão como uma partícula com massa não nula pois suas possíveis trajetórias são curvas tipo tempo, $\dot{z}^2 = -1$. Denotando por m a massa da partícula, a lagrangiana deve ser escrita como

$$L_1 = -m\sqrt{-\dot{z}^2} \quad . \qquad (0.1\text{-}10b)$$

As trajetórias da partícula obtidas por extremização da integral de ação construida com lagrangiana (0.1-10b) são, por definição, as geodésicas do espaço-tempo. Calculando-se a segunda variação da integral de ação verifica-se que para que a curva extremal conduza a um mínimo de S_1 deve-se ter $m > 0$.

Um detalhe técnico que deve ser observado é que a escolha do parâmetro pela condição (0.1-8) só foi feita após termos obtido as equações de movimento (0.1-6). Se esta escolha foi feita de início, as variações δz^{μ} deverão respeitar aquela condição. Assim, para que o procedimento seja formalmente correto, a condição (0.8) deve ser introduzida na integral de ação como um vínculo, usando-se um multiplicador de Lagrange. Este procedimento será analisado mais adiante.

No caso de partículas de massa nula o parâmetro não pode ser escolhido como o comprimento de arco porque neste caso as trajetórias são geodésicas nulas, $ds^2 = 0$. No entanto , é sempre possível encontrar um parâmetro σ tal que as equações de movimento para estas partículas se escrevam

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\sigma^2} = 0 \quad , \tag{0.1-11}$$

com integral primeira

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\sigma} \frac{dz^\nu}{d\sigma} = 0 \quad . \tag{0.1-12}$$

Estas equações podem ser obtidas formalmente da integral de ação fazendo-se a constante k na equação (0.1-10a) igual a zero no final dos cálculos. O procedimento que conduz às equações de movimento, no entanto, é internamente inconsistente. Esta inconsistência é consequência da forma funcional da lagrangiana, uma raiz quadrada de uma quantidade que é nula.

É um fato bastante conhecido que a lagrangiana

$$L_2 = -\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\lambda} \frac{dz^\nu}{d\lambda} \tag{0.1-13}$$

conduz a equações de movimento da forma (0.1-9), mas em termos do parâmetro λ que até este ponto é arbitrário, isto é,

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad . \tag{0.1-14}$$

Uma integral primeira desta equação é

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\lambda} \frac{dz^\nu}{d\lambda} = c^{\underline{te}} = k \tag{0.1-15}$$

sem restrições sobre a constante k, que pode ser positiva, negativa ou nula. Assim, por uma escolha conveniente da constante k, a lagrangiana L_2, dada por (0.1-13), conduz às equações de movimento para partículas com massa $(k < 0)$ ou sem massa $(k = 0)$.

A situação neste estágio é a seguinte. Podemos construir duas integrais de ação para a partícula livre relativística,

$$S_1 = \int_1^2 L_1 d\lambda = \int_1^2 -\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\lambda}\frac{dz^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda \qquad (0.1\text{-}16)$$

e

$$S_2 = \int_1^2 L_2 d\lambda = \int_1^2 -\frac{1}{2}\, \eta_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\lambda}\frac{dz^\nu}{d\lambda}\, d\lambda \qquad (0.1\text{-}17)$$

As equações de movimento e as correspondentes integrais primeiras estão mostradas no quadro comparativo que se segue.

Lagrangiana	$L_1 = -\sqrt{-z'^2}$		$L_2 = \frac{1}{2} z'^2$	
Parâmetro	λ(Arbitrário)	S(Tempo-próprio)	λ(Arbitrário)	S(Tempo-próprio)
Equações de movimento	$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{z'^\mu}{\sqrt{-z'^2}}\right)=0$	$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} = 0$	$\frac{d^2 z^\mu}{d\lambda^2} = 0$	$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} = 0$
Integrais primeiras		$\dot{z}^2 = -1$	$z'^2 = k$ $k < 0, k = 0$	$\dot{z}^2 = -1$ $z'^2 = 0$
Trajetórias	Geodésicas tipo tempo		Geodésicas tipo tempo $(k < 1)$ Geodésicas nulas $(k = 0)$	
Massa das partículas	$m > 0$		$m > 0 \quad (k < 0)$ $m = 0 \quad (k = 0)$	

A integral de ação S_2 conduz a qualquer tipo de geodésica enquanto que S_1 só conduz a geodésicas tipo-tempo. Neste sentido pode-se dizer que a lagrangiana L_2 é mais geral que L_1. Deve-se observar, no entanto, que a escolha de uma ou de outra tem consequências importantes nos desenvolvimentos da teoria, principalmente na formulação hamiltoniana. Estas consequências são reflexos dos diferentes graus da homogeneidade das lagrangianas nas velocidades ou, em outras palavras, nos comportamentos das integrais de ação por reparametrizações. Passemos a uma análise destas questões.

Consideremos inicialmente a integral de ação S_2. Por uma variação qualquer δz^μ tem-se que

$$\delta S_2 = \int_1^2 \xi_\mu \delta z^\mu d\lambda + \int_1^2 \frac{d}{d\lambda}\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\lambda}\delta z^\nu\right) d\lambda \qquad (0.1\text{-}18a)$$

Sobre uma trajetória da partícula, $\xi_\mu = 0$ e

$$\delta S_2 = \int_1^2 \frac{d}{d\lambda}\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\lambda}\delta z^\mu\right) d\lambda \qquad (0.1\text{-}18b)$$

de (0.1-17) vê-se que S_2 é invariante pelo grupo uniparamétrico de reparametrizações

$$\lambda \to \bar{\lambda} = \lambda + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon = c^{te} \qquad (0.1\text{-}19)$$

Por esta transformação,

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{\lambda}} = \frac{d\lambda}{d\bar{\lambda}}\frac{dz^\mu}{d\lambda} = \frac{dz^\mu}{d\lambda} \quad , \qquad (0.1\text{-}20)$$

e

$$\delta z^\mu = \delta\lambda\frac{dz^\mu}{d\lambda} = \varepsilon\frac{dz^\mu}{d\lambda} \quad . \qquad (0.1\text{-}21)$$

Note que δz^μ dado acima é tangente a trajetória. Com estes resultados segue da invariância de S_2, $\delta S_2 = 0$, que

$$\eta_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\lambda}\frac{dz^\nu}{d\lambda} = c^{te}$$

que é a expressão (0.1-15). Observemos que este é um exemplo de uma "lei de conservação fraca" pois, para sua obtenção, fizemos uso das equações de movimento ($\xi_\mu = 0$ na equação (0.1-18a)).

Este resultado pode também ser obtido fazendo-se uso do fato que L_2 é uma função homogênea de segunda ordem nas ve locidades. Então, pelo teorema de Euler deve-se ter

$$z'^{\mu} \frac{\partial L_2}{\partial z'^{\mu}} = 2L_2$$

para qualquer função L_2 homogênea de segunda ordem em z'^{μ}. Mas,

$$\frac{dL_2}{d\lambda} = \frac{\partial L_2}{\partial z^{\mu}} z'^{\mu} + \frac{\partial L_2}{\partial z'^{\mu}} z''^{\mu} = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial L_2}{\partial z'^{\mu}} z'^{\mu}\right] = 2 \frac{dL_2}{d\lambda} = 0$$

donde segue que L_2 é uma constante.

No caso da integral de ação S_1 as coisas mudam de figura porque S_1 é invariante por transformações arbitrárias do parâmetro ,

$$\lambda \to \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\lambda) \quad . \qquad (0.1\text{-}22)$$

Mesmo assim, podemos calcular uma variação de S_2 devido a uma variação em λ. Considerando variações que se anulam nos extremos da curva (isto é, $\bar{\lambda}(\lambda_1) = \lambda_1$, $\bar{\lambda}(\lambda_2) = \lambda_2$), o que não altera o resultado final, obtem-se

$$\delta S_2 = \int_1^2 \mathcal{E}_{\mu}\left(\frac{dz^{\mu}}{d\lambda}\,\delta\lambda\right) d\lambda \equiv 0. \qquad (0.1\text{-}23)$$

Como consequência da invariância paramétrica de S_2 não se obtem nenhuma quantidade conservada, mas sim uma identidade que deve ser satisfeita pelos vetores de Euler-Lagrange $\mathcal{E}_{\mu}$,

$$\mathcal{E}_{\mu} \frac{dz^{\mu}}{d\lambda} \equiv 0 \qquad (0.1\text{-}24)$$

sobre qualquer curva , mesmo sobre aquelas que não são extremais de S_2. A identidade (0.1-23) nos diz que as componentes do vetor de Euler-Lagrange não são todas independentes, e indica que a lagrangiana L_2 é degenerada (isto é, que existem vínculos associados ao sistema).

A lagrangiana L_2 é uma função homogênea de primeira ordem nas velocidades. Segue do teorema de Euler que

$$z'^{\mu} \frac{\partial L_2}{\partial z'^{\mu}} = L_2 \quad . \tag{0.1-25}$$

A partir desta equação não se obtem nenhuma integral primeira das equações de movimento como fizemos no caso anterior.

Passemos ao formalismo hamiltoniana. Os momentos canonicamente conjugados às coordenadas z^{μ} são definidos por

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial z'^{\mu}} \tag{0.1-26}$$

Com os colchetes de Poisson fundamentais

$$\{z^{\mu}, p_{\nu}\} = \delta^{\mu}{}_{\nu}, \tag{0.1-27a}$$

$$\{z^{\mu}, z^{\nu}\} = 0, \quad \{p_{\mu}, p_{\nu}\} = 0, \tag{0.1-27b}$$

as equações de movimento hamiltonianas se escrevem

$$z'^{\mu} = \{z^{\mu}, H_c\}, \quad p'_{\nu} = \{p_{\nu}, H_c\}, \tag{0.1-28}$$

onde H_c é a hamiltoniana canônica,

$$H_c = z'^{\mu} p_{\mu} - L \qquad (0.1\text{-}29)$$

A lagrangiana L_2 não conduz a nenhum problema especial na formulação hamiltoniana. Tem-se que

$$p_{\mu} = m\eta_{\mu\nu} z'^{\mu} \qquad (0.1\text{-}30)$$

e

$$H_c = \frac{1}{2m} \eta^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} \quad . \qquad (0.1\text{-}31)$$

As equações de Hamilton são

$$z'^{\mu} = \frac{1}{m} \eta^{\mu\nu} p_{\nu}, \quad p'_{\nu} = 0,$$

donde se obtém $z''^{\mu} = 0$, em acordo com (0.1-14).

No caso de L_1 tem-se que

$$p_{\mu} = \frac{m}{\sqrt{-z'^2}} \eta_{\mu\nu} z'^{\nu} \qquad (0.1\text{-}32)$$

e

$$H_c \equiv 0 \, . \qquad (0.1\text{-}33)$$

Esta identidade é decorrência da homogeneidade da lagrangiana nas velocidades, e nada mais é que a equação (0.1-25) expressa em termos dos momentos. O significado deste resultado é que na teoria canônica baseada na lagrangiana L_1 deve existir pelo menos um vínculo entre as variáveis canônidas z^μ, p_μ. Como a lagrangiana é homogênea de primeira ordem nas velocidades, segue da definição dos momentos, equação (0.1-25), que estes são funções homogêneas de grau zero nas velocidades. Conseqüentemente, não podemos usar a definição (0.1-25) para expressar as velocidades em termos dos momentos de maneira unívoca. Isto fica claro examinando-se a expressão (0.1-32): vê-se que p_μ fica inalterado se fizermos a substituição $z'^\mu \rightarrow \alpha\, z'^\mu$. Ainda de (0.1-32) obtem-se

$$p^2 + m^2 = 0 \quad , \tag{0.1-34}$$

que é a equação de vínculos a que nos referimos anteriormente. Uma vez escolhida a lagrangiana L_1 a equação (0.1-34) é conseqüência da definição dos momentos, e nos diz que apenas três de suas componentes são independentes.

Sistemas físicos cujas lagrangianas são invariantes por reparametrizações arbitrárias são denominados "sistemas homogêneos" ou "sistemas covariantes gerais". Além da partícula livre relativística podemos citar como exemplos destes sistemas os strings relativísticos e a teoria da relatividade geral. Na seção que se segue vamos estudar as propriedades gerais dos sistemas homogêneos objetivando essencialmente compreender algumas de suas peculiaridades que serão importantes para a teoria dos strings.

0.2 Sistemas covariantes gerais

0.2.1 A formulação lagrangiana

Denotemos por

$$S = \int_1^2 d\lambda L(q'(\lambda), q(\lambda)) \qquad (0.2\text{-}1a)$$

a integral de ação associada com um dado sistema. Nesta expresão L é a lagrangiana, $q^i(\lambda)$, $(i = 1,\ldots,n)$ são as coordenadas generalizadas, $q' = dq/d\lambda$, e λ é um parâmetro arbitrário. As equações de movimento que se obtêm do princípio de Hamilton $\delta S = 0$ com $\delta q(1) = o = \delta q(2)$, se escrevem

$$\mathcal{E}_i \doteq \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial q'^i}\right) = 0 \qquad (0.2\text{-}2)$$

Queremos determinar quais as condições que devem ser satisfeitas pela lagrangiana de modo que a integral de ação (0.2-1) seja invariante por reparametrizações $\lambda \to \bar\lambda = \bar\lambda(\lambda)$. A função $\bar\lambda(\lambda)$ não é totalmente arbitrária. De fato, para que seja possível fazer a reparametrização inversa $\bar\lambda$ deve ser uma função estritamente monótona, isto é, $d\bar\lambda/d\lambda$ deve ser sempre positiva ou negativa. Além disto, como S é uma integral definida a invariância por reparametrizações requer que os extremos da trajetória não sejam afetados $\bar\lambda(\lambda_1) = \lambda_1$ e $\bar\lambda(\lambda_2) = \lambda_2$. Vamos sempre supor que estas condições são satisfeitas.

Por definição a integral de ação é invariante por reparametrizações se

$$\int d\lambda L(q'(\lambda), q(\lambda)) = \int d\bar\lambda L\left(\frac{dq}{d\bar\lambda}, q(\bar\lambda)\right) \doteq$$

$$\doteq \int \frac{d\bar\lambda}{d\lambda} L\left(\frac{d\lambda}{d\bar\lambda} q'(\lambda), q(\lambda)\right) \qquad (0.2\text{-}3)$$

Em termos da lagrangiana a condição de invariância paramétrica se escreve

$$\frac{d\lambda}{d\bar{\lambda}} L\left(q'(\lambda), q(\lambda)\right) = L\left(\frac{d\lambda}{d\bar{\lambda}} q'(\lambda), q(\lambda)\right) \quad . \qquad (0.2\text{-}4)$$

De modo geral, deve-se ter

$$L(\alpha q', q) = \alpha L(q', q) \quad , \qquad (0.2\text{-}5)$$

de modo que a lagrangiana deve ser uma função homogênea de primeira ordem nas velocidades. Segue do teorema de Euler que

$$q'^i \frac{\partial L}{\partial q'^i} = L \quad . \qquad (0.2\text{-}6)$$

Por um procedimento análogo ao que conduziu a (0.1-23) encontra-se que

$$q'^i \xi_i \equiv 0 \ . \qquad (0.2\text{-}7)$$

Esta expressão é uma identidade que deve ser satisfeita pelas coordenadas $\underline{q}$ e velocidades $\underline{q}'$, e significa que as acelerações $\underline{q}''$ não são todas independentes. Este ponto pode ser esclarecido da seguinte maneira. Como L é homogênea, de primeira ordem nas velocidades, segue que as derivadas $\partial L/\partial q'_i$ são homogêneas de grau zero. Então, pelo teorema de Euler, tem-se que

$$q'^i \frac{\partial}{\partial q'^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q'^j}\right) = q'^i\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q'^j}\right) = 0 \quad . \tag{0.2-8}$$

Desta última expressão conclui-se que a matriz hessiana

$$H = (H_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q'^j}\right) \tag{0.2-9}$$

é uma matriz degenerada. $\underline{q}'$ é um autovetor de H com autovalor nulo.

As equações de Euler-Lagrange (0.2-2) se escrevem

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q'^j} q''^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q^i}\right) q'^j \tag{0.2-10}$$

ou

$$H_{ij} q''^j = \phi_i(q, q') \tag{0.2-11}$$

Como H^{-1} não existe, estas equações não nos permitem expressar todas as acelerações em termos das velocidades e coordenadas, o que indica a existência de vínculos associados ao sistema. O número destes vínculos, que é ditado pelo posto da matriz H, é igual a um. Usando (0.2-6) e (0.2-11) obtém-se

$$q'^i \phi_i(q, q') \equiv 0. \tag{0.2-12}$$

Pode-se ver, sem dificuldades, como os resultados acima afetam as soluções das equações de movimento. Estas podem ser expressas pela expansão em série

$$q^i(\lambda) = q^i(\lambda_o) + \lambda q'^i(\lambda_o) + \frac{\lambda^2}{2!} q''^i(\lambda_o) + \ldots \quad . \qquad (0.2\text{-}13)$$

Nesta expressão os dois primeiros termos são os dados de Cauchy(*) para o problema. As derivadas segundas devem ser obtidas das equações de movimento, e a partir dela todas as derivadas de ordem superior. A partir deste ponto o problema fica indeterminado porque, como vimos, as equações de movimento não determinam todas as acelerações. Esta indeterminação é uma óbvia manifestação da invariância paramétrica da integral de ação, pois pode-se sempre fazer uma transformação $\lambda \to \bar{\lambda}$ de tal modo que os dados de Cauchy permaneçam inalterados mas $q(\lambda)$ mude arbitrariamente.

Examinemos o caso da partícula livre relativística com a integral de ação (0.1-16). A lagrangiana se escreve

$$L = - m\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} z'^{\alpha} z'^{\beta}} \quad . \qquad (0.2\text{-}14)$$

Esta lagrangiana é claramente singular. A matriz hessiana fica dada por

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial z'^{\alpha} \partial z'^{\beta}} = - \frac{m}{(-z'^2)^{3/2}} (\eta_{\alpha\beta} z'^2 - z'_{\alpha} z'_{\beta}) \qquad (0.2\text{-}15)$$

donde se vê que a condição (0.2-12) é satisfeita, $z'^{\alpha} H_{\alpha\beta} = 0$. H tem posto 3 e, portanto, deve existir um vínculo. Note que o número de vínculos para os sistemas covariantes gerais é sempre igual ao número de parâmetros com relação aos quais a ação é invariante.

(*) Note que a escolha destes dados fica restrita a satisfazer a condição (0.2-12).

Façamos uma escolha do parâmetro tomando λ como o tempo próprio s. Neste caso temos que levar em conta a condição subsidiária

$$\dot{z}^2 + 1 \doteq 0 \quad , \tag{0.2-16}$$

que deve ser introduzida na lagrangiana com um multiplicador de Lagrange $\beta(s)$, resultando de modo geral em

$$\bar{L} = L(\dot{z}, z) + \frac{\beta(s)}{2} (\dot{z}^2 + 1) \tag{0.2-17}$$

Do princípio variacional, ou variando-se $z(s)$ e $\beta(s)$ independentemente, resultam as equações de movimento

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} + \frac{d}{ds}(\beta \dot{z}^\alpha) = 0 \tag{0.2-18}$$

e a condição (0.2-16). Usando

$$\eta_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \ddot{z}^\nu = 0 \tag{0.2-19}$$

nas equações de movimento obtem-se

$$\frac{d\beta}{ds} = \dot{z}^\alpha \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} - \dot{z}^\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha}\right)$$

donde

$$\beta = \int ds\, \dot{z}^\alpha \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} - \int ds\, \dot{z}^\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha}\right) \doteq L - \dot{z}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha} \ . \tag{0.2-20}$$

Para o caso particular da lagrangiana (0.2-14) tem-se $\beta=0$ como consequência de (0.2-6).

A condição da lagrangiana ser homogênea, de primeira ordem nas velocidades, é fundamental para todas as conclusões a que chegamos. Esta condição, que se expressa pela equação (0.2-5) ou, equivalentemente, pela equação (0.2-6), foi obtida pela imposição de invariância da integral de ação, equação (0.2-3). Vamos agora mostrar como podemos chegar as mesmas conclusões a partir da lagrangiana, introduzindo-se a noção de quase-invariância.

Consideremos a transformação

$$q^i(\lambda) \longrightarrow q^i(f(\lambda)) = q^i(\bar{\lambda}) , \qquad (0.2\text{-}21)$$

$$q'^i(\lambda) \longrightarrow \frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda}\frac{dq^i}{d\bar{\lambda}} .$$

Sob forma infinitesimal, a transformação do parâmetro se escreve

$$\bar{\lambda} = \lambda + \varepsilon\xi(\lambda) . \qquad (0.2\text{-}22)$$

Tem-se que

$$\delta q^i = \varepsilon\xi(\lambda)q'^i , \qquad (0.2\text{-}23a)$$

$$\delta q'^i = \frac{d}{d\lambda}\,\delta q^i = \varepsilon\xi'(\lambda)q^i + \varepsilon\xi(\lambda)q''^i. \qquad (0.2\text{-}23b)$$

Para que a teoria seja invariante pela transformação (0.2-21) é suficiente impor que a lagrangiana seja quase invariante pelas transformações infinitesimais (0.2-23), isto é, que

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial q'^i}\,\delta q'^i = \varepsilon\,\frac{d}{d\lambda}(\xi\psi) \qquad (0.2\text{-}24)$$

onde ψ é uma função de q^i e q'^i. Usando (0.2-23) esta equação se escreve

$$\xi\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\,q'^i + \frac{\partial L}{\partial q'^i}\,q''^i\right) + \xi'\,\frac{\partial L}{\partial q'^i}\,q'^i = \xi\,\frac{d\psi}{d\lambda} + \xi'\psi\ .$$

Como $\xi(\lambda)$ é arbitrária, ξ e ξ' são independentes e portanto

$$\frac{\partial L}{\partial q'^i}\,q'^i = \psi\ , \qquad (0.2\text{-}25a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}\,q'^i + \frac{\partial L}{\partial q'^i}\,q''^i = \frac{d\psi}{d\lambda} \qquad (0.2\text{-}25b)$$

Substituindo (0.2-25a) em (0.2-25b) encontra-se

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q'^i\partial q'^j}\,q'^i q''^j + q'^i\,\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q'^j}\,q'^j - L\right) = 0 \qquad (0.2\text{-}26)$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q'^i\partial q'^j}\,q'^i = 0 \qquad (0.2\text{-}27)$$

donde se conclui que a lagrangiana é singular e que o sistema necessariamente tem vínculos. Segue então que

$$q'^i \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial L}{\partial q'^j} q'^j - L \right) = 0 \quad . \qquad (0.2\text{-}28)$$

Agora, usando (0.2-27) verifica-se que o termo entre parênteses da expressão acima não depende das velocidades. De (0.2-28) vê-se que este termo também não depende das coordenadas e, portanto,

$$q'^j \frac{\partial L}{\partial q'^j} - L = 0 \quad ,$$

que é a condição (0.2.6).

0.2.2 Formulação hamiltoniana

Na formulação canônica a singularidade da matriz hessiana

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^\alpha \partial \dot{z}^\beta} \equiv \frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{z}^\beta}$$

significa que a definição dos momentos não pode ser invertida para nos dar as velocidades como função dos momentos e coordenadas, isto é, $\dot{z} = \dot{z}(z,p)$. Assim, somos levados à concluir que os momentos não são todos independentes, devendo existir relações da forma

$$\mathcal{H}(z,p) = 0 \qquad (0.2\text{-}29)$$

que são vínculos da formulação hamiltoniana. No caso da partícula relativística existe apenas uma função de vínculo por que a partícula tem apenas 3 graus de liberdade. Na discussão da formulação lagrangiana dissemos que o número de vínculos é sempre igual ao número de parâmetros independentes cujas reparametrizações deixam a ação invariante. O mesmo se aplica na formulação hamiltoniana.

Da equação (0.2-6) segue que a hamiltoniana canônica é nula,

$$H_c = p_\alpha \dot{z}^\alpha - L \equiv 0 \qquad (0.2\text{-}30)$$

como consequência da lagrangiana ser homogênea de primeira ordem nas velocidades. Na verdade, se queremos construir uma formulação hamiltoniana covariante isto sempre deve acontecer. A demonstração é trivial: a variação com relação ao parâmetro λ de uma função das variáveis canônicas é dada por

$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \{F, H_c\} \quad .$$

Fazendo-se uma reparametrização $\lambda \to \bar{\lambda}(\lambda)$, tem-se que

$$\frac{dF}{d\bar{\lambda}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\lambda}} + \frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda}\{F, H_c\} \quad .$$

Estas duas equações são compatíveis somente se $H_c \equiv 0$. É claro que isto tem a ver com a covariância da teoria, como dissemos acima. De fato, a escolha de um parâmetro significa a escolha de um observador, o que faz com que a teoria perca a covariância relativística manifesta. Logo, *só as teorias invariantes por reparametrizações admitem uma formulação hamil* *toniana com invariância relativística manifesta.* Observemos que isto não significa que formulações canônicas covariantes existam apenas para sistemas cujas lagrangianas conduzam as $H_c \equiv 0$ a priori. Qualquer teoria pode ser posta sob forma invariante paramétrica aumentando-se o número de graus de liberdade e acrescentando-se vínculos a teoria, por uma técnica bastante conhecida.

A questão agora é como construir uma dinâmica hamiltoniana para os sistemas covariantes gerais, já que esta não pode ser gerada pela hamiltoniana canônica devido a (0.2-30). Vamos partir da equação de vínculo (0.2-29) e da hipótese de que ela deve permanecer válida durante a evolução dinâmica do sistema. Deve-se ter

$$0 \doteq \frac{d\mathcal{H}}{d\lambda} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z^\alpha} z'^\alpha + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\beta} p'_\beta =$$

$$= \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial z^\alpha}\right) z'^\alpha + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial z^\alpha} z''^\alpha \quad , \qquad (0.2\text{-}31)$$

donde segue que

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial z^\alpha} = 0 \qquad (0.2\text{-}32)$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial z'^\alpha} = 0 \, . \qquad (0.2\text{-}33)$$

Esta última equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 L}{\partial z'^\beta \partial z'^\alpha} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\beta} H_{\alpha\beta} = 0 \qquad (0.2\text{-}34)$$

Como já sabemos que o (único) auto-vetor nulo de $H_{\alpha\beta}$ é z'^{α} concluímos que

$$z'^{\alpha} = N(\lambda)\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{\beta}} \tag{0.2-35}$$

onde N é uma função arbitrária do parâmetro λ. Substituindo este resultado em (0.2-32), obtem-se

$$N\,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z^{\alpha}} + z'^{\beta}\,\frac{\partial p_{\beta}}{\partial z^{\alpha}} = 0$$

ou

$$N\,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z^{\alpha}} + z'^{\beta}\,\frac{\partial^2 L}{\partial z^{\alpha}\partial z'^{\beta}} = 0 \tag{0.2-36}$$

Da equação (0.2-7), $z'^{\alpha}\xi_{\alpha} = 0$, e das equações de movimento encontra-se

$$z'^{\beta}\,\frac{\partial^2 L}{\partial z^{\alpha}\partial z'^{\beta}} = \frac{\partial L}{\partial z^{\alpha}} = p'_{\alpha} \quad , \tag{0.2-37}$$

que substituida em (0.2-36) resulta em

$$p'_{\alpha} = -\,N\,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z^{\alpha}} \quad . \tag{0.2-38}$$

Obtivemos assim o conjunto de equações

$$\begin{cases} z'^{\alpha} = N(\lambda)\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{\alpha}} \quad , & (0.2\text{-}39) \\[2ex] p'_{\alpha} = -N(\lambda)\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial z^{\alpha}} \quad , & (0.2\text{-}40) \end{cases}$$

que são as equações canônicas de Hamilton com "hamiltoniana"

$$H = N(\lambda)\mathcal{H}_o(Z,p) = 0 \qquad (0.2\text{-}41)$$

Se estabelecermos como regra que a equação de vínculo (0.2-29) só deve ser usada depois que todos os colchetes de Poisson da teoria forem calculados, as equações (0.2-39) e (0.2-40) podem ser escritas como

$$\dot{Z}^\alpha = \{Z^\alpha, H\} \quad , \qquad (0.2\text{-}42)$$

$$p'_\alpha = \{p_\alpha, H\} \quad , \qquad (0.2\text{-}43)$$

onde a "hamiltoniana" H é dada por (0.2-41), e

$$\{Z^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha{}_\beta, \ \{Z^\alpha, Z^\beta\} = 0, \ \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \qquad (0.2\text{-}44)$$

Obtivemos desta forma um resultado muito importante: a dinâmica dos sistemas covariantes gerais é gerada pelos vínculos da teoria. Assim, dado o sistema calculam-se os momentos canônicos pela definição (0-1-26); esta definição deve conduzir de imediato aos vínculos associados com o sistema ou a alguns deles, denominados vínculos primários. Pode ocorrer que ao se impor que os vínculos primários sejam válidos durante a evolução dinâmica do sistema resulte em novas relações entre as variáveis canônicas, independentes dos vínculos primários. Estas relações deverão ser consideradas como novos vínculos, denominados vínculos secundários.

Mais adiante apresentaremos um método para tratar de sistemas que admitem vínculos primários e secundários, devido a Dirac. Por enquanto não necessitamos considerar estes casos mais gerais.

O caso da partícula livre relativística é suficiente para mostrar que o procedimento que nos conduziu até as conclusões acima é consistente. Consideremos então a lagrangiana (0.1-10),

$$L = - m \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} z'^{\alpha} z'^{\beta}} \quad . \tag{0.2-45}$$

Os momentos são

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial z'^{\mu}} = \frac{m}{\sqrt{-z'^{2}}} z'^{\nu} \eta_{\mu\nu} \quad . \tag{0.2-46}$$

Segue desta definição que

$$\eta^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} = \frac{m^2}{(-z'^2)} \eta_{\alpha\beta} z'^{\alpha} z'^{\beta} = - m^2$$

Portanto, a equação de vínculo associada com a partícula é

$$\mathcal{H} = p^2 + m^2 = 0 \quad , \tag{0.2-47}$$

e a hamiltoniana se escreve

$$H = N(\lambda)(p^2 + m^2) \quad . \tag{0.2-48}$$

De acordo com (0.2-42) as equações de movimento são

$$Z'^{\alpha} = \{Z^{\alpha}, N(\lambda)(p^2 + m^2)\} = 2N\eta^{\alpha\beta}p_{\beta} \qquad (0.2\text{-}49a)$$

$$p'_{\alpha} = 0 \quad . \qquad (0.2\text{-}49b)$$

Destas equações segue que

$$N(\lambda) = \frac{1}{2m}\sqrt{-Z'^2} \qquad (0.2\text{-}50)$$

donde se conclui que a presença da função arbitrária $N(\lambda)$ na teoria é um reflexo da arbitrariedade na escolha do parâmetro λ .

De (0.2-49a,b) obtem-se as equações da trajetória da partícula,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{2N(\lambda)} Z'^{\alpha}\right) = 0 \qquad (0.2\text{-}51)$$

ou, usando (0.67),

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{m Z'^{\alpha}}{\sqrt{-Z'^2}}\right) = 0 \quad . \qquad (0.2\text{-}52)$$

Portanto, a hamiltoniana (0.2-48) gera as equações de movimento corretas para a partícula, em termos do parâmetro arbitrário λ .

Uma escolha específica de λ implica na determinação da função $N(\lambda)$. Por exemplo, tomando-se λ como o tempo próprio, $\dot{Z}^2 = -1$, tem-se $N(\lambda) = 1/2\,m$.

Esta escolha reduz as equações (0.2-52) a $\ddot{z}^{\mu} = 0$, que é o que se espera para uma partícula livre. No caso geral (0.2-51) conduz a $z''^{\mu} = \frac{z'^{\mu}}{2N} \frac{dN}{d\lambda}$, o termo da direita aparecendo como consequência da escolha de um "relógio" não natural.

Vale a pena observar que a presença de funções arbitrárias nas equações canônicas é uma característica da formulação hamiltoniana de sistemas com vínculos.

Continuemos a examinar as consequências das equações de movimento (0.2-49, a,b). As componentes do momento são constantes do movimento, equação (0.2-49,b), mas não são todas independentes em virtude da equação de vínculo (0.2-47). Podemos escolher p_o como variável dependente,

$$p_o = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad . \tag{0.2-53}$$

De (0.2-49a) segue que

$$z'^k = 2Np^k \tag{0.2-54a}$$

e

$$z'^0 = 2Np^0 = 2N\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad , \tag{0.2-54b}$$

donde se obtem

$$z'^k = \frac{p^k}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} z'^0 \quad .$$

Esta equação pode ser integrada dando como resultado

$$z^k(\lambda) = \frac{p^k}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}\, z^0(\lambda) + c^k \quad , \qquad (0.2\text{-}55)$$

onde c^k são constantes de integração determinadas pelos dados iniciais. É importante observar que não se obtem uma equação para z^0, que permanece totalmente arbitrário. Era de se esperar que as soluções das equações de movimento contivessem uma função arbitrária porque a escala do parâmetro λ não foi especificada.

Comparando-se as expressões (0.2-55) com as soluções das equações de Newton para uma partícula livre somos levados a escolher $z^0(\lambda)$ como proporcional a λ. Duas possíveis escolhas são

$$\text{(a)} \quad z^0 \doteq \lambda \qquad (0.2\text{-}56)$$

e

$$\text{(b)} \quad z^0 \doteq \frac{p^0}{m}\lambda \quad , \qquad (0.2\text{-}57)$$

que correspondem a se tomar λ como a coordenada tempo ou como o tempo próprio, respectivamente. As expressões (0.2-55) se escrevem, nestes casos,

$$\text{(a)} \quad z^k(\lambda) = \frac{p^k}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}\,\lambda + c^k \qquad (0.2\text{-}58)$$

$$\text{(b)} \quad z^k(\lambda) = p^k\lambda + c^k \qquad (0.2\text{-}59)$$

A função $N(\lambda)$ que aparece nas equações (0.2-54) fica determinada:

$$\text{(a)} \quad N = \frac{1}{2p^0} \quad , \tag{0.2-60}$$

$$\text{(b)} \quad N = \frac{1}{2m} \tag{0.2-61}$$

Observe que (0.2-61) é equivalente e se fazer $Z'^2 = -1$ em (0.2-50), e daí o motivo pelo qual a escolha (0.2-57) é equivalente a se tomar o parâmetro λ como o tempo próprio.

A pergunta que pode-se fazer neste ponto é se é possível construir uma hamiltoniana que gere diretamente as equações que têm (0.2-58) ou (0.2-59) como soluções. Em outras palavras queremos uma hamiltoniana que propague apenas os graus de liberdade independentes depois de feita uma escolha do parâmetro. Isto realmente pode ser feito e o procedimento é usar a equação de vínculo (0.2-47) e uma relação entre $\dot{Z}^0$ e λ para eliminar as variáveis dependentes. Esta relação deve ser tratada como um vínculo que é imposto na teoria.

Consideremos o caso (a) como exemplo. A integral de ação hamiltoniana se escreve

$$S = \int d\lambda \Big(p_\alpha Z'^\alpha - N(\lambda) \quad - \beta(\lambda)(Z^0 - \lambda) \Big) \quad . \tag{0.2-62}$$

Variações com relação aos multiplicadores de Lagrange $N(\lambda)$ e $\beta(\lambda)$ conduzem, respectivamente, a

$$p^2 + m^2 \approx 0 \longrightarrow p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad , \qquad (0.2\text{-}63a)$$

$$Z^0 - \lambda = 0 \longrightarrow Z'^0 = 1 \quad . \qquad (0.2\text{-}63b)$$

Com estes resultados a integral de ação (0.2-62) fica sob a forma

$$S = \int d\lambda (p_i Z'^i - p^0) = \int d\lambda (p_i Z'^i - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) \equiv$$

$$\equiv \int d\lambda (p_i Z'^i - H_R) \quad , \qquad (0.2\text{-}64)$$

donde se conclui que

$$H_R \approx \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = E \quad , \qquad (0.2\text{-}65a)$$

onde E é a energia. H_r é denominada de "hamiltoniana reduzida". Para o caso (b) encontra-se

$$H_R = \frac{1}{2m} (\vec{p}^2 + m^2) = \frac{E^2}{2m} \quad . \qquad (0.2\text{-}65b)$$

Vê-se que em ambos os casos a hamiltoniana é uma quantidade conservada, mas não é necessariamente igual a energia do sistema. A escolha do parâmetro em Mecânica Clássica é usualmente denominada de "escolha de gauge". A hamiltoniana que propaga os graus de liberdade independentes do sistema é uma quantidade dependente do gauge, ao contrário da energia, definida como a quantidade que é conservada por "translações temporais", que é invariante de gauge.

É importante salientar que apesar da covariância manifesta do sistema ser destruída pela escolha da parametrização, a descrição do sistema ainda é invariante relativísti ca. Mostraremos mais adiante que a álgebra do grupo de Poincaré é satisfeita, no sentido do "colchete de Dirac".

Para encerrar esta seção vamos fazer algumas considerações sobre as transformações canônicas infinitesimais geradas pela função de vínculo (0.2-47). Denotemos o gerador das transformações por

$$G = \varepsilon(\lambda)\mathcal{H} \tag{0.2-66}$$

onde $\varepsilon(\lambda)$ é o parâmetro da transformação. A ação de G sobre uma função das variáveis canônicas $\Omega(Z,p)$ é dada por

$$\delta\Omega(Z,p) = \{\Omega,G\} = \varepsilon(\lambda)\frac{d\Omega}{d\lambda} \tag{0.2-67}$$

Em particular,

$$\delta Z^{\alpha} = \varepsilon(\lambda)\ Z'^{\alpha}\ . \tag{0.2-68}$$

A expressão (0.2-67) nos mostra que G (e, portanto, H) é o gerador de reparametrizações. De fato, (0.2-67) é a variação em $\Omega(Z,p)$ devida a transformação $\lambda \to \bar{\lambda} = \lambda + \varepsilon(\lambda)$. Sob a ação de G, Z^{α} e p_{α} se comportam como escalares enquanto que Z'^{α} e p'_{α} se comportam como vetores no "espaço do parâmetro".

O gerador (0.2-66) é o gerador de um grupo uniparamétrico de transformações. A Hamiltoniana (0.2-41), que é uma escalar com relação a G, é uma invariante do grupo porque

$\delta H = 0$. De modo geral, qualquer função Ω invariante sob a ação de G tem colchete de Poisson nulo com H.

0.3 A dinâmica da partícula em variedades de Riemann

Vimos na seção anterior que a trajetória do movimento livre de uma partícula no espaço de Minkowski é uma linha reta (equações (0.1-6)). As equações foram obtidas a partir do princípio variacional $\delta S = 0$, com a integral de ação S dada por (0.1-4). Como a integral de ação é basicamente o comprimento da trajetória, de acordo com (0.1-1b), as equações (0.1-6) são as equações da curva que extremizam o comprimento da trajetória. Isto é, são as equações das geodésicas.

A forma simples das equações (0.1-6) é devida ao fato de estarmos usando um referencial inercial no qual os coeficientes da métrica são constantes, $\eta_{\mu\nu} = c^{\underline{te}}$. Se introduzirmos um sistema de coordenadas geral, os coeficientes da métrica $g_{\alpha\beta}$ serão funções das coordenadas, $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(Z)$, e as equações das geodésicas assumirão uma forma mais complicada. De fato, em tal sistema de coordenadas o comprimento da trajetória (ou a integral de ação) fica dado por

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\alpha\beta}(Z)\frac{dZ^\alpha}{d\lambda}\frac{dZ^\beta}{d\lambda}}\, d\lambda \equiv \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(Z,Z')d\lambda \qquad (0.3\text{-}1)$$

Tomando $\lambda = s$, o princípio variacional conduz às equações de Euler-Lagrange. Mas agora a lagrangiana que aparece em (0.3-1) tem uma dependência em Z via os coeficientes da mé trica e é isto que introduz novos termos nas equações de movimento. Conforme mostraremos mais adiante as equações de movimento ficam sob a forma

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} + \{{}^{\mu}_{\alpha\beta}\} \frac{dz^\alpha}{ds} \frac{dz^\beta}{ds} = 0 \qquad (0.3-2)$$

onde

$$\{{}^{\mu}_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(\partial_\alpha g_{\beta\rho} + \partial_\beta g_{\alpha\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}) \qquad (0.3-3)$$

são os símbolos de Christofell.

O segundo termo na equação (0.3-2) representa as acelerações inerciais da partícula, e são consequências de estarmos usando um referencial não inercial. A ausência destes termos nas equações (0.1-6) reflete o fato do espaço de Minkowski ser plano, isto é, ter curvatura nula. Assim, é possível definir globalmente uma classe de referênciais, denominados inerciais, com relação aos quais os coeficientes da métrica são constantes e os símbolos de Christoffel se anulam. Observe que os símbolos de Christoffel (0.3-3) são dados em termos das derivadas dos coeficientes da métrica, de modo que o tensor métrico desempenha o papel de potencial para as acelerações inerciais que aparecem em (0.3-2).

Na teoria da relatividade geral o princípio da equivalência diz que as forças gravitacionais e inerciais são completamente equivalentes sob o ponto de vista físico, isto é, são da mesma natureza. Nenhuma experiência local é capaz de distinguir entre os dois tipos de força.

Uma das (muitas) consequências do princípio da equivalência é que as forças gravitacionais são descritas matematicamente da mesma maneira que as forças inerciais. Quando forças gravitacionais estão presentes o espaço-tempo é necessariamente uma variedade riemaniana curva, e o tensor métrico desempenha o papel de potencial para estas forças. Isto levou Einstein a formular o "postulado geodésico", segundo o qual as equações de movimento de uma partícula de teste em um campo gravitacional são geodésicas. Mais tarde o próprio Einstein demonstrou que as equações do campo gravitacional implicam que a trajetória de uma partícula teste é uma geodésica.

É importante observar que no caso das forças gravitacionais não é possível anular globalmente os símbolos de Christoffel. Na verdade é sempre possível encontrar um referencial *local* no qual aquelas quantidades se anulam, o que significa dizer que o espaço-tempo na teoria da relatividade geral tem uma estrutura Minkowskiana *local*. Relembremos que no caso das forças inerciais no espaço de Minkowski os símbolos de Christoffel podem ser anulados em todos os pontos porque o espaço-tempo é (globalmente) plano.

Então, as trajetórias de partículas em interação com campos gravitacionais são geodésicas do espaço-tempo, uma generalização direta do caso do espaço-tempo de Minkowski. Estas equações podem ser obtidas do princípio variacional $\delta S = 0$, com $\delta Z(\lambda_1) = 0 = \delta Z(\lambda_2)$, onde a lagrangiana pode ser escolhida como

$$\tilde{L} = \frac{-1}{2} g_{\alpha\beta}(z) \frac{dz^\alpha}{d\lambda} \frac{dz^\beta}{d\lambda} \qquad (0.3\text{-}4)$$

ou

$$L = -\sqrt{-g_{\alpha\beta}(z)\frac{dz^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dz^{\beta}}{d\lambda}} \quad . \qquad (0.3\text{-}5)$$

Basicamente, todas as conclusões a que chegamos nas seções anteriores permanecem válidas. A seguir vamos fazer uma revisão sobre geodésicas numa variedade riemaniana.

Consideremos uma variedade riemaniana com métrica $g_{\alpha\beta}(z)$. As curvas geodésicas podem ser definidas como as curvas que extremizam a integral

$$S = \int_1^2 ds = \int_1^2 d\lambda \sqrt{-g_{\alpha\beta}(z)\frac{dz^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dz^{\beta}}{d\lambda}} \equiv \int_1^2 d\lambda\, L(z,z') \qquad (0.3\text{-}6)$$

As equações de Euler-Lagrange que resultam do problema variacional são

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\alpha\beta}z'^{\beta}}{\sqrt{-z'^{2}}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-z'^{2}}}(\partial_{\alpha}g_{\mu\nu})z'^{\mu}z'^{\nu} = 0 \qquad (0.3\text{-}7)$$

Tomando $\lambda = s$, a equação acima se escreve

$$\frac{d^{2}z^{\alpha}}{ds^{2}} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu})\frac{dz^{\mu}}{ds}\frac{dz^{\nu}}{ds} = 0 \qquad (0.3\text{-}8)$$

ou

$$\frac{d^{2}z^{\alpha}}{ds^{2}} + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}\frac{dz^{\mu}}{ds}\frac{dz^{\nu}}{ds} = 0 \quad . \qquad (0.3\text{-}9)$$

Multiplicando a equação (0.3.7) por $g_{\alpha\rho}\frac{dz^{\rho}}{ds}$ encontra-se que

$$g_{\alpha\beta}(z)\frac{dz^{\alpha}}{ds}\frac{dz^{\beta}}{ds} = c^{te} = -1 \qquad (0.3\text{-}10)$$

ao longo da geodésica, o que era de se esperar.

Estes resultados mostram que o vetor tangente à geodésica, $v^{\mu} = dz^{\mu}/ds$, é transportado paralelamente ao longo da curva. De fato, a condição para que o vetor $\vec{v}$ seja transportado paralelamente ao longo da curva é

$$\nabla_{\vec{v}}\,\vec{v} = 0$$

ou

$$v^{\alpha}\nabla_{\alpha}v^{\beta} = 0 \qquad (0.3\text{-}11)$$

onde ∇_{α} é o operador de derivação covariante.

Observe que o que foi feito acima é uma simples generalização de fatos bem conhecidos do espaço plano. Considere um vetor v^{μ} definido ao longo (e numa vizinhança) de uma curva parametrizada por λ. A condição para que este vetor seja transportado paralelo a si mesmo em todos os pontos é que suas componentes sejam constantes, $dv^{\mu}/d\lambda = 0$. Esta condição pode ser escrita $\left(\frac{dz^{\nu}}{d\lambda}\right)\partial_{\mu}v^{\mu} = 0$. Se v^{μ} é o vetor tangente a curva tem-se $v^{\nu}\partial_{\nu}v^{\mu} = 0$, que é a equação (0.3-11) no espaço plano.

Expandindo (0.3-11) obtem-se

$$\frac{dv^{\beta}}{ds} + \left\{ {\beta \atop \alpha\rho} \right\} v^{\alpha}v^{\rho} = 0 \quad .$$

É claro então que as geodésicas podem também ser definidas como as curvas ao longo das quais vetores tangente são transportados paralelamente.

Usando um parâmetro arbitrário λ , as equações (0.3 -7) podem ser postas sob forma

$$\frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2} + \{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\}\frac{dz^\mu}{d\lambda}\frac{dz^\nu}{d\lambda} = f(\lambda)\frac{dz^\alpha}{d\lambda}$$

Pode-se demonstrar que se $\lambda = s$ então $f(s)$ é necessariamente igual a zero. De fato, diferenciando-se (0.3-10) encontra-se que

$$0 = 2f(s)g_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{ds}\frac{dz^\beta}{ds} = 2(c^{\underline{te}}).f(s)$$

donde $f(s) = 0$. Com esta condição as equações da geodésica assumem a forma (0.3-9), denominada de "forma padrão". Tem-se que

$$\frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2} + \{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}\frac{dz^\mu}{d\lambda}\frac{dz^\nu}{d\lambda} = -\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^{-1}\left(\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)\frac{dz^\alpha}{d\lambda} \qquad (0.3\text{-}12)$$

que se reduz à forma padrão se

$$f(\lambda) = \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$$

Logo,

$$\lambda = As + B \qquad (1.3\text{-}13)$$

onde A e B são constantes. Portanto, os parâmetros em termos dos quais a equação da geodésica assume a "forma padrão" (0.3-9), estão relacionados com s por transformações lineares. Estes parâmetros são denominados parâmetros afim. É claro que todos os parâmetros afim se relacionam entre si por transformações lineares.

Conforme já observamos anteriormente este procedimento não é válido para geodésicas nulas porque ao longo destas curvas $ds^2 = 0$. Geodésicas nulas são definidas como as curvas que satisfazem a

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\sigma^2} + \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dz^\alpha}{d\sigma} \frac{dz^\beta}{d\sigma} = 0 \qquad (0.3\text{-}14a)$$

e

$$g_{\alpha\beta} \frac{dz^\alpha}{d\sigma} \frac{dz^\beta}{d\sigma} = 0 \qquad (0.3\text{-}14b)$$

Da mesma forma que no espaço de Minkowski, a lagrangiana (0.3-4)

$$\tilde{L} = \frac{-1}{2} g_{\alpha\beta}(z) \frac{dz^\alpha}{d\lambda} \frac{dz^\beta}{d\lambda} \qquad (0.3\text{-}15)$$

conduz às equações da geodésica com

$$g_{\alpha\beta}(z) \frac{dz^\alpha}{d\lambda} \frac{dz^\beta}{d\lambda} = c^{\underline{te}} \quad , \qquad (0.3\text{-}16)$$

a constante podendo ser escolhida de modo a termos os três tipos de curvas - tipo tempo, tipo espaço ou nula.

Uma propriedade importante das geodésicas, e que nos será útil mais adiante, é a seguinte. suponhamos que a variedade admite um grupo de isometrias definido pelo campo de vetores de Killing ξ^μ,

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \tag{0.3-17}$$

A quantidade $\xi_\mu \dfrac{dz^\mu}{ds}$ é uma constante ao longo da geodésica. A prova é trivial, bastando usar (0.3-17) e as equações da geodésica:

$$v^\alpha \nabla_\alpha (\xi_\mu v^\mu) = v^\alpha (\nabla_\alpha \xi_\mu) v^\mu + (v^\alpha \nabla_\alpha v^\mu)\xi_\mu = \frac{1}{2} v^\alpha (\nabla_\alpha \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\alpha) = 0$$

Considerando-se a geodésica como a trajetória de uma partícula, $\xi_\mu v^\mu$ é uma constante do movimento. É claro então que a cada vetor de Killing tem-se associada uma lei de conservação correspondente. Note que a recíproca não é verdadeira.

Para encerrar esta seção vamos mostrar como as equações de Hamilton conduzem às equações da geodésica para a trajetória da partícula. Com a lagrangiana dada em (0.3-6), os momentos se escrevem

$$p_\alpha = m g_{\alpha\beta} \dot{z}^\beta \tag{0.3-18}$$

onde já usamos o fato de $\dot{z}^2 = -1$. A função de vínculo agora é

$$\mathcal{H}(z,p) = g^{\alpha\beta}(z) p_\alpha p_\beta + m^2 = 0 \tag{0.3-19}$$

de modo que a hamiltoniana se escreve

$$H = \frac{1}{2m}\left(g^{\alpha\beta}(z)p_\alpha p_\beta + m^2\right) \qquad (0.3\text{-}20)$$

de acordo com (0.2-47,48).

As equações de movimento são

$$\dot{z}^\alpha = \{z^\alpha, H\} = g^{\alpha\beta}p_\beta \,, \qquad (0.3\text{-}21a)$$

$$\dot{p}_\beta = \{p_\beta, H\} = (\partial_\beta g^{\mu\nu})p_\mu p_\nu \qquad (0.3\text{-}21b)$$

Destas duas equações se obtem diretamente as equações (0.3-9)

É importante observar que, de (0.3-21b), se a métrica da variedade não depender de uma dada coordenada então o momento correspondente é uma constante do movimento. É claro que este fato tem relação com o que dissemos anteriormente a respeito das isometrias da variedade e, por outro lado, nada mais é do que a conhecida relação entre as coordenadas cíclicas e a conservação do momento.

0.4 Dinâmica hamiltoniana de sistemas com vínculos: a teoria de Dirac

Vamos apresentar uma revisão da teoria de Dirac para sistemas com vínculos onde serão abordados apenas os pontos fundamentais, relevantes para as aplicações que faremos. As demonstrações serão omitidas; ao leitor interessado nos detalhes recomendamos os artigos originais de Dirac ou a (vasta) literatura mais moderna sobre o assunto.

Consideremos um sistema mecânico com N graus de liberdade, descrito pelas coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, $i = 1,\ldots,N$. Denotaremos por $L(q,\dot{q})$ a lagrangiana associada com o sistema, $\dot{q}^i = dq^i/d\tau$ são as velocidades generalizadas, τ é um parâmetro arbitrário. Vamos supor que o sistema é singular no sentido de que a hessiana H_{ij} é uma matriz singular,

$$\det(H_{ij}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\right) = 0 \qquad (0.4\text{-}1)$$

de acordo com o que fizemos nas seções anteriores.

Definindo os momentos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i} \quad , \qquad (0.4\text{-}2)$$

a equação (0.4-1) representa a condição das equações (0.4-2) não poderem ser invertidas de modo a se expressar as velocidades univocamente em termos dos momentos. Logo, como consequência apenas da definição (0.4-2) devem existir relações do tipo

$$\phi_m(q,p) = 0$$
$$\left(m = 1,\ldots, M < N\right) \qquad (1.4\text{-}3)$$

que são os vínculos primários da teoria.

Os vínculos primários podem ser incorporados na teoria, escrevendo-se a integral de ação hamiltoniana sob a forma

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, (p_i \dot{q}^i - H_c - v^m \phi m) \qquad (0.4\text{-}4)$$

onde Hc é a hamiltoniana canônica,

$$H_c = p_i \dot{q} - L \quad ,$$

e $v^m = v^m(q,p,\tau)$ são funções arbitrárias. Fica claro de (0.4-4) que a teoria não distingue entre a hamiltoniana canônica e

$$H_c + N^m(q,p,\tau)\phi_m \quad .$$

Substituindo-se H_c dado pela expressão acima em (0.4-4), resulta apenas numa redefinição das funções arbitrárias. Isto significa que a hamiltoniana associada com o sistema não é univocamente definida. A função

$$H_T = H_c + v^m \phi_m \qquad (0.4\text{-}5)$$

é denominada de hamiltoniana total.

Vamos estabelecer como regra que todos os colchetes de Poisson na teoria devem ser calculados antes de se fazer uso dos vínculos primários (0.4-3). Para lembrar esta regra as equações de vínculo serão denotadas

$$\phi_m(q,p) \approx 0 \qquad (0.4\text{-}6)$$

onde o sinal $\approx$ significa igualdade fraca, no sentido do que foi dito acima. Desta forma, as equações de movimento para uma variável dinâmica, F(q,p), podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\dot{F}(q,p) &= \{F,H_T\} \approx \{F,H_c\} + \{F,v^m\}\phi_m + \{F,\phi_m\}v^m \approx \\ &\approx \{F,H_c\} + \{F,\phi_m\}v^m\end{aligned} \tag{0.4-7}$$

Observe que os vínculos primários já foram usados na primeira linha da expressão acima, para eliminar o termo $\{F,v^m\}\phi_m$. Este termo poderia não ser bem definido se, por exemplo $v^m = v^m(\tau)$, mas isto não causa problemas devido a presença de ϕ_m como fator. Como esta é uma situação que sempre ocorre, vamos supor que os colchetes de Poisson são bem definidos para todas as quantidades que surgem na teoria.

Neste ponto, devemos impor as condições que os vínculos primários sejam preservados durante a evolução do sistema, isto é,

$$\dot{\phi}_m \approx \{\phi_m,H_T\} \approx 0$$

ou, usando (0.4-5),

$$\{\phi_m,H_c\} + v^m\{\phi_m,\phi_n\} \approx 0 \tag{0.4-8}$$

Estas condições são denominadas de "condições de consistência". Delas podem resultar as seguintes situações:

(a) As condições são identicamente satisfeitas, o que significa que os vínculos ϕ_m são os únicos vínculos da teoria, e as equações de movimento conterão M funções arbitrárias v^m;

(b) Podem resultar novas relações $\phi_j(q,p) = 0$, $j=1,\ldots,J$, independentes dos ϕ_m. Estas novas relações constituem novos vínculos para a teoria, e são denominados de vínculos secundários. (Observe a diferença entre os dois tipos de vínculo: para se obter os vínculos secundários faz-se uso das equações de movimento). Finalmente, (c) as condições de consistência podem determinar algumas das funções arbitrárias v^m. Uma análise mais detalhada mostra que neste caso, considerando-se (0.4-7) como um sistema de equações lineares para v^n, tem-se que

$$v^n(q,p,\tau) = U^n(q,p) + v^a(\tau)V^n_a(q,p) \qquad (0.4\text{-}9)$$

onde U^n e V^n são funções conhecidas, e $V^a(\tau)$, $a = 1,\ldots,A < M$, são funções totalmente arbitrárias do parâmetro τ. U^n é uma solução particular (0.4-8), e $V^a(\tau)V_a{}^n$ é uma combinação linear das soluções independentes do sistema homogêneo associado.

Esta análise nos mostra a diferença fundamental entre este formalismo e o formalismo hamiltoniano usual, que é a presença das funções arbitrárias $V^a(\tau)$ nas soluções das equações de movimento. É importante enfatizar que a teoria não tem meios para determinar estas funções não havendo, em princípio, nenhuma restrição sobre sua escolha.

Substituindo (0.4-8) na expressão (0.4-5) da hamiltoniana total encontra-se

$$H_T = (H_c + U^m\phi_m) + v^a(\tau)V^m_a\phi_m \equiv H' + v^a(\tau)\phi_a \quad , \qquad (0.4\text{-}10)$$

onde denotamos

$$H' = H_c + U^m \phi_m \quad , \tag{0.4-11}$$

e

$$\phi_a = V_a^m \phi_m \quad . \tag{0.4-12}$$

Observe que foi admitida a existência dos vínculos secundários mas, até agora, não os introduzimos na teoria.

A distinção entre vínculos primários e secundários é, na verdade, de pouca importância na forma final do esquema de Dirac. Uma classificação mais importante é aquela que distingue entre vínculos de primeira classe e de segunda classe: dado um conjunto de vínculos (primários ou secundários) $\{\phi_n\}$, diz-se que estes são de primeira classe se seus colchetes de Poisson são fracamente nulos:

$$\{\phi_k, \phi_j\} \approx 0 \quad . \tag{0.4-13}$$

Se o colchete de Poisson de um determinado ϕ_ℓ com qualquer outro vínculo não se anula fracamente, ϕ_ℓ é denominado de vínculo de segunda classe.

Por definição, as únicas quantidades independentes que são fracamente nulas são os vínculos da teoria. Assim, podemos escrever que

$$\{\phi_k, \phi_j\} = C_{kj}^i(q,p)\phi_i \quad . \tag{0.4-14}$$

Pode-se demonstrar que H' e ϕ_a, definidos por (0.4-11) e (0.4-12), são de primeira classe. Além disto, o conjunto $\{\phi_a\}$ é um conjunto completo de vínculos primários de primeira classe independentes.

Examinemos o significado e as consequências da presença das funções arbitrárias $v^a(\tau)$ na hamiltoniana total. É claro que a sua presença reflete o fato de nem todas as coordenadas q^i e momentos p_i serem observáveis. Em outras palavras, embora uma vez dado um conjunto (q^i,p_i) o estado físico do sistema fique univocamente definido, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que existe mais de um conjunto de variáveis canônicas (q^i,p_i) que representam o mesmo estado físico do sistema.

Esta é, na verdade, a propriedade característica dos sistemas que estamos analisando. As equações de movimento que se obtem a partir da integral de ação

$$S = \int d\tau (p_i \dot{q}^i - H' - v^a \phi_a) \qquad (0.4\text{-}15)$$

são consistentes para qualquer escolha das funções $v^a(\tau)$. Portanto, um conjunto de dados iniciais $(q^i(o),\ p_i(0))$ sobre a superfície de vínculos (isto é, tal que $\phi_a(q(o),p(o)) = 0$) gera todo um conjunto de trajetórias sobre a superfície de vínculos, rotuladas pelas funções $v^a(\tau)$. Isto quer dizer que S dada por (0.1-15) admite várias curvas extremais passando por $(q^i(o),p_i(o))$.

Pode-se compreender melhor a situação considerando -se as transformações infinitesimais geradas pelos vínculos ϕ_a, com parâmetros ε^a ,

$$\delta q^i = \varepsilon^a\{q^i,\phi_a\} \quad , \tag{0.4-16}$$

$$\delta p_i = \varepsilon^a\{p_i,\phi_a\} \quad .$$

Estas transformações mantêm a superfície de vínculos invariante (os ϕ_a são de primeira classe). Aplicando estas transformações à integral de ação restrita à superfície de vínculos,

$$S = \int d\tau(\dot{q}^i p_i - H_c) \, , \tag{0.4-17}$$

com as condições $\phi_a = 0$, obtem-se $\delta S = 0$ como consequência das condições de consistência. Logo, S restrita a superfície de vínculos é invariante por (0.4-16) e, portanto, é degenerada. Esta é a explicação para a não unicidade do problema de Cauchy: as trajetórias (sobre a superfície de vínculos) correspondentes a um mesmo conjunto de dados iniciais mas a diferentes escolhas das funções $v^a(\tau)$ são mapeadas umas nas outras pelas transformações (0.4-16). (Compare com o que foi dito na seção 0.1, após a equação (0.4-16)).

Os pontos do espaço de fase obtidos a partir de um dado ponto (q^i,p_i) pelas transformações geradas pelos vínculos ϕ_a são considerados como fisicamente equivalentes. A razão disto é que a descrição física do sistema não pode depen der da escolha das funções $v^a(\tau)$. Assim, os vínculos são geradores de transformações que não mudam o estado físico do sistema. Estendendo-se a terminologia usada na teoria dos campos de gauge, dizemos que estas são as transformações de gauge da mecânica clássica. É fácil de demonstrar que, ao lado dos vínculos ϕ_a, H' e $\{\phi_a,\phi_b\}$ são também geradores de transformações de gauge.

Neste contexto, a superfície de vínculos fica dividida em classes de equivalência: os pontos em cada classe são relacionados pelas transformações (0.4-16). Todos os pontos em uma dada classe são caracterizados por uma mesma hamiltoniana canônica, e correspondem a um mesmo estado físico do sistema. Define-se o "espaço físico" como o espaço destas classes de equivalência. A escolha de uma trajetória corresponde à seleção de um ponto representativo de cada classe, e isto é feito impondo-se condições adicionais que quebrem a invariância da teoria pelas transformações (0.4-16).

Até agora nada dissemos sobre os vínculos secundários. Ocorre que não existe uma demonstração de que os vínculos secundários de primeira classe são geradores de transformações de gauge. Por outro lado, também não existe uma demonstração do contrário. A conjectura de Dirac é que *todos* os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de gauge. Os vínculos secundários são introduzidos na teoria definindo-se a hamiltoniana estendida

$$H_E = H' + n^a\phi_a \qquad (0.4\text{-}18)$$

onde $\{\phi_a\}$ agora representa um conjunto completo de vínculos (primários e secundários) de primeira classe, linearmente independentes.

Vamos supor agora que o sistema admite também vínculos de segunda classe. Estes não podem ser interpretados como geradores de transformações de gauge ou, de modo geral, de nenhuma transformação com significado físico. A razão disto é que, por definição, as transformações geradas pelos vínculos de segunda classe não definem aplicações entre estados permitidos ao sistema. Então, estes vínculos devem ser usados apenas para eliminar variáveis dependentes da teoria.

Dirac construiu um procedimento segundo o qual os vínculos de segunda classe são automaticamente satisfeitos. Denotemos o conjunto dos vínculos de segunda classe por $\{\chi_a\}$, e consideremos a matriz (anti-simétrica)

$$\mathbb{C} = (C_{ab}) = (\{\chi_a, \chi_b\}). \qquad (0.4-19)$$

Demonstra-se que esta matriz tem uma inversa, $\mathbb{C}^{-1} = (C^{ab})$ se e somente se nenhuma combinação linear dos χ_a é de primeira classe. Vamos supor que este é o caso e, portanto, que $\mathbb{C}^{-1}$ existe,

$$C^{ab}C_{bc} = \delta^a_c \,. \qquad (0.4-20)$$

Note que, como consequência, tem-se sempre um número par de vínculos de segunda classe pois em caso contrário det $\mathbb{C} = 0$.

Definindo os colchetes de Dirac

$$\{F,G\}^* = \{F,G\} - \{F,\chi_a\}\, C^{ab}\{\chi_b,G\} \,, \tag{0.4-21}$$

pode-se demonstrar que todas as propriedades formais dos colchetes de Poisson são satisfeitas e também que

$$\{\chi_a,F\}^* = 0 \tag{0.4-22}$$

$$\{F,\phi_a\}^* \approx \{F,\phi_a\} \,, \tag{0.4-23}$$

$$\dot{F} \approx \{F,H_E\} \approx \{F,H_E\}^* \,. \tag{0.4-24}$$

De (0.4-22) segue que os vínculos de segunda classe podem ser feitos iguais a zero antes ou depois de se calcular os colchetes de Dirac.

A situação neste estágio é então a seguinte: usando-se os colchetes de Dirac para formular todas as equações da teoria, os vínculos de segunda classe se tornam meras identidades que são automaticamente satisfeitas pelas soluções das equações de movimento (0.4-24)

O procedimento apresentado acima nos fornece também uma maneira de quebrar a invariância de gauge da teoria, isto é, uma maneira de fixar o gauge. A idéia de Dirac-Fadeev é de impor condições suplementares sobre as variáveis canônicas de tal forma que fique estabelecida uma correspondência um-a-um entre os estados físicos do sistema e o conjunto das variáveis canônicas independentes. Estas condições, denominadas condições de gauge, têm como objetivo remover os elementos arbitrários da teoria e, é claro, não podem afetar as propriedades observáveis do sistema.

Denotemos por $\{\gamma_a\}$ um conjunto de condições de gauge. O número destas condições deve ser igual ao número de vínculos de primeira classe (para que se tenha o gauge totalmente fixado) e deve-se ter

$$\det(\{\phi_a,\gamma_b\}) \not\approx 0 \quad . \tag{0.4-25}$$

Esta condição nos diz que o conjunto total de vínculos (ϕ_a,γ_b) é de segunda classe. Então, feita a escolha das condições de gauge satisfazendo a (0.4-25), podemos usar os colchetes de Dirac com relação ao conjunto de vínculos (ϕ_a,γ_b) e teremos desta forma uma teoria efetivamente livre de vínculos (no sentido de que todos passam a ser satisfeitos identicamente) e sem liberdade de gauge.

A apresentação que fizemos da teoria de Dirac é obviamente sumária e incompleta. Como dissemos no início, é apenas uma revisão dos pontos fundamentais. A seguir vamos aplicar ao caso da partícula livre relativística, apresentando as modificações da teoria que se fazem necessárias devido ao caráter especial do sistema ser covariante geral.

<u>Aplicação</u>: A partícula relativística

A aplicação da teoria de Dirac a sistemas invariantes por reparametrização requer uma modificação na interpretação dos vínculos de primeira classe. De fato, nestes casos a hamiltoniana canônica é identicamente nula e a hamiltoniana estendida se reduz a uma combinação linear dos vínculos de primeira classe,

$$H_E = U^a \phi_a \approx 0 \quad . \tag{0.4-26}$$

Portanto, os vínculos da teoria são os responsáveis pela evolução dinâmica do sistema. Esta interpretação é consistente com os desenvolvimentos apresentados na seção (0.2).

Consideremos a partícula livre, com a lagrangiana (0.2-45),

$$L = -m \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} z'^{\alpha} z'^{\beta}} \quad . \tag{0.4-27}$$

Os momentos

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial z'^{\alpha}} = \frac{m}{\sqrt{-z'^2}} \eta_{\alpha\beta} z'^{\beta} \tag{0.4-28}$$

conduzem ao vínculo primário

$$\mathcal{H} = p^2 + m^2 \approx 0 \quad . \tag{0.4-29}$$

Este vínculo é de primeira classe,

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} \approx 0 \quad , \tag{0.4-30}$$

e é o único vínculo associado com o sistema porque o processo de consistência não gera nenhum outro vínculo (já que $H_C \equiv 0$).

As transformações (0.4-16) neste caso são

$$\delta z^{\mu} = \varepsilon(\lambda) = \{z^{\mu}, \mathcal{H}\} = \varepsilon(\lambda)\eta^{\alpha\nu}p_{\nu} \qquad (0.4\text{-}31)$$

$$\delta p_{\mu} = \varepsilon(\lambda)\{p_{\mu}, \mathcal{H}\} = 0 \quad , \qquad (0.4\text{-}32)$$

donde se vê claramente que $\mathcal{H}$ gera a evolução dinâmica do sistema.

A hamiltoniana estendida é

$$H_E = N(\lambda)(p^2 + m^2) \approx 0 \qquad (0.4\text{-}33)$$

o que está em acordo com (0.2-41). As equações de movimento geradas por H_E são

$$z'^{\mu} = \{z^{\mu}, H_E\} = 2N(\lambda)\eta^{\mu\nu}p_{\nu} \quad , \qquad (0.4\text{-}34)$$

$$p'_{\mu} = \{p_{\mu}, H_E\} = 0 \qquad (0.4\text{-}35)$$

(em termos do parâmetro arbitrário).

• A fixação do gauge no caso dos sistemas covariantes gerais significa uma escolha específica do parâmetro de modo a se determinar a função $N(\lambda)$. Devemos então impor uma condição de gauge γ de tal modo que o conjunto de vínculos $(\mathcal{H}, \gamma)$ seja de segunda classe. É claro que γ não pode ser uma função apenas de $\underset{\sim}{q}$ e $\underset{\sim}{p}$ pois neste caso não teriamos condição de fixar o parâmetro λ. Neste ponto surge mais uma peculiaridade dos sistemas covariantes gerais: o vínculo de gauge deve ser uma função explícita do parâmetro. Em outras palavras, o vínculo de gauge deve ser da forma $\gamma = \lambda - f\ (q,p) \approx 0$. A razão disto é simplesmente porque $d\gamma/d\lambda = 0$, já que a condição de gauge deve ser preservada durante a evolução do sistema. Devemos ter portanto

$$0 = \frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{\partial\gamma}{\partial\lambda} + \{\gamma, H_e\} = \frac{\partial\gamma}{\partial\lambda} + 2Np^{\alpha}\frac{\partial L}{\partial Z^{\alpha}} ,$$

que só conduz a $N(\lambda)$ não nula se $\frac{\partial\gamma}{\partial\lambda} \neq 0$.

Das equações (0.4-34) e (0.4-35) pode-se obter uma informação sobre $N(\lambda)$. As equações da trajetória que esperamos obter após a fixação do gauge são $\ddot{Z}^{\mu} = 0$ e, daquelas equações vê-se que este será o caso de $N(\lambda) = C^{\underline{te}}$. Do que fizemos na seção (0.2) sabemos que isto pode ser obtido usando-se as condições (0.2-56) ou (0.2-57). Na linguagem da teoria de Dirac temos então duas possíveis condições de gauge:

$$\text{(a)} \quad \gamma_1 = Z^0 - \lambda \approx 0 \quad , \qquad (0.4\text{-}36)$$

$$\text{(b)} \quad \gamma_2 = Z^0 - \frac{p^0}{m}\lambda \approx 0 \quad . \qquad (0.4\text{-}37)$$

Consideremos o caso (a) em detalhes, que resulta em $N = 1/2p^0$. Temos que

$$\{\mathcal{H}_{\phi}, \gamma_1\} = 2p^0 \not\approx 0 \quad , \qquad (0.4\text{-}38)$$

de modo que o conjunto de vínculos $(\mathcal{H}_{\phi}, \gamma)$ é de segunda classe.

A matriz $\not{C}$ definida por (0.4-19) fica dada por

$$\not{C} \doteq (C_{ab}) = \begin{pmatrix} \{\mathcal{H},\mathcal{H}\} & \{\gamma_1,\mathcal{H}\} \\ \{\mathcal{H},\gamma_1\} & \{\gamma_1,\gamma_1\} \end{pmatrix} = 2p^0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sua inversa é

$$\not{C}^{-1} = (C^{ab}) = \frac{1}{2p^0} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (0.4\text{-}39)$$

O colchete de Dirac para duas funções arbitrárias das variáveis dinâmicas se escreve

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \{A,\gamma_a\} C^{ab} \{\gamma_b,B\} =$$

$$= \{A,B\} - \frac{1}{2p^0}\Big[\{A,p^2\}\{Z^0,B\} - \{A,Z^0\}\{p^2,B\}\Big] . \qquad (0.4\text{-}40)$$

Em particular,

$$\{p_\alpha, Z^\beta\}^* = -\delta_\alpha{}^\beta + \delta_\alpha{}^0 \frac{p^\beta}{p^0} \quad , \qquad (0.4\text{-}41)$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\}^* = 0 = \{Z^\alpha, Z^\beta\}^* \quad . \qquad (0.4\text{-}42)$$

As equações de movimento neste caso são

$$\frac{dZ^i}{d\lambda} = \frac{p^i}{\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}} \quad ,$$

e

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = 0 \quad ,$$

o que era de se esperar.

Conforme mencionamos na seção 0.2 pode-se mostrar que a álgebra do grupo de Poincaré é satisfeita, no sentido do colchete de Dirac. Definamos os geradores de rotações de Lorentz

$$M^{\mu\nu} = z^{\mu}p^{\nu} - z^{\nu}p^{\mu} \quad . \tag{0.4-43}$$

Tem-se que

$$M^{oi} = \lambda p^{i} - z^{i}\sqrt{\vec{p}^{2} + m^{2}} \quad . \tag{0.4-44}$$

$$M^{ij} = z^{i}p^{j} - z^{j}p^{i} \quad . \tag{0.4-45}$$

Por um cálculo direto encontra-se que

$$\{p_{\mu}, p_{\nu}\}^{*} = 0 \ , \tag{0.4-46a}$$

$$\{M^{\alpha\beta}, p_{\mu}\}^{*} = \eta_{\mu}{}^{\alpha}p^{\beta} - \eta_{\mu}{}^{\beta}p^{\alpha} \ , \tag{0.4-46b}$$

$$\{M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\}^{*} = C^{\alpha\beta\mu\nu}_{\rho\sigma}M^{o\sigma} \ , \tag{0.4-6c}$$

onde

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}_{\rho\sigma} = \eta^{\alpha}_{\sigma}\eta^{\mu}_{\rho}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\alpha}_{\sigma}\eta^{\nu}_{\rho}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu}_{\alpha}\eta^{\beta}_{\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\nu}_{\sigma}\eta^{\beta}_{\rho}\eta^{\mu\alpha} \tag{0.4-47}$$

são as constantes de estrutura do grupo de Lorentz. Portanto, a descrição do sistema ainda é invariante relativista apesar da covariância relativística manifesta ter sido destruída pela escolha do parâmetro.

0.5 Lagrangianas alternativas para a partícula livre

Nas seções anteriores estudamos as propriedades de duas integrais de ação para a partícula livre relativística,

$$S_1 = [z] = -m\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-\dot{z}^2}\, d\tau \ , \quad S_2[z] = -\frac{m}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{z}^2 d\tau \quad (0.5\text{-}1a,b).$$

As equações de movimento para os dois casos são, respectivamente,

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\,\dot{z}^\mu}{\sqrt{-\dot{z}^2}}\right) = 0 \ , \qquad m\ddot{z}^\mu = 0 \qquad (0\text{-}5.2a,b)$$

e são idênticas se o parâmetro τ for o tempo próprio associado com a partícula.

Como vimos, a diferença essencial entre as duas integrais de ação reside nos seus comportamentos sob reparametrizações: S_1 é invariante por reparametrizações arbitrárias $\tau \to \bar{\tau}(\tau)$, com $\bar{\tau}(\tau_1) = \tau_1$ e $\bar{\tau}(\tau_2) = \tau_2$, enquanto que S_2 não o é.

Vamos fazer uma modificação em S_2, introduzindo um termo constante adimensional λ_0^2:

$$S_2' = -\frac{m}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\dot{z}^2 + \lambda_0^2)d\tau \ .$$

Note que ao se introduzir λo, tanto Z^{μ} como τ devem ter dimensão de comprimento. O princípio da mínima ação aplicado a S_2' conduz às mesmas equações de movimento que S_2, o que significa que τ deve ser proporcional ao tempo próprio. Além disto, S_2^1 não é invariante por reparametrizações.

Façamos uma modificação mais drástica introduzindo um fator de escala, isto é, um campo auxiliar $\lambda(\tau)$ sobre a trajetória da partícula. Definamos

$$S_3[Z,\lambda] = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\frac{\dot{Z}^2}{\lambda(\tau)} - m^2\lambda(\tau)\right)d\tau \quad . \qquad (0.5\text{-}3)$$

Mais adiante mostraremos que $\lambda(\tau)$ tem o significado de uma métrica no espaço unidimensional do parâmetro τ.

O que há de importante com a integral de ação S_3 é que podemos torná-la invariante por reparametrizações por uma escolha conveniente da lei de transformação de $\lambda(\tau)$. De fato, por uma transformação $\tau \to \bar{\tau}(\tau)$, tem-se

$$d\tau = \frac{d\tau}{d\bar{\tau}}\,d\bar{\tau} \quad , \quad \dot{Z} = \frac{dZ}{d\bar{\tau}}\,\frac{d\bar{\tau}}{d\tau} = \frac{d\bar{\tau}}{d\tau}\,Z' \quad , \qquad (0.5\text{-}4)$$

e

$$S_3 \longrightarrow \bar{S}_3 = \int d\bar{\tau}\left(\frac{Z'^2}{\frac{d\tau}{d\bar{\tau}}\lambda(\tau(\bar{\tau}))} - m^2\,\frac{d\tau}{d\bar{\tau}}\lambda(\tau(\bar{\tau}))\right) .$$

Portanto, S_3 será invariante por reparametrizações se

$$\bar{\lambda}(\bar{\tau}) = \frac{d\tau}{d\bar{\tau}}\,\lambda(\tau(\bar{\tau})) \quad . \qquad (0.5\text{-}5)$$

As formas infinitesimais das transformações (0.5-4,5) podem ser obtidas sem dificuldades:

$$\delta\tau = \varepsilon^1(\tau) \quad , \quad \varepsilon^1(\tau_1) = 0 = \varepsilon^1(\tau_2) \quad , \tag{0.5-6a}$$

$$\delta z^\mu = \bar{z}^\mu(\tau) - z^\mu(\tau) = \varepsilon^1(\tau)\dot{z}^\mu \quad , \tag{0.5-6b}$$

$$\delta\lambda = \bar{\lambda}(\tau) - \lambda(\tau) = \dot{\varepsilon}^1\lambda + \varepsilon^1\dot{\lambda} = \frac{d}{d\tau}(\varepsilon^1\lambda) \; . \tag{0.5-6c}$$

Calculemos as equações de movimento usando S_3. Tem-se que

$$\frac{\delta S_3}{\delta z^\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{z}^\mu}{\lambda}\right) = 0 \quad . \tag{0.5-7}$$

e

$$\frac{\delta S_3}{\delta\lambda} = 0 \quad \Longrightarrow \dot{z}^2 = -\,m^2\lambda^2 \quad . \tag{0.5-8}$$

Esta última é uma equação algébrica que pode ser resolvida para $\lambda(\tau)$; substituindo o resultado em (0.5-7) obtem-se

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{z}^\mu}{\sqrt{-\dot{z}^2}}\right) = 0 \tag{0.5-9}$$

Logo, S_3 e S_1 são equivalentes. Observe que a escolha $\lambda=C^{\underline{te}}$ significa, neste esquema, escolher τ como o tempo próprio.

É instrutivo fazer a formulação hamiltoniana para este problema. Com

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{z}^2}{\lambda} - m^2\lambda\right) \tag{0.5-10}$$

segue que

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} = \frac{\dot{z}_\mu}{\lambda} \quad , \tag{0.5-11}$$

$$p(\lambda) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \quad , \tag{0.5-12}$$

onde esta última equação é um vínculo primário,

$$\phi_1 = p(\lambda) \approx 0 \quad . \tag{0.5-13}$$

A Hamiltoniana canônica fica dada por

$$H_c = p_\mu \dot{z}^\mu + p(\lambda)\dot{\lambda} - L =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda\,(p^2 + m^2) \quad . \tag{0.5-14}$$

Agora, de (0.5-12) e (0.5-13)

$$\dot{\phi}_1 = \dot{p}(\lambda) = \{p(\lambda), H_c\} = p^2 + m^2 \tag{0.5-15}$$

de modo que tem-se o vínculo secundário

$$\phi_2 = p^2 + m^2 \approx 0 \quad . \tag{0.5-16}$$

Os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 são de primeira classe. A hamiltoniana estendida se escreve

$$H_E = \left(\frac{\lambda(\tau)}{2} + u(\tau)\right)(p^2 + m^2) + v(\tau)p(\lambda) \approx 0 \quad , \tag{0.5-17}$$

e gera as seguintes equações de movimento:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}^{\mu} &= (\lambda + 2u)p^{\mu} \quad , \\ \dot{p}_{\mu} &= 0 \quad , \\ \dot{\lambda} &= v \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (0.5\text{-}18)$$

Da primeira das equações acima segue que

$$\dot{z}^2 = (\lambda + 2u)^2 p^2 \approx (\lambda + 2u)m^2 \qquad (0.5\text{-}19)$$

e, ainda daquela equação,

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{z}^{\mu}}{\lambda + 2u}\right) \approx \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\,\dot{z}^{\mu}}{\sqrt{-\dot{z}^2}}\right) \approx 0 \quad . \qquad (0.5\text{-}20)$$

Da última das equações (0.5-18) segue que $\dot{\lambda}$ é uma função arbitrária, de modo que λ também o é. De (0.5-14) vê-se que isto é um reflexo da arbitrariedade da escolha do parâmetro τ. Observemos que fazer τ igual ao tempo próprio é equivalente a escolha $v = o$, $u = C^{\underline{te}}$. Deixamos ao encargo do leitor a comparação deste modelo com o correspondente à integral de ação S_1, feito nas seções anteriores.

O formalismo hamiltoniano aplicado à lagrangiana (0.5-10) segue exatamente as mesmas linhas da formulação canônica da teoria da gravitação. Naquele caso tem-se uma hamiltoniana canônica e quatro vínculos primários. A condição de consistência destes vínculos primários conduz a quatro vínculos secundários que tornam a hamiltoniana canônica fracamente nula, que assim é idêntica à hamiltoniana estendida. A razão desta analogia ficará clara em seguida, quando interpretarmos geometricamente o fator de escala $\lambda(\tau)$. Por outro lado, era de se esperar que, de algum modo, a hamiltoniana associada com o sistema descrito pela lagrangiana (0.5-10) e a hamiltoniana do campo gravitacional se anulassem, pelo menos fracamente, porque os dois sistemas são covariantes gerais.

Para compreender melhor o significado do fator de escala $\lambda(\tau)$ introduzido na ação (0.5-3), consideremos uma variedade riemaniana com métrica $g_{\alpha\beta}(Z)$ e calculemos a sua variação devida à variação nas coordenadas

$$\delta z^{\mu} = z^{\mu} - z'^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(Z) \quad . \qquad (0.5\text{-}21)$$

Levando este resultado na expressão

$$g_{\alpha\beta}(Z) = g'_{\mu\nu}(Z')\frac{\partial z'^{\mu}}{\partial z^{\alpha}} \frac{\partial z'^{\nu}}{\partial z^{\beta}} \qquad (0.5\text{-}22)$$

segue que

$$g_{\alpha\beta}(Z) = g'_{\mu\nu}(Z-\varepsilon)\left(\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{\partial\varepsilon^{\mu}}{\partial z^{\alpha}}\right)\left(\delta^{\nu}_{\beta} - \frac{\partial\varepsilon^{\nu}}{\partial z^{\beta}}\right) \quad ,$$

donde se deduz

$$\delta g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}(Z) - g_{\alpha\beta}(Z) = \nabla_{\alpha}\varepsilon_{\beta} + \nabla_{\beta}\varepsilon_{\alpha} \quad . \qquad (0.5\text{-}23)$$

Aplicando este resultado ao caso unidimensional, com $g_{11} = \lambda^2$,

$$\delta\lambda^2 = 2\nabla_1\varepsilon_1 = 2\left[\partial_1\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^2(\partial_1\lambda^2 + \partial_1\lambda^2 - \partial_1\lambda^2)\varepsilon_1\right] = 2\partial_1\varepsilon_1 - \bar{\lambda}^2(\partial_1\lambda^2)\varepsilon_1$$

Mas, $\delta\lambda^2 = 2\lambda\delta\lambda$ e, portanto,

$$\delta\lambda = \partial_1(\varepsilon_1\lambda^{-2}) \quad . \tag{0.5-24}$$

Usando que $\varepsilon^1 = g^{11}\varepsilon_1 = \lambda^{-2}\varepsilon_1$ obtem-se

$$\delta\lambda = \partial_1(\lambda\varepsilon') = \frac{d}{d\tau}(\lambda\varepsilon') \quad . \tag{0.5-25}$$

Daí se conclui que a lei de transformação do fator de escala, equação (0.5-6c), é um caso particular de (0.5-18) para uma dimensão.

Os desenvolvimentos que apresentamos nesta seção serão utilizados mais adiante quando estudarmos a ação de Polyakov para o string.

0.6 Simetrias e leis de conservação

As simetrias e as correspondentes leis de conservação de um sistema físico podem ser estudadas usando-se o (bastante) conhecido teorema de Noether. Uma versão simples (isto é, pouco sofisticada) deste teorema pode ser formulada, para o caso específico da Mecânica Clássica, da seguinte maneira. Consideremos um sistema cuja lagrangiana é $L(\tau, Z(\tau), Z'(\tau))$ e o grupo r - paramétrico de transformações das coordenadas e parâmetro definido por

$$\bar{\tau} = \tau + \zeta_{(k)}(\tau, Z)\, \varepsilon^k \quad , \qquad (0.6\text{-}1a)$$

$$\bar{Z}^\mu = Z^\mu + \xi^\mu_{(k)}(\tau, Z)\, \varepsilon^k \quad , \qquad (0.6\text{-}1b)$$

$$(k = 1, \ldots, r) \quad .$$

Por definição, a integral de ação é absolutamente invariante pelas transformações (0.6-1) se

$$\int_{\bar{\tau}_1}^{\bar{\tau}_2} L\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{\tau}}, \bar{Z}(\bar{\tau}), \bar{\tau}\right) d\bar{\tau} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\,(\dot{Z}(\tau), Z(\tau), \tau)\, d\tau \quad . \qquad (0.6\text{-}2)$$

Em termos da lagrangiana a condição acima se expressa

$$\delta L = L\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{\tau}}, \bar{Z}(\bar{\tau}), \bar{\tau}\right)\frac{d\bar{\tau}}{d\tau} - L(\dot{Z}(\tau), Z(\tau), \tau) = 0 \qquad (0.6\text{-}3)$$

O teorema de Norther diz que quando isto é verdade o sistema satisfaz à r identidades da forma

$$-\mathcal{E}_\mu\left(\xi^\mu_{(k)} - \dot{Z}^\mu \zeta_{(k)}\right) = \frac{d}{d\tau}\left[\left(L - \dot{Z}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}^i}\right)\zeta_{(k)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}^\mu}\, \xi^\mu_{(k)}\right] \quad , (0.6\text{-}4)$$

que são denominadas de identidades de Noether. No termo da esquerda $\mathcal{E}_\mu$ é o vetor de Euler-Lagrange.

Se as equações de Euler-Lagrange são satisfeitas então $\mathcal{E}_\mu = 0$, e de (0.6-4) segue que

$$\left(L - \dot{Z}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}^\mu}\right)\zeta_{(k)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}^i}\, \xi^\mu_{(k)} = C_{(k)} \qquad (0.6\text{-}5)$$

onde $C_{(k)}$ são r constantes. As quantidades do lado esquerdo de (0.6-5) são então integrais primeiras das equações de movimento, isto é, são constantes ao longo da trajetória do sistema. As equações (0.6-5) são interpretadas como as leis de conservação do sistema governado pelas equações de Euler-Lagrange.

Suponhamos agora que a variedade onde o sistema evolui admite um grupo de isometrias definido pelo campo de vetores de Killing $\xi_{\mu}^{(a)}$, que satisfazem às equações (0.3-12). Vamos supor também que não há transformação do parâmetro de modo que $\delta\tau = \bar{\tau} - \tau = 0$, $\xi_{(k)}(\tau, z) = 0$ na equação (0.6-1a), e que as transformações das coordenadas são geradas pelos vetores de Killing,

$$\delta Z^{\mu} = \varepsilon_{(a)} \xi^{(a)\mu} \quad . \tag{0.6-6}$$

Segue então das equações (0.6-5) que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^{\mu}} \xi^{(a)\mu} = C^{(a)} = C^{\underline{te}} \tag{0.6-7}$$

ao longo da trajetória da partícula. No caso da partícula livre relativística estas são as leis de conservação que encontramos na seção (0.3) e são as integrais primeiras das equações das geodésicas.

No espaço-tempo de Minkowski as equações de Killing (0.3-17) se reduzem a

$$\partial_{\alpha}\xi_{\beta} + \partial_{\beta}\xi_{\alpha} = 0 \tag{0.6-8}$$

cujas soluções são

$$\xi_\alpha = \omega_{\alpha\beta} z^\alpha + a_\alpha \tag{0.6-9}$$

onde $\omega_{\alpha\beta} = - \omega_{\beta\alpha}$ e a_α são constantes. O grupo de isometrias tem então 10 parâmetros independentes. As leis de conservação correspondentes a cada grupo de parâmetros se escrevem

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha} z^\beta\right]\omega^\alpha{}_\beta = 0 \tag{0.6-10}$$

e

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha}\right] a^\alpha = 0 \quad , \tag{0.6-11}$$

e correspondem às leis de conservação do momento angular e do momento linear, respectivamente.

Vamos usar as leis de conservação (0.6-10,11) para definir dois novos objetos associados com a partícula livre relativística. Neste sentido consideremos a lagrangiana (0.2-45) com a condição $\dot{z}^2 = -1$ e reescrevamos a equação (0.6-11) sob a forma

$$\frac{\partial}{\partial z^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha}\right)\dot{z}^\beta = \frac{\partial}{\partial z^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha}\dot{z}^\beta\right) = 0 \; .$$

Podemos escrever esta última expressão como

$$\frac{\partial}{\partial z^\beta}\left[m\int \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \delta^{(4)}(z - x(\tau))d\tau\right] = 0 \quad , \tag{0.6-12}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial z^{\beta}} T^{\alpha\beta} = 0 \quad , \tag{0.6-13}$$

onde definimos o tensor momento-energia associado com a partícula por

$$T^{\alpha\beta}(Z) = m \int \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\delta^{(4)}(Z - x(\tau))d\tau \quad . \tag{0.6-14}$$

Este tensor é simétrico, $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, e tem divergência nula, equação (0.6-13).

Antes de estudarmos as propriedades gerais do tensor $T^{\alpha\beta}$, e a razão da sua denominação, vamos demonstrar uma propriedade que é de interesse particular para o nosso estudo. Usando (0.6-14), segue de (0.6-13) que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}} T^{\alpha\beta} &= m \int \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}} \delta^{(4)}(Z - x(\tau))d\tau = \\ &= - m \int \dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \delta^{(4)}(Z - x(\tau))d\tau = \\ &= - m \int \dot{x}^{\beta} \frac{d}{d\tau} \delta^{(4)}(Z - x(\tau))d\tau = \\ &= - m \int \ddot{x}^{\beta}\delta^{(4)}(Z - x(\tau))d\tau \quad ; \end{aligned}$$

e portanto

$$m \int \ddot{x}^{\beta}\delta^{(4)}(Z - x(\tau))d\tau = 0 \quad .$$

Sobre a trajetória da partícula esta equação só pode ser satisfeita se $\ddot{x}^{\beta} = 0$. Logo, a equação de "conservação do tensor momento-energia" implica nas equações de movimento da partícula, um resultado que é realmente muito importante.

O tensor momento-energia foi introduzido na teoria de uma maneira muito formal. No entanto, $T^{\alpha\beta}$ pode ser construído de uma maneira simples, a partir da qual sua interpretação física fica transparente. Consideremos uma partícula livre com quadri-momento $p^{\alpha} = (p^{o}, \vec{p})$, e definamos a densidade de energia e momento, $(Z^{o} = \tau)$,

$$T^{\alpha o} = p^{\alpha}(\tau)\delta^{(3)}(\vec{Z} - \vec{x}(\tau)) \ , \tag{0.6-15}$$

e a corrente de energia-momento,

$$T^{\alpha i} = p^{\alpha}(\tau)\dot{x}^{i}\delta^{(3)}(\vec{Z} - \vec{x}(\tau)). \tag{0.6-16}$$

Estas duas definições podem ser englobadas em uma só:

$$T^{\alpha\beta} = p^{\alpha}(\tau)\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\ \delta^{(3)}(\vec{Z} - \vec{x}(\tau)). \tag{0.6-17}$$

Usando a propriedade da "função τ" ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta\left[g(x)\right]dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \ , \quad g(x_0) = 0 \ ,$$

a expressão (0.6-17) pode ser reescrita como

$$T^{\alpha\beta} = p^{\alpha}(\bar{\tau})\ \frac{dx^{\beta}}{d\bar{\tau}}\bigg|_{\tau = x^{0}(\bar{\tau})} \delta^{(3)}(\vec{Z} - \vec{x}(\bar{\tau}))\frac{1}{\left(\frac{d\tau}{d\bar{\tau}}\right)_{\tau = x^{0}(\bar{\tau})}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(\bar{\tau}) \; \frac{dx^{\beta}}{d\bar{\tau}} \; \delta^{(3)}(\vec{Z} - \vec{x}(\bar{\tau}))\,\delta(\tau - x^{0}(\bar{\tau})\,d\bar{\tau}$$

ou

$$T^{\alpha\beta}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(\tau)\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\; \delta^{(4)}(Z - x(\tau))\,d\tau \,. \qquad (0.6-18)$$

$T^{\alpha\beta}$ dado acima (que obviamente é um tensor) se reduz (0,6-14) fazendo-se $p^{\alpha} = m\dot{x}^{\alpha}$.

O significado de $T^{\alpha\beta}$ fica claro das definições (0.6-15,16). Sob forma matricial,

$$(T^{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{c|c} T^{00} = \xi & (T^{0j} = \vec{S}) \\ \hline (T^{j0} = \vec{g} & (T^{ij}) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \text{DENSIDADE DE} & \text{CORRENTE DE} \\ \text{ENERGIA} & \text{ENERGIA} \\ \hline \text{DENSIDADE DE} & \text{TENSOR DE TENSÕES} \\ \text{MOMENTO} & \text{(CORRENTE DE MOMENTO)} \end{array}\right)$$

É importante observar que a equação (0.6-13) não é uma lei de conservação para $T^{\alpha\beta}$ já que não existe uma lei de Gauss para campos tensoriais de ordem igual ou maior que dois. A equação (0.6-13) é uma equação de continuidade. Mais adiante mostraremos como obter as leis de conservação a partir da equação de continuidade .

Da mesma forma que (0.6-11), a lei de conservação (0.6-10) pode ser transformada numa equação de continuidade,

$$\partial_\lambda M^{\alpha\beta\lambda} = \partial_\lambda (x^\alpha T^{\beta\lambda} - x^\beta T^{\lambda\alpha}) = 0 \quad ,$$

como consequência da simetria de $T^{\alpha\beta}$. Observemos que $M^{\alpha\beta\lambda}$ não é um tensor; estas quantidades são associadas com o momento-angular do sistema. Mais detalhes serão dados adiante.

A generalização da definição (0.6-14) para uma variedade de Riemann com métrica $g_{\alpha\beta}(x)$ é imediata. Denotando $g = \det(g_{\alpha\beta})$, tem-se que

$$T^{\alpha\beta}(Z) = m\int \frac{\delta^{(4)}(Z - x(\tau))}{\sqrt{-g}}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \, d\tau \quad . \tag{0.6-19}$$

Calculemos a divergência covariante deste tensor:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \left\{ {\alpha \atop \alpha\lambda} \right\} T^{\beta\lambda} + \left\{ {\beta \atop \alpha\lambda} \right\} T^{\alpha\lambda} \quad . \tag{0.6-20}$$

Explicitando o primeiro termo do lado direito,

$$\frac{\partial}{\partial Z^\alpha} T^{\alpha\beta} = m\int \frac{\partial}{\partial Z^\alpha}\, \delta^{(4)}(Z - x(\tau)) \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\sqrt{-g}}\, d\tau =$$

$$= - m\int \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\, \delta^{(4)}(Z - x(\tau)) \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\sqrt{-g}}\, d\tau =$$

$$= - m\int \frac{d}{d\tau}\, \delta^{(4)}(Z - x(\tau)) \frac{\dot{x}^\beta}{\sqrt{-g}}\, d\tau =$$

$$= m\int \delta^{(4)}(Z - x(\tau)) \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}^\beta}{\sqrt{-g}}\, d\tau =$$

$$= m\int \delta^{(4)}(Z - x(\tau))\left[\frac{\ddot{x}^{\beta}}{\sqrt{-g}} + \dot{x}^{\beta}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\right)\right]d\tau =$$

$$= m\int \frac{\delta^{(4)}(Z - x(\tau))}{\sqrt{-g}}\left(\ddot{x}^{\beta} - \{{}^{\alpha}_{\alpha\lambda}\}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\lambda}\right) \quad .$$

Levando este resultado em (0.6-20) e usando (0.6-19) resulta que

$$\nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta} = m\int \frac{\delta^{(4)}(Z - x(\tau))}{\sqrt{-g}}\left(\ddot{x}^{\beta} + \{{}^{\beta}_{\mu\nu}\}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right) \quad (0.6\text{-}21)$$

Segue então que a equação de continuidade resulta nas equações da geodésica para a trajetória da partícula. É importante observar que a métrica $g_{\alpha\beta}$, e consequentemente os símbolos de Christoffel, estão sendo supostos bem definidos sobre a trajetória da partícula. É neste ponto que entra o fato da partícula ser uma partícula teste e o campo gravitacional um campo externo, caso contrário o que foi dito acima não seria verdade.

Uma observação interessante é que a forma funcional do tensor momento-energia, uma integral sobre o produto de um tensor simétrico multiplicado por $\delta^{(4)}(x)$, é suficiente para que se tenha (0.6-19) e as equações de movimento da partícula, impondo-se que a sua divergência é nula. De fato, escrevendo

$$T^{\mu\nu} = \int t^{\mu\nu}(\tau)\delta^{(4)}(Z - x(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{-g}} \quad ,$$

e fazendo a decomposição

$$t^{\mu\nu} = m\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + m^{\mu}\dot{x}^{\nu} + m^{\nu}\dot{x}^{\mu} + m^{\mu\nu}$$

onde

$$m = t_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \quad ,$$

$$m^{\mu} = t^{\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\nu} - \dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\alpha})\dot{x}_{\beta} \quad ,$$

$$m^{\mu\nu} = t^{\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\alpha} - \dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} - \dot{x}^{\nu}\dot{x}_{\beta}) \quad ,$$

$$m_{\mu}\dot{x}^{\mu} = 0 \quad , \quad m_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu} = 0 \quad ,$$

segue de $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ que

$$m^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad m^{\nu} = 0 \quad , \quad m = C^{\underline{te}} \quad ,$$

e que a trajetória da partícula é uma geodésica.

Tensores momento-energia podem ser construídos para os diversos campos de matéria usando-se o teorema de Noether. Obtidos por este procedimento, eles são denominados de tensores momento-energia canônicos e de modo geral não são simétricos. Estes podem ser simetrizados por procedimentos padrões que, no entanto, são bastante trabalhosos. Uma das necessidades de se ter os tensores momento-energia simétricos é na teoria da relatividade geral, onde desempenham o papel de fontes do campo gravitacional.

Como se sabe, as equações de Einstein para o campo gravitacional, na ausência de fontes, podem ser obtidas por um processo variacional a partir da integral de ação,

$$S_G = \int \sqrt{-g}\, R\, d^4x$$

onde R é o escalar de curvatura da variedade riemaniana. A variação de S_g dada acima resulta em

$$\delta S_G = \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x \equiv$$

$$= \int G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x \quad .$$

Fazendo-se $\delta S_G = 0$ obtem-se $G_{\mu\nu} = 0$, que são as equações de Einstein para o vazio.

Introduzindo-se campos de matéria como fonte da gravitação, a integral de ação total se escreve

$$S \doteq S_G + S_M = \int (\sqrt{-g}\, R + \alpha L_M \sqrt{-g}\,)\, d^4x$$

onde L_M representa a lagrangiana para todos os campos de matéria, e α é uma constante a ser ajustada. O princípio da ação agora se escreve

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \implies \frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = - \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}$$

O termo da direita desta equação é uma definição para o tensor momento-energia. Calculando a variação encontra-se

$$\delta \int \sqrt{-g}\, L_M d^4x = \int \left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}\, L_M) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} (\sqrt{-g}\, L_M) \right] \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

$$\equiv \frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad ,$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\,L_M) - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}(\sqrt{-g}\;L_M)\right]\right) \quad (0.6\text{-}22)$$

é, por definição, o tensor momento-energia associado com as fontes do campo gravitacional. Observe que este tensor é automaticamente simétrico.

As equações de Einstein com fontes ficam sob a forma

$$G_{\mu\nu} = -\,k\,T_{\mu\nu} \quad .$$

Como o tensor de Einstein tem divergência covariante nula, $\nabla_\mu\, G^{\mu\nu} = 0$, segue que $T^{\mu\nu}$ deve satisfazer à mesma propriedade.

Temos assim uma regra para calcular T^{μ} : dada a lagrangiana no espaço plano, convertê-la para o espaço curvo fazendo uso do acoplamento mínimo $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$, $\partial_\mu \to \nabla_\mu$, e obter o tensor momento-energia pela relação

$$\delta\int\sqrt{-g}\;L_M d^4x = \frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\;d^4x \quad . \qquad (0.6\text{-}23)$$

O tensor correspondente no espaço plano é obtido fazendo-se o inverso do acoplamento mínimo.

Observemos mais uma vez que (0.6-22) é uma (das possíveis) definição(ões) do tensor momento-energia. Uma maneira de verificar se a construção (0.6-22) é boa, é compará

-la com os resultados que se obtém do teorema de Noether, após a simetrização.

A expressão (0.6-23) tem uma interpretação física clara: $T^{\alpha\beta}$ é a "corrente" que se obtém como resposta do sistema às variações do campo gravitacional externo $g_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$. Note que uma definição análoga se aplica ao caso de um sistema carregado em presença de um campo eletromagnético externo: a corrente j^{μ} é definida como a resposta do sistema à variação do campo externo $A_{\mu} \rightarrow A\mu + \delta A_{\mu}$,

$$\delta S = \int \frac{\partial L_M}{\partial A_{\mu}} \delta A_{\mu} \sqrt{-g}\, d^4x \equiv \int j^{\mu} \delta A_{\mu} \sqrt{-g}\, d^4x \quad .$$

Passaremos agora a construção das quantidades conservadas associadas com um dado tensor momento-energia $T^{\alpha\beta}$ satisfazendo a equação de continuidade $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$. Suponhamos que o espaço-tempo admite um grupo de isometrias definido pelo campo de vetores de Killing $\overset{(a)}{\xi_{\mu}}$. Então, as correntes

$$J^{(a)}{}_{\alpha} = T^{\alpha\beta} \xi^{(a)}_{\beta} \qquad (0.6\text{-}24)$$

satisfazem à equação de continuidade $\nabla_{\alpha} \overset{(a)}{J\alpha} = 0$. A demonstração é trivial:

$$\nabla_{\alpha} J^{(a)\alpha} = \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \xi^{(a)}_{\beta} + \nabla_{\beta} \xi^{(a)}_{\alpha}) T^{\alpha\beta} + \xi^{(a)}_{\beta} \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$$

e, portanto,

$$\nabla_{\alpha} J^{(a)\alpha} = 0 \quad . \qquad (0.6\text{-}25)$$

Esta expressão é, na verdade, uma lei de conservação local para o campo de vetores $J_\alpha^{(a)}$. A lei de Gauss pode ser aplicada e, com a hipótese de que J se anula suficientemente rápido no infinito espacial, pode-se associar uma quantidade globalmente conservada a cada vetor de Killing. Escrevendo (0.6-25) sob a forma equivalente

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\alpha(\sqrt{-g}\;J^{(a)\alpha})$$

e aplicando o teorema de Gauss,

$$0 = \int_\Omega \sqrt{-g}\;\nabla_\alpha J^{(a)\alpha} d^4x = \int_\Omega \partial_\alpha(\sqrt{-g}\;J^{(a)\alpha})d^4x = \oint_\Sigma J^{(a)\alpha} d\Sigma_\alpha \quad ,$$

onde a integral de superfície se estende sobre toda a hipersuperfície que limita a região Ω. Agora se $J_\alpha^{(a)} \to 0$ no infinito espacial pode-se escrever que

$$\int_{\Sigma_1} \overset{(a)}{J}{}^\alpha d\Sigma_\alpha = \int_{\Sigma_2} \overset{(a)}{J}{}^\alpha d\,\Sigma_\alpha$$

onde Σ_1 e Σ_2 são duas hipersuperfícies tipo espaço. A relação acima nos diz que a integral, isto é, o fluxo de $\overset{(a)}{J}\alpha$, é independente da hipersuperfície escolhida.

Escolhendo a hipersuperfície $x^0 = C^{te}$, tem-se então as quantidades globalmente conservadas,

$$\overset{(a)}{Q} = \int_{x^0 = C^{te}} \overset{(a)}{\xi}_\mu T^{0\mu}\;\sqrt{-g}\;d^3x = \int_{x^0 = C^{te}} \overset{(a)}{J}{}^0\;\sqrt{-g}\;d^3x \qquad (0.6\text{-}26)$$

Tem-se que

$$\frac{d\overset{(a)}{Q}}{dx^0} = \int \partial_0(\sqrt{-g}\,\overset{(a)}{J}{}^0)d^3x = -\int \partial_i(\sqrt{-g}\,\overset{(a)}{J}{}^i)d^3x = \int \sqrt{-g}\,\overset{(a)}{J}{}^i d^2\Sigma_i$$

onde $d^2\Sigma_i$ é uma superfície bidimensional que limita o volume de integração. Supondo que $T^{\alpha\beta}$ cai a zero suficientemente rápido e que o volume de integração é infinito, o fluxo de $J_i^{(a)}$ (último termo da expressão acima) se anula e

$$\frac{d\overset{(a)}{Q}}{dx^0} = 0 \quad . \qquad (0.6-27)$$

No espaço de Minkowski as expressões (0.6-26) representam 10 quantidades globalmente conservadas.

Com o tensor momento-energia pode-se construir as quantidades (estamos considerando o espaço-tempo de Minkowski)

$$M^{\alpha\beta\lambda} = X^\alpha T^{\beta\lambda} - X^\beta T^{\alpha\lambda} \quad , \qquad (0.6-28)$$

que satisfazem a

$$\partial_\lambda M^{\alpha\beta\lambda} = 0 \quad . \qquad (0.6-29)$$

como consequência da simetria de $T^{\alpha\beta}$. As quantidades conservadas neste caso são

$$J^{\alpha\beta} = \int_{x^0=\underline{cte}} M^{\alpha\beta 0} d^3x \quad , \qquad (0.6-30)$$

$$\partial_\alpha J^{\alpha\beta} = 0 \quad . \qquad (0.6-31)$$

e são identificadas com as componentes do tensor momento angular. Tem-se que

$$J_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}J^{jk} = \int \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}(x^j T^{ko} - X^n T^{jo})d^3x =$$

$$= \int \varepsilon_{ijk}X^j T^{ko}d^3x = \int (\vec{x}\times\vec{g})_i d^3x \quad . \qquad (0.6\text{-}32)$$

É importante observar que a simetria de $T^{\alpha\beta}$ é fundamental para a lei de conservação de $J^{\alpha\beta}$.

Note que $J^{\alpha\beta}$ não é invariante por translações. A partir de $J^{\alpha\beta}$ pode-se construir um quadri-vetor invariante por translações :

$$S_\alpha \equiv -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}J^{\beta\mu}u^\nu \quad , \qquad (0.6\text{-}33)$$

onde

$$u^\nu \equiv \frac{P^\nu}{\sqrt{-P^2}} \quad , \quad P^\nu \equiv \int d^3x T^{o\nu} \quad .$$

O vetor (S_α) é identificado com o momento angular de spin.

0.7 Partículas carregadas

Na seção anterior construimos o tensor momento-energia $\overset{(p)}{T}_{\mu\nu}$ associado com uma partícula de massa $\underline{m}$, equação (0.6-18). Vimos que este tensor satisfaz à equação

$$\partial_\mu \overset{(P)}{T}{}^{\mu\nu} = \int \frac{dp^\mu}{d\tau} \overset{(4)}{\delta} (z - z(\tau))d\tau \qquad (0.7\text{-}1)$$

de modo que se a partícula é livre, $dp^\nu/d\tau = 0$, então o tensor momento-energia tem divergência nula, $\partial_\mu \overset{(p)}{T}{}^{\mu\nu} = 0$. Dizer que a partícula é livre significa que ela não está sob a ação de forças. Nesta afirmação está incluído que a partícula não é dotada de carga elétrica pois neste caso ela criaria um campo eletromagnético e assim estaria sob a ação de forças. Neste caso $\partial_\mu \overset{(p)}{T}{}^{\mu\nu} \neq 0$, já que a lei de conservação da energia e momento deve ser aplicada ao sistema total (partícula carregada) + (campo eletromagnético).

Denotando por $\overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu}$ o tensor momento-energia do campo eletromagnético, o tensor momento-energia total

$$T^{\mu\nu} = \overset{(P)}{T}{}^{\mu\nu} + \overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu} \qquad (0.7\text{-}2)$$

deve ser tal que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

isto é,

$$\partial_\mu \overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu} = - \partial_\mu \overset{(P)}{T}{}^{\mu\nu} = - \int \frac{dp^\nu}{d\tau} \overset{(4)}{\delta} (z - z(\tau))d\tau \quad . \qquad (0.7\text{-}3)$$

Usando as equações de Lorentz

$$\frac{dp^\nu}{d\tau} = eF^\nu{}_\lambda \dot{z}^\lambda \quad , \qquad (0.7\text{-}4)$$

onde $\underline{e}$ é a carga elétrica da partícula e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, segue que

$$\partial_\mu \overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu} = - e \int F^\nu{}_\lambda \dot{z}^\lambda \overset{(4)}{\delta} (z - z(\tau)), \qquad (0.7-5)$$

de modo que a divergência de $\overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu}$ num dado ponto é essencialmente a força de Lorentz sobre a partícula quando ela está naquele ponto.

Para que possamos escrever o lado direito desta equação de uma forma mais simples, vamos construir o quadrivetor corrente elétrica associado com a partícula. Seguiremos os mesmos passos da construção de $\overset{(p)}{T}{}^{\mu\nu}$. Definamos a densidade de carga ρ da partícula por

$$\rho = e \overset{(3)}{\delta} (\vec{z} - \vec{z}(\tau)), \qquad (0.7-6a)$$

e o vetor corrente elétrica por

$$\vec{j} = e \overset{(3)}{\delta} (\vec{z} - \vec{z}(\tau)) \dot{\vec{z}} \; . \qquad (0.7-6b)$$

Denotando $j^\mu = (\rho, \vec{j})$,

$$j^\mu = e \overset{(3)}{\delta} (\vec{z} - \vec{z}(\tau)) \frac{dz^\mu}{d\tau} \; . \qquad (0.7-7)$$

Para tornar esta última definição manifestamente covariante vamos proceder como no caso de $\overset{(p)}{T}{}^{\mu\nu}$. Tomemos $\bar{\tau}$ como o tempo próprio. Segue então que

$$j^{\mu} = e \frac{\overset{(3)}{\delta}(\vec{z} - \vec{z}(\bar{\tau}))\dfrac{dz^{\mu}}{d\bar{\tau}}\Big|_{\tau=z^0(\bar{\tau})}}{\dfrac{d\tau}{d\bar{\tau}}\Big|_{\tau=z^0(\bar{\tau})}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e \overset{(3)}{\delta}(z^i - z^i(\bar{\tau}))\delta(\tau - z^0(\bar{\tau}))\frac{dz^{\mu}}{d\bar{\tau}}\, d\tau \quad ,$$

e portanto

$$j^{\mu}(z) = \int e\, \dot{z}^{\mu}(\tau) \overset{(4)}{\delta}(z - z(\tau))d\tau \; . \qquad (0.7\text{-}8)$$

A corrente j^{μ} assim definida exibe covariância manifesta e é conservada. De fato,

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} e\dot{z}^{\mu}(\tau)\frac{\partial}{\partial z^{\mu}} \overset{(4)}{\delta}(z - z(\tau)d\tau =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} e\dot{z}^{\mu}(\tau)\frac{\partial}{\partial z^{\mu}(\tau)} \overset{(4)}{\delta}(z - z(\tau))d\tau =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} e\frac{d}{d\tau} \overset{(4)}{\delta}(z - z(\tau))d\tau = 0.$$

Substituindo a definição (0.7-8) em (0.7-5) obtem-se

$$\partial_{\mu} \overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\lambda} j^{\lambda} \quad . \qquad (0.7\text{-}9)$$

Observemos que esta equação nos permite calcular o tensor $\overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu}$. Usando as equações de Maxwell,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = - j^\nu \quad , \quad \partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0 \ ,$$

pode-se mostrar que

$$-F^\mu{}_\nu j^\nu = F^\mu{}_\nu \partial_\beta F^{\nu\beta} = \partial_\beta (F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\beta}) - \frac{1}{4}\, \partial_\beta (\eta^{\mu\beta} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho})$$

que, substituido em (0.7-9), resulta em

$$\partial_\mu \overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu} = \partial_\nu (F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\, \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}) . \qquad (0.7\text{-}10)$$

Logo,

$$\overset{(EM)}{T}{}^{\mu\nu} = F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\, \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \ . \qquad (0.7\text{-}11)$$

A integral de ação total para o sistema se escreve

$$S = S_{EM} + S_\rho + S_I$$

onde S_I é a integral de ação de interação,

$$S_I = \int d^4 z j^\mu A_\mu \ , \qquad (0.7\text{-}12)$$

e S_{EM} é a integral de ação do campo eletromagnético,

$$S_{EM} = \int - \frac{1}{4}\, F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} d^4 z \ . \qquad (0.7\text{-}13)$$

De S obtem-se as equações de Maxwell e as equações de Lorentz para a partícula, equações (0.7-4).

A integral de ação (0.7-12) pode ser escrita como uma integral de linha sobre a trajetória da partícula:

$$S_I = \int d^4z \int d\tau\; e\, \overset{(4)}{\delta}(z - z(\tau))\dot{z}^\mu A_\mu =$$

$$= \int_\Gamma e\, A_\mu dz^\mu \quad . \qquad (0.7\text{-}14)$$

Sob qualquer uma das formas, (0.7-12) ou (0.7-14), pode-se verificar que S_I é invariante pelas transformações de gauge do campo eletromagnético, $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Delta$. De (0.7-12) segue que

$$S_I \longrightarrow S_I + \int d^4z \partial_\mu (j^\mu \Delta) \quad ,$$

onde usamos que j^μ é conservada. O termo adicional é uma divergência e pode ser eliminado. De (0.7-14) encontra-se

$$S_I \longrightarrow S_I + e \int_1^2 \partial_\mu \Delta dz^\mu = S_I + e\ (\Delta(2) - \Delta(1))$$

onde (1) e (2) são pontos sobre a trajetória da partícula. Observe que o termo adicional não depende da trajetória da partícula, isto é, é o mesmo para todas as trajetórias entre os dois pontos. Além disto, este termo não contribui para as equações de movimento, o que prova a invariância de gauge.

Para finalizar esta seção vamos fazer um comentário que será útil para a próxima seção. A equação $\partial_\mu j^\mu = 0$

na teoria de Maxwell é a análoga de $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ na teoria de Einstein. Neste último caso, vimos que tomando-se $T^{\mu\nu}$ como uma integral sobre $t^{\mu\nu}\overset{(4)}{\delta}(z-z(\tau))$, segue de $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ que $t^{\mu\nu} \sim \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu$ e que a trajetória da partícula é uma geodésica. Isto significa que é suficiente caracterizar a partícula como uma singularidade tipo $\overset{(4)}{\delta}(z-z(\tau))$ e impor que $T^{\mu\nu}$ tinha divergência nula para que se obtenha as informações mencionadas acima. Supondo que

$$j^\mu = \int \lambda^\mu(\tau) \overset{(4)}{\delta}(z - z(\tau))d\tau$$

e impondo que $\partial_\mu j^\mu = 0$ obtem-se que $\lambda^\mu = \dot{z}^\mu$ (a demonstração será feita na próxima seção) mas não se obtem nenhuma informação sobre a trajetória. Isto é, impondo que a partícula carregada é uma singularidade tipo $\overset{(4)}{\delta}(z-z(\tau))$ podemos dizer apenas que o seu movimento gera uma corrente conservada, não importando qual a trajetória seguida pela partícula. A única condição é que a trajetória seja contínua ($\therefore$ $\dot{z}$ existe) de modo a não haver criação e/ou aniquilação da partícula ao longo do seu movimento. Alguns detalhes deste problema serão dados na seção seguinte.

0.8 Partículas clássicas com spin

0.8.1 A interação eletromagnética

Consideremos uma partícula não-relativística dotada de momento magnético $\vec{\mu}$ e momento angular $\vec{L}$. Estas duas quantidades são relacionadas pela equação

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{L} \ . \tag{0.8-1}$$

Em presença de um campo magnético a partícula experimenta um torque dado por $\vec{\mu} \times \vec{B}$ e o momento angular executa um movimento de precessão,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m}\vec{L}\times\vec{B} \ . \tag{0.8-2}$$

Algumas partículas elementares (eletrons, protons, muons, etc.) possuem momento magnético, e a elas pode-se associar um momento angular intrínseco, $\vec{S}$ spin, relacionado ao momento magnético por

$$\vec{\mu} = \frac{ge}{2m}\vec{S} \ . \tag{0.8-3}$$

O fator g é denominado de razão giromagnética e é peculiar a uma dada partícula. No sistema de repouso da partícula, o vetor $\vec{S}$ obedece à equação

$$\frac{d\vec{S}}{d\tau} = \frac{ge}{2m}\vec{S}\times\vec{B} \ . \tag{0-8.4}$$

Passemos à construção da generalização covariante desta equação. Vamos introduzir o tensor de spin $S^{\mu\nu} = - S^{\nu\mu}$; o vetor de spin S^{α} é o vetor axial construído a partir de $S^{\mu\nu}$ de acordo com

$$S^{\alpha} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} v_{\beta} S_{\mu\nu} \qquad (0.8\text{-}5)$$

onde v^{β} é a quadri-velocidade da partícula. No sistema de repouso da partícula a componente S^{o} deve se anular, e pode-se mostrar que isto requer que $S_{\alpha}v^{\alpha} = 0$, condição esta que já é verificada pela definição (0.8-5). Observemos que esta condição pode ser expressa em termos de $S^{\mu\nu}$ como

$$\dot{z}^{\mu} S_{\mu\nu} \equiv v^{\mu} S_{\mu\nu} = 0 \quad . \qquad (0.8\text{-}6)$$

Façamos a hipótese de que os efeitos dos gradientes dos campos eletromagnéticos sobre o spin da partícula são desprezíveis. Assim, a trajetória é governada pela equação de Lorentz, equação (0.8-4). Observe que isto significa que a partícula está sendo considerada como um objeto pontual. Esta aproximação não afetará os resultados que queremos obter. Num tratamento mais rigoroso encontram-se correções para as equações de movimento envolvendo os gradientes dos campos, o que caracteriza a partícula com spin como um objeto com extensão espacial.

As equações de movimento para $S^{\mu\nu}$ devem ser construidas a partir de $F_{\alpha\beta}$, $\dot{z}^{\alpha}$ e $S^{\mu\nu}$, e devem ser lineares em $S^{\mu\nu}$. Levando em conta as condições (0.8-6) a equação mais geral que se pode construir é

$$\frac{dS^{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{ge}{2m}\left(S^{\nu}{}_{\rho}F^{\mu\rho} - S^{\mu}{}_{\rho}F^{\nu\rho}\right) \quad . \qquad (0.8\text{-}7)$$

Estas equações são as únicas que se podem construir em virtude das condições (0.8-7). (Note que uma outra possibilidade seria construir um termo idêntico ao lado direito de (0.8-7) com o dual de $F^{\mu\nu}$, $\overset{*}{F}_{\mu\nu}$. Na aproximação não-relativística este termo seria proporcional a $\vec{S}\times\vec{E}$, o que significaria que a partícula tem um momento de dipolo elétrico. Esta possibilidade pode ser descartada com base nos dados experimentais existentes.)

Admitiremos então que as equações (0.8-7) são as equações corretas para o tensor de spin $S^{\mu\nu}$. Para verificar que estas equações são consistentes com as equações da trajetória basta multiplicar (0.8-7) por $\dot{z}^{\nu}$, fazer uso de (0.8-7) e das equações de Lorentz. Encontra-se que a consistência é verificada para $g=2$ (que é o valor da razão giromagnética para o eletron).

Neste ponto vamos introduzir o vetor de polarização, ou vetor de Pauli-Lubansky, W_{μ}, definido por

$$W_{\mu} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} S^{\nu\rho} p^{\sigma} \quad . \qquad (0.8\text{-}8)$$

Na aproximação não-relativística, $p^{\mu} = (m_o, \vec{0})$, tem-se $W^{\mu} = (0, m_o \vec{S})$. Invertendo as equações (0.8-8) obtem-se

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{m_o^2}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\rho} p^{\sigma} \; . \qquad (0.8\text{-}9)$$

Usando que $p^2 - m^2 = 0$ e as condições (0.8-4), verifica-se que $W^2 = W^{\mu} W_{\mu}$ é um escalar tipo espaço, cujo valor tomaremos como

$$\omega^\mu \omega_\mu = - m_o^2 S_o^2 \qquad (0.8\text{-}10)$$

As equações de movimento para o vetor de polarização são obtidas diretamente de (0.8-8) e (0.8-7):

$$\dot{\omega}_\mu = - \dot{z}_\mu (\omega_\nu \ddot{z}^\nu) + \frac{ge}{2m}(F_{\mu\nu} - \dot{z}_\mu \dot{z}^\rho F_{\rho\nu})\omega^\nu =$$

$$= (g-2)(\frac{e}{2m}) \dot{z}_\mu \dot{z}^\rho F_{\nu\rho} + \frac{ge}{2m} F_{\mu\nu}\omega^\nu \quad . \qquad (0.8\text{-}11)$$

e são as equações de Bargmann-Michel-Telegdi. Destas equações segue que

$$\frac{d}{d\tau}(\omega^\mu \omega_\mu) = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\tau}(\omega^\mu p_\mu) = 0 \quad . \qquad (0.8\text{-}12)$$

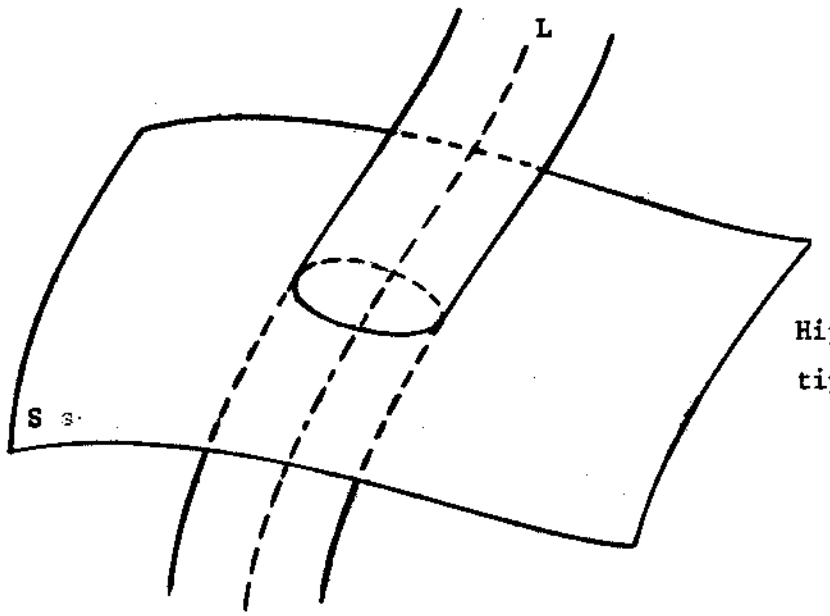
Levando em conta que $\frac{d}{d\tau}(p^\mu p_\mu) = 0$, segue que m_o e S_o são constantes do movimento para a partícula com spin.

0.8.2 A interação gravitacional

A descrição do movimento de partículas clássicas com spin em interação com campos gravitacionais é um problema bastante complicado. O método que vamos apresentar, devido a A. Papapetrou, fundamenta-se na equação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia associado com a partícula, e tem a peculiaridade de não depender de uma especificação da forma deste tensor.

No esquema de Papapetrou a partícula é tratada como um objeto com extensão espacial, com dimensões muito pequenas quando comparadas com o comprimento característico do campo gravitacional. Assim, durante o seu movimento a partícula descreve um "tubo" no espaço-tempo.

Para caracterizar o seu movimento escolhamos uma linha (L) no interior do tubo com coordenadas $y^{\mu}(s)$, onde s é o tempo próprio em L.



Vamos supor que $T^{\mu\nu}$ se anula fora de uma esfera centrada em $y(s)$ e com raio muito pequeno. Com relação à linha L, diz-se que $T^{\mu\nu}$ representa uma partícula tipo "n-polo" se os momentos

$$\int_S d^3x T^{\mu\nu} \delta x^{\alpha_1} \ldots \delta x^{\alpha_n} \sqrt{-g} \qquad (0.8\text{-}13)$$

$$\delta x^{\alpha} = x^{\alpha} - y^{\alpha}(s) \quad , \quad \delta x^0 = 0$$

se anulam ou são desprezíveis para $k > n$. Observe que esta definição depende fortemente da curva $y(s)$ escolhida. Os momentos podem se anular com relação a uma curva particular e não se anular com relação a uma outra. As equações de movimento para a partícula farão sentido para a curva particular com relação a qual ela é um n-polo.

Uma partícula tem uma estrutura tipo "polo simples" $(n=0)$ se pelo menos algumas das integrais

$$\int_s d^3x\sqrt{-g}\; T^{\mu\nu}$$

são diferentes de zero e todas as de ordem superior $(n>0)$ são nulas. A estrutura imediatamente superior $(n=1)$ caracteriza uma partícula tipo polo-dipolo: além da condição acima para $n=0$, deve-se ter pelo menos algumas das integrais

$$\int_s d^3x\sqrt{-g}(x^\alpha - y^\alpha_{(s)})\, T^{\mu\nu}$$

diferentes de zero, e todas as de ordem superior $(n>1)$ nulas.

Partículas tipo polo-dipolo são partículas dotadas de uma estrutura de spin, de acordo com Papapetrou. O tensor de spin é definido por

$$S^{\mu\nu} \equiv \int d^3x\sqrt{-g}(\delta x^\mu T^{\mu o} - \delta x^\nu T^{\mu o}) \quad . \qquad (0.8\text{-}14)$$

e as equações de movimento, que se obtem de $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, se escrevem

$$\frac{D}{DS}(mv^\mu + v^\beta \frac{D}{DS} S^\mu{}_\beta) = \frac{1}{2} R^\mu_{\beta\rho\sigma} v^\beta S^{\rho\sigma} \quad , \qquad (0.8\text{-}15)$$

$$\frac{D}{DS} S^{\mu\nu} = v^{\mu}v^{\beta} \frac{D}{DS} S_{\beta}{}^{\nu} - v^{\nu}v^{\mu} \frac{D}{DS} S_{\beta}{}^{\mu} \quad . \qquad (0.8\text{-}16)$$

Nestas equações $v^{\beta} = dy^{\beta}/ds$, $\frac{Df}{Ds} = v^{\alpha}\nabla_{\alpha}f$, e

$$m = v_{\alpha}P^{\alpha} = v_{\alpha}\left(\int d^3x\sqrt{-g}\ T^{\alpha o} + \frac{1}{v^0}\ \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S^{\mu o}v^{\nu}\right) \quad . \qquad (0.8\text{-}17)$$

As equações (0.8-3,4) não são suficientes para determinar completamente o movimento com os dados iniciais $V^{\alpha}(o)$ e $S^{\mu\nu}(o)$. (Apenas sete daquelas equações são independentes). Das equações (0.8-16) pode-se determinar apenas 3 das 6 componentes de $S^{\mu\nu}$. Portanto, é necessário se impor condições subsidiárias sobre o tensor de spin. Estas condições são, de certo modo, arbitrárias e são reflexos da arbitrariedade na escolha da curva L. Não analisaremos as diversas propostas de condições subsidiárias (devidas a Schiff, Pirani, Tulczyjew e outros); ao leitor interessado indicamos o trabalho de Dixon.

Definindo

$$P^{\mu} = mv^{\mu} + v^{\beta} \frac{D}{DS} S^{\mu}{}_{\beta} \quad , \qquad (0.8\text{-}18)$$

as equações de Papapetrou se escrevem

$$\frac{DP^{\mu}}{DS} = \frac{1}{2} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}v^{\mu}S^{\alpha\beta} \quad , \qquad (0.8\text{-}19)$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{DS} = P^{\mu}v^{\nu} - P^{\nu}v^{\mu} \quad . \qquad (0.8\text{-}20)$$

O termo da direita na equação (0.8-19) é conhecido como a "interação spin-curvatura".

Pode-se mostrar que se o espaço-tempo admite um grupo de isometrias gerado pelo campo de vetores de Killing ξ_μ, então o escalar

$$k = P^\alpha \xi_\alpha - \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} \nabla_\beta \xi_\alpha \tag{0.8-21}$$

é uma constante do movimento.

Uma questão que pode-se por neste ponto é sobre a aplicabilidade das equações de Papapetrou para a descrição de algum limite clássico de um sistema quântico, como elétrons, por exemplo. Pelo menos neste caso, partículas de spin 1/2, pode-se mostrar que um limite clássico bastante razoável conduz a equações idênticas a (0.8-19,20). O esquema de aproximações consiste no seguinte. Considera-se a equação de Dirac num espaço curvo e usa-se a aproximação linear para o tensor métrico e, em seguida, faz-se uma aproximação WKB. As equações de movimento que resultam para os *valores médios* do momento e do tensor de spin (são idênticas a (0.8-19,20). Observemos que isto está de acordo com o teorema de Ehrenfest, que diz que os valores médios dos observáveis quânticos seguem trajetórias clássicas.

Conforme observamos anteriormente, na derivação das equações de Papapetrou não se faz uso de uma forma específica para o tensor momento-energia. Mesmo assim o esquema permite obter as equações das geodésicas no caso n=0, e um conjunto de equações bastante razoável (no sentido do parágrafo anterior, por exemplo) no caso n=1. O tensor $T^{\mu\nu}$ não é singular, pois é definido em uma região finita do espaço-tempo. Na seção 0.6 as equações das geodésicas foram obtidas a partir de um tensor momento-energia singular, com singularidade tipo "δ de Dirac". Aquela forma de $T^{\mu\nu}$ é bastante sugestiva mas não há nenhuma razão a priori que justifique associar a uma partícula (tipo polo simples) uma singularidade tipo σ. Mesmo assim, para o caso em que a estrutura da partícula é definida apenas pela massa, o método conduz a bons resultados. Agora, para uma partícula com estrutura mais complexa, com massa e spin, pode-se construir algo semelhante? De fato, é possível construir um tensor momento-energia com singularidades tipo δ e tipo derivadas primeiras de δ: tal que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ conduz às equações (0.8-6,7). Este tensor é

$$T^{\mu\nu}(z) = \int \frac{d\tau}{\sqrt{-g}} \left[\overset{(4)}{\delta}(z - x(\tau)) \left(mv^\mu v^\nu + \frac{1}{2} \frac{DS^{\alpha\mu}}{DS} v_\alpha v^\nu \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2} \frac{DS^{\alpha\mu}}{DS} v_\alpha v^\mu \right) - \nabla_\alpha \left\{ \overset{(4)}{\delta}(z - x(\tau)) \frac{1}{2} (S^{\alpha\mu} v^\nu - S^{\alpha\nu} v^\mu) \right\} \right]. \tag{0.8-22}$$

No entanto, não sabemos escrever uma lagrangiana a partir da qual este tensor possa ser obtido via a sua definição, equação (0.6-23).

O esquema de Papapetrou foi generalizado para incluir partículas de massa nula por S. Raguza, e o limite das equações de Papapetrou para $m \to 0$ foi analisado por B. Mashhoom. Encontra-se que tais partículas seguem geodésicas nulas e que o vetor de spin é paralelo a direção do movimento.

Para encerrar esta seção mencionemos que recente-mente foi proposto um tipo de "limite clássico" para a equação de Dirac que conduz, dentre outros resultados, às equações de Papapetrou e às equações de Bargmann-Michel-Telegdi. É um formalismo que consiste em ampliar o espaço de fase de uma partícula relativística introduzindo um setor no qual as coordenadas são números clássicos anti-comutativos (usualmente denominados de variáveis de Fermi, em contraste com as coordenadas (Z^{μ},p_{μ}) denominadas de variáveis de Bose). Estas novas variáveis são utilizadas para descrever classicamente as propriedades de spin da partícula. Um aspecto muito importante desta formulação é que a teoria admite uma simetria que mistura as variáveis de Bose e de Fermi, isto é, a teoria é invariante por transformações de supersimetria. Mais adiante daremos alguns detalhes desta formulação.

0.9 As equações de movimento em relatividade geral

Nas seções anteriores obtivemos as equações de movimento para partículas em variedades riemanianas por dois métodos distintos. O primeiro foi uma simples generalização (espaço plano) → (espaço curvo), pela substituição $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(Z)$ na integral de ação associada com a partícula. As equações de movimento obtidas por extremização desta integral de ação resultam ser as equações das geodésicas da métrica $g_{\mu\nu}(Z)$. O segundo método baseou-se na construção do tensor momento-energia associado com a partícula; a imposição de que este tensor tem divergência nula conduziu às mesmas equações que no caso anterior.

Quando falamos numa variedade riemaniana com métrica $g_{\mu\nu}(Z)$ temos em mente a teoria da relatividade geral. Assim, a variedade riemaniana em questão é o espaço-tempo gerado por uma certa distribuição de matéria e os componentes da métrica são os potenciais gravitacionais. As duas abordagens ao movimento da partícula que apresentamos não tem nenhuma ligação direta com a relatividade geral, no sentido de que as equações de Einstein, $G_{\mu\nu} = - kT_{\mu\nu}$, não foram usadas na obtenção do resultado. O campo gravitacional foi considerado como um campo externo e a partícula (matéria) como um objeto estranho à geometria do espaço-tempo.

Na sua formulação inicial a teoria da relatividade geral manteve um forte paralelo com a teoria de Maxwell. As equações de campo, análogas às equações de Maxwell, relacionam o campo com uma dada distribuição de matéria. Completando estas equações tinha-se o "postulado geodésico", em analogia com as equações de Lorentz, relacionando o movimento da partícula com o campo gravitacional em sua vizinhança. Assim como na teoria de Maxwell, as equações de campo e as equações de movimento da matéria eram compreendidas como logicamente independentes, descrevendo a dinâmica de duas estruturas distintas: o campo gravitacional e as partículas (matéria).

Dada uma distribuição de matéria que gera um campo gravitacional a derivação das equações de movimento é, ainda hoje, uma questão de interesse fundamental na teoria da rela tividade geral. As equações de campo se mostraram extremamente poderosas na determinação destas equações de movimento. Um dos ingredientes mais importantes para a sua obtenção já está contido na teoria e são as identidades de Bianchi contraidas, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, conseqüencias da covariância geral da teoria por transformações arbitrárias das coordenadas. Estas identidades impõem restrições sobre o tensor momento-energia associado com as fontes, que deve satisfazer a $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. (Estas equações são usualmente denominadas de "lei de conservação forte", porque sua validade é independente das equações do campo gravitacional).

As primeiras investigações no sentido de obter as equações de movimento usando estas equações são devidas a Weyl e Eddington. Admitindo que a matéria é uma poeira incoerente de partículas com $T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu$, onde ρ é a densidade e v^μ a velocidade média das partículas, eles mostraram que as partículas seguem geodésicas da métrica. Para não haver ambiguidade ao se falar em "trajetória da partícula" faz-se a hipótese de que a região onde $T^{\mu\nu}$ é diferente de zero pode ser feita arbitrariamente pequena. O método desenvolvido por Papapetrou esclareceu as hipóteses que devem ser feitas sobre $T^{\mu\nu}$ de modo a se poder falar em "trajetória de partícula" de maneira mais precisa. (Em sua versão original este método tinha a desvantagem de não ser covariante. A versão covariante do método de Papapetrou foi feita por Dixon algum tempo depois). O ingrediente fundamental destes métodos, repetimos, é a lei de conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, o que significa tratar a matéria como uma entidade "separada" da geometria.

Uma abordagem geométrica ao problema das equações de movimento trata a matéria como uma manifestação da geometria, cuja dinâmica é governada pelas equações de Einstein no vazio, $G_{\mu\nu} = 0$ ou $R_{\mu\nu} = 0$. Tratando as partículas como singularidades localizadas do campo gravitacional e usando as equações do campo livre na vizinhança das singularidades, Einstein-Grommer-Infeld-Hoffmann obtiveram as equações de movimento para as partículas (=singularidades do campo). A relatividade geral ocupa assim a posição de ser a única teoria cujas equações de movimento para as fontes são consequências diretas das equações do campo.

Nesta descrição a matéria está sendo representada pelas singularidades do campo. Em outras palavras, as partículas são representadas por algum tipo especial de estrutura do campo (uma peculiaridade topológica, por exemplo) localizada no espaço-tempo. Até que esta estrutura do campo seja determinada, a "estrutura interna" da partícula deve ser descrita em termos das propriedades do campo "fora" da partícula.

O que foi dito acima sobre a não independência conceitual entre campos e partículas pode ser ilustrado fazendo-se uma analogia com um exemplo da dinâmica dos fluidos com vórtices. Vórtices são concentrações locais de energia, que podem ter momento linear e são relativamente estáveis. Em muitos aspectos os vórtices se comportam como partículas, podendo sofrer espalhamento ou se unir para formar novos vórtices, etc. No entanto, além do fluído não há mais nada envolvido. Os vórtices são apenas um certo tipo de configuração do fluído, e o que os distingue do resto do fluído é a sua estrutura.

Um aspecto muito importante da teoria da relatividade geral, a não linearidade das equações de campo, desempenha um papel decisivo na determinação das equações de movimento. Na verdade nenhuma teoria de campo cujas equações são lineares determinam o movimento das partículas. (Este é o caso da teoria de Maxwell, por exemplo.) Por esta razão, encontra-se muitas vezes na literatura a afirmação que a não-linearidade apenas é suficiente para determinar as equações de movimento. Aparentemente isto não é verdade porque o grupo de simetrias da teoria em questão também entra no cenário. Alguns aspectos desta questão serão discutidos na próxima seção onde estudamos as equações de movimento de "partículas de Yang-Mills".

0.10 Partículas clássicas com carga não abeliana

As equações de movimento clássicas para partículas com carga não-abeliana foram obtidas pela primeira vez por Wong. Partindo da equação de Dirac em interação com o campo de Yang-Mills, as equações de movimento foram obtidas por um processo de identificação de observáveis clássicos com valores médios dos observáveis quânticos correspondentes na representação de Heisenberg. A derivação de Wong é muito interessante mas alguns detalhes do processo de identificação nos parecem obscuros. Recentemente o esquema de Papapetrou foi generalizado por S. Ragusa para o caso de campos de gauge, e as equações de movimento obtidas coincidem com as equações de Wong. Uma outra maneira de obter estas equações é usar a lei de conservação do tensor momento-energia total do sistema (campos de gauge) + (partículas). Vamos apresentar este último procedimento por ser mais direto e mais simples (*). Como este procedimento requer a especificação das formas funcionais do tensor momento-energia e da corrente isotópica associadas com a partícula, aproveitamos a oportunidade para demonstrar que estas ficam determinadas pela hipótese que a partícula é descrita por uma singularidade do tipo $\delta^{(4)}(z-z(\tau))$

De acordo com o que apresentamos na seção (2.8a) as equações de movimento para os campos de gauge se escrevem

$$D_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = \vec{j}^{\,\nu} \tag{0.10-1}$$

ou

$$\partial_\mu \vec{F}^{\mu\nu} + ig\left[\vec{A}_\mu, \vec{F}^{\mu\nu}\right] = \vec{j}^{\,\nu} \tag{0.10-2}$$

onde $\vec{j}^{\,\nu}$ é a corrente isotópica associada com as fontes. O tensor intensidade de campo satisfaz as identidades de Bianchi

$$D_{[\mu}\vec{F}_{\alpha\beta]} = 0 \tag{0.10-3}$$

(*) Ver a seção (2.8a) para a notação e convenções dos campos de gauge.

e também a

$$D_\mu D_\nu \vec{F}^{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{0.10-4}$$

Desta última expressão e das equações de movimento (0.10-1) segue que

$$D_\mu \vec{J}^\mu = 0 \quad . \tag{0.10-5}$$

O tensor momento-energia $\overset{G}{T}{}^{\mu\nu}$ dos campos de gauge é dado por

$$\overset{G}{T}_{\mu\nu} = T_R\left[\vec{F}_\mu{}^\lambda . \vec{F}_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\,\eta_{\mu\nu}\vec{F}^{\lambda\rho}.\vec{F}_{\lambda\rho}\right] =$$

$$= F_\mu{}^{\lambda a} F_{\lambda\nu a} - \frac{1}{4}\, F_a^{\lambda\rho} F^a_{\lambda\rho} \quad . \tag{0.10-6}$$

Denotando por $\overset{m}{T}_{\mu\nu}$ o tensor momento-energia associado com as fontes dos campos de gauge, a lei de conservação da energia e momento se escreve

$$\partial_\mu(\overset{G}{T}{}^{\mu\nu} + \overset{m}{T}{}^{\mu\nu}) = 0 \quad . \tag{0.10-7}$$

Esta lei de conservação é a relação básica para os nossos desenvolvimentos.

Da expressão (0.10-6) segue que

$$\partial^\nu \overset{G}{T}_{\mu\nu} = (\partial^\nu \vec{F}_{\mu\nu}).\vec{F}_\nu{}^\rho + \vec{F}_{\mu\rho}.(\partial^\nu \vec{F}_\nu{}^\rho) - \frac{1}{2}\,(\partial_\nu \vec{F}^{\alpha\beta}).\vec{F}_{\alpha\beta} =$$

$$= (D_\nu \vec{F}_{\mu\rho}).\vec{F}^{\nu\rho} + \vec{F}_{\mu\rho}.(D_\nu \vec{F}^{\nu\rho}) - \frac{1}{2}(D_\mu \vec{F}^{\alpha\beta}).\vec{F}_{\alpha\beta} \quad .$$

Usando as identidades de Bianchi obtem-se da expressão acima

$$\partial_\nu \overset{G}{T}_\mu{}^\nu = \vec{F}_{\mu\rho}.D_\nu \vec{F}^{\mu\rho} = \vec{j}^\rho.\vec{F}_{\mu\rho} \quad , \tag{0.10-8}$$

que substituído em (0.10-5) resulta em

$$\partial_\mu \overset{m}{T}{}^{\mu\nu} = -\vec{j}^\rho.\vec{F}^\nu{}_\rho \quad . \tag{0.10-9}$$

Vamos admitir que a corrente isotópica $\vec{j}^\mu$ e o tensor $\overset{m}{T}{}^{\mu\nu}$ são dados por

$$\vec{j}^\mu = \int d\tau\, \vec{Q}^\mu(\tau) \overset{(4)}{\delta}(x - z(\tau)) \quad , \tag{0.10-10}$$

e

$$\overset{m}{T}{}^{\mu\nu} = \int d\tau\, t^{\mu\nu}(\tau) \overset{(4)}{\delta}(x - x(\tau)) \quad , \tag{0.10-11}$$

onde τ é o tempo próprio e $\vec{Q}^\mu(\tau)$ e $t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu}$ são quantidades que deverão ser determinadas pelas equações (0.10-5) e (0.10-9)

As equações de movimento podem agora ser obtidas por integração das equações (0.10-5) e (0.10-9) sobre todo o espaço-tempo, após a substituição das expressões (0.10-10) e (0.10-11), respectivamente.

Consideremos primeiramente a equação (0.10-5)

$$\partial_\mu \vec{j}^\mu = ig\left[\vec{A}_\mu, \vec{j}^\mu\right] = 0$$

Substituindo a definição (0.10-10) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \vec{Q}^{\mu} \partial_{\mu} \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) + ig \left[\vec{A}_{\mu}, \vec{Q}^{\mu} \right] \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) \right\} = 0 \quad .$$

Multiplicando esta expressão por uma função $\Phi(x)$ "suficientemente regular" e integrando sobre todo o espaço-tempo, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^4x\, \Phi(x) \left\{ \vec{Q}^{\mu} \partial_{\mu} \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) + ig \left[\vec{A}_{\mu}, \vec{Q}^{\mu} \right] \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) \right\} = 0$$

Impondo que $\Phi(x)$ se anula nos limites de integração e fazendo uma integração por partes no primeiro termo obtêm-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \vec{Q}^{\mu} \partial_{\mu} \phi + ig \left[\vec{A}_{\mu}, \vec{Q}^{\mu} \right] \right\}_{x=z(\tau)} = 0 \qquad (0.10\text{-}12)$$

Neste ponto vamos decompor o isovetor $\vec{Q}^{\mu}$ em termos dos vetores $\dot{z}^{\mu} = dz^{\mu}/d\tau$ e $\eta^{\mu}(\tau)$ satisfazendo a

$$\eta^{\mu}\eta^{\mu} = -1 \quad , \quad \dot{z}^{\mu}\eta_{\mu} = 0 \quad .$$

Escrevamos

$$\vec{Q}^{\mu} = \vec{I}\,\dot{z}^{\mu} + \vec{\lambda}^{\mu} = \vec{I}\,\dot{z}^{\mu} + \lambda\eta^{\mu} \quad . \qquad (0.10\text{-}13)$$

Segue de (0j-12) que

$$\int_{-\infty}^{-\infty} d\tau \left\{ (\vec{I}\,\dot{z}^{\mu} + \vec{\lambda}^{\mu}) \partial_{\mu}\phi + ig \left[\vec{A}_{\mu}, \vec{I}\,\dot{z}^{\mu} + \vec{\lambda}^{\mu} \right] \phi \right\}_{x=z(\tau)} = 0 \quad ,$$

donde, fazendo uma integração por partes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \left(\frac{d\vec{I}}{d\tau} + ig\left[\vec{A}_\mu,\vec{I}\right]\dot{z}^\mu \right) \phi \; + \right.$$

$$\left. + \vec{\lambda}^\mu \partial_\mu \Phi + ig\left[\vec{A}_\mu,\vec{\lambda}^\mu\right]\phi \right\}_{x=z(\tau)} = 0 \quad .$$

Da arbitrariedade de Φ e $\partial_\mu\Phi$ em $x=z(\tau)$ segue que $\vec{\lambda}^\mu = 0$ e portanto

$$\frac{d\vec{I}}{d\tau} + ig\left[\vec{A}_\mu,\vec{I}\right]\dot{z}^\mu = 0 \quad . \tag{0.10-14}$$

Desta última equação pode-se verificar que a norma do isovetor $\vec{I}$ é constante,

$$\frac{d}{d\tau}(I^a I_a) = 0 \; . \tag{0.10-15}$$

O isovetor $\vec{I}$ é associado com a carga (spin) isotópica(o) da partícula. As equações (0.10-14) e (0.10-15) mostram que durante o movimento da partícula sob a ação dos campos de gauge o vetor $\vec{I}$ executa um movimento de precessão no espaço interno. Observemos que este movimento de precessão difere fundamentalmente do movimento de precessão do spin ordinário, dado pela equação (0.10-5). Naquele caso, se o campo magnético for nulo, não há precessão do spin, enquanto que no caso do spin isotópico $\vec{I}$ haverá uma precessão mesmo que apenas A_o^a seja diferente de zero.

O procedimento para obter as equações da trajetória a partir das equações (0.10-9) e (0.10-11) é essencial—

mente o mesmo. Introduzindo as funções $\Phi_\nu(x)$, que se anulam nos extremos de integração, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ t^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi_\nu (\vec{F}^{\alpha\beta}\cdot\vec{Q}_\beta)\Phi_\alpha \right\}_{x=z(\tau)} = 0 \quad . \qquad (0.10\text{-}16)$$

Introduzindo a decomposição (0.10-15) para $\vec{Q}^\mu$ e

$$t^{\mu\nu} = m\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu + \alpha(\eta^\mu\dot{z}^\nu + \eta^\nu\dot{z}^\mu) + \beta^{\mu\nu} \quad , \qquad (0.10\text{-}17)$$

com

$$\beta^\mu{}_\nu\dot{z}^\nu = 0 \qquad (0.10\text{-}18)$$

em (0.10-16), segue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \left[m\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu + \alpha(\eta^\mu\dot{z}^\nu + \eta^\nu\dot{z}^\mu) + \beta^{\mu\nu}\right]\partial_\mu\Phi_\nu + \vec{F}^\mu{}_\nu\cdot\vec{I}\dot{z}^\nu\Phi_\mu \right\}_{x=z(\tau)} = 0 .$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \left[\frac{d}{d\tau}(m\dot{z}^\mu + \alpha\eta^\mu)\right]\Phi_\mu - \left[\alpha\eta^\mu\dot{z}^\nu + \beta^{\mu\nu}\right]\partial_\mu\Phi_\nu - \vec{F}^\mu{}_\nu\cdot\vec{I}\dot{z}^\nu\Phi_\mu \right\}_{x=z(\tau)} = 0 \qquad (0.10\text{-}19)$$

Usando a arbitrariedade das funções Φ_μ e suas derivadas, segue que

$$\alpha\eta^\mu\dot{z}^\nu + \beta^{\mu\nu} = 0 \quad . \qquad (0.10\text{-}20)$$

Contraindo esta equação com $\dot{z}_\nu$ resulta que $\alpha = 0$ e com este resultado obtém-se de (0.10-19)

$$m \frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2} = \vec{I}.\vec{F}^\mu{}_\nu \dot{z}^\nu \quad , \qquad (0.10\text{-}21)$$

que é a generalização das equações de Lorentz para o caso não-abeliano. As equações (0.10-14) e (0.10-21) são as equações de Wong.

Vimos então que as equações de movimento para uma partícula com spin isotópico seguem diretamente das equações (0.10-5) e (0.10-9). É importante observar que na dedução das equações de Wong foi feito uso das equações de movimento dos campos de Yang-Mills, e a não linearidade destas equações desempenha um papel fundamental na dedução daquelas equações. Na verdade pode-se dizer que as equações de Wong são consequências da não-linearidade das equações de Yang-Mills. Mas isto só é verdade porque estamos considerando o movimento da partícula no espaço-tempo de Minkowski. Na presença de um campo gravitacional a situação muda e esta afirmação não é válida.

O que foi dito acima tem a ver com os grupos de simetrias envolvidos no problema: o grupo de gauge associado com os campos de Yang-Mills, e o grupo das transformações gerais de coordenadas associado com o campo gravitacional. O grupo de gauge é um grupo de simetrias internas e é o responsável pela não linearidade das equações de Yang-Mills. Mesmo na presença do campo gravitacional esta não linearidade (que deve ser vista como consequência da imposição de invariância da teoria pelo grupo de gauge) garante o mecanismo essencial para a determinação das equações de precessão do spin isotópico. Agora, quando se trata das equações da trajetória, o grupo de gauge não desempenha nenhum papel na sua determinação. Neste ponto entra em cena o grupo de simetrias do espaço-tempo através do acoplamento das fontes com o campo gravitacional, e é este acoplamento que determina as equações da trajetória.

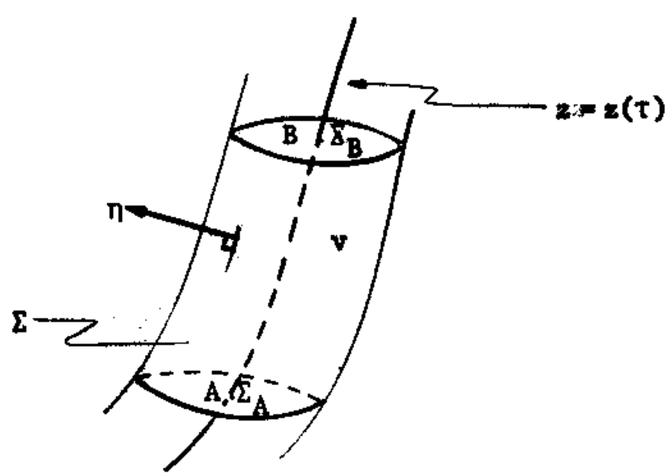
Um outro procedimento para se obter as equações de Wong é integrar diretamente as equações (0.10-9) sobre uma região do espaço-tempo, assumindo que a corrente isotópica e o tensor momento-energia são dados por

$$\vec{j}^{\mu} = g\int d\tau\, \vec{I}(\tau)\dot{z}^{\mu}(\tau) \overset{(4)}{\delta}(x - z(\tau)) \qquad (0.10\text{-}22)$$

e

$$T^{\mu\nu} = m\int d\tau\, \dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu} \overset{(4)}{\delta}(x - z(\tau)) \quad . \qquad (0.10\text{-}23)$$

A região de integração é como na figura abaixo:



$z^\mu(\tau)$ é a trajetória da partícula, que suporemos contida no "tubo" de volume V limitado pelas hipersuperfícies Σ, Σ_A e Σ_B. As duas últimas são tridimensionais, tipo espaço e interseções do tubo com as hipersuperfícies $x^o = x^o_A, x^o_B$, respectivamente. η^μ é o vetor normal a superfície Σ.

Integrando a equação (0j-9) sôbre V obtém-se

$$0 = -\int d^4x \vec{j}^\rho . \vec{F}_{\mu\rho} + \int_{\Sigma_B} d\Sigma T_{\mu o} - \int_{\Sigma_A} d\Sigma \eta^\nu T_{\mu\nu} + \int_{\Sigma} d\Sigma \eta^\nu T_{\mu\nu} \quad (0.10\text{-}24)$$

Da expressão (0.10-23) segue que o último termo da equação acima é nulo. As integrais sobre Σ_A e Σ_B podem ser transformadas em integrais de linha sobre a trajetória da partícula da seguinte maneira:

$$\int_{\Sigma_B} d\Sigma T^{\mu o} = m \int_{\Sigma_B} d^3x \int d\tau \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^0}{d\tau} \overset{(4)}{\delta}(x - z(\tau)) =$$

$$= m \int dz^0 \int_{\Sigma_B} d^3x \frac{dz^\mu}{d\tau} \overset{(4)}{\delta}(x - z(\tau)) = \frac{dz^\mu}{d\tau}_{\tau=\tau_B}$$

Logo,

$$\left(\int_{\Sigma_B} - \int_{\Sigma_A}\right) d\Sigma T^\mu{}_o = m\left[\left(\frac{dz^\mu}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_B} - \left(\frac{dz^\mu}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_B}\right]$$

$$= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \frac{dz^\mu}{d\tau} \quad (0.10\text{-}25)$$

A primeira integral da expressão (0.10-24) também pode ser escrita como uma integral de linha:

$$\int d^4x \vec{j}^\rho . \vec{F}_{\mu\rho} = g \int d^3x \int d\tau \int d\tau' \vec{I}(\tau') . \vec{F}_{\mu\rho} \dot{z}^\rho \overset{(4)}{\delta}(z - x(\tau')) =$$

$$= g \int d\tau \int d\tau' \int d^3x \vec{I}.\vec{F}_{\mu\rho} \dot{z}^\rho \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau'))$$

$$= g \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \vec{I}.\vec{F}_{\mu\rho} \dot{z}^\rho \ . \qquad (0.10-26)$$

Substituindo as expressões (0.10-25) e (0.10-26) em (0.10-24) segue que

$$\int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[m \frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2} - g \vec{I}.\vec{F}^\mu{}_\rho \dot{z}^\rho \right] = 0 \quad ,$$

donde se obtém a equação (0.10-21).

A equação de precessão do spin isotópico é obtida da equação (0.10-5) com a definição (0.10-22):

$$0 = D_\mu \vec{j}^\mu = \int d\tau \left[\vec{I}(\tau) \dot{z}^\mu \partial_\mu \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) + g \left[\vec{A}_\mu , \vec{I} \right] \dot{z}^\mu \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) \right] =$$

$$= \int d\tau \left[\frac{d\vec{I}}{d\tau} + g \left[\vec{A}_\mu , \vec{I} \right] \dot{z}^\mu \right] \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) \quad ,$$

donde segue a equação (0.10-14). Observe que neste contexto a equação de precessão é a condição de consistência da definição de $\vec{j}^\mu$, expressão (0.10-22), com a equação (0.10-5)

Finalmente, mencionemos que as equações de Wong podem ser obtidas da integral de ação

$$S = S_P + S_I = S_P + \int dz^\mu g \vec{I}.\vec{A}_\mu = S_P + \int d\tau g \vec{I}.\vec{A}_\mu \dot{z}^\mu \ . \qquad (0.10-27)$$

A corrente isotópica fica definida por

$$\vec{j}^{\mu} = \frac{\delta S}{\delta \vec{A}_{\mu}} = \int d\tau\, g\, \vec{I}.\vec{A}_{\mu} \overset{(4)}{\delta} (x - z(\tau)) \ . \qquad (0.10\text{-}28)$$

Introduzindo a integral de ação para os campos de gauge obtêm-se as equações de movimento (0.10-1). Usando a equação (0.10-4) e a expressão da corrente (0.10-28) obtêm-se a equação de precessão do spin isotópico, (0.10-14). Neste esquema, onde o spin isotópico não é considerado como uma variável dinâmica da teoria, a equação de precessão resulta da condição de integrabilidade das equações do campo de gauge.

Observemos que a integral de ação (0.10-27) é invariante por reparametrizações e por transformações de gauge.

0.11 Sôbre a formulação hamiltoniana da dinâmica clássica de partículas com spin

Nesta seção vamos apresentar alguns detalhes de uma das possíveis formulações da dinâmica clássica de partículas com spin. Consideremos um sistema mecânico com coordenadas canônicas (q^{μ}, p_{μ}) e spin S_j, que é considerado como uma variável dinâmica da teoria. Denotando por H a hamiltoniana associada ao sistema, as equações de movimento ficam dadas por

$$\dot{q}^{k} = \{q^{k}, H\} \quad , \quad \dot{p}_{k} = \{p_{k}, H\} \quad , \quad \dot{S} = \{S_j, H\} \ . \quad (0.11\text{-}1)$$

Desde que saibamos como construir a hamiltoniana $H(q,p,s)$ o problema que resta é a definição do colchete de Poisson para as variáveis de spin. Neste ponto é importante utilizar um dado que já temos sobre os sistemas com spin: as equações (de precessão) para as variáveis de spin são de primeira ordem no tempo (veja, por exemplo, as equações (0.8-4), (0.8-7), (0.10-14), etc.) Assim, a hamiltoniana deve ser no máximo uma função quadrática nas variáveis de spin com os colchetes de Poisson definidos por

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial q^{\mu}} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q^n} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A}{\partial s_i} \frac{\partial B}{\partial s_j} s_k \ . \qquad (0.11\text{-}2)$$

Esta construção se justifica não só pelos resultados a que conduz, em acordo com os sistemas conhecidos, como também pela estrutura teórica que pode ser montada com base na definição (0.11-2). De fato, os colchetes de Poisson (0.11-2) satisfazem a todas as propriedades dos colchetes de Poisson usuais, inclusive a identidade de Jacobi. Como exemplo de sistema bastante conhecido, ao qual o formalismo pode ser aplicado, mencionemos um átomo com carga e momento magnético $\frac{ge}{2m}\vec{S}$ em presença de um campo eletromagnético. A hamiltoniana se escreve

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi + \frac{ge}{2m}\vec{S}\cdot\vec{B} \quad .$$

As equações de movimento são

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\left(\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}\right) - \frac{ge}{2m}\nabla(\vec{S}\cdot\vec{B})$$

e

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{ge}{2m} \vec{S} \times \vec{B} \quad .$$

Esta última é a equação (0.8-4). Para este sistema pode-se também introduzir o termo da interação spin-órbita,

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} (\vec{L}.\vec{S}) \quad ,$$

para a descrição da estrutura fina atômica.

De interesse para o nosso trabalho é a generalização deste formalismo para o caso em que os graus de liberdade internos são associados com o spin isotópico. Define-se o colchete de Poisson por

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial B}{\partial p_\alpha} \frac{\partial B}{\partial x^\alpha} + C_{abc} \frac{\partial B}{\partial I^a} \frac{\partial A}{\partial I^b} I^c , \qquad (0.11\text{-}3)$$

onde C_{abc} são as constantes de estrutura do grupo de gauge em questão.

As equações de Wong neste formalismo são obtidos de (0.11-1) com a hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_a - gA^a_\alpha I_a)(p^\alpha - gA^\alpha_b I^b) \quad . \qquad (0.11\text{-}4)$$

Considerando apenas as variáveis de spin,

$$\{A,B\} = C_{abc} \frac{\partial A}{\partial s^a} \frac{\partial B}{\partial s^b} s_c \quad . \qquad (0.11\text{-}5)$$

e em particular

$$\{S_a, S_b\} = C_{abc} S^c \quad . \qquad (0.11\text{-}6)$$

Uma transformação $S_a \rightarrow \bar{S}_a = \bar{S}_a(S)$ é denominada de canônica se as relações (0.11-5) são válidas para os novos spins. Sob estas transformações os colchetes (0.11-2) são invariantes e as equações de movimento são invariantes em forma. As transformações canônicas infinitesimais mais gerais, que preservam a norma do vetor de spin, são dados pela rotação não rígida.

$$\bar{S}_a = S_a + (\vec{\omega} \times \vec{S})_a + O(\omega^2) \qquad (0.11\text{-}7)$$

onde $\vec{\omega} = \varepsilon \nabla F(s)$, e a função geradora $F(s)$ é arbitrária. Pode-se demonstrar que as transformações canônicas definidas acima constituem um grupo.

0.12 Partículas Clássicas supersimétricas

0.12.1 A partícula livre

O uso de variáveis clássicas anti-comutativas - elementos de uma álgebra de Grassmann - tornou-se bastante difundido nos últimos anos. Tais variáveis podem ser usadas para a descrição dos graus de liberdade de spin clássico, e a teoria resultante é bastante rica, pois além de nos permitir uma boa compreensão de vários aspectos da dinâmica do spin clássico ela nos conduz diretamente ao conceito de supersimetria. Além disto, alguns aspectos bastante complicados da supergravidade aparecem, no contexto desta abordagem, de maneira tecnicamente mais simples e portanto mais fáceis de serem compreendidos. Vamos fazer primeiramente uma introdução sobre variáveis de Grassmann e sobre a dinâmica clássica de sistemas descritos por estas variáveis.

Existem muitas maneiras de se construir uma integral de ação, para partícula clássica com spin, usando variáveis de Grassmann. No que se segue vamos nos basear nos trabalhos de Berezin e Marinov, e Galvão e Teitelboim. Ao leitor interessado em outras abordagens, ou mais detalhes do que vamos apresentar, sugerimos consultar as referências desta seção.

Vamos denominar de variáveis pares (ou variáveis de Bose) e ímpares (ou variáveis de Fermi) as variáveis comutativas e anticomutativas, respectivamente. Se $\{q^i\}$, $i = 1, \ldots, N$, são variáveis pares e $\{\theta^\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, M$, são variáveis ímpares, têm-se as seguintes propriedades.

$$\theta^\alpha\theta^\beta + \theta^\beta\theta^\alpha = 0 \quad , \tag{0.12-1a}$$

$$\theta^\alpha q^i - q^i\theta^\alpha = 0 \quad , \tag{0.12-1b}$$

$$q^i q^j - q^j q^i = 0 \quad . \tag{0.12-1c}$$

Uma função de um conjunto de variáveis de Fermi pode ser definida por uma expansão formal

$$f(\theta) = f_o + f_\alpha \theta^\alpha + f_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta + \ldots . \qquad (0.12\text{-}2)$$

Se o número de variáveis de Fermi for finito a série necessariamente termina, em virtude da propriedade (0.12-1a).

Define-se dois tipos de derivadas numa álgebra de Grassmann. Consideremos uma variação $\tau f(\Theta)$, em primeira ordem, como consequência da variação $\Theta^\alpha \to \Theta^\alpha + \delta\Theta^\alpha$:

$$\delta f(\theta) = \delta\theta^\alpha \frac{\vec{\partial} f}{\partial\theta^\alpha} = f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \delta\theta^\alpha \qquad (0.12\text{-}3)$$

$\frac{\vec{\partial} f}{\partial\theta^\alpha}$ e $f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}$ são denominadas de derivada a esquerda e derivada a direita respectivamente, e são operadores lineares sobre a álgebra de Grassmann.

Pode-se construir expressões explícitas para as derivadas definidas acima. Para isto é suficiente construí-las para monômios, em virtude de (0.12-2). Dado o monômio $\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2} \ldots \theta^{\alpha_\mu}$, para calcular a sua derivada a esquerda (direita) com relação a θ^β, devemos permutar θ^β até a posição mais a esquerda (direita), usando (0.12-1a), e em seguida eliminá-lo da expressão. Formalmente,

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}(\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\ldots\theta^{\alpha_n}) = \delta^{\alpha_1\beta}\theta^{\alpha_2}\ldots\theta^{\alpha_n} - \delta^{\alpha_2\beta}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_3}\ldots\theta^{\alpha_n}$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\delta^{\alpha_n\beta}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\ldots\theta^{\alpha_{n-1}} , \qquad (0.12\text{-}4a)$$

$$(\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\ldots\theta^{\alpha_n})\ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^{\beta}} = \delta^{\alpha\beta n}\theta^{\alpha_1\alpha_2}\ldots\theta^{\alpha_{n-1}} - \delta^{\beta\alpha_{n-1}}\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_{n-2}}\theta^{\alpha_n}$$

$$+ \ldots +(-1)^{n-1}\delta^{\alpha_1\beta}\delta^{\alpha_2}\theta^{\alpha_3}\ldots\theta^{\alpha_n} \quad .(0.12\text{-}4b)$$

Se o monômio não contiver θ^{β} então ambas as derivadas são iguais a zero. Daqui por diante vamos nos preocupar apenas com a derivada a esquerda, que denotaremos simplesmente por $\partial/\partial\theta$.

Verifica-se sem dificuldades que

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta^{\beta}}\right) = -\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta^{\alpha}}\right) \quad , \tag{0.12-5a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial\theta^{\alpha}}\, g + (-1)^{s} f\,\frac{\partial g}{\partial\theta^{\alpha}} \quad . \tag{0.12-5b}$$

Nesta última expressão s é o índice de paridade, ou indicador, de f. Por definição, o índice de paridade de um elemento da álgebra é zero, se o elemento for tipo Bose, ou 1, se o elemento for tipo Fermi.

A regra da cadeia segue diretamente da definição de derivadas: se $\theta^{\alpha} = \theta^{\alpha}(\eta^{\beta})$ e $f=f(\theta(\eta))$,

$$\delta\theta^{\alpha} = \delta\eta^{\beta}\,\frac{\partial\theta^{\alpha}}{\partial\eta_{\beta}} \quad , \tag{0.12-6a}$$

e

$$\delta f = \delta\theta^{\alpha}\,\frac{\partial f}{\partial\theta^{\alpha}} = \delta\eta^{\beta}\,\frac{\partial\theta^{\alpha}}{\partial\eta^{\beta}}\,\frac{\partial f}{\partial\theta^{\alpha}} \tag{0.12-6b}$$

donde resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial \eta^\beta} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \eta^\beta} \frac{\partial f}{\partial \theta^\alpha} \quad . \tag{0.12-6c}$$

Se t é um parâmetro real e $\theta^\alpha = \theta^\alpha(t)$, então

$$\delta\theta^\alpha = \frac{d\theta^\alpha}{dt}\,\delta t \tag{0.12-7a}$$

e

$$\delta f = \delta\theta^\alpha \frac{\partial f}{\partial \theta^\alpha} = dt\,\frac{d\theta^\alpha}{dt}\frac{\partial f}{\partial \theta^\alpha} \tag{0.12-7b}$$

donde

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\theta^\alpha}{dt}\frac{\partial f}{\partial \theta^\alpha} \quad . \tag{0.12-7c}$$

A integração sobre as variáveis de Grassmann é definida como segue. Introduzindo os símbolos $d\theta', \ldots, d\theta^M$, obedecendo à relação (de anti-comutação) (0.12-1a), define-se as integrais

$$\int d\theta^\alpha = 0 \quad , \quad \int \theta^\alpha d\theta^\alpha = 1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, N) \tag{0.12-8}$$

(sem soma sobre α)

Integrais múltiplas são entendidas como integrais iteradas.

Para a integração por partes tem-se o resultado

$$\int f(\theta)\,\frac{\vec{\partial} g}{\partial\theta}\,d\theta = \int f\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\,g(\theta)\,d\theta \quad . \tag{0.12-9a}$$

Isto é tudo que necessitamos para construir um modelo clássico para partículas com spin.

Consideremos um sistema descrito pelas variáveis pares $\{q^i\}$, $i = 1, \ldots, N$, e pelas variáveis ímpares $\{\theta^\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, M$, e admitamos que a sua dinâmica é obtida do princípio de Hamilton com integral de ação

$$S = \int dt\, L\,(q, \dot{q}; \theta, \dot{\theta}, t) \quad . \tag{0.12-10}$$

Para que a teoria seja fisicamente razoável, a ação, e consequentemente a lagrangiana, deve ser uma função par. As equações de movimento que se obtêm da ação (0.12-10) são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad , \tag{0.12-11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta^\alpha} = 0 \quad . \tag{0.12-12}$$

Definindo os momentos canonicamente conjugados a q^i e θ^α por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad , \quad \Pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} \quad , \tag{0.12-13}$$

podemos construir uma hamiltoniana

$$H = \dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \Pi_\alpha - L \quad . \tag{0.12-14}$$

Note que como L é par, H também o é, e os momentos Π_α são ímpares. As equações de Hamilton se escrevem

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad , \tag{0.12-15}$$

$$\dot{\theta}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \Pi_\alpha} \, , \quad \dot{\Pi}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \theta^\alpha} \quad . \tag{0.12-16}$$

Neste ponto vamos introduzir os colchetes de Poisson na teoria. Impondo que

$$\dot{F} = \{F,H\} \quad . \tag{0.12-17}$$

pode-se mostrar que o colchete de Poisson na equação acima tem a forma geral

$$\{F,G\} \doteq \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} +$$

$$(-1)^{s_F}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial G}{\partial \Pi_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \Pi_\alpha}\frac{\partial G}{\partial \theta^\alpha}\right) \quad , \tag{0.12-18}$$

onde s_F é o indicador de F. Este colchete satisfaz a todas as propriedades algébricas dos colchetes de Poisson usuais, inclusive uma versão generalizada da identidade de Jacobi. Apresentaremos a seguir algumas propriedades dos colchetes de Poisson entre variáveis pares e ímpares. No que segue E_μ e O_μ representam funções pares e ímpares das variáveis dinâmicas.

$$\{E_1,E_2\} = -\{E_2,E_1\}$$

$$\{E_1,E_2E_3\} = E_2\{E_1,E_3\} + \{E_1,E_2\}E_3$$

$$\{E_1,\{E_2,E_3\}\} + \{E_2,\{E_3,E_1\}\} + \{E_3,\{E_1,E_2\}\} = 0$$

$$\{E,O\} = -\{O,E\}$$

$$\{O,E_1E_2\} = E_1\{O,E_2\} + \{O,E_1\}E_2$$

$$\{O_1O_2,E\} = O_1\{O_2,E\} + \{O_1,E\}O_2$$

$$\{OE_1,E_2\} = O\{E_1,E_2\} + \{O,E_2\}E_1$$

$$\{E_1E_2,O\} = E_1\{E_2,O\} + \{E_1,O\}E_2$$

$$\{E,O_1O_2\} = O_1\{E,O_2\} + \{E,O_1\}O_2$$

$$\{E_1,OE_2\} = O\{E_1,E_2\} + \{E_1,O\}E_2$$

$$\{E_1,\{E_2,O\}\} + \{E_2,\{O,E_1\}\} + \{O,\{E_1,E_2\}\} = 0$$

$$\{O_1,O_2\} = \{O_2,O_1\}$$

$$\{O_1O_2,O_3\} = O_1\{O_2,O_3\} - \{O_1,O_3\}O_2$$

$$\{EO_1,O_2\} = E\{O_1,O_2\} - \{E,O_2\}O_1$$

$$\{E,\{O_1,O_2\}\} + \{O_1,\{O_2,E\}\} - \{O_2,\{E_1O_1\}\} = 0$$

$$\{O_1,\{O_2,O_3\}\} + \{O_2,\{O_3,O_1\}\} + \{O_3,\{O_1,O_2\}\} = 0$$

Os colchetes de Dirac são definidos do mesmo modo que no caso usual,

$$\{F,G\}^* = \{F,G\} - \{F,\chi_m\}C^{nm}\{\chi_n,G\} \quad , \qquad (0.12\text{-}19)$$

e pode-se mostrar que satisfaz as mesmas propriedades algébricas que os colchetes de Poisson (0.12-18).

A matriz $\mathbb{C}^{-1} = (C^{nm})$ exibe algumas peculiaridades no caso em que alguns dos vínculos de segunda classe χ_m são funções ímpares. Pode-se mostrar que se o conjunto $\{\chi_m\}$ é de segunda classe a matriz $\mathbb{C}^{-1}$ existe mas, no caso mencionado acima, isto não implica que o número de vínculos de segunda classe é par. Como conseqüência deste fato, a dimensionalidade do espaço de fase pode ser ímpar.

Passemos à aplicação deste formalismo a um modelo simples. Consideremos uma partícula livre não-relativística com coordenadas de posição $x^i(t)$, $i = 1,2,3$. Para descrever os graus de liberdade de spin vamos associar com a partícula três variáveis reais anticomutativas $\theta^i = \theta^i(t)$. Admitiremos que estas variáveis de comportam como um vetor sob o grupo das rotações espaciais O(3).

Para construir a parte cinética da lagrangiana lembremos que esta deve ser uma função par, e como os Θ são ímpares, não podemos usar $\dot{\theta}^2$ como termo cinético. No entanto, temos agora uma nova possibilidade que não existe no caso usual que é o termo $\theta.\dot{\theta}$, que não é uma derivada total. Assim, escreveremos a lagrangiana para a partícula livre não relativística com spin como

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{i}{2} \dot{\vec{\theta}}.\vec{\theta} \quad . \qquad (0.12\text{-}20)$$

As equações de movimento que se obtêm desta lagrangiana são invariantes sob rotações e também sob transformações de Galileu, se admitirmos que as variáveis θ são invariantes sob estas últimas. É importante observar que a lagrangiana (0.12-20) exibe uma característica geral própria dos sistemas tipo Fermi, que é a linearidade na derivada temporal.

Para passar para o formalismo hamiltoniano vamos definir os momentos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i \quad , \qquad (0.12\text{-}21)$$

$$\Pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^k} = \frac{i}{2}\theta_k \quad . \qquad (0.12\text{-}22)$$

Os colchetes de Poisson fundamentais não nulos são

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i{}_j \quad , \qquad (0.12\text{-}23)$$

$$\{\theta^k, \Pi_\ell\} = \delta^k{}_\ell \quad . \qquad (0.12\text{-}24)$$

As equações (0.12-22) são vínculos primários da teoria,

$$\chi_k = \Pi_k - \frac{i}{2}\theta_k \approx 0 \qquad (0.12\text{-}25)$$

e são consequências da linearidade de L em $\dot{\theta}$. A hamiltoniana total se escreve

$$H_T = H_c + \lambda^k \chi_k =$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \lambda^k \chi_k \quad , \qquad (0.12\text{-}26)$$

onde λ^k são multiplicadores de Lagrange, funções ímpares. As condições de consistência

$$\dot{\chi}_k = \{\chi_k, H\} = 0$$

conduzem a $\lambda^k = 0$. Portanto, não há vínculos secundários e os χ_k são de segunda classe:

$$\{\chi_i, \chi_k\} = i\,\delta_{ik} \qquad (0.12\text{-}27)$$

(Note que $\det||\{\chi_i, \chi_k\}|| \neq 0$, e portanto não há combinações lineares dos χ que sejam de primeira classe.)

Podemos agora introduzir colchetes de Dirac baseados nos vínculos de segunda classe χ_k; feito isto, podemos considerar as equações (0.12-25) como equações fortes, $\chi_k = 0$, e eliminar os momentos π_k da teoria, que fica apenas com as variáveis x^i e θ^i. A matriz inversa de $C = (\{\chi_i, \chi_k\})$ é $(C^{-1}) = (-\delta_{ik})$ de modo que os colchetes de Dirac ficam sob a forma

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + i\{A,\chi_i\}\{\chi_i,B\} \quad . \qquad (0.12\text{-}28)$$

Em particular,

$$\{\theta^i,\theta^k\}^* = i\delta^{ik} \quad . \qquad (0.12\text{-}29)$$

Passemos agora a construção da integral de ação da partícula. Lembremos que as equações de movimento são obtidas por extremização da integral de ação por pequenas deformações da história da partícula e que estas deformações devem obedecer à condições de contorno cujo número é igual ao número de constantes de integração da solução geral das equações de movimento. Para as variáveis pares $x^i(t)$, impomos as condições usuais que os x^i sejam fixos nos instantes inicial e final. Para as variáveis ímpares não podemos impor uma condição análoga, porque isto significaria impor duas condições de contorno para uma equação diferencial de primeira ordem. Como consequência, a ação para o sistema não pode ser tomada apenas como a integral da lagrangiana no tempo, mas deve ser suplementada por um termo de fronteira. Vamos simplesmente exibir a integral de ação correta e mostrar que o princípio de ação é satisfatório.

Escreveremos a integral de ação como

$$S = \int dt\, L + \frac{i}{2}\, \vec{\theta}(t_1) . \vec{\theta}(t_2) \ , \qquad (0.12\text{-}30)$$

e afirmaremos que as soluções das equações de movimento são as curvas que não produzem variações de S sob as condições:

$$\delta\vec{x}(t_1) = 0 \ , \quad \delta\vec{x}(t_2) = 0 \ , \qquad (0.12\text{-}31)$$

$$\delta\vec{\theta}(t_1) = + \delta\vec{\theta}(t_2) = 0 \ . \qquad (0.12\text{-}32)$$

Para verificar que este princípio de ação é satisfatório, devemos verificar se: (I) a extremização de S sob as condições (0.12-31,32) conduz as equações de movimento sem restrições adicionais; (II) as equações de movimento tem solução única, consistente com valores arbitrários dados de $\vec{x}(t_1)$, $\vec{x}(t_2)$ e $\vec{\theta}(t_1) + \vec{\theta}(t_2)$.

Como a dependência da ação em $\vec{x}$ é a usual, vamos nos deter apenas na dependência em $\vec{\theta}$. Por variações em $\vec{\theta}(t)$ encontra-se

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, i\, \dot{\vec{\theta}}\cdot\delta\vec{\theta} - \frac{i}{2}\left[\delta\vec{\theta}(t) + \delta\vec{\theta}(2)\right]\cdot\left[\vec{\theta}(1) - \vec{\theta}(2)\right]$$

onde usamos a abreviação $\vec{\theta}(t_1) = \vec{\theta}(1)$, etc. O termo de fronteira se anula devido às condições (0.12-32), e a extremização de S conduz a

$$\dot{\vec{\theta}} = 0 \quad , \qquad (0.12\text{-}33)$$

de modo que a condição (I) fica satisfeita.

Suponhamos agora que $\vec{\theta}(1) + \vec{\theta}(2)$ é dado como $2\vec{\xi}$, por exemplo. Neste caso existe uma única solução de (0.12-33) compatível com esta condição, $\vec{\theta} = \vec{\xi}$ para todo t, de modo que a condição (II) fica também satisfeita.

Tendo construido a integral de ação podemos obter as leis de conservação associadas com o sistema. A ação (0.12-30) é invariante por rotações, translações e transformações de Galileu. Estas duas últimas não afetam as variáveis de Fermi de modo que vamos analisar apenas o caso de rotações. Sob estas transformações tem-se

$$\delta x^i = \omega^i{}_j x^j \quad , \tag{0.12-34a}$$

$$\delta p_i = \omega_i{}^j p_j \quad , \tag{0.12-34b}$$

$$\delta \theta^i = \omega^i{}_j \theta^j \quad , \tag{0,12-34c}$$

com $\omega_{ij} = - \omega_{ji}$. Supondo que as equações de movimento são válidas, a variação na ação se escreve

$$\delta S = \delta\vec{x}.\vec{p}\Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{i}{2}\,\omega_{jk}\Big[\theta^j(2)\theta^k(2) - \theta^j(1)\theta^k(1)\Big] \quad ,$$

donde se obtêm as constantes do movimento

$$J_{ik} = L_{ik} + S_{ik} \; , \tag{0.12-35}$$

onde

$$L_{ik} = x_i p_k - x_k p_i \tag{0.12-36}$$

e

$$S_{ik} = i\,\theta_i \theta_k \quad . \tag{0.12-37}$$

A variável dinâmica J_{ik} é o gerador de rotações e deve ser identificada como o momento angular total do sistema. Este gerador se decompõe em uma parte orbital L_{ik} que não é invariante por translações ou transformações de Galileu, e uma parte intrínseca, ou de Spin S_{ik}, que é invariante sob estas transformações. Em termos de colchetes de Dirac L_{ik} e S_{ik} obedecem ã algebra usual. Por exemplo, definindo-se o vetor de spin

$$S_i = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}S_{jk} \quad , \tag{0.12-38}$$

tem-se que

$$\{S_i, S_j\}^* = \varepsilon_{ijk}S_k \quad . \tag{0.12-39}$$

Neste ponto ẽ importante observar que se omitissemos o termo de superfície na integral de ação o procedimento acima conduziria a uma definição do spin com sinal oposto ao que encontramos. Sob o ponto de vista de leis de conservação isto não seria importante porque, para uma partícula livre, L_{ik} e S_{ik} são conservados independentemente. Mas se interações estiverem presentes então o sinal tem importância, porque ẽ a soma de L_{ik} com S_{ik} que se conserva. Agora, se queremos identificar J_{ik} como o gerador de rotações então o sinal se torna importante mesmo para a partícula livre: com o sinal de S_{ik} trocado J_{ik} não gera as transformações (0.34a,b,c).

A questão que se põe agora ẽ: a que sistemas quântico corresponde o sistema clãssico descrito pela ação (0.12-35)? Esta questão pode ser respondida sem dificuldades esboçando-se a quantização canônica do sistema.

A prescrição para converter as variáveis dinâmicas da teoria clãssica em operadores ẽ

$$\{A,B\}^* \longrightarrow (i\hbar)^{-1}[\hat{A},\hat{B}]_{\pm} ,$$

onde o sinal + identifica o anticomutador (a ser usado quando A e B são variáveis de Fermi) e - identifica o comutador (a ser usado quando pelo menos A ou B é uma variável de Bose).

Aplicando esta prescrição a (0.12-29), obtém-se

$$[\hat{\theta}^i,\hat{\theta}^j] = \hbar\delta^{ij} ,$$

donde se conclui que se tem uma álgebra de Clifford. Em termos de operadores atuando em um espaço vetorial, sabemos que existe apenas uma representação irredutível desta álgebra,

$$\hat{\theta}^i = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2}\sigma^i ,$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli.

O vetor de spin quântico fica dado por

$$\hat{S}_i = -\frac{i}{2}\,\varepsilon_{ijk}\hat{\theta}^j\hat{\theta}^k =$$

$$= -\frac{\hbar}{4}\,i\varepsilon_{ijk}\sigma_j\sigma_k = i\,\frac{\hbar}{2}\,\sigma_i .$$

Desta expressão conclui-se que a teoria descreve uma partícula não relativística de spin 1/2.

Passemos à generalização relativística deste modelo. Ingenuamente, poderíamos tentar a generalização fazendo simplesmente $\theta^k \to \theta^\mu$, μ, = 0, 1, 2, 3, e manter a forma

(0.12-30) da integral de ação. No entanto, este procedimento simplesmente aumenta o número de graus de liberdade de Fermi e não conduz a um modelo que possa ser interpretado como o sistema clássico correspondente a uma partícula relativística de spin 1/2.

Para obter a descrição clássica correta vamos partir das equações quânticas para a partícula com spin, a equação de Dirac. Este procedimento nos parece o mais convincente, já que aparentemente não existem argumentos puramente clássicos mais simples. Por outro lado, este procedimento nos proporciona uma habilidade que pode ser usada em outros casos quando a descrição quântica não é bem compreendida e um análogo clássico é desejável como ponto de partida. Além disto, a idéia de supersimetria emergirá diretamente do limite clássico da equação de Dirac, o que nos parece o resultado mais valioso desta abordagem.

Partamos então da equação de Dirac

$$(\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi = 0 \quad , \qquad (0.12\text{-}40)$$

que implica na equação de Klein-Gordon

$$(-\hbar^2\,\Box + m^2)\psi = 0 \quad . \qquad (0.12\text{-}41)$$

Vamos introduzir os operadores

$$\hat{\theta}^{\mu} = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2}\gamma_5\gamma^{\mu} \quad , \qquad (0.12\text{-}42)$$

$$\hat{\theta}_5 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \gamma_5 \quad , \tag{0.12-43}$$

que obedecem às relações de anticomutação

$$[\hat{\theta}^\mu, \hat{\theta}^\nu]_+ = -\hbar\, \eta^{\mu\nu} \quad , \tag{0.12-44a}$$

$$[\hat{\theta}_5, \hat{\theta}_5]_+ = \hbar \quad , \tag{0.12-44b}$$

e lembremos que

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\, \delta^\mu{}_\nu \tag{0.12-45}$$

com

$$\hat{p}_\mu = \frac{\hbar}{i}\, \partial_\mu \quad , \tag{0.12-46}$$

na representação de coordenadas.

O ponto chave na passagem ao limite clássico é interpretar as equações (0.12-40,41) como dois vínculos de primeira classe que atuam sobre os estados permitidos ao sistema. Assim, vamos escrever aquelas equações sob a forma

$$(\hat{\theta}^\mu \hat{p}_\mu + m\, \hat{\theta}_5)\psi = 0 \quad , \tag{0.12-47}$$

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + m^2)\psi = 0 \quad . \tag{0.12-48}$$

Observe que (0.12-47) é homogênea nos operadores $\hat{\theta}$.

A teoria clássica é formulada em termos de quatro pares de variáveis (reais) de Bose x^μ, p_μ, e cinco variáveis (reais) de Fermi θ^μ, θ_5, que satisfazem aos colchetes de Dirac (*)

$$\{\theta^\mu,\theta^\nu\}^* = i\,\eta^{\mu\nu} \quad , \tag{0.12-49a}$$

$$\{\theta_5,\theta_5\}^* = i \tag{0.12-49b}$$

$$\{x^\mu,p_\nu\}^* = \delta^\mu{}_\nu \tag{0.12-49c}$$

A dinâmica do sistema está contida nos análogos clássicos das equações (0.12-47,48), os vínculos de primeira classe

$$\mathcal{S} = \theta^\mu p_\mu + m\,\theta_5 \approx 0 \ . \tag{0.12-50}$$

$$\mathcal{H} = p^2 + m^2 \approx 0 \quad , \tag{0.12-51}$$

que obedecem a álgebra

$$\{\mathcal{S},\mathcal{S}\}^* = i \quad , \tag{0.12-52a}$$

$$\{\mathcal{S},\mathcal{H}\}^* = 0 \quad , \tag{0.12-52b}$$

$$\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}^* = 0 \quad . \tag{0.12-52c}$$

(*) Continuamos a usar a notação { , }*, para manter contato com os resultados do caso não relativístico e com a ação que será construída a seguir.

A integral de ação hamiltoniana pode ser obtida sem dificuldades. De fato, como sabemos que a dinânica da teoria está contida nos vínculos (0.12-50,51), a hamiltoniana efetiva do sistema será uma combinação linear de com multiplicadores arbitrários. Além disto, a estrutura do termo cinético na ação é fixada pelos colchetes (0.12-49) que, de acordo com o que já sabemos do caso não relativístico, corresponde a um termo da forma $\dot{x}p + \frac{i}{2}\dot{\theta}.\theta$. Segue então que a integral de ação com os termos de fronteira é

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big[\dot{x}^{\mu} p_{\mu} + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^{\mu}\theta_{\mu} + \dot{\theta}_5\theta_5) - N(\tau)(p^2 + m^2) - iM(\tau)(\theta^{\mu}p_{\mu} + m\theta_5)\Big] + \frac{i}{2}(\theta^{\alpha}(1)\theta_{\alpha}(2) + \theta_5(1)\theta_5(2)) \quad , \quad (0.12\text{-}53)$$

onde $N(\tau)$ e $M(\tau)$ são multiplicadores de Lagrange reais, par e impar, respectivamente.

As equações de movimento são obtidas do princípio da ação com as condições

$$\delta x^{\mu}(1) = 0 \quad , \quad \delta x^{\mu}(2) = 0 \quad , \quad (0.12\text{-}54a)$$

$$\delta\theta^{\mu}(1) + \delta\theta^{\mu}(2) = 0 \quad , \quad (0.12\text{-}54b)$$

$$\delta\theta_5(1) + \delta\theta_5(2) = 0 \quad , \quad (0.12\text{-}54c)$$

A forma lagrangiana da integral de ação pode ser obtida sem dificuldades, bastando para isto usar as equações

$$\frac{\delta S}{\delta p_\mu} = 0 \quad , \quad \frac{\delta S}{\delta N} = 0 \quad ,$$

para eliminar p_μ em favor de $\dot{x}^\mu$. Obtêm-se

$$\dot{x}^\mu - 2Np^\mu - iM\theta^\mu = 0 \qquad (0.12.55)$$

e

$$p^2 + m^2 = 0 \quad ,$$

donde segue que

$$N(\tau) = \frac{1}{2m}\sqrt{-z^2} \qquad (0.12\text{-}56a)$$

$$p_\mu = \frac{m\, z_\mu}{\sqrt{-z^2}} \qquad (0.12\text{-}56b)$$

com

$$z^\mu = \dot{x}^\mu - iM\theta^\mu \quad . \qquad (0.12\text{-}57)$$

Substituição destes resultados em (0.12-53) conduz a

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-m\sqrt{-z^2} + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^\mu\theta_\mu + \dot{\theta}_5\theta_5) - iMm\theta_5\right]$$

$$+ \frac{i}{2}(\theta^\alpha(1)\theta_\alpha(2) + \theta_5(1)\theta_5(2)) \quad . \qquad (0.12\text{-}58)$$

Extremização de S com relação a x^μ, θ^μ, θ_5, M, sob as condições (0.12-54), conduz às equações de movimento corretas para x^μ, θ^μ e θ_5.

Consideremos as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe (0.12-50,51). De modo geral,

$$\delta F = \{F, n\mathcal{H} + iv\mathcal{S}\} .$$

Aplicando a equação acima às variáveis dinâmicas da teoria encontra-se

$$\delta x^\mu = 2np^\mu + iv\theta^\mu \quad , \qquad (0.12\text{-}59a)$$

$$\delta \theta^\mu = vp^\mu \quad , \qquad (0.12\text{-}59b)$$

$$\delta p_\mu = 0 \quad , \qquad (0.12.59c)$$

$$\delta \theta_5 = 0 \quad . \qquad (0.12\text{-}59d)$$

Suplementando estas equações com

$$\delta M = \dot{v} \quad , \quad \delta N = \dot{u} + ivM, \qquad (0.12\text{-}60)$$

verifica-se sem dificuldades que estas transformações deixam invariante a ação no espaço de configurações e, portanto, definem uma transformação de gauge neste espaço. De (0.12-59a, b) vê-se que as transformações geradas por S misturam as variáveis tipo Bose com as variáveis tipo Fermi. Por esta razão diz-se que $\mathcal{S}$ é o gerador de transformações de supersimetria.

Como última etapa na construção da teoria precisamos definir e obter uma expressão para o spin da partícula. Neste sentido, seguindo o que foi feito no caso não relativístico, vamos definir o comportamento das variáveis dinâmicas sob transformações de Poincaré :

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + \varepsilon^{\mu} \quad , \qquad (0.12\text{-}61a)$$

$$\delta p_{\mu} = \omega_{\mu}{}^{\nu} p_{\mu} \quad , \qquad (0.12\text{-}61b)$$

$$\delta \theta^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} \theta^{\nu} \quad . \qquad (0.12\text{-}61c)$$

$$\delta \theta_{5} = 0 \quad . \qquad (0.12\text{-}61d)$$

Segue do teorema de Noether aplicado a ação (0.12-53) que

$$0 = \delta S = \varepsilon^{\mu}(p_{\mu}(2) + p_{\mu}(1) + \tfrac{1}{2}\, \omega^{\mu\nu} \left[J_{\mu\nu}(2) - J_{\mu\nu}(1) \right] \qquad (0.12\text{-}62)$$

onde

$$J^{\mu\nu} = x^{\mu} p^{\nu} - x^{\nu} p^{\mu} + i \theta^{\mu} \theta^{\nu} \qquad (0.12\text{-}63)$$

são os geradores de rotações de Lorentz, que identificamos com o momento angular total da partícula. Juntamente com p_{μ} estes geradores obedecem à álgebra do grupo de Poincaré.

Obeserve que como a hamiltoniana é uma combinação linear dos vínculos com coeficientes arbitrários, o fato de $J_{\mu\nu}$ e p_{μ} serem quantidades conservadas pode ser expresso dizendo-se que estas quantidades tem colchetes de Dirac nulos com $\mathcal{S}$ e $\mathcal{H}_0$. É claro que, em particular, as quantidades conservadas são invariantes supersimétricos.

O spin da partícula será definido como a projeção do momento angular total no subespaço ortogonal a p_μ. Esta definição é satisfatória quando a partícula tem massa diferente de zero, porque o spin fica definido sem ambigüidades e tem as seguintes propriedades: (1) é conservado para a partícula livre e, em particular, é invariante por transformações de supersimetria; (2) obedece a álgebra do grupo de Lorentz; (3) é invariante por translações (propriedade intrínseca).

Se a partícula tem massa nula esta definição se torna ambigua e não é satisfatória. Mais adiante daremos alguns detalhes sobre este caso.

Como foi dito acima, o tensor de spin é definido por

$$S^{\mu\nu} = \mathcal{U}^{\mu}{}_{\rho}\,\mathcal{U}^{\nu}{}_{\lambda}\,J^{\rho\lambda} \tag{0.12-64}$$

onde $\mathcal{U}^{\mu}{}_{\rho}$ é o operador de projeção no subespaço ortogonal a p_μ:

$$\mathcal{U}^{\mu}{}_{\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho} + \frac{1}{m^2}\, p^{\mu} p_{\rho} \quad . \tag{0.12-65}$$

Como $\mathcal{U}$ é definido apenas em termos de p_μ, e tanto p_μ como $J^{\rho\lambda}$ são conservados, segue que $S^{\mu\nu}$ é conservado. Isto significa que os colchetes de $S^{\mu\nu}$ com $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{S}$ são nulos, de modo que, em particular, o tensor de spin é invariante supersimétrico.

Além disto, como

$$\mathcal{U}^{\mu}{}_{\rho}p_{\mu} \approx 0 \quad , \tag{0.12-66}$$

segue que $S^{\mu\nu}$ é invariante por translações. Em outras palavras,

$$\{S^{\mu\nu}, p_{\alpha}\}^{*} = 0 \quad . \tag{0.12-67}$$

Finalmente, é fácil verificar que

$$\{S^{\mu\nu}, S^{\alpha\beta}\}^{*} \approx C^{\mu\nu\alpha\beta}_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho} \tag{0.12-68}$$

onde $C^{\mu\nu\alpha\beta}_{\lambda\rho}$ são as constantes de estrutura do grupo de Lorentz. (O tensor $\mathcal{U}^{\mu}{}_{\rho}$ é um operador de projeção somente quando $p^2 + m^2 = 0$, isto é, quando o vínculo $\mathcal{H} = 0$ é válido. Portanto, as definições (0.12-64) e as equações (0.12-66,67,68) são válidas no sentido fraco. Isto é suficiente para os nossos objetivos).

Substituindo a expressão (0.12-69) de $J^{\rho\lambda}$ na definição (0.12-66) do tensor de spin e usando os vínculos $\mathcal{H} = 0$ e $\mathcal{S} = 0$ encontramos

$$S^{\mu\nu} \approx i\theta^{\mu}\theta^{\nu} + \frac{i}{m}\,\theta_5(\theta^{\mu}p^{\nu} - \theta^{\nu}p^{\mu}) \quad . \tag{0.12-69}$$

Verifica-se sem dificuldades que

$$S^{\mu\nu}p_{\mu} \approx 0 \tag{0.12-70}$$

e

$$S^{\mu\nu}\theta_\nu \approx 0 \quad . \tag{0.12-71}$$

Como consequência tem-se também que

$$S^{\mu}{}_{\nu}\dot{x}^{\nu} \approx 0 \quad . \tag{0.12-72}$$

É importante observar que, como consequência de (0.12-55), $\dot{x}^\mu$ não é proporcional a p_μ. No entanto, apesar deste fato, $S^{\mu\nu}$ é ortogonal tanto a p_ν como a $\dot{x}^\nu$, e estas condições seguem diretamente do princípio da ação.

No caso de partículas de massa zero não podemos definir o spin da partícula seguindo a mesma linha de raciocínio que no caso massivo, porque neste caso não existe um sistema de repouso para a partícula. Na verdade não podemos construir, de maneira não-ambígua, uma projeção do momento angular total na direção ortogonal a p, que agora é um vetor nulo.

Podemos construir uma base local com os vetores (p, k, $e_{(1)}$, $e_{(2)}$), obedecendo às relações

$$p.k = 1,\ k^2 = 0,\ p.e_{(i)} = 0,\ k.e_{(i)} = 0,\ e_{(i)}.e_{(j)} = \delta_{ij} \ ,$$

e definir um escalar Σ, que é a projeção de $J^{\alpha\beta}$ no plano ($e_{(1)}$, $e_{(2)}$):

$$\Sigma = J^{\mu\nu}e^{(1)}_{\mu}e^{(2)}_{\nu} = i\varepsilon_{ijk}\theta^j\theta^k \frac{p_i}{|\vec{p}|} \quad .$$

O escalar Σ é invariante por translações e representa a projeção de $J^{\mu\nu}$ na direção do movimento em qualquer referencial de Lorentz. Em outras palavras, Σ é a helicidade da partícula. A relação entre a helicidade e o vetor de spin é

$$S_\mu = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}p^\sigma \approx \Sigma\, p_\mu \ . \qquad (0.12\text{-}73)$$

Este resultado nos diz apenas que Σ é a componente do spin na direção do movimento, e não significa que o spin da partícula (sem massa) tem a direção do momento.

0.12.2 A interação com campos de gauge

Consideremos incialmente o campo eletromagnético. A equação de Dirac se escreve

$$\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi + m\psi = 0 \quad . \qquad (0.12\text{-}74)$$

Introduzindo as variáveis de Grassmann, obtemos os vínculos de primeira classe

$$\mathcal{S} = \theta^\mu \mathcal{P}_\mu + m\theta_5 \approx 0 \qquad (0.12\text{-}75)$$

onde

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu - eA_\mu \quad . \qquad (0.12\text{-}76)$$

Note que p_{μ} é o momento conjugado com x^{μ}:

$$\{x^{\mu}, p_{\nu}\}^{*} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \qquad (0.12\text{-}77)$$

O momento $\mathcal{P}_{\mu}$ satisfaz a

$$\{\mathcal{P}_{\mu}, \mathcal{P}_{\nu}\}^{*} = eF_{\mu\nu} \qquad (0.12\text{-}78)$$

como pode ser verificado diretamente usando a definição (0.12-76). Usando (0.12-78) encontra-se que $\mathcal{S}$ satisfazem às relações (0.12-52a-c) com

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}_{\mu}\mathcal{P}^{\mu} + m^{2} - ieF_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu} . \qquad (0.12\text{-}79)$$

A integral de ação pode ser escrita como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big[\dot{x}^{\nu}\ {}_{\mu} + \tfrac{i}{2}(\dot{\theta}^{\mu}\theta_{\mu} + \dot{\theta}_{5}\theta_{5}) + eA_{\mu}\dot{x}^{\mu}$$
$$- (N\mathcal{H} + iM\mathcal{S})\Big] . \qquad (0.12\text{-}80)$$

A equação de movimento para uma variável dinâmica $F(\tau)$ é

$$\dot{F} = \{F, H\}^{*}$$

com a hamiltoniana dada por

$$H = N(\tau)\mathcal{H} + iM(\tau)\mathcal{S} \approx 0 , \qquad (0.12\text{-}81)$$

onde $N(\tau)$ e $M(\tau)$ são funções arbitrárias do parâmetro τ. A equação de movimento para θ_5 resulta ser

$$\dot{\theta}_5 - mM = 0 \quad . \tag{0.12-82}$$

Este resultado nos diz que a variável θ_5 pode tomar qualquer valor durante a evolução do sistema, fazendo-se uma escolha apropriada de $M(\tau)$. Esta arbitrariedade pode ser usada para fazer uma escolha do (super) gauge,

$$\theta_5(\tau) \approx 0 \tag{0.12-83}$$

de modo que

$$M(\tau) \approx 0 \quad . \tag{0.12-84}$$

Assim, trabalhando-se neste gauge pode-se omitir o termo em M da hamiltoniana.

Temos ainda a liberdade de fixar a parametrização da linha de universo da partícula. A escolha óbvia é, no super-gauge $\theta_5 \approx 0$, tomar τ como o tempo próprio:

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -1 \tag{0.12-85}$$

Esta condição pode ser implementada por uma escolha da função $N(\tau)$ que, deste modo, não fica mais arbitrária. Da equação de movimento para x^μ segue que

$$\dot{x}^\mu = 2N\mathcal{P}^\mu \quad , \tag{0.12-86}$$

que combinada com (0.12-85) e (0.12-79) conduz a

$$N(\tau) = \frac{1}{2}\left(m^2 - eF_{\mu\nu}s^{\nu\mu}\right)^{-1/2} \qquad (0.12\text{-}87)$$

onde

$$s^{\mu\nu} = i\theta^{\mu}\theta^{\nu} \qquad (0.12\text{-}88)$$

é o tensor de spin.

Observe que (0.12-87) foi obtida sem a fixação do gauge para as variáveis dinâmicas. Apesar disto ser permitido para se obter as equações de movimento, este procedimento tem a desvantagem de não permitir a eliminação de nenhuma variável dinâmica da teoria.

A expressão (0.12-87) é bem definida porque a quantidade sob o sinal da raiz quadrada não pode se anular, já que cada um dos termos está num setor diferente da álgebra. Temos então que

$$N(\tau) = \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{e}{m} F_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{e}{2m^2} F_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - \frac{e^2}{8m^4} (F_{\mu\nu}s^{\mu\nu})^2\right)$$

$$\approx \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{e}{2m^2} F_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right). \qquad (0.12\text{-}89)$$

A segunda igualdade acima vem do fato de que um produto de mais de quatro variáveis de Fermi se anula identicamente, enquanto que a igualdade fraca é consequência do vínculo $\mathcal{S} = \theta^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} \approx 0$

que deixa apenas três das variáveis θ independentes.

Usando (0.12-87) a equação (0.12-86) assume a forma

$$\dot{x}^{\alpha} \approx \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{e}{2m^2} F_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\mathcal{P}^{\alpha} \qquad (0.12\text{-}90)$$

Finalmente, admitindo que as equações de Maxwell $\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$ são válidas, obtemos as seguintes equações de movimento para as variáveis dinâmicas

$$\dot{x}^{\alpha} \approx \frac{e}{m}\left(1 + \frac{e}{2m^2} F_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho}\right)F^{\alpha}{}_{\mu}\mathcal{P}^{\rho} + \frac{e}{2m}(\partial^{\alpha}F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} \quad , \qquad (0.12\text{-}91)$$

$$\dot{\theta}^{\alpha} \approx \frac{e}{m}\left(1 + \frac{e}{2m^2} F_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho}\right)F^{\alpha}{}_{\mu}\theta^{\mu} \quad . \qquad (0.12\text{-}92)$$

$$\dot{S}^{\alpha\lambda} \approx \frac{e}{m}\left(F_{\mu}{}^{\alpha}S^{\mu\lambda} + F_{\mu}{}^{\lambda}S^{\alpha\mu}\right) \quad , \qquad (0.12\text{-}93)$$

$$\dot{S}^{\alpha} \approx \frac{e}{m} F^{\alpha}{}_{\mu} S^{\mu} \quad , \qquad (0.12\text{-}94)$$

$$\ddot{x}^{\alpha} \approx \frac{e}{m}\left(1 + \frac{e}{2m^2} F_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho}\right)F^{\alpha}{}_{\mu}\dot{x}^{\mu} + \frac{e}{2m^2}(\partial^{\alpha}F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} \qquad (0.12\text{-}95)$$

$$+ \frac{e}{2m^3}(F_{\mu\nu}S^{\mu\nu})\mathcal{P}^{\alpha} \quad .$$

Vê-se de (0.12-95) que a presença do spin introduz modificações na força de Lorentz, devidas ao acoplamento entre o spin e o campo eletromagnético e suas derivadas primeiras. O aparecimento do gradiente do campo eletromagnético é uma indicação de que, num sentido físico, a partícula tem "extensão". Por outro lado, a equação de movimento para o spin, equação (0.12-94), é exatamente a equação de movimento para uma partícula com razão giromagnética $g = 2$. De fato, no referencial de repouso, $x^i = 0$, temos que

$$\frac{dS^i}{dt} = \frac{e}{m} F^i{}_j S^j$$

o que significa que o momento magnético é

$$\vec{\mu} = \left(2 \frac{e}{2m} \vec{S}\right)$$

de modo que a razão giromagnética é igual a dois.

A generalização do que foi feito acima para o caso de um campo de gauge não abeliano não apresenta nenhuma dificuldade. A equação de Dirac em presença do campo $\vec{A}_\mu = A^a{}_\mu T_a$,

$$\gamma^\mu(\partial_\mu - igA^a{}_\mu T_a)\psi + m\psi = 0 \quad , \qquad (0.12\text{-}96)$$

conduz aos vínculos de primeira classe

$$\mathcal{S} = \theta^\mu(p_\mu - gA^a{}_\mu T_a) + m\theta_5 \approx 0 \quad , \qquad (0.12\text{-}97)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu + m^2 - igF^a_{\mu\nu} T_a \theta^\mu \theta^\nu \quad , \qquad (0.12\text{-}98)$$

com

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu - gA^a{}_\mu Ta \quad . \qquad (0.12\text{-}99)$$

Estes vínculos formam uma álgebra fechada, a mesma do caso anterior, equações (0.12-52, a,b,c).

A integral de ação para o sistema se escreve

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^{\mu}\sigma_{\mu} + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^{\mu}\theta_{\mu} + \dot{\theta}_5\theta_5) + gA^a{}_{\mu}T_a\dot{x}^{\mu} - (N(\tau)\mathcal{H} + iM(\tau)\mathcal{S}) \right] . \qquad (0.12\text{-}100)$$

As equações de movimento podem ser obtidas do mesmo modo que no caso do eletromagnetismo.

Nos interessa generalizar este modelo para incluir o spin isotópico da partícula como variável dinâmica da teoria. Neste sentido vamos introduzir um novo conjunto de variáveis de Grassmann, $\{\zeta^a\}$, a = 1, ...,N, que pertencem a uma representação do grupo de gauge G, cujos geradores infinitesimais são T_a.

Já sabemos como construir o termo cinético correspondente as variáveis ζ^a, que deve ser da forma $i\zeta^a\dot{\zeta}_a$. Precisamos construir a parte de interação com o campo de gauge, e para isto vamos examinar a invariância de gauge de uma teoria cuja integral de ação é

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L_o(\dot{x},\zeta,\dot{\zeta}) \quad . \qquad (0.12\text{-}101)$$

Suponhamos que a lagrangiana na expressão acima é invariante pela transformação global

$$\delta\zeta = -\ i(\omega^b T_b)\zeta \quad . \qquad (0.12\text{-}102)$$

Lembrando que

$$\Pi_a = \frac{\partial L_o}{\partial \dot{\zeta}^a} \qquad (0.12\text{-}103)$$

e

$$\{\zeta^a, \Pi_b\} = -\delta^a{}_b \qquad (0.12\text{-}104)$$

segue que os geradores da transformação (0.12-102) são dados por

$$I_a = i\,\Pi\, T_a \zeta \quad . \qquad (0.12\text{-}105)$$

De fato, verifica-se facilmente que

$$\delta\zeta = \{\zeta, \omega^b I_b\} \quad . \qquad (0.12\text{-}106)$$

As transformações locais correspondentes a (0.12-102) se escrevem

$$\delta\zeta = -\,i(\omega^b(x) T_b)\zeta \quad . \qquad (0.12\text{-}107)$$

Para tornar a lagrangiana invariante por estas transformações segue-se o procedimento usual de introduzir os potenciais de gauge $A^a{}_\mu(x)$ cuja lei de transformação é

$$\delta A^a{}_\mu = C^a_{bc}\omega^b A^c{}_\mu + \frac{1}{g}\,\partial_\mu \omega^a \quad . \qquad (0.12\text{-}108)$$

Denotando por $L(\dot{x}, \zeta, \dot{\zeta}; A, \partial A)$ a nova lagrangiana invariante de gauge, deve-se ter

$$0 = \delta L = \delta\dot{\zeta}\,\frac{\partial L}{\partial\dot{\zeta}} + \delta\zeta\,\frac{\partial L}{\partial\zeta} + \delta A^a{}_\mu\,\frac{\partial L}{\partial A^a{}_\mu} +$$

$$+ \delta(\partial_\nu A^a{}_\mu) \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^a{}_\mu)} \quad . \qquad (0.12\text{-}109)$$

Usando (0.12-107) e (0.12-108) encontra-se

$$0 = \delta L = \omega^a \left[\dot{I}_a + C^c_{ab} A^b{}_\mu \frac{\partial L}{\partial A^c{}_\mu} + C^c_{ab} \partial_\nu A^b_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^c{}_\mu)} \right.$$

$$+ \partial_\mu \omega^a \left[\dot{x}^\mu I_a + \frac{1}{g} \frac{\partial L}{\partial A^a{}_\mu} + C^c_{ab} A^b{}_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A^c{}_\nu)} \right]$$

$$+ \partial_\mu \partial_\nu \omega^a \left(\frac{1}{g} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A^a{}_\nu)} \right) .$$

Como esta equação deve ser válida para qualquer $\omega^a(x)$ segue que as seguintes condições devem ser satisfeitas :

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^a{}_\mu)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A^a{}_\nu)} = 0 \quad , \qquad (0.12\text{-}109a)$$

$$\dot{x}^\mu I_a + \frac{1}{g} \frac{\partial L}{\partial A^a{}_\mu} + C^c_{ab} A^b{}_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A^c{}_\nu)} = 0 \quad , \qquad (0.12\text{-}109b)$$

$$\dot{I}_a + C^c_{ab} A^b{}_\mu \frac{\partial L}{\partial A^c{}_\mu} + C^c_{ab} \partial_\nu A^b{}_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^c{}_\mu)} = 0. \qquad (0.12\text{-}109c)$$

A primeira das equações acima nos conduz à condição usual das teorias de gauge, que L deve depender das derivadas de $A^a{}_\mu$ apenas através do seu "rotacional". Com

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu - g C^a_{bc} A^b{}_\mu A^c{}_\nu$$

a segunda equação pode ser facilmente integrada. De fato, usando esta expressão tem-se que

$$\frac{\partial L}{\partial A^a{}_\mu} = \left. \frac{\partial L}{\partial A^a{}_\mu} \right|_{F^b_{\alpha\beta}} + \frac{\partial}{\partial F^b_{\alpha\beta}} \frac{\partial F^b_{\alpha\beta}}{\partial A^a{}_\mu} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial A^a{}_\mu}\bigg|_{F^b_{\alpha\beta}} - 2gC^c_{ab}A^b{}_\lambda \frac{\partial L}{\partial F^c_{\mu\lambda}} , \qquad (0.12\text{-}110a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^a{}_\mu)} = - 2 \frac{\partial L}{\partial F^a_{\mu\nu}} \quad . \qquad (1.12\text{-}110b)$$

Substituindo estes resultados na equação (0.12-109c) obtem--se

$$\dot{x}^\mu I_a + \frac{1}{g} \frac{\partial L}{\partial A^a{}_\mu}\bigg|_{F^b_{\alpha\beta}} = 0 \quad . \qquad (0.12\text{-}110c)$$

Esta expressão nos dá a estrutura do termo de interação da lagrangiana, que deve ser da forma

$$g\dot{x}^\mu I_a A^a{}_\mu(x) \quad . \qquad (0.12\text{-}111)$$

Usando (0.12-110b,c), a equação (0.12-109c) pode ser reescrita sob a forma

$$\dot{I}_a = gC^c_{ab}\dot{x}^\mu A^b_\mu I_c - C^c_{ab}F^b_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial F^a_{\mu\nu}} \quad . \qquad (0.12\text{-}112)$$

Observe que estas equações, a menos do último termo, são exatamente as equações de precessão do spin isotópico, equações (0.10-14). Naquele contexto estas equações foram obtidas como condições de consistência da definição da corrente $j^a{}_\mu$, equação (0.10-22).

Examinando-se o comportamento das equações de movimento sob transformações de gauge podemos obter uma interpretação das equações (0.12-112). Com o momento dado por

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu + gI_a A^a{}_\mu$$

tem-se que, por uma transformação de gauge,

$$\delta\mathcal{C}_\mu = (\partial_\mu\omega^a)I_a \quad . \qquad (0.12\text{-}113)$$

Do mesmo modo,

$$\delta\left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\right) = g\, C^a_{bc}(\partial_\mu\omega^b)I_a A^c{}_\nu \dot{x}^\nu + (\partial_\mu\partial_\nu\omega^a)\dot{x}^\nu I_a$$

$$+ C^a_{bc}(\partial_\mu\omega^b)\frac{\partial L}{\partial F^\alpha_{\alpha\beta}} F^c_{\alpha\beta} \quad . \qquad (0.12\text{-}114)$$

Usando (0.12-113, 114) pode-se verificar diretamente que as equações (0.12-112) devem ser satisfeitas identicamente de modo a preservar a invariância de gauge das equações de movimento para $x^\mu(\tau)$. Por outro lado, as equações de movimento para as variáveis de Grassmann são invariantes de gauge independentemente das equações (0.12-112).

Apliquemos estes resultados a um modelo simples. Consideremos a representação adjunta do grupo G (semi-simples, compacto),

$$(T_b)^a{}_c = i\, C^a_{bc} \quad . \qquad (0.12\text{-}115)$$

As variáveis de Grassmann associadas com os graus de liberdade de internos são reais. Sob a ação de G estas variáveis se transformam de acordo com (0.12-107),

$$\delta\zeta^a = C^a_{bc}\omega^b\zeta^c \quad . \qquad (0.12\text{-}116)$$

A lagrangiana livre para as variáveis ζ se escreve

$$L = \frac{i}{2}\,\dot{\zeta}_a \zeta^a \quad , \tag{0.12-117}$$

de modo que os momentos conjugados são

$$\Pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}^a} = \frac{i}{2}\,\zeta_a \quad , \tag{0.12-118}$$

e os geradores (0.12-105) ficam sob a forma

$$I_a = -\frac{i}{2}\,C_{abc}\zeta^b\zeta^c \quad . \tag{0.12-119}$$

Em presença de um campo de gauge devemos adicionar à lagrangiana um termo de interação de acordo com (0.12-111):

$$L = \frac{i}{2}\,\dot{\zeta}_a\zeta^a - g\dot{x}^\mu A^a_\mu I_a \quad . \tag{0.12-120}$$

Observe que a lagrangiana acima pode ser obtida formalmente de (0.12-117) fazendo-se "acoplamento mínimo" com o campo A^a_μ pela substituição

$$\dot{\zeta}_a \longrightarrow \dot{\zeta}_a + ig(T_b)^c\, A^b_\nu \dot{x}^\mu \xi_c \quad . \tag{0.12-121}$$

Supondo que a partícula não tem spin, a lagrangiana total se escreve

$$L = m\sqrt{-\dot{x}^2} + \frac{i}{2}\,\dot{\zeta}_a\zeta_a - g\dot{x}^\mu A^a{}_\mu I_a \quad , \tag{0.12-122}$$

donde se obtem as equações de movimento

$$m \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\right) = g\, F^{\mu}{}_{a\nu}\dot{x}^{\nu} I^{a} \quad , \qquad (0.12\text{-}123)$$

$$\dot{\zeta}^{a} + igA^{b}{}_{\mu}\dot{x}^{\mu}(T_{b})c^{a}\zeta^{c} = 0 \quad . \qquad (0.12\text{-}124)$$

Usando as equações (0.12-124) verifica-se que as condições (0.12-112) são satisfeitas.

Finalmente, a integral de ação para a partícula com spin e spin isotópico pode ser escrita diretamente usando-se (0.12-53):

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big[\dot{x}^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^{\mu}\theta_{\mu} + \dot{\theta}_5\theta_5) + \frac{i}{2}\,\dot{\zeta}^{a}\zeta_{a} - g\dot{x}^{\mu}A^{a}_{\mu}I_{a}$$

$$- N(\tau) \quad - i\,M(\tau) \Big] \qquad (0.12\text{-}125)$$

onde omitimos os termos de fronteira e $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{P}_{\mu}$ são dados por (0.12-97,98,99). Deixamos como exercício para o leitor a obtenção das equações de movimento.

Dois pontos devem ser observados. Primeiro é que nas condições (0.12-110) surge um termo proporcional a $F^{a}{}_{\mu\nu}$, $I_a\ \theta^{\mu}\ \theta^{\nu}$, que não aparece nas equações de Wong originais (ver seção 0.10) Na verdade este termo não pode ser evitado a nível clássico. Fazendo-se a quantização do modelo no gauge $x^{o} = \tau$, após as substituições (0.12-42,43), este termo desaparece, e obtém-se a hamiltoniana usada por Wong como ponto de partida. Daí a razão de suas equações não conterem este termo.

Segundo, é o aparecimento de uma "singularidade tipo dipolo", isto é, proporcional ao gradiente da função delta, induzida pela presença do spin da partícula. Este tipo de singularidade está presente no tensor momento-energia e na corrente associada com a partícula. Esta última é dada por

$$j^{\mu}_{a} = \frac{\delta S}{\delta A^{a}_{\mu}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{x}^{\mu}(\tau) g I_a(\tau) \delta^{(4)}(x(\tau) - z) +$$

$$\frac{ig}{m} \int d\tau \theta^{\mu}(\tau) \theta^{\nu}(\tau) I_b(\tau) \left[\delta^{b}_{a} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - g C^{b}_{ca} A^{c}_{\nu} \right] \delta^{(4)}(x(\tau) - z). \qquad (0.12\text{-}126)$$

Observe que este tipo de singularidade, que também ocorre no caso da ação (0.12-53), é um reflexo da estrutura espaço-temporal da partícula.

0.12.3 A interação com campos gravitacionais

Como anteriormente, o nosso ponto de partida é a equação de Dirac, que na presença de um campo gravitacional, se escreve

$$\delta^{\mu} \nabla_{\mu} \psi(x) + m \psi(x) = 0 \quad . \qquad (0.12\text{-}127)$$

Nesta equação ∇_{μ} é o operador de derivação covariante para o campo espinorial $\psi(x)$,

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - \Gamma_{\mu} \qquad (0.12\text{-}128)$$

onde Γ_μ é a conexão espinorial definida como segue.

No espaço-tempo com métrica $g_{\mu\nu}(x)$ consideremos uma base local de tetradas $\{e^\mu{}_{(A)}(x)\}$, definida por

$$e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} g_{\mu\nu} = \eta_{AB} \quad , \qquad (0.12\text{-}129)$$

$$e_\mu^{(A)} e_\nu^{(B)} \eta_{AB} = g_{\mu\nu} \quad , \qquad (0.12\text{-}130)$$

onde η_{AB} é métrica de Minkowski.

As matrizes de Dirac γ^A, constantes, constituem uma representação da álgebra de Clifford associada com a métrica local de Minkowski, satisfazendo a relação

$$[\gamma^A, \gamma^B] = \gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2\eta^{AB} \; . \qquad (0.12\text{-}131)$$

Uma representação desta álgebra, associada com a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}(x)$, pode ser obtida de (0.12-131) através dos vetores da base local,

$$[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)] = 2g^{\mu\nu}(x) \quad , \qquad (0.12\text{-}132)$$

com

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_{(A)}(x) \gamma^A \; . \qquad (0.12\text{-}133)$$

A conexão espinorial Γ_μ pode ser obtida em termos dos vetores $e^\mu{}_{(A)}$, usando-se a condição $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ que, levando em conta (0.12-132), resulta em

$$\nabla_\alpha [\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)] = 0 \quad . \tag{0.12-134}$$

Esta equação é satisfeita se impusermos que

$$\nabla_\alpha \gamma_\mu = \partial_\alpha \gamma_\mu - \{ {}^{\lambda}_{\mu\alpha} \} \gamma_\lambda + \gamma_\mu \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha \gamma_\mu = 0 \quad . \tag{0.12-135}$$

Usando as propriedades da álgebra das matrizes de Dirac e a expressão (0.12-133) esta equação pode ser resolvida para Γ_α:

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8}\left[\gamma^\mu(\partial_\alpha\gamma_\mu) - (\partial_\alpha\gamma_\mu)\gamma^\mu - \{ {}^{\lambda}_{\mu\alpha} \}(\gamma^\mu\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma^\mu)\right] \tag{0.12-136a}$$

$$= -\frac{1}{8} e^\mu_{(A)} \nabla_\nu e_{(B)\mu} (\gamma^A\gamma^B - \gamma^B\gamma^A) = \tag{0.12-136b}$$

$$= -\frac{1}{4}\, \omega_{\mu AB}\gamma^A\gamma^B \quad . \tag{0.12-136c}$$

Com este resultado a equação de Dirac em espaços curvos, equação (0.12-127), fica sob a forma

$$\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{4}\, \omega_{\mu AB}\gamma^A\gamma^B)\psi(x) + m\psi(x) = 0 \quad . \tag{0.12-137}$$

O vínculo de primeira classe associado com (0.12-137) é

$$\mathcal{S} = \theta^\mu \mathcal{P}_\mu + m\,\theta_5 \approx 0 \quad , \tag{0.12-138}$$

onde

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu - \frac{i}{2}\, \omega_{\mu AB}\theta^A\theta^B \quad . \tag{0.12-139}$$

Os colchetes não nulos entre as variáveis dinâmi-cas básicas são

$$\{x^\mu, p_\nu\}^* = \delta^\mu{}_\nu, \quad \{\theta^A, \theta^B\}^* = i\eta^{AB}, \ \{\theta_5, \theta_5\}^* = i \ . \qquad (0.12\text{-}140)$$

Tem-se que

$$\{\theta^\mu, \mathcal{P}_\alpha\}^* = -\left\{{}^{\mu}_{\alpha\beta}\right\}\theta^\beta \ , \qquad (0.12\text{-}141a)$$

$$\{\theta^A, \mathcal{P}_\alpha\}^* = \omega_\alpha{}^A{}_C\theta^C \ , \qquad (0.12\text{-}141b)$$

$$\{\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}_\beta\}^* = \frac{i}{2} R_{\alpha\beta\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu \ . \qquad (0.12\text{-}141c)$$

Usando estes resultados pode-se verificar que

$$\{\mathcal{S}, \mathcal{S}\}^* = i\,\mathcal{H} \qquad (0.12\text{-}142)$$

com

$$\mathcal{H} = g^{\mu\nu}\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu + m^2 \approx 0 \ , \qquad (0.12\text{-}143)$$

de modo que os vínculos obedecem à mesma álgebra que nos ca-sos anteriores, equações (0.12-52 a,b,c).

As equações de movimento podem ser obtidas fixando -se o super-gauge como no caso da interação eletromagnética, equações (0.12-83) - (0.12-87). Encontra-se que

$$\frac{D}{D\tau}\theta^\alpha = 0 \qquad (0.12\text{-}144a)$$

$$\frac{D}{D\tau} S^{\alpha\beta} = 0 \quad , \tag{0.12-144b}$$

$$\frac{D}{D\tau} \mathcal{P}_{\alpha} = \frac{1}{2m} R_{\alpha\beta\mu\nu} \mathcal{P}^{\beta} S^{\mu\nu} \quad , \tag{0.12-144c}$$

$$\frac{D^2 x^{\mu}}{D\tau^2} = \frac{1}{m} R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} \dot{x}^{\lambda} S^{\alpha\beta} \tag{0.12-144d}$$

Como ocorre no caso do espaço de Minkowski, este procedimento não se aplica ao caso de partículas com massa nula. Um aspecto curioso da interação gravitacional destas partículas é que suas trajetórias são geodésicas. O ponto de partida para a demonstração é uma escolha conveniente do supergauge, já que as equações (0.12-83,84) não podem ser usadas. Introduzindo uma base local ($\mathcal{P}$, k, $e_{(1)}$, $e_{(2)}$), como no final da seção (0.12(a)), uma escolha natural dos vínculos de gauge, para este caso, é $\theta. \approx 0$ e $\theta.k \approx 0$.

Capítulo 1: A TEORIA GERAL DOS STRINGS LIVRES

"As long as it looks like the way things are built with wheels within wheels, then you are looking for the innermost wheel - but it might not be that way, in which case you are looking for whatever the hell it is you find"
R.P. Feynman

1.1 A superfície de evolução e a integral de ação

Um string é a generalização mais simples de um objeto puntual: é um objeto unidimensional cuja evolução gera uma superfície bidimensional no espaço-tempo. Denominaremos esta superfície de "superfície de evolução", Σ. De modo geral consideraremos strings de comprimento finito, salvo observação em contrário. Além disto suporemos que, durante sua evolução, o string não se intercepta consigo mesmo. Assim, temos duas situações topologicamente distintas, que correspondem a strings abertos e strings fechados, como na Figura 1.

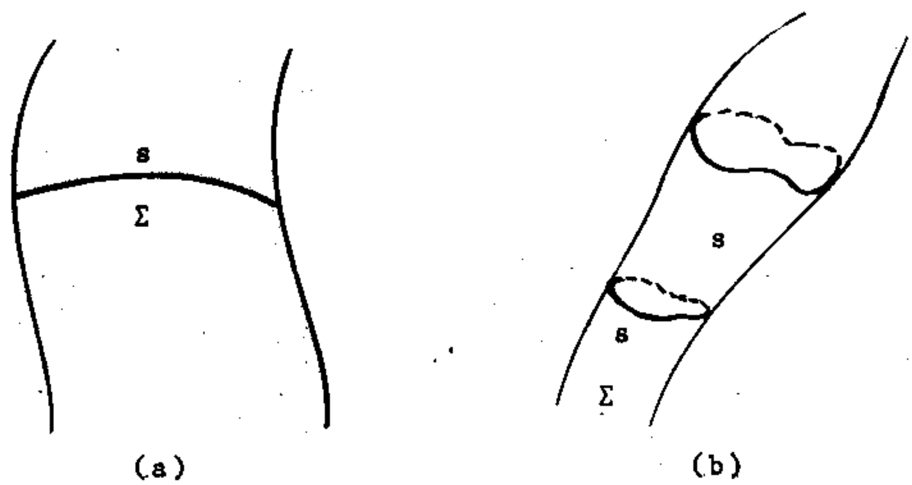
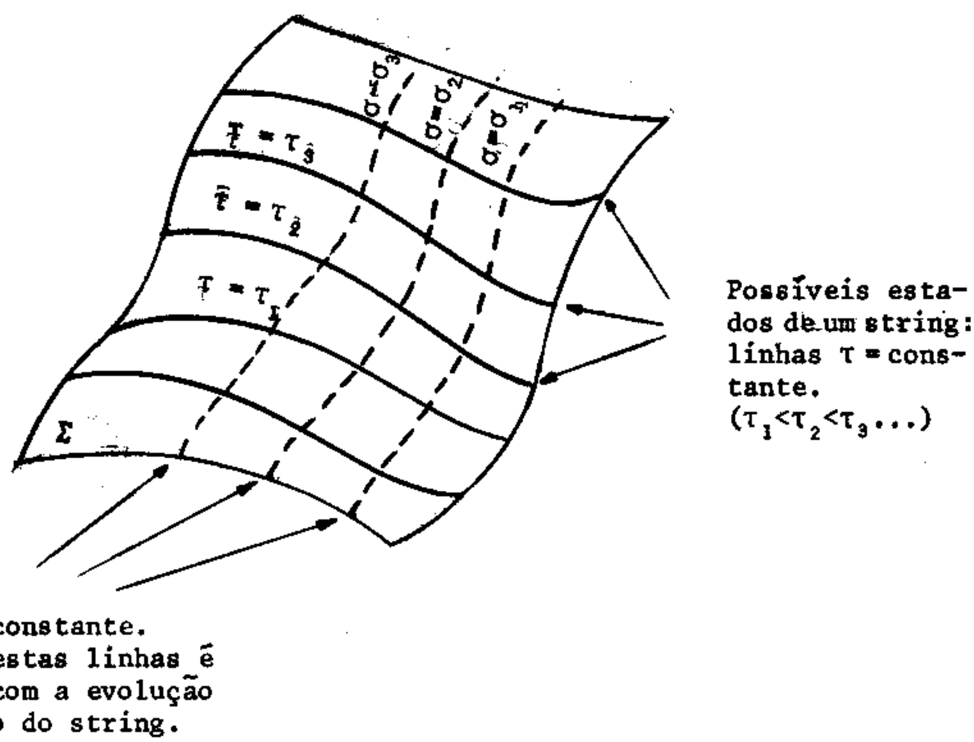


FIGURA 1: Superfície de evolução de um string s: (a) s é um string aberto; (b) s é um string fechado

Para rotular os pontos sobre Σ necessita-se de dois parâmetros que denotaremos por τ e σ. Usaremos também a notação $(\xi^a) = (\xi^1=\tau, \xi^2=\sigma)$. Estes parâmetros desempenham o papel de coordenadas internas no mundo bidimensional do string. σ será usado para rotular pontos ao longo do string - é um parâmetro cinemático. τ será usado como um parâmetro de evolução que, em certas circunstâncias, será associado com o tempo. Uma escolha específica destes parâmetros significa estabelecer uma malha de linhas coordenadas sobre Σ como na Figura 2.



A partir deste ponto vamos fazer a escolha $\tau \epsilon [\tau_1, \tau_2]$ e $\sigma \epsilon [0, \pi]$.

A descrição de Σ no espaço-tempo poder ser feita pelas equações paramétricas

$$y^\mu = y^\mu(\tau,\sigma) \equiv y^\mu(\xi) \qquad (1.1\text{-}1)$$

$$(\mu = 0,1,2,3) \ , \quad \xi = (\xi^a) \ ,$$

onde y^{μ} são as coordenadas de pontos de Σ. Estas equações devem ser restritas a representar uma superfície causal, isto é, tipo tempo ou nula, condição que se faz necessária para que Σ possa ser interpretada como a superfície de evolução de um objeto unidimensional, tipo espaço. Assim, em cada ponto de Σ deve existir pelo menos um vetor tangente tipo tempo ou tipo luz. Vamos usar a notação

$$\dot{y}^{\mu} = \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \tau} \quad , \quad y'^{\mu} = \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \sigma}$$

para as componentes dos dois vetores (independentes), tangentes às linhas $\tau = c^{\underline{te}}$ e $\sigma = c^{\underline{te}}$, respectivamente. Sobre estes vetores vamos impor as condições

$$\dot{y}^2 \equiv \eta_{\mu\nu}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} \leq 0 \ , \qquad (1.1\text{-}2a)$$

$$y'^2 \equiv \eta_{\mu\nu}y'^{\nu}y'^{\nu} > 0 \ . \qquad (1.1\text{-}2b)$$

Estas restrições asseguram que Σ é do tipo tempo ou nula, e são consistentes com o fato de querermos identificar τ como um parâmetro de evolução. Observemos que as condições (1.1-2a,b)) não são invariantes por reparametrizações em τ e σ.

O significado geométrico da superfície Σ se reflete na invariância de sua descrição (pelas equações paramétricas (1.1-1)) por reparametrizações em τ e σ, isto é, pela covariância de sua descrição com relação às coordenadas internas. Isto significa que estas coordenadas são arbitrárias no sentido de que qualquer transformação do tipo

$$\xi^a \longrightarrow \bar{\xi}^a = \bar{\xi}^a(\xi) \qquad (1.1\text{-}3)$$

conduz a uma descrição equivalente da superfície de evolução se

$$J = \left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\xi}\right) \neq 0 \qquad (1.1\text{-}4)$$

e

$$\frac{\partial\bar{\xi}^2}{\partial\xi^1}(\xi^1,\xi^2) = \frac{\partial\bar{\sigma}(\tau,\pi)}{\partial\tau} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \qquad (1.1\text{-}5)$$

Na expressão (1.1-4) J é o jacobiano da transformação. A condição (1.1-5) se faz necessária para que o contorno da superfície permaneça inalterado. É claro que a teoria do string será invariante com relação às transformações (1.1-3) se as suas equações forem expressas sob forma covariante com relação àquelas transformações.

Neste ponto é importante ressaltar que as diversas quantidades que aparecem na teoria têm diferente caráter tensorial com relação às transformações admissíveis no espaço-tempo, o grupo de Poincaré, e às transformações admissíveis sobre Σ, definidas pelas equações (1.1-3,4,5). Por exemplo, as quantidades $d\xi^a$ se comportam como as componentes de um vetor contravariante com relação a (1.1-3),

$$d\bar{\xi}^a = \frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial\xi^b}\, d\xi^b \qquad (1.1\text{-}6)$$

e são escalares de Lorentz. Por outro lado, as coordenadas dos pontos de Σ, $y^\mu(\xi)$, e $dy^\mu(\xi)$ se comportam como vetores de Lorentz e são escalares com relação a (1.1-3). As quantidades

$$v^\mu_a = \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} \qquad (1.1\text{-}7a)$$

se comportam como as componentes de um vetor (contravariante) de Lorentz e como um vetor (covariante) com relação a (1.1-3),

$$\bar{v}^\mu_a = \frac{\partial \xi^b}{\partial \bar{\xi}^a} v^\mu_b \qquad (1.1\text{-}7b)$$

e assim por diante.

Passemos à construção do funcional de ação associado com o string. Por analogia com a dinâmica da partícula, e seguindo a idéia de Y. Nambu, escreveremos o funcional de ação como proporcional à área da superfície de evolução,

$$S[y] = -N \int_\Sigma d^2A \quad . \qquad (1.1\text{-}8)$$

Nesta expressão d^2A é a área de um elemento de superfície de Σ e N é uma constante com dimensão de inverso de comprimento ao quadrado. Esta constante não está associada com uma massa, como acontece no caso da partícula. Na verdade os strings são desprovidos de massa, e a constante N se expressa como

$$N = \frac{1}{2\pi\alpha'} \qquad (1.1\text{-}9)$$

onde α' é outra constante, relacionada com a inclinação da trajetória de Regge principal do sistema quantizado.

Como as coordenadas generalizadas associadas com o string são as coordenadas $y^\mu(\xi)$ dos pontos de Σ, devemos expressar o integrando de (1.1-8) em termos destas quantidades. (Observemos que, na verdade, estamos lidando com uma teoria de campos em duas dimensões onde as funções de campo são y^μ e as coordenadas são $\xi^a = (\tau,\sigma)$). Para isto precisamos definir a métrica sobre Σ, o que faremos na seção seguinte.

1.2 A métrica da superfície de evolução e a densidade Lagrangiana do string

Consideremos o elemento de linha $d\ell$ sobre Σ. Em termos das coordenadas internas ξ^a tem-se que

$$d\ell^2 = g_{ab}d\xi^a d\xi^b \quad , \tag{1.2-1}$$

e em termos das coordenadas $y^\mu(\xi)$

$$d\ell^2 = \eta_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu \quad . \tag{1.2-2}$$

(No caso em que o espaço-tempo é curvo, a expressão (1.2-2) assume a forma $d\ell^2 = g_{\mu\nu}(y)dy^\mu dy^\nu$ onde $(g_{\mu\nu}(y))$ é o tensor métrico correspondente. Este é o caso da interação entre o string e um campo gravitacional, e será tratado em detalhes mais adiante).

Na expressão (1.2-2) dy^μ é um deslocamento infinitesimal sobre Σ e se expressa como

$$dy^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} d\xi^a = \dot{y}^\mu d\tau + y'^\mu d\tau \ . \tag{1.2-3}$$

Comparando (1.2-1) com (1.2-2) e usando (1.2-3) encontramos

$$g_{ab} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial y^\nu}{\partial \xi^b} \tag{1.2-4}$$

A matriz do tensor métrico induzido sobre Σ é, portanto,

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}^2 & \dot{y}\cdot y' \\ \dot{y}\cdot y' & y'^2 \end{pmatrix} . \tag{1.2-5}$$

As condições (1.1-2a,b) que impusemos sobre os vetores $\dot{y}^\mu$ e y'^μ se expressam em termos dos coeficientes da métrica g_{ab} como

$$g_{11} \leq 0 \quad , \quad g_{22} > 0 \ . \tag{1.2-6}$$

Referir-nos-emos a estas condições como "condições de causalidade". É claro que se Σ representa uma possível história de um string, então

$$g \leq 0 \ . \tag{1.2-7}$$

Esta condição é invariante pelas transformações admissíveis sobre Σ. Por aquelas transformações g se transforma como uma densidade escalar de pêso -2, $g \to \bar{g} = J^{-2}\, g$.

Da expressão (1.2-5) obtém-se diretamente o determinante de (g_{ab}):

$$g = \dot{y}^2 y'^2 - (\dot{y}.y')^2 \quad . \tag{1.2-8}$$

Formalmente, o determinante $\underline{g}$ é definido por

$$g = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} g_{ac} g_{bd} \quad , \tag{1.2-9}$$

onde

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \quad , \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = +1 \; .$$

ε^{ab} é uma densidade tensorial de pêso -1,

$$\bar{\varepsilon}^{ab} = J^{-1}\, \frac{\partial \bar{\xi}^a}{\partial \xi^c}\, \frac{\partial \bar{\xi}^b}{\partial \xi^d}\, \varepsilon^{cd} = \varepsilon^{ab} \quad .$$

Uma expressão alternativa para $\underline{g}$ é dada em termos das quantidades

$$\Sigma^{\mu\nu} = \dot{y}^\mu y'^\nu - y'^\mu \dot{y}^\nu \equiv \varepsilon^{ab} \partial_a y^\mu \partial_b y^\nu \tag{1.2-10}$$

que são conhecidas na literatura como coordenadas de Plücker da superfície Σ, e são densidades escalares sobre Σ. Definindo-se os duais de $\Sigma^{\mu\nu}$ por

$$\overset{*}{\Sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} \quad , \tag{1.2-11}$$

vê-se que

$$\overset{*}{\Sigma}_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.2\text{-}12)$$

Pode-se verificar que, em termos das coordenadas de Plücker, o determinante de (g_{ab}) se escreve

$$g = \frac{1}{2}\,\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} \quad . \qquad (1.2\text{-}13)$$

Finalmente, vamos introduzir as componentes contra variantes do tensor métrico, g^{ab}, definidas por

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c \quad . \qquad (1.2\text{-}14)$$

Segue que

$$g^{ab} = g^{-1}\varepsilon^{ac}\varepsilon^{bd}g_{cd} \qquad (1.2\text{-}15)$$

e

$$(g^{ab}) = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \quad . \qquad (1.2\text{-}16)$$

O elemento de área de Σ é definido por

$$d^2A = \sqrt{-g}\;d\tau d\sigma \quad . \qquad (1.2\text{-}17)$$

Assim, o funcional de ação (1.1-8) se escreve

$$S[y] = -N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{-g} \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \; \mathcal{L}(\dot{y}, y') \qquad (1.2\text{-}18)$$

onde

$$\mathcal{L} = -N\sqrt{-g} = -N\sqrt{(\dot{y}.y')^2 - \dot{y}^2 y'^2} \qquad (1.2\text{-}19)$$

é a lagrangiana associada com o string.

1.3 As equações de movimento de Euler-Lagrange

Na seção anterior obtivemos a integral de ação e a densidade lagrangiana associadas com o string, dadas respectivamente por

$$S[y] = -N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{(\dot{y}.y')^2 - \dot{y}^2 y'^2} \qquad (1.3\text{-}1)$$

e

$$\mathcal{L} = -N\sqrt{(\dot{y}.y')^2 - \dot{y}^2 y'^2} \quad . \qquad (1.3\text{-}2)$$

O nosso objetivo agora é obter as equações de movimento para os campos $y^{\mu}(\xi)$ a partir da integral de ação (1.3-1), via princípio da mínima ação. Isto é, vamos requerer que $\delta S = 0$, onde δS é a variação na ação devida às variações nos campos satisfazendo a

$$\delta y^{\mu}(\tau_1, \sigma) = \delta y^{\mu}(\tau_2, \sigma) = 0 \qquad (1.3\text{-}3)$$

Observa-se de imediato que o problema que estamos considerando não é tão simples quanto parece. Para ter-se uma idéia do que ocorre basta lembrar a imposição que fizemos de que a superfície Σ deve ser causal. Assim, as variações devem ser restritas àquelas que não conduzem a uma superfície variada tipo-espaço. No entanto, algumas variações conduzem, inevitavelmente, à superfícies tipo-espaço e, portanto, não causais. Além disto, no processo de variação aparecem as derivadas de $\sqrt{-g}$, integrando da expressão (1.3-1), com relação aos seus argumentos e estas derivadas são supostamente bem definidas em todos os pontos de Σ. Mas esta hipótese não é correta. Antecipando um pouco os resultados, a origem destes problemas está no fato de que o determinante g se anula nos bordos da superfície de evolução. A seguir, vamos obter as equações de movimento sem levar em conta esta questão. O procedimento adotado é internamente inconsistente mas, apesar disto, as equações de movimento descrevem superfícies que são estacionárias sob todas as variações causais. Na seção seguinte examinaremos as questões de consistência com detalhes.

Calculemos a variação de S:

$$0 = \delta S = -N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\mu}} \, \delta \dot{y}^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}} \, \delta y'^{\mu} \right) =$$

$$= -N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\mu}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}} \right) \right] \delta y^{\mu} +$$

$$+N\int_{0}^{\pi} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\mu}}\,\delta y^{\mu}\right) + N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{0}^{\pi} d\tau \, \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}}\,\delta y^{\mu}\right) \quad .$$

Efetuando a integral em τ, no segundo termo da expressão acima, e usando as condições (1.3-3) verifica-se que este termo se anula. A integração em σ do último termo também pode ser efetuada, de modo que o resultado final é

$$0 = -N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{0}^{\pi} d\tau \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\mu}}\right) + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}}\right)\right]\delta y^{\mu} +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}}\,\delta y^{\mu}\Big|_{\sigma=o}^{\sigma=\pi} \quad . \tag{1.3-4}$$

Vamos introduzir a notação

$$\mathcal{P}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\mu}} = -\frac{N}{\sqrt{-g}}\left[(\dot{y}\cdot y')y'^{\nu} - y'^{2}\dot{y}^{\nu}\right]\eta_{\mu\nu} \quad , \tag{1.3-5}$$

$$\Pi_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^{\mu}} = -\frac{N}{\sqrt{-g}}\left[(\dot{y}\cdot y')\dot{y}^{\nu} - \dot{y}^{2}y'^{\nu}\right]\eta_{\mu\nu} \quad . \tag{1.3-6}$$

A interpretação física destas quantidades será feita mais adiante.

Usando a notação acima, a expressão (1.3-4) assume a forma

$$0 = -N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{0}^{\pi} d\tau \left[-\frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}}{\partial\tau} + \frac{\partial \Pi_{\mu}}{\partial\sigma}\right]\delta y^{\mu} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \Pi_{\mu}\,\delta y^{\mu}\Big|_{\sigma=o}^{\sigma=\pi} \quad . \tag{1.3-7}$$

Admitindo que as variações δy^{μ} são arbitrárias e independentes para $o < \sigma < \pi$ obtém-se as equações de movimento

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_\mu + \frac{\partial}{\partial\sigma}\Pi_\mu = 0 \quad , \quad 0 < \sigma < \pi \quad . \tag{1.3-8}$$

Estas equações são estritamente válidas no "interior" do string, isto é, para $o < \sigma < \pi$. Nos pontos $\sigma = o, \pi$ elas falham porque, como veremos logo adiante, $\mathcal{P}_\mu$ não é bem definido naqueles pontos.

Segue ainda de (1.3-7) que as seguintes "condições de bordo" devem ser satisfeitas:

$$\Pi_\mu \delta y^\mu \Big|_{\sigma=o}^{\sigma=\pi} = 0 \quad . \tag{1.3-9}$$

Observemos que estas condições não ocorrem no caso de strings fechados.

As condições (1.3-9) têm importantes consequências as quais passaremos a analisar. Se supuzermos que as variações δy^μ são arbitrárias também nos bordos da superfície de evolução Σ, (1.39) conduz a

$$\Pi_\mu = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad . \tag{1.3-10}$$

Usando a definição (1.3-6) segue que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[(\dot{y}, y')\dot{y}^\mu - \dot{y}^2 y'^\mu\right] = 0 \;\; \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad .$$

Levando em conta que os vetores $\dot{y}^\mu$ e y'^μ são independentes, obtêm-se da expressão acima

$$\dot{y}^2 = 0 \quad , \quad \dot{y}\cdot y' = 0 \;\; \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad . \tag{1.3-11}$$

Estes resultados têm uma interpretação clara: os pontos extremos do string se movem com a velocidade da luz ($\dot{y}^2 = 0$) e perpendicularmente ao string ($\dot{y}.y' = 0$). Em termos geométricos, as linhas $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$ são linhas nulas. Mais ainda, a superfície Σ é nula nos bordos.

Retornando a (1.3-10) vemos que, em virtude de (1.3-11), estas condições se tornam ambíguas porque, de (1.3-11), concluimos que

$$g = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad . \tag{1.3-12}$$

Procedendo um pouco mais detalhadamente podemos remover esta ambiguidade. De fato, as equações (1.3-10) podem ser escritas como

$$\left(- y'^2 + \frac{\dot{y}.y'}{\sqrt{\dot{y}^2}}\right)^{-1/2} \left(y'^\mu \sqrt{\dot{y}^2} - \frac{\dot{y}.y'}{\sqrt{\dot{y}^2}}\,\dot{y}^\mu\right) = 0 \quad \text{em}\ \sigma = 0,\pi \quad .$$

Usando a independência linear de $\dot{y}$ e y' encontramos

$$\frac{\dot{y}.y'}{\sqrt{\dot{y}^2}} = 0 \quad \text{em} \quad \dot{y}^2 = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad . \tag{1.3-13}$$

Estes resultados conduzem a (1.3-11) com o dado adicional que $\dot{y}.\,y'$ deve tender a zero mais rapidamente que $\dot{y}^2$ a medida que nos aproximamos dos pontos $\sigma = o,\pi$. A conclusão é que, para as soluções das equações de movimento que satisfazem as condições acima, as condições de bordo são válidas sob a forma (1.3-10) e não são ambíguas. A equação (1.3-12) continua vá lida. É claro que esta situação não é geral pois fica condicionada às soluções das equações de movimento que satisfazem a (1.3-13). Quando este não é o caso as equações de movimento são válidas apenas para $o<\sigma<\pi$ e as condições (1.3-9) são ambígüas.

Observe que, em princípio, a integral de ação pode ser tomada como

$$S = - N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\tau \sqrt{-g} \quad .$$

O princípio variacional (com as condições (1.3-3)) neste caso conduz a

$$0 = \delta S = - N\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial \sigma} \right) \delta y^\mu +$$

$$+ \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma (\mathcal{P}_\mu \delta y^\mu) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\mathcal{L}\, \delta\sigma(\tau)) \Big|_{\tau_1(\tau)}^{\tau_2(\tau)} +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\Pi_\mu (\tau_2) - \frac{d\sigma_2(\tau)}{d\tau} \mathcal{P}_\mu (\sigma_2) \right] \delta y^\mu (\sigma_2) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\Pi_\mu (\sigma_1^{\gamma}) - \frac{d\sigma_1(\tau)}{d\tau} \mathcal{P}_\mu (\sigma_1) \right] \delta y^\mu (\sigma_2) \tag{1.3-14}$$

donde se obtém as equações de movimento (1.3-8) e as condições de bordo

$$\mathcal{L}\, [y(\tau,\sigma_1)] = \mathcal{L}\, [y(\tau,\sigma_2)] = 0 \quad , \tag{1.3-15}$$

$$\Pi_\mu(\sigma_i) - \frac{d\sigma_i}{d\tau}\mathcal{P}_\mu(\sigma_i) = 0 \quad , \quad i = 1,2 \quad . \quad (1.3\text{-}16)$$

O princípio variacional não conduz a nenhuma equação para as funções $\sigma_i(\tau)$. Assim, podemos tomar $\sigma_i(\tau) = 0$ sem impor restrições sobre a dinâmica do sistema. Note que com esta escolha as condições (1.3-15) não surgem diretamente do princípio variacional, mas são consequências das condições (1.3-16) como vimos acima.

1.4 Sobre a consistência do princípio variacional

Os problemas com os quais nos deparamos na seção anterior são consequências das condições de bordo e da condição de causalidade. Estes problemas requerem uma análise mais detalhada conforme faremos a seguir.

Primeiramente lembremos que $\delta S = 0$ significa que a área da superfície de evolução deve ser mínima. As superfícies que satisfazem a este requisito são denominadas de superfícies mínimas. O problema variacional $\delta S = 0$ com as condições (1.3-3) é o de encontrar as superfícies mínimas, isto é, de área estacionária, que se interpolam entre duas curvas fixas, conforme a Figura 3.

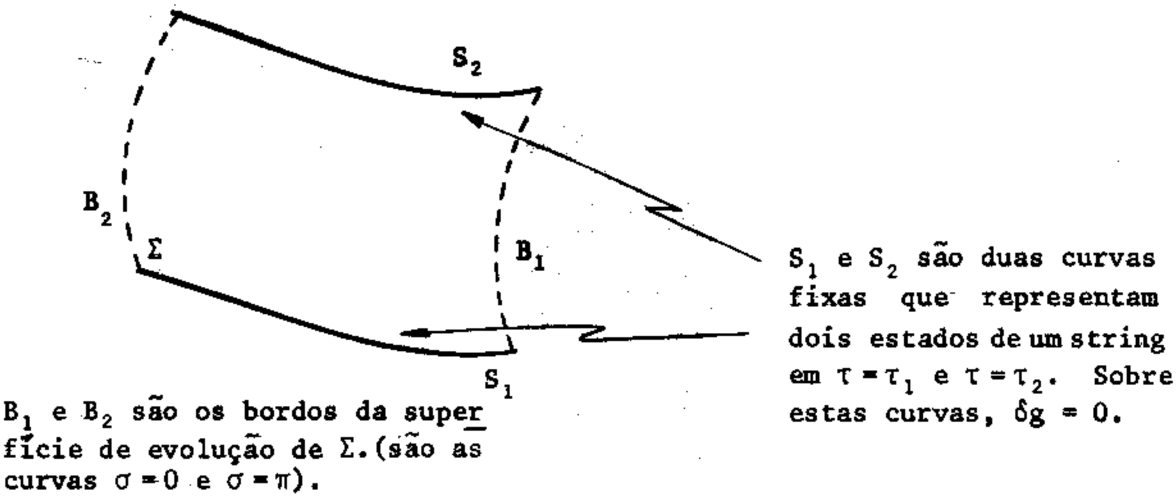


Figura 3

Na Figura 4 abaixo representamos um dos bordos de Σ. Se a superfície Σ, cujo bordo é B, é estacionária, então $\delta\Sigma$ deve ser nulo .

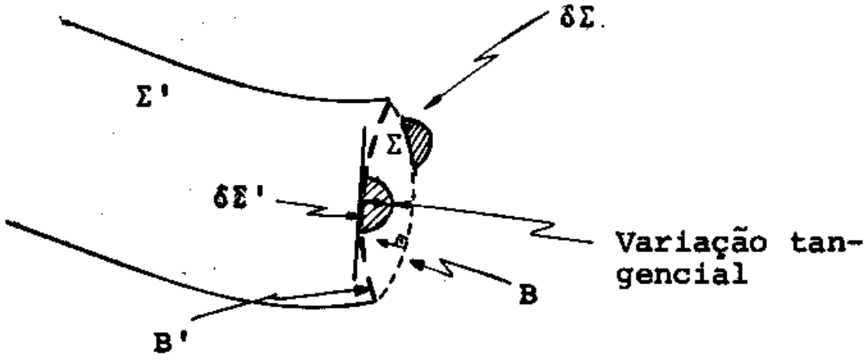


Figura 4

Isto significa que todo o bordo da superfície Σ deve ser nulo. Para uma variação que conduza a um novo bordo B' com $\delta\Sigma'$ tangencial, não resultará, em geral, que $\delta\Sigma'$ é nulo e a superfície original não será estacionária.

Consideremos a condição (1.3- 9). Da definição (1.3-6) é fácil de ver que $\Pi_\mu \, \dot{y}^\mu = 0$, de modo que variações tangenciais na direção $\dot{y}$ não contribuem para (1.3-9). Variações na direção tangencial y' são permitidas pois, neste caso,

$$\delta y^{\mu}\Big|_{\sigma=0,\pi} = \varepsilon(\tau) y'^{\mu}\Big|_{\sigma=0,\pi} . \qquad (1.4\text{-}1)$$

Este tipo de variação conduz a $g=0$ em $\tau=0,\pi$, de modo que Σ é nula nos bordos.

A inconsistência na obtenção de (1.3-7) fica então clara. De fato, as condições de bordo requerem que a superfície de evolução Σ seja nula nos bordos e isto implica que $\mathcal{P}_{\mu}$ diverge naquelas linhas, enquanto que Π_{μ} permanece finito. Logo, a expansão de $\mathcal{L}$ em torno dos bordos não é correta. Observemos que estas conclusões permanecem válidas no caso em que $\tau_1 = \tau_1(\tau)$ e $\tau_2 = \tau_2(\tau)$. Em outras palavras, a escolha dos parâmetros não afeta estas conclusões. Isto pode ser visto como se segue.

Suponhamos que o bordo $\sigma=\pi$ é substituído por $\sigma = \sigma_2(\tau)$. A condição de contorno neste caso é

$$0 = (-\dot{\sigma}_2 \mathcal{P}_{\mu} + \Pi_{\mu}) y'^{\mu} = \sqrt{-g}\Big|_{\sigma=\sigma_2(\tau)} .$$

A tangente ao bordo $\tau = \tau_2(\sigma)$ se expressa como

$$= \dot{y}^{\mu} + \dot{\sigma}_2 y'^{\mu}\Big|_{\sigma=\sigma_2(\tau)} .$$

que, devido a condição $g \leq 0$, deve ser tipo tempo ou nula. Tem-se então que $g = \hat{y}^2\, y'^2 - (\hat{y}\cdot y')^2$. Agora, como y' é tipo espaço por hipótese, segue de (1.4-1) que $\hat{y} = 0$ e $\hat{y}\cdot y' = 0$ em $\tau = 0,\pi$.

A conclusão de toda esta análise é que as equações de movimento e a condição $g=0$ em $\tau=0,\pi$ não podem ser consistentemente obtidas de um princípio de ação. Não devemos, no entanto, deixar de lado a teoria dos strings. Estas inconsistências ocorrem porque estamos considerando um string sem massa, aberto e livre. Isto não acontece no caso de strings fechados, ou quando o string está em interação com campos externos ou, ainda, quando o string tem massas nos seus extremos. Vamos agora aprofundar um pouco mais a análise da geometria das superfícies que satisfazem a $g=0$ em $\sigma=0,\pi$, na tentativa de amenizar um pouco as conclusões a que chegamos.

Nos pontos extremos do string vamos definir uma base nula da seguinte maneira: juntamente com $\dot{y}^\mu(\tau,\sigma_i)$ e $y'^\mu(\tau,\sigma_i)$ consideremos os vetores $m^\mu(\tau,\sigma_i)$ e $n^\mu(\tau,\sigma_i)$, (σ_i são os valores de σ nos bordos) definidos por

$$m^2 = 0 \quad , \tag{1.4-2a}$$

$$n^2 = 0 \quad , \tag{1.4-2b}$$

$$m.y' = 0 \quad , \quad m.n = 0 \quad , \tag{1.4-2c}$$

$$n.\dot{y} = 0 \quad , \quad n.y' = 0 \quad , \tag{1.2-2d}$$

$$m.\dot{y} \neq 0 \tag{1.4-2e}$$

Lembremos que, nos bordos, $\dot{y}^2 = 0$ e $\dot{y}.y' = 0$.

A variação mais geral nos bordos da superfície se expressa em termos desta base como

$$\delta y^\mu = \alpha m^\mu + \beta n^\mu + \gamma \dot{y}^\mu + \lambda y'^\mu \tag{1.4-3}$$

com coeficientes que dependem de τ e se anulam para $\tau = \tau_1$, τ_2.

Queremos determinar quais as variações da forma (1.4-3) que levam a $\delta g > 0$ em $\sigma = 0,\pi$. É fácil verificar que nos bordos

$$\delta g = 2y'^2(\dot{y}.\delta\dot{y}) \quad , \qquad (1.4\text{-}4)$$

o que implica em

$$\delta g = 2y'^2(\alpha\ddot{y}.\dot{m} + \alpha\dot{y}.m + \beta\ddot{y}.\dot{n} + \lambda\,\dot{y}.\dot{y}') \quad . \qquad (1.4\text{-}5)$$

Para determinar os sinais dos termos desta expressão vamos fazer uso das equações de movimento. Nos limites $\sigma \to 0,\pi$, segue de (1.3-8) que

$$2(\dot{y}.\dot{y}')(\dot{y}.m) + y'^2\ddot{y}.m = 0 \quad . \qquad (1.4\text{-}6)$$

Usando este resultado os dois primeiros termos de (1.4-5) se reduzem a

$$2y'^2\,\frac{\partial}{\partial\tau}(\alpha\dot{y}.m) \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad . \qquad (1.4\text{-}7)$$

Das equações de movimento obtém-se que $\ddot{y}.\eta=0$, que, junto com $\dot{y}.\eta=0$, implica em

$$\dot{y}.\dot{n} = 0 \qquad (1.4\text{-}8)$$

que é o terceiro termo de (1.4-5). Com relação ao último termo observemos que a condição $-g>0$ resulta em

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(-g) = -\ 2y'^2(\dot{y}\cdot y') \begin{cases} \geq 0 & \text{em } \sigma = 0 \\ \\ \leq 0 & \text{em } \sigma = \pi \end{cases} \tag{1.4-9}$$

Podemos concluir que: (a) de (1.4-7), com $y'^2 > 0$, $\dot{y}\cdot m \neq 0$ e $\alpha(\tau_1) = \alpha(\tau_2) = 0$, encontra-se que todas as variações na direção $\underline{m}$ conduzem inevitavelmente à superfícies tipo-espaço; (b) de (1.4-8) vê-se que variações na direção $\underline{n}$ não contribuem em primeira ordem em g; de (1.4-9) vê-se que a superfície permanecerá causal se

$$\lambda(\tau,0) \geq \text{ e } \lambda(\tau,\pi) \leq 0 \quad , \tag{1.4-10}$$

o que significa que deformações tangenciais em torno das soluções só podem ter a direção do interior da superfície.

Verificamos então que as únicas variações permitidas nos extremos do string são $\beta\dot{y}^\mu$, $\gamma\eta^\mu$ e $\lambda y'^\mu$ com λ satisfazendo as restrições (1.4-10). Destas, apenas $\gamma\eta^\mu$ e $\lambda y'^\mu$ são deformações verdadeiras da superfície, já que $\beta\dot{y}^\mu$ representa uma nova "rotulação" da superfície original. Finalmente, é necessário verificar se as superfícies são estacionárias sob este conjunto de variações causais. Já vimos que as variações na direção η só contribuem para a área em segunda ordem. Aquelas na direção y'^μ produzem deformações no plano nulo que é tangente ao extremo do string. Logo, embora o procedimento que leva às equações de movimento (1.3-8) seja internamente inconsistente, aquelas equações descrevem superfícies que são estacionárias sob todas as variações causais.

1.5 Simetrias e leis de conservação, I. Transformações das coordenadas internas.

"We understand change only by observing what remains invariant, and permanence only by what is transformed"
G.M. Weinberg

Com relação às coordenadas internas ξ^a, a teoria dos strings é uma teoria de campo em duas dimensões, onde os campos são as coordenadas $y^\mu = y^\mu(\xi^a) \equiv y^\mu(\tau,\sigma)$ da superfície de evolução Σ. Como já vimos, a teoria é invariante sob as transformações das coordenadas internas definidas por (1.1-3) e (1.1-4,5). Estas transformações, na verdade, constituem um subgrupo conforme de (1.1-3), e sua existência é consequência da natureza bidimensional do espaço interno. Nesta seção vamos analisar as consequências da invariância da integral de ação pelas transformações (1.1-3,4,5).

Consideremos uma teoria de campo geral cuja densidade lagrangiana denotaremos por $(\partial_a y^\mu)$, $\mu = 0,1,2,3$ e $a = 1,2$. Vamos supor que a integral de ação é invariante pelas transformações infinitesimais das coordenadas internas definidas por

$$\bar{\xi}^a = \xi^a + \eta^a(\xi) \qquad (1.5\text{-}1a)$$

com

$$\eta^{a}(\xi^1,\xi^2 = 0) = \eta^{a}(\xi^1,\xi^2 = \pi) = 0 \quad . \qquad (1.5\text{-}1b)$$

Como decorrência de (1.5-1), os campos y^μ variam de acordo com

$$\tilde{\delta}y^\mu = \bar{y}^\mu(\bar{\xi}) - y^\mu(\xi) = \bar{y}^\mu(\xi + \delta\xi) - y^\mu(\xi)$$

$$= \delta y^\mu + \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a}\,\delta\xi^a \quad . \qquad (1.5\text{-}2)$$

Nesta expressão $\tilde{\delta}y^\mu$ é a diferença no valor do campo y^μ nos pontos $\bar{\xi}$ e ξ. No caso do string esta variação é nula, já que uma reparametrização não afeta as coordenadas do espaço--tempo. Segue, então, que a variação efetiva dos campos $y^\mu(\xi)$ é

$$\delta y^\mu = -\frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a}\,\delta\xi^a = -\partial_a y^\mu \eta^a(\xi) \quad . \qquad (1.5\text{-}3)$$

Por outro lado,

$$d^2\bar{\xi} = J\left(\frac{\xi}{\bar{\xi}}\right) d^2\xi = (1 + \partial_a(\delta\xi^a))d^2\xi =$$

$$= (1 + \partial_a\eta^a)d^2\xi \quad . \qquad (1.5\text{-}4)$$

Usando estes resultados e impondo que a variação da integral de ação se anula segue que

$$0 = \delta S = \delta\int d^2\xi\,\mathcal{L}(\partial y) =$$

$$= \int d^2\xi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_a(\delta y^\mu) + (\partial_a \eta^a)\mathcal{L} \right] =$$

$$= -\int d^2\xi \left[\partial_a \left(\mathcal{L}\delta^a_b - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_b y^\mu \right) + \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_b y^\mu \right] \eta^b +$$

$$+ \int d^2\xi \left(\mathcal{L}\,\delta^a_b - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_b y^\mu \right) \partial_a \eta^b \qquad (1.5\text{-}5)$$

Da arbitrariedade das funções $\eta^a(\xi)$ segue que os coeficientes de η^b e $\partial_a \eta^b$ devem se anular individualmente, isto é,

$$\mathcal{L}\,\delta^a_b - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_b y^\mu = 0 \quad , \qquad (1.5\text{-}6)$$

$$\partial_a \left(\mathcal{L}\delta^a_b - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_a y^\mu \right) = - \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_b y^\mu \qquad (1.5\text{-}7)$$

A expressão (1.5-6) nos diz que o tensor momento - energia do campo $y^\mu(\xi)$ no espaço interno é nulo. De fato, se supuzermos que as transformações (1.5) são translações rígidas no espaço interno, $\eta^a = c^{\underline{te}}$, obtém-se a lei de conservação

$$\partial_a T^{\alpha}{}_b = 0 \qquad (1.5\text{-}8)$$

com

$$T^{\alpha}{}_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \partial_b y^\mu - \delta^a_b \mathcal{L} \,. \qquad (1.5\text{-}9)$$

Este fato é uma peculiaridade das teorias de campo invariantes por reparametrizações. É importante observar que o tensor $T^a{}_b$ não é momento-energia do string no espaço-tempo, e que para homogênea de primeira ordem nas derivadas $\partial_a y^\mu$ o traço deste tensor é nulo, independentemente das equações de movimento e de (1.5-6) e (1.5-8).

Explicitemos a expressão (1.5-6):

$$\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \dot{y}^\mu = 0 \quad , \tag{1.5-10a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} y'^\mu = 0 \quad , \tag{1.5-10b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^\mu} \dot{y}^\mu = 0 \quad , \tag{1.5-10c}$$

$$- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^\mu} y'^\mu = 0 \quad , \tag{1.5-10b}$$

Usando (1.3-5) e (1.3-6) estas equações se escrevem:

$$\mathcal{L} - \mathcal{P}_\mu \dot{y}^\mu = 0 \quad , \tag{1.5-11a}$$

$$\mathcal{P}_\mu y'^\mu = 0 \quad , \tag{1.5-11b}$$

$$\Pi_\mu \dot{y}^\mu = 0 \quad , \tag{1.5-11c}$$

$$\mathcal{L} - \Pi_\mu y'^\mu = 0 \quad . \tag{1.5-11d}$$

As expressões (1.5-11a) e (1.5-11d) nos dizem que a lagrangiana $\mathcal{L}(\partial y)$ deve ser uma função homogênea de primeira ordem nas derivadas dos campos, $\partial_a y^\mu$, o que já sabemos ser verdade para o caso do string. As expressões (1.5-11b) e (1.5-11c) nos dão novas informações: as quantidades $\mathcal{P}_\mu$ e π_μ são ortogonais a y'^μ e $\dot{y}^\mu$.

Usando (1.5-6), (1.5-7) reduz-se a

$$\left(\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)}\right) \partial_b y^\mu = 0 \quad . \qquad (1.5\text{-}12)$$

Lembrando que

$$\left(\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)}\right) = 0 \qquad (1.5\text{-}13)$$

são as equações de Euler-Lagrange para o string, a equação (1.5-12) nos diz que as equações de movimento não são todas independentes. De fato, o significado analítico de (1.5-12) é que no máximo 4-2 = (dimensão do espaço-tempo) - (dimensão do espaço dos parâmetros) = 2 das equações de Euler-Lagrange são independentes. As expressões (1.5-12) são, na verdade, identidades algébricas (porque a lei de transformação das coordenadas internas não envolve as derivadas das funções arbitrárias $\eta^a(\xi)$). Neste sentido, (1.5-12) são as análogas das identidades de Bianchi na teoria da relatividade geral.

As identidades (1.5-12) têm também um significado geométrico muito importante. De fato, conforme demonstraremos mais adiante, segue de (1.5-12) que o vetor $\Box\, y^\mu$, onde

$\Box$ é o operador d'alambertiano no espaço dos parâmetros, é ortogonal ao plano tangente à superfície de evolução em todas os pontos. Este resultado é muito importante porque, como veremos, significa que a curvatura média da superfície de evolução é nula, e esta é a propriedade característica das superfícies mínimas.

Todos os resultados que obtivemos nesta seção são consequências da arbitrariedade na escolha dos parâmetros sobre a superfície de evolução. A presença das identidades (1.5-12) na teoria reflete a necessidade da imposição de condições sobre as coordenadas internas de modo a reduzir o número de soluções formalmente diferentes das equações de movimento. Sob o ponto de vista da mecânica hamiltoniana o sistema admite uma liberdade de gauge, no sentido de que a arbitrariedade na escolha dos parâmetros implica na presença de (duas) funções arbitrárias nas soluções das equações de movimento. De fato, esta arbitrariedade se manifesta na presença de dois vínculos (relações entre as coordenadas e momentos canonicamente conjugados) na formulação hamiltoniana da teoria. Tudo isto será objeto de uma exaustiva análise mais adiante.

Finalmente, observamos que a exposição que fizemos nesta seção pode ser estendida, com pequenas modificações, para o caso de lagrangianas do tipo $(y, \partial y, \partial^2 y, \ldots)$, com $y = y(\xi)$.

1.6 Simetrias e leis de conservação. II. Invariância de Poincaré e o tensor momento-energia

Vamos agora considerar a invariância da teoria sob o grupo de Poincaré. Denotando por $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ os parâme - tros infinitesimais (constantes) associados com as transformações de Lorentz, e por a^μ as componentes de um vetor (constante), tem-se que

$$\delta y^\mu = \bar{y}^\mu(\xi) - y^\mu(\xi) = \omega^\mu{}_\nu y^\mu + a^\mu \quad . \qquad (1.6\text{-}1)$$

Por uma variação qualquer δy^μ, com os parâmetros $\xi^a = (\tau,\sigma)$ mantidos fixos, tem-se que a variação na integral de ação é dada por

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^2\xi \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \, \delta(\partial_a y^\mu) = \\ &= \int d^2\xi \left[\partial_a\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \, \delta y^\mu\right) - \partial_a\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)}\right)\delta y^\mu\right] = \\ &= \int d^2\xi \; \partial_a\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \, \delta y^\mu\right) , \qquad (1.6\text{-}2)\end{aligned}$$

onde usamos as equações de movimento para escrever a última igualdade. Impondo-se a invariância da integral de ação pela transformação $y^\mu \to y^\mu + \delta y^\mu$, $\delta S = 0$, a expressão (1.6-2) conduz às leis de conservação das correntes de Noether.

Examinemos as consequências de $\delta S = 0$, quando δy^μ é dado por (1.6-1). Como os parâmetros $\omega^\mu{}_\nu$ e a^μ são indepen dentes, podemos considerar as transformações associadas com cada conjunto separadamente. Assim consideremos primeiramente $\delta y^\mu = a^\mu$ = constante, isto é, a transformação é uma translação rígida no espaço-tempo. Segue de (1.6-2) que

$$0 = \delta S = \int d^2\xi \; \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)}\right) a^\mu \tag{1.6-3}$$

Da independência dos parâmetros a^μ segue que a "corrente" $j = (j^a{}_\mu)$, com

$$j^a_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} \tag{1.6-4}$$

é conservada,

$$\partial_a j^a_\mu \equiv \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} = 0 \ . \tag{1.6-5}$$

Mas as expressões (1.6-5) nada mais são que as equações de movimento (1.3-8). Na verdade, as componentes da corrente, dadas por (1.6-4), são exatamente as quantidades $\mathcal{P}_\mu$ e Π_μ definidas pelas equações (1.3-5) e (1.3-6),

$$j^1_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} = \mathcal{P}_\mu \ , \tag{1.6-6a}$$

$$j^2_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'^\mu} = \Pi_\mu \ . \tag{1.6-6b}$$

Estes resultados nos dão várias informações importantes. Primeiro, que as equações de movimento de Euler Lagrange e a lei de conservação que se obtem da invariância da integral de ação por translações rígidas do espaço-tempo são idênticas. Por outro lado, a quantidade que se conserva como consequência da invariância por translações é o momento associado com o sistema. Assim, as equações (1.6-5) e, consequentemente as equações de movimento (1.3-8), expressam a lei de conservação, do momento associado ao string. Disto segue que a segunda informação que é a identificação das quantidades $\wp_\mu$ e Π_μ. De fato, como τ foi identificado como um parâmetro de evolução e σ como um parâmetro que rotula os pontos sobre o string, segue que as quantidades $\;_\mu$ devem ser identificadas como os momentos canonicamente conjugados com as coordenadas generalizadas y^μ; as quantidades Π_μ, por sua vez, são identificadas com o momento ao longo do string, isto é, para um dado valor do parâmetro τ. Em outras palavras, as quantidades Π_μ estão associadas com a tensão interna do string. Finalmente, destes resultados podemos dar uma interpretação física para as condições de bordo (1.3-10), $\Pi_\mu = 0$ em $\sigma = 0,\pi$. Estas nos dizem simplesmente que o "momento interno" do string não flui para o exterior.

O momento dp_μ associado com uma translação infinitesimal δy^μ, isto é, que flui por um elemento de linha $(d\tau, d\sigma)$ sobre a superfície de evolução Σ, é

$$dp_\mu = \wp_\mu d\sigma + \Pi_\mu d\tau \quad . \tag{1.6-7}$$

O momento total que flui através de uma curva C sobre Σ é, portanto,

$$P_\mu = \int_c dp_\mu = \int_c (\mathcal{P}_\mu d\sigma + \Pi_\mu d\tau) \quad . \tag{1.6-8}$$

Note que se C for uma curva fechada a expressão acima se anula.

O gerador de translações infinitesimais é obtido de (1.6-8) para τ fixo,

$$P_\mu = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}_\mu(\tau,\sigma) \quad . \tag{1.6-9}$$

Das equações de movimento segue que esta quantidade é conservada,

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{P}_\mu = 0 \quad . \tag{1.6-10}$$

Consideremos agora as transformações de Lorentz infinitesimais, $\delta y^\mu = \omega^\mu{}_\nu\, y^\nu$. Segue de (1.6-2) que

$$0 = \int d^2\xi\ \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)}\, y^\nu\right) \omega_{\alpha\nu} \eta^{\alpha\mu} \quad , \tag{1.6-11}$$

donde segue a lei de conservação

$$\partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)}\, y^\mu \eta_{\alpha\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\nu)}\, y^\mu \eta_{\alpha\nu}\right) = 0 \quad . \tag{1.6-12}$$

Explicitando esta última expressão encontra-se

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,(y^{\mu}\mathcal{P}^{\nu} - y^{\nu}\mathcal{P}^{\mu}) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\,(y^{\mu}\Pi^{\nu} - y^{\nu}\Pi^{\mu}) = 0 \quad (1.6\text{-}13)$$

Da mesma forma que no caso anterior, define-se o momento angular que flui através de uma curva C sobre Σ por

$$M^{\mu\nu} = \int_{c}(y^{\mu}\mathcal{P}^{\nu} - y^{\nu}\mathcal{P}^{\mu})d\sigma + \int(y^{\mu}\Pi^{\nu} - y^{\nu}\Pi^{\mu})d\tau \;. \quad (1.6\text{-}14)$$

O gerador de transformações de Lorentz infinitesimais sobre y^{μ} é obtido desta última expressão para τ fixo;

$$M^{\mu\nu} = \int_{c}(y^{\mu}\mathcal{P}^{\nu} - y^{\nu}\mathcal{P}^{\mu})d\sigma \;, \quad (1.6\text{-}15)$$

e é uma quantidade conservada.

$$\frac{d}{d\tau}\,M^{\mu\nu} = 0 \;. \quad (1.6\text{-}16)$$

Tendo identificado os geradores de translações e de rotações de Lorentz infinitesimais, se faz necessário mostrar que a álgebra do grupo de Poincaré é satisfeita. No contexto da Mecânica Clássica esta álgebra deve ser verificada no sentido do colchete de Poisson. Assim, vamos definir os colchetes de Poisson fundamentais entre as variáveis canônicas conjugadas $y^{\mu}(\tau,\sigma)$ e $\mathcal{P}_{\nu}(\tau,\sigma)$ por

$$\{y^{\mu}(\tau,\sigma),\mathcal{P}_{\nu}(\tau,\sigma')\} = \delta^{\mu}_{\nu}\delta(\sigma-\sigma') \qquad (1.6\text{-}17)$$

$$\{y^{\mu},y^{\nu}\} = 0 \quad , \quad \{\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\nu}\} = 0 \quad . \qquad (1.6\text{-}18)$$

Com estas definições, pode-se verificar que a álgebra do grupo de Poincaré é realmente satisfeita:

$$\{P_{\mu},P_{\nu}\} = 0 \quad , \qquad (1.6\text{-}19a)$$

$$\{M_{\mu\nu},P_{\eta}\} = \eta_{\mu\nu}P_{\nu} - \eta_{\nu\lambda}P_{\mu} \quad , \qquad (1.6\text{-}19b)$$

$$\{M^{\mu\nu},M^{\rho\eta}\} = C^{\mu\nu\rho\lambda}_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} \qquad (1.6\text{-}19c)$$

Na última expressão acima $C^{\mu\nu\rho\lambda}_{\alpha\beta}$ são as constantes de estrutura do grupo de Lorentz, definidas por

$$C^{\mu\nu\rho\lambda}_{\alpha\beta} = -\,\delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}\eta^{\nu\lambda} + \delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\eta^{\mu\lambda} - \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta}\eta_{\nu\rho} + \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta}\eta^{\mu\rho} \quad . \qquad (1.6\text{-}20)$$

Usando os colchetes de Poisson fundamentais (1.6-17,18) pode-se verificar que

$$\{P_{\mu},y^{\nu}(\tau,\sigma)\} = -\,\eta^{\nu}_{\mu} \qquad (1.6\text{-}21)$$

e

$$\{M^{\alpha\beta},y^{\nu}(\tau,\sigma)\} = \eta^{\alpha\mu}y^{\beta}(\tau,\sigma) - \eta^{\beta\mu}y^{\alpha}(\tau,\sigma) \quad , \qquad (1.6\text{-}22)$$

donde se conclui que P_{μ} e $M^{\alpha\beta}$ realmente geram as transformações de Poincaré infinitesimais de $y^{\mu}(\tau,\sigma)$, O tensor momento-energia do string no espaço-tempo pode ser calculado pelo método apresentado no capítulo 0, escrevendo-se a integral de ação do string no espaço-tempo

$$S = \int d^4x\sqrt{-\gamma} \int d^2\xi \mathcal{L} \overset{(4)}{\delta} (y - x(\tau,\sigma)) \ . \tag{1.6-23}$$

O resultado é

$$T^{\mu\nu}[y] = -N \int d^2\xi \overset{(4)}{\delta} (y - x(\xi)) \frac{1}{\sqrt{-g}} \Big[(\dot{x}.x')(\dot{x}^\mu x'^\nu + \dot{x}^\nu x'^\mu) - - \dot{x}^2 x'^\mu x'^\nu - x'^2 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\Big] \tag{1.6-24}$$

onde, outra vez, introduzimos a métrica de Minkowski.

A expressão (1.6-24) pode ser escrita numa forma bastante simples usando-se as componentes contravariantes do tensor métrico da superfície de evolução, definidas por (1.2-14,15,16). De fato, é imediato verificar que

$$T^{\mu\nu}[y] = -N\int d^2\xi \overset{(4)}{\delta} (y - z(\xi)) g^{ab} \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial y^\nu}{\partial \xi^b} \sqrt{-g} \ . \tag{1.6-25}$$

O tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ é invariante pelas transformações admissíveis no espaço dos parâmetros e portanto é invariante de gauge. Além disto, $T^{\mu\nu}$ é conservado,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{1.6-26}$$

A aplicação da prescrição de Hilbert para definir o tensor momento-energia conduz a um resultado interessante quando aplicado ao espaço dos parâmetros. Assim, escrevendo-se a integral de ação sob a forma

$$S = - N\int d^2\xi\sqrt{-g}$$

e definindo o tensor T^{ab} por

$$\delta S = - N\int d^2\xi\sqrt{-g}\; T^{ab}\delta g_{ab} \qquad (1.6\text{-}27)$$

encontra-se que

$$T^{ab} = g^{ab} \quad . \qquad (1.6\text{-}28)$$

Este resultado nos mostra que g^{ab} funciona como um tensor de tensões no espaço dos parâmetros. Como consequência deste resultado, o princípio da ação estacionária para o string não pode ser considerado como uma mera extensão do caso da partícula livre. A imposição de que a área da superfície de evolução Σ é mínima implica na existência de tensões sobre Σ e, portanto, conduz a um modelo bastante específico de um sistema com extensão espacial.

Seguindo o mesmo procedimento da seção 0.6, pode-se demonstrar que, dado

$$T^{\mu\nu} = - N\int d^2\xi t^{\mu\nu}(\xi)\overset{(4)}{\delta}(x - z(\xi)) \quad ,$$

onde $t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu}$ é uma função arbitrária de ξ, a lei de conservação $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ determina não só o tensor $t^{\mu\nu}$ como a dinâmica do sistema. Como no caso da partícula, este procedimento é válido em geral com $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$, com a lei de conservação $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. Vamos considerar apenas $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e dar as linhas gerais do cálculo.

Fazendo a decomposição de $t^{\mu\nu}$ com relação as direções $\partial_a y^{\mu}$,

$$t^{\mu\nu} = t^{ab}\partial_a y^{\mu}\partial_b y^{\nu} + (t^{b\mu}\partial_a y^{\nu} + t^{b\nu}\partial_b y^{\mu}) + m^{\mu\nu} \qquad (1.6\text{-}29)$$

com

$$t^{ab} = t^{\mu\nu}\partial^a y_{\mu}\partial^b y_{\nu} \ ,$$

$$m^{\mu\nu}t_{b\nu} = 0 \quad ,$$

segue de $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ que

$$\frac{\partial}{\partial\xi^a}(t^{ab}\partial_b y^{\mu} + t^{a\mu}) = 0 \qquad (1.6\text{-}30)$$

e

$$m^{\mu\nu} + t^{a\nu}\partial_a y^{\mu} = 0 \quad , \qquad (1.6\text{-}31)$$

e mais a condição de bordo $y'^{\mu} = 0$ em $\sigma = 0, \pi$ no caso de strings abertos.

Projetando a equação na direção $\partial_b y^{\mu}$ resulta que $t^{a\nu}\, g_{ab} = 0$ e, portanto, $t^{a\nu} = 0$. Com este resultado segue de (1.6-31) que $m^{\mu\nu} = 0$, e as equações (1.6-29) e (1.6-30) se escrevem

$$t^{\mu\nu} = t^{ab}\partial_a y^\mu \partial_b y^\nu \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} (t^{ab}\partial_b y^\mu) = 0 \quad .$$

Estas equações tem a forma das equações que procuramos. O tensor t^{ab} fica arbitrário, como consequência da simetria do sistema por reparametrizações. A escolha óbvia é $t^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\ g^{ab}$.

1.7 Análise de algumas soluções clássicas

Esta seção é devotada a análise de algumas soluções simples das equações de movimento do string. Inevitavelmente teremos de usar alguns aspectos da teoria que não foram ainda estudados com detalhes. Isto diz respeito à escolha dos parâmetros τ e σ.

Já verificamos que as equações de Euler-Lagrange para o string não são todas independentes, o que se traduz pela existência das identidades (1.5-12). Chamamos a atenção de que este fato é um reflexo da arbitrariedade na escolha dos parâmetros, isto é, da covariância da teoria sob as transformações (1.1-3,4,5). O que ocorre é que a solução geral $y^\mu(\tau,\sigma)$ das equações de movimento com uma parametrização arbitrária contém as informações físicas sobre a superfície de evolução e também informações não físicas sobre a parametrização. Este excesso de informações deve ser eliminado da teoria e isto é feito impondo-se duas condições sobre as variáveis dinâmicas (e assim eliminando as soluções das equações de movimento que não são independentes, isto é, quebrando a invariância de gauge da teoria), e fazendo-se uma escolha específica dos parâmetros (e desta forma quebrando a covariância da teoria sob as transformações (1.1-3).

As equações de movimento (1.3-8) para as coordenadas (campos) $y^{\mu}(\tau,\sigma)$ são, de modo geral, muito complicadas. Na verdade são equações não-lineares, devido ao fato da lagrangiana do sistema não ser polinomial. A liberdade de gauge que temos, isto é, a liberdade de impormos duas condições sobre as coordenadas, deve ser usada para tornar estas equações as mais simples possíveis. Neste ponto é importante fazer uso de um teorema da geometria diferencial que diz que qualquer superfície bidimensional imersa no espaço-tempo de Minkowski pode ser tornada conformalmente plana, o que quer dizer que a métrica g_{ab} pode sempre ser posta sob a forma $g_{ab} = f(y) \times \text{diag}(-1,+1)$. Examinando-se a expressão (1.2-5) vê-se que isto pode ser feito impondo-se que

$$g_{11} = - g_{22} \qquad (1.7\text{-}1a)$$

e

$$g_{12} = g_{21} = 0 \ . \qquad (1.7\text{-}1b)$$

Em termos das coordenadas y^μ estas condições se escrevem, respectivamente,

$$\dot{y}^2 = -\, y'^2 \tag{1.7-2a}$$

e

$$\dot{y}\cdot y' = 0 \ . \tag{1.7-2b}$$

Com esta escolha o elemento de linha sobre a superfície de evolução assume a forma conformalmente plana

$$d\ell^2 = y'^2(-d\tau^2 + d\sigma^2) \tag{1.7-3}$$

e as equações de movimento se escrevem

$$\Box\, y^\mu \equiv \ddot{y}^\mu - y''^\mu = 0 \quad , \tag{1.7-4}$$

com as condições de bordo

$$y'^\mu(\tau,0) = y'^\mu(\tau,\pi) = 0 \ . \tag{1.7-5}$$

Note que (1.7-4) é a equação de Klein-Gordon sobre Σ .

O gauge definido por (1.7-2a,b) é denominado de gauge ortonormal, e é a escolha de gauge mais natural no sentido de que conduz à forma mais simples para as equações de movimento. A denominação de gauge ortonormal vem do fato que (1.7-2) define as linhas coordenadas $\tau = c^{te}$ e

$\sigma = c^{te}$ como linhas ortogonais em todos os pontos de Σ. É claro que, dependendo do problema que se tem em mãos, outras escolhas podem ser mais convenientes. Mais adiante usaremos um outro gauge para estudar um problema particular. Deve-se ter em mente que a escolha de um gauge, como (1.7-2a,b), de modo geral simplifica o problema por um lado, mas por outro pode complicar as coisas. No caso do gauge ortonormal, o estudo do problema da imersão de Σ no espaço-tempo se complica devido às condições (1.7-5), mas, em contrapartida, as equações de movimento são muito simples e pode-se fazer uma análise muito geral de suas soluções. É importante observar que a escolha (1.7-2a,b) torna polinomial a densidade lagrangiana, que fica sob a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{N}{2}\,(\dot{y}^2 - y'^2) \qquad (1.7\text{-}6)$$

e daí segue toda a simplificação do problema.

Consideremos a seguinte parametrização:

$$y^0 = \tau \quad , \quad \dot{y}^0 = 1 \quad , \; y'^0 = 0 \quad , \; \vec{t} = \{y'^i \equiv t^i\} \; , \qquad (1.7\text{-}7a)$$

onde o vetor $\vec{t}$ é tangente a curva $\vec{y} = \vec{y}(y^0,\sigma)$; o elemento de arco fica dado por

$$ds = \sqrt{\frac{\partial\vec{y}}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\vec{y}}{\partial\sigma}}\, d\sigma = |\vec{t}|\, d\sigma \; . \qquad (1.7\text{-}7b)$$

A velocidade de um ponto do string fica definida por

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau} \quad . \tag{1.7-8}$$

É claro que apenas a componente de $\vec{v}$ transversal ao string, $\vec{v}_\perp$, é de interesse físico. Tem-se que

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau} - \frac{\partial \vec{y}}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau}\right) \quad , \tag{1.7-9a}$$

$$v_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau}\right) \tag{1.7-9b}$$

já que $\partial \vec{y}/\partial s$ é um vetor unitário.

As componentes do tensor métrico podem ser expressas como

$$g_{11} = \dot{y}^2 = -1 + \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) \quad , \tag{1.7-10a}$$

$$g_{22} = y'^2 = \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \vec{y}}{\partial \sigma}\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)^2 , \tag{1.7-10b}$$

$$g_{12} = \dot{y}\cdot y' = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau} = \frac{\partial s}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau}\right) . \tag{1.7-10c}$$

Segue então que

$$\sqrt{-g} = \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)\left[1 - \frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{y}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau}\right]^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)(1 - v_\perp^2)^{1/2} \quad , \tag{1.7-11}$$

e a integral de ação pode ser escrita como

$$S = - N \int d\tau\, ds \sqrt{1-v_\perp^2} \quad . \qquad (1.7\text{-}12)$$

Com a parametrização (1.7-7a) (denominada de "parametrização de laboratório") a escolha do gauge ortonormal (1.7-2a,b) resulta em

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp \quad , \quad \vec{v}.\vec{t} = 0 \quad , \quad t^2 = 1 - v^2 \quad , \qquad (1.7\text{-}13)$$

e a integral de ação fica sob a forma

$$S = - N \int d\tau\, d\sigma (1 - v^2) \quad . \qquad (1.7\text{-}14)$$

Podemos definir o comprimento próprio de curva,

$$L_0(\tau) = \int ds = \int_0^\pi d\sigma \sqrt{1-v^2} \qquad (1.7\text{-}15a)$$

e o seu comprimento de laboratório, que leva em conta a contração de Lorentz,

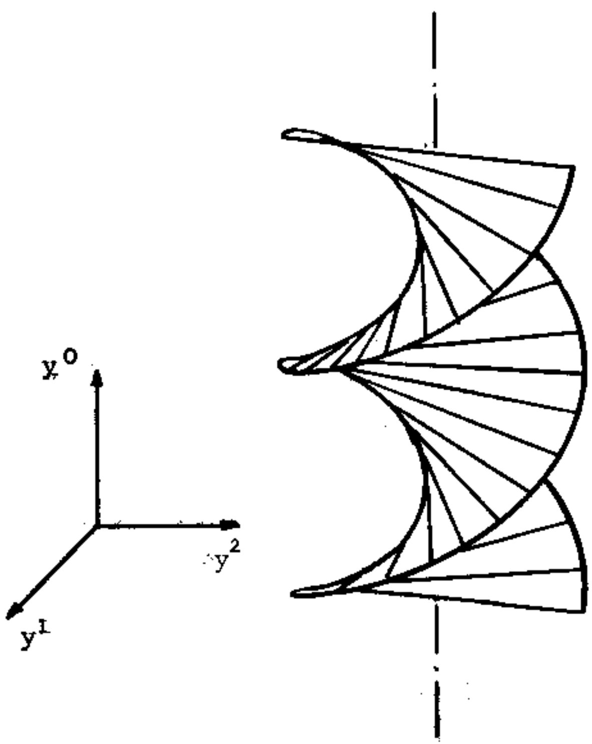
$$L(\tau) = \int ds \sqrt{1-v^2} = \int_0^\pi d\sigma (1 - v^2) \qquad (1.7\text{-}15b)$$

O comprimento $L(\tau)$ de modo geral não é conservado no processo de movimento. Em termos de $L(\tau)$ a integral de ação se escreve

$$S = N \int d\tau\, L(\tau) \quad .$$

Assim, o princípio da ação pode ser tratado como um princípio de Hamilton para os pontos do string, combinado com uma condição estática de L mínimo.

Consideremos um modelo fisicamente possível: um string rígido em rotação no plano (y^1, y^2). A história do string está representado na figura abaixo.



Com a parametrização $y^o = \tau$ este modelo pode ser descrito por

$$\left(y^\mu(\tau,\sigma)\right) = \begin{pmatrix} \tau \\ k(\sigma - \frac{1}{2}\pi)\cos\omega\tau \\ k(\sigma - \frac{1}{2}\pi)\sin\omega\tau \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.7\text{-}16)$$

Por um cãlculo direto encontra-se que

$$\left(\mathcal{P}_\mu(\tau,\sigma)\right) = \frac{Nk}{\sqrt{1-\omega^2k^2(\sigma-\frac{1}{2}\pi)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega k(\sigma-\frac{1}{2}\pi)\sin\omega\tau \\ \omega k(\sigma-\frac{1}{2}\pi)\cos\omega\tau \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7\text{-}17a)$$

e

$$\left(\Pi_\mu(\tau,\sigma)\right) = -\frac{N\sqrt{1-\omega^2k^2(\sigma-\frac{1}{2}\pi)^2}}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ k\cos\omega\tau \\ k\sin\omega\tau \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (1.7\text{-}17b)$$

Com (1.7-17,a,b) verifica-se sem dificuldades que as equações de movimento são satisfeitas. Das condições de bordo (1.3-10) encontra-se que

$$k = \frac{2}{\omega\pi} \quad .$$

Usando as expressões (1.6-9) e (1.6-15) obtém-se a energia $E = P^0$ e o momento angular $J = J^{12}$:

$$E = \frac{\pi^2 Nk}{2} \quad , \quad J = \frac{\pi^3 Nk^2}{8} \quad . \quad (1.7\text{-}18)$$

É instrutivo examinar este modelo usando os argumentos que conduziram de (1.7-7) a (1.7-12). Tem-se que

$$p_\perp = \frac{\partial}{\partial v_\perp}\left(-N\sqrt{1-v_\perp^2}\right) = N\frac{v_\perp}{\sqrt{1-v_\perp^2}}$$

é o momento transversal em cada ponto do string, e

$$E = \int d\ell\left(p_\perp v_\perp - N\sqrt{1-v_\perp^2}\right)$$

é a energia. Supondo que o string tem comprimento 2a, a velocidade em cada ponto é $v_\perp = \omega\ell$, $-a \leq \ell \leq a$. Nos pontos extremos, a velocidade é $c = 1 = wa$. Integrando a expressão da energia acima e a do momento angular,

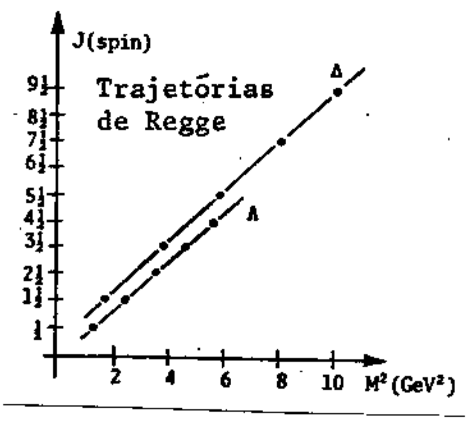
$$J = \int p_\perp \ell \, d\ell ,$$

encontramos as expressões (1.7-19). (É interessante observar que o momento angular J é igual a N multiplicado pela metade da área varrida pelo string numa semi-revolução. Com a parametrização $y^0 = \tau$ este resultado é válido para qualquer tipo de configuração).

De (1.7-18) tem-se que

$$J = \alpha' E^2 = \alpha' M^2 \qquad (1.7\text{-}19)$$

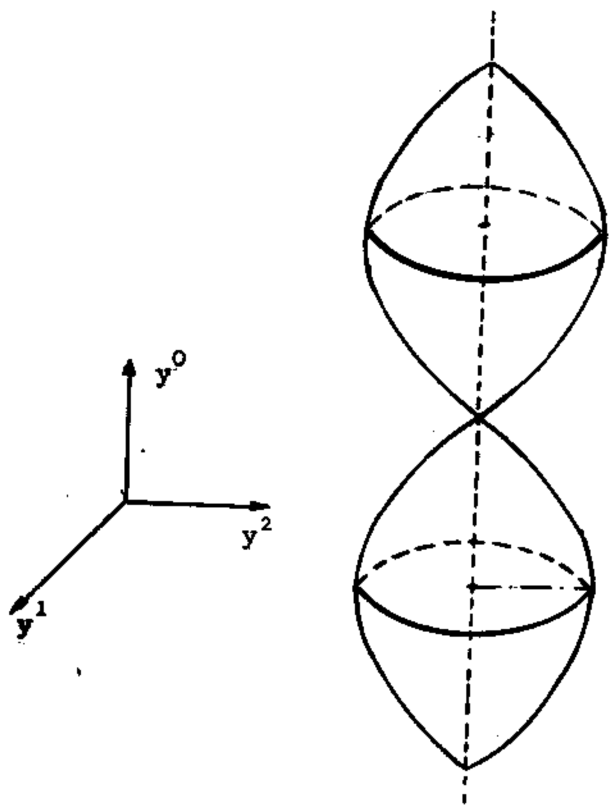
onde M é a massa de repouso do string. Este resultado é muito relevante para a física de altas energias. Se fizermos um diagrama $(\text{massa})^2 \times J$ para hadrons-partículas que participam das interações fortes - tem-se que hadrons com mesmo isospin, estranheza, etc caem sobre linhas retas, como na figura abaixo. Estas linhas são denominadas de "trajetórias de Regge".



Isto sugere a possibilidade dos hadrons serem objetos compostos por strings relativísticos. Os hadrons não são partículas puntuais, mas são objetos com estrutura interna consistindo aparentemente, de quarks e "gluons" (campos vetoriais). Esta imagem é de certo modo reminiscente de um sistema de partículas com cargas positivas e negativas ligadas pelo campo eletromagnético. A diferença reside no fato que gluons interagem fortemente entre si e deste modo não se dissipam como o campo eletromagnético. Ao contrário destes, o campo de gluons tende a se concentrar em tubos estreitos (strings) que ligam as fontes do campo, os quarks. Mais adiante daremos um pouco mais de detalhes sobre estes assuntos.

Como um possível modelo de string fechado mencionamos um círculo pulsante no plano (y_1, y_2), com raio máximo a, descrito por

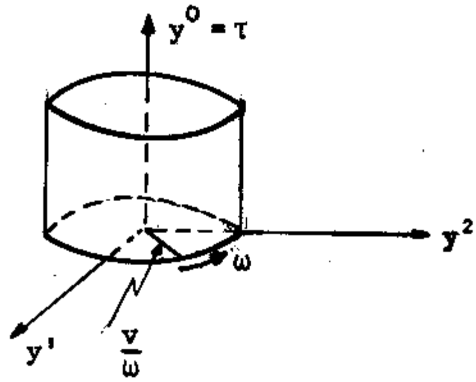
$$y_1(\tau,\omega) + i y_2(\tau,\omega) = a \cos \frac{\tau}{a} \cdot e^{i\frac{\omega}{a}} \quad .$$



Um outro modelo de string fechado é o string circular em movimento de rotação uniforme no plano (y^1,y^2). Neste caso, os campos $y^\mu(\tau,\sigma)$ podem ser representados por

$$(y^\mu) = \begin{pmatrix} \tau \\ \frac{v}{\omega} \cos(2\pi\sigma + \omega\tau) \\ \frac{v}{\omega} \operatorname{sen}(2\pi\sigma + \omega\tau) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a história do string é um cilindro como na figura abaixo, onde omitimos a direção y^3.



Deixamos a análise destes dois modelos para o leitor.

Vamos considerar uma outra possível escolha de gauge representada pelas seguintes condições:

$$y'^2 = -1 \quad , \quad \dot{y}\cdot y' = 0 \tag{1.7-20}$$

Esta escolha não torna a lagrangiana polinomial e, consequentemente, não lineariza as equações de movimento. As condições de bordo permanecem inalteradas, isto é, as histórias dos pontos extremos dos strings resultam ser linhas nulas. Observemos que de (1.7-20) decorre que

$$y'\cdot y'' = 0 \quad , \quad \dot{y}\cdot y'' = 0 \tag{1.7-21}$$

de modo que os três vetores $(\dot{y}^\mu, y'^\mu, y''^\mu)$ são mutuamente ortogonais.

As equações de movimento, neste gauge, se escrevem

$$\ddot{y}^\mu - (\dot{y}^2)y''^\mu - (\dot{y}\cdot\dot{y}')y'^\mu - (\dot{y}^2)^{-1}(\dot{y}\cdot\ddot{y})\dot{y}^\mu = 0 \quad , \tag{1.7-22}$$

com as condições $y'^{\mu} = 0$ em $\sigma = 0, \pi$.

Um string rígido em rotação no plano (y^1, y^2), que vimos ser um possível modelo no gauge ortonormal, também o é no gauge definido por (1.7-20). Vamos analisar este modelo usando uma técnica diferente da que usamos no caso do gauge ortonormal.

Vamos introduzir os seguintes vetores unitários: $\hat{e}_1$ na direção radial, $\hat{e}_o$ na direção temporal e $\hat{e}_z$ na direção transversal com propriedades que daremos mais adiante. O vetor posição de um evento na história do string se escreve

$$\vec{y} = \sigma\hat{e}_1 + \tau\hat{e}_o \quad . \qquad (1.7\text{-}23)$$

Como fizemos anteriormente, $-a \leq \sigma \leq a$ e $L=2a$ é o comprimento do string. A velocidade num dado ponto do string é $v=\omega\sigma$ com $\omega = a^{-1}$.

Definindo o vetor transversal $\hat{e}_z$ (no plano do movimento) por

$$\dot{\hat{e}}_1 = \omega\hat{e}_2 \ , \ \hat{e}_1' = 2\pi\hat{e}_2 \ , \ \dot{\hat{e}}_2 = -\omega\hat{e}_1 \ , \ \hat{e}_2' = -2\pi\hat{e}_1 \ ,$$

e impondo que $\hat{e}_o$ satisfaz a

$$\dot{\hat{e}}_o = 0 \quad , \quad \hat{e}_o' = 0 \quad ,$$

obtém-se as seguintes relações:

$$\dot{\vec{y}} = \omega\sigma\hat{e}_2 + \hat{e}_o \quad , \quad \dot{y}^2 = 1 - \sigma^2\omega^2 \qquad (1.7\text{-}24a)$$

$$\vec{y}' = \hat{e}_1 \quad , \quad y'^2 = -1 \quad , \quad \dot{y}\cdot y' = 0 , \qquad (1.7\text{-}24b)$$

$$\ddot{\vec{y}} = -\omega^2\sigma\hat{e} \quad , \quad , \qquad (1.7\text{-}24c)$$

$$\dot{\vec{y}}' = \omega\hat{e}_2 \quad , \quad \dot{y}\cdot\dot{y}' = -\sigma\omega^2 \quad , \qquad (1.7\text{-}24d)$$

$$\vec{y}'' = 0 \quad . \qquad (1.7\text{-}24e)$$

As condições de bordo, neste caso, são $(1-\sigma^2 w^2)^{1/2}\hat{e}_1|_{\sigma=a,-a} \equiv 0$, identicamente satisfeitas, e as equações de movimento se reduzem a

$$\ddot{\vec{y}} = (\dot{y}\cdot\dot{y}')\vec{y} \quad , \qquad (1.7\text{-}25)$$

que também são satisfeitas em virtude das relações (1.7-24).

O momento e o momento-angular podem ser calculados sem dificuldades:

$$\vec{P} = N\int_{-a}^{a} d\tau (a^2-\sigma^2)^{-1/2}(\sigma\hat{e}_2 + a\hat{e}_o) = (N\pi_a)\hat{e}_o \quad , \qquad (1.7\text{-}26)$$

$$\vec{M} = N\int_{-a}^{a} d\sigma (a^2-\sigma^2)^{-1/2}\left[\sigma^2(\hat{e}_1 x\hat{e}_2) + a\sigma(\vec{e}_1 x\vec{e}_o)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, a^2 N(\vec{e}_1 x\vec{e}_2) \quad . \qquad (1.7\text{-}27)$$

A energia, $E = N\pi a$, e o momento angular, $M = \frac{\pi}{2}\, a^2 N$, como se vê, são conservados.

Digressão: strings x campos eletromagnéticos

Vamos exibir uma propriedade curiosa da teoria dos strings no gauge definido pelas equações (1.7-20). As equações de movimento (1.7-22) podem ser escritas sob a forma

$$\ddot{y}^{\mu} = W^{\mu}{}_{\nu}\dot{y}^{\nu} + \Omega\dot{y}^{\mu} \quad , \qquad (1.7\text{-}28a)$$

onde

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial\tau}(\ell n\, \dot{y}^{2}) \quad , \qquad (1.7\text{-}28b)$$

$$W^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{\partial}{\partial\tau}(\Sigma^{\mu}{}_{\nu}) \quad , \quad W_{\mu\nu} = -W_{\mu\nu} \qquad (1.7\text{-}28c)$$

e os $\Sigma^{\mu\nu}$ são as coordenadas de Plücker definidas por (1.2-10).

Consideremos o caso em que $\Omega=0$ (isto ocorre para o movimento estacionário do string, por exemplo). Neste caso as equações de movimento (1.7-28a) assumem a forma das equações de Lorentz para uma partícula carregada com $e/_{m}=1$. Adotando este ponto de vista, somos levados à conclusão que cada parte do string se comporta como sob a ação de um campo eletromagnético gerado pelo próprio string, um tipo de auto-interação. É claro que isto é apenas uma interpretação formal das equações de movimento mas é possível levar mais adiante esta analogia com a interação eletromagnética.

Neste sentido, vamos introduzir uma corrente j^{μ}, que atua como fonte do tensor $W^{\mu}\nu$, pelas equações "tipo Maxwell"

$$\partial_\nu W^{\mu\nu} = j^\mu \quad . \tag{1.7-29}$$

Esta corrente é claramente conservada e pode ser expressa em termos das derivadas de $y^\mu(\tau,\sigma)$ da seguinte maneira. Consideremos o operador

$$D^\mu \equiv y'^\mu \frac{\partial}{\partial\tau} - \dot{y}^\mu \frac{\partial}{\partial\tau} \equiv \Sigma^{\mu\nu}\partial_\nu \quad . \tag{1.7-30}$$

Substituindo

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} = \left(\frac{\partial\tau}{\partial y^\nu}\right)\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y^\nu}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}$$

em (1.7-30) resulta que

$$y'^\mu \frac{\partial}{\partial\tau} - \dot{y}^\mu \frac{\partial}{\partial\sigma} = \left[\left(\dot{y}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial y}\right) y'^\mu - \left(y'\cdot\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)\dot{y}^\mu\right]\frac{\partial}{\partial\tau} + \left[\left(\dot{y}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) y'^\mu - \left(y'\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\dot{y}^\mu\right]\frac{\partial}{\partial\sigma} \quad , \tag{1.7-31}$$

donde se obtem

$$\frac{\partial\tau}{\partial y^\nu} = \eta_{\alpha\nu}\frac{\dot{y}^\alpha}{\dot{y}^2} \quad , \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y^\nu} = -\eta_{\alpha\nu}y'^\alpha \quad . \tag{1.7-32}$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} = \eta_{\alpha\nu}\frac{\dot{y}^\alpha}{\dot{y}^2}\frac{\partial}{\partial\tau} - \eta_{\alpha\nu}y'^\alpha\frac{\partial}{\partial\sigma} \quad . \tag{1.7-33}$$

Usando este resultado, obtemos de (1.7-29)

$$j^{\mu} = - \dot{y}^{\mu} - \frac{(\dot{y}\cdot\dot{y}')}{\dot{y}^2}\,\dot{y}'^{\mu} \quad , \qquad (1.7\text{-}34)$$

resultado que é válido para qualquer string aberto, no gauge (1.7-20) e satisfazendo a condição $\Omega=0$.

A partir de (1.7-34) podemos definir uma corrente no espaço dos parâmetros por

$$j^{a} = \sqrt{-g}\; g^{ab}(\partial_a y^{\mu})\, j_{\mu} \quad , \qquad (1.7\text{-}35)$$

que é também conservada. De fato,

$$\partial_a j^{a} = \left[\partial_a(\sqrt{-g}\; g^{ab}\partial_b y^{\mu})\right] j_{\mu} + \sqrt{-g}\; g^{ab}(\partial_a y^{\mu})\,\partial_b j_{\mu} \ .$$

O coeficiente do primeiro termo é igual a zero devido às equações de movimento, enquanto que o segundo termo é nulo por ser proporcional a $\partial_{\mu} j^{\mu}$.

A questão que se põe agora é se é possível introduzir um potencial vetor B^{μ} tal que

$$W_{\mu\nu} = - \frac{\partial}{\partial\sigma}\,\Sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial B_{\mu}}{\partial y^{\mu}} - \frac{\partial B_{\mu}}{\partial y^{\nu}} \quad . \qquad (1.7\text{-}36)$$

A existência deste potencial é assegurada se pudermos provar que o tensor $W_{\mu\nu}$ satisfaz as identidades de Bianchi ou, em outras palavras, que o tensor dual

$$\overset{*}{W}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta} \qquad (1.7\text{-}37)$$

tem divergência nula,

$$\partial_\mu \overset{*}{W}^{\mu\nu} = 0 \quad .$$

É possível mostrar, por um cálculo direto, que isto realmente é verdade. Neste sentido deve-se fazer uso das equações de movimento e da condição $\Omega=0$.

A equação (1.7-36), que determina os potenciais, pode ser simplificada por inspeção ou por uma escolha de gauge para B_μ. No primeiro caso, uma possível simplificação é fazer

$$\frac{\partial B^\nu}{\partial y^\mu} = \frac{\partial}{\partial \sigma}(y'_\mu y^\nu) \quad . \tag{1.7-38}$$

Os potenciais, neste caso, satisfazem automaticamente a condição do gauge de Lorentz,

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{y} \cdot y') = 0 \quad .$$

Como exemplo de uma escolha de gauge consideremos o "gauge de Poincaré", definido pela condição

$$y^\mu B_\mu = 0 \quad . \tag{1.7-39}$$

Neste gauge o tensor $W^{\mu\nu}$ e o potencial B^μ são relacionados por

$$y^{\mu}W_{\mu\nu} = B_{\nu} + y^{\mu}\partial_{\mu}B_{\nu} \quad . \tag{1.7-40}$$

Usando esta equação podemos expressar B^{μ} em termos de $W^{\mu\nu}$ por

$$B_{\nu}[\lambda] = \int_{0}^{1} \lambda\, y^{\mu}W_{\mu\nu}[\lambda]d\lambda \tag{1.7-41}$$

onde λ é um parâmetro arbitrário e $f[\lambda]$ significa que o argumento da função deve ser submetido à transformação de escala $y^{\mu} \to \lambda y^{\mu}$. Usando (1.7-41) e (1.7-28) obtemos

$$B^{\mu} = \frac{1}{4}\, W_{\nu}{}^{\mu}y^{\nu} \quad . \tag{1.7-42}$$

Por um lado os resultados acima são peculiaridades formais da teoria do string no gauge definido por (1.7-20) e, na verdade, são simples consequências da não-linearidade da teoria. Por outro lado, o aparecimento de uma estrutura do tipo da teoria Maxwell na teoria do string não é novidade. De fato, pode-se mostrar, num outro contexto que existe uma relação entre as duas teorias quando o tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ tem posto 2.

Um ponto interessante é o surgimento, de maneira natural na nossa abordagem, das correntes j^{μ} e j^{a}. Um esquema parecido foi desenvolvido por Nambu com o objetivo de introduzir uma corrente eletromagnética na teoria dos modelos duais.

1.8 A formulação canônica da teoria, I. Os vínculos e sua álgebra

A lagrangiana associada com o string, definida por (1.3-2), é singular no sentido que a matriz hessiana

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu \partial \dot{y}^\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{P}_\mu}{\partial \dot{y}^\nu} \qquad (1.8\text{-}1a)$$

tem determinante nulo, isto é,

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu \partial \dot{y}^\nu}\right) = 0 \qquad (1.8\text{-}1b)$$

Isto pode ser verificado por um cálculo direto usando (1.3-2). Uma outra maneira de demonstrar (1.8-16) é usar as expressões (1.5-10a,b). De fato, diferenciando-se aquelas equações com relação a $\dot{y}$ obtem-se que $\dot{y}^\mu H_{\mu\nu} = 0$ e $y'^\mu H_{\mu\nu} = 0$. Destes resultados segue que $H_{\mu\nu}$ é singular, tem posto 2, e tem $\dot{y}$ e y' como autovetores nulos.

A matriz hessiana definida por (1.8-1) é, na verdade, a matriz associada com a transformação $\mathcal{P} \to \dot{y}$, e de (1.8-2) conclui-se que esta transformação não é inversível. Como se sabe, isto significa que nem todas as coordenadas e momentos são independentes, devendo existir algumas funções da forma $\phi(y, \ ) = 0$ que expressam a existência de vínculos associados com o sistema. Esta é uma situação que já esperavamos encontrar, de acordo com a análise que fizemos na seção

6, e da análise geral que fizemos no Capítulo 0.

O nosso objetivo agora é determinar quais são os vínculos da teoria, que já sabemos ser em número de dois por ponto da superfície de evolução. Lembremos que as coordenadas canonicamente conjugadas da teoria são y^μ e $\mathcal{P}_\mu$, de modo que as funções de vínculos podem, de modo geral, ser da forma $\phi(y,y',\mathcal{P}) = 0$. Uma maneira de obter as funções de vínculo é usar as equações (1.5-11a/d). Na verdade, a equação (1.5-11b) já é uma destas equações

$$\mathcal{P}_\mu y'^\mu = 0 \quad . \tag{1.8-2}$$

A outra é obtida de (1.5-11d): por diferenciação com relação a $\dot{y}$ encontra-se

$$\mathcal{P}_\nu - \frac{\partial \mathcal{P}_\nu}{\partial y'^\mu} y'^\mu = 0 \quad .$$

Contraindo com $\mathcal{P}_\nu$ resulta que

$$\mathcal{P}^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\nu}{\partial y'^\mu}\mathcal{P}_\nu\right) y'^\mu = \frac{1}{2}\, y'^\mu \frac{\partial \mathcal{P}^2}{\partial y'^\mu} \quad .$$

Logo, $\mathcal{P}^2$ é uma função homogênea de grau 2 em y', isto é,

$$\mathcal{P}^2 = f(y',y) \quad ,$$

com f homogênea de grau 2 em y'. Agora, como $\mathcal{L}$ não depende explicitamente de y^μ, a única possibilidade que se tem é $\mathcal{P} + \lambda^2 y'^2 = 0$, onde λ^2 é uma constante. Por um cálculo direto, usando a definição de $_\mu$, encontra-se que $\lambda^2 = N^2$, de modo que a equação de vínculos que procurávamos é

$$\mathcal{P}^2 + N^2 y'^2 = 0 \tag{1.8-3}$$

(Observemos a semelhança, na forma, da equação (1.8-3) com a equação de vínculo associada com a partícula livre relativística, $p^2 + m^2 = 0$.) É instrutivo deduzir as equações de vínculo usando argumentos geométricos como procederemos a seguir. Denotando por $\dot{y}^\mu{}_\perp$ a projeção de $\dot{y}^\mu$ ao longo da normal a linha τ=constante, temos que

$$\dot{y}_\perp^\mu = \dot{y}^\mu - \frac{(\dot{y}\cdot y')}{y'^2}\, y'^\mu \quad , \tag{1.8-4}$$

com $\dot{y}_\perp \cdot\ y' = 0$. Segue que

$$\left(\dot{y}_\perp\right)^2 = \frac{1}{N^2}\,\frac{{}^2}{y'^2} \quad . \tag{1.8-5}$$

Das expressões (1.8-4,5) obtem-se a seguinte expressão para as componentes da normal unitária:

$$\eta^\mu = \frac{N\sqrt{y'^2}}{\mathcal{L}}\left(\dot{y}^\mu - \frac{(y\cdot y')}{y'^2}\, y'^\mu\right) =$$

$$= \frac{N}{\ell\sqrt{y'^2}} (y'^2 \dot{y}^{\mu} - (y.y')y'^{\mu}) \quad . \qquad (1.8\text{-}6)$$

É imediato verificar que $n.y' = 0$ e $n.n = -1$. Usando a definição (1.3-5) de $\mathcal{P}_\mu$ e (1.8-6), vê-se que

$$\mathcal{P}_\mu = -N\sqrt{y'^2}\, n_\mu \quad , \qquad (1.8\text{-}7)$$

e desta expressão seguem diretamente as equações de vínculos (1.8-2) e (1.8-3).

Observemos que as quantidades Π_μ, definidas por (1.3-6), satisfazem às equações

$$\Pi^2 + N^2\dot{y}^2 = 0 \qquad (1.8\text{-}8)$$

e

$$\Pi.\dot{y} = 0 \qquad (1.8\text{-}9)$$

Estas equações, no entanto, não são equações de vínculo pois envolvem as velocidades $\dot{y}$.

A partir deste ponto vamos escrever as equações de vínculo na forma

$$\phi_1 = \mathcal{P}^2 + N^2 y'^2 \approx 0 \quad . \qquad (1.8\text{-}10)$$

$$\phi_2 = \mathcal{P}.y' \approx 0 \quad , \qquad (1.8\text{-}11)$$

onde o sinal $\approx$ significa igualdade fraca, no sentido da teoria de Dirac para sistemas com vínculos. Neste contexto os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 são vínculos primários, porque são consequências apenas da definição do momento.

Usando os colchetes de Poisson fundamentais (1.6-17,18) pode-se verificar (*) sem dificuldades que os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 formam uma álgebra fechada, isto é,

$$\{\phi_1(\sigma),\phi_2(\sigma')\} = (\phi_1(\sigma) + \phi_1(\sigma'))\frac{\partial}{\partial\sigma}\,\delta(\sigma-\sigma') \approx 0\ , \quad (1.8\text{-}12a)$$

$$\{\phi_1(\sigma),\phi_2(\sigma')\} = 4N^2(\phi_2(\sigma) + \phi_2(\sigma'))\frac{\partial}{\partial\sigma}\,\delta(\sigma-\sigma') \approx 0\ , \quad (1.8\text{-}12b)$$

$$\{\phi_2(\sigma),\phi_2(\sigma')\} = (\phi_2(\sigma) + \phi_2(\sigma'))\frac{\partial}{\partial\sigma}\,\delta(\sigma-\sigma') \approx 0\ . \quad (1.8\text{-}12c)$$

Isto significa que ϕ_1 e ϕ_2 são (primários) de primeira classe, e são os únicos vínculos da teoria.

Uma maneira mais formal de expressar as equações (1.8-12) é definindo os funcionais

$$\Phi_i[f] \equiv \int_0^{\pi} d\sigma\, f(\sigma)\,\phi_i(\sigma)\quad ,\ i=1,2\ , \quad (1.8\text{-}13)$$

onde $f(\sigma)$ é uma função diferenciável arbitrária. Verifica-se então que

---

(*)Note que $f(x)\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x-x') = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta(x-x') + f(x')\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x-x')$.

$$\{\phi_1[f],\phi_1[g]\} = \phi_2[fg' - f'g] \quad , \qquad (1.8\text{-}14a)$$

$$\{\phi_2[f],\phi_2[g]\} = \phi_2[fg' - f'g] \quad , \qquad (1.8\text{-}14b)$$

$$\{\phi_1[f],\phi_2[g]\} = \phi_1[fg' - f'g] \quad . \qquad (1.8\text{-}14c)$$

As equações de vínculo (1.8-10) e (1.8-11) são, portanto, equivalentes a

$$\phi_1[f] \approx 0 \quad \text{e} \quad \phi_2[f] \approx 0$$

para qualquer f.

É importante lembrar que a existência de uma álgebra de vínculos fechada significa que o sistema admite um grupo de simetrias e vice-versa. Como já vimos, este grupo é o grupo das transformações definidas por (1.1-3), (1.1-5), que já sabemos ser o grupo conforme em duas dimensões.

1.9 A formulação canônica da teoria, II. As equações de movimento de Hamilton

Para construir a integral de ação associada com o string usamos como integrando o elemento de área da superfície de evolução Σ. Uma consequência imediata desta escolha é, como vimos, a covariância da teoria pelo grupo das transformações conformes em duas dimensões. Esta simetria do sis tema se manifesta, na formulação canônica, pela existência de duas funções de vínculo por ponto da superfície de evolução, decorrência formal da homogeneidade da densidade lagrangiana nas derivadas $\dot{y}$ e y'. Assim, para procedermos a formulação canônica da teoria, somos levados a usar a teoria de Dirac para sistemas vinculados.

A densidade lagrangiana (1.3-2) é uma função homogênea de primeira ordem nas velocidades $\dot{y}$ (e também em y'). Como consequência deste fato a hamiltoniana canônica, associada com o string, é identicamente nula,

$$H_c = \int_0^\pi d\sigma (\dot{y}^\mu \wp_\mu - \mathcal{L}) \equiv 0 \quad . \tag{1.9-1}$$

(Observamos que isto é uma característica dos sistemas denominados de "covariantes gerais", isto é, dos sistemas cujas integrais de ação são invariantes por reparametrizações. Um outro exemplo de um sistema covariante geral é a partícula livre relativística com lagrangiana $L = m\sqrt{-\dot{z}^2}$ como vimos no Capítulo 0.

De acordo com a teoria de Dirac a hamiltoniana que descreve a evolução dinâmica do sistema é a hamiltoniana estendida que, no nosso caso, é igual a hamiltoniana total, e é dada por uma combinação linear dos vínculos. Escreveremos

$$H = \int_0^\pi d\sigma\, C_a(\sigma)\, \phi_a(\sigma) =$$

$$= \int_0^{\pi} d\sigma (c_1(\sigma)\phi_1(\sigma) + c_2(\sigma)\phi_2(\sigma)) \qquad (1.9\text{-}2)$$

Nesta expressão $c_1(\sigma)$ e $c_2(\sigma)$ são funções arbitrárias, cuja presença na teoria caracteriza a liberdade de gauge associada ao sistema. Uma escolha específica destas funções é o que se entende por uma escolha de gauge no contexto da Mecânica Clássica.

Segundo o princípio de Hamilton devemos ter

$$\delta H = \int_0^{\pi} d\sigma \left\{ (2c_1\mathcal{P} - c_2 y') . \delta\mathcal{P} - \left[\frac{\partial}{\partial\sigma} (2N^2 c_1 y' + c_2\mathcal{P})\right] . \delta y \right\}$$

$$+ (2N^2 c_1 y' + c_2\mathcal{P}) . \delta y \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} , \qquad (1.9\text{-}3)$$

donde se obtêm as equações de movimento

$$\dot{y}^{\mu} = \frac{\delta H}{\delta\mathcal{P}_{\mu}} = 2c_1 \eta^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\nu} + c_2 y'^{\mu} , \qquad (1.9\text{-}4)$$

$$\dot{\mathcal{P}}_{\mu} = - \frac{\delta H}{\delta y^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial\sigma}(2N^2 c_1 \eta_{\mu\nu} y'^{\nu} + c_2 \mathcal{P}_{\mu}) , \qquad (1.9\text{-}5)$$

e a condição de bordo

$$(2N^2 c_1 \eta_{\mu\nu} y'^{\nu} + c_2 \mathcal{P}_{\mu}) \delta y^{\mu} \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0 . \qquad (1.9\text{-}6)$$

Para que possamos satisfazer (1.9-7), sem impor restrições sobre a dinâmica do sistema, é necessário compreender o significado físico/geométrico dos diversos termos que aparecem nas equações de movimento. Neste sentido é suficiente determinar que tipo de transformação é gerada por cada termo da hamiltoniana (1.9-2) sobre as coordenadas y^{μ}. Temos que, de modo geral

$$\delta y^{\mu} = \int_{0}^{\pi} d\sigma(\{y^{\mu}(\sigma'), c_1(\tau,\sigma)\phi_1\} + \{y^{\mu}(\sigma'), c_2(\tau,\sigma)\phi_2\}) =$$

$$= 2c_1(\tau,\sigma)\,{}^{\mu} + c_2(\tau,\sigma)y'^{\mu} \; .$$

Deste resultado conclui-se que o vínculo ϕ_2 é o gerador de reparametrizações em σ, isto é, ϕ_2 gera transformações que mapeiam o string sobre si mesmo. É claro que estas transformações não têm significado dinâmico. Por outro lado, a transformação gerada pelo vínculo ϕ_1 relaciona y^{μ} com ${}^{\mu}$, e portanto tem significado dinâmico. Isto é consistente com (1.9-4), que conduz a $\delta y^{\mu} = (2c_1\delta\tau)\,{}^{\mu} + (c_2\delta\tau)y'^{\mu}$.

Segue das conclusões acima que a única maneira de satisfazer à condição (1.9-6), sem impor restrições sobre a dinâmica do sistema, é impor que

$$y'^{\mu} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad , \tag{1.9-7a}$$

e

$$c_2(\sigma) = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad . \tag{1.9-7b}$$

A imposição de que a condição (1.9-7a) seja preservada durante a evolução dinâmica do string requer que

$$\dot{y}'^{\mu} = \{y'^{\mu}, H\} = 2c_1' \mathcal{P}^{\mu} + 2c_1 \mathcal{P}'^{\mu} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \; . \quad (1.9\text{-}8)$$

Usando os mesmos argumentos que conduziram a (1.9-7a,b), imporemos que

$$\mathcal{P}_{\nu}' = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad , \qquad (1.9\text{-}9a)$$

e

$$c_1'(\sigma) = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad . \qquad (1.9\text{-}9b)$$

Impondo agora a preservação de (1.9-9a), obtemos

$$\dot{\mathcal{P}}_{\nu}' = \{\mathcal{P}_{\nu}', H\} = 2N^2 (c_1 y_{\nu}''' + c_2'' \mathcal{P}_{\nu}) = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad , \qquad (1.9\text{-}10)$$

de modo que devemos ter

$$y'''^{\mu} = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad , \qquad (1.9\text{-}11a)$$

e

$$c_2''(\sigma) = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \pi \quad , \qquad (1.9\text{-}11b)$$

e assim sucessivamente.

Os resultados obtidos acima sugerem estender o intervalo de definição de σ para $(-\pi, \pi)$ da seguinte maneira:

$$\left.\begin{aligned} y^{\mu}(-\sigma) &= y^{\mu}(\sigma) \\ \mathcal{P}_{\nu}(-\sigma) &= \mathcal{P}_{\nu}(\sigma) \\ c_1(-\sigma) &= c_1(\sigma) \end{aligned}\right\} \quad \text{Funções periódicas pares em } (-\pi,\pi) \qquad (1.9\text{-}12)$$

e

$$c_2(-\sigma) = - c_2(\sigma) \qquad \text{Função periódica ímpar em } (-\pi,\pi) \quad . \qquad (1.9\text{-}13)$$

No intervalo $(-\pi,\pi)$, as condições obtidas anteriormente se escrevem

$$\frac{\partial^{(2n+1)}}{\partial\sigma^{(2n+1)}}\mathcal{P}_{\nu}(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^{(2n+1)}}{\partial\sigma^{(2n+1)}} y^{\mu}(0) = 0 \quad , \qquad (1.9\text{-}14)$$

$$\frac{\partial^{(2n+1)}}{\partial\sigma^{(2n+1)}} c_1(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^{2n}}{\partial\sigma^{2n}} c_2(0) = 0 \quad .$$

Definamos as funções

$$Q^{\mu} = \mathcal{P}^{\mu} + Ny'^{\mu} \quad , \quad \sigma\in(-\pi,\pi) \quad . \qquad (1.9\text{-}15a)$$

Tem-se que

$$Q^2 = \mathcal{P}^2 + N^2y'^2 + 2N \quad .y' \approx 0 \qquad (1.9\text{-}15b)$$

$(\sigma \in (-\pi,\pi))$

é equivalente aos vínculos (1.8-10,11), no intervalo, $(-\pi,\pi)$, porque as partes par e impar de (1.9-15) devem ser fracamente iguais a zero, independentemente. As funções $Q^{\mu}(\sigma)$ satisfazem a

$$\{Q^{\mu}(\sigma),Q^{\nu}(\sigma')\} = 2N\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') \quad . \qquad (1.9\text{-}16)$$

Vamos agora definir o funcional

$$L[f] = \frac{1}{4N}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, f(\sigma)Q^2(\sigma) \quad , \qquad (1.9\text{-}17)$$

com $f(\sigma)$ uma função arbitrária. Pode-se verificar que

$$\{L[f],L[g]\} = L[fg' - f'g] \quad . \qquad (1.9\text{-}18)$$

Os funcionais $L|f|$ são denominados de funcionais de Virasoro.

Fazendo a identificação

$$c_1(\sigma) = \frac{1}{4N}(f(\sigma) + f(-\sigma)) \quad ,$$

$$c_2(\sigma) = \frac{1}{2}(f(\sigma) - f(-\sigma)) \quad , \qquad (1.9\text{-}19)$$

verifica-se que a hamiltoniana (1.9-2) se torna igual a $L[f]$,

$$H = L[f] \approx 0 \quad . \qquad (1.9\text{-}20)$$

Neste esquema, a liberdade de gauge se traduz na liberdade de escolha da função $f(\sigma)$ no funcional de Virasoro. Qualquer escolha desta função implica na especificação de uma forma bem definida da hamiltoniana e define um gauge para o string.

Retornemos às equações de Hamilton (1.9-4,5), com $0\leq\sigma\leq\pi$, e demonstremos que elas são equivalentes às equações de Euler-Lagrange. Observemos que se $y^{\mu}(\tau,\sigma)$ e $\wp_{\mu}(\tau,\sigma)$ satisfazem às equações de Hamilton para alguma escolha das funções $c_1(\tau,\sigma)$ e $c_2(\tau,\sigma)$, então $y^{\mu}(\tau,\sigma)$ e $-\wp_{\mu}(\tau,\sigma)$ também satisfazem às equações de Hamilton com o sinal de c_1 trocado. Assim, se nos interessarmos apenas por $y^{\mu}(\tau,\sigma)$, teremos uma "degenerência" nas soluções das equações de Hamilton associada com a inversão simultânea dos sinais de $\wp$ e c_1.

Suponhamos que $y(\tau,\sigma)$ e $\wp(\tau,\sigma)$ são soluções das equações de Hamilton e satisfazem aos vínculos. Tem-se então que

$$c_1 = \pm \frac{1}{2Ny'^2}\sqrt{\dot{y}^2y'^2-(\dot{y}\cdot y')^2}, \qquad (1.9\text{-}21)$$

$$c_2 = \frac{\dot{y}\cdot y'}{y'^2}\,. \qquad (1.9\text{-}22)$$

Substituindo estes resultados nas equações (1.9-4,5), e eliminando $_{\mu}$ encontra-se que y^{μ} satisfaz às equações de Euler-Lagrange, qualquer que seja o sinal de c_1 em (1.9-21). Se para a solução considerada ocorrer o sinal negativo, então sem mudar $y^{\mu}(\tau,\sigma)$ podemos passar para a solução

$(y^{\mu}, -_{\mu})$, para a qual os dados iniciais também satisfazem aos vínculos; ao mesmo tempo c_1 toma o sinal positivo.

Consideremos $y^{\mu}(\tau,\sigma)$ e c_1 com o sinal positivo. Construindo $\mathcal{P}_{\mu}$ pela sua definição encontra-se que é igual ao que vem das equações de Hamilton, e que os vínculos são automaticamente satisfeitos. Escolhendo $c_1 > 0$ e c_2 dados por (1.9-21,22), verifica-se que $(y^{\mu}, \mathcal{P}_{\mu})$ satisfaz às equações de Hamilton. Estes argumentos provam a equivalência das equações de Hamilton e de Euler-Lagrange.

1.10 Geometria da superfície de evolução: projetores, forma covariante das equações de movimento, e o tensor de Riemann-Christoffel.

Vamos definir os seguintes tensores (simétricos):

$$h^{\mu\nu} = g^{ab} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial \xi^{b}} = g^{ab} v^{\mu}_{a} v^{\nu}_{b} \quad , \tag{1.10-1}$$

$$\ell^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad . \tag{1.10-2}$$

Os tensores definidos acima satisfazem às seguintes propriedades:

$$h^{\mu\nu} h_{\nu}{}^{\lambda} = h^{\mu\nu} \quad , \tag{1.10-3a}$$

$$h^{\mu\nu}\, v_{a\mu} = v_{a}{}^{\nu} \quad , \tag{1.10-3b}$$

$$h^{\mu}{}_{\mu} = 2 \quad , \tag{1.10-3c}$$

$$\ell^{\mu\nu}\ell_{\nu}{}^{\lambda} = \ell^{\mu\lambda} \quad , \tag{1.10-4a}$$

$$\ell^{\mu\nu}v_{a\mu} = 0 \quad , \tag{1.10-4b}$$

$$\ell^{\mu}{}_{\mu} = 2 \quad , \tag{1.10-4c}$$

$$\ell^{\mu\nu}h_{\nu}{}^{\lambda} = 0 \quad . \tag{1.10-5}$$

Destas propriedades conclui-se que $h^{\mu\nu}$ e $\ell^{\mu\nu}$ são projetores. De fato, $h^{\mu\nu}$ é o projetor local sobre a superfície de evolução Σ, e $\ell^{\mu\nu}$ é o projetor sobre o plano (bidimensional, tipo tempo) ortogonal a Σ.

Imitando o que se faz no formalismo de tetradas da relatividade geral, podemos introduzir convenientemente dois vetores v_2^{μ} e v_3^{μ} que, juntamente com os vetores v_a^{μ}, completam uma base local sobre a superfície de evolução. Imporemos que os vetores v_A^{μ}, $A = 1,2,3,4$, satisfaçam às equações

$$v_A{}^{\mu}v^{A\nu} = \eta^{\mu\nu} \quad , \tag{1.10-6}$$

$$v_A{}^{\mu}v^{B}{}_{\mu} = \delta^{B}_{A} \quad . \tag{1.10-7}$$

Na base local $\{v_A^{\mu}\}$, o tensor $\ell^{\mu\nu}$ se expressa como

$$\ell^{\mu\nu} = v_3{}^{\mu}v^{3\nu} + v_4{}^{\mu}v^{\cdot\nu} \quad . \tag{1.10-8}$$

Observemos que o tensor $h^{\mu\nu}$, definido por (1.10-1), tem um significado físico bem preciso. Na verdade, este tensor aparece no integrando da expressão (1.6-25) do tensor momentum-energia do string, e tem o significado de um tensor de tensões. Mencionemos, finalmente, que o tensor $h^{\mu\nu}$ tem a seguinte relação com as coordenadas de Plucker, $\Sigma^{\mu\nu}$, definidas por (1.2-10),

$$\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\lambda}{}_{\nu} = g\,h^{\mu\nu} \quad . \tag{1.10-9}$$

Neste ponto, vamos introduzir a operação de derivação covariante sobre a superfície de evolução. Considerando especificamente os vetores $v_a{}^{\mu}$ e $v^{a\mu}$, a operação de derivação covariante sobre Σ fica definida por

$$\nabla_a v^{b\mu} = \frac{\partial v^{b\mu}}{\partial \xi^a} + \left\{ {b \atop ac} \right\} v^{c\mu} \quad , \tag{1.10-10}$$

$$\nabla_a v_b{}^{\mu} = \frac{\partial v_a{}^{\mu}}{\partial \xi^a} - \left\{ {c \atop ab} \right\} v_c{}^{\mu} \quad . \tag{1.10-11}$$

As quantidades $\nabla_a v^{b\mu}$ e $\nabla_a v_b{}^{\mu}$ são tensores com relação as transformações (1.1-3,4,5).

Nas expressões acima, $\left\{ {c \atop ab} \right\}$ são os símbolos de Christoffel sobre Σ, definidos por

$$\left\{ {a \atop bc} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{ad}\left(\partial_a g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}\right) \quad . \tag{1.10-12}$$

Por um cálculo direto encontra-se que

$$\left\{{a \atop bc}\right\} = v^a{}_\mu \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial\xi^b \partial\xi^c} , \qquad (1.10\text{-}13)$$

$$\left\{{b \atop ab}\right\} = v^b{}_\mu \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial\xi^a \partial\xi^b} = \frac{1}{2} g^{bc} \frac{\partial g_{bc}}{\partial\xi^a} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial\xi^a} \qquad (1.10\text{-}14)$$

As seguintes identidades podem ser verificadas sem dificuldades:

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad , \quad \nabla_a g^{bc} = 0 \quad , \qquad (1.10\text{-}15)$$

e

$$v_{a\mu} \nabla_b v^{c\mu} = 0 \quad , \quad v_{a\mu} \nabla_b v^\mu_c = 0 \quad , \qquad (1.10\text{-}16)$$

estas últimas sendo consequências de

$$v_a{}^\mu v^b{}_\mu = \delta^b_a \quad , \quad v^{a\mu} v^b{}_\mu = g^{ab} . \qquad (1.10\text{-}17)$$

Usando a definição do tensor $\ell^{\mu\nu}$, equação (1.10-2), pode-se demonstrar que

$$\nabla_a v_b{}^\mu = \ell^\mu{}_\nu \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial\xi^a \partial\xi^b} = \nabla_b v_a{}^\mu \quad , \qquad (1.10\text{-}18)$$

e

$$\nabla_a v^{b\mu} = \ell^\mu{}_\nu g^{bc} \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial\xi^a \partial\xi^c} . \qquad (1.10\text{-}19)$$

Em termos da derivada covariante sobre a superfí - cie de evolução, as equações de movimento do string podem ser escritas nas seguintes formas alternativas:

$$g^{ab}\nabla_a\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^b}\right) = 0 \quad , \qquad (1.10\text{-}20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial \xi^a}\left(\sqrt{-g}\; g^{ab}\,\frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a}\right) = 0 \quad , \qquad (1.10\text{-}21)$$

$$\Box\, y^\mu \equiv g^{ab}\,\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial \xi^a \partial \xi^b} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}\; g^{ab})}{\partial \xi^a}\,\frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^b} = 0 \quad , \qquad (1.10\text{-}22)$$

ou ainda

$$\ell^\mu{}_\nu g^{ab}\,\frac{\partial^2 y^\nu}{\partial \xi^a \partial \xi^b} = 0 \quad . \qquad (1.10\text{-}23)$$

Esta última expressão mostra explicitamente que existem apenas duas equações de movimento independentes.

É particularmente interessante a forma (1.10-21) das equações de movimento. Na verdade, a menos do fator $(-g)^{\frac{1}{2}}$, as equações (1.10-21) são exatamente as equações (1.6-5). De fato, segue da definição (1.6-4) que

$$j^a{}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a y^\mu)} = \frac{\partial(-N\sqrt{-g})}{\partial(\partial_a y^\mu)} = \frac{N}{2}\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial g}{\partial(\partial_a y^\mu)} =$$

$$= N\sqrt{-g}\; g^{ab}\eta_{\mu\nu}\,\frac{\partial y^\nu}{\partial \xi^b} = N\sqrt{-g}\; v^a{}_\mu \quad . \qquad (1.10\text{-}24)$$

Observemos que as equações (1.10-24) mostram que $j^a{}_\mu$ é uma densidade vetorial sobre Σ. Assim, as equações (1.10-20) representam a forma covariante da lei de conservação da corrente j^a_μ. Neste contexto, as condições de bordo se escrevem

$$j^2{}_\mu\Big|_{\sigma=0,\pi} = \sqrt{-g}\;\eta_{\mu\nu}y'^\nu\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \qquad (1.10\text{-}25)$$

e conduzem diretamente a

$$g = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0,\pi \quad , \qquad (1.10\text{-}26)$$

Usando as identidades (1.10-17) e a expressão (1.10-24) encontra-se as seguintes relações:

$$v^\mu{}_a j^b{}_\mu + N\delta^b_a\sqrt{-g} = 0 \qquad (1.10\text{-}27)$$

$$\eta^{\mu\nu}j^a_\nu j^b_\mu + N^2\epsilon^{ab}\epsilon^{bd}\eta^{\mu\nu}v_{\mu c}v_{\nu d} = 0 \quad . \qquad (1.10\text{-}28)$$

Estas contêm as equações de vínculos do sistema, equações (1.8-10/11), e mais as relações

$$y'^\mu j^2{}_\mu = \dot{y}'^\mu j^1_\mu \quad , \qquad (1.10\text{-}29)$$

$$\dot{y}^\mu j'^1{}_\mu = \dot{y}^\mu j^2{}_\mu \quad . \qquad (1.10\text{-}30)$$

Para encerrar esta seção vamos introduzir o tensor de Riemann-Christoffel R_{abcd} da superfície de evolução. Este tensor é definido por

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)v_c = R^d{}_{cba}v_d \qquad (1.10\text{-}31)$$

onde v_c é um vetor arbitrário. Usando a definição (1.10-10) encontra-se que

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c\{{a \atop bd}\} - \partial_d\{{a \atop bc}\} + \{{e \atop bc}\}\{{a \atop ed}\} - \{{e \atop db}\}\{{a \atop ec}\} \quad . \qquad (1.10\text{-}32)$$

Pode-se verificar que o tensor R_{abcd} tem as seguintes sime trias:

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad , \quad R_{abcd} = - R_{bacd} \quad . \qquad (1.10\text{-}33)$$

Como a superfície de evolução tem apenas duas dimen sões, o tensor de Riemann-Christoffel tem essencialmente uma componente independente, R_{1212}. Isto nos permite expressar o tensor de curvatura de Σ sob a forma

$$R_{abcd} = \frac{R_{1212}}{g}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad . \qquad (1.10\text{-}34)$$

Usando (1.10-34), o tensor de Ricci R_{bd} e o escalar de curvatura R ficam dados por

$$R_{bd} = g^{ac}R_{abcd} = g_{bd}\frac{R_{1212}}{g} \; , \qquad (1.10\text{-}35)$$

$$R = g^{bd}R_{bd} = 2\frac{R_{1212}}{g} \quad . \qquad (1.10\text{-}36)$$

Substituindo (1.10-36) em (1.10-34) obtém-se a seguinte expressão para o tensor de Riemann-Christoffel em duas dimensões

$$R_{abcd} = \frac{R}{2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad . \tag{1.10-37}$$

Como se sabe da geometria direrencial a curvatura média K, ou curvatura gaussiana, de uma superfície é definida por

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad . \tag{1.10-38}$$

Comparando (1.10-38) com (1.10-37) obtém-se

$$K = \frac{R}{2} \quad . \tag{1.10-39}$$

A curvatura gaussiana pode também ser expressa por

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \tag{1.10-40}$$

onde R_1 e R_2 são os raios de curvatura principais da superfície. Em termos do tensor métrico e suas derivadas a curvatura gaussiana é dada por

$$K = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial\tau\partial\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial\tau\partial\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial\tau\partial\tau} - \left(\left\{{a \atop 11}\right\}\left\{{b \atop 22}\right\} - \left\{{a \atop 12}\right\}\left\{{b \atop 12}\right\}\right)g_{ab}\right] \tag{1.10-41}$$

1.11 O gauge ortonormal

Como já vimos, a covariância geral da teoria implica na ocorrência de duas funções arbitrárias nas equações de Hamilton para o sistema. A escolha destas funções, como já comentamos, é o que se entende como a escolha de um gauge no contexto da Mecânica Clássica. Um ponto que deve ser observado quando se escolhe um gauge é a simplicidade que esta escolha introduz na teoria. É claro que o termo "simplicidade" aqui tem um significado restrito pelo problema específico que se pretende resolver. Por exemplo, o gauge denominado de ortonormal é, sem dúvida, o gauge que torna as equações de movimento do string as mais simples possíveis. Neste gauge, como veremos a seguir, é possível fazer uma análise minuciosa da solução geral das equações de movimento, permitindo uma expansão de Fourier para as soluções. Por outro lado, o estudo do problema da imersão da superfície de evolução no espaço-tempo apresenta algumas complicações neste gauge.

Outras escolhas de gauge sempre manterão as equações de movimento não lineares, dificultando substancialmente a procura de soluções. Mas, apesar disto, algumas escolhas específicas simplificam bastante o estudo da imersão da superfície de evolução.

A seguir vamos estudar com detalhes a escolha do gauge ortonormal e suas consequências.

Na seção 1.9 obtivemos as equações de Hamilton para o string,

$$\dot{y}^{\mu} = 2c_1 \mathcal{P}^{\mu} + c_2 y'^{\mu} \quad . \qquad (1.11\text{-}1a)$$

$$\dot{\mathcal{P}}^{\mu} = \frac{\partial}{\partial\sigma}(2N^2 c_1 y'^{\mu} + c_2 \mathcal{P}^{\mu}) \quad . \qquad (1.11\text{-}1b)$$

com as condições de bordo

$$y'^{\mu} = 0 \quad e \quad c_2(\sigma) = 0 \quad em \quad \sigma = 0,\pi \quad . \qquad (1.11\text{-}2)$$

A forma destas equações e a análise que nos conduziu a fazer $c_2 = 0$ em $\sigma = 0,\pi$, sugerem-nos fazer a escolha

$$2N c_1 = 1 \quad , \qquad (1.11\text{-}3a)$$

$$c_2 = 0 \quad , \qquad (1.11\text{-}3b)$$

para todos os valores de τ e σ.

Com esta escolha as equações de Hamilton (1.11-1) se reduzem a

$$\dot{y}^{\mu} = \frac{1}{N} \mathcal{P}^{\mu} \qquad (1.11\text{-}4a)$$

e

$$\dot{\mathcal{P}}^{\mu} = N y''^{\mu} \quad . \qquad (1.1\text{-}14b)$$

A equação (1.11-4a) nos dá uma relação de proporcionalidade entre as velocidades e os momentos, em perfeita analogia com a partícula livre relativística. Eliminação de $^{\mu}$ nas equações (1.11-4a,b) resulta em

$$\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial \sigma^2} = 0 \tag{1.11-5}$$

ou

$$\Box\, y^\mu = 0 \quad , \tag{1.11-6}$$

onde $\Box \equiv \eta^{ab}\partial_a\partial_b$ é o operador d'alambertiano em duas dimensões com métrica plana $\eta^{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1)$. Portanto, com a escolha de gauge (1.11-3a,b), os campos $y^\mu(\tau,\sigma)$ satisfazem a equação de Klein-Gordon num espaço plano bidimensional.

Este resultado nos dá uma clara indicação de uma relação entre a escolha de gauge definida por (1.11-3) e o teorema que mencionamos no início da seção 1.7, que diz que a métrica de uma superfície bidimensional imersa no espaço-tempo de Minkowski é conformalmente plana. Esta relação pode ser encontrada de várias maneiras. Uma delas é utilizar as equações de vínculo (1.8-10,11) que, usando (1.11-3a,b), se escrevem

$$\phi_1 = \dot{y}^2 + y'^2 \approx 0 \quad , \tag{1.11-7a}$$

$$\phi_2 = \dot{y}\cdot y' \approx 0 \quad . \tag{1.11-7b}$$

Estas expressões reduzem a métrica (1.2-5) à forma conformalmente plana

$$\left(g_{ab}\right) = y'^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (1.11\text{-}8)$$

Uma outra maneira de verificar estes resultados é utilizar (1.9-21,22) que nos dão as funções c_1 e c_2 em termos de $\dot{y}$ e y'. Impondo-se as condições (1.11-3a,b) obtem-se diretamente daquelas expressões que $\dot{y}\cdot y' = 0$ e $\dot{y}^2 + y'^2 = 0$.

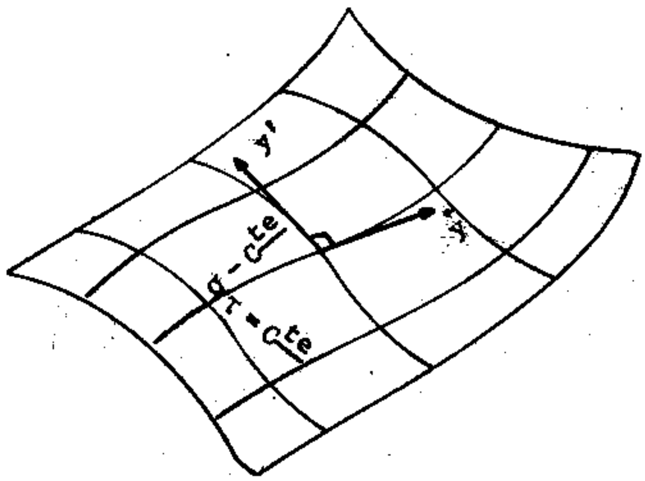
Com os resultados acima a equação (1.11-5) pode ser reobtida usando-se, por exemplo, a forma (1.10-21) das equações de movimento. De fato, com a métrica conformalmente plana aquela equação fica

$$\Box\, y^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \eta^{ab} \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial \xi^a \partial \xi^b} = 0 \qquad . \qquad (1.11\text{-}9)$$

Vimos, então, que a escolha de gauge (1.11-3a,b) se traduz em termos dos vetores tangentes à superfície de evolução pelas condições (1.11-7a,b). É claro que (1.11-7a,b) implica em (1.11-3a,b), de modo que

$$\left.\begin{aligned} 2Nc_1 &= 1 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{y}^2 + y'^2 &= 0 \\ \dot{y}\cdot y' &= 0 \end{aligned}\right. .$$

O segundo conjunto de condições acima tem uma interpretação geométrica clara em termos do sistema de coordenadas sobre a superfície de evolução: a escolha de gauge (1.11-3) significa estabelecer sobre Σ um sistema de coordenadas curvilíneas cujas linhas coordenadas são ortogonais em todos os pontos.



Os vetores tangentes a estas linhas coordenadas tem suas normas relacionadas por $\dot{y}^2 = -y'^2$. Por estas razões o gauge definido por (1.11-3a,b) é denominado de gauge ortonormal.

Observemos que no gauge ortonormal a densidade lagrangiana (1.1-12) assume a forma polinomial.

$$\mathcal{L} = -\frac{N}{2}(\dot{y}^2 - y'^2) \tag{1.11-10}$$

Conforme já haviamos mencionado na Seção 7, as equações de movimento (1.11-5) são as equações de Euler-Lagrange associadas a esta lagrangiana.

É instrutivo expressar as equações de movimento, no gauge ortonormal, em termos das funções Q^{μ} definidas em (1.9-

14). Com a hamiltoniana (1.9-20) tem-se que

$$\dot{Q}^{\mu} = \{Q^{\mu}(\sigma), L[f](\sigma')\} =$$

$$= \frac{1}{2N}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma'\{Q^{\mu}(\sigma), Q^{\nu}(\sigma')\}Q_{\nu}(\sigma')f(\sigma') =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\sigma}(f(\sigma)Q^{\mu}(\sigma)) \quad , \qquad (1.1\text{-}11)$$

onde usamos (1.9-16). Das expressões (1.9-19) e das condições (1.11-3, a,b) segue que, no gauge ortonormal, $f(\sigma)=1$ e a equação (1.11-11) ficam sob a forma

$$\dot{Q}^{\mu} - Q'^{\mu} = 0 \quad . \qquad (1.11\text{-}12)$$

Pode-se verificar que (1.11-5) segue desta equação.

Neste ponto, é importante observar que a escolha das condições (1.11-7a,b) não fixa o gauge completamente. De fato, fazendo-se uma reparametrização $\tau\to\bar{\tau}(\tau,\sigma)$, $\sigma\to\bar{\sigma}(\tau,\sigma)$ de tal modo que

$$\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\tau} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma} \quad , \quad \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\sigma} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\tau} \quad , \qquad (1.11\text{-}13a)$$

$$\frac{\partial^2\bar{\tau}}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\bar{\sigma}}{\partial\sigma^2} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad , (1.11\text{-}13b)$$

as condições (1.11-7) são preservadas, isto é,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{\sigma}}\right)^2 \approx 0 \quad , \tag{1.11-14a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{\tau}} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{\tau}} \approx 0 \quad . \tag{1.11-14b}$$

onde $y = y(\bar{\tau}(\tau,\sigma),\ \bar{\sigma}(\tau,\sigma))$. Isto significa que as linhas coordenadas na nova parametrização são ortogonais e que sob as transformações (1.11-13) ainda permanecemos no gauge ortonormal. Isto pode ser demonstrado como segue.

Consideremos uma parametrização arbitrária (τ,σ) e procuremos a transformação que conduz a uma outra $(\bar{\tau},\bar{\sigma})$ tal que as condições (1.11-14a,b) sejam satisfeitas. Temos que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^\mu}{\partial \bar{\tau}} \\[2em] \dfrac{\partial y^\mu}{\partial \bar{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial \bar{\tau}} \\[2em] \dfrac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^\mu}{\partial \tau} \\[2em] \dfrac{\partial y^\mu}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \tag{1.11-15}$$

De (1.11-14) e (1.11-15) segue que

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} \pm \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 y'^2 + 2\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} \pm \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\tau}}\right)\left(\frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} \pm \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} \pm \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 \dot{y}^2 = 0 \tag{1.11-16}$$

Na equação acima podemos escolher, por exemplo, $\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\sigma}}$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\tau}}$ e obter quatro soluções para estas quantidades em termos de $\frac{\partial\tau}{\partial\bar{\sigma}}$ e $\frac{\sigma\tau}{\sigma\bar{\tau}}$. Destas soluções duas conduzem a parametrizações singulares, $J = 0$, e as outras duas diferem apenas pelo sinal de J. Escolhamos $J > 0$, o que significa uma reparametrização tal que

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\bar{\tau}}\right)^2 \leq 0 \quad e \left(\frac{\partial y}{\partial\bar{\sigma}}\right) \geq 0 \quad .$$

Neste caso as soluções de (1.11-15) são

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\sigma}} = -\frac{1}{y'^2}\left[(\dot{y}\cdot y')\frac{\partial\tau}{\partial\bar{\sigma}} - ((y\cdot y')^2 - \dot{y}^2 y'^2)\frac{\partial\tau}{\partial\bar{\tau}}\right] \quad ,(1.11\text{-}17a)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\tau}} = -\frac{1}{y'^2}\left[(\dot{y}\cdot y')\frac{\partial\tau}{\partial\bar{\tau}} - ((\dot{y}\cdot y')^2 - \dot{y}^2 y'^2)\frac{\partial\tau}{\partial\bar{\sigma}}\right] \quad .(1.11\text{-}17b)$$

donde se obtem

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{(\dot{y}\cdot y')^2 - \dot{y}^2 y'^2}}\left[(\dot{y}\cdot y')\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\sigma} - y'^2\,\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\tau}\right] = \alpha(\tau,\sigma), (1.11\text{-}18a)$$

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\tau} = -\frac{1}{\sqrt{(\dot{y}\cdot y')^2 - \dot{y}^2 y'^2}}\left[\dot{y}^2\,\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\sigma} - (\dot{y}\cdot y')\frac{\partial\tau}{\partial\tau}\right] = \beta(\tau,\sigma) \, .(1.11\text{-}18b)$$

Agora, é suficiente considerar qualquer solução $\bar{\tau}(\tau,\sigma)$ da equação $\partial\alpha/\partial\tau = \partial\beta/\partial\sigma$ e calcular $\partial\bar{\sigma}/\partial\sigma$ e $\partial\bar{\sigma}/\partial\tau$ das equações acima; a existência da solução garantirá que a métrica é conformalmente plana. A nova parametrização será ortonormal por construção.

Se a parametrização original já é ortonormal, devemos ter

$$\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\sigma} = \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\tau} \quad , \quad \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\tau} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma} \quad . \tag{1.11-19}$$

Restritas pelas condições $\bar{\sigma}(\tau,0) = 0$, $\bar{\sigma}(\tau,\pi) = \pi$ estas são transformações conformes. As soluções gerais de (1.11-19) são, para strings abertos,

$$\bar{\tau} = \tau_0 + \tau + f(\tau+\sigma) + f(\tau-\sigma) \quad , \tag{1.11-20a}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma + f(\tau+\sigma) - f(\tau-\sigma) \quad , \tag{1.11-20b}$$

onde f é uma função periódica com período 2π. (Uma parametrização regular requer que $|f'| \leq \frac{1}{2}$, onde f' significa derivada com relação ao argumento). Para strings fechado as soluções são dadas em termos de duas funções periódicas.

1.12 Fixação do gauge ortonormal

Na seção anterior verificamos que as escolhas $2Nc_1 = 1$ e $c_2 = 0$ conduzem a dois resultados mutuamente relacionados: a) uma métrica conformalmente plana para a superfície de evolução e, b) uma equação de Klein-Gordon num espaço plano para os campos $y^\mu(\tau,\sigma)$. Vimos também que aquelas condições simplesmente definem um sistema de coordenadas cujas linhas coordenadas são ortogonais em cada ponto da superfície de evolução. Os parâmetros τ e σ permanecem livres, no sentido de que as transformações (1.11-13) são permitidas pois preservam o gauge ortonormal. Sob o ponto de vista físico, uma vez feita uma escolha de gauge o que podemos dizer é que dada uma secção inicial de Σ, isto é, dado um possível estado do string, a evolução desta secção fica determinada. No entanto, o estado inicial do sistema não fica especificado por nenhuma escolha das funções $c_1(\tau,\sigma)$ e $c_2(\tau,\sigma)$. Neste contexto, uma escolha das funções arbitrárias não significa <u>fixar</u> o gauge.

Para fixar o gauge devemos impor sobre as variáveis dinâmicas da teoria condições subsidiárias tais que as condições do gauge ortonormal sejam satisfeitas, mas que contenham informações suficientes para se identificar quais os parâmetros τ e σ que estão sendo usados. Estas condições subsidiárias, denominadas de "condições de gauge" ou "vínculos de gauge", devem quebrar as simetrias mediadas pelos vínculos (1.8-10,11). Na formulação hamiltoniana da teoria isto significa que devemos impor dois vínculos de gauge χ_1 e χ_2 de maneira que o conjunto de vínculos $(\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2)$ seja de segunda classe. A escolha de condições de gauge que apresentaremos a seguir é devido a Goddard, Goldstone, Rebbi e Thorn.

Para definir as linhas $\tau = c^{\underline{te}}$ vamos seccionar a superfície de evolução com uma família de planos definida pelas equações

$$\lambda . y = a\tau \quad , \qquad (1.12\text{-}1)$$

onde <u>a</u> é uma constante e $\lambda = \{\lambda_\mu\}$ é o vetor normal ao plano, independente de τ e σ. A constante <u>a</u> pode ser determinada como segue. Diferenciando a equação (1.12-1) com relação a τ tem-se

$$\lambda . \dot{y} = a \qquad (1.11\text{-}2)$$

Usando as equações de movimento (1.11-1a,b) e impondo as condições desejadas sobre c_1 e c_2 resulta de (1.12-2) que

$$a = \frac{1}{N} \lambda . \mathcal{P} \qquad (1.11\text{-}3)$$

Integrando esta última equação com relação a σ resulta

$$\sigma a = \frac{1}{N} \int_0^\sigma d\sigma' \lambda . \mathcal{P} \qquad (1.11\text{-}4)$$

Escolhendo $\sigma = \pi$ segue que

$$a = \frac{1}{N\pi} \lambda . \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}(\sigma') = \frac{1}{N\pi} \lambda . P \quad . \qquad (1.12\text{-}5)$$

Com este resultado as equações (1.12-1) e (1.12-3) se escrevem

$$\lambda.y = \tau \frac{\lambda.P}{N\pi} \quad , \tag{1.12-6}$$

$$\lambda.\mathcal{P} = \frac{\lambda.P}{\pi} \quad . \tag{1.12-7}$$

Segue então que as condições de gauge que devemos impor de modo que se tenha $2nc_1 = 1$ e $c_2 = 0$ são

$$\chi_1 = \lambda.(y - \tau \frac{P}{N\pi}) \approx 0 \quad , \tag{1.12-8a}$$

$$\chi_2 = \lambda.(\mathcal{P} - \frac{P}{\pi}) \approx 0 \quad . \tag{1.12-8b}$$

A partir de (1.12-8a,b) as condições do gauge ortonormal podem ser reencontradas. De fato, diferenciando (1.12-8a) com relação a τ e σ obtem-se

$$\lambda.\dot{y} \approx \frac{\pi.\mathcal{P}}{N} \tag{1.12-9a}$$

e

$$\lambda.y' \approx 0 \; . \tag{1.12-9b}$$

As equações de Euler-Lagrange implicam em

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\lambda.\mathcal{P}) = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(\lambda.\Pi) \approx 0 \quad , \tag{1.12-10}$$

De modo que a condição de bordo $\Pi_\mu = 0$ em $\sigma = 0,\pi$ implica em

$$\lambda.\Pi(\tau,\sigma) \approx 0 \quad . \tag{1.12-11}$$

Usando (1.12-9a,b) e as definições de P_μ e Π_μ encontra-se

$$\lambda.\mathcal{P} \approx -\ (\lambda.\dot{y})N^2\mathcal{L}^{-1}y'^2 \approx$$

$$\approx -\ (\lambda.\mathcal{P})N\mathcal{L}^{-1}y'^2 \not\approx 0 \quad ,$$

e

$$\lambda.\pi \approx (\lambda.\dot{y})N^2\mathcal{L}^{-1}(\dot{y}.y') \approx 0 \ .$$

Destes resultados conclui-se que $\dot{y}.y' \approx 0$ e que $N\mathcal{L}^{-1}y'^2 \approx 1$, e, portanto, $\dot{y}^2 + y'^2 \approx 0$.

A verificação de que o conjunto de vínculos $(\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2)$ é de segunda classe é imediata.

Concluimos então que as equações fracas (1.12-8a,b) constituem um bom conjunto de condições de gauge. A coordenada τ fica estabelecida por (1.12-6) e a coordenada σ por (1.12-4). Isto significa que estamos usando a energia do string para rotular seus pontos, já que σ está sendo tomado como proporcional ao fluxo total de energia entre um extremo e o ponto considerado. Então, as equações (1.12-8a,b) estabelecem um sistema de coordenadas sobre a superfície Σ, com a coordenada τ sendo definida pelas interseções dos planos (1.12-1) com a superfície, e as linhas coordenadas de σ sendo tomadas como as linhas de fluxo da componente da densidade de momento na direção λ.

1.13 Aspectos geométricos do gauge ortonormal

1.13.1 Coordenadas harmônicas

Como consequência da covariância geral da teoria sob as transformações admissíveis das coordenadas internas, verificamos a existência de dois vínculos por ponto da superfície de evolução. Na formulação hamiltoniana da teoria, as equações de movimento contêm duas funções arbitrárias como decorrência da existência destes vínculos. A escolha específica daquelas funções definidas pelas condições (1.11-3a,b), nos possibilitou expressar as equações de vínculo sob a forma puramente geométrica (1.11-7a,b); estas nada mais são que restrições sobre as componentes do tensor métrico, isto é, são condições de coordenadas. De fato, as equações (1.11-7a, b) podem ser expressas como

$$\phi_1 = g_{11} + g_{22} \approx 0 \tag{1.13-1a}$$

e

$$\phi_2 = g_{12} \approx 0 \quad . \tag{1.13-1b}$$

Vimos que com estas condições as equações de movimento tomam a forma (1.11-9). Comparando-se esta equação com a equação (1.10-22) vê-se que devemos ter

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \xi^a} (\sqrt{-g}\ g^{ab}) = 0 \quad , \tag{1.13-2}$$

ou, equivalentemente,

$$\Gamma^c \equiv g^{ab}\{{}^{\,c}_{ab}\} = 0 \qquad (1.13\text{-}3)$$

As coordenadas que satisfazem às condições (1.13-2) ou (13-3) são denominadas de coordenadas harmônicas.

Antes de mostrar que as condições

$$g_{11} + g_{22} = 0 \quad , \quad g_{12} = 0 \qquad (1.13\text{-}4)$$

podem ser obtidas de (1.13-2) ou (1.13-3), vamos mostrar que é sempre possível escolher um sistema de coordenadas no qual aquelas condições são válidas. Para isto consideremos a lei de transformação dos símbolos de Christoffel.

$$\overline{\{{}^{\,a}_{ac}\}} = \frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial\xi^f}\frac{\partial\xi^d}{\partial\bar{\xi}^b}\frac{\partial\xi^e}{\partial\bar{\xi}^i}\{{}^{\,f}_{de}\} - \frac{\partial\xi^d}{\partial\bar{\xi}^b}\frac{\partial\xi^e}{\partial\bar{\xi}^c}\frac{\partial^2\bar{\xi}^a}{\partial\xi^d\partial\xi^e} \qquad (1.13\text{-}5)$$

Contraindo com $\bar{g}^{bc}$ encontra-se

$$\bar{\Gamma}^a = \frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial\xi^b}\Gamma^b - g^{bc}\frac{\partial^2\bar{\xi}^a}{\partial\xi^b\partial\xi^c} \quad . \qquad (1.13\text{-}6)$$

Então, se $\Gamma^b \neq 0$, é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas $\{\bar{\xi}^a\}$ resolvendo-se o sistema de equações diferenciais

$$g^{bc}\frac{\partial^2\bar{\xi}^a}{\partial\xi^b\partial\xi^c} = \frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial\xi^b}\Gamma^b$$

e a equação (1.13-6) nos dá $\bar{\Gamma}^a = 0$ neste sistema de coordenadas.

É importante observar que as condições (1.13-2) não são covariantes, pois o seu objetivo é exatamente o de remover a covariância geral da teoria. Além disto, as transformações de coordenadas que satisfazem às condições harmônicas não constituem um subgrupo de (1-13).

Retornemos a (1.13-2 ou 3). Por um cálculo direto encontra-se que estas equações podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\right) = 2\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{g_{12}}{g_{11}}\right) , \qquad (1.13\text{-}7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{g_{11}}{g_{22}}\right) = 2\,\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{g_{12}}{g_{22}}\right) . \qquad (1.13\text{-}7b)$$

Uma solução para este sistema de equações é

$$g_{12} = 0 \quad , \quad \frac{g_{11}}{g_{22}} = \alpha = \text{constante} \quad .$$

A condição de causalidade $g < 0$ requer que a constante da relação acima seja negativa. Escolhendo esta constante igual a -1 recobramos (1.13-4).

Denotando por η_{ab} a métrica de Minkowski bidimensional, $\eta_{ab} = \text{diag}\,(-1, +1)$, segue que as condições (1.13-4) podem ser expressas como

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial \xi^{b}} = g_{ab} = \sqrt{-g}\ \eta_{ab} \quad . \tag{1.13-8}$$

Temos também que

$$g^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \eta^{ab} \quad . \tag{1.13-9}$$

Finalmente, mencionemos que no gauge ortonormal os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\left\{ {a \atop bb} \right\} = \left\{ {b \atop ab} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^{a}} \left(\sqrt{-g}\right) \quad , \tag{1.13-10}$$

(sem soma no índice b)

E o escalar de curvatura assume a forma

$$R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \eta^{ab} \partial_a \partial_b (\ln \sqrt{-g}) \tag{1.13-11}$$

1.13-2 <u>O grupo conforme sobre a superfície de evolução</u>

Como já vimos na Seção 1.11, as condições do gauge ortonormal são preservadas por reparametrizações $\tau \to \bar{\tau}(\tau,\sigma)$, $\tau \to \bar{\tau}(\tau,\sigma)$ que satisfazem as equações (1.11-13a,b). De modo geral, as condições do gauge são preservadas pelas transformações

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau} = \pm \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \quad , \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \sigma} = \pm \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau} \tag{1.13-12}$$

com

$$\Box\ \bar{\xi}^a \equiv \eta^{bc}\,\frac{\partial^2\bar{\xi}^a}{\partial\xi^b\partial\xi^c} = 0\ ,\ \left.\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0,\pi} = 0 \qquad (1.13\text{-}13)$$

Por estas transformações tem-se que

$$\bar{g}_{ab} = \bar{J}^1 g_{ab}\ ,\quad \sqrt{-\bar{g}} = \bar{J}^1\sqrt{-g}\ , \qquad (1.13\text{-}14)$$

onde J é o jacobiano da transformação. Segue então da condição de causalidade que deve-ser ter $J>0$, de modo que o sinal a ser usado nas equações (1.13-12) é o positivo.

As transformações definidas por (1.13-12,13) mantem invariante a relação $-d\tau^2 + d\sigma^2 = 0$ e assim constituem um subgrupo conforme de (1.1-3,4,5). Vamos introduzir $\Delta(\xi)$ e $\Gamma(\xi)$ por

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\tau} = \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\sigma} = \Delta(\xi)\ ,\quad \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma} = \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\tau} = \Gamma(\xi)\ . \qquad (1.13\text{-}14)$$

Segue então que

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\sigma} = \frac{\partial\Delta}{\partial\tau}\ ,\quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\tau} = \frac{\partial\Delta}{\partial\sigma}\ , \qquad (1.13\text{-}15)$$

e

$$\Box\,\Delta = 0\ ,\ \Box\,\Gamma = 0\ ,\ \left.\Delta\right|_{\sigma=0,\pi} = 0\ . \qquad (1.13\text{-}16)$$

Em termos de Δ e Γ o jacobiano fica dado por

$$J = \Gamma^2 - \Delta^2 > 0 \quad . \tag{1.13-17}$$

As transformações inversas são

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\sigma}} = \frac{\partial\tau}{\partial\bar{\tau}} = \frac{\Gamma}{J} \quad , \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\tau}} = \frac{\partial\tau}{\partial\bar{\sigma}} = -\frac{\Delta}{J} \quad . \tag{1.13-18}$$

é conveniente usar as funções

$$J(\xi) \quad e \quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{\Delta}{\Gamma}$$

que, devido a (1.13-15,16), satisfazem a

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(\ell n\, J) = 2\,\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\tau}(\ell n\, J) = 2\,\frac{\partial\theta}{\partial\theta} \quad , \tag{1.13-19}$$

$$\Box\,(\ell n\, J) = 0 \quad , \quad \Box\,\theta = 0 \quad . \tag{1.13-20}$$

Em termos de J e θ, as transformações conformes de vetores sobre Σ se expressam

$$\begin{pmatrix}\bar{v}^1\\ \bar{v}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta & \Gamma\\ \Gamma & \Delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix} = \sqrt{J}\begin{pmatrix}\sinh\theta & \cosh\theta\\ \cosh\theta & \sinh\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix}, \tag{1.13-21}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\Delta & \Gamma\\ \Gamma & -\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{J}}\begin{pmatrix}-\sinh\theta & \cosh\theta\\ \cosh\theta & -\sinh\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \qquad (1.13\text{-}22)$$

Os resultados acima mostram que as transformações conformes são produtos diretos de transformações de Lorentz locais especificadas pelo ângulo hiperbólico θ, e uma dilatação local especificada por J. Estas não são independentes, sendo relacionadas por (1.13-19).

As soluções gerais de (1.13-12) são dadas por (1.11-21a,b) e estão de acordo com o fato das transformações incluirem uma parte linear, $\bar{\tau} = a\tau + b$ e $\bar{\sigma} = a\sigma$. Em (1.11-20a,b) fizemos $a=1$ para evitar do domínio de σ ficar multiplicado por a.

Para encerrar esta seção, mencionemos que o grupo conforme num espaço de duas dimensões tem dimensão infinita, e é isomorfo ao produto direto GxG, onde G é o grupo de todas as transformações contínuas de uma variável. Um outro fato importante para a teoria do string se relaciona com a álgebra do grupo G. Suponhamos que ξ é uma coordenada sobre uma linha e que $\psi(\xi)$ é uma função infinitamente diferenciável. O efeito de uma transformação $\xi \to \bar{\xi}$ sobre $\psi(\xi)$ pode ser representado por

$$\psi(\xi) \longrightarrow \mathcal{C}\psi(\xi) = \exp\left(f(\xi)\frac{d}{ds}\right)\psi(\xi)$$

Escrevendo $f(\xi)$ sob a forma

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n$$

tem-se que

$$¢ = \exp\left(- \sum_{m=+\infty}^{-\infty} a_{m+1}\, \mathbf{L}_m\right)$$

onde

$$\mathbf{L}_m = - \zeta^{m+1} \frac{d}{d\zeta}$$

são os geradores da transformação. É imediato verificar que

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = (m - n)\, \mathbf{L}_{m+n} \quad . \tag{1.13-23}$$

Mais adiante mostraremos que as componentes de Fourier do funcional de Virasoro geram uma álgebra isomorfa a álgebra do grupo G.

1.14 A solução geral das equações de movimento: a expansão de Fourier das variáveis dinâmicas no gauge ortonormal

As equações de movimento (1.11-5) podem ser escritas sob a forma

$$\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial(\tau+\sigma)\,\partial(\tau-\sigma)} = 0 \quad , \tag{1.14-1}$$

e a solução mais geral, compatível com a condição $y'^{\mu} = 0$ em $\sigma = 0, \pi$, equação (1.11-2), é dada por

$$y^{\mu}(\tau,\sigma) = \tau k^{\mu} + \frac{1}{2}\left[\Omega^{\mu}(\tau+\sigma) + \Omega^{\mu}(\tau-\sigma)\right] \qquad (1.14\text{-}2)$$

Nesta expressão $\{k^{\mu}\}$ é um vetor constante, e Ω^{μ} são funções periódicas com período 2π.

O vetor k^{μ} pode ser determinado da seguinte maneira. Das equações de Hamilton (1.11-4) tem-se que

$$\mathcal{P}_{\mu} = N\eta_{\mu\nu}\dot{y}^{\nu} = Nk_{\mu} + \frac{1}{2}\left[\Omega'_{\mu}(\tau+\sigma) + \Omega'_{\mu}(\tau-\sigma)\right], \qquad (1.14\text{-}3)$$

onde a linha significa derivação com relação ao argumento da função. Segue então que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_{\mu} d\sigma = 2\pi N k_{\mu} = 2P_{\mu} \quad . \qquad (1.14\text{-}4)$$

Com este resultado a solução mais geral das equações de movimento pode ser expressa por

$$y^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{P^{\mu}}{N\pi}\,\tau + \frac{1}{2}\left[\Omega^{\mu}(\tau+\sigma) + \Omega^{\mu}(\tau-\sigma)\right] \qquad (1.14\text{-}5a)$$

com

$$\mathcal{P}_{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{P_{\mu}}{\pi} + \frac{N}{2}\left[\Omega'_{\mu}(\tau+\sigma) + \Omega'_{\mu}(\tau-\sigma)\right] \qquad (1.14\text{-}5b)$$

As equações de movimento e suas soluções sugerem a expansão de Fourier das variáveis dinâmicas. Levando em conta que $y^\mu(\tau,\sigma)$ e $_\mu(\tau,\sigma)$ são funções pares de σ no intervalo $(-\pi,\pi)$, podemos escrever as expansões

$$y^\mu(\tau,\sigma) = y^\mu_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} y^\mu_m(\tau)\cos n\sigma \quad , \qquad (1.14\text{-}16a)$$

$$\mathcal{P}_\mu(\tau,\sigma) = \mathcal{P}_{\mu 0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\mu_n}(\tau)\cos n\sigma \, , \qquad (1.14\text{-}6b)$$

com

$$y^\mu_0(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\, y^\mu(\tau,\sigma) \quad , \qquad (1.14\text{-}7a)$$

$$y^\mu_m(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, y^\mu(\tau,\sigma)\cos n\sigma \, , \qquad (1.14\text{-}7b)$$

$$\mathcal{P}_{\mu 0}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, \mathcal{P}_\mu(\tau,\sigma) = \frac{P_\mu}{\pi} \quad , \qquad (1.14\text{-}8a)$$

$$\mathcal{P}_{\mu n}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, \mathcal{P}_\mu(\tau,\sigma)\cos n\sigma \quad . \qquad (1.14\text{-}8b)$$

Usando os colchetes de Poisson fundamentais (1.6 - 17,18) pode-se calcular os colchetes de Poisson entre as componentes de Fourier de $y^\mu(\tau,\sigma)$ e $\mathcal{P}_\mu(\tau,\sigma)$. Os resultados são

$$\{y^\mu_n(\tau), \mathcal{P}_{\nu_m}(\tau)\} = \frac{2}{\pi}\,\delta_{m,n}\delta^\mu_\nu, \; (m,n \neq 0) \qquad (1.14\text{-}9)$$

$$\{y^\mu_0(\tau), P_\nu(\tau)\} = \delta^\mu_\nu. \qquad (1.14\text{-}10)$$

Retornemos as soluções gerais das equações de movimento, expressões (1.14-5,6). Fazendo

$$\frac{1}{2}\left[\Omega^{\mu}(\tau+\sigma)+\Omega^{\mu}(\tau-\sigma)\right]=\Omega_o^{\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Omega_n^{\mu}e^{in(\tau+\sigma)}+\overset{*}{\Omega}{}_n^{\mu}e^{-in(\tau+\sigma)}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Omega_n^{\mu}e^{in(\tau-\sigma)}+\overset{*}{\Omega}{}_n^{\mu}e^{-in(\tau-\sigma)}\right)=$$

$$=\Omega_o^{\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\,\sigma\left(\Omega_n^{\mu}e^{in\tau}+\overset{*}{\Omega}{}_n^{\mu}e^{-in\tau}\right), \tag{1.14-11}$$

Segue que

$$y^{\mu}(\tau,\sigma)=\Omega_o^{\mu}+\frac{P^{\mu}}{N\pi}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\,\sigma\left(\Omega_n^{\mu}e^{in\tau}+\overset{*}{\Omega}{}_n^{\mu}e^{-in\tau}\right), \tag{1.14-12}$$

e

$$\mathcal{P}^{\mu}(\tau,\sigma)=\frac{P^{\mu}}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}inN\cos n\,\sigma\left(\Omega_n^{\mu}e^{in\tau}+\overset{*}{\Omega}{}_n^{\mu}e^{-in\tau}\right) \tag{1.14-13}$$

Comparando estas expressões com (1.14-5,6), verifica-se que

$$y_o^{\mu}(\tau)=\Omega_o^{\mu}+\frac{P^{\mu}}{N\pi}, \tag{1.14-14}$$

$$y_n^{\mu}(\tau)=\Omega_n^{\mu}e^{in\tau}+\overset{*}{\Omega}{}_n^{\mu}e^{-in\tau}, \tag{1.14-15}$$

$$\mathcal{P}_n^{\mu}(\tau)=inN\left(\Omega_n^{\mu}e^{in\tau}-\overset{*}{\Omega}{}_n^{\mu}e^{-in\tau}\right) \tag{1.14-16}$$

Vamos definir as variáveis

$$a_n^{\mu}(\tau)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{nN}}\left(i\mathcal{P}_n^{\mu}(\tau)+nNy_n^{\mu}(\tau)\right). \tag{1.14-17}$$

Usando os colchetes de Poisson (1.14-9,10) encontra-se

$$\{a^{\mu}_{n}, a^{\nu}_{m}\} = 0 \quad , \tag{1.14-18a}$$

$$\{a^{*\mu}_{n}, a^{*\nu}_{m}\} = \quad , \tag{1.14-18b}$$

$$\{a^{\mu}_{n}, a^{*\nu}_{m}\} = - \eta^{\mu\nu}\delta_{nm} \quad . \tag{1.14-18c}$$

Substituindo as expressões (1.14-15,16) em (1.14-17) obtem-se

$$a^{\mu}_{n}(\tau) = \sqrt{\pi n N}\ \Omega^{*}_{n}\ e^{in\tau} \tag{1.14-19a}$$

$$\equiv a^{\mu}_{n}(0)e^{in\tau} \quad . \tag{1.14-19b}$$

Finalmente, substituindo (1.14-19) em (1.14-12,13) obtem-se as seguintes expressões para as variáveis canônicas em modos normais de vibração (i.e., em termos das variáveis tipo oscilador harmônico):

$$y^{\mu}(\tau,\sigma) = y^{\mu}_{0}(\tau) + \frac{P^{\mu}}{N\Pi}\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{nN\pi}} \cos n\sigma\, (a^{\mu}_{n}(0)e^{-in\tau} + a^{*\mu}_{n}(0)e^{in\tau}), \tag{1.14-20}$$

$$\mathcal{P}^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{P^{\mu}}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} i\sqrt{nN\pi}\cos n\sigma\,(-a^{\mu}_{n}(0)e^{-in\tau} + a^{*\mu}_{n}(0)e^{in\tau}) \tag{1.14-21}$$

Examinemos agora a decomposição de Fourier dos funcionais de Virasoro definidos por (1.9-17). Denotando

$$L_n = L_n[e^{in\sigma}] = \frac{1}{4N}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{in} Q^2(\sigma) \quad , \qquad (1.14\text{-}22)$$

tem-se que

$$L_n^* = L_{-n} \quad . \qquad (1.14\text{-}23)$$

Um cálculo direto conduz a

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m} \quad , \qquad (1.14\text{-}24)$$

que é uma expressão alternativa da álgebra de Virasoro expressa por (1.9-18). A equação (1.14-24) mostra que as componentes de Fourier dos funcionais de Virasoro geram uma álgebra de Lie. Na verdade, as quantidades L_n são os geradores do grupo conforme sobre Σ. (Ver equação (1.13-33)).

Lembrando que para qualquer função real $f(\sigma)$ podemos escrever que

$$f(\sigma) = \sum_n f_n e^{-in\sigma} = \sum_n f_n^* e^{in\sigma}$$

com

$$f_n^* = f_{-n} \quad ,$$

tem-se

$$L[f(\sigma)] = \sum_n f_n^* L_n \qquad (1.14\text{-}25)$$

que é a decomposição de Fourier das funcionais de Virasoro. Vamos a seguir calcular a expressão de L_n em termos dos modos normais de vibração.

Usando a definição (1.9-14) das funções $Q^\mu(\sigma)$ e as expansões (1.14-12,13) encontra-se que

$$Q^\mu(\tau,\sigma) = \frac{P^\mu}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} i\sqrt{\frac{nN}{\pi}}\left[-(a_n^\mu e^{in\tau})e^{-in\sigma} + (a_n^{*\mu} e^{in\tau})e^{in\sigma}\right]$$

(1.14-26)

Agora, $a_{-n}^\mu = i\, a_n^{*\mu}$ de modo que

$$Q^\mu(\tau,\sigma) = \frac{P^\mu}{\pi} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\sqrt{\frac{nN}{\pi}}(a_n^{*\mu} e^{in\tau})e^{in\sigma} .$$

(1.14-27)

Substituindo (1.14-27) em (1.14-22) obtem-se

$$L_k = \frac{P^2}{4\pi^2 N}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{ik\sigma} + \frac{P}{2N\pi}\cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i\sqrt{\frac{mN}{\pi}}\, a_m \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(k+m)\sigma}$$

$$-\frac{1}{4N}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{N^2 nm}{\pi^2}}\, a_n^*\cdot a_m^* \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(k+n+m)\sigma} \qquad (1.14\text{-}28)$$

Esta expressão pode ser simplificada fazendo uso de

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{i(n-m)\sigma} = 2\pi\delta_{n,m} .$$

Encontra-se que

$$L_o = \frac{1}{2N\pi} P^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n^* \cdot a_n \quad , \tag{1.14-29}$$

$$L_k = - i \sqrt{\frac{k}{N\pi}}\, P \cdot a_n + \sum_{n>0} \sqrt{(k+n)n}\; a_n^* \cdot a_{k+n}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k-1} \sqrt{(k-n)n}\; a_n \cdot a_{k-n} \quad , \quad (k > 0) \quad . \tag{1.14-30}$$

Com os resultados acima pode-se mostrar que

$$\{L_k, a_m^\mu\} = i \sqrt{(k+m)m}\; a_{k+m}^\mu \quad , \qquad (k > 0) \; , \tag{1.14-31a}$$

$$\{L_k, \overset{*}{a}{}_m^\mu\} = - \sqrt{\frac{m}{N\pi}}\, P^\mu + \frac{i}{2} \sqrt{(k-m)m}\; a_{k-m}^\mu \quad , \tag{1.14-31b}$$

$$\{L_o, a_m^\mu\} = i m\, a_m^\mu \quad , \tag{1.14-31c}$$

$$\{L_o, a^{*\mu}_m\} = - i m\, a^{*\mu}_m \quad . \tag{1.14-31d}$$

Em termos das expansões de Fourier os vínculos de gauge (1.12-5a,b) e o vínculo (1.9-20) se escrevem

$$\lambda \cdot a_n(\tau) \approx 0 \quad , \tag{1.14-32a}$$

$$\lambda.\left(y_o(\tau) - \frac{P}{N\pi}\tau\right) \approx 0 \quad , \qquad (1.14\text{-}32b)$$

$$L_o \approx 0 \quad , \qquad (1.14\text{-}32c)$$

$$L_k \approx 0 \quad , \quad (k>0) \qquad (1.14\text{-}32d)$$

O conjunto de variáveis $(y_o^\mu, P_\mu, a_n^\mu, \overset{*}{a}{}_n^\mu)$ é muito útil tanto para a descrição clássica como para a descrição quântica do string. Observemos que ao se fazer a expansão das variáveis dinâmicas em termos de a_n^μ e $\overset{*}{a}{}_n^\mu$ estamos tratando o string como um sistema oscilatório, onde estas variáveis desempenham o papel de coordenadas normais. Os osciladores que aparecem nas expansões são quadridimensionais. Isto introduz uma dificuldade na teoria devido à presença de osciladores "na direção temporal", que na descrição quântica fazem surgir estados com norma negativa . Estes estados, no entanto, podem ser eliminados usando-se as condições de gauge.

O número de graus de liberdade associados com o string pode ser contado a partir de (1.14-20). Em um espaço com D dimensões este número é $(D-1) + (D-2) \times (1,\ldots,n{=}\infty)$, onde os (D-1) graus de liberdade são associados com o movimento do centro de massa.

Usando a definição (1.6-15) do momento angular, encontra-se a seguinte expressão em termos das coordenadas normais,

$$M^{\mu\nu} = y_o^{\mu}P^{\nu} - y_o^{\nu}P^{\mu} + i \sum_{n>0} \frac{1}{n}(a_n^{\mu}.a_{-n}^{\nu} - a_n^{\nu}.\ a_{-n}^{\mu}) \ . \quad (1.14-33)$$

Finalmente, observemos que da definição de L_o, equação (1.14-29), e de (1.14-32c) pode-se definir um invariante de Lorentz, o "quadrado da massa" do string, por

$$M^2 = -P^2 = 2\pi N \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n^*.a_n \quad . \qquad (1.14-34)$$

1.15 O problema de Cauchy

Consideremos um string infinito $-\infty<\sigma<+\infty$, e denotemos por $y^{\mu}(0,\sigma) = \rho^{\mu}(\sigma)$, $\rho'^2(\sigma)<D$, a curva que descreve a posição inicial do string. Suponhamos que em cada ponto desta curva está especificado um vetor $v^{\mu}(\sigma)$, não paralelo a $\rho^{\mu}(\sigma)$, e que o plano que contém este vetores intercepta o cone de luz segundo duas geratrizes. Esta condição se expressa por

$$(\rho'.v)^2 - \rho'^2 v^2 > 0 \qquad (1.15-1)$$

O problema de Cauchy para o string (no gauge ortonormal) consiste em encontrar uma solução das equações de movimento, $\ddot{y}^{\mu} - y''^{\mu} = 0$, que satisfaz aos vínculos e descreve uma superfície Σ que passa pela curva $\rho^{\mu}(\sigma)$ em $\tau=0$ e toca, em todos os pontos desta curva, o plano que contém os vetores $\rho'^{\mu}(\sigma)$ e $v^{\mu}(\sigma)$.

Observe que nesta formulação do problema apenas a componente de v^{μ} perpendicular a ρ^{μ} é relevante para os dados iniciais. De fato, decompondo v^{μ} nas direções paralela e ortogonal a ρ'^{μ},

$$v^{\mu}(\sigma) = v_{\parallel}(\sigma) + v_{\perp}(\sigma) \quad , \quad v_{\perp}.\rho = 0 \tag{1.15-2}$$

A condição (1.15-1) fica sob a forma

$$(\rho'.v_{\parallel})^2 - \rho'^2 v_{\parallel}^2 - \rho'^2 v_{\perp}^2 = - \rho'^2 v_{\perp}^2 > 0 \tag{1.15-3}$$

ou

$$v_{\perp}^2 > 0 \quad . \tag{1.15-4}$$

Logo, apenas $v_{\perp}$ é usado na especificação do plano tangente a superfície de evolução Σ no instante inicial. Portanto, diferentes vetores v^{μ} com componentes $v_{\perp}$ iguais conduzem ao mesmo movimento do string. A componente de v^{μ} paralela a ρ'^{μ} não tem significado físico.

A solução do problema de Cauchy foi construída por Barbaskov e Chernikov, e se escreve:

$$y^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\left[\rho^{\mu}(\tau+\sigma) + \rho^{\mu}(\sigma-\tau)\right] + \frac{1}{2}\int_{\sigma-\tau}^{\sigma+\tau} \frac{(\rho'.v)\rho'^{\mu} - \rho'^{2}v^{\mu}}{\sqrt{(\rho'.v) - \rho'^{2}v^{2}}}\, d\lambda \qquad (1.15\text{-}5a)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\rho^{\mu}(\tau+\sigma) + \rho^{\mu}(\sigma-\tau)\right] + \frac{1}{2}\int_{\sigma-\tau}^{\sigma+\tau} v_{\perp}(\lambda)\sqrt{\frac{\rho'^{2}(\lambda)}{v_{\perp}^{2}(\lambda)}}\, d\lambda. \qquad (1.15\text{-}5b)$$

O integrando da expressão (1.15-5a) é proporcional a densidade de momento do string em $\tau=0$. De fato, desta expressão encontra-se que

$$y'^{\mu}(0,\sigma) = \rho'^{\mu}(\sigma)\ ,\ \dot{y}^{\mu}(0,\sigma) = \frac{(\rho'.v)\rho'^{\mu} - \rho'^{2}v^{\mu}}{\sqrt{(\rho'.v)^{2} - \rho'^{2}v^{2}}} \quad .$$

Substituindo este valores na definição (1.3-5) obtem-se

$$_{\mu}(0,\sigma) = N\,\frac{(\rho'.v)\rho'_{\mu} - \rho'^{2}v_{\mu}}{\sqrt{(\rho'.v)^{2} - \rho'^{2}v^{2}}} \ . \qquad (1.15\text{-}6)$$

Note que as velocidades dos pontos do string no instante inicial, $\dot{y}^{\mu}(0,\sigma)$, obtidas de (1.15-5a) são iguais a $v^{\mu}(\sigma)$ somente se os dados iniciais $\rho'^{\mu}(\sigma)$ e $v^{\mu}(\sigma)$ satisfizerem as equações de vínculo,

$$\rho'^{2}(\sigma) + v^{2}(\sigma) = 0 \quad , \quad \rho'(\sigma).v(\sigma) = 0 \quad . \qquad (1.15\text{-}7)$$

Neste caso, o integrando de (1.15-5a) é a velocidade do string no instante inicial,

$$y^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}[\rho^{\mu}(\sigma+\tau) + \rho^{\mu}(\sigma-\tau)] + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma+\tau} d\lambda\, v^{\mu}(\lambda) \quad , \quad (1.15\text{-}8)$$

$$\dot{y}^{\mu}(0,\sigma) = v^{\mu}(\sigma) \quad . \qquad (1.15\text{-}9)$$

No caso geral tem-se que

$$\dot{y}^{\mu}(0,\sigma) = v_{\perp}^{\mu}(\sigma)\sqrt{-\frac{\rho'^{2}(\sigma)}{v_{\perp}^{2}(\sigma)}} \quad . \qquad (1.15\text{-}10)$$

Examinando-se a expressão (1.15-6) e a definição de $_{\mu}$ vê-se que v^{μ} e $\dot{y}^{\mu}$ aparecem nestas expressões da mesma maneira, o que aparentemente contradiz os resultados acima. Na verdade não há contradição porque a expressão de $\mathcal{P}_{\mu}$ não pode ser invertida para expressar $\dot{y}^{\mu}$ univocamente em termos de $\mathcal{P}_{\mu}$, já que a lagrangiana é singular.

Para o caso de strings finitos a solução do problema de Chauchy pode ser obtida a partir de (1.15-5a). Para satisfazer as condições de bordo $y'^{\mu} = 0$ em $\sigma = 0,\pi$, é suficiente fazer uma continuação dos dados iniciais $\rho^{\mu}(\sigma)$ e $\mathcal{P}_{\mu}(0,\sigma)$ para fora do intervalo $(0,\pi)$ de maneira par com relação aos pontos 0 e π.

Em problemas físico especifica-se a posição e a velocidade do sistema no instante inicial. De acordo com o esquema desenvolvido acima $\rho^{\mu} = y^{\mu}(0,\sigma)$ e $v^{\mu} = \dot{y}^{\mu}(0,\sigma)$ devem ser escolhidos de modo a satisfazer as condições (1.15-7), e a solução é construida usando a expressão (1.15-8), que é a formula de d'Alembert para o string.

1.16 O gauge transversal

Conforme mencionamos, o conjunto de variáveis (y_o^μ, P_μ, a_n^μ, $a_n^{*\mu}$) é muito útil para a descrição do string, em particular para a descrição quântica. No entanto, ao se quantizar o string de maneira covariante, usando aquelas variáveis, aparecem estados de norma negativa ("estados fantasmas") no espectro de estados físicos. Tais estados não são aceitáveis para uma interpretação consistente da teoria e sua presença não pode ser evitada a priori. Mais precisamente, estes estados ocorrem como consequência das regras de comutação $[a_n^o , a_n^{o\dagger}] = g^{oo} = -1$, que são inevitáveis se se deseja ter a covariância de Lorentz explicita. No entanto, se não insistirmos com a covariância explicita o string pode ser quantizado em um "espaço físico", que é um subespaço do espaço de Hilbert dos osciladores. Neste caso, deve-se mostrar que a covariância de Lorentz pode ser reestabelecida ou, equivalentemente, que este espaço representa todas as possíveis excitações do string. Para ser preciso, o ponto é que, uma vez feita uma escolha de gauge não covariante, uma transformação de Lorentz induz uma mudança nas coordenadas internas (τ,σ), conforme mostraremos em detalhes mais adiante. Assim, torna-se necessário fazer uma reparametrização para reestabelecer a covariância da teoria.

Vamos então fazer uma escolha específica do vetor λ que aparece nos vínculos de gauge (1.12-8a,b) e assim, eliminar as variáveis dependentes da teoria. A escolha de λ como um vetor tipo luz define o que se conhece na literatura como o gauge transversal. Veremos que as condições do gauge ortonormal $\dot{y}.\, y' = 0$ e $\dot{y}^2 + y'^2 = 0$, podem ser recobradas, de modo que o gauge transversal é uma possível especificação do gauge ortonormal no sentido de que as condições que definem este gauge não são destruídas. A nossa escolha para o vetor λ é

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 0 \quad , \tag{1.16-1}$$

$$\lambda_0 = \lambda^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ,$$

de modo que $\lambda.\lambda = 0$. É usual definir também o vetor $\bar{\lambda}$ por

$$\bar{\lambda}^1 = \bar{\lambda}^2 = 0$$

$$\bar{\lambda}_0 = -\,\bar{\lambda}_3 = -\,\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \tag{1.16-2}$$

$$\bar{\lambda}.\bar{\lambda} = 0 \quad , \quad \lambda.\bar{\lambda} = 1 \quad .$$

É conveniente introduzir as componentes tipo cone de luz para vetores arbitrários, definidas por

$$v_\perp = (v^1, v^2) \quad ,$$

$$v^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v^{0} + v^{3}) = \lambda_{\mu} v^{\mu} \quad , \qquad (1.16\text{-}3)$$

$$v^{-} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (v^{0} - v^{3}) = \bar{\lambda}_{\mu} v^{\mu} \ .$$

Usando esta decomposição para dois vetores v e u tem-se que

$$v.u = v_{\perp}.u_{\perp} - (v^{+}u^{-} + v^{-}u^{+}) \qquad (1.16\text{-}4a)$$

$$\equiv \eta^{AB} v_{A} u_{B} \quad , \qquad (1.16\text{-}4b)$$

com

$$(\eta^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.16\text{-}5)$$

$(A,B = +, -, 1 , 2)$

Em termos das componentes no cone de luz a nossa escolha para λ é

$$\lambda_{\perp} = 0$$

$$\lambda^{-} = 0 \qquad (1.16\text{-}6)$$

$$\lambda^{+} = 0 \quad .$$

Dos vínculos de gauge (1.12-4a,b) e das equações (1.12-6a,b) segue que

$$y'^{+} = 0 \quad , \qquad (1.16\text{-}7a)$$

$$\mathcal{P}^{+} = \frac{P^{+}}{\pi} \quad . \qquad (1.16\text{-}7b)$$

Usando estes resultados nas equações de vínculo (1.8-10,11) encontra-se

$$y' = \frac{\pi}{P^{+}} (\mathcal{P}_{\perp} \cdot y'_{\perp}) \qquad (1.16\text{-}8a)$$

e

$$\mathcal{P}^{-} = \frac{\pi}{2P^{+}} (\mathcal{P}_{\perp}^{2} + N^{2} y_{\perp}^{2}) \quad , \qquad (1.16\text{-}8b)$$

donde se conclui que y^{-} e $\mathcal{P}^{-}$ não são variáveis independentes. Portanto, as variáveis independentes no gauge transversal são $(y_{\perp}, \mathcal{P}_{\perp}, P^{+}, y^{-}_{o})$. Assim, neste gauge os colchetes de Poisson fundamentais da teoria são

$$\{y^{i}(\sigma), \mathcal{P}_{j}(\sigma')\} = \delta^{i}{}_{j}\,\delta(\sigma-\sigma') \quad , \quad (i,j = 1,2) \qquad (1.16\text{-}9a)$$

$$\{y_0^-, P^+\} = \mp 1 \quad . \tag{1.16-9b}$$

Queremos agora encontrar qual a hamiltoniana que gera o movimento. Neste sentido, observemos que com a escolha (1.16-6) os vínculos de gauge (1.12-4a,b) se reduzem a

$$y^+ = \frac{P^+}{N\pi}\,\tau \tag{1.16-10a}$$

e

$$\wp^+ = \frac{P^+}{\pi} \quad , \tag{1.16-10b}$$

de modo que o parâmetro de evolução é proporcional a y^+. Então

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{P^+}{N\pi}\,\frac{df}{dy^+} = \{f, H\} \tag{1.16-11}$$

onde H é a hamiltoniana que procuramos. Por outro lado, pode-se verificar que

$$\{f, P^-\} = \frac{df}{dy^+} \tag{1.16-12}$$

de modo que P^- é o gerador de deslocamentos na direção y^+. De (1.16-12) e (1.16-11) segue que a hamiltoniana H é dada por

$$H = \frac{1}{N\pi} P^+P^- = \frac{1}{N\pi} P^+ \int_0^\pi \mathcal{P}^-(\sigma)d\sigma = \qquad (1.16\text{-}13a)$$

$$= \frac{1}{2N} \int_0^\pi d\sigma (\mathcal{P}_\perp^2 + N^2 y_\perp'^2) \quad . \qquad (1.16\text{-}13b)$$

É instrutivo obter esta hamiltoniana por outros métodos. Um deles consiste em usar (1.16-11,12) e (1.16-10a), integrar a expressão (1.16-8b) e assim obter (1.16-13). Um outro procedimento é escrever a integral de ação sob a forma hamiltoniana

$$S = \int d\tau \left[P.\dot{y} + \sum_i \alpha^i \phi_i + \sum_j \beta^j \chi_j\right] \quad ,$$

onde as duas somas representam os vínculos da teoria e os vínculos de gauge, respectivamente. As variações com relação a α^i e β^j conduzem aos vínculos, que devem ser usados para eliminar as variáveis dependentes. Resulta então que

$$S = \int d\tau \left[P_\perp.\dot{y}_\perp - P^+ y_0^- - \frac{1}{N\pi} P^+P^-\right] \equiv \int d\tau \left[p.\dot{q} - H\right]$$

donde se obtem H diretamente. Esta é a hamiltoniana que propaga os graus de liberdade independentes da teoria, denominada de "hamiltoniana reduzida".

As equações de Hamilton que se obtem usando (1.16-13) são

$$\dot{y}_{\perp} = \frac{1}{N}\mathcal{P}_{\perp} \quad , \tag{1.16-14a}$$

$$\mathcal{P}^{\cdot}_{\perp} = N y''_{\perp} \quad . \tag{1.16-14b}$$

Da definição do gauge transversal segue que

$$\dot{y}^{+} = \frac{1}{N}\mathcal{P}^{+} \quad , \tag{1.16-15a}$$

$$\mathcal{P}^{\cdot +} = 0 \quad , \quad y^{+''} = 0 \quad . \tag{1.16-15b}$$

Com estes resultados e de (1.16-8a,b) obtem-se

$$\dot{y}^{-} = \frac{1}{N}\mathcal{P}^{-} \quad , \tag{1.16-16a}$$

$$\mathcal{P}^{\cdot -} = N y^{-''} \quad . \tag{1.16-16b}$$

Vê-se que as equações (1.16-14) e (1.16-16) são formalmente análogas às equações de movimento no gauge ortonormal, equações (1.11-4a,b). O gauge ortonormal pode ser definido equivalentemente pelas equações (1.11-7a,b), pela escolha $H = L_o$ ou pelas equações (1.11-4a,b).

Como já dissemos o gauge transversal é, na verdade, uma outra possível especificação do gauge ortonormal. De fato, como já vimos, as equações (1.11-7a,b) não especificam o gauge univocamente. Ainda no gauge ortonormal pode-se fazer uma mudança de parâmetros, com os novos parâmetros satisfa—

zendo a equação de d'Alembert com relação aos antigos. Agora, como as coordenadas $y^{\mu}(\tau,\sigma)$ também satisfazem a equação de d'Alembert, uma combinação linear do tipo $\lambda_{\mu}y^{\mu}$ pode ser tomada como proporcional a τ sem que se destrua as condições do gauge ortonormal.

Passemos agora a expansão de Fourier no gauge transversal. Os vínculos (1.16-10a,b) se escrevem

$$y_o^+(\tau) \approx 0 \quad , \tag{1.16-17a}$$

$$a_n^+(\tau) \approx 0 \quad . \tag{1.16-17b}$$

Os vínculos $L_o \approx o$ e $L_n \approx 0$, dados por (1.14-29,30) podem ser facilmente resolvidos para P^- e a_n^-, e o resultado é

$$P^- \equiv a_o^- \approx \frac{N\pi}{P^+} L_o^T \quad , \tag{1.16-18a}$$

$$a_n^- \approx i\sqrt{\frac{N\pi}{n}}\, \frac{1}{P^+} L_n^T \quad , \tag{1.16-18b}$$

onde

$$L_o^T = \frac{1}{2N\pi} P_1^2 + \sum_n a_{T_n}^* . a_{T_n} \quad , \tag{1.16-19a}$$

$$L_n^T = - i\sqrt{\frac{n}{N\pi}}\, P^+ . a_{Tn} + \sum_{m>0} \sqrt{m(n+m)}\, a_{T_m}^* . a_{T_{n+m}} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{m(m-n)}\, a_{T_m} . a_{Tn-m} \quad . \tag{1.16-19b}$$

Os colchetes de Poisson para as variáveis $a^*_{T_h}$, $a^*_{T_n}$, y^-_o, P^+ são

$$\{a^+_n, a^-_m\} = i\delta_{n,m} \quad , \qquad (1.16\text{-}20a)$$

$$\{a^i_{T_n}, a^{*j}_{T_m}\} = -\, i\delta^{ij}\delta_{nm} \quad , \qquad (1.16\text{-}20b)$$

$$\{y^-_o, P^+\} = -\, 1 \quad . \qquad (1.16\text{-}20c)$$

Examinando-se as equações (1.16-17) e (1.16-18), vê-se que a fixação do gauge transversal pelas equações (1.16-17) só é satisfatória se os modos para os quais P^+ é zero forem excluídos do conjunto de estados permitidos do string. Observemos que se $P^+ = 0$ a condição de gauge (1.16-10a) se reduz a $y^o(o) = y^{'}(o)$ e não se tem uma família de planos para seccionar a superfície de evolução. Tem-se apenas um plano, e isto não é útil para a fixação do gauge. Portanto, torna-se necessário determinar se os modos com $P^+ = 0$ são fisicamente relevantes (num sentido que ficará claro no que se segue).

Suponhamos que $P^+ = 0$. Das definições de P^o e P^1 obtemos

$$P^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P^+ + P^-) = \frac{1}{P^+\sqrt{2}}(P^2_+ + P^-P^+) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\,P^+}\left[2P^2_+ - \frac{1}{P^+}\left(P^2_\perp + \frac{1}{2N\pi}\sum_k k\, a^*_{T_k}\cdot a_{T_k}\right)\right] \qquad (1.16\text{-}21a)$$

e

$$P^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\ P^+}\left[2P_{\perp}^{2} - \frac{1}{P^+}\left(P_\perp^2 + \frac{1}{2N\pi}\sum_k k\ a_{T_k}\cdot a_{T_k}^*\right)\right] \qquad (1.16\text{-}21b)$$

É claro que em $P^+ = 0$ tem-se $P^o \to \infty$ e $P^1 \to -\infty$ a menos que se tenha $P^2 \to 0$ e $|a_k| \to 0$ mais rapidamente. Mas neste caso teríamos $P^o \to 0$ e $P^1 \to 0$, de modo que $P^\mu = 0$. Isto significa que $y^\mu(\tau,\sigma) = y^\mu(o)$ e $\mathcal{P}_\mu = 0$, e a história do string se reduz a um ponto no espaço-tempo.

Vejamos agora o que ocorre com P^- e a_n^-, dados por (1.16-18a,b), em $P^+ = 0$. Vê-se que para que P^- seja finito devemos ter $L_o^T = 0$ ao mesmo tempo o que, por sua vez, nos diz que $P_\perp = 0$ e $a_{T_n} = 0$. Mas isto implica que $a_n^\mu = 0$. Como consequência temos $y'^\mu = 0$ e $y^\mu(\tau) = y^\mu(o) + P^\mu\tau$, com $\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}^\mu = 0$. Assim, o string se reduz a um ponto, e sua história a uma linha no espaço-tempo.

Da discussão acima podemos concluir que os modos fisicamente relevantes são aqueles para os quais $P_\perp \neq 0$ e $a_n \neq 0$ para algum η. Isto significa que $P^+ \neq 0$ e também $P^\mu P_\mu > 0$. Um estado com $P^+ = 0$ e $P_\perp \neq 0$ tem $P^- \to \infty$ e $P^\mu P_\mu > 0$, e não é fisicamente relevante. Como resultado, os modos com $P^+ = 0$ podem ser excluidos da teoria sem problemas.

Em termos das variáveis transversais a hamiltoniana (1.16-13a) se escreve

$$H = \frac{1}{2N\pi} P_\perp^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_{T_n}^* \cdot a_{T_n} \quad . \qquad (1.16\text{-}22)$$

Definindo-se o invariante de Lorentz

$$M^2 = - P^\mu P_\mu = 2N\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, a^*_{T_n} . a_{T_n} \quad , \qquad (1.16\text{-}23)$$

tem-se que

$$H = \frac{1}{2N\pi}(P_\perp^2 + M^2) \quad . \qquad (1.16\text{-}24)$$

É interessante comparar a expressão acima com a "hamiltoniana reduzida" para a partícula livre no gauge $z^o - p^o/m \approx 0$.

Vamos agora examinar a covariância de Lorentz da teoria no gauge transversal. Consideremos dois referenciais relacionados pela transformação de Lorentz infinitesimal

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad . \qquad (1.16\text{-}25)$$

Nos dois referenciais estão definidos os gauges transversais pelas equações

$$\tau = \frac{N\pi}{\lambda . P}\, \lambda . y \quad , \quad \sigma = \frac{\pi}{\lambda . P} \int_0^\sigma d\sigma'\ \lambda . \wp \quad . \qquad (1.16\text{-}26)$$

É importante observar que as parametrizações definidas nos dois sistemas em geral não coincidem.

Denotando por (τ,σ) os parâmetros no primeiro referencial, e por $(\bar\tau,\bar\sigma)$ os parâmetros obtidos no segundo referencial como consequência da transformação de Lorentz, decor re das equações (1.16 26)

$$\delta\tau = \bar{\tau} - \tau = \frac{N\bar{y}^{+}}{\bar{P}^{+}} - \frac{Ny^{+}}{P^{+}} = \frac{N(y^{+} + \omega^{+}_{\nu}y^{\nu})}{P^{+} + \omega^{+}_{\nu}P^{\nu}} - \frac{Ny^{+}}{P^{+}} =$$

$$= \frac{\omega^{+\nu}}{P^{+}}(Ny^{\nu} - P^{\nu}\tau) \qquad (1.16\text{-}27)$$

e

$$\delta\sigma = \bar{\sigma} - \sigma = \frac{\pi}{\bar{P}^{+}}\int_0^{\sigma}\bar{\mathcal{P}}^{+}(\bar{\tau},\sigma')d\sigma' - \sigma = \frac{\omega^{+\nu}}{P^{+}}\left(\pi\int_0^{\sigma}\mathcal{P}^{\nu}(\tau,\sigma')d\sigma' - \sigma P^{\nu}\right) \qquad (1.16\text{-}28)$$

A transformação de Lorentz do campo y^{μ} é dada por

$$\bar{y}^{\mu}(\bar{\tau},\bar{\sigma}) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}y^{\nu}(\tau,\sigma) = y^{\nu}(\tau,\sigma) + \omega^{\mu}{}_{\nu}y^{\nu}(\tau,\sigma) \qquad (1.16\text{-}29)$$

Usando as equações (1.16-27,28) obtem-se a seguinte variação na forma das funções $y^{\mu}(\tau,\sigma)$:

$$\delta y^{\mu} = \bar{y}(\bar{\tau},\bar{\sigma}) - y^{\mu}(\tau,\sigma) = \bar{y}^{\mu}(\bar{\tau} - \delta\tau,\bar{\sigma} - \delta\sigma) - y^{\mu}(\tau,\sigma) =$$

$$= \omega^{\mu}_{\nu}y^{\nu} - \frac{\omega^{+\nu}}{P^{+}}\left[y'^{\mu}\left(\pi\int_0^{\sigma}d\sigma' \;\; {}^{\nu}(\tau,\sigma') - \sigma P^{\nu}\right) - y^{\mu}(Ny^{\nu} - \tau P^{\nu})\right] \qquad (1.16\text{-}30)$$

A equação acima, juntamente com a equação correspondente para δP_{μ}, nos dá uma realização não linear das transformações de Lorentz no espaço das variáveis transversais. Esta realização consiste de uma transformação Lorentz (primeiro termo de (1.16-30) seguida de uma mudança de gauge.

Observemos que a transformação (1.16-30) pode ser obtida usando-se o gerador

$$\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}\int d\sigma(\mathcal{P}^{\mu}y^{\nu} - \mathcal{P}^{\nu}y^{\mu}) \qquad (1.16\text{-}31)$$

com

$$\delta y^{\alpha} = \omega_{\mu\nu}\{y^{\alpha}, J^{\mu\nu}\} \quad . \qquad (1.16\text{-}32)$$

Nas expressões anteriores todas as quantidades devem ser escritas em termos de y_o^-, P^+, $y_\perp$ e $\mathcal{P}_\perp$. Pode-se mostrar também que as quantidades $J^{\mu\nu}$ geram corretamente a álgebra do grupo de Lorentz no sentido do colchete de Poisson. Isto prova a covariância de Lorentz do sistema no gauge transversal.

1.17 As Variáveis DDF(*)

As variáveis transversais (a_{Tn}, a^*_n, y_o^-, P^+) não são invariantes de gauge, como pode-se ver diretamente das equações (1.14-31). Pode-se construir um conjunto de variáveis independentes de gauge, conhecidas na literatura como "variáveis DDF", e que se reduzem as variáveis transversais quando se escolhe o gauge transversal. Antes de construir-

(*) DDF ≡ Del Giudici, E., Di Vecchia, P., Fubini, S.

mos este conjunto de variáveis, é instrutivo analisar uma situação análoga que ocorre no caso do campo de Maxwell no gauge de radiação

Consideremos a lagrangiana do campo de Maxwell

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (1.17\text{-}1)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Tanto a lagrangiana $_{em}$ como o tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ são invariantes pela transformação de gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Delta$. As equações de Euler-Lagrange que se obtem de (1.17-1) se escrevem

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad . \qquad (1.17\text{-}2)$$

Como se sabe, no formalismo hamiltoniano o campo de Maxwell é descrito em termos do potencial vetor $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ e do seu momento canonicamente conjugado $\vec{\pi} = (E_1, E_2, E_3)$. Apenas duas componentes do momento são independentes devido ao vínculo (de primeira classe) (*)

$$\nabla\cdot\vec{\pi} \approx 0 \qquad (1.17\text{-}3)$$

(*) Estamos supondo que A_0 foi eliminado da teoria, o que sempre é possível porque é uma função arbitrária. Ver página seguinte.

A condição de gauge de Coulomb se escreve

$$\nabla.\vec{A} \approx 0 \qquad . \qquad (1.17\text{-}4)$$

Decompondo os campos vetoriais $\vec{A}$ e $\vec{\pi}$ em componentes longitudinais e transversais,

$$\vec{A} = \vec{A}_L + \vec{A}_T \quad , \quad \vec{\pi} = \vec{\pi}_L + \vec{\pi}_T \quad ,$$

as equações (1.16-3,4) se reduzem a

$$\vec{A}_L \approx 0 \qquad , \qquad (1.17\text{-}5a)$$

$$\vec{\pi}_L \approx 0 \qquad , \qquad (1.17\text{-}5b)$$

restando apenas as variáveis transversais independentes $A^i{}_T$, $\pi^i{}_T$, $i = 1,2$ que dão o número correto de graus de liberdade.

Definindo-se a novas variáveis

$$\underset{\sim}{\vec{A}} = \vec{A} - (\nabla \frac{1}{\nabla^2} \nabla.)\vec{A} \quad , \qquad (1.17\text{-}6a)$$

$$\underset{\sim}{\vec{\pi}} = \vec{\pi} - (\nabla \frac{1}{\nabla^2} \nabla.)\vec{\pi} \quad . \qquad (1.17\text{-}6b)$$

Pode-se verificar que as condições (1.17-3) e (1.17-4) são sempre satisfeitas, e que

$$\{\underset{\sim}{\vec{A}} \, , \, \nabla.\underset{\sim}{\vec{\pi}}\} \approx 0$$

de modo que a nova variável $\vec{A}$ é invariante de gauge.

A forma (1.17-6) das variáveis independentes de gauge pode ser obtida por um procedimento um pouco mais elaborado que consiste em partir das equações de movimento (1.17-2) e eliminar a componente A_o. Isto é permitido porque o momento π_o canonicamente conjugado com esta variável deve satisfazer a equação de vínculo $\pi_o \approx 0$. De fato, usando a equação de movimento $\partial_\mu F^{\mu o} = 0$ encontra-se que

$$A_o = \frac{1}{\nabla^2} \partial_o \partial_j A^j \quad . \tag{1.17-7}$$

Com este resultado e usando a identidade

$$(\eta_{ij}\nabla^2 + \partial_i\partial_j)(\eta^{jk} + \partial^j \frac{1}{\nabla^2} \partial^k) = \eta_{ij}(\eta^{ij}\nabla^2 + \partial^j\partial^k)$$

as equações $\partial_\mu F^{\mu k} = 0$ ficam sob a forma

$$(\eta_{ij}\Box^2 - \partial_i\partial_j)\left[(\eta^{jk} + \partial^j \frac{1}{\nabla^2} \partial^k)A_k\right] = 0 \tag{1.17-8}$$

Vê-se que o segundo fator da equação (1.17-8) é exatamente a componente j da variável $\vec{\underset{\sim}{A}}$ definida por (1.17-6a),

$$\underset{\sim}{A}^j = (\eta^{jk} + \partial^j \frac{1}{\nabla^2} \partial^k)A_k \tag{1.17-9}$$

Assim, partindo das equações de movimento encontramos novas variáveis $\underset{\sim}{A}^j$ que são transversais, $\partial^j \underset{\sim}{A}_j = 0$, e invariantes de gauge, porque fazendo $A_k \to A_k + \partial_k \Delta$ Tem-se $\underset{\sim}{A}_k \to \underset{\sim}{A}_k$, o que era de se esperar que $\partial_\mu F^{\mu k} = \Box \underset{\sim}{A}_k$ também o é. E como $\Box$ é invariante de gauge, $\underset{\sim}{A}^i$ deve também ser invariante de gauge. O fato de A^i ser transversal também era de se esperar porque (1.17-9) é exatamente uma transformação para o gauge de Coulomb, com o parâmetro da transformação dado por $\Delta = \frac{1}{\nabla^2} \partial_k A^k$. Pode-se concluir que o gauge de Coulomb é, na verdade, sugerido pelas próprias equações de movimento. Observemos que a equação (1.17-9) não pode ser invertida para se obter A^k em termos de $\underset{\sim}{A}^k$, porque o operador $\eta_{ij}\nabla^2 + \partial_i \partial_j$ é singular. Mesmo assim, a lagrangiana (1.17-1) pode ser expressa apenas em termos das variáveis transversais,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2}\partial_o \underset{\sim}{A}^i \partial^0 \underset{\sim}{A}^i - \frac{1}{4} \underset{\sim}{F}_{ij} \underset{\sim}{F}^{ij} \qquad (1.17\text{-}10)$$

As equações (1.17-5a,b) são as análogas das equações $a_n^+ \approx 0$ e $L_n \approx 0$ no caso do string. A análise feita acima realmente sugere a possibilidade de se definir um novo conjunto de variáveis que se seja invariante de gauge e se reduza aos a_n no gauge transversal. A construção destas novas variáveis é feita como segue.

Consideremos o ponto $y^\mu(\tau,0)$, e façamos a mudança de variáveis

$$Z = e^{i\tau} \quad , \ \ln Z = i\tau \quad . \qquad (1.17\text{-}11)$$

Denotemos

$$y^{\mu}(-i\,\ell n\, z,0) = F^{\mu}(z) \quad . \qquad (1.17\text{-}12)$$

De (1.14-20) com $\tau = 0$ segue que

$$y^{\mu}(\tau,0) = y_o^{\mu}(\tau) - \frac{P\tau}{N\pi} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{\sqrt{N\pi n}}\, a_n^{\mu}(0)e^{-in\tau} \quad . \qquad (1.17\text{-}13)$$

Então, em termos de $F^{\mu}(z)$, o movimento do ponto $y^{\mu}(\tau,0)$ no gauge ortonormal é dado por

$$F^{\mu}(z) = y_o^{\mu} - \frac{i}{N\pi} P^{\mu}\ell n\, z + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{\sqrt{N\pi n}}\, z^{-n} a_n^{\mu} \quad . \qquad (1.17\text{-}14)$$

Por um cálculo direto verifica-se facilmente que

$$\{F^{\mu}(z), L_k\} = -\, i z^{k+1} \frac{dF^{\mu}(z)}{dz} \quad . \qquad (1.17\text{-}15)$$

Consideremos agora a quantidade

$$e^{i\gamma\cdot F(z)} \frac{dF^{\mu}(z)}{dz} \quad , \qquad (1.17\text{-}16)$$

Com o vetor $\gamma = \{\gamma_{\mu}\}$ satisfazendo às condições

$$\{\Psi_\alpha, L_n\} = 0 \quad . \tag{1.17-17}$$

Usando (1.16-15) encontra-se

$$\left\{ e^{i\gamma.F} \frac{dF}{dz} , L_k \right\} = \frac{d}{dz}\left(- iz^{k+1} e^{i\gamma.F} \frac{dF}{dz} \right) .$$

Integrando esta expressão ao longo de um contorno (c) que in clui a origem,

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_c e^{i\gamma.F} \frac{dF}{dz} dz , L_n \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c d\left[-iz^{k+1} e^{i\gamma.F} \frac{dF}{dz} \right] . \tag{1.17-18}$$

Segue então que, para que a integral de (1.17.16) seja invariante de gauge, o lado direito de (1.17-18) deve ser igual a zero. Portanto, o integrando deve ser uma função unívoca significando que devemos ter

$$\frac{1}{N\pi} \gamma.P = n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.17-19}$$

Esta condição pode ser posta numa forma mais útil introduzindo-se o vetor k_α definido por

$$k_\alpha \doteq \frac{1}{n} \gamma_\alpha \tag{1.17-20}$$

De modo que (1.17-19) toma a forma

$$\frac{k.P}{N\pi} = 1 \quad . \qquad (1.17\text{-}21)$$

As variáveis de DDF são definidas por

$$A_n^\mu = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{N\pi}\oint_c \frac{dF^\mu}{dz}\, e^{ink\cdot F} dz \quad , \qquad (1.17\text{-}22)$$

e satisfazem a

$$\{A_n^\mu(k) \ , \ L_m\} = 0 \quad , \qquad (1.17\text{-}23)$$

sendo, portanto, invariantes de gauge.

Mostremos agora a relação entre as variáveis A_n^μ e as variáveis a_n^μ do gauge transversal. Primeiramente observemos que

$$e^{ink\cdot F} = (e^{ik\cdot y_0})^n\, z^n e^{in\sum_{m\neq 0}(N\pi m)^{-1} z^{-m} k\cdot a_m} \quad .$$

Usando (1.17-21) a condição de gauge (1.14-32a) fica sob a forma

$$k.y_0 = \tau \qquad (1.17\text{-}24)$$

Impondo a condição

$$k.a_m = 0 \quad , \quad m \neq 0 \quad , \tag{1.17-25}$$

Obtemos

$$e^{ink.F} = e^{in\tau}z^n \quad .$$

Substituindo esta expressão em (1.17-22) obtemos

$$A_n^\mu = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{n\pi}\left[-\frac{iP^\mu}{N\pi}e^{in\tau}\oint_c z^{n-1}dz - e^{in\tau}\sum_{m\neq 0}\sqrt{\frac{m}{N\pi}}\oint_c z^{n-m-1}a_m^\mu dz\right] \; .$$

Calculando as integrais na expressão acima obtemos

$$A_o^\mu = -\frac{1}{\sqrt{n\pi}}P^\mu \quad , \tag{1.17-26a}$$

$$A_n^\mu = -\sqrt{n}\,e^{-in\tau}a_n^\mu(\tau) =$$

$$= -\sqrt{n}\,a_n^\mu(0) \quad , \quad n \neq 0 \quad , \tag{1 .17-26b}$$

que são as relações que procurávamos .