

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

**Quantização Canônica do Setor Eletromagnético do  
Modelo Padrão de Lee e Wick**

**THIAGO SOARES ASSIMOS**

RIO DE JANEIRO

2011

THIAGO SOARES ASSIMOS

**Quantização Canônica do Setor Eletromagnético do  
Modelo Padrão de Lee e Wick**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Accioly.

RIO DE JANEIRO

2011

# Dedicatória

*Melhor é o fim das coisas do que o princípio delas.*

- Eclesiastes 7:8

# Agradecimentos

Ao GRANDIOSO DEUS: O ALICERCE de TUDO em meu viver, o PRINCIPAL AUTOR de todas as coisas que me foram concedidas, inclusive, e especialmente, a sabedoria para a conclusão do mestrado.

Aos meus pais Luis e Glória, minha noiva Kessia (a mulher que escolhi para junto viver eternamente) e meus avós paternos e maternos. Todos indispensáveis, pelo amor, carinho, incentivo, cumplicidade e apoio que foram INCONDICIONAIS ao longo de toda esta jornada pela vida e pela Física. Com o mesmo carinho, sou grato aos meus irmãos Felipe e Giselle, aos meus cunhados, meu sogro e sogra e minha tia; pessoas que sempre acreditaram muito em minha carreira. Obviamente não posso esquecer dos mascotes Lucas e Vitória, queridos sobrinhos que alegram o nosso dia a dia, mesmo quando temos a árdua tarefa de estudar física.

Ao professor e orientador Antonio Accioly, pela paciência, dedicação, conselhos e diálogos, e por acreditar na Física como um canal da pesquisa científica, sempre me auxiliando de forma irrestrita; um profissional exemplar. Aos professores José Helayël e Sebastião Alves (Tião), que nos impactam pela solicitude e largueza de alma. Ao professor e coordenador da Pós-Graduação, Ivan dos Santos de Oliveira que, ao longo de sua gestão, trouxe grandes melhorias em prol da instituição e a todos os funcionários e estudantes do CBPF.

Aos colegas Esley, Bonilla, Jefferson Moraes e Rodrigo Turcati, pelas importantes discussões que tanto contribuíram para esta dissertação; ao Bruno Dias, Bruno Gomes, Lucho, Marília e Max, que colaboraram ativamente para a minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E a todos que de forma direta ou indireta fizeram parte dessa trajetória.

# Resumo

Consideramos o setor puramente eletromagnético do Modelo Padrão de Lee e Wick, ou seja, o sistema de *gauge*  $U(1)$  obtido pela adição de um operador (invariante de *gauge*) de dimensão 6 contendo derivadas de ordem mais alta à lagrangiana livre da teoria usual de Maxwell. A propagação ondulatória no vácuo deste modelo eletromagnético é analisada e dois tipos de ondas são encontradas: as tradicionais ondas não dispersivas da eletrodinâmica de Maxwell e ondas dispersivas que muito se assemelham às aquelas que se propagam em um plasma sem colisões. Com a finalidade de evitar a presença de modos ondulatórios evanescentes no modelo, estimamos um *cutoff* para o mesmo computando o momento magnético anômalo do elétron no contexto deste sistema. Finalmente, a quantização canônica do modelo, via formalismo com vínculos de Dirac, é contemplada.

**Palavras-Chave:** Eletrodinâmica de Lee e Wick; quantização canônica via formalismo com vínculos de Dirac.

# Abstract

We consider the pure electromagnetic sector of the Lee-Wick Standard Model, i.e., the  $U(1)$  gauge system obtained by adding a (gauge-invariant) dimension-6 operator containing higher-derivatives to the free lagrangian of the usual Maxwell theory. Wave propagation in the vacuum of this electromagnetic model is analyzed and two types of waves are found: the ordinary non-dispersive waves of Maxwell electrodynamics, and dispersive waves that bear a great resemblance with those that propagate in a collisionless plasma. In order to avoid the presence of evanescent wave modes in the model, a cutoff for this electrodynamics system is estimated by computing the anomalous electron magnetic moment in the context of the same. Finally, the canonical quantization of the model via Dirac's constraint formalism is contemplated.

**Keywords:** Lee-Wick electrodynamics; canonical quantization via Dirac's constraint formalism.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>v</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
Referências Bibliográficas . . . . .	4
<b>1 Desvelando Novos e Interessantes Aspectos da Eletrodinâmica de Lee e Wick</b>	<b>6</b>
1.1 Unitariedade e renormalizabilidade do modelo de Lee e Wick . . . . .	6
1.2 Propagação ondulatória na eletrodinâmica de Lee e Wick . . . . .	11
1.3 Um limite quântico para o <i>cutoff</i> do modelo de Lee e Wick . . . . .	14
1.4 Discussão . . . . .	17
Referências Bibliográficas . . . . .	20
<b>2 Formalismo Hamiltoniano para Sistemas Singulares com Derivadas de Ordem Mais Alta</b>	<b>22</b>
2.1 Sistemas vinculados de ordem mais alta . . . . .	22
2.2 Quantização canônica da eletrodinâmica de Maxwell . . . . .	29

2.3	Discussão . . . . .	41
	Referências Bibliográficas . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Quantização Canônica da Eletrodinâmica de Lee e Wick</b>	<b>47</b>
3.1	Equações de campo e momentos para o modelo de Lee e Wick . . . . .	47
3.2	Vínculos primários e secundários para o modelo de Lee e Wick . . . . .	49
3.3	Quantização canônica do modelo de Lee e Wick . . . . .	53
3.4	Discussão . . . . .	57
	Referências Bibliográficas . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>61</b>

# Introdução

No início dos anos 70, Lee e Wick (LW) propuseram uma teoria de QED finita [1,2], cuja ação pode ser escrita como se segue

$$S = \int d^4\mathbf{x} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right],$$

onde  $F_{\mu\nu}(= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$  é o *field strength* e  $m(> 0)$  é um parâmetro com dimensão de massa.

Há aproximadamente três anos, Grinstein, O'Connell e Wise, baseados no trabalho pioneiro daqueles autores, introduziram uma teoria de *gauge* não-abeliana do tipo LW. Este modelo, geralmente chamado de Modelo Padrão de LW (MPLW), é naturalmente livre de divergências quadráticas, proporcionando assim uma maneira alternativa para a solução do problema da hierarquia. Não obstante, ao contrário do modelo de LW original, o MPLW não é uma teoria finita; mesmo assim ele ainda é renormalizável<sup>1</sup>. Chamamos atenção para o fato de que operadores de ordem mais alta – contendo novas

---

<sup>1</sup>Uma trivial contagem de potências mostra imediatamente que os novos operadores de dimensão mais alta não comprometem a renormalizabilidade de maneira alguma, já que o comportamento melhorado no ultravioleta do propagador bosônico  $P(k)$  na região euclidiana profunda é escalonado como  $P(k) \sim \frac{1}{k^4}$ , em vez do usual  $P(k) \sim \frac{1}{k^2}$  quando  $k^2 \rightarrow \infty$ .

interações – aparecem naturalmente em teorias de *gauge* não-abelianas com derivadas mais altas e dão origem, no máximo, a divergências logarítmicas (no que concerne às correções radiativas).

Vale a pena notar que cada campo no Modelo Padrão possui um parceiro de LW com uma massa de LW associada. Tais massas são os únicos novos parâmetros no MPLW mínimo. Contudo, como observado por Álvarez, Schat, Da Rold e Szynkman, o MPLW não nos dá nenhuma informação sobre a origem das massas de LW, as quais, de modo a resolver o problema da hierarquia, não devem ser maiores do que alguns poucos TeV. Na verdade, uma análise dos observáveis de precisão do setor eletrofraco do MPLW mostra que para reproduzir os dados de tal setor (supondo que todas as massas de LW sejam da mesma ordem), a escala de LW deve ser da ordem de 5 TeV [4].

Apesar de apenas três anos terem se passado desde o surgimento do MPLW, já existe uma vasta literatura relacionada a este assunto [5-13], o que claramente mostra o considerável interesse que este modelo tem despertado. Estudos fenomenológicos sobre o MPLW também podem ser encontrados em abundância [4,14-18].

Como a eletrodinâmica de LW é o alicerce sobre o qual o MPLW foi construído<sup>2</sup>, é natural que investiguemos de maneira mais aprofundada algumas características básicas da aludida eletrodinâmica, com o intuito de desvelar novos e interessantes aspectos da mesma. Usando aqui uma comparação um tanto quanto desgastada, mas mesmo assim bastante ilustrativa, podemos dizer que este tipo de pesquisa é, *mutatis mutandis*, semelhante àquela realizada em dimensões mais baixas, visando um melhor discernimento das dificuldades conceituais que estão presentes e são ainda mais obscuras no mundo físico quadri-dimensional. Em outras palavras, compreender bem o modelo mais

---

<sup>2</sup>Como havíamos comentado, o MPLW é uma extensão da eletrodinâmica de LW.

simples na esperança de assim, pelo menos, vislumbrar uma saída para as dificuldades do modelo mais complicado, é o grande moto dos físicos.

Nosso objetivo neste trabalho é analisar alguns aspectos peculiares da eletrodinâmica de LW.

Iniciamos discutindo a unitariedade e a renormalizabilidade do modelo no Capítulo 1. Estudamos também, neste capítulo, a propagação ondulatória no contexto deste sistema eletromagnético; encerramos o mesmo estimando um limite quântico para o *cutoff* do modelo, resultado este que permite avaliar a percentagem de massa magnética presente na massa observada do elétron.

No Capítulo 2 nos devotamos ao estudo do formalismo hamiltoniano para sistemas singulares com derivadas de ordem mais alta.

A quantização canônica da eletrodinâmica de LW é realizada no Capítulo 3.

Encerramos, no Capítulo 4, analisando a possibilidade de ocorrência de monopólos magnéticos na eletrodinâmica de LW. Apresentamos, também, uma discussão das possíveis extensões dos resultados aqui elaborados.

Nas nossas convenções,  $\hbar = c = 1$  e a assinatura da métrica é  $(+1, -1, -1, -1)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] T. Lee and G. Wick, Nucl. Phys. **B9**, 209 (1969).
- [2] T. Lee and G. Wick, Phys. Rev. D **2**, 1033 (1970).
- [3] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, Phys. Rev. D **77**, 025012 (2008).
- [4] E. Álvarez, C. Schat, L. Da Rold, and A. Szykman, J. Higher Energy Phys. 04 (2008) 026.
- [5] C. Carone, Phys. Lett. B **677**, 306 (2009).
- [6] C. Carone and R. Lebed, J. Higher Energy Phys. 01 (2009) 043; Phys. Lett. B **668**, 221 (2008).
- [7] E. Gabrielli, Phys. Rev. D **77**, 055020 (2008).
- [8] F. Wu and M. Zhong, Phys. Lett. B **659**, 694 (2008); Phys. Rev. D **78**, 085010 (2008).
- [9] A. Rodigast and T. Schuster, Phys. Rev. D **79**, 125017 (2009).
- [10] A. van Tonder, arXiv:0810.1928v1 [hep-th] 10 Oct 2008.

- [11] A. Shalaby, arXiv:0812.3419v2 [hep-th] 20 Jan 2009.
- [12] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, Phys. Rev. D **77**, 065010 (2008).
- [13] I. Cho and O-Kab Kwon, arXiv: 1003.2716v1 [hep-th] 13 Mar 2010.
- [14] T. Underwood and R. Zwicky, Phys. Rev. D **79**, 035016 (2009).
- [15] T. Rizzo, arXiv:0712.1791v2 [hep-th] 8 Jan 2008.
- [16] C. Carone and R. Primulando, Phys. Rev. D **80**, 055020 (2009).
- [17] J. Espinosa, B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, arXiv:0705.1188v1 [hep-th]  
9 May 2007
- [18] T. Rizzo, arXiv:0704.3458v3 [hep-th] 11 Jun 2007.

# Desvelando Novos e Interessantes Aspectos da Eletrodinâmica de Lee e Wick

A estabilidade, a unitariedade, o conteúdo de partículas e a renormalizabilidade da teoria de Lee e Wick, são discutidas. A propagação ondulatória no vácuo desta teoria é então analisada e duas espécies de ondas são encontradas: as tradicionais ondas não dispersivas da eletrodinâmica de Maxwell e uma onda dispersiva semelhante àquela que ocorre em um plasma sem colisões. Um limite quântico para a massa da partícula pesada de Lee e Wick é também estimado.

## 1.1 Unitariedade e renormalizabilidade do modelo de Lee e Wick

O modelo abeliano de LW é definido pela seguinte lagrangiana invariante de *gauge*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Vamos mostrar que esta lagrangiana descreve (*on-shell*) dois campos de spin-1 independentes: um sem massa e outro massivo com normas positiva e negativa, respectivamente. Para se alcançar este objetivo, é conveniente adotarmos uma nova formulação onde se introduz um campo auxiliar e o termo com derivadas de ordem mais alta não comparece. A teoria de campos com os campos vetoriais reais  $A_\mu$  e  $Z_\mu$  e com lagrangiana [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu\Box Z^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu Z^\nu - \frac{m^2}{8}A^\mu A_\mu + \frac{m^2}{4}A_\mu Z^\mu - \frac{m^2}{8}Z_\mu Z^\mu, \quad (1.2)$$

é equivalente à teoria de campos definida por (1.1). De fato, variando  $Z_\mu$ , obtemos

$$Z_\mu = A_\mu + \frac{2}{m^2}\Box A_\mu - \frac{2}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu A^\nu, \quad (1.3)$$

e o par de equações acopladas de segunda ordem oriundas de (1.2) é totalmente equivalente às equações de quarta ordem geradas a partir de (1.1). O sistema (1.2) separa-se agora em duas lagrangianas, cada uma associada a um campo diferente, quando realizamos a mudança de variáveis

$$A_\mu = B_\mu + C_\mu, \quad (1.4)$$

$$Z_\mu = B_\mu - C_\mu. \quad (1.5)$$

Em termos de  $B_\mu, C_\mu, B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$  e  $C_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$ , a lagrangiana toma agora a seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{4}C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}C_\mu C^\mu, \quad (1.6)$$

que nada mais é que a diferença entre a lagrangiana de Maxwell para  $B_\mu$  e a lagrangiana de Proca para  $C_\mu$ .

Pode-se mostrar que a lagrangiana de LW pode também ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\lambda\nu}, \quad (1.7)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4m^2}\partial_\alpha F^{\mu\nu}\partial^\alpha F_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

O conteúdo de partículas da teoria pode também ser obtido diretamente de (1.1). Para tal, vamos computar os resíduos nos pólos simples do propagador saturado (contração do propagador com correntes conservadas). Adicionando à (1.1) o termo de fixação de *gauge*  $\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$ , onde, como é usual,  $\lambda$  desempenha o papel de parâmetro fixador de *gauge*, e notando que devido à estrutura da teoria e à escolha de um funcional fixador de *gauge* linear, não são exigidos neste caso fantasmas de Faddeev-Popov, obtemos prontamente o propagador no espaço dos momentos

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{k^2}{m^2} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (1.9)$$

Contraindo (1.9) com correntes conservadas  $J^\mu(k)$ , resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv J^\mu D_{\mu\nu} J^\nu \\ &= -\frac{J^2}{k^2} + \frac{J^2}{k^2 - m^2}, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir, levando em conta que  $J^2 < 0$  [2,3], que os sinais dos resíduos

de  $\mathcal{M}$  nos pólos  $k^2 = 0$  e  $k^2 = m^2$  são, respectivamente,

$$\text{Res}\mathcal{M}(k^2 = 0) > 0, \quad \text{Res}\mathcal{M}(k^2 = m^2) < 0.$$

Vale a pena notar que o sinal errado da partícula pesada indica uma instabilidade da teoria a nível clássico. Do ponto de vista quântico isto significa que a teoria é não unitária. Felizmente estas dificuldades podem ser contornadas. Realmente, a instabilidade clássica pode ser evitada impondo-se uma condição de contorno no futuro de modo a prevenir o crescimento exponencial de certos modos. No entanto, este procedimento leva à violação de causalidade no modelo [4]; esta acausalidade é suprimida, por sua vez, em escalas inferiores àsquelas associadas às partículas de LW. Por outro lado, Lee e Wick argumentaram que apesar da presença dos citados graus de liberdade relacionados com uma norma não positiva-definida no espaço de Hilbert, a teoria poderia ser unitária desde que as novas partículas obtivessem comprimentos de decaimento. Não existe uma prova geral da unitariedade em ordem de loop arbitrário para a eletrodinâmica de LW; a despeito disto, não existe até agora nenhum exemplo conhecido de violação de unitariedade. Conseqüentemente, até ordem em contrário, podemos considerar a eletrodinâmica de LW como finita e não precisamos temer o fantasma massivo de spin-1.

Em resumo, podemos dizer que o trabalho de LW consiste na introdução de campos, com propagador com sinal errado, de Pauli-Villars, como graus de liberdade, o que leva a amplitudes que têm melhor comportamento ultravioleta e tornam finita a QED logicamente divergente.

Examinando, por outro lado, o propagador (1.9), vemos que ele pode ser escrito,

como era de se esperar, como se segue

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k)_{(Maxwell)} - D_{\mu\nu}(k)_{(Proca)}, \quad (1.10)$$

onde

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k)_{(Maxwell)} &\equiv -\frac{1}{k^2} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} (1 - \lambda) \right], \\ D_{\mu\nu}(k)_{(Proca)} &\equiv -\frac{1}{k^2 - m^2} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \end{aligned}$$

Em decorrência deste resultado, obtemos prontamente o potencial não-relativístico do modelo de LW, ou seja

$$\begin{aligned} U(r) &= U(r)_{(Coulomb)} - U(r)_{(Yukawa)} \\ &= \frac{q}{4\pi r} [1 - e^{-mr}], \end{aligned} \quad (1.11)$$

que, ao contrário do potencial coulombiano, é finito na origem.

Uma questão importante concernente à eletrodinâmica de LW é se ela é ou não renormalizável. Em princípio, teorias vetoriais massivas não são renormalizáveis devido a seu propagador livre não se aproximar de zero assintoticamente como no caso sem massa. Existem, contudo, duas importantes exceções a esta regra: (i) teorias de *gauge* com quebra espontânea de simetria, e (ii) teorias com bósons vetoriais massivos neutros acoplados a correntes conservadas. Apesar do modelo de LW não poder ser considerado um sistema puramente massivo, seu propagador livre aproxima-se de zero para grandes valores dos momentos, tornando assim a teoria renormalizável por contagem de potências [5].

## 1.2 Propagação ondulatória na eletrodinâmica de Lee e Wick

Na eletrodinâmica de LW, o potencial  $A_\mu$  obedece às equações

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) (\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) = 0, \quad (1.12)$$

que no *gauge* de Lorentz reduzem-se a

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \square A^\nu = 0, \quad (1.13)$$

A fim de encontrarmos as relações de dispersão, passamos para o espaço dos momentos via o ansatz  $A^\nu(x) = \tilde{A}^\nu(k)e^{-ikx}$ . Levando este resultado em (1.13), obtemos prontamente que

$$\left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right) k^2 = 0. \quad (1.14)$$

Como  $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ , podemos reescrever esta equação como

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left[ \frac{\omega^2 - \mathbf{k}^2}{m^2} - 1 \right] = 0. \quad (1.15)$$

A equação (1.15) admite duas classes de solução. A primeira família é a das soluções usuais da eletrodinâmica para as quais vale a relação de dispersão  $\omega = |\mathbf{k}|$ . A outra família satisfaz à relação  $\mathbf{k}^2 = \omega^2 - m^2$ , que pode ser colocada na forma mais familiar

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}, \quad (1.16)$$

com  $\omega_P = m$ . Esta equação descreve ondas eletromagnéticas propagando-se através de

um plasma sem colisões [6-8] com um comprimento de atenuação  $\delta \equiv \frac{1}{\omega_P} = \frac{1}{m}$  muito pequeno<sup>1</sup>.

Examinando a equação (1.16) vemos que  $|\mathbf{k}|$  é real somente se  $\omega > \omega_P$ . Se  $\omega < \omega_P$ ,  $|\mathbf{k}|$  é um número imaginário puro, tais modos não se propagam e são chamados de modos evanescentes (vide Fig. 1.1).

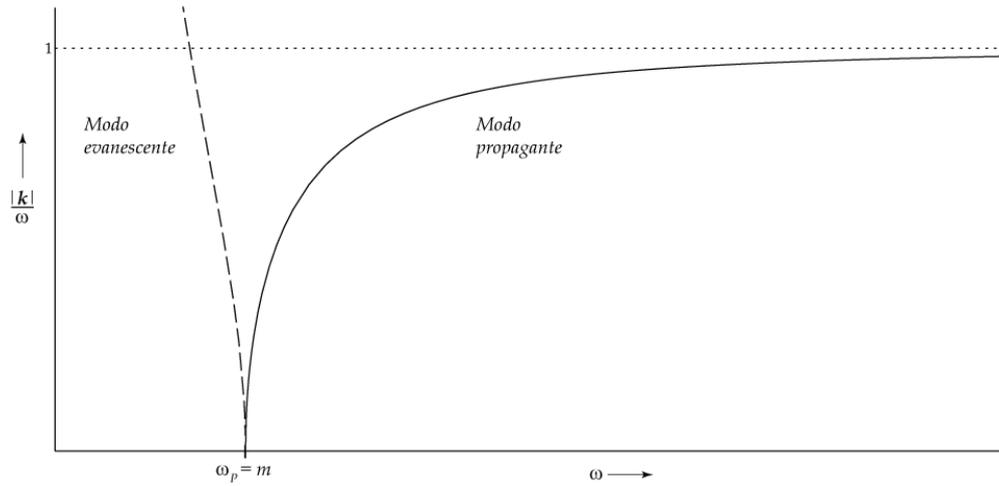


Figura 1.1: Relações de dispersão para a eletrodinâmica de LW. A linha contínua denota o modo propagante e a linha tracejada representa a parte imaginária do modo evanescente.

Podemos agora determinar as velocidades de grupo e fase para os modos dispersivos propagantes. A velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial |\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega}, \quad (1.17)$$

---

<sup>1</sup>Vamos estimar na próxima seção um valor para  $m$ , o que nos permitirá constatar que  $\delta \ll 1$ .

ao passo que a velocidade de fase é determinada pela relação

$$v_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}. \quad (1.18)$$

Analisando (1.17) e (1.18) concluímos que  $v_g < 1$  e  $v_p > 1$ , o que concorda com a ideia que estamos perseguindo de ser esta propagação eletromagnética análoga à propagação de ondas eletromagnéticas num vácuo tipo-plasma.

Das considerações anteriores conclui-se que  $m$  é um *cutoff* para o modelo de LW. Seria fundamental, portanto, estimar um limite para este parâmetro. Examinemos, com este intuito, o potencial dado pela equação (1.11). O fato deste potencial ser finito quando  $r \rightarrow 0$  é uma indicação de que a auto-energia e a massa eletromagnética de uma partícula carregada puntiforme na teoria de LW são finitas. Na realidade, como argumentaremos abaixo, no âmbito desta teoria não só a massa eletromagnética é finita, como o célebre problema dos 4/3 da eletrodinâmica de Maxwell encontra uma resolução natural.

A equação de movimento de Newton relativa a uma carga estendida no contexto do modelo de Abraham-Lorentz é dada por [7]

$$\frac{4}{3}m_e \dot{\mathbf{v}} - \frac{2}{3}e^2 \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (1.19)$$

onde  $\mathbf{v}$ ,  $m_e$  e  $e$  são, respectivamente, a velocidade, a massa eletromagnética e a carga da partícula, e  $\mathbf{F}_{ext}$  é a força externa aplicada ao elétron. Supomos aqui que, no referencial de repouso instantâneo da partícula, a distribuição de carga é rígida e esfericamente simétrica. Além disso, supomos também a ausência de massa mecânica. Evidentemente a massa eletromagnética entra com coeficiente errado em (1.19). Por esta razão o fator

4/3 tem sido fonte de acirrados debates. Uma possível saída para esta dificuldade, entre outras, é calcular a auto-força que atua numa partícula puntiforme carregada no contexto da eletrodinâmica de LW em pequenas distâncias. Neste caso a massa eletromagnética entra na equação de movimento em uma forma consistente com a relatividade especial; e mais, a equação de movimento correta não exhibe nem *runaway solutions* nem comportamento acausal, quando o *cutoff*  $l(\equiv \frac{1}{m})$  é maior que o raio clássico do elétron [9,10]. Consequentemente  $l > 1.4 \times 10^{-15}m$ , o que nos permite concluir que  $m < 141MeV$ .

### 1.3 Um limite quântico para o *cutoff* do modelo de Lee e Wick

Lembrando que a QED prediz o momento magnético anômalo do elétron corretamente até a décima casa decimal, um limite para o *cutoff* do modelo de LW pode ser encontrado computando-se o momento magnético anômalo do elétron no contexto deste sistema e comparando posteriormente o resultado obtido com aquele da QED [11]. Como é bem conhecido, o momento magnético anômalo do elétron provém da correção de vértice para o espalhamento do elétron por um campo externo, como está mostrado na Fig 1.2.

Para um elétron espalhado por um campo magnético estático externo e no limite de  $\mathbf{q} \rightarrow 0$ , a razão giromagnética é dada por [12]

$$g = 2[1 + F_2(0)].$$

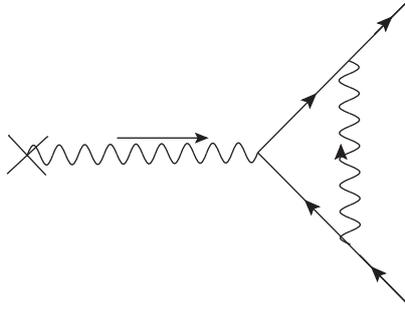


Figura 1.2: Correção de vértice para o espalhamento de um elétron por um campo externo.

O fator de forma do elétron,  $F_2(0)$ , corresponde a um deslocamento do fator- $g$ , normalmente escrito na forma  $F_2(0) \equiv \frac{g-2}{2}$ , e dá origem ao momento magnético anômalo do elétron. Utilizando (1.9) no cálculo do diagrama da Fig. 1.2, pode ser mostrado que

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \Sigma\alpha_i) \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3} - \frac{\alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon}} \right], \quad (1.20)$$

onde  $\epsilon \equiv \frac{M^2}{m^2}$ , sendo  $M$  a massa do elétron. Chamamos atenção para o fato de que o termo  $-\frac{m^2 k^\mu k^\nu}{k^4(k^2 - m^2)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{k^2}{m^2} - 1 \right) \right]$  que aparece na equação (1.9) não contribui para o cálculo do fator de forma  $F_2(0)$  porque o propagador sempre aparece acoplado a correntes conservadas.

Integrando a equação acima primeiro em  $\alpha_3$  e, em seguida, em relação a  $\alpha_2$ , temos

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} d\alpha_2 \left[ \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} - \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon}} \right] \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + \epsilon(1-\alpha_1)^2}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\int dx \frac{x^2}{\epsilon x^2 + x(1-2\epsilon) + \epsilon} = \frac{x}{\epsilon} - \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon} \ln |\epsilon x^2 + x(1-2\epsilon) + \epsilon| + \frac{1+2\epsilon^2-4\epsilon}{2\epsilon^2\sqrt{1-4\epsilon}} \ln \left| \frac{A-B}{A+B} \right|,$$

onde  $A \equiv 2\epsilon x + 1 - 2\epsilon$  e  $B \equiv \sqrt{1-4\epsilon}$ ; assim,

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2} \ln \epsilon + \frac{1+2\epsilon^2-4\epsilon}{2\epsilon^2\sqrt{1-4\epsilon}} \ln \frac{1+\sqrt{1-4\epsilon}}{1-\sqrt{1-4\epsilon}} \right]. \quad (1.21)$$

Lembrando que  $\epsilon \ll 1$ , o que implica que

$$\frac{1+2\epsilon^2-4\epsilon}{2\epsilon^2\sqrt{1-4\epsilon}} \approx \frac{1-2\epsilon+5\epsilon^4}{2\epsilon^2},$$

$$\ln \frac{1+\sqrt{1-4\epsilon}}{1-\sqrt{1-4\epsilon}} \approx - \left[ 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \frac{20\epsilon^3}{3} + \frac{35\epsilon^4}{2} + \ln \epsilon \right],$$

chegamos à conclusão de que

$$F_2(0) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{M}{m} \right)^2 - 2 \left( \frac{25}{12} + \ln \left( \frac{M}{m} \right) \right) \left( \frac{M}{m} \right)^4 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{M}{m} \right)^6 \right) \right]. \quad (1.22)$$

O primeiro termo da equação acima é igual àquele calculado por Schwinger em 1948 [13]. Desde então,  $F_2(0)$  foi calculado até a ordem de  $\alpha^8$  para a QED. O segundo termo da equação (1.22) é a correção mais importante relacionada ao parâmetro  $m$  da eletrodinâmica de LW. Cálculos recentes de  $F_2(0)$  no contexto da QED dão, para o elétron [14],

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,182.79(7.71) \times 10^{-12}.$$

Por outro lado, o valor experimental atual para o momento magnético anômalo do

elétron é [15]

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,181.1(0.7) \times 10^{-12}.$$

Uma comparação entre o valor teórico predito pela QED e o experimental nos mostra que estes resultados concordam em 1 parte em  $10^{10}$ . Portanto,

$$\frac{2}{3} \left( \frac{M}{m} \right)^2 < 10^{-10}. \quad (1.23)$$

Consequentemente, um limite inferior para a partícula pesada de Lee e Wick e, portanto, para o *cutoff* que estamos procurando é  $m \approx 42\text{GeV}$ . Isto significa que um limite superior para este *cutoff* é  $l \approx 4.7 \times 10^{-18}m$ .

## 1.4 Discussão

Comparando as lagrangianas (1.1) e (1.6), vemos claramente que a primeira é invariante de *gauge*, enquanto que a segunda não o é. Além disso, (1.1) não nos permite antever por simples inspeção o conteúdo de partículas do modelo. Tudo que ela nos diz é que estamos na presença de uma teoria de ordem mais alta descrita por um campo  $A_\mu$ , invariante de *gauge*, com 4 componentes. Por outro lado, (1.6) mostra prontamente que a teoria é composta por uma partícula sem massa de spin-1 (descrita pelo vetor  $B_\mu$ , com 4 componentes) e um *ghost* massivo de spin-1 (descrito pelo vetor  $C_\mu$  com 4 componentes). Visto pelo prisma da segunda lagrangiana, vemos que precisaremos de 3 vínculos de *gauge* se quisermos quantizar canonicamente a teoria de LW. Isto será comprovado no Capítulo 3. É interessante notar que a invariância de *gauge* no caso da primeira lagrangiana “vela”, a olho nu, o conteúdo de partículas do modelo, enquanto que a ausência desta invariância permite que a natureza das partículas seja “desvelada”

por simples inspeção. Temos aqui, grosso modo, um princípio tipo “vela-desvela” para o conteúdo de partículas:

- presença da invariância de *gauge*: “vela”;
- ausência da invariância de *gauge*: “desvela”.

Um outro ponto interessante a ser discutido é a questão da percentagem de massa magnética presente na massa observada do elétron. Pode-se mostrar que no modelo de LW a massa eletromagnética é dada por [9,10]

$$m_{EM} = \frac{e^2}{2l}, \quad (1.24)$$

que diverge linearmente. Como vimos na seção anterior,  $l \approx 4.7 \times 10^{-18}m$ . Certamente, um comprimento tão pequeno está fora do domínio de validade da eletrodinâmica clássica. Assim sendo, não podemos usar esta expressão clássica para avaliar a auto-energia do elétron na eletrodinâmica de LW. Um cálculo não muito complicado no contexto da teoria quântica de LW nos permite concluir que

$$m_{EM} = \frac{3\alpha}{2\pi} M \ln \frac{m}{M}, \quad (1.25)$$

o que mostra que a divergência linear em  $l$  foi substituída pela divergência logarítmica. Lembrando que  $m \approx 42GeV$ , obtemos que a massa magnética corresponde a apenas 3,9% da massa observada do elétron. Isto significa que a maior parte da massa do elétron provém de interações de origem não eletromagnética.

Cabe, por fim, discutir as propriedades do potencial não-relativístico  $U(r)$ .

- Ao contrário do potencial coulombiano que é singular na origem, o potencial de LW,  $U$ , como já vimos, é finito neste ponto ( $U(0) = -\frac{qm}{4\pi}$ );

- Quando  $r/l \gg 1$ ,  $U$  se reduz ao potencial coulombiano;
- Somente para pequenas distâncias ( $r/l \ll 1$ ),  $U$  difere significativamente do potencial coulombiano (vide Fig. 1.3).

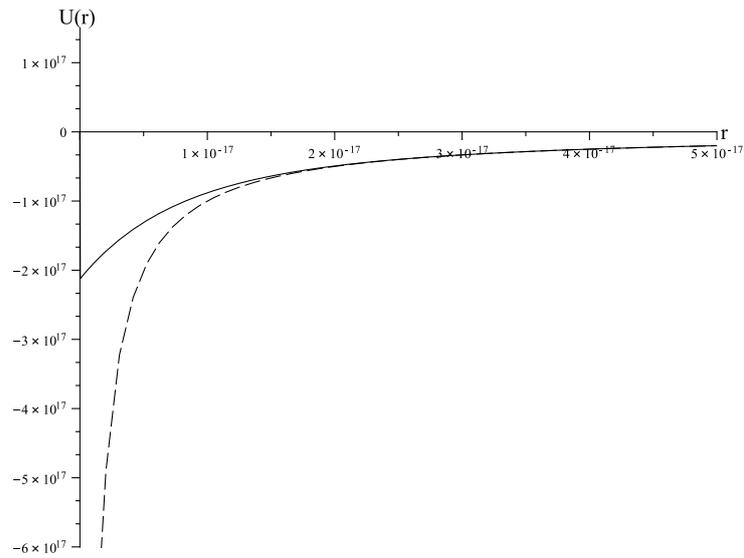


Figura 1.3: O potencial  $U$  devido a um elétron ( $q = -e < 0$ ) em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ , como função da distância  $r$ . A linha tracejada representa o potencial coulombiano (em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ ).

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, Investigations in the Electromagnetic Sector of the Lee-Wick Standard Model (submetido ao J. High Energy Phys.).
- [2] A. Accioly, Phys Rev. D **67**, 127502 (2003); Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **127**, 100 (2004).
- [3] A. Accioly and M. Dias, Int. J. Theor. Phys. **44**, 1123 (2005).
- [4] S. Coleman, in *Proceedings of Erice 1969, Ettore Majorana School on Subnuclear Phenomena* (Academic Press, New York, 1970), pp. 282-337.
- [5] A. Accioly and E. Scatena, Mod. Phys. Lett. A **25**, 269 (2010).
- [6] M. Lieberman and A. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (Wiley, 1994).
- [7] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition (Wiley, 1998).
- [8] R. Santos, Mod Phys. Lett. A **26**, 1909 (2011).
- [9] J. Frenkel, Phys. Rev. E **54**, 5859 (1996).

- [10] J. Frenkel and R. Santos, *Int. J. Mod. Phys. B* **13**, 315 (1999).
- [11] A. Accioly *et al.*, *Mod. Phys. Lett. A* **26**, 1985 (2011).
- [12] P. Frampton, *Gauge Field Theories* (Benjamin/Cummings, 1987).
- [13] J. Schwinger, *Phys. Rev. D* **73**, 416 (1948).
- [14] T. Ayoama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Phys. Rev. D* **77**, 053012 (2008).
- [15] Particle Data Group (C. Amsler *et al.*), *Phys. Lett. B* **667**, 1 (2008).

# Capítulo 2

## Formalismo Hamiltoniano para Sistemas Singulares com Derivadas de Ordem Mais Alta

Apresentamos, de passagem, os principais ingredientes relativos ao formalismo hamiltoniano no caso específico de uma teoria eletromagnética de ordem mais alta. O mecanismo de incorporação dos vínculos é explanado utilizando como paradigma a eletrodinâmica de Maxwell, que é um sistema de primeira ordem na lagrangiana. Na realidade, o procedimento adotado para a incorporação dos vínculos independe da ordem da lagrangiana do sistema.

### 2.1 Sistemas vinculados de ordem mais alta

Consideremos, para fixar ideias, uma teoria com derivadas de ordem superior definida pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\alpha, \partial_\beta A_\alpha, \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha), \quad (2.1)$$

onde  $A_\alpha$  é um campo vetorial. Modelos com derivadas de ordem maior que a segunda podem ser tratados de maneira análoga a que será aqui apresentada.

As equações de campo para o modelo em questão são obtidas através do princípio variacional usual,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3 \mathbf{x} \delta \mathcal{L} = 0, \quad (2.2)$$

e levando em conta que nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  o sistema seja caracterizado por

$$\delta A_\alpha(t_1) = \delta A_\alpha(t_2) = 0, \quad (2.3)$$

$$\delta \dot{A}_\alpha(t_1) = \delta \dot{A}_\alpha(t_2) = 0. \quad (2.4)$$

De (2.1) e (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3 \mathbf{x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} \right] \delta A_\alpha \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3 \mathbf{x} \left[ \partial_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} \delta A_\alpha \right) - 2 \partial_\beta \left( \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha} \delta A_\alpha \right) \right. \\ & \left. + \partial_\gamma \partial_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha} \delta A_\alpha \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} \right] \delta A_\alpha \\
&\quad + \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} \delta A_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - 2 \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \dot{A}_\alpha} \delta A_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} \right. \\
&\quad \left. + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \delta A_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \delta \dot{A}_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} \right]. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Em decorrência do resultado anterior, as equações de campo relativas à densidade de lagrangiana (2.1), assumem a seguinte forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} = 0. \tag{2.6}$$

Por outro lado, a passagem do formalismo lagrangiano para o formalismo hamiltoniano requer a introdução dos momentos canônicos. Em geral, estes momentos são determinados a partir do tensor de energia-momento simétrico associado à teoria com derivadas de segunda ordem. Tal procedimento, apesar de não envolver cálculos complicados, é extremamente laborioso. Vamos aqui utilizar um método idealizado por Landau e Lifshitz [1], que simplifica enormemente esta tarefa. Em síntese, a prescrição consiste em considerar variações da ação com um dos extremos fixos, por exemplo,

$$\delta A_\mu(t_1) = 0, \tag{2.7}$$

$$\delta \dot{A}_\mu(t_1) = 0, \tag{2.8}$$

mas de modo tal que apenas as trajetórias clássicas sejam permitidas.

Utilizando a prescrição acima delineada, obtemos prontamente, usando (2.5), o

seguinte resultado

$$\delta S = \int d^3\mathbf{x} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} - 2\partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \dot{A}_\alpha} \right) \delta A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \delta \dot{A}_\alpha \right], \quad (2.9)$$

onde  $\delta A_\alpha$  e  $\delta \dot{A}_\alpha$  correspondem a variações em  $t = t_2$ . Os momentos canônicos  $\pi^\alpha$  e  $\eta^\alpha$ , conjugados respectivamente a  $A_\alpha$  e  $\dot{A}_\alpha$  são definidos pela relação

$$\delta S = \int d^3\mathbf{x} \left[ \pi^\alpha \delta A_\alpha + \eta^\alpha \delta \dot{A}_\alpha \right]. \quad (2.10)$$

Comparando (2.9) e (2.10), concluímos que os momentos generalizados obedecem as equações

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} - 2\partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \dot{A}_\alpha}, \quad (2.11)$$

$$\eta^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha}. \quad (2.12)$$

Note que na ausência de derivadas de ordem superior, retorna-se ao resultado usual, ou seja,

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha}. \quad (2.13)$$

Isto posto, vamos definir a hamiltoniana canônica. Para tanto, adotamos o procedimento padrão, ou seja,

$$H_c = \int d^3\mathbf{x} \left[ \pi^\alpha \dot{A}_\alpha + \eta^\alpha \ddot{A}_\alpha - \mathcal{L} \right]. \quad (2.14)$$

Procedendo a uma variação geral de  $H_c$ , obtemos

$$\begin{aligned} \delta H_c &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \dot{A}_\alpha \delta \pi^\alpha + \pi^\alpha \delta \dot{A}_\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta \eta^\alpha + \eta^\alpha \delta \ddot{A}_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} \delta A_\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} \delta \partial_\beta A_\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} \delta \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \dot{A}_\alpha \delta \pi^\alpha + \left( \pi^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} + 2\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \dot{A}_\alpha} \right) \delta \dot{A}_\alpha \right. \\ &\quad + \left( \eta^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \right) \delta \ddot{A}_\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta \eta^\alpha \\ &\quad \left. + \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i A_\alpha} - \partial_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \partial_j A_\alpha} \right) \delta A_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Levando (2.11) e (2.12) em (2.16), concluímos que

$$\begin{aligned} \delta H_c &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \dot{A}_\alpha \delta \pi^\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta \eta^\alpha - \dot{\eta}^\alpha \delta \dot{A}_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i A_\alpha} - \partial_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \partial_j A_\alpha} \right) \delta A_\alpha - \dot{\eta}_\alpha \delta \dot{A}_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$H_c$  é, conseqüentemente, um funcional de  $A_\alpha$ ,  $\dot{A}_\alpha$ ,  $\pi^\alpha$  e  $\eta^\alpha$ , que são, em decorrência, as coordenadas canônicas deste formalismo.

As equações de Hamilton podem agora ser facilmente deduzidas. De fato, substituindo (2.6) em (2.17), obtemos

$$\delta H_c = \int d^3\mathbf{x} \left[ \dot{A}_\alpha \delta \pi^\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta \eta^\alpha - \dot{\pi}^\alpha \delta A_\alpha - \dot{\eta}^\alpha \delta \dot{A}_\alpha \right]. \quad (2.18)$$

As equações de Hamilton são, portanto,

$$\begin{aligned}
\dot{A}_\alpha(x) &= \frac{\delta H_c}{\delta \pi^\alpha(x)}, \\
\ddot{A}_\alpha(x) &= \frac{\delta H_c}{\delta \eta^\alpha(x)}, \\
\dot{\pi}_\alpha(x) &= -\frac{\delta H_c}{\delta A^\alpha(x)}, \\
\dot{\eta}_\alpha(x) &= -\frac{\delta H_c}{\delta \dot{A}^\alpha(x)}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Em sequência, vamos introduzir os parênteses de Poisson. Seja, então, um certo funcional  $B_\alpha = B_\alpha[A_\beta, \dot{A}_\beta, \pi_\beta, \eta_\beta]$ . Sua derivada total em relação ao tempo é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B_\alpha &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{\delta B_\alpha}{\delta A_\beta} \dot{A}_\beta + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \dot{A}_\beta} \ddot{A}_\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \pi_\beta} \dot{\pi}_\beta + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \eta_\beta} \dot{\eta}_\beta \right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Utilizando as equações de Hamilton, obtemos

$$\frac{d}{dt}B_\alpha = \{B_\alpha, H_c\}, \tag{2.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
\{B_\alpha, H_c\} &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{\delta B_\alpha}{\delta A_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta \pi^\beta} + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \dot{A}_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta \eta^\beta} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta B_\alpha}{\delta \pi_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta A^\beta} - \frac{\delta B_\alpha}{\delta \eta_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta \dot{A}^\beta} \right],
\end{aligned} \tag{2.22}$$

é o parêntese de Poisson<sup>1</sup> entre  $B_\alpha$  e  $H_c$ . No caso de dois funcionais  $B_\mu$  e  $C_\nu$ , o parêntese de Poisson é definido da mesma maneira que em (2.22). Note que as expressões (2.19) e (2.21) atestam a consistência da definição da hamiltoniana canônica apresentada em (2.14).

Os parênteses fundamentais de Poisson são, no caso em pauta,

$$\{A_\alpha(x), \pi^\beta(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.23)$$

$$\{\dot{A}_\alpha(x), \eta^\beta(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.24)$$

sendo os demais parênteses nulos.

O próximo passo será estabelecer, a partir da lagrangiana, se o modelo a ser analisado é ou não singular. Um sistema de segunda ordem é dito singular se a sua matriz hessiana

$$W^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha \partial \ddot{A}_\beta} \quad (2.25)$$

possui determinante nulo. Sistemas que apresentam determinante diferente de zero são chamados sistemas regulares, ou seja, não possuem vínculos, o que implica que sua hamiltoniana é univocamente determinada.

---

<sup>1</sup>Os parênteses de Poisson são sempre calculados em tempos iguais e apresentam as seguintes propriedades algébricas:

- (i)  $\{A, B\} = -\{B, A\}$ ;
- (ii)  $\{A + \alpha B, C\} = \{A, C\} + \alpha\{B, C\}$ , com  $\alpha$  independente das variações canônicas;
- (iii)  $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$ ;
- (iv)  $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$ ;
- (v)  $\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0$ .

No caso dos sistemas vinculados (que são precisamente os que nos interessam, uma vez que iremos analisar modelos invariantes de *gauge*), seria necessário mostrar como os diferentes vínculos são incorporados à teoria. Isto, no entanto, não requer um tratamento especial. O procedimento é o mesmo que no caso dos sistemas de primeira ordem [2-10]. Assim sendo, antes de passarmos ao estudo da quantização da eletrodinâmica de Lee e Wick, que é um sistema de segunda ordem, estudaremos a quantização de um modelo de primeira ordem: a eletrodinâmica de Maxwell. Este sistema, apesar de mais simples, apresenta *mutatis mutandis* dificuldades semelhantes as que serão encontradas na quantização da eletrodinâmica de Lee e Wick.

## 2.2 Quantização canônica da eletrodinâmica de Maxwell

A eletrodinâmica de Maxwell é definida pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

A matriz hessiana do sistema,

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha \partial \dot{A}_\beta} \\ &= -\eta^{\alpha\beta} + \delta_0^\alpha \delta_0^\beta \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

tem *rank* igual a 3, o que significa que o modelo possui  $1(= 4 - 3)$  vínculo primário. Vínculos primários são vínculos obtidos da definição dos momentos, ou seja,

$$\pi^\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\lambda}. \quad (2.27)$$

De (2.26) e (2.27), concluímos que

$$\pi^\lambda = F^{\lambda 0}. \quad (2.28)$$

Segue-se que

$$\pi^0 \approx 0 \quad (2.29)$$

é o único vínculo primário do modelo<sup>2</sup>.

Os parênteses fundamentais de Poisson, por sua vez, são dados por

$$\{A_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi^\beta(\mathbf{y}, t)\} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.30)$$

$$\{A_\alpha(\mathbf{x}, t), A_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \{\pi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = 0. \quad (2.31)$$

---

<sup>2</sup>O símbolo “ $\approx 0$ ” é lido como *fracamente igual a zero* e significa que a relação acima não vale, necessariamente, dentro dos parênteses de Poisson.

Obviamente (2.30) é incompatível com (2.29).

Vamos construir, em sequência, a hamiltoniana primária,

$$H_1 = H_c + \int d^3\mathbf{x} \lambda \pi_0 = \int d^3\mathbf{x} \left[ \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} + \lambda \pi_0 \right].$$

Notando que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2, \\ \dot{A}_i &= F_{0i} + \partial_i A_0 = -\pi_i + \partial_i A_0, \\ \pi^\mu \dot{A}_\mu &= \pi_i^2 + \pi^i \partial_i A_0, \end{aligned}$$

onde  $\pi_i^2 \equiv \pi_i \pi_i$  e  $F_{ij}^2 \equiv F_{ij} F_{ij}$ , concluímos que

$$H_1 = \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \pi_i^2 + A_0 \partial_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + \lambda \pi_0 \right]. \quad (2.32)$$

Vínculos secundários são obtidos através da condição de consistência de que vínculos não devem possuir evolução temporal. Usando a condição de consistência para  $\pi^0$ , isto é ,

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_1\} \approx 0,$$

encontramos mais um vínculo da teoria

$$\partial_i \pi_i \approx 0. \quad (2.33)$$

Esta relação nada mais é que a Lei de Gauss escrita como uma equação fraca, uma vez que  $E_i = F_{i0} = \pi_i$ .

A conservação temporal do vínculo secundário,  $\partial_i \pi_i$ , ou seja,

$$\partial_i \dot{\pi}_i = \{\partial_i \pi_i, H_2\} \approx 0,$$

onde

$$H_2 = \int d^3 \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \pi_j^2 + A_0 \partial_j \pi_j + \frac{1}{4} F_{kl}^2 + \lambda_1 \pi_0 + \lambda_2 \partial_j \pi_j \right],$$

nos permite concluir que não há mais vínculos na teoria. A hamiltoniana estendida do sistema tem, em consequência, a seguinte forma

$$H = \int d^3 \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{kl}^2 + \lambda_1 \pi_0 + (A_0 + \lambda_2) \partial_i \pi_i \right]. \quad (2.34)$$

A partir dos parênteses de Poisson

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H\} = \lambda_1,$$

$$\dot{A}_i = \{A_i, H\} = -\pi_i + \partial_i A_0 + \partial_i \lambda_2,$$

$$\dot{\pi}_i = \{\pi_i, H\} = \partial_k F_{ik} = (\nabla \times \mathbf{B})_i,$$

podemos estabelecer os seguintes valores para os multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_1 = \dot{A}_0, \quad \lambda_2 = 0.$$

Note que  $\dot{A}_0$  é uma função arbitrária, o que acarreta que  $A_0$  também é arbitrário.

Consequentemente,

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{kl}^2 + \dot{A}_0\pi_0 + A_0\partial_i\pi_i \right]. \quad (2.35)$$

Observe que esta hamiltoniana descreve um sistema sem vínculos de *gauge*.

Antes de procedermos à quantização canônica do sistema, é importante notar que a classificação dos vínculos em primários e secundários está diretamente ligada à maneira como os vínculos são obtidos. No que concerne à quantização canônica, no entanto, existe uma classificação mais apropriada para os vínculos, que consiste em organizá-los em dois grupos:

**Vínculos de Primeira Classe:** Possuem parênteses de Poisson (fracamente) iguais a zero com todos os vínculos da teoria.

**Vínculos de Segunda Classe:** Possuem pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero com os outros vínculos.

É importante frisar que a existência de vínculos de primeira classe implica na invariância da teoria por transformações de *gauge*.

Isto posto, retornemos ao problema da quantização canônica de nossa teoria. Os vínculos deste sistema, ou seja,

$$\pi^0 \approx 0, \quad \partial_i\pi_i \approx 0,$$

são vínculos de primeira classe, o que era esperado devido a invariância local  $U(1)$  da teoria de Maxwell.

Sendo o número de vínculos igual a dois<sup>3</sup>, teremos apenas dois graus de liberdade

---

<sup>3</sup>Dois vínculos significam, na realidade, duas equações de vínculos, já que em teoria de campos com

para o campo do fóton após procedermos à fixação de *gauge*, o que está de acordo com a natureza. Como temos dois vínculos de primeira classe, a fixação de *gauge* deve nos fornecer mais dois vínculos. Obviamente o conjunto formado por todos os vínculos, no caso quatro, deve ser de segunda classe.

Certamente o *gauge* de radiação é uma boa escolha no que concerne a quantização de nosso sistema, como veremos no desenrolar da exposição. Assim sendo, os novos vínculos assumem a forma

$$A_0 \approx 0, \text{ (“gauge temporal”)}, \tag{2.36}$$

$$\partial_i A_i \approx 0 \text{ (“gauge de Coulomb”).}$$

Note que estes vínculos são consistentes, ou seja, não evoluem no tempo. É preciso, no entanto, que o *gauge* (2.36) preencha duas condições [4]:

- seja atingível;
- a matriz cujos elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos seja não singular.

Verifiquemos, inicialmente, a atingibilidade do *gauge*. Para tal, vamos mostrar que a invariância de *gauge* local,  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ , é quebrada pelos vínculos (2.36). Partindo de potenciais arbitrários, deduziremos explicitamente as transformações que levam aos potenciais que satisfazem (2.36).

Iniciamos removendo o potencial escalar através da transformação

$$A'_0 = A_0 - \partial_0 \int_0^{x_0} dt A_0(\mathbf{x}, t).$$

---

vínculos, estes são sempre em número infinito, pois existe um vínculo em cada ponto do espaço -tempo.

Consequentemente, os novos potenciais são  $A'_0 = 0$  e  $A'_i$ . Fazemos agora uma nova transformação que permita remover o potencial longitudinal. Para tal, precisamos determinar uma função  $\Lambda(x)$  que satisfaça a relação

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}'' = \nabla \cdot \mathbf{A}' - \nabla^2 \Lambda(x).$$

Determinemos, então, esta função.

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \nabla^{-2} \nabla \cdot \mathbf{A}'(x) \\ &= \nabla^{-2} \int d^3 \mathbf{x}' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla' \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x}', x^0) \\ &= \int d^3 \mathbf{x}' [\nabla_{\mathbf{x}}^{-2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \nabla' \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x}', x^0) \\ &= - \int \frac{d^3 \mathbf{x}'}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x}', x^0). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nesse novo sistema, os potenciais são  $A''_0$  e  $\mathbf{A}''$ , onde  $\nabla \cdot \mathbf{A}'' = 0$ . Resta mostrar que  $A''_0 = 0$ . Da lei de Gauss (2.40) e do fato que  $\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \partial_0 \mathbf{A}$  (2.44), concluímos que

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E}' = -\nabla^2 A'_0 - \partial_0 \nabla \cdot \mathbf{A}'. \quad (2.38)$$

Por outro lado,

$$A''_0 = \partial_0 \Lambda(x). \quad (2.39)$$

De (2.38), obtemos prontamente que  $\partial_0 \nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ . Levando este resultado em (2.37), conclui-se que  $\partial_0 \Lambda = 0$  e, finalmente, que  $A''_0 = 0$ .

Uma outra maneira de se chegar ao *gauge* de radiação, talvez mais intuitiva, é

analisar judiciosamente as equações de campo.

A eletrodinâmica de Maxwell na ausência de fontes é regida pelas usuais equações de campo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.40)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (2.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.42)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

O segundo par de equações acima implica na existência dos potenciais  $A_0$  e  $\mathbf{A}$  definidos por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla A_0 - \partial_t \mathbf{A}. \quad (2.44)$$

Obviamente, este segundo par de equações é satisfeito automaticamente pelos potenciais em pauta, enquanto que o primeiro par de equações assume a forma

$$\nabla^2 A_0 + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.45)$$

$$\square \mathbf{A} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t A_0) = 0. \quad (2.46)$$

As equações anteriores nos sugerem a escolha  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (“*gauge* de Coulomb”). Mostremos que este *gauge* é atingível. Utilizando os resultados anteriores é fácil verificar que existe uma transformação de *gauge*  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda$ , com  $\Lambda$  dado por (2.37), que remove o potencial longitudinal ( $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ ). Por outro lado, examinando as equações

(2.45) e (2.46), nos certificamos que se  $A_0 = 0$ , nossas equações se reduzem à equação de onda  $\square \mathbf{A} = 0$ . Seria natural, em decorrência, escolher  $A_0 = 0$ . Verifiquemos, então, se este *gauge* é atingível. Partindo de  $A'_0$  e  $\mathbf{A}'(\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0)$ , precisamos mostrar que  $A''_0 = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{A}'' = 0$ . A transformação

$$A''_0 = A'_0 - \partial_0 \int_0^{x_0} dt A'_0(\mathbf{x}, t),$$

obviamente remove o potencial escalar e leva à relação

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' - \nabla \lambda,$$

onde

$$\lambda(x) = - \int_0^{x_0} dt A'_0(\mathbf{x}, t). \quad (2.47)$$

Em decorrência,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}'' = -\nabla^2 \lambda. \quad (2.48)$$

De (2.38) vemos que  $\nabla^2 A'_0 = 0$ , o que mostra que  $\nabla^2 \lambda = 0$  e, em consequência, que  $\nabla \cdot \mathbf{A}'' = 0$ .

No *gauge* de radiação a equação (2.46) leva à equação de onda

$$\square \mathbf{A} = 0,$$

sendo os campos elétrico e magnético, por sua vez, dados por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}.$$

A demonstração de que a matriz dos vínculos é inversível será feita em sequência.

O conjunto de vínculos da teoria, em consequência das considerações anteriores, é dado por

$$\Omega_1 = \pi_0 \approx 0, \quad \Omega_2 = \partial_i \pi_i \approx 0, \quad \Omega_3 = A_0 \approx 0, \quad \Omega_4 = \partial_i A_i \approx 0. \quad (2.49)$$

A partir destes vínculos, que são todos de segunda classe, podemos construir a *matriz dos parênteses de Poisson dos vínculos*,  $C$ , cujos elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos, ou seja,

$$C_{\alpha\beta} \equiv \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\}. \quad (2.50)$$

De (2.49) e (2.50), segue que

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Invertendo  $C$ , obtemos<sup>4</sup>

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos agora calcular os *parênteses de Dirac*, que são definidos no caso de duas

---

<sup>4</sup> $\int d^3\mathbf{x}' C^{-1}(x, x') C(x', x'') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')$

quantidades A e B, como se segue

$$\{A(x), B(x')\}_D = \{A(x), B(x')\} - \int d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{z}\{A(x), \Omega_a(y)\}C_{ab}^{-1}(y, z)\{\Omega_b(z), B(x')\}.$$

Um cálculo simples mostra que

$$\{A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D = 0 = \{\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \{A^\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{x}')\}_D &= \eta^{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{z}\eta^{\mu 0}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z})\eta^{\nu 0}\delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}') \\ &+ \int d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{z}\eta^{\mu i}\frac{\partial}{\partial y^i}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\frac{1}{4\pi|\mathbf{y} - \mathbf{z}|}\eta^{\nu j}\frac{\partial}{\partial z^j}\delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}') \\ &= (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \eta^{\mu i}\eta^{\nu j}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned}$$

Usando a prescrição geral de quantização canônica,

$$\{A, B\}_D \rightarrow -i[A, B],$$

obtemos finalmente os comutadores da teoria

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0,$$

$$[\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0,$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = i(\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\eta^{\mu i}\eta^{\nu j}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Por outro lado, as relações entre os vínculos, as quais valem fracamente em termos dos parênteses de Poisson, valem fortemente no caso dos parênteses de Dirac. Assim sendo, tanto  $A_0$  como  $\pi_0$  são nulos. Em decorrência, os comutadores obtidos anteriormente assumem a forma

$$[A^i(\mathbf{x}, t), A^j(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.51)$$

$$[\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.52)$$

$$[A^i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\partial^i \partial'_j \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.53)$$

Notando, contudo, que<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \partial^i \partial'_j \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \left[ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \delta_j^i \right] + \partial^i \partial'_j \nabla^{-2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \left[ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \delta_j^i \right] + \partial^i \partial'_j \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left( \delta_j^i - \frac{k^i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \end{aligned}$$

podemos escrever a relação (2.53) sob a forma

$$[A^i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{j,tr}^{i(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

onde a “função delta” transversa é definida como se segue

---

<sup>5</sup>Como a função de Green  $D(x, x')$  associada ao operador  $\square$  satisfaz à equação  $\square_x D(x, x') = \delta^4(x, x')$ , a função de Green  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  relacionada ao operador  $\nabla^2$  obedece à equação  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ .

$$\delta_{j,tr}^{i(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left( \delta_j^i - \frac{k^i k_j}{\mathbf{k}^2} \right)$$

As relações de comutação encontradas acima coincidem com os resultados calculados por Bjorken e Drell [11].

## 2.3 Discussão

À primeira vista, pode causar espécie que tenhamos dedicado a maior parte deste capítulo à quantização canônica da eletrodinâmica de Maxwell no *gauge* de radiação. Na verdade, como vamos mostrar em seguida através de alguns exemplos, uma exposição correta (e completa) deste tópico não é fácil de ser encontrada, seja em livros-texto, seja em artigos.

A fim de facilitar nossa discussão, vamos dividi-la em dois casos: (i) quantização onde o resultado final é, de certa forma, “adivinhado” para ser em seguida justificado, e (ii) quantização via formalismo de vínculos de Dirac.

No primeiro caso, o comutador  $[A_i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)]$ , que seguindo o procedimento canônico deveria ser igual a  $i\delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , é encontrado fazendo-se a “substituição”  $i\delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow i\delta_{i,tr}^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Na realidade, poucos são os livros-texto que realizam a quantização no *gauge* de radiação. Seleccionamos, entre os textos que fazem a aludida quantização, os de Bjorken e Drell [11], Brian Hatfield [12] e Michiu Kaku [13]. Somente no livro de Bjorken e Drell é discutida a atingibilidade dos *gauges*. Existe discordância quanto ao sinal do comutador  $[A_i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)]$  nas Refs. 11 e 13, assim como nas Refs. 12 e 13. Os erros cometidos são, em geral, do seguinte tipo:

- $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Lambda$ , em vez de  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \Lambda$ ;
- $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$ , em vez de  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda$ ;
- $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , em vez de  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ .

No segundo caso, onde é usado o formalismo de vínculos de Dirac, encontramos um artigo [14] que chega ao resultado correto. Este trabalho, no entanto, está incompleto. Nas Refs. 3, 4 e 7, os cálculos intermediários contêm muitos erros do tipo apontado acima, o que torna os resultados finais não confiáveis.

Um outro ponto importante a ser discutido é a questão da covariância dos resultados que encontramos. De fato, como utilizamos um processo não covariante na quantização do campo eletromagnético, precisamos verificar se a álgebra do grupo de Poincaré é satisfeita em termos dos parênteses de Dirac. Computemos, com este fito, os geradores da álgebra no caso do campo eletromagnético. Lembrando a definição desses operadores, ou seja,

$$\begin{aligned}
 P^\nu &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{T}^{0\nu}, \\
 M^{\mu\nu} &= \int d^3\mathbf{x} [x^\mu \mathcal{T}^{0\nu} - x^\nu \mathcal{T}^{0\mu} + \pi^\sigma (I^{\mu\nu})_{\sigma\rho} A^\rho],
 \end{aligned}$$

sendo  $\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\alpha} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$ , o tensor momento-energia canônico e  $(I^{\mu\nu})_{\sigma\rho} = \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu -$

$\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu$ , podemos escrever as seguintes relações para os geradores da mencionada álgebra<sup>6,7</sup>

$$\begin{aligned} P^\nu &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \pi^j \partial^\nu A_j + \left( \frac{1}{2} \pi^j \pi_j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right) \eta^{0\nu} \right] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \pi^j F_j^\nu + \left( \frac{1}{2} \pi^j \pi_j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right) \eta^{0\nu} \right], \\ M^{\mu\nu} &= \int d^3\mathbf{x} \left[ x^\mu \mathcal{T}^{0\nu} - x^\nu \mathcal{T}^{0\mu} + \pi^\mu A^\nu - \pi^\nu A^\mu \right]. \end{aligned}$$

Para facilitar a avaliação dos parênteses de Dirac destes geradores, vamos separar as componentes espaciais e temporais de  $P^\mu$  e  $M^{\mu\nu}$ , o que nos leva aos seguintes resultados

$$\begin{aligned} P^0 &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \pi_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right], \\ P^i &= - \int d^3\mathbf{x} \pi^j \partial_j A^i, \\ M^{0i} &= x^0 P^i - \int d^3\mathbf{x} x^i \left[ \frac{1}{2} \pi_j \pi_j + \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} \right], \\ M^{ij} &= \int d^3\mathbf{x} \left[ (\pi^i A^j - \pi^j A^i) - \pi^k (x^i \partial^j - x^j \partial^i) A_k \right]. \end{aligned}$$

Um cálculo longo mostra que estes geradores satisfazem de fato à álgebra do grupo

---


$$\frac{6}{7} \mathcal{T}^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} \pi^j \partial^\nu A_j &= \int d^3\mathbf{x} \pi^j [F_j^\nu + \partial_j A^\nu] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \pi^j F_j^\nu - \int d^3\mathbf{x} A^\nu \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \int d^3\mathbf{x} \pi^j F_j^\nu, \end{aligned}$$

onde usamos a equação de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

de Poincaré em termos dos parênteses de Dirac, isto é,

$$\begin{aligned}\{P^\mu, P^\nu\}_D &= 0, \\ \{M^{\mu\nu}, P^\lambda\}_D &= \eta^{\nu\lambda}P^\mu - \eta^{\mu\lambda}P^\nu, \\ \{M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}\}_D &= \eta^{\mu\lambda}M^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho}M^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\lambda}M^{\mu\rho}.\end{aligned}$$

## Referências Bibliográficas

- [1] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976).
- [2] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964).
- [3] A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).
- [4] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics Vol. 1969 (Springer, New York, 1982).
- [5] E. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective* (Wiley, New York, 1974).
- [6] D. Gitman and I. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Springer, New York, 1990).
- [7] J. Barcelos-Neto, *Eletrodinâmica Quântica* (IF/UFRJ/Monografia/M88/03).
- [8] V. Nesterenko, *J. Phys A* **22**, 1673 (1989).
- [9] R. Marnelius, *Acta Phys. Pol. B* **13**, 669 (1982).

- [10] Qiong-gui Lin and Guang-jiong Ni, *Class. Quantum Grav.* **7**, 1261 (1990).
- [11] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*(McGraw, New York, 1965).
- [12] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings* (Wesley, California, 1992).
- [13] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction* (Oxford, New York, 1993).
- [14] J. Barcelos-Neto, A. Das, and W. Scherer. *Acta Phys. Pol. B* **18**, 269 (1987).

# Quantização Canônica da Eletrodinâmica de Lee e Wick

Utilizando a teoria de Dirac para sistemas com vínculos, quantizamos canonicamente o modelo de Lee e Wick, que é um sistema de segunda ordem na lagrangiana.

## 3.1 Equações de campo e momentos para o modelo de Lee e Wick

Variando a ação de Lee e Wick, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \left[ \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\square}{m^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} \right] \delta A_\nu + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \left\{ -\partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) \right. \\ & + \frac{1}{m^2} \left[ \partial_\beta \left( \partial_\beta (\partial_\mu F^{\mu\alpha} \delta A_\alpha) - \partial_\beta \partial_\mu F^{\mu\alpha} \delta A_\alpha \right) - \partial^\beta \left( \partial_\beta \partial_\mu F^{\mu\alpha} \delta A_\alpha \right) \right. \\ & \left. \left. - \partial_\alpha \left( \partial^\nu (\partial_\mu F^{\mu\alpha} \delta A_\nu) - \partial^\nu \partial_\mu F^{\mu\alpha} \delta A_\nu \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \left[ \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\square}{m^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} \right] \delta A_\nu + \int d^3\mathbf{x} \left\{ -F^{0\nu} + \frac{1}{m^2} \left( -\partial_0 \partial_\mu F^{\mu\nu} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \partial^\nu \partial_\mu F^{\mu 0} - \eta^{\nu 0} \partial_0 \partial_\mu F^{\mu 0} \right) \delta A_\nu \right\} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{m^2} \left( \partial_\mu F^{\mu\nu} - \eta^{\nu 0} \partial_\mu F^{\mu 0} \right) \delta A_\nu \right] \Big|_{t_1}^{t_2}.
\end{aligned}$$

Segue-se que as equações de campo e os momentos obedecem, respectivamente, às relações

$$\left[ 1 + \frac{\square}{m^2} \right] \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.1)$$

$$\pi^\nu = -F^{0\nu} + \frac{1}{m^2} \left( \eta^{\nu i} \partial_i \partial_\mu F^{\mu 0} - \partial_0 \partial_\mu F^{\mu\nu} \right), \quad (3.2)$$

$$\eta^\nu = \frac{1}{m^2} \left( \partial_\mu F^{\mu\nu} - \eta^{\nu 0} \partial_\mu F^{\mu 0} \right). \quad (3.3)$$

Estas equações podem ser obtidas alternativamente lançando mão das equações (2.6), (2.11) e (2.12).

Em termos dos potenciais as equações de campo (3.1) podem ser reescritas como se segue

$$\left[ 1 + \frac{\square}{m^2} \right] \square A^\nu - \partial^\nu \left( 1 + \frac{\square}{m^2} \right) \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.4)$$

Definindo agora os campos elétrico e magnético como

$$F^{i0} = E^i, \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k, \quad (3.5)$$

as equações de campo assumem a forma

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.6)$$

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) (\partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B}) = 0. \quad (3.7)$$

## 3.2 Vínculos primários e secundários para o modelo de Lee e Wick

O hessiano associado à lagrangiana de Lee e Wick, ou seja,

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha \partial \ddot{A}_\beta} \\ &= \frac{1}{m^2} (\eta^{\alpha\beta} - \delta_0^\alpha \delta_0^\beta) \\ &= \frac{1}{m^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tem determinante nulo, o que mostra que a lagrangiana em questão é singular. Tal resultado já era esperado, uma vez que esta lagrangiana é invariante de *gauge*. De acordo com os resultados da seção anterior, as variáveis dinâmicas são  $(A^\alpha, \pi_\alpha)$  e  $(\bar{A}^\alpha, \eta_\alpha)$ , onde  $\bar{A}^\alpha \equiv \dot{A}^\alpha$  é considerada uma variável independente.

A partir das relações (3.2) e (3.3), chegamos aos dois vínculos primários do modelo

$$\Omega_1 = \eta_0 \approx 0, \quad (3.8)$$

$$\Omega_2 = \pi_0 + \partial_i \eta_i \approx 0. \quad (3.9)$$

Notando que  $\eta^i = \frac{1}{m^2} \partial_\mu F^{\mu i}$ , obtemos prontamente que

$$\dot{\bar{A}}_i = m^2 \eta_i + \partial_j F_{ji} + \partial_i \bar{A}_0, \quad (3.10)$$

e, conseqüentemente, que

$$\eta^i \dot{\bar{A}}_i = m^2 \eta^i \eta_i + \eta^i \partial_j F_{ji} + \eta^i \partial_i \bar{A}_0.$$

A hamiltoniana canônica pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} H_C &= \int d^3 \mathbf{x} \left[ \pi^\alpha \bar{A}_\alpha + \eta^\alpha \dot{\bar{A}} - \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^3 \mathbf{x} \left[ \pi_0 \bar{A}_0 - \pi_i \bar{A}_i + \bar{A}_0 (\partial_i \eta_i) - \frac{1}{2} m^2 \eta_i^2 + (\partial_j \eta_i) F_{ji} - \frac{1}{2} F_{0i}^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2m^2} (\partial_i F_{i0}) (\partial_j F_{j0}) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Conseqüentemente, a hamiltoniana primária tem a seguinte forma

$$H_1 = H_C + \int d^3 \mathbf{x} [\lambda_1 \eta_0 + \lambda_2 (\pi_0 + \partial_i \eta_i)]. \quad (3.12)$$

Podemos agora impor que os vínculos primários sejam preservados no tempo. Usando os parênteses de Poisson fundamentais,

$$\begin{aligned}\{A^\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)\} &= \delta_\beta^\alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \\ \{\bar{A}^\alpha(\mathbf{x}, t), \eta_\beta(\mathbf{x}', t)\} &= \delta_\beta^\alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),\end{aligned}$$

é fácil mostrar que

$$\dot{\eta}_0 = \{\eta_0, H_1\} \approx 0, \quad (3.13)$$

$$(\dot{\pi}_0 + \partial_i \dot{\eta}_i) = \{\pi_0 + \partial_i \eta_i, H_1\} = \partial_i \pi^i \approx 0, \quad (3.14)$$

o que mostra que existe um vínculo secundário  $\partial_i \pi_i \approx 0$ .

Vamos continuar procurando vínculos secundários. Utilizando a hamiltoniana

$$H_2 = H_C + \int d^3 \mathbf{x} [\lambda_1 \eta_0 + \lambda_2 (\pi_0 + \partial_i \eta_i) + \lambda_3 \partial_i \pi_i], \quad (3.15)$$

e computando  $\partial_i \dot{\pi}_i = \{\partial_i \pi_i, H_2\}$ , concluímos que  $\{\partial_i \pi_i, H_2\} \approx 0$ , o que implica em que a condição de consistência não fornece novos vínculos. Resulta, em decorrência, que a hamiltoniana estendida,  $H$ , coincide com  $H_2$ .

Passemos agora à análise das equações de campo de Hamilton. As equações relativas a  $A_i$  nos dizem que

$$\dot{A}_i = \{A_i, H\} = \bar{A}_i + \partial_i \lambda_3, \quad (3.16)$$

enquanto que aquela associada a  $A_0$  nos fornece

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H\} = \bar{A}_0 + \lambda_2, \quad (3.17)$$

o que permite escolher os seguintes valores para os multiplicadores de Lagrange acima

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0. \quad (3.18)$$

Por outro lado, as equações concernentes a  $\bar{A}_i$  e  $\bar{A}_0$ , nos levam aos seguintes resultados

$$\dot{\bar{A}}_i = \{\bar{A}_i, H\} = m^2 \eta_i + \partial_j F_{ji} + \partial_i \bar{A}_0, \quad (3.19)$$

$$\dot{\bar{A}}_0 = \{\bar{A}_0, H\} = \lambda_1. \quad (3.20)$$

A equação (3.19) reproduz a equação (3.10), ao passo que a equação (3.20) nos afiança por um lado, que  $\dot{\bar{A}}_0$  é uma função arbitrária e, conseqüentemente, que  $A_0$  é também arbitrário; por outro, que podemos escolher o multiplicador de Lagrange

$$\lambda_1 = \dot{\bar{A}}_0.$$

As equações de campo concernentes a  $\eta_j$ ,  $\pi_0$  e  $\pi_j$  não trazem novas informações, e serão por isso omitidas.

A hamiltoniana estendida pode então ser escrita finalmente sob a forma

$$H = H_C + \int d^3 \mathbf{x} \dot{\bar{A}}_0 \eta_0. \quad (3.21)$$

Esta hamiltoniana gera a evolução temporal do sistema com total liberdade de *gauge*.

### 3.3 Quantização canônica do modelo de Lee e Wick

É fácil constatar que os vínculos  $\eta_0 \approx 0$ ,  $\pi_0 + \partial_i \eta_i \approx 0$  e  $\partial_i \pi_i \approx 0$  são de primeira classe. Como estes são em número de três, precisaremos de três condições de *gauge*.

Estas condições podem ser encontradas através da análise das equações de campo (3.4). Vê-se facilmente que estas reduzem-se a uma “equação de onda generalizada”

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \square A_\nu = 0, \quad (3.22)$$

se e somente se a seguinte equação é satisfeita

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial_\mu A^\mu = C, \quad (3.23)$$

onde  $C$  é uma constante que pode ser escolhida igual a zero sem perda de generalidade. A condição

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (3.24)$$

nada mais é que uma “condição de *gauge* de Lorentz generalizada”. Isto posto, retornemos à questão da determinação das três condições de *gauge*. Para tanto, notemos que as equações de campo (3.4) podem ser reescritas como

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \square A_0 - \partial_0 \left[ \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \bar{A}^0 + \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = 0, \quad (3.25)$$

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \square A_i - \partial_i \left[ \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \bar{A}^0 + \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = 0. \quad (3.26)$$

Estas equações nos mostram que o conjunto de condições de *gauge*<sup>1</sup>,

$$\bar{A}_0 = 0, \quad \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad A_0 = 0,$$

é compatível com as equações (3.25) e (3.26). Observe que estes vínculos são consistentes, isto é, não possuem evolução temporal.

Usando um procedimento similar àquele que usamos no caso da eletrodinâmica de Maxwell, pode-se mostrar que estes “vínculos de *gauge*” são atingíveis.

Vamos então computar a matriz dos parênteses dos vínculos, que será inversível caso o conjunto de condições de *gauge* que selecionamos acima seja apropriado. Os vínculos de nosso modelo, todos de segunda classe, podem ser enumerados como se segue

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \bar{A}_0 \approx 0, & \Omega_2 &= \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial_i A_i \approx 0, & \Omega_3 &= A_0 \approx 0, \\ \Omega_4 &= \eta_0 \approx 0, & \Omega_5 &= \pi_0 + \partial_i \eta_i \approx 0, & \Omega_6 &= \partial_i \pi_i \approx 0. \end{aligned}$$

Operando com estes vínculos, obtemos prontamente a matriz dos parênteses dos vínculos do sistema, ou seja

---

<sup>1</sup>Poderíamos ter escolhido igualmente o conjunto de condições de *gauge*  $\bar{A}_0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, A_0 = 0$ .

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \nabla^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \nabla^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Esta matriz é inversível, sendo sua inversa igual a

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 \\ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  é a função de Green do operador  $\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \nabla^2$  e satisfaz, portanto, à equação  $\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , que tem por solução

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[1 - e^{-m|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right].$$

Podemos agora determinar os parênteses de Dirac. Um cálculo direto nos mostra que os únicos parênteses de Dirac não triviais são  $\{A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D$  e  $\{\bar{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \eta^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D$ . Passemos, então, ao cômputo desses objetos.

$$\begin{aligned}
\{A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D &= \eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \eta^{0\nu} \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}') \\
&\quad + \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \eta^{\mu i} \frac{\partial}{\partial y^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) G(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \frac{\partial}{\partial z^j} \eta^{\nu j} \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}'), \\
\{\bar{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \eta^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D &= \eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}').
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\{A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D = (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \eta^{\mu i} \eta^{\nu j} \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$\{\bar{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \eta^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D = (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Como as relações de vínculo valem fortemente no que concerne aos parênteses de Dirac,  $A_0$ ,  $\bar{A}_0$  e  $\eta_0$  são nulos. Assim sendo, os comutadores não nulos tomam a forma

$$[A^i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}, t)] = i \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right) \partial^i \partial'_j G(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.27)$$

$$[\bar{A}^i(\mathbf{x}, t), \eta_j(\mathbf{x}', t)] = i \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.28)$$

É importante notar que na ausência de derivadas de ordem mais alta (3.27) se reduz a (2.53).

## 3.4 Discussão

Iniciamos nossa discussão com um pouco de “numerologia”. Conforme havíamos constatado no Capítulo 1, o modelo de LW é composto por uma partícula de spin-1 sem massa e um *ghost* massivo de spin-1, o que mostra que são necessários 3 vínculos de *gauge* para a quantização canônica do sistema. Conforme vimos neste capítulo, o modelo de LW apresenta 3 vínculos de primeira classe, o que implica em três condições de *gauge*.

Outro ponto importante é verificar se a álgebra do grupo de Poincaré é satisfeita em termos dos parênteses de Dirac. Os cálculos neste caso são mais sutis e complicados, não trazendo, no entanto, nenhuma contribuição relevante à nossa investigação. Maiores detalhes sobre esta questão, assim como sobre a quantização canônica do modelo de LW no “*gauge* de radiação generalizado” podem ser encontrados na Ref. [1].

Para encerrarmos esta discussão vamos discorrer, de passagem, sobre a história da quantização de teorias eletromagnéticas de ordem superior.

Ao que tudo indica, a primeira tentativa de se quantizar uma teoria eletromagnética de ordem superior foi feita por Podolsky e Kikuchin em 1944 [2], sendo repetida em 1948 por Podolsky e Schwed [3]. Nestes artigos a quantização foi realizada *à la* Gupta-Bleuler; os resultados, porém, são questionáveis, devido ao fato de que na época a questão da implementação do esquema de quantização que exige a quebra de simetria de *gauge*, ou seja, a eliminação das variáveis dependentes da teoria através da escolha de condições de *gauge* que devem ser impostas nas variáveis dinâmicas da teoria (um procedimento, convenhamos, nada trivial no caso de uma teoria de ordem mais alta, mesmo nos dias de hoje) – não era bem conhecido. É importante lembrar que a teoria de vínculos de Dirac só começou a dar os seus primeiros passos em meados dos anos 60.

Nos anos 50, George R. Pitman, Jr.<sup>2</sup> [4] e Richard E. Martin<sup>3</sup> [5], analisaram em suas teses de doutorado orientadas por Podolsky, novos aspectos da citada eletrodinâmica. Novamente, os resultados encontrados são questionáveis devido a inabilidade em tratar com os vínculos de *gauge* e avaliar corretamente a auto-energia do elétron.

A quantização canônica de teorias com derivadas de ordem mais alta via formalismo com vínculos de Dirac tem sido, por sua vez, alvo de investigação de alguns autores [6-10]; por outro lado, a quantização de eletrodinâmicas de ordem superior por métodos que exigem como ponto de partida a determinação dos vínculos primários e secundários do modelo foram realizadas nas Refs. 11, 12, 13, e 14. Em [11] e [12] a lagrangiana da teoria está errada. Por outro lado, em [11] o número de vínculos primários é igual a 2, enquanto que em [12], a mesma teoria discutida em [11] apresenta apenas um vínculo primário. Tanto em [11] quanto em [14] se reivindica que não se pode usar o *gauge*  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , mas sim  $(1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Em [12], por sua vez, é alegado que os dois *gauges* são apropriados. Acreditamos que este pequeno resumo seja suficiente para mostrar que a quantização de uma teoria de *gauge* de ordem superior envolve, como dizia Camões, “engenho e arte”.

---

<sup>2</sup>Generalized Quantum Electrodynamics: a Covariant Formulation (University of Cincinnati, Ph.D., 1960)

<sup>3</sup>Electron Self Energy in Generalized Quantum Electrodynamics (University of Cincinnati, Ph.D., 1955)

## Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, Canonical Quantization of the Electromagnetic Sector of the Lee-Wick Standard Model (submetido ao Europ. Phys. J. C).
- [2] B. Podolsky and C. Kikushy, Phys. Rev. **65**, 288 (1944).
- [3] B. Podolsky and P. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).
- [4] Pitman, G. R., Jr., Ph.D. Dissertation, University of Cincinnati (1955).
- [5] Martin, R. Eugene, Ph. D. Dissertation, University of Cincinnati (1960).
- [6] W. Garczyński, Acta Phys. Pol. B **20**, 1021 (1989).
- [7] J. Barcelos-Neto and N. Braga, Acta Phys. Pol. B **20** 205 (1989).
- [8] J. Barcelos-Neto and N. Braga, Mod. Phys. Lett. A **4**, 2195 (1989).
- [9] J. Barcelos-Neto and C. Natividade, Z. Phy. C **51**, 313 (1991).
- [10] S. Muslin, arxiv: math-ph/0010020v1 17 Oct 2000.
- [11] C. Galvão and B. Pimentel, Can. J. Phys. **66** 460 (1988).

- [12] J. Barcelos-Neto, C. Galvão, and C. Natividade, *Z. Phys. C* **52**, 559 (1991).
- [13] A. Dutra and M. Hott, arxiv: hep-th/9403167v1 28 Mar 1994.
- [14] R. Bufalo, B. Pimentel, and G. Zambrano, *Phys. Rev. D* **83**, 045007 (2011).

## Considerações Finais

No Capítulo 1 encontramos que a massa da partícula pesada de LW é  $\approx 42\text{GeV}$ . Este valor está dentro do intervalo de  $7\text{-}90\text{GeV}$  para  $m$  estimado por Lee e Wick, que exigiram consistência com os dados conhecidos na época; ela é também da mesma ordem que o valor para  $m$  considerado por Resnick e Sundaresan<sup>1</sup> ( $22.16\text{GeV}$ ) no cálculo sobre os possíveis efeitos da partícula pesada de LW no espalhamento elástico  $e^+e^-$ . É interessante notar que o limite que encontramos é também da mesma ordem que as massas dos bósons vetoriais encontrados na natureza ( $m_W \approx 80\text{GeV}$ ,  $m_Z \approx 91\text{GeV}$ ). Apesar dessas boas qualidades, este limite deveria ter sido detetado no LEP. Na verdade, uma estimativa com dados mais recentes fornece um valor que está fora do alcance do LEP<sup>2</sup>.

Um aspecto interessante da eletrodinâmica de LW é a possibilidade dela ser compatível com monopólos magnéticos. Abordamos este assunto em sequência<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>L. Resnick and M. Sundaresan, Phys, Rev D **5**, 264 (1972); **6**, 2721 (1972).

<sup>2</sup>A. Accioly, Investigations in the Electromagnetic Sector of the Lee-Wick Standard Model (submetido a J. High Energy Phys.).

<sup>3</sup>A. Accioly, Monopoles, Duality, and Higher-Derivative Electromagnetic Theories (submetido à Phys. Rev. D).

Na presença de uma fonte,  $\mathcal{L}_{\text{fonte}} = -A^\mu J_\mu$ , as equações de campo da eletrodinâmica de LW são

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.1)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.2)$$

onde  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ . Agora, introduzindo uma corrente magnética  $k^\mu = (\sigma, \mathbf{k})$  no lado direito da equação (4.2), obtemos as seguintes equações de campo de ordem mais alta modificadas

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.3)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu. \quad (4.4)$$

Não é difícil mostrar que este sistema de equações descreve a existência de uma carga magnética. De fato, na ausência de campos elétricos, cargas e correntes elétricas, nos restam essencialmente duas equações para o campo magnetostático

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \sigma, \quad (4.5)$$

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

Estas equações apresentam a familiar solução de monopólos de Dirac, ou seja,  $\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^3} \hat{\mathbf{r}}$ , onde  $g$  é a carga magnética. Usando os métodos usuais, a famosa condição de quantização de Dirac  $\frac{qg}{4\pi} = \frac{n}{2}$ , onde  $q$  é a carga elétrica, e  $n$  é um inteiro, pode ser facilmente recuperada.

Conseguimos, deste modo, encontrar um sistema de equações consistente do tipo

Maxwell + bóson vetorial massivo + carga magnética. É importante frisar que o monopólo de Dirac e o bóson vetorial massivo não podem coexistir no contexto da eletrodinâmica massiva de Proca<sup>4</sup> devido a esta, ao contrário da eletrodinâmica de Lee e Wick, não ser invariante de *gauge*. A própria existência do monopólo de Dirac é, sem dúvida, ligada à existência da invariância de *gauge* da teoria correspondente.

Curiosamente, o sistema formado pelas equações (4.1) e (4.2) não é simétrico sob transformações de dualidade  $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$ ,  $\tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}$ , aumentado por  $j^\mu \rightarrow k^\mu$ ,  $k^\mu \rightarrow -j^\mu$ . Este resultado nos motiva a procurar por uma generalização do modelo de LW onde as equações de campo sejam simétricas sob transformações de dualidade, e compatíveis com uma carga magnética do tipo de Dirac. O modelo definido pelas equações de campo

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.7)$$

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu, \quad (4.8)$$

é uma boa tentativa nesta direção, já que é simétrico sob transformações de dualidade<sup>5</sup>. Vejamos então se ele pode acomodar um monopólo do tipo de Dirac. Para um monopólo magnético estático de intensidade  $g$  fixo na origem, as equações anteriores se reduzem a

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla \cdot \mathbf{B} = g \delta(\mathbf{r}), \quad (4.9)$$

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (4.10)$$

---

<sup>4</sup>A. Ignatiev and G. Joshi, Phys. Rev. D **53**, 984 (1996).

<sup>5</sup>É importante notar que  $(1 + l^2 \square) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$  é idênticamente nulo na ausência de corrente magnética.

cuja solução é

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi} \left[ \frac{1 - e^{-r/l}}{r^2} - \frac{e^{-r/l}}{lr} \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.11)$$

Para grandes distâncias, esta solução reproduz a de Dirac, como deveria. Nosso ponto, contudo, é verificar se ela descreve ou não um monopólo em pequenas distâncias. Para tanto, vamos calcular o fluxo magnético radial dado pela equação (4.11) através de uma superfície esférica  $S$  de raio  $r$  com o monopólo estático de carga  $g$  no centro. Realizando este cálculo, encontramos imediatamente

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = g \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{l} \right) e^{-\frac{r}{l}} \right], \quad (4.12)$$

o que implica que para  $r/l \ll 1$ ,  $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx 0$ . Agora, levando em conta que se  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,  $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  é identicamente nulo, chegamos à conclusão de que  $\mathbf{A}$  pode existir em toda a região considerada. Portanto, esta é uma solução tipo-monopolo. No entanto, a carga magnética correspondente não obedece a condição de quantização de Dirac. De fato, para  $r/l \ll 1$ ,  $\mathbf{B} \approx \frac{g}{4\pi l^2} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}$ , o que implica que o campo magnético decresce como  $1/r$  invés de  $1/r^3$ . Este comportamento bizarro do campo magnético certamente nos impede de recuperar a condição de quantização de Dirac. Uma maneira heurística de ver isso é considerar o movimento de uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  no campo do monopólo magnético. Da equação de movimento da partícula,  $m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ , obtemos a variação de seu momento angular,  $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \frac{qgr^2}{4\pi l^2} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{r}})$ , um resultado que nos impossibilita definir um momento angular total conservado como no caso do monopólo de Dirac. Agora, se as distâncias não são nem tão grandes nem tão pequenas o potencial vetor não pode existir em todo lugar do domínio encerrado por

$S$  pois  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  satisfaz à equação (4.8) em vez de (4.4). Infelizmente não podemos superar esta dificuldade introduzindo o conceito de uma corda assim como Dirac fez, já que neste caso  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  ( $= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-r/l}}{r^2}$ ) não se anula em nenhum lugar da região em questão.

Resumindo: o modelo de LW é compatível com monopólos magnéticos de Dirac, mas não é simétrico sob transformações de dualidade; sua versão generalizada, por sua vez, é invariante sob transformações de dualidade, porém incompatível com monopólos magnéticos de Dirac.

Para finalizar, vamos comentar rapidamente as investigações que seriam, de certa maneira, uma continuação natural deste trabalho. Como vimos que não podemos acomodar simultaneamente monopólos de Dirac e transformações de dualidade na eletrodinâmica de LW e nem em uma versão estendida da mesma, seria interessante investigar a possibilidade desta coexistência em eletrodinâmicas com violação da simetria de Lorentz, tais como a de Myers-Pospelov<sup>6</sup> e de Gambini-Pullin<sup>7</sup>. Um outro ponto interessante seria estudar em detalhes as modificações introduzidas pelas derivadas de ordem mais alta no setor eletrofraco do MPLW.

---

<sup>6</sup>R. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003).

<sup>7</sup>R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999).