

Tese de Doutorado

Supersimetria \mathcal{N} -estendida e Modelos Sigma
Unidimensionais

Marcelo Gabino Gonzales Saique

Orientador: Francesco Toppan

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Coordenação de Física Teórica

Rio de Janeiro

Março 2012

Para meu amado filho Denzel Marcelo.

Conteúdo

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Álgebras de Clifford e álgebras divisionais	5
1.2 Redução dimensional	8
1.3 Supersimetria \mathcal{N} -estendida unidimensional	11
1.4 Representações irredutíveis (irreps)	11
1.5 Transformação de vestimento	12
1.6 Grafos supersimétricos e símbolo de conectividade	13
1.7 Construção de ações e modelos sigma	16
2 Classificação das representações supersimétricas \mathcal{N}-estendidas	19
2.1 Multipletos raízes $(8, 8, 0)$ e $(16, 16, 0)$	19
2.2 Representações lineares $\mathcal{N} = 4$	23
2.2.1 Representação 2-minimal	23
2.2.2 Grupos invariantes	24
2.2.3 Representação não-minimal	26
2.2.4 Grupos invariantes	27
2.2.5 Oxidação $\mathcal{N} = 4 \Rightarrow \mathcal{N} = 5$	28
2.3 Representação não-minimal $\mathcal{N} = 5$	30
2.3.1 Grupos invariantes	31
2.3.2 Álgebra	32
3 Modelos sigma unidimensionais associados	35
3.1 Multipletos raízes	35
3.1.1 Multipleteo $(8, 8, 0)_m$	35
3.1.2 Multipleteo $(8, 8, 0)_{nm}$	37
3.2 Multipletos off-shell $(k, 8, 8 - k)$	40
3.2.1 2-Minimal	40
3.2.2 Não-minimal	46
3.3 Multipleteo $(4, 16, 12)$ com $\mathcal{N} = 5$ não-minimal	54

4	Extensão supersimétrica do segundo mapeamento de Hopf	57
4.1	Mapeamentos de Hopf	57
4.2	Redução dimensional: O caso bosônico	59
4.3	Supersimetrização	61
	Conclusão	67
A	Representação irredutível $\mathcal{N} = 4$: Ações invariantes	70
A.1	Multiplete Raiz $(4, 4, 0)$	70
A.2	Multiplete $(k, 4, 4 - k)$	70
B	Ação invariante para o multiplete $(4, 16, 12)$	72
	Referências	75

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a meu pai Gabino Gonzales, minha mãe Agustina Saique, sem os quais não estaria aqui hoje. E aos meus irmãos Martha, Luis, Darwin, Katerin e Joel, fontes inesgotáveis de estímulo e apoio. E um agradecimento muito especial aos meus melhores amigos da minha vida aos quais amo com todo meu coração, Denzel e Yoli. Foram eles que me acompanharam no desenvolvimento deste projeto, juntos conseguimos tudo.

Agradeço ao meu orientador, o Professor Francesco Toppan, por ter aceitado me orientar, por me ensinar, instruir e contribuir na minha formação profissional. Aos meus colegas do grupo de “Estruturas algébricas em teoria dos campos” pelas nossas discussões e seminários (Journal Club), em especial ao Sadi Koddae, com quem trabalhei ombro a ombro, pela sua amizade e intercâmbio de ideias.

Aos Professores Zhanna Kuznetsova, Armen Nersessian, Vahagn Yeghikyan e Kevin Iga, pela colaboração científica.

Ao Professor José Helayël, pela acolhida em meus primeiros tempos no CBPF, pelos cursos ministrados aos quais tive a oportunidade de assistir.

Ao Everton Abreu, por sua grande ajuda no final do caminho.

Agradeço ao CNPq/CLAF pelo suporte financeiro que viabilizou este projeto.

Resumo

Neste trabalho classificaremos as representações lineares da álgebra de supersimetria \mathcal{N} -estendida unidimensional e mostramos explicitamente os modelos sigma associados.

Para $\mathcal{N} = 4$, dois tipos de representações não-minimais são estudadas as quais, de acordo a seus grafos associados, podem ser completamente redutíveis e redutíveis mas indecomponível, onde seus campos componentes é conformado por 8 bósons e 8 férmions. Multipletos inequivalentes off-shell são encontrados por meio da transformação de vestimento a partir do multipleteo raiz, com ênfases naqueles multipletos de comprimento três. A classificação é feita considerando o símbolo de conectividade.

Também estudamos a representação linear não-minimal $\mathcal{N} = 5$ que consta de 16 bosons e 16 fermions.

Tanto para $\mathcal{N} = 4$ e $\mathcal{N} = 5$ são construídos explicitamente os modelos sigma associados com uma métrica conformalmente plana. Dois métodos para a construção de Lagrangeanas dinâmicas são apresentados para os multipletos off-shell que de acordo com seus símbolos de conectividades, fontes fermiônicas, estes podem ser com um prepotencial vinculado ou sem vínculo. Para $\mathcal{N} = 4$ não-minimal provamos que, aplicando e impondo invariância sob uma quinta supersimetria na Lagrangeana dinâmica, automaticamente é invariante até $\mathcal{N} = 6, 7, 8$ supersimetrias com um prepotencial vinculado. Para $\mathcal{N} = 5$ não-minimal é construída uma ação dinâmica para um caso particular onde, impondo uma sexta supersimetria, a mesma é invariante supersimétrica até $\mathcal{N} = 9$.

Uma aplicação de nosso formalismo é feita para o segundo mapeamento de Hopf, especificamente na supersimetrização do mapeamento $\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$ onde a redução é realizada sob o grupo $SU(2)$ obtendo como resultado um sistema com a presença de um monopolo de Yang.

Abstract

In this work we will classify linear representations of \mathcal{N} -extended one-dimensional supersymmetry algebra and present explicitly their associated sigma models.

For $\mathcal{N} = 4$, according to their associated graphs, we study two types of non-minimal representations: one is completely reducible and the another one is reducible but indecomposable, where in both cases their component fields are 8 bosons and 8 fermions. Inequivalent off-shell multiplets are found through dressing operators from the root multiplets, and emphasizing on multiplets of length three are classified by considering the connectivity symbol.

We also study the linear representations of non-minimal $\mathcal{N} = 5$ that contain 16 bosons and 16 bosons fermions.

For both $\mathcal{N} = 4$ and $\mathcal{N} = 5$ we constructed the associated sigma models explicitly that their metrics are conformally flat . We present two methods for constructing supersymmetric $\mathcal{N} = 4$ invariant dynamical Lagrangian that according to the connectivity symbols in some cases the prepotential is constrained. For $\mathcal{N} = 4$ non-minimal we prove that, applying and imposing invariance on the dynamical Lagrangian under fifth supersymmetry implies automatically invariant under $\mathcal{N} = 6, 7, 8$ supersymmetries with constrained prepotential. For $\mathcal{N} = 5$ non-minimal we construct the action for one particular case where imposing the sixth supersymmetry implies automatically invariant until $\mathcal{N} = 9$ supersymmetries.

As an application we apply our formalism to supersymmetrize the second Hopf map , specifically in the supersymmetrization of mapping $\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$ via $SU(2)$ group reduction. The five-dimensional supersymmetric systems specified by the presence of an $SU(2)$ Yang monopole.

Introdução

Um dos grandes sucessos da Teoria Quântica de Campos é a correta previsão da natureza de uma partícula qualquer associando sua estatística, bosônica ou fermiônica, a sua propriedade espinorial.

Do ponto de vista de uma teoria de unificação, é absolutamente natural a procura de uma explicação para ambos os tipos de partículas num único contexto. Diferentes possibilidades estão abertas. Podemos pensar no uso da propriedade que dois férmions se comportam como um bóson para tentar interpretar os bósons como estados ligados dos férmions. Outra possibilidade muito mais atraente consiste em procurar uma simetria que permita acomodar os bósons e os férmions dentro de um mesmo multipletto. Tal simetria é conhecida como Supersimetria.

Nas explorações históricas dos descobrimentos científicos, especialmente teóricos, é quase sempre difícil fazer uma linha que marque o verdadeiro começo que poderia separar um “antes” de um “depois”. Mas sempre existe uma cadeia de trabalhos que podem ser interpolados mais ou menos continuamente. A supersimetria não é uma exceção, contendo múltiplas raízes de origem.

Nos anos sessenta se acreditava que não era possível achar uma simetria com as partículas com diferentes spins no mesmo multipletto. O famoso teorema de “no-go” de Coleman-Mandula impedia tal acontecimento [8]. Entretanto, cada teorema no-go pode ser aplicado se todas as suas hipóteses forem satisfeitas. Flexibilizando-se algumas hipóteses existe a opção de contornar o teorema, quer dizer, o teorema de Coleman-Mandula não contemplou a extensão das simetrias fornecidas por álgebras graduadas relacionadas com supergrupos, construídos com variáveis comutantes e anticomutantes. Tal extensão permite que partículas de spin inteiro e semi-inteiro sejam acomodadas dentro de um único multipletto de transformações supersimétricas.

A supersimetria (SUSY) foi observada como uma simetria bi-dimensional no chamado “world-sheet” na teoria de cordas no começo dos anos ’70 por Pierre Ramond, John H. Schwarz e Andre Neveu [13]. Aproximadamente ao mesmo tempo J.L. Gervais e B. Sakita (1971) [9], Golfand e Likhtman (1971) [10] encontraram a superextensão da álgebra de Poincaré e foi construída a primeira teoria de campos quadri-dimensional com supersimetria. Ao mesmo tempo, Volkov e seus colaboradores (independentemente) [11] sugeriram uma realização não-linear da supersimetria que deu começo a teoria de supergravidade.

Uma segunda revolução da supersimetria foi com o trabalho de Wess e Zumino em 1973 [12] (três trabalhos no mesmo ano) que construiu a supersimetria em quatro dimensões, Lagrangeanas renormalizáveis e introduziu a teoria de calibre supersimétrica.

Mais tarde, no começo dos anos '80 foi introduzida a primeira versão do Modelo Minimal Básico Supersimétrico (MMES) que resolvia vários problemas sendo que naquele tempo o mais importante era o problema da hierarquia. Talvez possamos considerar este fato como a terceira revolução da supersimetria.

O modelo da mecânica quântica supersimétrica foi primeiramente introduzido por E. Witten em 1981 [1]. Este modelo foi utilizado para testar os mecanismos de quebra espontânea da supersimetria num esquema não relativista da teoria quântica de campos, mas este fato conduziu à novas linhas de pesquisa e teve várias aplicações em diversas áreas da física. Recentemente, uma maior atenção tem sido dada aos modelos unidimensionais com supersimetria N -estendida pelo fato de estarem relacionadas com supersimetrias com $D > 1$ via redução dimensional.

Supersimetria tem sido estudada por quase quatro décadas em física, mas ainda não temos uma teoria completa no que concerne as representações “off-shell”. Só são conhecidas até agora estruturas completas de supermultipletos off-shell para um número menor de supercargas, contando de forma independente as componentes dos espinores. Para obtermos uma solução deste problema, em [14] foi proposta uma redução dimensional para 1-D (“worldline”) mecânica quântica supersimétrica, obtendo assim uma teoria completa de representações off-shell. Depois, a ideia foi fazer o processo inverso, quer dizer, estender dimensionalmente a um espaço-tempo maior (chamado também de Oxidação), por exemplo veja-se [70, 71, 72, 73, 74].

O número N de operadores de supersimetria e a dimensão de espaço-tempo, D , estão ligados. Reduzir dimensões numa teoria supersimétrica implica aumentar o número de extensões N em teoria com dimensão reduzida. Assim, para obter uma teoria ligada às teorias em altas dimensões, como supercordas ou supergravidade, é necessário construir uma teoria supersimétrica com grande número N de supersimetrias em dimensão mais baixa. Um esboço disto é mostrado na Figura 1 [34]. Então, teorias com N supersimetrias em $D = 4$ (3+1 dimensões) são equivalentes a $4N$ supersimetrias em $D = 1(0 + 1$ dimensões).

Em [2, 3, 30, 31, 32, 69] foi desenvolvido um método de classificação das representações de mecânica quântica supersimétrica N -estendida para qualquer número N de supersimetrias. O método pode ser aplicado para grandes valores de N e utilizado na análise das teorias ligadas a supercordas e supergravidade que possuem na redução dimensional supersimetrias estendidas com número $N = 16$ e $N = 32$. A importância das álgebras de Clifford foi indicada em [37, 38] para construir representações de supersimetria para grandes valores de N . Em [2] foi feita uma contribuição à compreensão da natureza das representações lineares irredutíveis das supersimetrias N -estendidas. Foi provado que sua álgebra supersimétrica está em uma correspondência um a um com as álgebras de Clifford com representações matriciais do tipo Weyl.

Numa outra linha de investigação é utilizado o formalismo de superespaço e supercampo para construir os invariantes da supersimetria N -estendida [4, 29, 35, 36, 39], onde para valores baixos de N o uso deste formalismo é conveniente; mas esta construção começa logo a não ser viável para grandes valores de N . A razão é que, aumentando N , os supercampos associados são altamente redutíveis, portanto a introdução de vínculos é necessária para obtermos as representações irredutíveis. Porém, o formalismo de su-

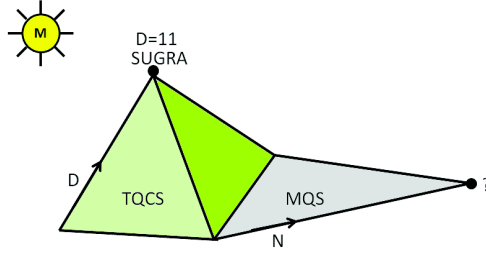


Figura 1: Cada Teoria Quântica de Campos Supersimétrica (TQCS) tem uma “sombra” em Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS) por meio da redução dimensional de todas as dimensões espaciais.

percampo ainda não está disponível para valores maiores de N ($N > 8$) [39].

A mecânica quântica supersimétrica (MQS) tem muitas aplicações em diferentes áreas de pesquisa. Por exemplo, no processo de ruptura espontânea da supersimetria [15, 16], na descrição de monopolos magnéticos e buracos negros [17, 18, 19, 20, 62]. Nos últimos tempos, em tópicos relacionados com a versão AdS_2/CFT_1 [60, 61] da correspondência AdS/CFT [21, 22], e na extensão superconforme da MQS [23, 24, 25, 26, 27, 58, 59, 68, 50], recentemente [28, 59].

Neste trabalho de tese apresentamos a classificação das representações da álgebra de supersimetria N -estendida associada com um espaço unidimensional. Esta classificação é feita em termos de supermultipletos de diferentes comprimentos, geradas por uma *transformação de vestimento*, onde todas as representações irreduzíveis para qualquer N dado podem ser obtidas a partir da representação básica, chamado multipletto raiz (de comprimento 2). Nestes supermultipletos as transformações supersimétricas atuam de tal modo que cada campo componente é precisamente mapeado em outro campo componente ou em sua derivada, então facilmente podem ser representadas por gráficos chamados grafos supersimétricos (ou Adinkras) [33, 34].

As ações invariantes associadas aos supermultipletos foram construídas sem utilizar o formalismo de superespaço e supercampo, superando assim as dificuldades que ocorrem nesta abordagem para valores grandes de N . Necessariamente um programa computacional foi desenvolvido para este fim (em Maple 12), pois em nosso caso trabalhamos diretamente com as componentes dos multipletos. Nele, podem-se facilmente manipular expressões que contenham variáveis Grassmanianas. No Capítulo 3 foi construída uma ação invariante perante $N = 9$. Assim, o método introduzido e o programa computacional fornecem a possibilidade de construirmos sistematicamente ações para $N \geq 9$.

Até aqui, as ações correspondem às supersimetrias lineares que descrevem somente variedades conformalmente planas. Então, para obtermos o quadro mais completo é necessário considerar as representações não lineares. As tentativas de classificar multipletos não lineares não tinham sucesso por causa da grande diversidade dos métodos de

construção [41, 42, 43, 44, 45, 50, 51, 54]. Neste trabalho vamos usar uma abordagem capaz de gerar multipletos não lineares baseado no segundo mapeamento de Hopf via redução dimensional. Investigamos em particular o caso $D = 5$, onde a ação do sistema reduzido dimensionalmente apresenta um monopolo. Para o primeiro mapeamento de Hopf foi feito em [55]. Alguns trabalhos relacionados com este tipo de abordagens são [48, 49, 53, 20, 52].

No Capítulo 1, expomos (sucintamente) as preliminares matemáticas e a teoria básica geral da supersimetria N -estendida. Inicialmente mostramos as álgebras de Clifford e suas ligações com as álgebras divisionais, a construção algorítmica das álgebras de Clifford para qualquer espaço-tempo, a noção de álgebras maximais e não maximais. Introduzimos a transformação de vestimento, as representações irredutíveis, os grafos supersimétricos, e finalmente mostramos os métodos que serão utilizados na construção de ações invariantes nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 2, classificamos as representações da álgebra de supersimetria N -estendida. Em particular é apresentado para $N = 4$ não-minimal, que consiste de uma representação completamente redutível e outra redutível mas indecomponível que, de acordo com seus grafos associados podem ser desconectados ou conectados de seus submultipletos irredutíveis. O processo de oxidação $N = 4$ em $N = 5$ é apresentado considerando o símbolo de conectividade. Também foi estudado explicitamente o caso $N = 5$ não-minimal que consiste de 16 bósons e 16 férmions. Mostramos os geradores bosônicos que comutam com as cinco transformações supersimétricas, e a representação gráfica deste geradores é mostrada num tetraedro, a esta estrutura chamamos de pseudosedênions.

No Capítulo 3 construímos os modelos sigma associados às representações classificadas no Capítulo 2. Dois tipos de construções são utilizados para esse fim, o uso de um ou outro depende do tipo de conectividade que possuem os multipletos. Para $N = 4$ apresentamos as ações invariantes dinâmicas, contendo na sua estrutura seja um prepotencial vinculado ou sem vínculo nas coordenadas do espaço alvo.

No Capítulo 4 fazemos uma aplicação de nosso formalismo referente ao processo de supersimetrização do segundo mapeamento de Hopf [52]. Temos como resultado, depois do processo de redução dimensional, um sistema supersimétrico com a presença de um monopolo de Yang $SU(2)$. Neste caso a supersimetria estendida corresponde a um multipletos $N = 5$.

Os resultados originais desta tese encontram-se em [67, 69, 40, 75].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve exposição dos conceitos básicos que serão necessários ao entendimento dos capítulos subsequentes.

1.1 Álgebras de Clifford e álgebras divisionais

As quatro álgebras divisionais real (\mathbb{R}), complexo (\mathbb{C}), quatérnion (\mathbb{H}) e octônion (\mathbb{O}) têm 0, 1, 3 e 7 elementos imaginários e_i respectivamente, que satisfazem a relação

$$e_i \cdot e_j = -\delta_{ij} + C_{ijk}e_k, \quad (1.1)$$

onde i, j, k toma valores 1 no caso complexo, 1, 2, 3 no caso quaterniônico e 1, 2, ..., 7 no caso octoniônico. C_{ijk} são constantes de estrutura totalmente antisimétricas da correspondente álgebra divisional.

Qualquer elemento X numa dada álgebra pode ser escrito como

$$X = x_0 + x_i e_i, \quad (1.2)$$

onde x_0 e x_i são reais, i toma valores de 1, 3 e 7 para \mathbb{C} , \mathbb{H} e \mathbb{O} respectivamente. O conjugado X^* de X é definido por

$$X^* = x_0 - x_i e_i, \quad (1.3)$$

que permite a introdução de uma álgebra de divisão normada com o produto X^*X . O vínculo sobre a norma $X^*X = 1$ produz as 3 esferas S^1 , S^3 e S^7 associadas com \mathbb{C} , \mathbb{H} e \mathbb{O} , respectivamente.

A álgebra de Clifford $Cl(p, q)$ se constrói a partir dos geradores Γ^μ para espaço-tempos de assinatura arbitrária que satisfazem a seguinte relação

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ representa a matriz diagonal de assinatura (p, q) , com p elementos positivos (+1) e q elementos negativos (-1). Para nossos propósitos trabalharemos com as álgebras de Clifford representadas por matrizes reais, com posterior conexão com as álgebras divisionais.

A representação matricial da álgebra de Clifford com $d \times d$ matrizes reais irredutíveis é classificada com relação a uma matriz S ($d \times d$) real mais geral que comuta com cada Γ_μ como

$$[S, \Gamma_\mu] = 0 \quad (1.5)$$

com $\mu = 1, 2, \dots, D$.

Se a matriz S mais geral é múltipla da identidade, temos o caso *real* (\mathbb{R}), $S = \lambda \mathbf{1}$. Se a matriz S é uma soma de duas matrizes, onde a primeira é múltipla da identidade e a outra é raiz quadrada de -1 , temos o caso *quase complexo* (\mathbb{C}), $S = a\mathbf{1} + b\mathbf{J}$. Se a matriz S é a soma de quatro matrizes, com a primeira múltipla da identidade e a outras 3 matrizes linearmente independentes, temos o caso da álgebra de Clifford *quaterniônica* (\mathbb{H}): $S = a\mathbf{1} + b\mathbf{E}_1 + c\mathbf{E}_2 + d\mathbf{E}_3$.

Uma construção recursiva de uma álgebra de Clifford de um espaço-tempo $D + 2$ dimensional será realizada, uma vez conhecida uma representação D -dimensional, usando um dos seguintes dois algoritmos

$$\begin{aligned} \Gamma_j &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix} \\ \text{para } (p, q) &\rightarrow (p+1, q+1), \end{aligned} \quad (1.6)$$

ou

$$\begin{aligned} \Gamma_j &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}, \\ \text{para } (p, q) &\rightarrow (q+2, p), \end{aligned} \quad (1.7)$$

as γ_i 's denotam as matrizes gama d -dimensionais de um espaço-tempo $D = p + q$ com assinatura (p, q) . Assim as matrizes Γ_j 's vão ter $2d$ -dimensões.

As matrizes de Pauli bi-dimensionais com valores reais $\sigma_A, \sigma_1, \sigma_2$, dadas por

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

que satisfazem a álgebra de Clifford $Cl(2, 1)$, são obtidas usando o algoritmo (1.6) ou (1.7) aplicado ao número 1 da realização unidimensional da álgebra de Clifford $Cl(1, 0)$.

Aplicando um dos dois algoritmos passo a passo, obtemos uma série de representações como $Cl(2, 1)$, $Cl(3, 2)$, $Cl(4, 3)$, etc.

Com a ajuda das matrizes de Pauli temos a álgebra de Clifford $Cl(0, 3)$ 4×4 ,

$$Cl(0, 3) \equiv \begin{aligned} &\sigma_2 \otimes \sigma_A, \\ &\sigma_A \otimes \mathbf{1}_2, \\ &\sigma_1 \otimes \sigma_A. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Temos também as matrizes 8×8 que realizam a álgebra de Clifford $Cl(0, 7)$,

$$\begin{aligned}
C(0, 7) \equiv & \begin{aligned}
& \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_A, \\
& \sigma_2 \otimes \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2, \\
& \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A, \\
& \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\
& \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A, \\
& \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2, \\
& \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1.
\end{aligned}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

As representações (1.9) e (1.10) possuem somente matrizes γ do tipo-tempo e são anti-simétricas.

Tanto $Cl(0, 3)$ e $Cl(0, 7)$ são generalizadas como as séries $Cl(0, 3+8n)$ e $Cl(0, 7+8n)$, conhecidas como série quaterniônica e octoniônica, respectivamente, isto devido a sua conexão com as álgebras divisionais. Estas álgebras, além de $Cl(1, 0)$ e $Cl(0, 1)$, são chamadas “álgebras de Clifford primitivas maximais” que geram um outro conjunto de álgebras chamadas “álgebras de Clifford maximais descendentes”, as quais são obtidas por iteratividade usando os dois algoritmos recursivos (1.6) e (1.7). Qualquer álgebra de Clifford não maximal pode ser obtida de uma álgebra maximal apagando um certo número de matrizes gama.

A seguinte tabela mostra as representações de Clifford, obtidas aplicando os dois algoritmos nas representações iniciais.

	1	*	2	*	4	*	8	*	16	*	32	*	64	*	128	*	256	*
<i>R</i>	(1, 0)	→	(2, 1)	→	(3, 2)	→	(4, 3)	→	(5, 4)	→	(6, 5)	→	(7, 6)	→	(8, 7)	→	(9, 8)	→
<i>C</i>			(0, 1)	⟨	(1, 2)	→	(2, 3)	→	(3, 4)	→	(4, 5)	→	(5, 6)	→	(6, 7)	→	(7, 8)	→
<i>H</i>					(3, 0)	→	(4, 1)	→	(5, 2)	→	(6, 3)	→	(7, 4)	→	(8, 5)	→	(9, 6)	→
<i>C</i>					(0, 3)	⟨	(1, 4)	→	(2, 5)	→	(3, 6)	→	(4, 7)	→	(5, 8)	→	(6, 9)	→
<i>C</i>							(5, 0)	→	(6, 1)	→	(7, 2)	→	(8, 3)	→	(9, 4)	→	(10, 5)	→
<i>R/O</i>							(0, 5)	⟨	(1, 6)	→	(2, 7)	→	(3, 8)	→	(4, 9)	→	(5, 10)	→
<i>C</i>									(7, 0)	→	(8, 1)	→	(9, 2)	→	(10, 3)	→	(11, 4)	→
<i>R/O</i>							(0, 7)	⟨	(1, 8)	→	(2, 9)	→	(3, 10)	→	(4, 11)	→	(5, 12)	→
<i>C</i>									(9, 0)	→	(10, 1)	→	(11, 2)	→	(12, 3)	→	(13, 4)	→
<i>H</i>											(0, 9)	⟨	(1, 10)	→	(2, 11)	→	(3, 12)	→
<i>C</i>													(11, 0)	→	(12, 1)	→	(13, 2)	→
<i>H</i>															(1, 12)	→	(2, 13)	→
<i>C</i>															(0, 11)	⟨	(13, 0)	→
<i>C</i>																	(1, 14)	→
<i>R/O</i>																	(0, 13)	⟨
																	(15, 0)	→
																	(1, 16)	→
																	(0, 15)	⟨
																	(17, 0)	→

As colunas representam o número d que é o tamanho das matrizes gama com entradas reais. As álgebras de Clifford sublinhadas indicam as irreps iniciais, também chamadas maximais primitivas. As representações de Clifford $Cl(0, 1)$ e $Cl(0, 5)$ não são maximais, pois elas podem ser obtidas de $Cl(1, 2)$ e $Cl(0, 7)$ apagando duas matrizes gama. Então as séries que geram $Cl(0, 1)$ e $Cl(0, 5)$ são não maximais. Além disso elas apresentam uma estrutura complexa, que não está presente nas álgebras maximais. É por isso que se incluem as séries complexas entre as séries maximais, possuindo uma estrutura divisional diferente de álgebra da qual elas são obtidas. Portanto, $Cl(0, 1)$ é diferente

da estrutura de $Cl(1, 2)$, a mesma consideração vale para $Cl(0, 5)$ e $Cl(0, 7)$, $Cl(0, 9)$ e $Cl(0, 11)$, $Cl(0, 13)$ e $Cl(0, 15)$.

Para construir as representações matriciais com elementos complexos usamos a condição $i = \sigma_A$. As representações com entradas complexas têm a metade do tamanho do que as representações com elementos reais. Para espaçotempos que possuem álgebras de Clifford quaterniônicas podemos ter representações matriciais com elementos reais, complexos ou quaterniônicos. No caso das entradas quaterniônicas as matrizes têm um quarto do tamanho que as representações com elementos reais. As unidades imaginárias quaterniônicas são representadas pelas 3 matrizes 4×4 (1.9).

1.2 Redução dimensional

A teoria de super Yang-Mills maximal existe em $D = 10$ dimensões, enquanto a supergravidade maximal é permitida para $D = 11$. Pode-se construir a supergravidade em espaçotempos $D \leq 11$, mas não é possível existir uma supergravidade com $D > 11$. O número de campos independentes nestes espaços é menor que o numero de campos independentes em baixas dimensões.

Quando se faz a redução dimensional das dimensões extras até, por exemplo $D = 4$, obtemos uma supersimetria \mathcal{N} -estendida ¹. A redução dimensional da teoria de super Yang-Mills $D = 10$ $N = 1$ leva a uma teoria de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ maximalmente estendida em $D = 4$ dimensões, enquanto a redução dimensional da teoria da supergravidade $D = 11$ $N = 1$ leva a uma teoria de supergravidade $\mathcal{N} = 8$ maximalmente estendida em $D = 4$ dimensões. Se mais adiante reduzirmos dimensionalmente mais três coordenadas espaciais partindo de $D = 4$, onde as dimensões espaciais são congeladas, ficando apenas com dependência da coordenada temporal, chegamos a uma mecânica quântica supersimétrica \mathcal{N} -estendida que admite, no caso de super Yang-Mills, $\mathcal{N} = 16$, e no caso da supergravidade, $\mathcal{N} = 32$.

Na redução dimensional $D = 4 \rightarrow D = 1$ vamos supor que as três dimensões espaciais pertencem a uma variedade compacta \mathcal{M} , por exemplo uma tri-esfera S^3 onde a dependência dos campos sob as dimensões espaciais é congelada. Ou seja, nosso espaço-tempo é $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$.

Consideremos uma ação adimensional em $D = 4$

$$S = \int d^4x L, \quad (1.11)$$

no processo da redução, as três variáveis espaciais contribuem com um fator global constante chamado volumem $Vol_{\mathcal{M}}$ da variedade tridimensional como

$$\int d^4x \equiv Vol_{\mathcal{M}} \cdot \int dt \quad (1.12)$$

Em dimensões de massa m (com $[m]=1$) temos que $Vol \equiv \frac{1}{m^3}$, então

$$[Vol_M]_{D=4} = -3. \quad (1.13)$$

¹Daqui em diante vamos denotar \mathcal{N} para o caso unidimensional $1D$ e N para dimensões maiores $D > 1$.

No caso $D = 1$ o fator $\frac{1}{m}$ contribui como fator global na teoria unidimensional ficando a parte, $\frac{1}{m^2}$, que vai ser usado para re-escalonar todos os campos e constantes da teoria em $D = 4$. Alguns deles apresentamos na seguinte tabela

Boson escalar	φ	:	$[\varphi]_{D=4} = 1 \rightarrow [\varphi]_{D=1} = 0$
Conexão de calibre	A_μ	:	$[A_\mu]_{D=4} = 1 \rightarrow [A_\mu]_{D=1} = 0$
Vierbein	e_μ^a	:	$[e_\mu^a]_{D=4} = 1 \rightarrow [e_\mu^a]_{D=1} = 0$
carga eletrica	e	:	$[e]_{D=4} = 0 \rightarrow [e]_{D=1} = 1$

(1.14)

Na supersimetria $N = 1$ em $D = 4$ temos os seguintes multipletos da teoria: um multipletto quirar decomposto em dois supercampos quirais Φ e $\bar{\Phi}$; um multipletto vetorial V ; um multipletto vetorial no calibre de Wess-Zumino V_{WZ} ; um multipletto da supergravidade em termos de vierbein e gravitinos; um multipletto da supergravidade calibrado que contém campos auxiliares extras. Todos eles são apresentados na tabela

Multipletto quirar	:	$\Phi, \bar{\Phi}$
Campos no multipletto	:	$(2, 4, 2)$
Dimensionalidade $D = 4$:	$[1, \frac{3}{2}, 2]_{D=4}$
Dimensionalidade $D = 1$:	$[0, \frac{1}{2}, 1]_{D=1}$
Multipletto Vetorial	:	$V = V^\dagger$
Campos no multipletto	:	$(1, 4, 6, 4, 1)$
Dimensionalidade $D = 4$:	$[0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2]_{D=4}$
Dimensionalidade $D = 1$:	$[-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1]_{D=1}$
Multipletto Vetorial	:	V no calibre de WZ
Campos no multipletto	:	$(3, 4, 1)$
Dimensionalidade $D = 4$:	$[1, \frac{3}{2}, 2]_{D=4}$
Dimensionalidade $D = 1$:	$[0, \frac{1}{2}, 1]_{D=1}$
Multipletto da SUGRA	:	e_μ^a, ψ_μ^α
Campos no multipletto	:	$(16, 16)$
Dimensionalidade $D = 4$:	$[0, \frac{1}{2}]_{D=4}$
Dimensionalidade $D = 1$:	$[0, \frac{1}{2}]_{D=1}$
Multipletto da SUGRA calibrado	:	$e_\mu^a, \psi_\mu^\alpha, b^i$
Campos no multipletto	:	$(6, 12, 6)$
Dimensionalidade $D = 4$:	$[0, \frac{1}{2}, 1]_{D=4}$
Dimensionalidade $D = 1$:	$[0, \frac{1}{2}, 1]_{D=1}$

(1.15)

Uma redução mais formal e técnica é mostrada em [3, 6, 7].

Por exemplo, para o conhecido multipletto quirar $4D (3 + 1)$, $N = 1$, consiste de um campo escalar A , um pseudo-escalar B , um férmion de Majorana ψ_a , um campo auxiliar escalar F , e um campo auxiliar pseudo-escalar G (no total temos 4 bósons e 4 férmions), a Lagrangeana livre de interações é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{D=4} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - \frac{1}{2}(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) \\
& + i\frac{1}{2}(\gamma^\mu)^{ab}\psi_a\partial_\mu\psi_b + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2,
\end{aligned}$$
(1.16)

que é invariante supersimétrica sob as transformações:

$$\delta A = \bar{\epsilon}\psi \quad (1.17)$$

$$\delta B = \bar{\epsilon}\gamma_5\psi \quad (1.18)$$

$$\delta F = i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial^\mu\psi \quad (1.19)$$

$$\delta G = i\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\psi \quad (1.20)$$

$$\delta\psi = -i\gamma^\mu(\partial_\mu A + \gamma_5\partial_\mu B)\epsilon - (F + \gamma_5 G)\epsilon. \quad (1.21)$$

Depois do processo de redução dimensional para $1D$ ($0 + 1$) obtemos uma Lagrangeana para o multipletto unidimensional $(2, 4, 2)$ com $\mathcal{N} = 4$, dada por:

$$\mathcal{L}_{D=1} = \frac{1}{2}(A')^2 + \frac{1}{2}(B')^2 + i\frac{1}{2}\delta^{ab}\psi_a\psi'_b + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2, \quad (1.22)$$

invariante sob as transformações da Figura (1.4).

No caso do multipletto vetorial $4D$, $N = 1$ off-shell, é descrito por um vetor A_μ , um fermion de Majorana λ_a e um campo auxiliar pseudo-escalar d (no total 4 bósons e 4 férmions). A Lagrangeana supersimétrica para este sistema é:

$$\mathcal{L}_{D=4} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}i(\gamma^\mu)^{ab}\lambda_a\partial_\mu\lambda_b + \frac{1}{2}d^2, \quad (1.23)$$

invariante sob as transformações

$$\delta A_\mu = i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi \quad (1.24)$$

$$\delta\psi = \left(-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \gamma_5 D\right)\epsilon \quad (1.25)$$

$$\delta D = i\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (1.26)$$

Reduzindo dimensionalmente, seu equivalente em $D = 1$ $\mathcal{N} = 4$ é a Lagrangeana para o multipletto $(3, 4, 1)$ dada por

$$\mathcal{L}_{D=1} = \frac{1}{2}((A'_1)^2 + (A'_2)^2 + (A'_3)^2) + \frac{1}{2}i\delta^{ab}\lambda_a\lambda'_b + \frac{1}{2}d^2, \quad (1.27)$$

invariante sob as transformações da Fig.(1.2).

Para uma supersimetria $N = 2$, $D = 4$ super-QED, temos os acoplamentos entre campos quirais com supercampos vetoriais. Na análise dimensional o multipletto unidimensional correspondente é $(5, 8, 3)$ $\mathcal{N} = 8$, em termos de multiplettos da subálgebra $\mathcal{N} = 4$ é dado por $(2, 4, 2) \oplus (3, 4, 1)$.

Para o caso de superYang-Mills $N = 4$, $D = 4$ [63, 64], o correspondente multipletto unidimensional é $(9, 16, 7) = (5, 8, 3) \oplus (4, 8, 4)$, $\mathcal{N} = 9$. E assim por diante.

1.3 Supersimetria \mathcal{N} -estendida unidimensional

A álgebra de supersimetria para \mathcal{N} operadores supersimétricos é dada pelas relações

$$\begin{aligned}\{Q_i, Q_j\} &= \delta_{ij}H \\ [Q_i, H] &= 0\end{aligned}\tag{1.28}$$

onde Q_i são os geradores fermiônicos de supersimetria, H é um operador bosônico chamado Hamiltoniano e $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}$.

Nesta álgebra existe uma correspondência um a um com as álgebras de Clifford Euclidianas (1.4) (com $\eta_{ij} = \delta_{ij}$) do tipo Weyl tal que

$$D \equiv \mathcal{N} \quad e \quad d = n\tag{1.29}$$

onde D e d denotam a dimensionalidade do espaço Euclidiano e o tamanho das correspondentes matrizes de Clifford respectivamente. \mathcal{N} e n denotam o número de supersimetrias estendidas e o número de estados (sejam bosônicos e fermiônicos) em um multipletto irredutível de uma representação, respectivamente. Isto é

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}\tag{1.30}$$

então podemos representar os \mathcal{N} geradores supersimétricos da mecânica quântica supersimétrica como

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i \cdot H & 0 \end{pmatrix},\tag{1.31}$$

que satisfazem a álgebra supersimétrica \mathcal{N} -estendida (1.28).

1.4 Representações irredutíveis (irreps)

As irreps da álgebra supersimétrica \mathcal{N} -estendida (1.28) são dadas pelos campos contidos nos multipletos, sejam eles bosônicos ou fermiônicos, agrupados de acordo com suas dimensionalidades d_i ou “spin”² ($d_i = d_1 + \frac{i-1}{2}$, onde d_1 é uma constante arbitrária) como $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_l)$, onde $l \geq 2$ é o chamado *comprimento de representação*. O número total de campos bosônicos ou fermiônicos no multipletto é denotado por n , eles podem ser $n_1 + n_3 + n_5 + \dots$ bósons e $n_2 + n_4 + n_6 + \dots$ férmions ou viceversa garantindo sempre a igualdade $n = n_1 + n_3 + n_5 + \dots = n_2 + n_4 + n_6 + \dots$. Fisicamente, os campos n_l de dimensões maiores são os campos auxiliares os quais se transformam como uma derivada temporal sobre o gerador supersimétrico.

Os multipletos admissíveis para uma \mathcal{N} supersimetria podem ser recobrados a partir do chamado *multipletto raiz* (n, n) .

²No decorrer desta tese vamos usar as dimensões de massa para diferenciar os campos com diferentes estatísticas.

As representações minimais e lineares ou também chamados multipletos irredutíveis estão determinados pelo número minimal n_{min} dos campos bosônicos e fermiônicos para um valor de \mathcal{N} pela expressão

$$\mathcal{N} = 8l + m, \quad n_{min} = 2^{4l}G(m), \quad (1.32)$$

com $l = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

$G(m)$ é a função de Radon-Hurwitz

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$G(m)$	1	2	4	4	8	8	8	8

(1.33)

O número dos campos bosônicos ou fermiônicos nas representações ate $\mathcal{N} = 32$ é apresentado na tabela abaixo.

$\mathcal{N} = 1$	1	$\mathcal{N} = 9$	16	$\mathcal{N} = 17$	256	$\mathcal{N} = 25$	4096
$\mathcal{N} = 2$	2	$\mathcal{N} = 10$	32	$\mathcal{N} = 18$	512	$\mathcal{N} = 26$	8192
$\mathcal{N} = 3$	4	$\mathcal{N} = 11$	64	$\mathcal{N} = 19$	1024	$\mathcal{N} = 27$	16384
$\mathcal{N} = 4$	4	$\mathcal{N} = 12$	64	$\mathcal{N} = 20$	1024	$\mathcal{N} = 28$	16384
$\mathcal{N} = 5$	8	$\mathcal{N} = 13$	128	$\mathcal{N} = 21$	2048	$\mathcal{N} = 29$	32768
$\mathcal{N} = 6$	8	$\mathcal{N} = 14$	128	$\mathcal{N} = 22$	2048	$\mathcal{N} = 30$	32768
$\mathcal{N} = 7$	8	$\mathcal{N} = 15$	128	$\mathcal{N} = 23$	2048	$\mathcal{N} = 31$	32768
$\mathcal{N} = 8$	8	$\mathcal{N} = 16$	128	$\mathcal{N} = 24$	2048	$\mathcal{N} = 32$	32768

(1.34)

E o número máximo de campos bosônicos ou fermiônicos numa representação, ou seja, não minimal, é dado por [69]

$$n_{max} = 2^{\mathcal{N}-1}. \quad (1.35)$$

1.5 Transformação de vestimento

O processo de construção de multipletos (representações) com comprimento $l > 2$ podem ser feitas a partir do chamado multiplete raiz de comprimento $l = 2$, isto é, com uma redefinição dos geradores Q_i mediante uma transformação de vestimento definida por

$$Q_i \rightarrow \hat{Q}_i^{(k)} = S^k Q_i S^{(k)-1} \quad (1.36)$$

onde S^k são matrizes diagonais e $k = 1, \dots, 2d$. Explicitamente temos em componentes

$$s_{ij}^k = \delta_{ij}(1 - \delta_{jk} + \delta_{jk}H). \quad (1.37)$$

Os operadores supersimétricos \hat{Q}_i ³, obtidos pelo processo de vestimento, têm elementos que são potencias do Hamiltoniano H . Aqueles operadores que não têm elementos

³Nesta tese, \hat{Q} com chapéu, refere-se às transformações supersimétricas vestidas e, sem chapéu, Q , às transformações dos multipletos raízes.

com potência negativa no H , ou seja, pólos do tipo $\frac{1}{H}$, são os operadores genuínos que formam as representações da teoria chamadas também representação *local*. Estes agem linearmente num multipletto finito de bósons e férmions. Então, o problema de classificar as representações irredutíveis (irreps) de uma álgebra supersimétrica \mathcal{N} -estendida se reduz ao problema de classificar os operadores vestidos \hat{Q}_i da representação *local*.

Uma representação local não é necessariamente irredutível, ela é se n e \mathcal{N} satisfazem (1.32).

O multipletto mais geral (d_1, d_2, \dots, d_l) é recuperado a partir de (d, d) com uma transformação de vestimento, pois esta muda o spin dos campos do multipletto original.

Por exemplo o multipletto $(1, 2, 1) = (v; \lambda_1, \lambda_2; g)$ com supersimetria $\mathcal{N} = 2$ pode ser obtido do multipletto raiz $(2, 2) = (v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2)$ pela transformação

$$\hat{S} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ H v_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

onde

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Usando que $H \propto \frac{d}{dt}$, podemos redefinir $H v_2 = g$ para obtermos assim o multipletto $(1, 2, 1)$ do multipletto raiz $(2, 2)$. Os operadores supersimétricos Q_i ($i = 1, 2$) que atuam em $(2, 2)$ se transformam nos operadores \hat{Q}_i , que atuam em $(1, 2, 1)$ da seguinte maneira

$$\hat{Q}_i = S Q_i S^{-1}. \quad (1.40)$$

O caso dos multiplettos de comprimento $l = 3$ do tipo $(d - k, d, k)$ são todos eles multiplettos locais. Portanto, o número de supersimetrias \mathcal{N} é o mesmo que d .

Neste trabalho serão usados no decorrer desta tese os multiplettos raízes (comprimentos $l = 2$) do tipo (d, d) (com d campos bosônicos com dimensão de massa 0 e d campos fermiônicos com dimensão de massa $\frac{1}{2}$, respectivamente), eles são $(4, 4)$, $(8, 8)$ e $(16, 16)$.

1.6 Grafos supersimétricos e símbolo de conectividade

Temos exemplos nos quais os físicos teóricos incorporam um jeito de representar conceitos matemáticos que são altamente simplificados em representações gráficas, que contêm muita informação de maneira visual. Um desses exemplos são os diagramas de Feynman, diagramas de Dynkin, diagramas de Penrose e *etc.*, que ajudam a entender certos aspectos da teoria.

Como as transformações de vestimento progressivamente alongam os supermultiplettos irredutíveis, uma forma que nos ajuda a estudar e classificá-los para qualquer

supersimetria \mathcal{N} -estendida é introduzindo, por um lado, uma técnica que representa graficamente as transformações supersimétricas lineares chamado *grafo*. Por outro lado, um símbolo que os caracteriza chamado símbolo de *conectividade*. A associação é feita entre grafos orientados e coloridos para cada uma das \mathcal{N} -transformações supersimétricas lineares. Os campos bosônicos e fermiônicos são representados por vértices. Eles podem ser postos num plano discreto $X - Y$. A coordenada Y é escolhida para representar as dimensões de massa d dos campos. Por convenção, no eixo X são postos os campos com dimensão de massa menor. Os campos de dimensão maior têm valores positivos, inteiros ou semi-inteiros de Y . Existem dois tipos de linhas de conexão que vão caracterizar uma transformação supersimétrica entre bósons e férmions que são: uma linha sólida representa uma transformação com sinal positivo; e uma linha tracejada que representa uma transformação com sinal negativo.

Para nossos propósitos, só apresentamos a caracterização invariante do símbolo de conectividade associado aos grafos de comprimento $l = 3$ irreps. Estes supermultipletos são dados por $(k, n, n-k)$ e seus campos componentes $(x_p; \psi_q; g_r)$, com $p = 1, \dots, k$ bósons de dimensão de massa 0, $q = 1, \dots, n$ férmions de dimensão $\frac{1}{2}$, e $r = 1, \dots, n - k$ campos auxiliares de dimensão 1. O símbolo de conectividade associado para um supermultiplete é definido em termos do símbolo ψ_g , explicitamente é dado por

$$\psi_g = (m_1)_{s_1} + (m_2)_{s_2} + \dots + (m_Z)_{s_Z}. \quad (1.41)$$

O símbolo contém a seguinte informação: os n campos fermiônicos ψ_g são divididos em subconjuntos de m_z campos ($z = 1, \dots, Z$), onde s_z representa o numero de linhas que conecta estes subconjuntos de férmions com os $n - k$ campos auxiliares g_r . Então se cumpre

$$m_1 + m_2 + \dots + m_Z = n, \quad (1.42)$$

cada vez que $s_z \neq s_{z'}$ para $z \neq z'$.

Agora vamos apresentar alguns exemplos de grafos e símbolos de conectividades associados aos multipletos supersimétricos.

Para $\mathcal{N} = 1$ temos o supermultiplete (v, λ) , que é composto por um bóson v e um férmion λ , representado como $(1, 1)$, portanto tem-se a seguinte lei de transformação supersimétrica

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & Q \\ \hline v & \lambda \\ \hline \lambda & \dot{v} \\ \hline \end{array} \quad (1.43)$$

Para $\mathcal{N} = 2$ (Q_1, Q_2) temos o multiplete raiz $(v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2)$, composto por dois bósons e dois férmions, representado por $(2, 2)$. Sob uma transformação de vestimento $S = \text{diag}(1, H, 1, 1)$ e $S = \text{diag}(H, H, 1, 1)$ que agem no Q_1 e Q_2 de acordo com a equação (1.36), se produzem os multipletos off-shell $(1, 2, 1)$ e $(0, 2, 2)$ de comprimento 3, respectivamente.

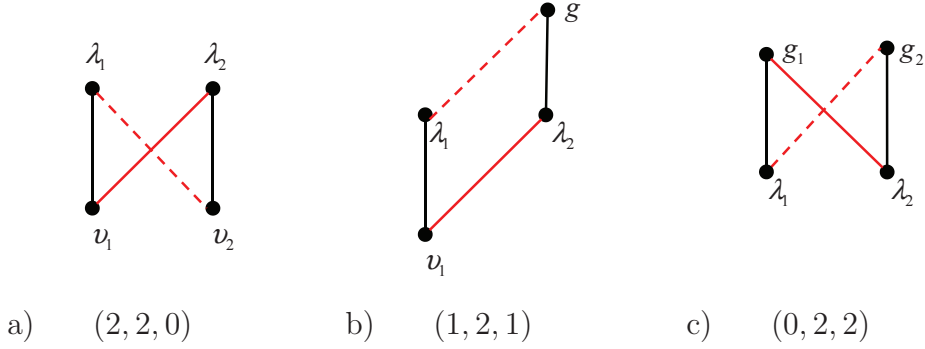
Nas seguintes tabelas e figuras apresentamos explicitamente estas transformações supersimétricas com os seus respectivos grafos associados.

	Q_1	Q_2
v_1	λ_1	λ_2
v_2	λ_2	$-\lambda_1$
λ_1	\dot{v}_1	$-\dot{v}_2$
λ_2	\dot{v}_2	\dot{v}_1

	\hat{Q}_1	\hat{Q}_2
v	λ_1	λ_2
λ_1	\dot{v}_1	$-g$
λ_2	g	\dot{v}
g	$\dot{\lambda}_2$	$-\dot{\lambda}_1$

	$\hat{\tilde{Q}}_1$	$\hat{\tilde{Q}}_2$
λ_1	g_1	$-g_2$
λ_2	g_2	g_1
g_1	$\dot{\lambda}_1$	$\dot{\lambda}_2$
g_2	$\dot{\lambda}_2$	$-\dot{\lambda}_1$

(1.44)



Para $\mathcal{N} = 4$ (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) o multipletto raiz é $(4, 4)$, seus campos componentes são $(v_0, v_i; \lambda_0, \lambda_i)$ com $i, j, k = 1, 2, 3$. Este multipletto possui uma estrutura quaterniônica e é possível escrever as 4 transformações de uma forma compacta como

$$Q_4(v_0, v_j; \lambda_0, \lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_j; \dot{v}_0, \dot{v}_j) \quad (1.45)$$

$$Q_i(v_0, v_j; \lambda_0, \lambda_i) = (\lambda_i, -\delta_{ij}\lambda_0 - \varepsilon_{ijk}\lambda_k; -\dot{v}_i, \delta_{ij}\dot{v}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{v}_k). \quad (1.46)$$

Com as seguintes transformações de vestimento $S = \text{diag}(H, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $S = \text{diag}(1, 1, H, H, 1, 1, 1, 1)$, $S = \text{diag}(1, H, H, H, 1, 1, 1, 1)$ e $S = \text{diag}(H, H, H, H, 1, 1, 1, 1)$ aplicados nas transformações do multipletto raiz (1.45) e (1.46), de acordo com (1.36), se produzem as seguintes representações irredutíveis $(3, 4, 1)$, $(2, 4, 2)$, $(1, 4, 3)$ e $(0, 4, 4)$, respectivamente. Todos estes multiplettos possuem estrutura quaterniônica com exceção de $(2, 4, 2)$ que possui uma estrutura complexa.

As transformações para o multipletto $(3, 4, 1)$ são dadas por:

$$\hat{Q}_4(v_j; \lambda_0, \lambda_j; g) = (\lambda_j; g, \dot{v}_j; \dot{\lambda}_0) \quad (1.47)$$

$$\hat{Q}_i(v_j; \lambda_0, \lambda_j; g) = (-\delta_{ij}\lambda_0 - \varepsilon_{ijk}\lambda_k; -\dot{v}_i, \delta_{ij}g + \varepsilon_{ijk}\dot{v}_k; \dot{\lambda}_i). \quad (1.48)$$

Para o multipletto $(1, 4, 3)$ temos,

$$\hat{Q}_4(v_0; \lambda_0, \lambda_j; g_j) = (\lambda_0; \dot{v}_0, g_j; \dot{\lambda}_j) \quad (1.49)$$

$$\hat{Q}_i(v_0; \lambda_0, \lambda_j; g_j) = (\lambda_i; -g_i, \delta_{ij}\dot{v}_0 + \varepsilon_{ijk}g_k; -\delta_{ij}\dot{\lambda}_0 - \varepsilon_{ijk}\dot{\lambda}_k). \quad (1.50)$$

Os grafos associados a estes multiplettos e transformações supersimétricas são mostradas nas Figuras 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Daqui em diante vamos usar a convenção de $\varepsilon_{123} = +1$.

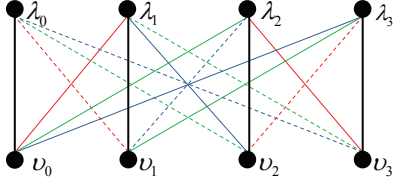


Figura 1.1: Grafo: $\psi_g = 4_0$,
 $(4, 4, 0) = (\nu_0, \nu_j; \lambda_0, \lambda_j)$.

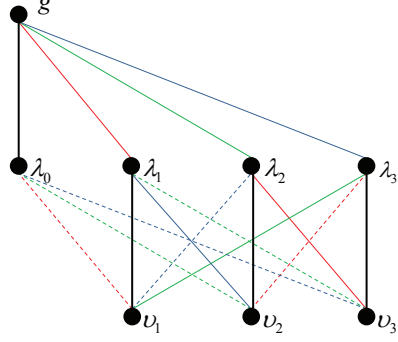


Figura 1.2: Grafo: $\psi_g = 4_1$,
 $(3, 4, 1) = (\nu_j; \lambda_0, \lambda_j; g)$.

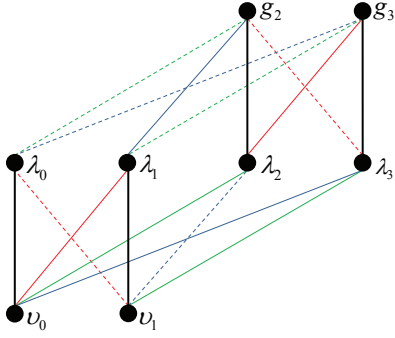


Figura 1.3: Grafo: $\psi_g = 4_2$,
 $(2, 4, 2) = (\nu_0, \nu_1; \lambda_0, \lambda_j; g_2, g_3)$.

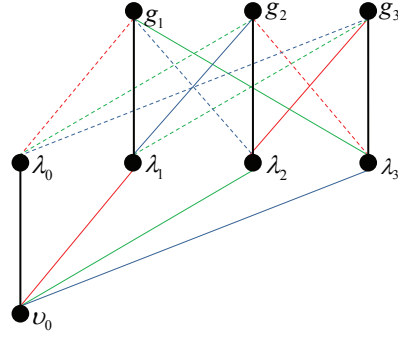


Figura 1.4: Grafo: $\psi_g = 4_3$,
 $(1, 4, 3) = (\nu_0; \lambda_0, \lambda_j; g_i)$.

Finalmente vamos introduzir dois conjuntos de 3 números ordenados para supermultipletos de comprimento 3, chamados *fontes* S e *alvos* T , definidos como

$$S = [s_1, s_2, s_3], \quad T = [t_1, t_2, t_3], \quad (1.51)$$

onde s_i (t_i) é o número de campos de dimensão de massa $d_i = \frac{i-1}{2}$ que não tenha nenhuma conexão com outro campo de dimensão $d_i - \frac{1}{2}$ ($d_i + \frac{1}{2}$) na representação gráfica. Para um multipletto de comprimento 3 do tipo $(k, n, n-k)$, necessariamente $s_1 = k$, $s_3 = 0$, junto com $t_1 = 0$ e $t_3 = n-k$. Conseqüentemente, S e T são completamente determinados se s_2 e t_2 são conhecidos.

1.7 Construção de ações e modelos sigma

Agora temos todos os ingredientes para construir invariantes para modelos sigma supersimétricos unidimensionais, cujo espaço alvo é parametrizado pelas coordenadas do multipletto associado.

Os modelos sigma Σ são mapeamentos unidimensionais sobre uma variedade Riemanniana \mathcal{M}_g provida de uma métrica g :

$$\Sigma : \begin{array}{l} R \rightarrow \mathcal{M}_g, \\ t \rightarrow \vec{X}(t). \end{array} \quad (1.52)$$

\vec{X} denota as coordenadas locais do espaço alvo (o chamado “target space”). Fisicamente eles são componentes de campos bosônicos de um supermultiplete off-shell. Os demais campos bosônicos são os campos auxiliares. Aqui, a métrica g_{ij} é função da chamada *função prepotencial* $F(\vec{X})$, ou seja $g_{ij} \equiv g_{ij}(F(\vec{X}))$.

Neste trabalho de tese vamos introduzir dois tipos de métodos para construir ações invariantes ou modelos sigma. Eles serão usados de acordo com o tipo de representações e símbolos de conectividade que possuem.

- Construção I:

Uma Lagrangeana supersimétrica manifestamente $\overline{\mathcal{N}}$ -estendida é produzida como

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{N}}} = Q_1 \dots Q_{\overline{\mathcal{N}}} F_{\overline{\mathcal{N}}}, \quad (1.53)$$

com as dimensões de massa: $[\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{N}}}] = 2$, $[F_{\overline{\mathcal{N}}}] = 2 - \frac{\overline{\mathcal{N}}}{2}$ e $[Q_i] = \frac{1}{2}$. Isto implica que, para termos uma Lagrangeana com dimensão de massa dois, no máximo podemos construir com $\overline{\mathcal{N}} = 4$ supersimetrias manifestas.

Para a construção de uma ação invariante supersimétrica \mathcal{N} -estendida, com $\mathcal{N} > \overline{\mathcal{N}}$, temos que impor $\mathcal{N} - \overline{\mathcal{N}}$ vínculos na ação, para um $j = \overline{\mathcal{N}} + 1, \dots, \mathcal{N}$, da forma

$$Q_j \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{N}}} = \partial_t R_{j,\overline{\mathcal{N}}}, \quad (1.54)$$

ou seja, a Lagrangeana se transforma como uma derivada total onde $R_{j,\overline{\mathcal{N}}}$ é uma função qualquer com dimensão de massa igual a

$$[R_{j,\overline{\mathcal{N}}}] = \frac{3}{2}. \quad (1.55)$$

Para $\overline{\mathcal{N}} = 4$ os modelos sigma são determinados em termos de uma função não vinculada das coordenadas do espaço alvo, chamado função prepotencial.

A ação invariante $S = \frac{1}{m} \int dt \mathcal{L}$ é expressa através da Lagrangeana \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 F \quad (1.56)$$

- Construção II:

Este método consiste em construir Lagrangeanas para qualquer supermultiplete “off-shell” de comprimento $l = 3$, $(k, n, n - k)$, a partir da Lagrangeana do seu multiplete raiz associado (n, n) .

A Lagrangeana para o multipleteo raiz se constrói com (1.56), que tem $\overline{\mathcal{N}} = 4$ supersimetrias manifestas. A dependência funcional desta Lagrangeana tem a forma

$$\overline{\mathcal{L}} \equiv \overline{\mathcal{L}}(v_i, \dot{v}_i, \psi_i, \dot{\psi}_i) \quad (1.57)$$

$i = 1, \dots, n$.

O seguinte passo é impor vínculos na Lagrangeana $\overline{\mathcal{L}}$ tal que, para $j = k, \dots, 8$, temos

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial v_j} = 0, \quad (1.58)$$

que elimina a dependência com v_j .

Esta condição nos permite considerar, de acordo com o processo de vestimento, que os termos do tipo \dot{v}_j possam ser considerados como campos auxiliares g_j de dimensão de massa 1 formando parte do novo supermultipleteo $(k, n, n - k)$. Ou seja

$$g_j = \dot{v}_j \quad (1.59)$$

então, vamos ter

$$\overline{\mathcal{L}} \equiv \overline{\mathcal{L}}(v_l, \dot{v}_l, \psi_i, \dot{\psi}_i, g_j), \quad (1.60)$$

com $l = 0, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$ e $j = k, \dots, n$.

A nova Lagrangeana $\overline{\mathcal{L}}$ pode não ser invariante sob $\mathcal{N} = 4$ supersimetrias. Isto vai depender do tipo de supermultipleteo associado e da conectividade que ele tem. Para garantir a invariância sob $\mathcal{N} = 4$ a condição (1.54) tem que ser obedecida, o que, em alguns casos, vai produzir un novo tipo de vínculo, então, agora a nossa nova função prepotencial é $F(v_l)$.

Capítulo 2

Classificação das representações supersimétricas \mathcal{N} -estendidas

Neste capítulo apresentaremos a classificação completa das representações não-minimais da álgebra de supersimetria \mathcal{N} -estendida num espaço unidimensional.

2.1 Multipletos raízes $(8, 8, 0)$ e $(16, 16, 0)$

Para $\mathcal{N} = 8$ minimal temos o multiplete raiz $(8, 8, 0)$ de comprimento $l = 2$. Ele gera suas respectivas representações de comprimento $l = 3$ do tipo $(k, 8, 8 - k)$ pelas transformações de vestimento (1.36).

As 8 transformações supersimétricas 16×16 que agem no multiplete raiz são dadas por

$$Q_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j \\ -\gamma_j \cdot H & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\mathcal{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_8 \\ \gamma_8 \cdot H & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde as matrizes γ_j ($j = 1, \dots, 7$) 8×8 podem ser escritas usando a álgebra de Clifford $Cl(0, 7)$ da equação (1.10) e a matriz γ_8 como identidade $\mathbf{1}_8$, quer dizer

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_A, \\ \gamma_2 &= \sigma_2 \otimes \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2, \\ \gamma_3 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A, \\ \gamma_4 &= \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \gamma_5 &= \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A, \\ \gamma_6 &= \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2, \\ \gamma_7 &= \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, \\ \gamma_8 &= \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

As transformações (2.1) agem sobre o supermultiplete que contém 8 campos bosônicos e 8 campos fermiônicos dados explicitamente por $(v_0, v_i; \lambda_0, \lambda_i)$, com $i, j = 1, \dots, 7$.

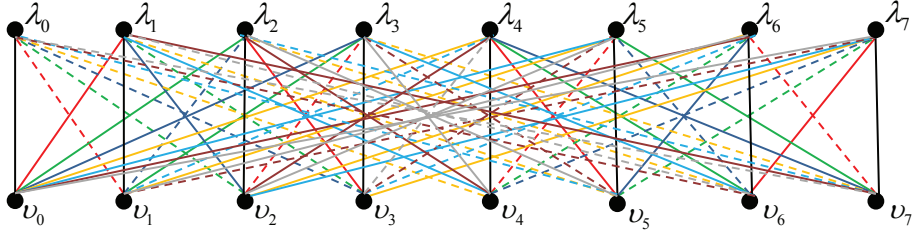


Figura 2.1: Supermultipleteo $(8, 8, 0)$, $\mathcal{N} = 8$: $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8$

O grafo correspondente para o multipleteo raiz e suas transformações está representado na Figura 2.1.

Uma forma compacta de escrever as transformações supersimétricas é usar a estrutura octonionica que eles possuem, ou seja

$$Q_i(v_0, v_j; \lambda_0, \lambda_j) = (\lambda_i, -\delta_{ij}\lambda_0 - C_{ijk}\lambda_k; -\dot{v}_i, \delta_{ij}\dot{v}_0 + C_{ijk}\dot{v}_k), \quad (2.3)$$

$$Q_8(v_0, v_j; \lambda_0, \lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_j; \dot{v}_0, \dot{v}_j) \quad (2.4)$$

com $i, j, k = 1, \dots, 7$, onde as constantes de estrutura octonionica C_{ijk} são completamente anti-simétricas e temos a seguinte notação

$$C_{123} = C_{145} = C_{176} = C_{246} = C_{257} = C_{347} = C_{365} = +1, \quad (2.5)$$

sua representação no plano de Fano é dado na Figura 2.2.

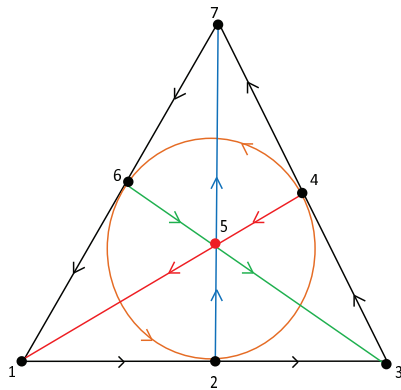


Figura 2.2: Plano de Fano para as constantes de estrutura octonionica C_{ijk} .

Além da estrutura octonionica as transformações do multiplete raiz possuem também uma estrutura quaternionica onde renomeando os campos e as transformações do seguinte modo

$$\begin{array}{l|l|l}
Q_1 \rightarrow Q_1 & v_1 \rightarrow v_1 & \lambda_1 \rightarrow \lambda_1 \\
Q_2 \rightarrow Q_2 & v_2 \rightarrow v_2 & \lambda_2 \rightarrow \lambda_2 \\
Q_3 \rightarrow Q_3 & v_3 \rightarrow v_3 & \lambda_3 \rightarrow \lambda_3 \\
Q_4 \rightarrow \bar{Q}_4 & v_4 \rightarrow \bar{v}_0 & \lambda_4 \rightarrow \bar{\lambda}_0 \\
Q_5 \rightarrow \bar{Q}_1 & v_5 \rightarrow \bar{v}_1 & \lambda_5 \rightarrow \bar{\lambda}_1 \\
Q_6 \rightarrow \bar{Q}_2 & v_6 \rightarrow \bar{v}_2 & \lambda_6 \rightarrow \bar{\lambda}_2 \\
Q_7 \rightarrow \bar{Q}_3 & v_7 \rightarrow \bar{v}_3 & \lambda_7 \rightarrow \bar{\lambda}_3 \\
Q_8 \rightarrow Q_4 & v_0 \rightarrow v_0 & \lambda_0 \rightarrow \lambda_0
\end{array} \tag{2.6}$$

obteremos o multiplete

$$(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i) \tag{2.7}$$

e as seguintes transformações supersimétricas

$Q_i v_0 = \lambda_i$	$Q_i \bar{v}_0 = -\bar{\lambda}_i$	(2.8)
$Q_i v_j = -(\delta_{ij} \lambda_0 + \varepsilon_{ijk} \lambda_k)$	$Q_i \bar{v}_j = \delta_{ij} \bar{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk} \bar{\lambda}_k$	
$Q_i \lambda_0 = -\dot{v}_i$	$Q_i \bar{\lambda}_0 = \dot{\bar{v}}_i$	
$Q_i \lambda_j = \delta_{ij} \dot{v}_0 + \varepsilon_{ijk} \dot{v}_k$	$Q_i \bar{\lambda}_j = -(\delta_{ij} \dot{\bar{v}}_0 + \varepsilon_{ijk} \dot{\bar{v}}_k)$	
$Q_4 v_0 = \lambda_0$	$Q_4 \bar{v}_0 = \lambda_0$	
$Q_4 v_i = \lambda_i$	$Q_4 \bar{v}_i = \bar{\lambda}_i$	
$Q_4 \lambda_0 = \dot{v}_0$	$Q_4 \bar{\lambda}_0 = \dot{\bar{v}}_0$	
$Q_4 \lambda_j = \dot{v}_j$	$Q_4 \bar{\lambda}_j = \dot{\bar{v}}_j$	
$\bar{Q}_i v_0 = \lambda_i$	$\bar{Q}_i \bar{v}_0 = \lambda_i$	
$\bar{Q}_i v_j = -\delta_{ij} \bar{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk} \bar{\lambda}_k$	$\bar{Q}_i \bar{v}_j = -\delta_{ij} \lambda_0 + \varepsilon_{ijk} \lambda_k$	
$\bar{Q}_i \lambda_0 = -\dot{\bar{v}}_i$	$\bar{Q}_i \bar{\lambda}_0 = -\dot{v}_i$	
$\bar{Q}_i \lambda_j = \delta_{ij} \dot{\bar{v}}_0 - \varepsilon_{ijk} \dot{\bar{v}}_k$	$\bar{Q}_i \bar{\lambda}_j = \delta_{ij} \dot{v}_0 - \varepsilon_{ijk} \dot{v}_k$	
$\bar{Q}_4 v_0 = \bar{\lambda}_0$	$\bar{Q}_4 \bar{v}_0 = -\lambda_0$	
$\bar{Q}_4 v_j = \bar{\lambda}_j$	$\bar{Q}_4 \bar{v}_j = -\lambda_j$	
$\bar{Q}_4 \lambda_0 = -\dot{\bar{v}}_0$	$\bar{Q}_4 \bar{\lambda}_0 = \dot{v}_0$	
$\bar{Q}_4 \lambda_j = -\dot{\bar{v}}_j$	$\bar{Q}_4 \bar{\lambda}_j = \dot{v}_j$	

com $i, j, k = 1, 2, 3$.

Para $\mathcal{N} = 9$ minimal, o multiplete raiz é $(16, 16, 0)$ (ver (1.32)) e as transformações supersimétricas correspondentes (32×32) são

$$Q_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j \\ -\gamma_j \cdot H & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_8 \\ \gamma_8 \cdot H & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

$$Q_{\mathcal{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_9 \\ -\gamma_9 \cdot H & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

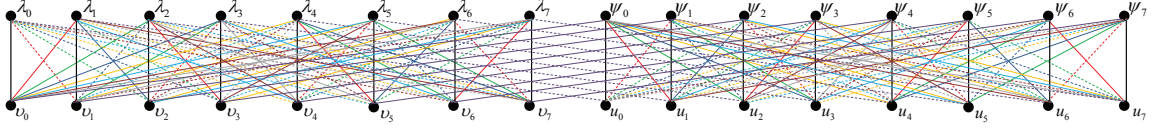


Figura 2.3: Supermultipeto $(16, 16)$, $\mathcal{N} = 9$: $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9$.

onde as matrizes gama (16×16) são, neste caso

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_A & (2.11) \\
\gamma_2 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2 \\
\gamma_3 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \\
\gamma_4 &= \sigma_2 \otimes \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \\
\gamma_5 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \\
\gamma_6 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2 \\
\gamma_7 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1 \\
\gamma_8 &= \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \\
\gamma_9 &= \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2
\end{aligned}$$

Os campos componentes do multipeto $(16, 16)$ são dados por

$$(v_0, v_i, u_0, u_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\psi}_0, \bar{\psi}_i) \quad (2.12)$$

com $i, j, k = 1, \dots, 7$. As transformações supersimétricas na estrutura octonionica que agem neste multipeto são

$$Q_i(v_0, v_j; \lambda_0, \lambda_j) = (\lambda_i, -\delta_{ij}\lambda_0 - C_{ijk}\lambda_k; -\dot{v}_i, \delta_{ij}\dot{v}_0 + C_{ijk}\dot{v}_k), \quad (2.13)$$

$$Q_i(u_0, u_j; \psi_0, \psi_j) = (-\psi_i, \delta_{ij}\psi_0 + C_{ijk}\psi_k; \dot{u}_i, -\delta_{ij}\dot{u}_0 - C_{ijk}\dot{u}_k), \quad (2.14)$$

$$Q_8(v_0, v_j; \lambda_0, \lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_j; \dot{v}_0, \dot{v}_j), \quad (2.15)$$

$$Q_8(u_0, u_j; \psi_0, \psi_j) = (\psi_0, \psi_j; \dot{u}_0, \dot{u}_j), \quad (2.16)$$

$$Q_9(v_0, v_j; \lambda_0, \lambda_j) = (\psi_0, \psi_j; -\dot{u}_0, -\dot{u}_j), \quad (2.17)$$

$$Q_9(u_0, u_j; \psi_0, \psi_j) = (-\lambda_0, -\lambda_j; \dot{v}_0, \dot{v}_j). \quad (2.18)$$

O grafo associado para estas transformações está mostrado na Figura 2.3.

Na estrutura quaternionica introduzimos a seguinte notação nos campos do multipeto $(16, 16, 0)$,

$$(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i, u_0, u_i, \bar{u}_0, \bar{u}_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i, \psi_0, \psi_i, \bar{\psi}_0, \bar{\psi}_i). \quad (2.19)$$

As transformações nesta estrutura podem ser obtidas do mesmo modo que o caso anterior, quer dizer considerando (2.6), que será o dobro de (2.8) mais a transformação Q_9 .

2.2 Representações lineares $\mathcal{N} = 4$

Para $\mathcal{N} = 4$, de acordo com as equações (1.32) e (1.35) temos que $n_{min} = 4$ e $n_{max} = 8$, como consequência teremos dois tipos de representações não-minimais para $(8, 8, 0)$ que por simplicidade vamos chamar *2-minimal* e *não-minimal*, respectivamente. A primeira porque é uma representação completamente redutível, já que é dado pela soma direta de duas representações minimais $\mathcal{N} = 4$ (ou seja, $(4, 4) \oplus (4, 4)$), os dois grafos associados a elas são *desconectados*, ver Figura 2.4. A segunda é uma classe de representação redutível mais indecomponível, pois seus grafos associados são completamente *conectados*, ver Figura 2.6.

2.2.1 Representação 2-minimal

Na classificação das representações 2-minimais para uma supersimetria com $\mathcal{N} = 4$ vamos considerar as quatro transformações supersimétricas Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 de (2.8) (na estrutura quaterniônica) com o multipletto raiz $(8, 8, 0)$ dado por (2.7). Este multipletto pode ser decomposto em $(4, 4, 0) \oplus (4, 4, 0)$ multiplettos irreduzíveis, portanto desconectados. Sua representação gráfica é mostrada na Fig.(2.4)

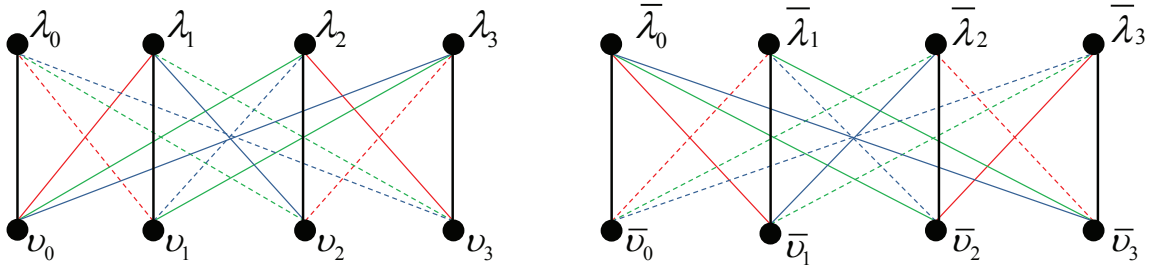


Figura 2.4: Supermultipletto $(8, 8)_m$, $\mathcal{N} = 4$: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

Este multipletto raiz com quatro supersimetrias vai gerar as suas representações de comprimento $l = 3$ do tipo $(k, 8, 8 - k) \equiv (p, 4, 4 - p) \oplus (k - p, 4, 4 - k + p)$, $p = 1, \dots, 7$, por meio das transformações de vestimento (1.36), ou seja, em particular vamos ter

$$\hat{Q}_i = S^{-1}Q_iS, \quad \hat{Q}_4 = S^{-1}Q_4S. \quad (2.20)$$

A classificação de acordo com o símbolo de conectividade é dada na seguinte tabela.

<i>campos componentes:</i>	<i>nível:</i>	<i>decomposição:</i>	<i>símbolo de conectividade:</i>
(1, 8, 7)		$(1, 4, 3) \oplus (0, 4, 4)$	$4_4 + 4_3$
(2, 8, 6)	<i>a</i>	$(2, 4, 2) \oplus (0, 4, 4)$	$4_4 + 4_2$
	<i>b</i>	$(1, 4, 3) \oplus (1, 4, 3)$	8_3
(3, 8, 5)	<i>a</i>	$(3, 4, 1) \oplus (0, 4, 4)$	$4_4 + 4_1$
	<i>b</i>	$(2, 4, 2) \oplus (1, 4, 3)$	$4_3 + 4_2$
(4, 8, 4)	<i>a</i>	$(4, 4, 0) \oplus (0, 4, 4)$	$4_4 + 4_0$
	<i>b</i>	$(3, 4, 1) \oplus (1, 4, 3)$	$4_3 + 4_1$
	<i>c</i>	$(2, 4, 2) \oplus (2, 4, 2)$	8_2
(5, 8, 3)	<i>a</i>	$(4, 4, 0) \oplus (1, 4, 3)$	$4_3 + 4_0$
	<i>b</i>	$(3, 4, 1) \oplus (2, 4, 2)$	$4_2 + 4_1$
(6, 8, 2)	<i>a</i>	$(4, 4, 0) \oplus (2, 4, 2)$	$4_2 + 4_0$
	<i>b</i>	$(3, 4, 1) \oplus (3, 4, 1)$	8_1
(7, 8, 1)		$(4, 4, 0) \oplus (3, 4, 1)$	$4_1 + 4_0$

(2.21)

Nesta tabela, vamos ver mais adiante que as Lagrangeanas dos multipletos (1, 8, 7) e (7, 8, 1) possuem estrutura octonionica e quaternionica. Os multipletos (2, 8, 6)_b, (3, 8, 5)_a, (4, 8, 4)_{a,b}, (5, 8, 3)_a e (6, 8, 2)_b possuem estrutura quaternionica. Os multipletos (2, 8, 6)_a, (4, 8, 4)_{a,c}, e (6, 8, 2)_a, estrutura complexa. E os multipletos (3, 8, 5)_b e (5, 8, 3)_b, real.

2.2.2 Grupos invariantes

O lema de Schur estabelece que as representações irredutíveis da álgebra de Clifford podem ser de três tipos: real, quase complexa e quaternionica. Isto acontece de acordo com a matriz mais geral que comuta com todos os geradores da álgebra de Clifford.

Os multipletos podem ser invariantes sob um grupo de rotação se as transformações supersimétricas comutarem como os geradores do grupo mais geral Σ (tipo bosônico), ou seja

$$[Q_I, \Sigma] = 0 \quad I = 1, 2, 3, 4. \quad (2.22)$$

Para o multipletto raiz (8, 8, 0) 2-minimal, a matriz mais geral pode ser escrita como $\Sigma = a_j \Sigma_j$, onde as matrizes $\Sigma_j = \Sigma_j^{up} \oplus \Sigma_j^{down}$ são os geradores da álgebra de Lie $su(2)$. Explicitamente temos,

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{up} &= \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, & \Sigma_2^{up} &= \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2, & \Sigma_3^{up} &= \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A, \\ \Sigma_4^{up} &= \sigma_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, & \Sigma_5^{up} &= \sigma_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2, & \Sigma_6^{up} &= \sigma_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $\Sigma_j^{down} = \Sigma_j^{up}$, com a seguinte propriedade $\Sigma_j^2 = -1$.

As relações de comutação são dadas por

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = C_{ijk} \Sigma_k \quad (2.24)$$

onde $C_{123} = C_{156} = C_{264} = C_{345} = +1$, totalmente antisimétrico.

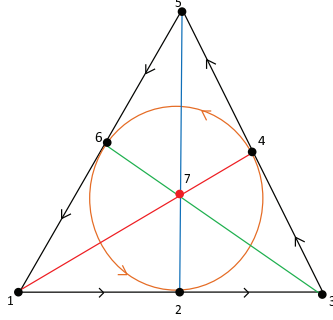


Figura 2.5: Plano de Fano com 4 linhas orientadas e 3 linhas não-orientadas.

Portanto, se consideramos mais um sétimo gerador dado por

$$\Sigma_7^{up} = \Sigma_7^{down} = \sigma_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \quad (2.25)$$

(que também comuta como as 4 transformações supersimétricas) onde seu quadrado é positivo, quer dizer $\Sigma_7^2 = +1$, portanto obtemos as seguintes relações de anti-comutação:

$$\{\Sigma_i, \Sigma_j\} = C_{(i,j),k} \Sigma_k. \quad (2.26)$$

onde $C_{(1,4),7} = C_{(2,5),7} = C_{(3,6),7} = -1$. $C_{(i,j),7}$ é simétrico no intercâmbio dentro do parêntesis (ij) e antisimétrico no intercâmbio entre (ij) e 7. A representação destes 7 geradores num plano de Fano é mostrado na Figura (2.5), que consiste de 4 linhas orientadas e 3 linhas não-orientadas, correspondentes as constantes de estrutura.

Para os multipletos $(k, 8, 8 - k)$ 2-minimais, que são gerados do multipletto raiz com uma transformação de vestimento, a matriz mais geral tem que comutar com os quatro operadores supersimétricos vestidos, quer dizer

$$[\hat{Q}_I, \Sigma] = 0 \quad I = 1, 2, 3, 4 \quad (2.27)$$

considerando a equação (1.36), temos que

$$[SQ_I S^{-1}, \Sigma] = 0 \quad (2.28)$$

portanto

$$[S, \Sigma] Q_I S^{-1} + S [Q_I, \Sigma] S^{-1} + S Q_I [S^{-1}, \Sigma] = 0. \quad (2.29)$$

Considerando que (2.22) se reduz para encontrar a matriz mais geral $\Sigma = b_i \Sigma_i$ que comute só com os operadores de vestimento de cada representação. E Σ_i as que estão restritas a ser qualquer das Σ_j do multipletto raiz ($i < j$), isto devido ao segundo termo de (2.29).

A forma matricial do operador de vestimento, que produz multipletos de comprimento 3, toma a seguinte forma

$$S = \begin{pmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

com \tilde{S} uma matriz diagonal $n \times n$ cuja diagonal tem termos de 1 e H .

Então, os grupos invariantes para as representações desconectadas e inequivalentes estão dadas na seguinte tabela

<i>supermultiplete:</i>	<i>grupo comutante:</i>
(1, 8, 7)	$SU(2) \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(2, 8, 6) _a	$SU(2) \otimes U(1) \otimes \mathbb{R}$
(2, 8, 6) _b	$\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(3, 8, 5) _a	$SU(2) \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(3, 8, 5) _b	$U(1) \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(4, 8, 4) _a	$SU(2) \otimes SU(2) \otimes \mathbb{R}$
(4, 8, 4) _b	$\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(4, 8, 4) _c	$U(1) \otimes U(1) \otimes \mathbb{R}$
(5, 8, 3) _a	$SU(2) \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(5, 8, 3) _b	$U(1) \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(6, 8, 2) _a	$SU(2) \otimes U(1) \otimes \mathbb{R}$
(6, 8, 2) _b	$\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$
(7, 8, 1)	$SU(2) \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbb{R}$

(2.31)

onde \mathbb{R} representa ao sétimo gerador Σ_7 .

2.2.3 Representação não-minimal

Nesta representação consideremos o multiplete raiz (2.7) com as seguintes 4 transformações supersimétricas Q_1, Q_2, Q_3 e \bar{Q}_4 de (2.8), isto é, considerando-se a estrutura quaterniônica. As primeiras 3 transformações são mantidas (sem perda de generalidade) sempre agindo num mesmo multiplete minimal irreduzível $\mathcal{N} = 3$, ou seja, neste caso (8, 8) pode ser sempre decomposto em $(4, 4) \oplus (4, 4)$ desconectados. Então, a quarta transformação tem a liberdade de ser escolhida para conectar os dois multipletos minimais desconectados $\mathcal{N} = 3$, no nosso caso escolhemos \bar{Q}_4 , formando assim, uma representação redutível mais indecomponível (conectados), ver Figura 2.6.

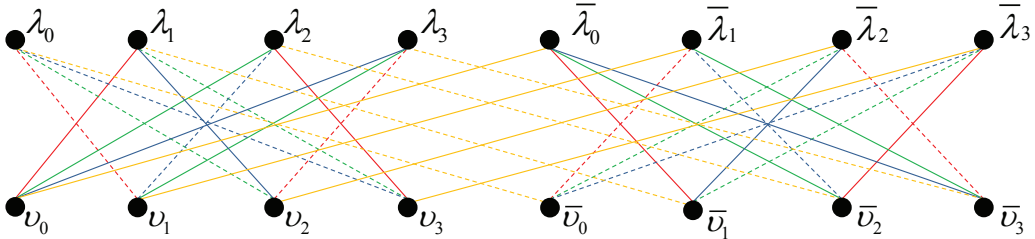


Figura 2.6: Supermultiplete $(8, 8)_{nm}$, $\mathcal{N} = 4$: Q_1, Q_2, Q_3, \bar{Q}_4 .

O multiplete raiz não-minimal para $\mathcal{N} = 4$ gera todos os multipletos $(k, 8, 8 - k)$ não minimais por meio das transformações de vestimento

$$\hat{Q}_i = S^{-1}Q_iS \quad \hat{\bar{Q}}_4 = S^{-1}\bar{Q}_4S \quad (2.32)$$

com $i = 1, 2, 3$. A classificação deles de acordo com suas conectividades é dada na seguinte tabela

<i>Campos componentes:</i>	<i>nível:</i>	<i>símbolo de conectividade:</i>	<i>multipleteo dual:</i>
(1, 8, 7)		$4_4 + 4_3$	(7, 8, 1)
(2, 8, 6)	A	$2_4 + 4_3 + 2_2$	$(6, 8, 2)_A$
	B	8_3	$(6, 8, 2)_B$
(3, 8, 5)	A	$1_4 + 3_3 + 3_2 + 1_1$	$(5, 8, 3)_A$
	B	$4_3 + 4_2$	$(5, 8, 3)_B$
(4, 8, 4)	A	$1_4 + 6_2 + 1_0$	auto-dual
	B	$4_3 + 4_1$	auto-dual
	C	$2_3 + 4_2 + 2_1$	auto-dual
	D	8_2	auto-dual
(5, 8, 3)	A	$1_3 + 3_2 + 3_1 + 1_0$	$(3, 8, 5)_A$
	B	$4_2 + 4_1$	$(3, 8, 5)_B$
(6, 8, 2)	A	$2_2 + 4_1 + 2_0$	$(2, 8, 6)_A$
	B	8_1	$(2, 8, 6)_B$
(7, 8, 1)		$4_1 + 4_0$	(1, 8, 7)

A diferença do caso 2-minimal aqui é gerada uma quarta representação inequivalente para $(4, 8, 4)_C$.

2.2.4 Grupos invariantes

Para o multipleteo raiz $(8, 8, 0)$ não-minimal também existe a matriz mais geral Σ que comuta com os Q_1, Q_2, Q_3 e \bar{Q}_4 . Isto é dado por $\Sigma_i = \Sigma_i^{up} \oplus \Sigma_i^{down}$, que são os geradores do grupo de Lie $su(2)$. Explicitamente temos que

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{up} &= \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, & \Sigma_2^{up} &= \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2, & \Sigma_3^{up} &= \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_3, \\ \Sigma_4^{up} &= \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A, & \Sigma_5^{up} &= \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, & \Sigma_6^{up} &= \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Além disso $\Sigma_i^{down} = \Sigma_i^{up}$ com $i = 1, 2, 3$ e $\Sigma_i^{down} = -\Sigma_i^{up}$ com $i = 4, 5, 6$. Estes geradores satisfazem $\Sigma_i^2 = -1$ ($i = 1, \dots, 6$) e cumprem as relações de comutação:

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = C_{ijk}\Sigma_k \quad (2.34)$$

onde $C_{123} = C_{164} = C_{245} = C_{356} = +1$ totalmente antissimétrico.

Se consideramos um sétimo gerador, que comuta com as 4 transformações supersimétricas, dado por $\Sigma_7^{up} = -\Sigma_7^{down} = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2$, com $\Sigma_7^2 = +1$, obtemos as seguintes relações de anti-comutação:

$$\{\Sigma_i, \Sigma_j\} = C_{(i,j),k}\Sigma_k. \quad (2.35)$$

onde $C_{(1,5),7} = C_{(2,6),7} = C_{(3,4),7} = -1$. $C_{(i,j),7}$ é simétrico no intercâmbio dentro do parêntesis (ij) e antissimétrico no intercâmbio entre (ij) e 7. A representação gráfica no

plano de Fano é dado da mesma forma que no caso 2-minimal (Ver Figura (2.5)), com 4 linhas orientadas e 3 linhas não-orientadas.

Para o caso dos multipletos off-shell, da mesma forma que no caso 2-minimal, os grupos invariantes, apresentamos na seguinte tabela.

<i>supermultiplete:</i>	<i>grupo comutante:</i>
$(2, 8, 6)_A$	$U(1)$
$(2, 8, 6)_B$	\mathbb{R}
$(4, 8, 4)_A$	$\mathbf{1}$
$(4, 8, 4)_B$	$SU(2)$
$(4, 8, 4)_C$	$\mathbf{1}$
$(4, 8, 4)_D$	$U(1) \otimes U(1) \otimes \mathbb{R}$
$(6, 8, 2)_A$	$U(1)$
$(6, 8, 2)_B$	\mathbb{R}

(2.36)

Se as seguintes representações conectadas (ou não-minimais) $(8, 8)_{nm}$, $(2, 8, 6)_B$, $(4, 8, 4)_D$ e $(6, 8, 2)_B$ com $\mathcal{N} = 4$ são submetidas a uma transformação linear nos seus campos componentes do tipo $x_{\pm} = y \pm z$ (onde y e z são os campos componentes da representação conectada e x_{\pm} são os campos componentes da representação desconectada) é possível passar para as representações desconectadas (ou 2-minimal) $(8, 8)_m$, $(2, 8, 6)_b$, $(4, 8, 4)_c$ e $(6, 8, 2)_b$, respectivamente e vice-versa [75]. Porém, cada par dessas representações com um mesmo número de campos componentes são equivalentes. Isto pelo fato de ter o mesmo símbolo de conectividade, grupo comutante e “node code group” [75].

2.2.5 Oxidação $\mathcal{N} = 4 \Rightarrow \mathcal{N} = 5$

Os dois tipos de representações, 2-minimal e não-minimal, com $\mathcal{N} = 4$ supersimetrias que agem em 8 campos bosônicos e 8 campos fermiônicos, podem ser *oxidados* para uma representação minimal com $\mathcal{N} = 5$ supersimetrias. Isto é, adicionando uma quinta transformação supersimétrica compatível com as quatro transformações prévias.

Por convenção, nas transformações supersimétricas do multiplete raiz $\mathcal{N} = 4$, no caso 2-minimal vamos adicionar \bar{Q}_4 e no caso não-minimal Q_4 , por consequência vamos ter os operadores vestidos $\hat{\bar{Q}}_4$ e \hat{Q}_4 para as representações $(k, 8, 8 - k)$, respectivamente.

As representações minimais para $\mathcal{N} = 5$ foram classificadas em [33, 31, 30].

Mais adiante, vamos apresentar uma série de tabelas especificando que representações minimais $\mathcal{N} = 5$ (nas colunas) resultam do processo de oxidação de uma representação $\mathcal{N} = 4$ (nas linhas). As representações são expressas em termos do símbolo de conectividade. Se a oxidação for permitida vamos marcar com um “X”.

Para (2, 8, 6) temos

	$(\mathcal{N} = 4) \Rightarrow (\mathcal{N} = 5) :$	$2_5 + 2_4 + 4_3$	$6_4 + 2_3$
<i>Conectado:</i>	$2_4 + 4_3 + 2_2$	X	X
	8_3		X
<i>Desconectado:</i>	$4_4 + 4_2$	X	
	8_3		X

(2.37)

Para (3, 8, 5) temos

	$(\mathcal{N} = 4) \Rightarrow (\mathcal{N} = 5) :$	$1_5 + 3_4 + 4_2$	$2_4 + 5_3 + 1_2$
<i>Conectado:</i>	$1_4 + 3_3 + 3_2 + 1_1$	X	X
	$4_3 + 4_2$		X
<i>Desconectado:</i>	$4_4 + 4_1$	X	
	$4_3 + 4_2$		X

(2.38)

Para (4, 8, 4) temos

	$(\mathcal{N} = 4) \Rightarrow (\mathcal{N} = 5) :$	$4_4 + 4_1$	$1_4 + 3_3 + 3_2 + 1_1$	$4_3 + 4_2$
<i>Conectado:</i>	$1_4 + 6_2 + 1_0$		X	
	$4_3 + 4_1$	X		X
	$2_3 + 4_2 + 2_1$		X	X
	8_2			X
<i>Desconectado:</i>	$4_4 + 4_0$	X		
	$4_3 + 4_1$		X	
	8_2			X

(2.39)

Para (5, 8, 3) temos

	$(\mathcal{N} = 4) \Rightarrow (\mathcal{N} = 5) :$	$4_3 + 3_1 + 1_0$	$1_3 + 5_2 + 2_1$
<i>Conectado:</i>	$1_5 + 3_2 + 3_1 + 1_0$	X	X
	$4_2 + 4_1$		X
<i>Desconectado:</i>	$4_3 + 4_0$	X	
	$4_2 + 4_1$		X

(2.40)

Para (6, 8, 2) temos

	$(\mathcal{N} = 4) \Rightarrow (\mathcal{N} = 5) :$	$4_2 + 2_1 + 2_0$	$2_2 + 6_1$
<i>Conectado:</i>	$2_2 + 4_1 + 2_0$	X	X
	8_1		X
<i>Desconectado:</i>	$4_2 + 4_0$	X	
	8_1		X

(2.41)

Note que diferentes representações “off-shell” (2-minimal e não-minimal), em alguns casos, possuem o mesmo tipo de conectividade e oxidação. Portanto, o símbolo de conectividade sozinho não pode discriminar ou diferenciar representações inequivalentes nestes dois tipos de representações. Porém, a representação gráfica é necessária.

As conectividades em ambas representações $\mathcal{N} = 4$ recaem nas conectividades para $\mathcal{N} = 5$ minimal, já classificadas na literatura [32], onde é mostrado que são oxidáveis até o número máximo $\mathcal{N}_{max} = 8$.

Os multipletos $(8, 8)$, $(1, 8, 7)$ e $(7, 8, 1)$, em qualquer representação, possuem uma só conectividade para $\mathcal{N} = 4$, porém são oxidáveis automaticamente na representação $\mathcal{N} = 5$ minimal, que também é única.

Finalmente, considerando as representações não-minimais $\mathcal{N} = 4$ de comprimento 4 e 5, o número máximo \mathcal{N}_{max} de supersimetrias oxidadas é dado na seguinte tabela.

<i>Campos componentes:</i>	\mathcal{N}_{max} :
$(1, 7, 7, 1)$	7
$(2, 6, 6, 2)$	6
$(1, 6, 7, 2) \leftrightarrow (2, 7, 6, 1)$	6
$(1, 5, 7, 3) \leftrightarrow (3, 7, 5, 1)$	5
$(1, 4, 7, 4) \leftrightarrow (4, 7, 4, 1)$	4
$(1, 4, 6, 4, 1)$	4

2.3 Representação não-minimal $\mathcal{N} = 5$

Representações não-minimais com $\mathcal{N} = 5$ precisam de 16 campos bosônicos e 16 campos fermiônicos de acordo com (1.35). Considerando o multiplete raiz $(16, 16)$ onde as 5 transformações escolhidas da equação (2.9) são: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_9 . Seu correspondente grafo é mostrado na Figura 2.7.

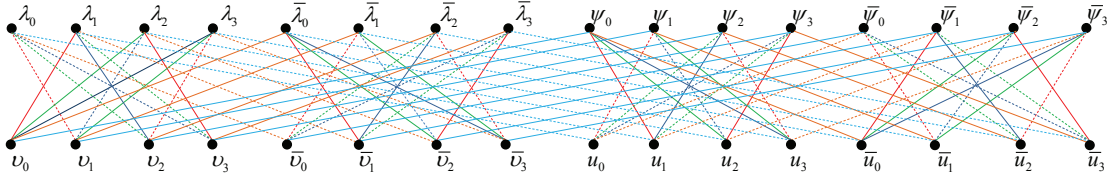


Figura 2.7: Supermultiplete $(16, 16)_{nm}$, $\mathcal{N} = 5$: $Q_1, Q_2, Q_3, \bar{Q}_4, Q_9$.

Na estrutura quaterniônica as 5 transformações que agem no multiplete raiz são Q_1, Q_2, Q_3, \bar{Q}_4 e Q_9 , são explicitamente dados por:

$$\begin{aligned}
Q_i v_0 &= \lambda_i, & Q_i v_j &= -(\delta_{ij} \lambda_0 + \epsilon_{ijk} \lambda_k), \\
Q_i \bar{v}_0 &= -\bar{\lambda}_i, & Q_i \bar{v}_j &= \delta_{ij} \bar{\lambda}_0 + \epsilon_{ijk} \bar{\lambda}_k, \\
Q_i \lambda_0 &= -\dot{v}_i, & Q_i \lambda_j &= \delta_{ij} \dot{v}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{v}_k, \\
Q_i \bar{\lambda}_0 &= \dot{\bar{v}}_i, & Q_i \bar{\lambda}_j &= -(\delta_{ij} \dot{\bar{v}}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{\bar{v}}_k), \\
Q_i u_0 &= -\psi_i, & Q_i u_j &= \delta_{ij} \psi_0 + \epsilon_{ijk} \psi_k, \\
Q_i \bar{u}_0 &= -\bar{\psi}_i, & Q_i \bar{u}_j &= -(\delta_{ij} \bar{\psi}_0 + \epsilon_{ijk} \bar{\psi}_k), \\
Q_i \psi_0 &= \dot{u}_i, & Q_i \psi_j &= -(\delta_{ij} \dot{u}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{u}_k), \\
Q_i \bar{\psi}_0 &= -\dot{\bar{u}}_i, & Q_i \bar{\psi}_j &= \delta_{ij} \dot{\bar{u}}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{\bar{u}}_k.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_4 v_0 &= \bar{\lambda}_0, & \bar{Q}_4 v_i &= \bar{\lambda}_i, & \bar{Q}_4 \bar{v}_0 &= -\lambda_0, & \bar{Q}_4 \bar{v}_i &= -\lambda_i, \\
\bar{Q}_4 \lambda_0 &= -\dot{\bar{v}}_0, & \bar{Q}_4 \lambda_i &= -\dot{\bar{v}}_i, & \bar{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{v}_0, & \bar{Q}_4 \bar{\lambda}_i &= \dot{v}_i, \\
\bar{Q}_4 u_0 &= -\bar{\psi}_0, & \bar{Q}_4 u_i &= -\bar{\psi}_i, & \bar{Q}_4 \bar{u}_0 &= \psi_0, & \bar{Q}_4 \bar{u}_i &= \psi_i, \\
\bar{Q}_4 \psi_0 &= \dot{\bar{u}}_0, & \bar{Q}_4 \psi_i &= \dot{\bar{u}}_i, & \bar{Q}_4 \bar{\psi}_0 &= -\dot{u}_0, & \bar{Q}_4 \bar{\psi}_i &= -\dot{u}_i
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
Q_9 v_0 &= \psi_0, & Q_9 v_i &= \psi_i, & Q_9 \bar{v}_0 &= \bar{\psi}_0, & Q_9 \bar{v}_i &= \bar{\psi}_i, \\
Q_9 \lambda_0 &= -\dot{u}_0, & Q_9 \lambda_i &= -\dot{u}_i, & Q_9 \bar{\lambda}_0 &= -\dot{\bar{u}}_0, & Q_9 \bar{\lambda}_i &= -\dot{\bar{u}}_i, \\
Q_9 u_0 &= -\lambda_0, & Q_9 u_i &= -\lambda_i, & Q_9 \bar{u}_0 &= -\bar{\lambda}_0, & Q_9 \bar{u}_i &= -\bar{\lambda}_i, \\
Q_9 \psi_0 &= \dot{v}_0, & Q_9 \psi_i &= \dot{v}_i, & Q_9 \bar{\psi}_0 &= \dot{\bar{v}}_0, & Q_9 \bar{\psi}_i &= \dot{\bar{v}}_i.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

com $i, j, k = 1, 2, 3$.

2.3.1 Grupos invariantes

A matriz mais geral Σ (em componentes, $\widehat{\Sigma}_j = \Sigma_j \oplus \Sigma_j$) que comuta com as 5 transformações supersimétricas é dado por

$$[Q_I, \Sigma] = 0 \quad I = 1, 2, 3, 4, 9. \tag{2.45}$$

onde as matrizes Σ_j são as seguintes

$\Sigma_1 = \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A$	$\Sigma_6 = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2$	$\Sigma_{11} = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2$
$\Sigma_2 = \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1$	$\Sigma_7 = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1$	$\Sigma_{12} = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2$
$\Sigma_3 = \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2$	$\Sigma_8 = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2$	$\Sigma_{13} = \sigma_A \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1$
$\Sigma_4 = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A$	$\Sigma_9 = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A$	$\Sigma_{14} = \sigma_A \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2$
$\Sigma_5 = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1$	$\Sigma_{10} = \sigma_A \otimes \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2$	$\Sigma_{15} = \sigma_A \otimes \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A$

(2.46)

com as propriedades

$$\Sigma_i^2 = -1 \quad i = 1, \dots, 10. \tag{2.47}$$

e

$$\Sigma_I^2 = +1 \quad I = 11, \dots, 15. \tag{2.48}$$

2.3.2 Álgebra

Usando o comutador das matrizes (2.46) obtemos as seguintes álgebras:

- Álgebras $su(2)$,

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = C_{ijk}\Sigma_k. \quad (2.49)$$

onde as constantes de estrutura C_{ijk} (totalmente anti-simétricas) são:

$$\begin{aligned} C_{123} = C_{156} = C_{781} = C_{397} = C_{345} = \\ C_{5,10,7} = C_{264} = C_{289} = C_{4,10,9} = C_{6,10,8} = +1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

- Álgebras $sl(2)$,

$$[\Sigma_I, \Sigma_J] = C_{[IJ]i}\Sigma_i \quad (2.51)$$

com as seguintes considerações:

$[IJ], [Ii]$ antissimétrico no intercâmbio dentro dos parênteses.

$[IJ]i$ simétrico no intercâmbio entre os I e J com i .

As constantes de estrutura são:

$$\begin{aligned} C_{[14,13],1} = C_{[15,14],2} = C_{[13,15],3} = C_{[15,12],4} = C_{[13,12],5} = \\ C_{[14,12],6} = C_{[11,13],7} = C_{[11,14],8} = C_{[11,15],9} = C_{[11,12],10} = +1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Finalmente apresentamos as relações de anticomutação diferentes de zero que satisfazem os seguintes geradores:

$$\{\Sigma_i, \Sigma_j\} = C_{(ij)I}\Sigma_I \quad (2.53)$$

com:

(ij) simétrico no intercâmbio dentro dos parênteses.

$(ij)I$ antissimétrico no intercâmbio entre i e j com I .

As constantes de estrutura são:

$$\begin{aligned} -C_{(1,9),12} = -C_{(1,4),11} = C_{(1,10),15} = -C_{(2,5),11} = -C_{(2,7),12} = \\ -C_{(3,6),11} = -C_{(3,8),12} = C_{(3,10),14} = C_{(4,7),14} = C_{(5,8),15} = \\ -C_{(5,9),14} = -C_{(6,7),15} = C_{(2,10),13} = -C_{(4,8),13} = C_{(6,9),13} = +1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Assim como os sedênions são representados num tetraedro, da mesma forma estes 15 geradores (vamos chamar pseudosedênions) podem ser representados num tetraedro, isto é mostrado nas Figuras 2.8,2.9. As características principais deste tetraedro são: possui uma configuração tri-dimensional, 4 vértices, consiste de 15 pontos, 35 linhas (cada linha com três pontos), 7 linhas passam por cada ponto.

Na Figura 2.8 as constantes de estrutura da álgebra $su(2)$ são representadas pelas linhas orientadas, a direção da flecha indica o sinal positivo. As constantes de estrutura das relações de anti-comutação são representadas pelas linhas não-orientadas.

Para evitar confusão com as linhas da Fig.2.8, o resto é mostrado num segundo tetraedro, veja a Figura 2.9, que representa as constantes de estrutura da álgebra $sl(2)$.

Mediante às transformações de vestimento são geradas as representações de comprimento $l = 3$ do tipo $(k, 16, 16 - k)$ com $k = 1, \dots, 15$.

Nenhum dos multipletos com k ímpar admite grupos invariantes não triviais (quer dizer, diferente da identidade) que comutarem com as 5 transformações supersimétricas. Além disso, considerando a dualidade entre os $k = 2, 4, 6$, com os $k = 10, 12, 14$, que possuem os mesmos grupos invariantes, apresentaremos só aqueles multipletos com grupos não triviais para $k = 8, 10, 12, 14$. Temos:

Tipo	Campos vestidos	Matrizes comutantes	Álgebra
$(8, 16, 8)_1$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10	Σ_1	$u(1)$
$(8, 16, 8)_7$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	$\Sigma_{1,2,3,4,5,6,11}$	$su(2) \oplus su(2) \oplus \mathbb{R}$
$(8, 16, 8)_9$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12	Σ_1	$u(1)$
$(8, 16, 8)_{15-A}$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 14	Σ_1	$u(1)$
$(8, 16, 8)_{15-B}$	1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13	Σ_{11}	\mathbb{R}
$(8, 16, 8)_{20-A}$	1, 2, 3, 4, 13, 14, 15, 16	$\Sigma_{1,2,3,10,13,14,15}$	$su(2) \oplus su(2) \oplus u(1)$
$(8, 16, 8)_{20-B}$	1, 2, 3, 5, 10, 13, 14, 16	Σ_{15}	\mathbb{R}

Tipo	Campos vestidos	Matrizes comutantes	Álgebra
$(10, 16, 6)_3$	1, 2, 3, 4, 5, 6	Σ_1	$u(1)$
$(10, 16, 6)_{10}$	1, 2, 3, 5, 6, 7	Σ_{11}	\mathbb{R}
$(10, 16, 6)_{12-A}$	1, 2, 3, 4, 13, 14	Σ_1	$u(1)$
$(10, 16, 6)_{14}$	1, 2, 3, 13, 14, 15	Σ_{10}	$u(1)$
$(10, 16, 6)_{15-B}$	1, 2, 3, 13, 14, 16	Σ_{15}	\mathbb{R}

(2.55)

Tipo	Campos vestidos	Matrizes comutantes	Álgebra
$(12, 16, 4)_2$	1, 2, 3, 4	$\Sigma_{1,2,3}$	$su(2)$
$(12, 16, 4)_6$	1, 2, 5, 6	$\Sigma_{1,4,11}$	$u(1) \oplus u(1) \oplus \mathbb{R}$
$(12, 16, 4)_8$	1, 2, 15, 16	$\Sigma_{1,13,14}$	$sl(2)$

(2.56)

Tipo	Campos vestidos	Matrizes comutantes	Álgebra
$(14, 16, 2)_1$	1, 2	Σ_1	$u(1)$
$(14, 16, 2)_2$	1, 5	Σ_{11}	\mathbb{R}

(2.57)

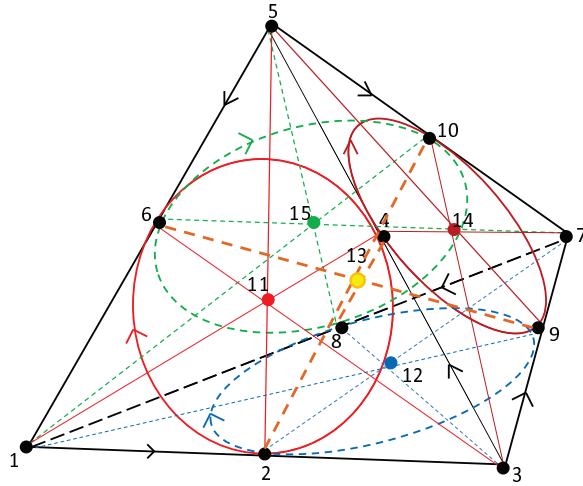


Figura 2.8: Tetraedro: Representação das constantes de estrutura das álgebras $su(2)$ e das relações de anti-comutação.

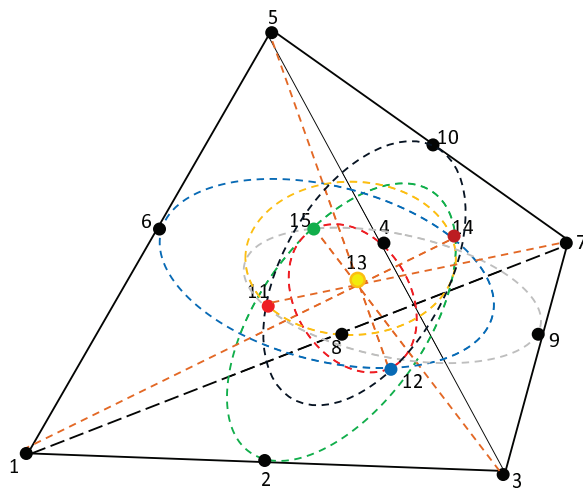


Figura 2.9: Tetraedro: Representação das constantes de estrutura das álgebras $sl(2)$.

Capítulo 3

Modelos sigma unidimensionais associados

Neste capítulo apresentaremos os invariantes dos modelos sigma associados às representações classificadas no capítulo anterior para $\mathcal{N} = 4$ 2-minimal e não-minimal e $\mathcal{N} = 5$ não-minimal. O espaço alvo da variedade é parametrizado pelas coordenadas alvo do supermultiplete associado: n no caso do multiplete raiz e k no caso dos multipletes de comprimento três.

3.1 Multipletos raízes

3.1.1 Multipleteo $(8, 8, 0)_m$

Na construção de ações invariantes para multipletos raízes vamos fazer uso da equação (1.56), onde as 4 transformações supersimétricas garantem a invariância manifesta sob $\mathcal{N} = 4$. A função prepotencial F depende de todos os campos que têm dimensão de massa zero.

Os grupos invariantes encontrados (no capítulo anterior) para aquelas representações de comprimento 2 ou 3 implica também na invariância sob essas rotações na sua Lagrangeana associada.

A Lagrangeana para o multiplete raiz $(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i)$ 2-minimal, que contém 8 bósons e 8 férmions, é dada por¹

$$\mathcal{L} = Q_4 Q_3 Q_2 Q_1 F(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i), \quad (3.1)$$

onde $F(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$ é a função prepotencial não vinculado. As 4 transformações Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 são dadas por (2.8). Seu grafo associado é mostrado na Figura 2.4. Se introduzirmos as seguintes funções Γ e $\bar{\Gamma}$, definidas como

$$\Gamma = \partial_{00}F + \partial_{ii}F \quad \bar{\Gamma} = \partial_{\bar{0}\bar{0}}F + \partial_{\bar{i}\bar{i}}F, \quad (3.2)$$

¹A ordem de aplicação das transformações supersimétricas na função prepotencial não é relevante para os nossos propósitos. A diferença na Lagrangeana gerada de uma com a outra é só um sinal negativo.

e a Lagrangeana explicitamente é dada por,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\Gamma(\dot{v}_0^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i) + \bar{\Gamma}(\dot{\bar{v}}_0^2 + \dot{\bar{v}}_i^2 + \dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\bar{\lambda}}_i\bar{\lambda}_i) \\
& + (\epsilon_{ijk}(\bar{\Gamma}_k\dot{v}_j + \bar{\Gamma}_{\bar{j}}\dot{\bar{v}}_k) + (\bar{\Gamma}_0\dot{v}_i + \bar{\Gamma}_{\bar{0}}\dot{\bar{v}}_i - \bar{\Gamma}_i\dot{v}_0 - \bar{\Gamma}_{\bar{i}}\dot{\bar{v}}_0))\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i \\
& + (-\epsilon_{ijk}(\Gamma_k\dot{v}_j + \Gamma_{\bar{j}}\dot{\bar{v}}_k) + (\Gamma_0\dot{v}_i + \Gamma_{\bar{0}}\dot{\bar{v}}_i - \Gamma_i\dot{v}_0 - \Gamma_{\bar{i}}\dot{\bar{v}}_0))\lambda_i\lambda_0 \\
& + (\epsilon_{ijk}(\Gamma_{\bar{k}}\dot{v}_j + \bar{\Gamma}_j\dot{\bar{v}}_k) - (\bar{\Gamma}_0\dot{\bar{v}}_i + \Gamma_{\bar{0}}\dot{v}_i + \bar{\Gamma}_i\dot{\bar{v}}_0 + \Gamma_i\dot{v}_0))\bar{\lambda}_i\lambda_0 \\
& + (-\epsilon_{ijk}(\Gamma_{\bar{k}}\dot{v}_j + \bar{\Gamma}_j\dot{\bar{v}}_k) - (\bar{\Gamma}_0\dot{\bar{v}}_i + \Gamma_{\bar{0}}\dot{v}_i + \bar{\Gamma}_i\dot{\bar{v}}_0 + \Gamma_i\dot{v}_0))\bar{\lambda}_0\lambda_i \\
& + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk}(\bar{\Gamma}_i\dot{v}_0 - \bar{\Gamma}_0\dot{v}_i - \bar{\Gamma}_{\bar{i}}\dot{\bar{v}}_0 - \bar{\Gamma}_{\bar{0}}\dot{\bar{v}}_i) + (\bar{\Gamma}_j\dot{v}_k - \bar{\Gamma}_k\dot{v}_j + \bar{\Gamma}_{\bar{j}}\dot{\bar{v}}_k - \bar{\Gamma}_{\bar{k}}\dot{\bar{v}}_j))\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k \\
& + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk}(\Gamma_i\dot{v}_0 - \Gamma_0\dot{v}_i - \Gamma_{\bar{i}}\dot{\bar{v}}_0 - \Gamma_{\bar{0}}\dot{\bar{v}}_i) + (\Gamma_k\dot{v}_j - \Gamma_j\dot{v}_k + \Gamma_{\bar{k}}\dot{\bar{v}}_j - \Gamma_{\bar{j}}\dot{\bar{v}}_k))\lambda_j\lambda_k \\
& - (\Gamma_i\dot{v}_j + \bar{\Gamma}_i\dot{\bar{v}}_j)(\lambda_i\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_i\lambda_j) + (\Gamma_{\bar{0}}\dot{v}_0 + \bar{\Gamma}_0\dot{\bar{v}}_0 + \Gamma_{\bar{i}}\dot{v}_i + \bar{\Gamma}_j\dot{\bar{v}}_j)(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \bar{\lambda}_k\lambda_k) \\
& + \epsilon_{ijk}(\Gamma_{\bar{k}}\dot{v}_0 + \bar{\Gamma}_0\dot{\bar{v}}_k - \Gamma_{\bar{0}}\dot{v}_k - \bar{\Gamma}_k\dot{\bar{v}}_0)\bar{\lambda}_j\lambda_i \\
& + (\Gamma_{\bar{i}\bar{j}} - \bar{\Gamma}_{ij})\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j + \epsilon_{ijk}\lambda_0\bar{\lambda}_0(\bar{\Gamma}_{0k}\lambda_i\bar{\lambda}_j + \Gamma_{\bar{0}\bar{k}}\lambda_i\bar{\lambda}_j) \\
& + \lambda_0\bar{\lambda}_0((\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}\lambda_i\lambda_j + \bar{\Gamma}_{ij}\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j) + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\bar{\Gamma}_{0\bar{j}}\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_k + \bar{\Gamma}_{j\bar{0}}\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_k - \Gamma_{0\bar{k}}\lambda_i\lambda_j - \Gamma_{i\bar{0}}\lambda_j\lambda_k)) \\
& + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}((\Gamma_{0\bar{0}} + \Gamma_{p\bar{p}})\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_k + (\bar{\Gamma}_{0\bar{0}} + \bar{\Gamma}_{p\bar{p}})\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_k) \\
& + (\Gamma_{j\bar{0}} - \Gamma_{0\bar{j}})\lambda_0\lambda_j\lambda_i\bar{\lambda}_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Gamma_{p\bar{k}} + \Gamma_{k\bar{p}})\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q \\
& + (\Gamma_{j\bar{0}} - \bar{\Gamma}_{0j})\lambda_0\bar{\lambda}_j\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta_{pq}(\bar{\Gamma}_{kp} + \Gamma_{\bar{k}\bar{p}})\lambda_0\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_i\lambda_q \\
& + (\bar{\Gamma}_{0j} - \Gamma_{0\bar{j}})\bar{\lambda}_0\lambda_j\lambda_i\bar{\lambda}_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta_{pq}(\bar{\Gamma}_{kp} + \Gamma_{\bar{k}\bar{p}})\bar{\lambda}_0\lambda_j\lambda_i\bar{\lambda}_q \\
& + (\bar{\Gamma}_{0\bar{j}} - \bar{\Gamma}_{j\bar{0}})\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_j\lambda_i\bar{\lambda}_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta_{pq}(\bar{\Gamma}_{p\bar{k}} + \bar{\Gamma}_{k\bar{p}})\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_i\lambda_q \\
& + (\Gamma_{\bar{j}\bar{k}} - \bar{\Gamma}_{jk})\lambda_k\bar{\lambda}_j\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta_{pq}(\bar{\Gamma}_{0p} + \Gamma_{\bar{0}\bar{p}})\lambda_i\lambda_k\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_q \\
& + \frac{1}{2}((\Gamma_{k\bar{j}} - \Gamma_{j\bar{k}})\lambda_j\lambda_k\lambda_i\bar{\lambda}_i + (\bar{\Gamma}_{k\bar{j}} - \bar{\Gamma}_{j\bar{k}})\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_i\lambda_i) \\
& + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\delta_{pq}((\Gamma_{0\bar{p}} + \Gamma_{p\bar{0}})\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_q - (\bar{\Gamma}_{p\bar{0}} + \bar{\Gamma}_{0\bar{p}})\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_q) \\
& + \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}((\Gamma_{0\bar{0}} - \Gamma_{p\bar{p}})\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0 - (\bar{\Gamma}_{0\bar{0}} - \bar{\Gamma}_{p\bar{p}})\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0) \\
& + (\Gamma_{\bar{0}\bar{0}} - \bar{\Gamma}_{00})\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\Gamma_{\bar{p}\bar{p}} - \bar{\Gamma}_{00})(\lambda_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_j) \\
& + \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}((\Gamma_{00} + \Gamma_{p\bar{p}})\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_0 - (\bar{\Gamma}_{\bar{0}\bar{0}} + \bar{\Gamma}_{\bar{p}\bar{p}})\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$. A convenção de Einstein de índices repetidos é entendida.

Se aplicarmos nesta Lagrangeana (3.3) uma quinta supersimetria, por exemplo \bar{Q}_4 , e garantindo a invariância impondo a condição (1.54), ou seja,

$$\bar{Q}_4\mathcal{L} = \partial_t R_4, \tag{3.4}$$

obteremos o seguinte vínculo na função prepotencial

$$\square F = 0 \quad (3.5)$$

onde $\square = \partial_{00} + \partial_{ii} + \partial_{\bar{0}\bar{0}} + \partial_{\bar{i}\bar{i}}$ é o operador Laplaciano. O vínculo (3.5) pode ser escrito também em termos de Γ e $\bar{\Gamma}$, ou seja,

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = 0. \quad (3.6)$$

Continuando desta mesma forma para o resto das transformações, isto é, aplicando e impondo uma sexta supersimetria \bar{Q}_1 , sétima supersimetria \bar{Q}_2 e oitava supersimetria \bar{Q}_3 obtemos o mesmo tipo de vínculo (3.6). Portanto, dizemos que é suficiente aplicar uma quinta supersimetria $\mathcal{N} = 5$, pois ele garante automaticamente até $\mathcal{N} = 6, 7, 8$ supersimetrias. Vamos ver mais adiante que isto também é uma propriedade geral das representações de comprimento 3 com ações de segunda ordem, sejam elas 2-minimais ou não-minimais.

3.1.2 Multipleteo $(8, 8, 0)_{nm}$

A Lagrangeana associada ao multipleteo raiz não-minimal, cujos campos componentes são $(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i)$, é construída com as 4 transformações supersimétricas Q_1, Q_2, Q_3 e \bar{Q}_4 dadas em (2.8) e seu grafo associado é mostrado na Figura 2.6. Portanto, temos que

$$\mathcal{L} = \bar{Q}_4 Q_3 Q_2 Q_1 F(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i). \quad (3.7)$$

Se definimos as seguintes funções em termos de $F(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$:

$$\Omega = \partial_{00} F + \partial_{ii} F + \partial_{\bar{0}\bar{0}} F + \partial_{\bar{i}\bar{i}} F, \quad \Phi = \partial_{0\bar{0}} F + \partial_{\bar{i}i} F, \quad (3.8)$$

podemos escrever a Lagrangeana supersimétrica $\mathcal{N} = 4$ explicitamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{\bar{v}}_0^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{\bar{v}}_i^2 + \dot{\lambda}_0 \lambda_0 + \dot{\bar{\lambda}}_0 \bar{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_i \lambda_i + \dot{\bar{\lambda}}_i \bar{\lambda}_i) \\ & + \varepsilon_{ijk}(\Phi_k \dot{v}_j + \Phi_{\bar{j}} \dot{v}_k)(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_i + \lambda_i \lambda_0) + (\Phi_0 \dot{v}_i + \Phi_{\bar{0}} \dot{v}_i - \Phi_i \dot{v}_0 - \Phi_{\bar{i}} \dot{v}_0)(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_i - \lambda_i \lambda_0) \\ & + \varepsilon_{ijk}(\Phi_{\bar{k}} \dot{v}_j - \Phi_j \dot{v}_k)(\lambda_0 \bar{\lambda}_i - \lambda_i \bar{\lambda}_0) + (\Phi_0 \dot{v}_i - \Phi_{\bar{0}} \dot{v}_i + \Phi_i \dot{v}_0 - \Phi_{\bar{i}} \dot{v}_0)(\lambda_0 \bar{\lambda}_i + \lambda_i \bar{\lambda}_0) \\ & + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\Phi_i \dot{v}_0 - \Phi_0 \dot{v}_i - \Phi_{\bar{i}} \dot{v}_0 + \Phi_{\bar{0}} \dot{v}_i)(\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k - \lambda_j \lambda_k) \\ & + \frac{1}{2}(\Phi_j \dot{v}_k - \Phi_k \dot{v}_j + \Phi_{\bar{j}} \dot{v}_k - \Phi_{\bar{k}} \dot{v}_j)(\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k + \lambda_j \lambda_k) \\ & - (\Phi_{\bar{0}} \dot{v}_0 - \Phi_0 \dot{v}_0 + \Phi_{\bar{i}} \dot{v}_i - \Phi_j \dot{v}_j)(\bar{\lambda}_0 \lambda_0 + \bar{\lambda}_k \lambda_k) \\ & + (\Phi_{\bar{i}} \dot{v}_j - \Phi_i \dot{v}_j)(\bar{\lambda}_i \lambda_j - \lambda_i \bar{\lambda}_j) + (\Phi_{\bar{0}} \dot{v}_0 - \Phi_0 \dot{v}_0)(\bar{\lambda}_0 \lambda_0 - \lambda_0 \bar{\lambda}_0) \\ & + \varepsilon_{ijk} \lambda_i \bar{\lambda}_j (\Phi_{\bar{k}} \dot{v}_0 - \Phi_0 \dot{v}_k - \Phi_{\bar{0}} \dot{v}_k + \Phi_k \dot{v}_0) \\ & + [-(\Phi_{\bar{i}\bar{j}} + \Phi_{ij}) + \varepsilon_{ijk}(\Phi_{0k} - \Phi_{\bar{0}\bar{k}})] \lambda_0 \bar{\lambda}_0 \lambda_i \bar{\lambda}_j \\ & + \{[\Phi_{\bar{i}\bar{j}} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk}(\Phi_{k\bar{0}} + \Phi_{0\bar{k}})] \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j - [\Phi_{\bar{i}\bar{j}} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk}(\Phi_{0\bar{k}} + \Phi_{k\bar{0}})] \lambda_i \lambda_j\} \lambda_0 \bar{\lambda}_0 \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk}(\Phi_{0\bar{0}} + \Phi_{p\bar{p}})(\lambda_0 \lambda_i \lambda_j \bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j \lambda_k) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\Phi_{0\bar{j}} - \Phi_{j\bar{0}})(\lambda_0\lambda_j + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_j)\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{p\bar{k}} + \Phi_{k\bar{p}})(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_q) \\
& +(\Phi_{0j} + \Phi_{\bar{0}\bar{j}})(\bar{\lambda}_0\lambda_j - \lambda_0\bar{\lambda}_j)\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{kp} - \Phi_{\bar{k}\bar{p}})(\bar{\lambda}_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q - \lambda_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_q) \\
& +(\Phi_{\bar{j}\bar{k}} + \Phi_{jk})\bar{\lambda}_j\lambda_k\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{\bar{0}\bar{p}} - \Phi_{0p})\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k\bar{\lambda}_q \\
& +\frac{1}{2}(\Phi_{j\bar{k}} - \Phi_{\bar{j}k})(\lambda_j\lambda_k + \bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k)\lambda_i\bar{\lambda}_i - \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{0\bar{p}} + \Phi_{\bar{0}p})(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_q + \bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_q) \\
& -\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\Phi_{0\bar{0}} - \Phi_{p\bar{p}})(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0) \\
& -(\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{00})\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}[(\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{pp})(\lambda_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) + (\Phi_{00} + \Phi_{\bar{p}\bar{p}})(\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k)] \\
& -\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}[(\Phi_{00} + \Phi_{pp})\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_0 + (\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{\bar{p}\bar{p}})(\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_0)] \\
& +\Omega(\dot{v}_0\dot{v}_0 + \dot{v}_i\dot{v}_i + \lambda_0\dot{\lambda}_0 + \lambda_k\dot{\lambda}_k) \\
& +\varepsilon_{ijk}(\Omega_{\bar{j}}\dot{v}_k\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \Omega_j\dot{v}_k\lambda_0\lambda_i) + (\Omega_{\bar{0}}\dot{v}_i - \Omega_i\dot{v}_0)\bar{\lambda}_i\lambda_0 + (\Omega_{\bar{i}}\dot{v}_0 - \Omega_0\dot{v}_i)\bar{\lambda}_0\lambda_i \\
& +\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}[(\Omega_0\dot{v}_k - \Omega_k\dot{v}_0)\lambda_i\lambda_j + (\Omega_{\bar{0}}\dot{v}_k - \Omega_{\bar{k}}\dot{v}_0)\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j] \\
& +(\Omega_{\bar{i}}\dot{v}_j - \Omega_j\dot{v}_i)\bar{\lambda}_j\lambda_i + (\Omega_{\bar{0}}\dot{v}_0 - \Omega_0\dot{v}_0)\bar{\lambda}_0\lambda_0 - (\Omega_{\bar{0}}\dot{v}_0 + \Omega_{\bar{k}}\dot{v}_k)(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \bar{\lambda}_k\lambda_k) \\
& +\Omega_{\bar{i}j}\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\Omega_{\bar{0}\bar{k}}\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j - \Omega_{0k}\lambda_i\lambda_j)\lambda_0\bar{\lambda}_0 - \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\delta_{pq}(\Omega_{pk}\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q + \Omega_{\bar{p}\bar{k}}\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_q) \\
& +(\Omega_{j\bar{0}}\lambda_0\bar{\lambda}_j - \Omega_{\bar{0}j}\bar{\lambda}_0\lambda_j + \Omega_{0\bar{0}}\lambda_0\bar{\lambda}_0 + \Omega_{k\bar{j}}\lambda_j\bar{\lambda}_k)\lambda_i\bar{\lambda}_i \\
& -\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}[(\Omega_{00}\bar{\lambda}_0 - \Omega_{0p}\lambda_p)\lambda_i\lambda_j\lambda_k + \bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k(\Omega_{\bar{0}\bar{0}}\lambda_0 + \Omega_{\bar{0}\bar{p}}\lambda_p)]. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Aplicando e impondo a invariância na Lagrangeana sob uma quinta supersimetria (Q_4) como

$$Q_4\mathcal{L} = \partial_t R_4 \tag{3.10}$$

obtemos o seguinte vínculo:

$$\Omega = 0 \tag{3.11}$$

ou em termos de $F(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$

$$\partial_{00}F + \partial_{ii}F + \partial_{\bar{0}\bar{0}}F + \partial_{\bar{i}\bar{i}}F = 0. \tag{3.12}$$

Aplicando e impondo uma sexta \bar{Q}_1 , sétima \bar{Q}_2 e oitava \bar{Q}_3 supersimetria encontramos o mesmo tipo de vínculo (3.11). Então, igual ao caso 2-minimal, com a quinta supersimetria podemos garantir a invariância até $\mathcal{N} = 6, 7, 8$ supersimetrias.

Substituindo (3.11) na equação (3.9) obtemos uma Lagrangeana mais simplificada e que só depende do Φ , entretanto, este vínculo implica sobre a função Φ a seguinte condição harmônica:

$$\partial_{00}\Phi + \partial_{ii}\Phi + \partial_{\bar{0}\bar{0}}\Phi + \partial_{\bar{i}\bar{i}}\Phi = 0. \tag{3.13}$$

Portanto, a Lagrangeana invariante ate $\mathcal{N} = 8$ supersimetrias é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{\bar{v}}_0^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{\bar{v}}_i^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i + \dot{\bar{\lambda}}_i\bar{\lambda}_i) + \\
& \varepsilon_{ijk}(\Phi_k\dot{v}_j + \Phi_{\bar{j}}\dot{\bar{v}}_k)(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\lambda_0) + (\Phi_0\dot{v}_i + \Phi_{\bar{0}}\dot{\bar{v}}_i - \Phi_i\dot{v}_0 - \Phi_{\bar{i}}\dot{\bar{v}}_0)(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i - \lambda_i\lambda_0) \\
& \varepsilon_{ijk}(\Phi_{\bar{k}}\dot{v}_j - \Phi_j\dot{\bar{v}}_k)(\lambda_0\bar{\lambda}_i - \lambda_i\bar{\lambda}_0) + (\Phi_0\dot{\bar{v}}_i - \Phi_{\bar{0}}\dot{v}_i + \Phi_i\dot{v}_0 - \Phi_{\bar{i}}\dot{\bar{v}}_0)(\lambda_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\bar{\lambda}_0) \\
& \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\Phi_i\dot{v}_0 - \Phi_0\dot{v}_i - \Phi_{\bar{i}}\dot{\bar{v}}_0 + \Phi_{\bar{0}}\dot{\bar{v}}_i)(\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k - \lambda_j\lambda_k) \\
& \frac{1}{2}(\Phi_j\dot{v}_k - \Phi_k\dot{v}_j + \Phi_{\bar{j}}\dot{\bar{v}}_k - \Phi_{\bar{k}}\dot{\bar{v}}_j)(\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + \lambda_j\lambda_k) \\
& -(\Phi_{\bar{0}}\dot{v}_0 - \Phi_0\dot{\bar{v}}_0 + \Phi_{\bar{i}}\dot{v}_i - \Phi_j\dot{\bar{v}}_j)(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \bar{\lambda}_k\lambda_k) \\
& (\Phi_{\bar{i}}\dot{v}_j - \Phi_i\dot{\bar{v}}_j)(\bar{\lambda}_i\lambda_j - \lambda_i\bar{\lambda}_j) + (\Phi_{\bar{0}}\dot{v}_0 - \Phi_0\dot{\bar{v}}_0)(\bar{\lambda}_0\lambda_0 - \lambda_0\bar{\lambda}_0) \\
& \varepsilon_{ijk}\lambda_i\bar{\lambda}_j(\Phi_{\bar{k}}\dot{v}_0 - \Phi_0\dot{\bar{v}}_k - \Phi_{\bar{0}}\dot{v}_k + \Phi_k\dot{\bar{v}}_0) \\
& [-(\Phi_{\bar{i}\bar{j}} + \Phi_{ij}) + \varepsilon_{ijk}(\Phi_{0k} - \Phi_{\bar{0}\bar{k}})]\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j \\
& \{[\Phi_{\bar{i}\bar{j}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\Phi_{k\bar{0}} + \Phi_{\bar{0}\bar{k}})]\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j - [\Phi_{\bar{i}\bar{j}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\Phi_{\bar{0}\bar{k}} + \Phi_{k\bar{0}})]\lambda_i\lambda_j\}\lambda_0\bar{\lambda}_0 \\
& -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{p\bar{p}})(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_k) \\
& (\Phi_{\bar{0}\bar{j}} - \Phi_{j\bar{0}})(\lambda_0\lambda_j + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_j)\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{p\bar{k}} + \Phi_{k\bar{p}})(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_q) \\
& (\Phi_{\bar{0}j} + \Phi_{\bar{0}\bar{j}})(\bar{\lambda}_0\lambda_j - \lambda_0\bar{\lambda}_j)\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{kp} - \Phi_{\bar{k}\bar{p}})(\bar{\lambda}_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q - \lambda_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_q) \\
& (\Phi_{\bar{j}\bar{k}} + \Phi_{jk})\bar{\lambda}_j\lambda_k\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{\bar{0}\bar{p}} - \Phi_{\bar{0}p})\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k\bar{\lambda}_q \\
& \frac{1}{2}(\Phi_{\bar{j}\bar{k}} - \Phi_{\bar{j}k})(\lambda_j\lambda_k + \bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k)\lambda_i\bar{\lambda}_i - \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}(\Phi_{\bar{0}\bar{p}} + \Phi_{\bar{0}p})(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_q + \bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_q) \\
& -\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\Phi_{\bar{0}\bar{0}} - \Phi_{p\bar{p}})(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0) \\
& -(\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{00})\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}[(\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{pp})(\lambda_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) + (\Phi_{00} + \Phi_{\bar{p}\bar{p}})(\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k)] \\
& -\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}[(\Phi_{00} + \Phi_{pp})\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_0 + (\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{\bar{p}\bar{p}})(\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_0)]. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Esta função $\Phi(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$ pode ser considerada como uma função que não necessariamente tem que depender da função $F(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$ dado por (3.8), ela pode ser redefinida como uma nova função prepotencial que depende de todos os campos bosônicos $(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$ presentes com dimensão de massa zero. A invariância supersimétrica não muda. Isto é importante no momento de se usar a Construção II na obtenção das Lagrangeanas “off-shell.”

Outra propriedade importante é que, na nossa notação escolhida, todos os campos do lado esquerdo correspondente ao sub-multiplete irredutível $(4, 4)_{esq} = (v_0, v_i; \lambda_0, \lambda_i)$ (ver o grafo da Figura 2.6 e considerar a estrutura quaterniônica) têm seus “parceiros”²

²Temos que esclarecer que quando nos referimos a parceiros neste caso, não tem nenhuma ligação com os parceiros supersimétricos entre bósons e férmions, é somente pelo fato de que a função Φ tem que ter a dependência nas derivadas de um par de campos bosônicos na Construção I.

no lado direito ordenados respectivamente a cada um deles no sub-multiplete irreduzível $(4, 4)_{dir} = (\bar{v}_0, \bar{v}_i; \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i)$, isto pode ser visto, seguindo-se as 4 linhas de transformação supersimétrica (não importa a ordem escolhida). Por exemplo, do campo v_0 a linha de transformação conduz até λ_1 (por Q_1), isto a v_2 (por Q_3), isto a λ_0 (por Q_2) e finalmente a \bar{v}_0 (por \bar{Q}_4), então v_0 é o parceiro do \bar{v}_0 . Isto é importante no momento de se identificar quais dos multipletos “off-shell” não-minimais podem ser construídos pela Construção I e ter uma Lagrangeana dinâmica, ou seja, se ao menos se tem um par de parceiros com dimensão de massa zero é aplicada à Construção I. Caso contrário, será usada a Construção II.

Outra observação muito importante é a seguinte, se voltarmos a considerar ao multiplete raiz 2-minimal $(8, 8, 0)_m$ e definirmos $\bar{\Gamma}$ na Lagrangeana da Eq.(3.3) como:

$$\bar{\Gamma} = \Phi \quad (3.15)$$

e usando o vínculo obtido para $\mathcal{N} = 5$ Eq. (3.6), temos que

$$\Gamma = -\Phi, \quad (3.16)$$

substituindo ambas as equações na Lagrangeana obteremos a mesma somente em termos da função Φ . E depois, reordenando os termos quadri-lineares chegamos à mesma Lagrangeana do caso não-minimal (3.14) e com o mesmo tipo de vínculo (3.13). Isto concorda com processo de oxidação de acordo com o símbolo de conectividade onde representações inequivalentes para $\mathcal{N} < 8$ com os mesmos números de campos componentes, chegam a ser equivalentes para $\mathcal{N} = 8$. Este mesmo fato será encontrado para multipletos “off-shell.”

3.2 Multipletos off-shell $(k, 8, 8 - k)$

Na construção de ações invariantes supersimétricas associadas aos multipletos “off-shell” de comprimento três, algumas condições básicas são requeridas na Lagrangeana a fim de termos sistemas não triviais e oxidáveis para $\mathcal{N} > 4$.

i) Que a Lagrangeana descreva um sistema dinâmico. Esta condição exige a presença dos termos do tipo:

$$\dot{x}^2, \quad \psi\dot{\psi} \quad e \quad g^2. \quad (3.17)$$

que são os termos cinéticos para bósons e férmions mais o quadrado do campo auxiliar, respectivamente. A presença de qualquer deles garante a presença dos demais no caso não-minimal.

ii) A presença na Lagrangeana de todos os campos do multiplete $(k, n, n - k)$.

iii) Que a Lagrangeana seja consistente depois de fixar todos os férmions iguais a zero.

3.2.1 2-Minimal

Neste caso, nem todos os multipletos “off-shell” de comprimento 3 podem ser construídas ações com $\mathcal{N} = 4$ supersimetrias manifestas por meio da equação (1.56) (Construção I),

ou seja, Lagrangeanas associadas que sejam de segunda ordem e que contenham todos os campos do multipletto. Isto só acontece para multiplettos com $k \leq 4$. E são os seguintes:

$$(1, 8, 7), \quad (2, 8, 6)_a, \quad (3, 8, 5)_a, \quad (4, 8, 4)_a, \quad (3.18)$$

pois na sua decomposição eles possuem o submultipletto $(0, 4, 4)$, como podemos ver na tabela (2.21). Este tipo de multiplettos (seja para $k = 1, 2, 3, 4$) possui como fontes $S = [k, 4, 0]$ para $\mathcal{N} = 4$, onde as quatro fontes fermiônicas $s_2 = 4$ correspondem ao submultipletto $(0, 4, 4)$, portanto, este fica sem um “gerador” bosônico (dimensão de massa 0) na função prepotencial para satisfazer a condição *ii*).

$(2, 8, 6)_b$ com conectividade 8_3

Para este multipletto temos os campos componentes $(\nu_0, \bar{\nu}_0; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i; g_i, \bar{g}_i)$ e as 4 transformações supersimétricas, que de acordo com a transformação de vestimento que atua nas transformações do multipletto raiz (2.8), são $\hat{Q}_I = S Q_I S^{-1}$ ($I = 1, \dots, 4$) e que atuam no multipletto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i \nu_0 &= \lambda_i & \hat{Q}_i \bar{\nu}_0 &= -\bar{\lambda}_i \\ \hat{Q}_i g_j &= -(\delta_{ij} \dot{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk} \dot{\lambda}_k) & \hat{Q}_i \bar{g}_j &= \delta_{ij} \dot{\bar{\lambda}}_0 + \varepsilon_{ijk} \dot{\bar{\lambda}}_k \\ \hat{Q}_i \lambda_0 &= -g_i & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_0 &= \bar{g}_i \\ \hat{Q}_i \lambda_j &= \delta_{ij} \dot{\nu}_0 + \varepsilon_{ijk} g_k & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_j &= -(\delta_{ij} \dot{\bar{\nu}}_0 + \varepsilon_{ijk} \bar{g}_k) \\ \hat{Q}_4 \nu_0 &= \lambda_0 & \hat{Q}_4 \bar{\nu}_0 &= \bar{\lambda}_0 \\ \hat{Q}_4 g_i &= \dot{\lambda}_i & \hat{Q}_4 \bar{g}_i &= \dot{\bar{\lambda}}_i \\ \hat{Q}_4 \lambda_0 &= \dot{\nu}_0 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{\bar{\nu}}_0 \\ \hat{Q}_4 \lambda_j &= g_j & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_j &= \bar{g}_j. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seu grafo correspondente é mostrado na Figura 3.1.

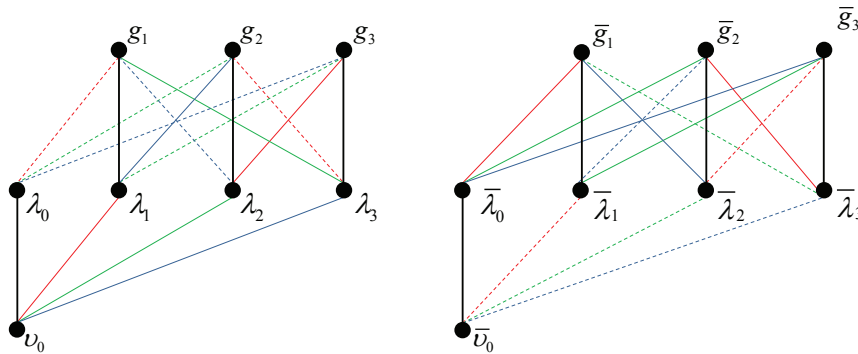


Figura 3.1: Supermultipletto $(2, 8, 6)_b = (1, 4, 3) \oplus (1, 4, 3)$ com conectividade 8_3 .

Este não possui fontes fermiônicas. Portanto, é possível construir a Lagrangeana pela Construção I. A Lagrangeana manifestamente invariante sob $\mathcal{N} = 4$ é dada por

$$\mathcal{L} = \hat{Q}_4 \hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \hat{Q}_3 F(\nu_0, \bar{\nu}_0). \quad (3.20)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Gamma(\dot{v}_0^2 + g_i^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i) - \bar{\Gamma}(\dot{\bar{v}}_0^2 + \bar{g}_i^2 + \dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\bar{\lambda}}_i\bar{\lambda}_i) \\
& + \bar{\Gamma}_0\dot{v}_0(\lambda_i\bar{\lambda}_i + \lambda_0\bar{\lambda}_0) - g_i(\bar{\Gamma}_0\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \Gamma_0\lambda_i\lambda_0) - \bar{\Gamma}_0\bar{g}_i(\lambda_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\bar{\lambda}_0) \\
& + g_i\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\bar{\Gamma}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j + \Gamma_0\lambda_j\lambda_k) + \bar{\Gamma}_0\varepsilon_{ijk}\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{g}_k \\
& + \bar{\Gamma}_0\dot{v}_0(\lambda_i\bar{\lambda}_i + \lambda_0\bar{\lambda}_0) - \bar{g}_i(\bar{\Gamma}_0\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \Gamma_0\lambda_i\lambda_0) - \Gamma_0\bar{g}_i(\lambda_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\bar{\lambda}_0) \\
& - \bar{g}_i\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\bar{\Gamma}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j + \Gamma_0\lambda_j\lambda_k) - \Gamma_0\varepsilon_{ijk}\lambda_i\bar{\lambda}_jg_k \\
& - \frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(3\bar{\Gamma}_{00}\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k - \Gamma_{00}\lambda_0\lambda_i\lambda_j\lambda_k) \\
& + \frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(3\Gamma_{00}\lambda_0\bar{\lambda}_i\lambda_j\bar{\lambda}_k - \bar{\Gamma}_{00}\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) \\
& - \Gamma_{00}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0 + 3\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_k) + \bar{\Gamma}_{00}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0 + 3\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_k),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $\Gamma = \partial_{00}F(v_0, \bar{v}_0)$ e $\bar{\Gamma} = \partial_{\bar{0}\bar{0}}F(v_0, \bar{v}_0)$.

Impondo e garantindo a invariância nesta Lagrangeana sob uma quinta supersimetria \hat{Q}_4 (que conecta os dois grafos desconectados) dada por

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_4 v_0 &= \bar{\lambda}_0 & \hat{Q}_4 \bar{v}_0 &= -\lambda_0 \\
\hat{Q}_4 v_j &= \bar{\lambda}_j & \hat{Q}_4 \bar{v}_j &= -\lambda_j \\
\hat{Q}_4 \lambda_0 &= -\dot{v}_0 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{v}_0 \\
\hat{Q}_4 \lambda_j &= -\dot{v}_j & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_j &= \dot{v}_j
\end{aligned} \tag{3.22}$$

obtemos o seguinte vínculo

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = 0. \tag{3.23}$$

Considerando esta equação e fazendo $\Gamma = \Phi(v_0, \bar{v}_0)$, a Lagrangeana se torna

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{\bar{v}}_0^2 + g_i^2 + \bar{g}_i^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i + \dot{\bar{\lambda}}_i\bar{\lambda}_i) \\
& + \Phi_0[\dot{v}_0(\bar{\lambda}_i\lambda_i + \lambda_0\bar{\lambda}_0) + g_i(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i - \lambda_i\lambda_0) + \bar{g}_i(\lambda_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\bar{\lambda}_0) \\
& - \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}g_i(\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k - \lambda_j\lambda_k) - \varepsilon_{ijk}\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{g}_k] \\
& + \Phi_0[\dot{v}_0(\lambda_i\bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_0\lambda_0) + \bar{g}_i(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i - \lambda_i\lambda_0) - g_i(\lambda_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\bar{\lambda}_0) \\
& + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{g}_i(\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k - \lambda_j\lambda_k) - \varepsilon_{ijk}\lambda_i\bar{\lambda}_jg_k] \\
& + \Phi_{00}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}[3\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k + \lambda_0\lambda_i\lambda_j\lambda_k] \\
& + \Phi_{00}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}[3\lambda_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k] \\
& - (\Phi_{00} + \Phi_{00})\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_i \\
& + \Phi_{00}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}[\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0 - 3(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_k)]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Portanto esta Lagrangeana fica invariante sob supersimetria ate $\mathcal{N} = 8$ com o vínculo dado por $\square\Phi = 0$.

$(2, 8, 6)_a$ com conectividade $4_4 + 4_2$

Este multipletto com campos componentes que é dado por

$$(v_0, v_1; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3; g_2, g_3, \bar{g}_0, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3), \quad (3.25)$$

contém 4 fontes fermiônicas: $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ e $\bar{\lambda}_3$ como podemos ver no grafo da Figura (3.2).

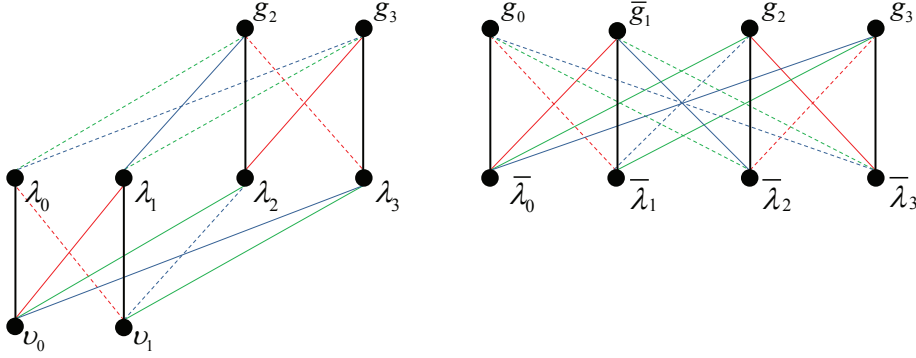


Figura 3.2: Supermultipletto $(2, 8, 6)_a = (2, 4, 2) \oplus (0, 4, 4)$ com conectividade $4_4 + 4_2$.

Se aplicarmos a Construção I na obtenção da sua Lagrangeana, no final vamos obter a Lagrangeana dinâmica associada só ao multipletto irreduzível $(2, 4, 2)$, então não satisfaz a condição *ii*). Porém, vamos construir sua Lagrangeana pela Construção II.

Consideremos a Lagrangeana do multipletto raiz 2-minimal $\mathcal{N} = 4$ dada em (3.3), o seguinte passo é impor vínculos nesta Lagrangeana tal que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{raiz}}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{raiz}}{\partial \bar{v}_j} = 0, \quad (3.26)$$

e fazendo

$$g_i = \dot{v}_i \quad \bar{g}_j = \dot{\bar{v}}_j \quad (3.27)$$

com $i = 2, 3$ e $j = 0, 1, 2, 3$, que elimina a dependência nestes campos.

Portanto, obtemos uma Lagrangeana associada ao multipletto (3.25). Mas ela não é invariante sob nenhuma transformação de supersimetria. Porém, precisamos primeiramente impor uma invariância. Tomemos por exemplo a transformação \hat{Q}_4 dada na Figura (3.2). Aplicando na Lagrangeana não invariante e exigindo a condição de invariância

$$Q_4 \mathcal{L} = \partial_t R_4, \quad (3.28)$$

obtemos o seguinte vínculo

$$\partial_{11} \bar{\Gamma} + \partial_{22} \bar{\Gamma} = 0. \quad (3.29)$$

As novas funções que vamos introduzir $\Gamma(v_0, v_1)$ e $\bar{\Gamma}(v_0, v_1)$ são independentes e são funções só dos campos bosônicos v_0 e v_1 .

Se aplicarmos as demais transformações supersimétricas \hat{Q}_i ($i = 1, 2, 3$) obtemos o mesmo vínculo (3.29). Portanto, temos uma Lagrangeana que é invariante sob $\mathcal{N} = 4$ com um prepotencial vinculado, e esta é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Gamma(\dot{v}_0^2 + \dot{v}_1^2 + g_2^2 + g_3^2) - \bar{\Gamma}(\bar{g}_0^2 + \bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2) \\
& + \Gamma(\dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\lambda}_1\lambda_1 + \dot{\lambda}_2\lambda_2 + \dot{\lambda}_3\lambda_3) - \bar{\Gamma}(\dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\bar{\lambda}}_1\bar{\lambda}_1 + \dot{\bar{\lambda}}_2\bar{\lambda}_2 + \dot{\bar{\lambda}}_3\bar{\lambda}_3) \\
& + \Gamma_1(\dot{v}_2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) + g_2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) + g_3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)) \\
& + \Gamma_2(\dot{v}_1(\lambda_3\lambda_2 - \lambda_0\lambda_1) + g_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) + g_3(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)) \\
& + \bar{\Gamma}_1(g_2(\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3) + g_3(\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2) + \dot{x}_2(\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_0)) \\
& + \bar{g}_0(\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_3\bar{\lambda}_3 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 - \lambda_0\bar{\lambda}_0) - \bar{g}_1(\lambda_0\bar{\lambda}_1 - \lambda_2\bar{\lambda}_3 + \lambda_1\bar{\lambda}_0 + \lambda_3\bar{\lambda}_2) \\
& - \bar{g}_2(\lambda_0\bar{\lambda}_2 + \lambda_1\bar{\lambda}_3 - \lambda_3\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_0) - \bar{g}_3(\lambda_2\bar{\lambda}_1 + \lambda_0\bar{\lambda}_3 + \lambda_3\bar{\lambda}_0 - \lambda_1\bar{\lambda}_2) \\
& + \bar{\Gamma}_2(g_2(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2) + g_3(\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3) - \dot{x}_1(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3)) \\
& + \bar{g}_0(\lambda_3\bar{\lambda}_2 - \lambda_0\bar{\lambda}_1 - \lambda_2\bar{\lambda}_3 - \lambda_1\bar{\lambda}_0) + \bar{g}_1(\lambda_2\bar{\lambda}_2 - \lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_3\bar{\lambda}_3 + \lambda_0\bar{\lambda}_0) \\
& + \bar{g}_2(\lambda_0\bar{\lambda}_3 - \lambda_2\bar{\lambda}_1 - \lambda_3\bar{\lambda}_0 - \lambda_1\bar{\lambda}_2) + \bar{g}_3(\lambda_2\bar{\lambda}_0 - \lambda_0\bar{\lambda}_2 - \lambda_3\bar{\lambda}_1 - \lambda_1\bar{\lambda}_{23}) \\
& + (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
& + \bar{\Gamma}_{11}(\lambda_0\bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_3 + \lambda_0\lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 + \lambda_0\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\lambda_3 \\
& + \bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3\bar{\lambda}_0 + \lambda_1\bar{\lambda}_2\lambda_3\bar{\lambda}_0 + \lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_0) \\
& + \bar{\Gamma}_{22}(\lambda_0\lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 + \lambda_1\bar{\lambda}_1\lambda_3\bar{\lambda}_3 - \lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_2\bar{\lambda}_2 \\
& + \lambda_1\bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3\bar{\lambda}_0 - \lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_3\bar{\lambda}_3) \\
& - \bar{\Gamma}_{12}(\lambda_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3 + \lambda_0\lambda_3\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2 + \lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2 + \lambda_1\lambda_3\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3 \\
& - \lambda_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 - \lambda_0\lambda_2\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3 + \lambda_0\lambda_2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3). \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Impondo uma invariância perante uma quinta transformação supersimétrica (que conecta os dois grafos desconectados da Figura(3.2)) por exemplo \hat{Q}_4 obtemos o seguinte vínculo

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = 0. \tag{3.31}$$

Este mesmo vínculo é obtido para as demais transformações supersimétricas \hat{Q}_i ($i = 1, 2, 3$). Porém com uma quinta supersimetria é garantida a invariância sob $\mathcal{N} = 8$ supersimetrias.

Se chamamos $\Gamma = \Phi$, e considerando o vínculo (3.31), obtemos que $\bar{\Gamma} = -\Phi$. Substituindo na Lagrangeana (3.30) obtemos uma Lagrangeana equivalente à obtida para o multipletto $(2, 8, 6)_b$ (3.24) com o vínculo induzido: $\partial_{00}\Phi + \partial_{11}\Phi = 0$.

Da mesma forma, este método pode ser utilizado para a construção de ações para os multipletos mostrados em (3.18).

$(3, 8, 5)_b$ **com conectividade** $4_3 + 4_2$

As transformações que atuam neste multipletto

$$(v_0, v_1, \bar{v}_0; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3; g_2, g_3, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3)$$

são mostradas na Figura 3.3 e na forma analítica na seguinte tabela³.

	\hat{Q}_1	\hat{Q}_2	\hat{Q}_3	\hat{Q}_4	$\hat{\bar{Q}}_4$
v_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_0	λ_0
v_1	$-\lambda_0$	λ_3	$-\lambda_2$	λ_1	$\bar{\lambda}_1$
λ_0	$-\dot{v}_1$	$-g_2$	$-g_3$	\dot{v}_0	$-\dot{v}_0$
λ_1	\dot{v}_0	$-g_3$	g_2	\dot{v}_1	$-\bar{g}_1$
λ_2	g_3	\dot{v}_0	$-\dot{v}_1$	g_2	$-\bar{g}_2$
λ_3	$-g_2$	\dot{v}_1	\dot{v}_0	g_3	$-\bar{g}_3$
g_2	$-\dot{\lambda}_3$	$-\dot{\lambda}_0$	$\dot{\lambda}_1$	$\dot{\lambda}_2$	$\dot{\lambda}_2$
g_3	$\dot{\lambda}_2$	$-\dot{\lambda}_1$	$-\dot{\lambda}_0$	$\dot{\lambda}_3$	$\dot{\lambda}_3$
\bar{v}_0	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$	λ_0	$-\lambda_0$
$\bar{\lambda}_0$	\bar{g}_1	\bar{g}_2	\bar{g}_3	\dot{v}_0	\dot{v}_0
$\bar{\lambda}_1$	$-\dot{v}_0$	\bar{g}_3	$-\bar{g}_2$	\bar{g}_1	\dot{v}_1
$\bar{\lambda}_2$	$-\bar{g}_3$	$-\dot{v}_0$	\bar{g}_1	\bar{g}_2	g_2
$\bar{\lambda}_3$	\bar{g}_2	$-\bar{g}_1$	$-\dot{v}_0$	\bar{g}_3	g_3
\bar{g}_1	$\dot{\lambda}_0$	$-\dot{\lambda}_3$	$\dot{\lambda}_2$	$\dot{\lambda}_1$	$-\dot{\lambda}_1$
\bar{g}_2	$\dot{\lambda}_3$	$\dot{\lambda}_0$	$-\dot{\lambda}_1$	$\dot{\lambda}_2$	$-\dot{\lambda}_2$
\bar{g}_3	$-\dot{\lambda}_2$	$\dot{\lambda}_1$	$\dot{\lambda}_0$	$\dot{\lambda}_3$	$-\dot{\lambda}_3$

(3.32)

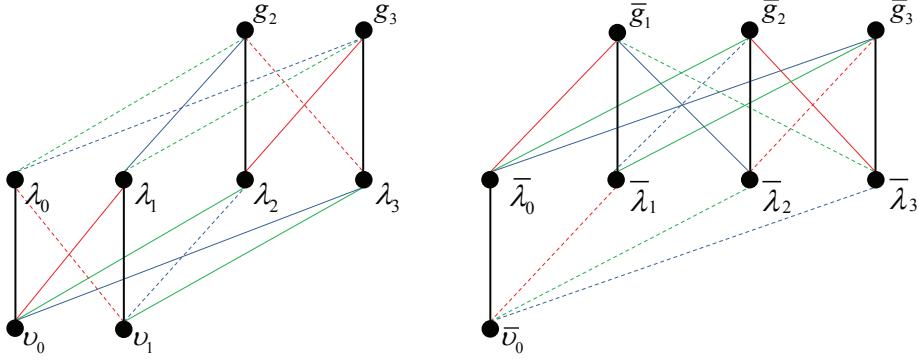


Figura 3.3: Supermultipeto $(3, 8, 5)_b = (2, 4, 2) \oplus (1, 4, 3)$ com conectividade $4_3 + 4_2$.

Este multipeto é composto de dois submultipletos irreduzíveis $(2, 4, 2)$ e $(1, 4, 3)$ onde a quinta supersimetria faz a primeira conexão entre os dois.

A Lagrangeana manifestamente invariante sob $\mathcal{N} = 4$ supersimetrias é dada por

$$\mathcal{L} = \hat{Q}_4 \hat{Q}_3 \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 F(v_0, v_1, \bar{v}_0), \quad (3.33)$$

portanto obtemos,

³É apresentado em uma tabela pelo fato de não ter uma estrutura nem quaterniônica e nem complexa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Gamma(\dot{v}_0^2 + \dot{v}_1^2 + g_2^2 + g_3^2) - \bar{\Gamma}(\dot{\bar{v}}_0^2 + \dot{\bar{g}}_1^2 + \dot{\bar{g}}_2^2 + \dot{\bar{g}}_3^2) \\
& + \Gamma(\dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\lambda}_1\lambda_1 + \dot{\lambda}_2\lambda_2 + \dot{\lambda}_3\lambda_3) - \bar{\Gamma}(\dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\bar{\lambda}}_1\bar{\lambda}_1 + \dot{\bar{\lambda}}_2\bar{\lambda}_2 + \dot{\bar{\lambda}}_3\bar{\lambda}_3) \\
& - \Gamma_0(\dot{v}_1(\lambda_1\lambda_0 + \lambda_3\lambda_2) + g_2(\lambda_2\lambda_0 + \lambda_1\lambda_3) + g_3(\lambda_3\lambda_0 + \lambda_2\lambda_1)) \\
& - \bar{\Gamma}_0(\dot{\bar{v}}_1(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3) + \dot{\bar{g}}_2(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_1) + \dot{\bar{g}}_3(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2)) \\
& - \Gamma_1(\dot{v}_0(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) + g_2(\lambda_3\lambda_0 + \lambda_2\lambda_1) + g_3(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1)) \\
& - \bar{\Gamma}_1(\dot{\bar{v}}_0(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3) + g_2(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_0) + g_3(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3)) \\
& + \bar{g}_1(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \lambda_1\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2\lambda_2 + \bar{\lambda}_3\lambda_3) + \bar{g}_2(\bar{\lambda}_3\lambda_0 + \lambda_3\bar{\lambda}_0 + \lambda_2\bar{\lambda}_1 + \lambda_1\bar{\lambda}_2) \\
& + \bar{g}_3(\lambda_0\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_0\lambda_2 + \lambda_1\bar{\lambda}_3 + \lambda_3\bar{\lambda}_1) - \dot{v}_0(\bar{\lambda}_0\lambda_1 + \bar{\lambda}_1\lambda_0 + \bar{\lambda}_3\lambda_2 - \bar{\lambda}_2\lambda_3) \\
& - \bar{\Gamma}_0(\dot{v}_1(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_2) + g_2(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3) + g_3(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1)) \\
& + \bar{g}_1(\lambda_0\bar{\lambda}_1 + \lambda_1\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_3\lambda_2 + \lambda_3\bar{\lambda}_2) + \bar{g}_2(\lambda_0\bar{\lambda}_2 + \lambda_2\bar{\lambda}_0 + \lambda_1\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1\lambda_3) \\
& + \bar{g}_3(\lambda_0\bar{\lambda}_3 + \lambda_3\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_2\lambda_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_1) - \dot{v}_0(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \bar{\lambda}_1\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\lambda_2 + \bar{\lambda}_3\lambda_3) \\
& + \Gamma_0(\dot{v}_1(\bar{\lambda}_1\lambda_0 + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3\lambda_2 + \lambda_3\bar{\lambda}_2) + g_2(\bar{\lambda}_2\lambda_0 + \bar{\lambda}_0\lambda_2 + \bar{\lambda}_1\lambda_3 + \lambda_1\bar{\lambda}_3) \\
& + g_3(\bar{\lambda}_3\lambda_0 + \bar{\lambda}_0\lambda_3 + \bar{\lambda}_2\lambda_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_1) - \dot{v}_0(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \bar{\lambda}_1\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\lambda_2 + \bar{\lambda}_3\lambda_3) \\
& + \bar{g}_1(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2) + \bar{g}_2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + \bar{g}_3(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_2\lambda_1)) \\
& + \Gamma_{00}\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \bar{\Gamma}_{00}(\bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_3\lambda_0 + \bar{\lambda}_0\lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\lambda_3\lambda_0 + \bar{\lambda}_0\lambda_1\bar{\lambda}_2\lambda_3) \\
& + \Gamma_{11}\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \bar{\Gamma}_{11}(\lambda_1\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3\lambda_3 + \lambda_1\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\lambda_2 + \lambda_0\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2\lambda_2 + \lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_3\bar{\lambda}_3) \\
& + \Gamma_{0\bar{0}}(\lambda_0\lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3) - \bar{\Gamma}_{\bar{0}0}(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3) \\
& + \Gamma_{0\bar{0}}(\lambda_1\bar{\lambda}_2\lambda_3\lambda_0 + \bar{\lambda}_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3\lambda_0 + \lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_3\lambda_0) \\
& - \bar{\Gamma}_{\bar{0}0}(\lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\lambda_3\bar{\lambda}_0 + \lambda_0\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_0) \\
& + \Gamma_{1\bar{0}}(\lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_2\lambda_0 - \lambda_1\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\bar{\lambda}_3\lambda_1\lambda_0) \\
& - \bar{\Gamma}_{\bar{0}1}(\lambda_2\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3\lambda_0 + \lambda_3\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3\lambda_1\bar{\lambda}_1) \\
& + \bar{\Gamma}_{01}(\lambda_3\bar{\lambda}_3\lambda_0\bar{\lambda}_1 + \lambda_3\bar{\lambda}_3\lambda_1\bar{\lambda}_0 + \lambda_1\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\lambda_3 + \lambda_2\bar{\lambda}_3\lambda_1\bar{\lambda}_1 \\
& + \lambda_2\bar{\lambda}_2\lambda_0\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_0\lambda_2\bar{\lambda}_3\lambda_0 + \lambda_2\bar{\lambda}_2\lambda_1\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_2\lambda_3\lambda_0), \tag{3.34}
\end{aligned}$$

onde $\Gamma = \partial_{00}F + \partial_{11}F$ e $\bar{\Gamma} = \partial_{\bar{0}\bar{0}}F$.

Sob uma quinta supersimetria \hat{Q}_4 obtemos de novo o vínculo $\Gamma + \bar{\Gamma} = 0$, garantindo a invariância até $\mathcal{N} = 8$.

3.2.2 Não-minimal

Os modelos sigma para os multipletos off-shell de comprimento 3 ($k, 8, 8 - k$) serão obtidas pelas Construções I ou II, dependendo do tipo de representação para $\mathcal{N} = 4$ não-minimal, temos os seguintes casos:

a) Lagrangeanas de primeira ordem são produzidas pela Construção I nos seguintes multipletos:

$$(1, 8, 7), (2, 8, 6)_A, (3, 8, 5)_A, (4, 8, 4)_A, (4, 8, 4)_B \tag{3.35}$$

à exceção do $(4, 8, 4)_B$, todos admitem fontes fermiônicas.

b) No resto dos casos, ou seja, para

$$(2, 8, 6)_B, (3, 8, 5)_B, (4, 8, 4)_C, (4, 8, 4)_D, (5, 8, 3)_A, \quad (3.36)$$

$$(5, 8, 3)_B, (6, 8, 2)_A, (6, 8, 2)_B, (7, 8, 1),$$

a Construção I produz Lagrangeanas de segunda ordem.

Diferentemente do caso 2-minimal, aqui, a presença de fontes fermiônicas não é condição suficiente para determinar quais dos multipletos têm Lagrangeanas de segunda ou primeira ordem obtidas pela Construção I. Porém, como já foi dito, a presença de ao menos um par de parceiros bosônicos (com dimensão de massa 0) é requerida para gerar a função Φ e para termos uma Lagrangeana de segunda ordem. No primeiro caso, a), não existe nenhum.

Construção I

- Com esta construção vamos obter a Lagrangeana associada ao multipletto $(2, 8, 6)_B$ com símbolo de conectividade 8_3 , onde as 4 transformações que atuam em $(\nu_0, \bar{\nu}_0; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i; g_i, \bar{g}_i)$ são:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i \nu_0 &= \lambda_i & \hat{Q}_i \bar{\nu}_0 &= -\bar{\lambda}_i \\ \hat{Q}_i g_j &= -(\delta_{ij} \dot{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk} \dot{\lambda}_k) & \hat{Q}_i \bar{g}_j &= \delta_{ij} \dot{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk} \dot{\lambda}_k \\ \hat{Q}_i \lambda_0 &= -g_i & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_0 &= \bar{g}_i \\ \hat{Q}_i \lambda_j &= \delta_{ij} \dot{\nu}_0 + \varepsilon_{ijk} g_k & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_j &= -(\delta_{ij} \dot{\bar{\nu}}_0 + \varepsilon_{ijk} \bar{g}_k) \\ \hat{Q}_4 \nu_0 &= \bar{\lambda}_0 & \hat{Q}_4 \bar{\nu}_0 &= -\lambda_0 \\ \hat{Q}_4 g_j &= \dot{\lambda}_j & \hat{Q}_4 \bar{g}_j &= -\dot{\lambda}_j \\ \hat{Q}_4 \lambda_0 &= -\dot{\nu}_0 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{\bar{\nu}}_0 \\ \hat{Q}_4 \lambda_j &= -\bar{g}_j & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_j &= g_j \end{aligned} \quad (3.37)$$

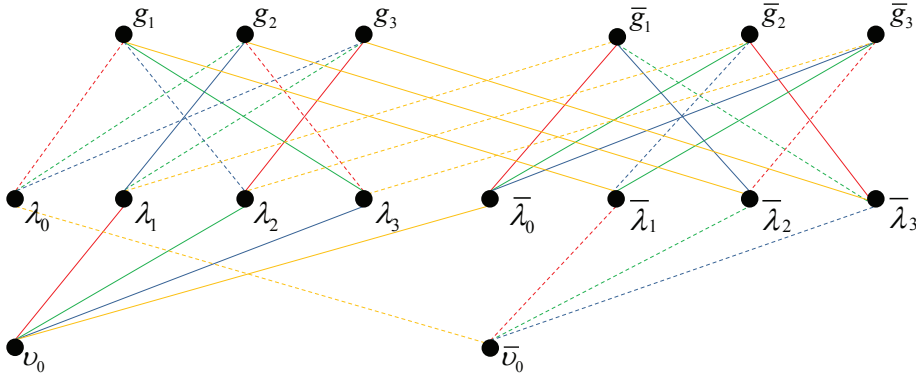


Figura 3.4: Supermultipletto $(2, 8, 6)_B$ com conectividade 8_3 .

O grafo associado a estas transformações é mostrado na Figura 3.4, onde vemos que não possui fontes fermiônicas e além disso tem um parceiro ν_0 e $\bar{\nu}_0$ que vão gerar

a função $\Phi = \partial_{0\bar{0}}F$. Esta função está relacionada com termos de segunda ordem na Lagrangeana.

Portanto, a Lagrangeana pode ser obtida a partir de:

$$\mathcal{L} = \hat{Q}_4 \hat{Q}_3 \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 F(v_0, \bar{v}_0), \quad (3.38)$$

explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{\bar{v}}_0^2 + g_i^2 + \bar{g}_i^2 + \dot{\lambda}_0 \lambda_0 + \dot{\bar{\lambda}}_0 \bar{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_i \lambda_i + \dot{\bar{\lambda}}_i \bar{\lambda}_i) + \\ & \Phi_0[\dot{v}_0(\bar{\lambda}_i \lambda_i + \lambda_0 \bar{\lambda}_0) + g_i(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_i - \lambda_i \lambda_0) + \bar{g}_i(\lambda_0 \bar{\lambda}_i + \lambda_i \bar{\lambda}_0) \\ & - \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} g_i(\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k - \lambda_j \lambda_k) - \varepsilon_{ijk} \lambda_i \bar{\lambda}_j \bar{g}_k] \\ & \Phi_{\bar{0}}[\dot{v}_0(\lambda_i \bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_0 \lambda_0) + \bar{g}_i(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_i - \lambda_i \lambda_0) - g_i(\lambda_0 \bar{\lambda}_i + \lambda_i \bar{\lambda}_0) \\ & + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \bar{g}_i(\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k - \lambda_j \lambda_k) - \varepsilon_{ijk} \lambda_i \bar{\lambda}_j g_k] \\ & \Phi_{00} \frac{\varepsilon_{ijk}}{6} [3\bar{\lambda}_0 \lambda_i \bar{\lambda}_j \lambda_k + \lambda_0 \lambda_i \lambda_j \lambda_k] \\ & \Phi_{\bar{0}\bar{0}} \frac{\varepsilon_{ijk}}{6} [3\lambda_0 \lambda_i \bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k] \\ & - (\Phi_{\bar{0}\bar{0}} + \Phi_{00}) \lambda_0 \bar{\lambda}_0 \lambda_i \bar{\lambda}_i \\ & \Phi_{0\bar{0}} \frac{\varepsilon_{ijk}}{6} [\lambda_i \lambda_j \lambda_k \bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k \lambda_0 - 3(\lambda_0 \lambda_i \lambda_j \bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j \lambda_k)] + \\ & \Omega(\dot{v}_0 \dot{\bar{v}}_0 + \lambda_0 \dot{\bar{\lambda}}_0 + \lambda_i \dot{\bar{\lambda}}_i + g_i \bar{g}_i) \\ & - \Omega_0(\dot{v}_0 \bar{\lambda}_0 \lambda_0 + g_i \bar{\lambda}_0 \lambda_i) + \Omega_{\bar{0}}(\dot{\bar{v}}_0 \bar{\lambda}_i \lambda_i + \bar{g}_i \bar{\lambda}_i \lambda_0) \\ & - \frac{\varepsilon_{ijk}}{6} (\Omega_{00} \bar{\lambda}_0 \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \Omega_{\bar{0}\bar{0}} \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k \lambda_0) \\ & + \Omega_{0\bar{0}} \lambda_0 \bar{\lambda}_0 \lambda_i \bar{\lambda}_i \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde

$$\Omega = \partial_{00}F + \partial_{\bar{0}\bar{0}}F, \quad \Phi = \partial_{0\bar{0}}F. \quad (3.40)$$

Note que esta Lagrangeana é diferente do caso 2-minimal Eq.(3.21) para $\mathcal{N} = 4$. No entanto, impondo a quinta supersimetria \hat{Q}_4 dada por

$$\begin{aligned} \hat{Q}_4 v_0 &= \lambda_0 & \hat{Q}_4 \bar{v}_0 &= \bar{\lambda}_0 \\ \hat{Q}_4 g_i &= \dot{\lambda}_i & \hat{Q}_4 \bar{g}_i &= \dot{\bar{\lambda}}_i \\ \hat{Q}_4 \lambda_0 &= \dot{v}_0 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{\bar{v}}_0 \\ \hat{Q}_4 \lambda_j &= g_j & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_j &= \bar{g}_j \end{aligned} \quad (3.41)$$

aplicada na Lagrangeana (Eq. (3.39)) obtemos os vínculos

$$\square\Phi = 0, \quad \Omega = 0, \quad (3.42)$$

que garantem uma invariância supersimétrica até $\mathcal{N} = 8$. Considerando estes vínculos obtemos uma Lagrangeana equivalente com a obtida no caso 2-minimal (ver Eq.(3.24), em concordância com fato de que em $\mathcal{N} = 8$ temos a convergência das representações

(com o mesmo número de supercampos) em uma única representação de acordo com o símbolo de conectividade.

• Na construção da Lagrangeana para o multipletto $(3, 8, 5)_B$ podem ser usadas as quatro transformações supersimétricas da tabela (3.32); mas neste caso vamos ter que

$$\mathcal{L} = \hat{Q}_4 \hat{Q}_3 \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 F(v_0, v_1, \bar{v}_0) \quad (3.43)$$

O grafo correspondente é dado na Figura 3.5 onde os únicos parceiros são v_0 e \bar{v}_0 , geradores da função prepotencial $\Phi = \partial_{0\bar{0}} F$ na produção de termos de segunda ordem na Lagrangeana.

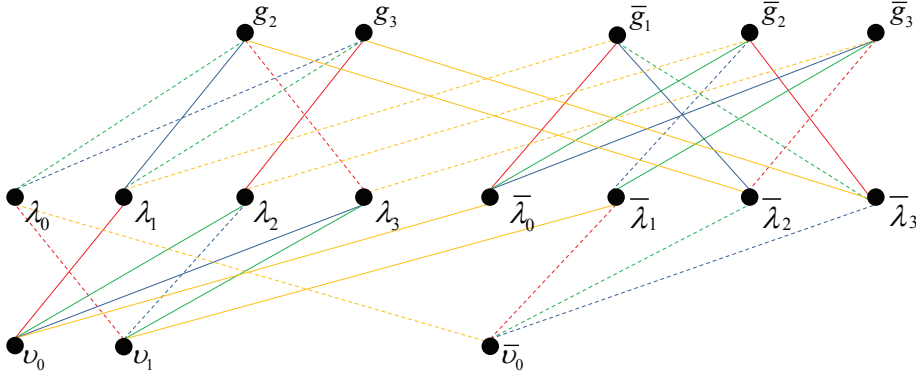


Figura 3.5: $(3, 8, 5)_B$ não-minimal $4_3 + 4_2$

Então, a Lagrangeana obtida é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{v}_0^2 + g_2^2 + g_3^2 + \bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2) \\ & -\Phi(\dot{\lambda}_0 \lambda_0 + \dot{\lambda}_1 \lambda_1 + \dot{\lambda}_2 \lambda_2 + \dot{\lambda}_3 \lambda_3 + \dot{\bar{\lambda}}_0 \bar{\lambda}_0 + \dot{\bar{\lambda}}_1 \bar{\lambda}_1 + \dot{\bar{\lambda}}_2 \bar{\lambda}_2 + \dot{\bar{\lambda}}_3 \bar{\lambda}_3) \\ & +\Phi_0(-\dot{v}_1(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \lambda_0 - \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 + \lambda_2 \lambda_3) - g_2(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 \lambda_0 - \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 + \lambda_3 \lambda_1) \\ & -g_3(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_3 - \lambda_3 \lambda_0 - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 + \lambda_1 \lambda_2) - \bar{g}_1(\lambda_0 \bar{\lambda}_1 + \lambda_1 \bar{\lambda}_0 + \lambda_3 \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 \bar{\lambda}_3) \\ & -\bar{g}_2(\lambda_0 \bar{\lambda}_2 + \lambda_2 \bar{\lambda}_0 + \lambda_1 \bar{\lambda}_3 - \lambda_3 \bar{\lambda}_1) - \bar{g}_3(\lambda_0 \bar{\lambda}_3 + \lambda_3 \bar{\lambda}_0 + \lambda_2 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \bar{\lambda}_2) \\ & +\dot{v}_0(-\bar{\lambda}_0 \lambda_0 + \bar{\lambda}_1 \lambda_1 + \bar{\lambda}_2 \lambda_2 + \bar{\lambda}_3 \lambda_3)) \\ & +\Phi_1(\bar{g}_1(\lambda_0 \bar{\lambda}_0 + \lambda_1 \bar{\lambda}_1 + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 + \lambda_3 \bar{\lambda}_3) - \bar{g}_2(\lambda_1 \bar{\lambda}_2 + \lambda_2 \bar{\lambda}_1 - \lambda_0 \bar{\lambda}_3 + \lambda_3 \bar{\lambda}_0) \\ & +\bar{g}_3(\lambda_2 \bar{\lambda}_0 - \lambda_0 \bar{\lambda}_2 - \lambda_1 \bar{\lambda}_3 - \lambda_3 \bar{\lambda}_1) - g_2(\lambda_0 \lambda_3 + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_0 + \lambda_1 \lambda_2 + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2) \\ & +g_3(\lambda_0 \lambda_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 + \lambda_3 \lambda_1 + \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_0) + \dot{v}_0(\lambda_0 \lambda_1 + \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1) + \dot{v}_1(\lambda_3 \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 \bar{\lambda}_3)) \\ & +\Phi_{\bar{0}}(-\bar{g}_1(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \lambda_0 + \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 - \lambda_2 \lambda_3) - \bar{g}_2(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 \lambda_0 + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 - \lambda_3 \lambda_1) \\ & -\bar{g}_3(\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_3 - \lambda_3 \lambda_0 + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \lambda_1 \lambda_2) - g_2(\lambda_1 \bar{\lambda}_3 - \lambda_3 \bar{\lambda}_1 - \lambda_0 \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 \bar{\lambda}_0) \\ & -g_3(\lambda_2 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \bar{\lambda}_2 - \lambda_0 \bar{\lambda}_3 - \lambda_3 \bar{\lambda}_0) + \dot{v}_0(\bar{\lambda}_0 \lambda_0 - \bar{\lambda}_1 \lambda_1 - \bar{\lambda}_2 \lambda_2 - \bar{\lambda}_3 \lambda_3) \\ & -\dot{v}_1(\lambda_3 \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 \bar{\lambda}_3 - \lambda_0 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \bar{\lambda}_0)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Phi_{00}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_0 - \bar{\lambda}_0\lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_0\lambda_3\bar{\lambda}_2\lambda_1 - \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3) \\
& +\Phi_{11}(\lambda_1\bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_2 + \lambda_0\bar{\lambda}_3\lambda_2\lambda_1 + \lambda_0\lambda_3\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3\lambda_3\lambda_1\bar{\lambda}_1 - \lambda_0\lambda_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_1 \\
& - \bar{\lambda}_0\lambda_0\bar{\lambda}_3\lambda_3 - \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3 + \bar{\lambda}_0\lambda_0\lambda_2\bar{\lambda}_2) \\
& +\Phi_{\bar{0}\bar{0}}(\lambda_0\lambda_3\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1 + \lambda_0\bar{\lambda}_3\lambda_2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1 + \lambda_0\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_2\lambda_1) \\
& +\Phi_{01}(\bar{\lambda}_2\lambda_3\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_0\lambda_0\lambda_2\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_0\lambda_2\bar{\lambda}_2\lambda_1 + \lambda_1\bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3\lambda_3\lambda_1 \\
& + \bar{\lambda}_0\lambda_0\bar{\lambda}_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1 - \lambda_0\bar{\lambda}_3\lambda_3\bar{\lambda}_1) \\
& +\Phi_{\bar{0}\bar{0}}(\lambda_0\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1\bar{\lambda}_2\lambda_3 + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\lambda_3 + \bar{\lambda}_0\lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_3 \\
& + \lambda_0\lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_1) \\
& +\Phi_{1\bar{0}}(\lambda_1\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_0\lambda_0\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_2 + \lambda_0\lambda_2\bar{\lambda}_2\lambda_1 + \bar{\lambda}_0\lambda_2\lambda_2\lambda_1 - \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_3\lambda_3\bar{\lambda}_1 \\
& - \lambda_0\bar{\lambda}_3\lambda_3\lambda_1 + \bar{\lambda}_0\lambda_0\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3) \\
& -\Omega(\dot{v}_0\dot{v}_0 + \dot{v}_1\bar{g}_1 + g_2\bar{g}_2 + g_3\bar{g}_3) - \Omega(\lambda_0\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_1 + \lambda_2\dot{\lambda}_2 + \lambda_3\dot{\lambda}_3) \\
& +\Omega_0(\dot{v}_1\bar{\lambda}_0\lambda_1 + g_2\bar{\lambda}_0\lambda_2 + g_3\bar{\lambda}_0\lambda_3 - \bar{g}_1\lambda_2\lambda_3 - \bar{g}_2\lambda_3\lambda_1 - \bar{g}_3\lambda_1\lambda_2 - \dot{v}_0\bar{\lambda}_0\lambda_0) \\
& -\Omega_{\bar{0}}(\dot{v}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 + g_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_1 + g_3\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \bar{g}_1\bar{\lambda}_1\lambda_0 + \bar{g}_2\bar{\lambda}_2\lambda_0 + \bar{g}_3\bar{\lambda}_3\lambda_0 \\
& + \dot{v}_0(\bar{\lambda}_1\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\lambda_2 + \bar{\lambda}_3\lambda_3)) \\
& -\Omega_1(g_2\lambda_2\bar{\lambda}_1 + g_3\lambda_3\bar{\lambda}_1 + \bar{g}_2\lambda_0\lambda_3 + \bar{g}_3\lambda_2\lambda_0 - \dot{v}_0\bar{\lambda}_1\lambda_0 - \dot{v}_1\bar{\lambda}_1\lambda_1 - \dot{v}_0\lambda_2\lambda_3) \\
& +\Omega_{1\bar{0}}(\lambda_0\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\lambda_2 + \lambda_0\bar{\lambda}_3\lambda_3\bar{\lambda}_1) \\
& +\Omega_{00}\bar{\lambda}_0\lambda_1\lambda_2\lambda_2 + \Omega_{11}\lambda_0\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3 + \Omega_{\bar{0}\bar{0}}\lambda_0\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 \\
& +\Omega_{01}(\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\bar{\lambda}_1\lambda_2\lambda_3),
\end{aligned}$$

onde, neste caso temos

$$\Gamma = \partial_{00}F + \partial_{11}F, \quad \bar{\Gamma} = \partial_{\bar{0}\bar{0}}F, \quad \Phi = \partial_{0\bar{0}}F. \quad (3.44)$$

A quinta supersimetria, Q_4 , gera os seguintes vínculos:

$$\square\Phi = 0, \quad \Omega = 0. \quad (3.45)$$

Portanto, garante invariância supersimétrica ate $\mathcal{N} = 8$.

• Agora apresentaremos a ação invariante sob $\mathcal{N} = 4$ do multipletto $(4, 8, 4)_B$ com símbolo de conectividade 4_3+4_1 . Seus campos componentes são $(v_0, v_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i; \bar{g}_0, \bar{g}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) e as transformações supersimétricas,

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_i v_0 &= \lambda_i & \hat{Q}_i \bar{g}_0 &= -\dot{\lambda}_i \\
\hat{Q}_i v_j &= -(\delta_{ij}\lambda_0 + \varepsilon_{ijk}\lambda_k) & \hat{Q}_i \bar{g}_j &= \delta_{ij}\dot{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{\lambda}_k \\
\hat{Q}_i \lambda_0 &= -\dot{v}_i & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_0 &= \bar{g}_i \\
\hat{Q}_i \lambda_j &= \delta_{ij}\dot{v}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{v}_k & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_j &= -(\delta_{ij}\bar{g}_0 + \varepsilon_{ijk}\bar{g}_k) \\
\hat{Q}_4 v_0 &= \bar{\lambda}_0 & \hat{Q}_4 \bar{g}_0 &= -\dot{\lambda}_0 \\
\hat{Q}_4 v_j &= \bar{\lambda}_j & \hat{Q}_4 \bar{g}_j &= -\dot{\lambda}_j \\
\hat{Q}_4 \lambda_0 &= -\bar{g}_0 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{v}_0 \\
\hat{Q}_4 \lambda_j &= -\bar{g}_j & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_j &= \dot{v}_j
\end{aligned} \quad (3.46)$$

No seu grafo associado (ver Fig. 3.6) podemos ver que o mesmo não contém nenhuma fonte fermiônica; mas não possui nenhum parceiro bosônico de dimensão de massa zero

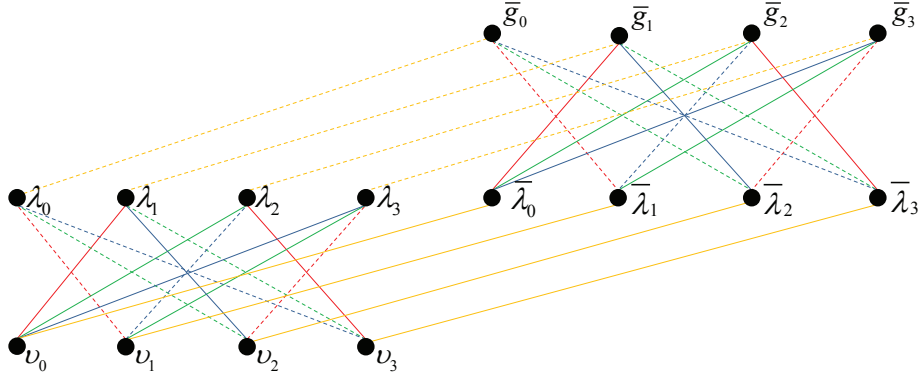


Figura 3.6: Supermultipeto $(4, 8, 4)_B$ com conectividade $4_3 + 4_1$

que possa gerar a função Φ . Portanto, como veremos adiante, não é possível obter uma Lagrangeana de segunda ordem por meio desta construção.

Neste caso temos a Lagrangeana manifestamente invariante sob $\mathcal{N} = 4$, dada por

$$\mathcal{L} = \hat{Q}_4 \hat{Q}_3 \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 F(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad (3.47)$$

explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Omega(\dot{\nu}_0 \bar{g}_0 + \dot{\nu}_i \bar{g}_i + \lambda_0 \dot{\bar{\lambda}}_0 + \lambda_k \dot{\bar{\lambda}}_k) \\ & \varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{g}_k \lambda_0 \lambda_i - \Omega_i \dot{\nu}_0 \bar{\lambda}_i \lambda_0 - \Omega_0 \dot{\nu}_i \bar{\lambda}_0 \lambda_i \\ & \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} (\Omega_0 \bar{g}_k - \Omega_k \bar{g}_0) \lambda_i \lambda_j - \Omega_j \dot{\nu}_i \bar{\lambda}_j \lambda_i - \Omega_0 \dot{\nu}_0 \bar{\lambda}_0 \lambda_0 \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{0k} \lambda_i \lambda_j \lambda_0 \bar{\lambda}_0 - \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \delta_{pq} \Omega_{pk} \lambda_0 \lambda_i \lambda_j \bar{\lambda}_q \\ & - \frac{\varepsilon_{ijk}}{6} (\Omega_{00} \bar{\lambda}_0 - \Omega_{0p} \lambda_p) \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde

$$\Omega = \partial_{00} F + \partial_{ii} F. \quad (3.49)$$

Podemos ver que esta Lagrangeana é de primeira ordem e sob uma quinta supersimetria ela não existe, pois o vínculo gerado é tal que $\Omega = 0$. Na seguinte subseção vamos ver como, para este e os outros multipletos do (3.35), pela Construção II, podemos obter ações de segunda ordem para $\mathcal{N} = 4$ e oxidáveis até $\mathcal{N} = 8$.

Cabe salientar que a presença de bosons no lado direito e esquerdo de um grafo não é sempre garantia de termos uma ação de segunda ordem. Por exemplo, para esta mesma conectividade $4_3 + 4_1$ consideremos o grafo da Figura 3.7, facilmente notamos a ausência de parceiros que possam gerar a função Φ . Portanto, vamos obter uma Lagrangeana equivalente a (3.48) que é de primeira ordem.

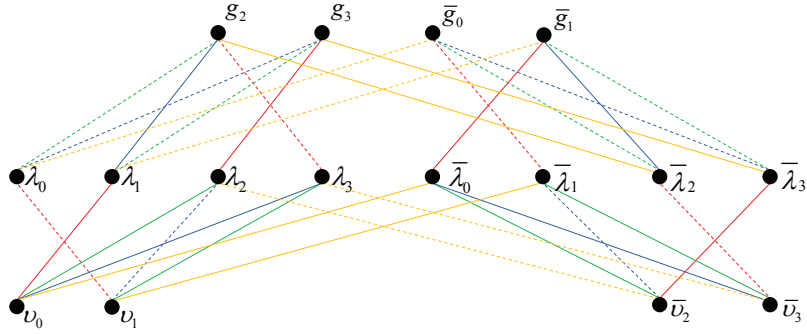


Figura 3.7: Supermultipeto $(4, 8, 4)_B$ com conectividade $4_3 + 4_1$

Construção II

Este método foi descrito no Capítulo 1 e é geralmente usado para construção de ações de segunda ordem para multipletos do tipo (3.35) e (3.18). A aplicação desta construção em (3.36) produz a mesma ação que as obtidas pela Construção I.

• A aplicação da Construção II no multipeto $(4, 8, 4)_B$ induz uma teoria invariante $\mathcal{N} = 4$, obtida desde a Lagrangeana de segunda ordem do multipeto raiz $(8, 8)_{nm}$ não-minimal, Eq. (3.9), no qual será expresso em termos de duas funções independentes, $\Phi(v_0, v_i)$ e $\Omega(v_0, v_i)$. No entanto, garantir a invariância sob $\mathcal{N} = 4$ só é possível se for satisfeito o seguinte vínculo

$$\Phi_{00} + \Phi_{ii} = 0. \quad (3.50)$$

Este fato particular não está presente para ações com $\mathcal{N} = 4$ derivadas a partir dos multipletos (3.36).

Então, a Lagrangeana é explicitamente dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{g}_0^2 + \dot{g}_i^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\lambda}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i + \dot{\lambda}_i\bar{\lambda}_i) \\ & + \varepsilon_{ijk}\Phi_k\dot{v}_j(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\lambda_0) + (\Phi_0\dot{v}_i - \Phi_i\dot{v}_0)(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i - \lambda_i\lambda_0) \\ & - \varepsilon_{ijk}\Phi_j\dot{g}_k(\lambda_0\bar{\lambda}_i - \lambda_i\bar{\lambda}_0) + (\Phi_0\dot{g}_i + \Phi_i\dot{g}_0)(\lambda_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\bar{\lambda}_0) \\ & + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\Phi_i\dot{v}_0 - \Phi_0\dot{v}_i)(\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k - \lambda_j\lambda_k) + \frac{1}{2}(\Phi_j\dot{v}_k - \Phi_k\dot{v}_j)(\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + \lambda_j\lambda_k) \\ & (\Phi_0\dot{g}_0 + \Phi_j\dot{g}_j)(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \bar{\lambda}_k\lambda_k) - \Phi_i\dot{g}_j(\bar{\lambda}_i\lambda_j - \lambda_i\bar{\lambda}_j) - \Phi_0\dot{g}_0(\bar{\lambda}_0\lambda_0 - \lambda_0\bar{\lambda}_0) \\ & + \varepsilon_{ijk}\lambda_i\bar{\lambda}_j(\Phi_k\dot{g}_0 - \Phi_0\dot{g}_k) + (\varepsilon_{ijk}\Phi_{0k} - \Phi_{ij})\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j \\ & + \Phi_{0j}(\bar{\lambda}_0\lambda_j - \lambda_0\bar{\lambda}_j)\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}\Phi_{kp}(\bar{\lambda}_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q - \lambda_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_q) \\ & + \Phi_{jk}\bar{\lambda}_j\lambda_k\lambda_i\bar{\lambda}_i - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta_{pq}\Phi_{0p}\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k\bar{\lambda}_q \\ & - \Phi_{00}\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}[\Phi_{pp}(\lambda_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) + \Phi_{00}(\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\lambda_k)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}[(\Phi_{00} + \Phi_{pp})\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_0] \\
& +\Omega(\dot{v}_0\bar{g}_0 + \dot{v}_i\bar{g}_i) + \Omega(\lambda_0\dot{\bar{\lambda}}_0 + \lambda_k\dot{\bar{\lambda}}_k) \\
& +\varepsilon_{ijk}\Omega_j\bar{g}_k\lambda_0\lambda_i - \Omega_i\dot{v}_0\bar{\lambda}_i\lambda_0 - \Omega_0\dot{v}_i\bar{\lambda}_0\lambda_i \\
& +\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\Omega_0\bar{g}_k - \Omega_k\bar{g}_0)\lambda_i\lambda_j - \Omega_j\dot{v}_i\bar{\lambda}_j\lambda_i - \Omega_0\dot{v}_0\bar{\lambda}_0\lambda_0 \\
& -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{0k}\lambda_i\lambda_j\lambda_0\bar{\lambda}_0 - \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\delta_{pq}\Omega_{pk}\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_q \\
& -\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\Omega_{00}\bar{\lambda}_0 - \Omega_{0p}\lambda_p)\lambda_i\lambda_j\lambda_k
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Note que parte desta Lagrangeana (de primeira ordem) que contém a função Ω é encontrada pela Construção I (3.48).

Impondo uma quinta supersimetria $\mathcal{N} = 5$ na Lagrangeana, encontra-se o seguinte vínculo $\Omega = 0$. A ação resultante é automaticamente invariante sob $\mathcal{N} = 8$.

Todas as Lagrangeanas obtidas pela Construção II dos multipletos de (3.35) têm as mesmas características.

• Por fim temos o multipleto $(1, 8, 7)$ não-minimal com campos componentes dado por $(v_0; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i; g_i, \bar{g}_0, \bar{g}_i)$ e as transformações supersimétricas que agem nele são:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_i v_0 &= \lambda_i & \hat{Q}_i \bar{g}_0 &= -\dot{\bar{\lambda}}_i \\
\hat{Q}_i g_j &= -(\delta_{ij}\dot{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{\lambda}_k) & \hat{Q}_i \bar{g}_j &= \delta_{ij}\dot{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{\lambda}_k \\
\hat{Q}_i \lambda_0 &= -g_i & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_0 &= \bar{g}_i \\
\hat{Q}_i \lambda_j &= \delta_{ij}\dot{v}_0 + \varepsilon_{ijk}g_k & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_j &= -(\delta_{ij}\bar{g}_0 + \varepsilon_{ijk}\bar{g}_k) \\
\hat{Q}_4 v_0 &= \bar{\lambda}_0 & \hat{Q}_4 \bar{g}_0 &= -\dot{\lambda}_0 \\
\hat{Q}_4 g_j &= \dot{\lambda}_j & \hat{Q}_4 \bar{g}_j &= -\dot{\lambda}_j \\
\hat{Q}_4 \lambda_0 &= -\bar{g}_0 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{v}_0 \\
\hat{Q}_4 \lambda_j &= -\bar{g}_j & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_j &= g_j
\end{aligned} \tag{3.52}$$

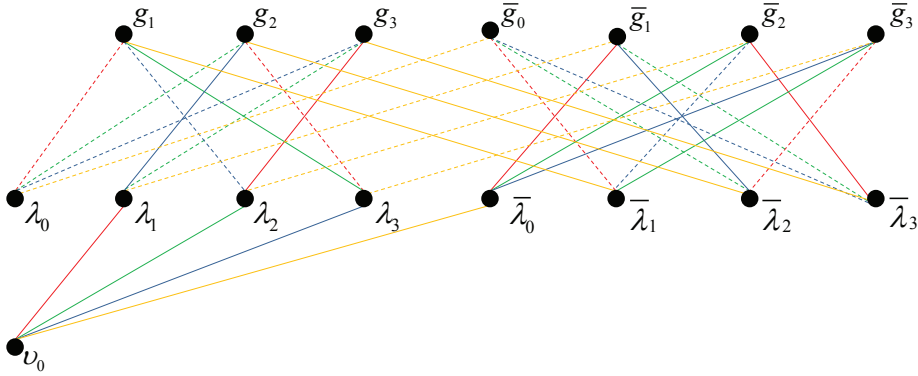


Figura 3.8: $(1, 8, 7) 4_4 + 4_3$

Na Figura 3.8 é mostrado o grafo associado, onde pode-se ver que além de ter 4 fontes fermiônicas não possui nenhum parceiro bosônico. Portanto, só é possível obter a Lagrangeana pela Construção II. Temos então que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Phi(\dot{v}_0^2 + \bar{g}_0^2 + g_i^2 + \bar{g}_i^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i + \dot{\bar{\lambda}}_i\bar{\lambda}_i) \\
& + \Phi_0[\bar{g}_0(\lambda_0\bar{\lambda}_0 - \lambda_i\bar{\lambda}_i) + g_i(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i - \lambda_i\lambda_0) + \bar{g}_i(\lambda_0\bar{\lambda}_i + \lambda_i\bar{\lambda}_0) \\
& - \varepsilon_{ijk}(\bar{g}_i\bar{\lambda}_j\lambda_k + \frac{g_i}{2}(\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k - \lambda_j\lambda_k))] \\
& - \Phi_{00}(\lambda_0\bar{\lambda}_0\lambda_i\bar{\lambda}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\lambda_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\lambda_k - \frac{\varepsilon_{ijk}}{6}\lambda_0\lambda_i\lambda_j\lambda_k) \\
& + \Omega(\dot{v}_0\bar{g}_0 + \lambda_0\dot{\bar{\lambda}}_0 + \lambda_i\dot{\bar{\lambda}}_i + g_i\bar{g}_i) \\
& + \Omega_0[(\dot{v}_0\lambda_0 + g_i\lambda_i)\bar{\lambda}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\bar{g}_i\lambda_j\lambda_k] \\
& + \Omega_{00}\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0, \tag{3.53}
\end{aligned}$$

onde $\Phi(v_0)$, $\Omega(v_0)$ são funções independentes. Para termos uma invariância sob $\mathcal{N} = 4$ precisamos ter que

$$\square\Phi = 0. \tag{3.54}$$

Implementando na Lagrangeana uma invariância supersimétrica $\mathcal{N} = 5$ se produz o seguinte vínculo: $\Omega = 0$, garantindo a invariância até $\mathcal{N} = 8$ supersimetrias.

3.3 Multipleteo $(4, 16, 12)$ com $\mathcal{N} = 5$ não-minimal

Finalmente vamos apresentar o modelo sigma para o multipleteo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i, \psi_0, \psi_i, \bar{\psi}_0, \bar{\psi}_i; h_i, \bar{h}_i, g_i, \bar{g}_i)$$

($i, j, k = 1, 2, 3$) com símbolo de conectividade $12_4 + 4_3$ para $\mathcal{N} = 5$ não-minimal.

Estas transformações supersimétricas são dadas por

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_i x_1 &= \lambda_i & \hat{Q}_i h_j &= -(\delta_{ij}\dot{\lambda}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{\lambda}_k) \\
\hat{Q}_i x_2 &= -\bar{\lambda}_i & \hat{Q}_i \bar{h}_j &= \delta_{ij}\dot{\bar{\lambda}}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{\bar{\lambda}}_k \\
\hat{Q}_i \lambda_0 &= -h_i & \hat{Q}_i \lambda_j &= \delta_{ij}\dot{x}_1 + \varepsilon_{ijk}\dot{h}_k \\
\hat{Q}_i \bar{\lambda}_0 &= \bar{h}_i & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_j &= -(\delta_{ij}\dot{x}_2 + \varepsilon_{ijk}\dot{\bar{h}}_k) \\
\hat{Q}_i \psi_0 &= g_i & \hat{Q}_i \psi_j &= -(\delta_{ij}\dot{x}_3 + \varepsilon_{ijk}\dot{g}_k) \\
\hat{Q}_i \bar{\psi}_0 &= -\bar{g}_i & \hat{Q}_i \bar{\psi}_j &= \delta_{ij}\dot{x}_4 + \varepsilon_{ijk}\dot{\bar{g}}_k \\
\hat{Q}_i x_3 &= -\psi_i & \hat{Q}_i g_j &= \delta_{ij}\dot{\psi}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{\psi}_k \\
\hat{Q}_i x_4 &= -\bar{\psi}_i & \hat{Q}_i \bar{g}_j &= -(\delta_{ij}\dot{\bar{\psi}}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{\bar{\psi}}_k)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_4 x_1 &= \bar{\lambda}_0 & \hat{Q}_4 h_i &= \dot{\bar{\lambda}}_i & \hat{Q}_4 x_2 &= -\lambda_0 & \hat{Q}_4 \bar{h}_i &= -\dot{\lambda}_i \\
\hat{Q}_4 \lambda_0 &= -\dot{x}_2 & \hat{Q}_4 \lambda_i &= -\dot{\bar{h}}_i & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{x}_1 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_i &= h_i \\
\hat{Q}_4 \psi_0 &= \dot{x}_4 & \hat{Q}_4 \psi_i &= \dot{\bar{g}}_i & \hat{Q}_4 \bar{\psi}_0 &= -\dot{x}_3 & \hat{Q}_4 \bar{\psi}_i &= -g_i \\
\hat{Q}_4 x_3 &= -\bar{\psi}_0 & \hat{Q}_4 g_i &= -\dot{\psi}_i & \hat{Q}_4 x_4 &= \psi_0 & \hat{Q}_4 \bar{g}_i &= \dot{\psi}_i
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_9 x_1 &= \psi_0 & \hat{Q}_9 h_i &= \dot{\psi}_i & \hat{Q}_9 x_2 &= \bar{\psi}_0 & \hat{Q}_9 \bar{h}_i &= \dot{\bar{\psi}}_i \\
\hat{Q}_9 \lambda_0 &= -\dot{x}_3 & \hat{Q}_9 \lambda_i &= -g_i & \hat{Q}_9 \bar{\lambda}_0 &= -\dot{x}_4 & \hat{Q}_9 \bar{\lambda}_i &= -\dot{\bar{g}}_i \\
\hat{Q}_9 \psi_0 &= \dot{x}_1 & \hat{Q}_9 \psi_i &= h_i & \hat{Q}_9 \bar{\psi}_0 &= \dot{x}_2 & \hat{Q}_9 \bar{\psi}_i &= \dot{\bar{h}}_i \\
\hat{Q}_9 x_3 &= -\lambda_0 & \hat{Q}_9 g_i &= -\dot{\lambda}_i & \hat{Q}_9 x_4 &= -\bar{\lambda}_0 & \hat{Q}_9 \bar{g}_i &= -\dot{\bar{\lambda}}_i.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

O grafo associado a estas transformações é mostrado na Figura 3.9, onde podemos ver que a quinta supersimetria \hat{Q}_9 realiza a conexão entres os dois multipletos não-minimais da subálgebra $\mathcal{N} = 4$, $(2, 8, 6) \oplus (2, 8, 6)$.

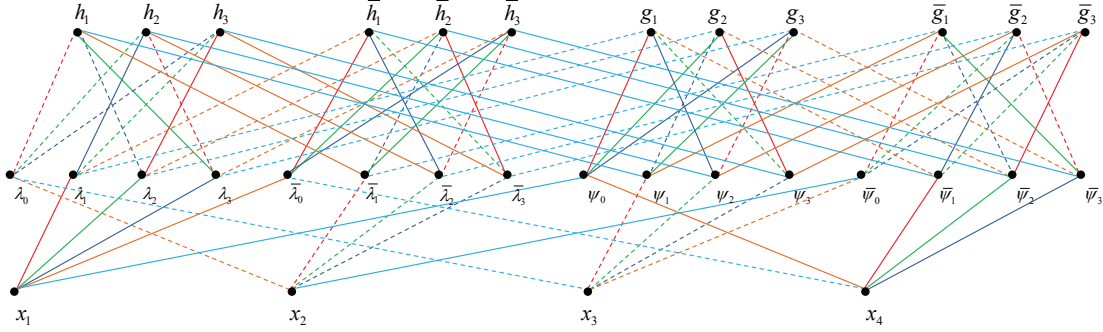


Figura 3.9: Supermultipletto $(4, 16, 12)$ com conectividade $12_4 + 4_3$

A Lagrangeana manifestamente invariante perante $\mathcal{N} = 4$ neste caso é produzida por

$$\mathcal{L} = \hat{Q}_4 \hat{Q}_3 \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 F(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{3.58}$$

Impondo nesta Lagrangeana uma invariância sob a quinta supersimetria \hat{Q}_9 ($\mathcal{N} = 5$) os vínculos obtidos são:

$$\partial_{13} F + \partial_{24} F = 0, \quad \partial_{12} F - \partial_{34} F = 0, \quad \square F = 0 \tag{3.59}$$

Considerando estes vínculos podemos simplificar a Lagrangeana invariante sob $\mathcal{N} = 5$, explicitamente mostramos na equação (B.1).

Agora consideraremos uma sexta transformação supersimétrica dada por,

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_4 x_1 &= \lambda_0 & \hat{Q}_4 h_i &= \dot{\lambda}_i & \hat{Q}_4 x_2 &= \bar{\lambda}_0 & \hat{Q}_4 \bar{h}_i &= \dot{\bar{\lambda}}_i \\
\hat{Q}_4 \lambda_0 &= \dot{x}_1 & \hat{Q}_4 \lambda_i &= h_i & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{x}_2 & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_i &= \dot{\bar{h}}_i \\
\hat{Q}_4 \psi_0 &= \dot{x}_3 & \hat{Q}_4 \psi_i &= g_i & \hat{Q}_4 \bar{\psi}_0 &= \dot{x}_4 & \hat{Q}_4 \bar{\psi}_i &= \dot{\bar{g}}_i \\
\hat{Q}_4 x_3 &= \psi_0 & \hat{Q}_4 g_i &= \dot{\psi}_i & \hat{Q}_4 x_4 &= \bar{\psi}_0 & \hat{Q}_4 \bar{g}_i &= \dot{\bar{\psi}}_i.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Impondo uma invariância na Lagrangeana (3.58) sob esta transformação \hat{Q}_4 obtemos os seguintes vínculos,

$$\partial_{11} F + \partial_{22} F = 0, \quad \partial_{33} F + \partial_{44} F = 0, \quad \partial_{14} F + \partial_{23} F = 0. \tag{3.61}$$

Se mais adiante, desta mesma forma, aplicarmos uma sétima, oitava e nona supersimetrias, \hat{Q}_i ($i = 1, 2, 3$), obteremos os vínculos

$$\partial_{11}F + \partial_{22}F = 0, \quad \partial_{33}F + \partial_{44}F = 0, \quad \partial_{13}F + \partial_{24}F = 0. \quad (3.62)$$

Note que de acordo com esses vínculos fundamentais eles estão embutidos nos vínculos de (3.59) e (3.61), quer dizer que, com uma supersimetria $\mathcal{N} = 6$ controlamos os vínculos fundamentais até $\mathcal{N} = 9$. Portanto, a Lagrangeana (B.1) com estes vínculos na função prepotencial é invariante até $\mathcal{N} = 9$ supersimetrias.

Neste caso foi usada a Construção I para obtermos a ação, mas nada impede a construção de ações invariantes por meio da Construção II, que consiste em obtermos a partir da Lagrangeana associada ao multipletto $(16, 16, 0)$. Neste caso, para aqueles multipletos que produzem ações de primeira ordem com a Construção I.

Um dos multipletos deste tipo que tem muita relevância é $(9, 16, 7)$, já que é obtido como resultado da redução dimensional da teoria de super Yang-Mills quadridimensional [63, 64]. Nosso formalismo é perfeitamente capaz de estudar este multipletto.

Capítulo 4

Extensão supersimétrica do segundo mapeamento de Hopf

Neste Capítulo mostraremos uma aplicação dos capítulos anteriores no processo de redução dimensional via o grupo $SU(2)$ no espaço alvo \mathbb{R}^8 para \mathbb{R}^5 por meio do segundo mapeamento de Hopf e a supersimetria da mesma. Como resultado da redução mostraremos um sistema dinâmico com a presença de um Monopolo de Yang que é invariante sob $\mathcal{N} = 5$ ou $\mathcal{N} = 4$ geradores supersimétricos que vão comutar com os geradores de $SU(2)$.

4.1 Mapeamentos de Hopf

Os mapeamentos de Hopf, chamados também de fibrações de Hopf, são fibrações de uma esfera sobre outra esfera, $S^{2p-1}/S^{p-1} = S^p$ com $p = 1, 2, 4, 8$. Estas fibrações manifestam a existência de números reais ($p = 1$), complexos ($p = 2$), quatérnions ($p = 4$) e octônions ($p = 8$). Os quatro mapeamentos de Hopf podem ser representados pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{2k-1} & \longrightarrow & S^k \end{array}$$

que conecta dois espaços Euclidianos (\mathbb{R}) e duas esferas (S).

Para os nossos propósitos consideramos o segundo mapeamento de Hopf, $p = 4$. Para descrevê-los em termos explícitos consideremos as funções $\mathbf{x}(v_\alpha, \bar{v}_\alpha)$, $x_5(v_\alpha, \bar{v}_\alpha)$

$$\mathbf{x} = 2\bar{\mathbf{u}}_1 \mathbf{u}_2, \quad x_5 = \bar{\mathbf{u}}_1 \mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 \mathbf{u}_2, \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ são números quaterniônicos. Estes números vamos considerá-los como coordenadas do espaço \mathbb{R}^8 . x_5 é um número real, enquanto \mathbf{x} é quaterniônico, então temos

$$\mathbf{x} \equiv x_4 + \mathbf{e}_k x_k, \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{e}_k = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ satisfazem a relação

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \quad (4.3)$$

As funções (x_5, \mathbf{x}) parametrizam o espaço 5-dimensional \mathbb{R}^5 . Além disso, estas funções são invariantes sob as transformações

$$\mathbf{u}_\alpha \rightarrow \mathbf{G}\mathbf{u}_\alpha, \quad \bar{\mathbf{G}}\mathbf{G} = 1 \quad (4.4)$$

onde

$$\mathbf{G} = \lambda_0 + \mathbf{i}\lambda_1 + \mathbf{j}\lambda_2 + \mathbf{k}\lambda_3 \quad (4.5)$$

com a condição

$$|\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + |\lambda_3|^2 = 1. \quad (4.6)$$

Portanto, \mathbf{G} parametriza a esfera S^3 de raio 1. Agora, tomando em conta o isomorfismo entre a esfera e o grupo, $S^3 = SU(2)$, concluímos que (4.1) é invariante sob o grupo de transformações \mathbf{G} ($G = SU(2)$). Porém define a fibração

$$\mathbb{R}^8/S^3 = \mathbb{R}^5. \quad (4.7)$$

Note que o mapeamento (4.1) preserva a norma

$$r^2 \equiv \bar{\mathbf{x}}\mathbf{x} + x_5^2 = (\bar{\mathbf{u}}_1\mathbf{u}_1 + \bar{\mathbf{u}}_2\mathbf{u}_2)^2 \equiv R^4. \quad (4.8)$$

Assim, definindo a esfera 7-dimensional no \mathbb{R}^8 de raio R : $\mathbf{u}_\alpha\bar{\mathbf{u}}_\alpha = R^2$ ($\alpha = 1, 2$), conseguimos uma esfera 4-dimensional em \mathbb{R}^5 de raio $r = R^2$.

A Eq.(4.1) pode ser invertida se considerarmos as seguintes relações

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{g}r_\alpha, \quad \text{onde} \quad r_1 = \sqrt{\frac{r + x_5}{2}}, \quad r_2 \equiv r_+ = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2(r + x_5)}}, \quad \bar{\mathbf{g}}\mathbf{g} = 1, \quad (4.9)$$

onde \mathbf{g} parametriza a esfera tri-dimensional de raio 1.

Na descrição do segundo mapeamento em termos internos vamos usar a decomposição $\mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^1 \times S^7$, $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^1 \times S^4$ e parametrizando S^4 pelas coordenadas

$$z = \frac{\bar{\mathbf{u}}_1\mathbf{u}_2}{\bar{\mathbf{u}}_1\mathbf{u}_1}, \quad |\mathbf{u}_1|^2 = \frac{r}{1 + \bar{z}z}, \quad (4.10)$$

obtemos

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{g}\sqrt{r}}{\sqrt{1 + \bar{z}z}}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 z = \frac{\mathbf{g}\sqrt{r}z}{1 + \bar{z}z}. \quad (4.11)$$

Para $r = \text{constante}$ temos a descrição de S^7 em termos das coordenadas da variedade S^4 e das coordenadas da fibra \mathbf{g} . As coordenadas internas z da esfera S^4 têm relação com as coordenadas do espaço \mathbb{R}^5 como

$$\mathbf{x} = r\mathbf{h}_+, \quad x_5 = rh_5, \quad \mathbf{h}_+ = \frac{2z}{1 + \bar{z}z}, \quad h_5 = \frac{1 - \bar{z}z}{1 + \bar{z}z}. \quad (4.12)$$

Explicitamente, o elemento do grupo $SU(2)$ é dado por

$$\mathbf{g} = e^{i\gamma} \frac{1 + \mathbf{j}z}{\sqrt{1 + z\bar{z}}}, \quad \bar{\mathbf{g}}d\mathbf{g} = \Lambda_3\mathbf{i} + \Lambda_+\mathbf{j}, \quad \Lambda_+ = (\Lambda_2 + \mathbf{i}\Lambda_1), \quad (4.13)$$

onde

$$\Lambda_3 = h_3 d\gamma + \frac{\mathbf{i}}{2} \frac{\bar{z} dz - z d\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad \Lambda_+ = \mathbf{i} \mathbf{h}_+ d\gamma + \frac{d\bar{z}}{1 + z\bar{z}}. \quad (4.14)$$

e h_3 e \mathbf{h}_\pm são as coordenadas Euclidianas do espaço \mathbb{R}^3 . Ao mesmo tempo eles são os potenciais de Killing de S^2 dados por (4.12).

Os campos vetoriais duais a (4.14) são

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\partial}{\partial \gamma} + 2\mathbf{i} \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad \mathbf{V}_+ = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} - \mathbf{i} \frac{z}{2} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \mathbf{V}_- = \bar{\mathbf{V}}_+, \quad (4.15)$$

que satisfazem

$$\Lambda_3(\mathbf{V}_3) = \Lambda_\pm(\mathbf{V}_\pm) = 1, \quad \Lambda_\pm(\mathbf{V}_\mp) = \Lambda_\pm(\mathbf{V}_3) = \Lambda_3(\mathbf{V}_\pm) = 0. \quad (4.16)$$

Outro elemento de grupo $SU(2)$ que parametriza a esfera S^3 e que comuta com (4.13) é dado por:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \frac{1 + \mathbf{j}z}{\sqrt{1 + z\bar{z}}} e^{-i\gamma}, \quad \tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{g}} = 1. \quad (4.17)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}d\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\Lambda}_3 \mathbf{i} + \tilde{\Lambda}_+ \mathbf{j}, \quad \tilde{\Lambda}_+ = \tilde{\Lambda}_2 + \mathbf{i}\tilde{\Lambda}_1, \quad (4.18)$$

onde

$$\tilde{\Lambda}_3 = d\gamma + \frac{\mathbf{i}}{2} \frac{z d\bar{z} - \bar{z} dz}{1 + z\bar{z}}, \quad \tilde{\Lambda}_+ = \frac{e^{2i\gamma} d\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad (4.19)$$

e seus campos vetoriais duais são:

$$\mathbf{U}_3 = -\frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \mathbf{U}_+ = e^{-2i\gamma} \left((1 + z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\mathbf{i}z}{2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right), \quad \mathbf{U}_- = \bar{\mathbf{U}}_+ \quad (4.20)$$

satisfazendo

$$\tilde{\Lambda}_3(\mathbf{U}_3) = \tilde{\Lambda}_\pm(\mathbf{U}_\pm) = 1, \quad \tilde{\Lambda}_\pm(\mathbf{U}_\mp) = \tilde{\Lambda}_\pm(\mathbf{U}_3) = \tilde{\Lambda}_3(\mathbf{U}_\pm) = 0. \quad (4.21)$$

Portanto, os campos vetoriais \mathbf{V}_a e \mathbf{U}_a formam parte da álgebra $so(4) = so(3) \otimes so(3)$ de isometrias da esfera S^3 , ou seja

$$[\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \mathbf{V}_k, \quad [\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \mathbf{U}_k, \quad [\mathbf{V}_i, \mathbf{U}_j] = 0. \quad (4.22)$$

4.2 Redução dimensional: O caso bosônico

Consideremos uma partícula livre sobre um espaço 8-dimensional provido de uma métrica invariante- G conformalmente plano. A Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = g(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \dot{\bar{\mathbf{u}}}_\alpha \dot{\mathbf{u}}_\alpha, \quad (4.23)$$

na nova parametrização (4.9) e considerando (4.14) a Lagrangeana toma a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2p} &= g(r_\pm, r_1) (\dot{r}_+ \dot{r}_- + \dot{r}_1^2 - r(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{g}}\mathcal{A} + \mathcal{A}\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{g}}) - r(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{g}})^2) \\ &= g(\dot{r}_+ \dot{r}_- + \dot{r}_1^2) - gr\Lambda_i A_i + gr\Lambda_i \Lambda_i, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$\mathcal{A} = A_i \mathbf{e}_i \equiv \frac{\dot{r}_+ r_- - r_+ \dot{r}_-}{r} = \frac{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{x}}{2r(r + x_{p+1})}. \quad (4.25)$$

No caso $p = 2$, A define o potencial do monopolo de Dirac

$$\mathcal{A} = \mathbf{i}A_D = \mathbf{i} \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r(r + x_3)}. \quad (4.26)$$

Em nosso caso $p = 4$, A_i define o potencial do monopolo de Yang $SU(2)$

$$A_i = \frac{\eta_{ab}^i x_a \dot{x}_b}{r(r + x_5)}, \quad \eta_{ab}^i = \delta_{ia} \delta_{4b} - \delta_{4a} \delta_{ib} - \varepsilon_{iab4}, \quad (4.27)$$

onde η_{ab}^i é o símbolo de t'Hooft, e $a, b = 1, 2, 3, 4$.

Usando as constantes de movimento de Noether podemos reduzir a dimensionalidade do sistema. De acordo a natureza não-abeliana do grupo $SU(2)$ o sistema será reduzido para $(5 + 1)$ -dimensões. Faremos isto substituindo a Lagrangeana original (4.24) por outra variacionalmente equivalente, onde o espaço de configuração inicial é estendido pela novas variáveis $\pi, \bar{\pi}, p_\gamma$ os quais são os momenta conjugados das variáveis que parametrizam a esfera S^3 : z, \bar{z} e γ . Quer dizer, substituiremos a esfera S^3 por seu fibrado cotangente T^*S^3 parametrizado pelas coordenadas $z, \bar{z}, \gamma, \pi, \bar{\pi}, p_\gamma$.

Então, definindo os colchetes de Poisson por

$$\{\pi, z\} = 1, \quad \{\bar{\pi}, \bar{z}\} = 1, \quad \{p_\gamma, \gamma\} = 1. \quad (4.28)$$

Agora vamos introduzir os geradores Hamiltonianos P_a correspondente aos campos vetoriais (4.15) (substituindo as derivadas no campo V_a por seus momenta correspondentes), temos

$$P_+ = \frac{P_2 - \mathbf{i}P_1}{2} = \frac{\pi + \bar{z}^2 \bar{\pi}}{2} - \mathbf{i} \bar{z} \frac{p_\gamma}{4}, \quad P_- = \bar{P}_+, \quad P_3 = \frac{p_\gamma}{2} - \mathbf{i}(z\pi - \bar{z}\bar{\pi}). \quad (4.29)$$

Da mesma forma introduzimos os geradores Hamiltonianos I_a correspondentes aos campos (4.20):

$$I_3 = -\frac{p_\gamma}{2}, \quad I_+ = \frac{I_2 - \mathbf{i}I_1}{2} = \frac{\mathbf{i}p_\gamma z + 2\bar{\pi}(1 + z\bar{z})}{4} e^{-2\mathbf{i}\gamma}, \quad I_- = \bar{I}_+. \quad (4.30)$$

Juntando isto, com relação aos colchetes de Poisson (4.28), temos a álgebra $so(4) = so(3) \otimes so(3)$

$$\{P_i, P_j\} = \varepsilon_{ijk} P_k, \quad \{I_i, I_j\} = \varepsilon_{ijk} I_k, \quad \{I_i, P_j\} = 0. \quad (4.31)$$

Uma importante igualdade é encontrada nas funções P_i e I_i , dada por

$$I_k I_k = P_k P_k. \quad (4.32)$$

Com esses elementos, a Lagrangeana variacionalmente equivalente a (4.24) é escrita como

$$\mathcal{L}_{int} = 2(P_+ \Lambda_+ + P_- \Lambda_- + P_3 \Lambda_3) - P_i A_i - \frac{P_i P_i}{gr} - \frac{gr A_i A_i}{4} + g(\dot{r}_+ \dot{r}_- + \dot{r}_1^2). \quad (4.33)$$

As isometrias desta Lagrangeana modificada correspondente a (4.20) são definidas pelos campos vetoriais

$$\tilde{U}_i \equiv \{I_i, \}, \quad (4.34)$$

onde I_i é dado por (4.30) e os colchetes de Poisson são dados por (4.28). Estas quantidades I_i em (4.34) são as constantes de movimento de Noether da Lagrangeana modificada (4.33). Isto pode ser viato considerando-se a seguinte igualdade

$$2(P_+\Lambda_+ + P_-\Lambda_- + P_3\Lambda_3) = p_\gamma\dot{\gamma} + \pi\dot{z} + \bar{\pi}\dot{\bar{z}}. \quad (4.35)$$

Portanto, podemos fazer a redução sob o grupo $SU(2)$ dado pelos campos vetoriais (4.34), para isto fixamos as constantes de movimento de Noether (4.30) como

$$I_k = const, \quad I_k I_k \equiv s^2. \quad (4.36)$$

Como estas constantes de movimento não dependem das coordenadas r_\pm , r_5 , fazemos uma rotação ortogonal. Portanto, só a terceira componente, I_3 , será diferente de zero. Igualando-se I_+ e I_- a zero, temos:

$$-I_3 = \frac{p_\gamma}{2} = s, \quad \bar{\pi} = \mathbf{is} \frac{z}{1+z\bar{z}}, \quad \pi = -\mathbf{is} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}. \quad (4.37)$$

Portanto,

$$P_+ = -\mathbf{is} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad P_- = \mathbf{is} \frac{z}{1+z\bar{z}}, \quad P_3 = -s \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}. \quad (4.38)$$

onde P_k coincide com os potenciais de Killing da esfera S^2 .

Considerando-se (4.35) concluímos que o terceiro termo em (4.33) pode ser apagado, pois é uma derivada temporal. Além disso, considerando a Eq. (4.32), podemos reescrever a Lagrangeana da seguinte forma,

$$\mathcal{L}_{red} = \frac{\tilde{g}\dot{x}_\mu\dot{x}_\mu}{2} - \mathbf{is} \frac{\bar{z}\dot{z} - z\dot{\bar{z}}}{1+z\bar{z}} - sh_k(z, \bar{z})A_k - \frac{s^2}{2r^2\tilde{g}}, \quad \tilde{g} \equiv \frac{g}{2r}, \quad \mu = 1, \dots, 5, \quad (4.39)$$

onde usamos a identidade

$$-\frac{1}{4}grA_iA_i + g(\dot{r}_+\dot{r}_- + \dot{r}_1^2) = g\frac{\dot{x}_\mu\dot{x}_\mu}{4r}. \quad (4.40)$$

Assim obtemos uma Lagrangeana reduzida que descreve o movimento de uma partícula num campo de um monopolo de Yang $SU(2)$.

4.3 Supersimetrização

Na extensão supersimétrica, \mathbb{R}^8 é trocado por um multiplete raiz $(8, 8)$ com supersimetria $\mathcal{N} = 8$ cujas componentes bosônicas (alvo) correspondem às coordenadas de \mathbb{R}^8 . Seus campos componentes são dados por $(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i)$.

A transformação bilinear (4.1) também pode ser escrita na representação matricial

$$x_\mu = v^T \tilde{\gamma}_\mu v \quad (4.41)$$

onde $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$, e $\tilde{\gamma}_\mu$'s são os geradores da álgebra de Clifford $Cl(5, 0)$. Explicitamente temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &= \sigma_A \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_A \\ \tilde{\gamma}_2 &= \sigma_A \otimes \sigma_A \otimes 1_2 \\ \tilde{\gamma}_3 &= \sigma_A \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A \\ \tilde{\gamma}_4 &= \sigma_1 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \\ \tilde{\gamma}_5 &= \sigma_2 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

As coordenadas reais $v_a = (v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$, onde $a = 1, \dots, 8$, estão relacionadas com as coordenadas quaterniônicas $\mathbf{u}_\alpha, \bar{\mathbf{u}}_\alpha$ pelas expressões

$$\mathbf{u}_1 = v_0 + \mathbf{e}_i v_i, \quad \mathbf{u}_2 = \bar{v}_0 + \mathbf{e}_i \bar{v}_i. \quad (4.43)$$

O campo vetorial \mathbf{U}_i que define as isometrias $SU(2)$ é dado pela expressão

$$\mathbf{U}_i = v_a \tilde{\Sigma}_{ab}^i \frac{\partial}{\partial v_b}, \quad (4.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1 &= 1_2 \otimes 1_2 \otimes \sigma_A, \\ \tilde{\Sigma}_2 &= 1_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, \\ \tilde{\Sigma}_3 &= 1_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Notemos que os geradores de $su(2)$, $\tilde{\Sigma}_i$, comutam com as matrizes gama $\tilde{\gamma}_\mu$

$$[\tilde{\Sigma}_i, \tilde{\gamma}_\mu] = 0, \quad [\tilde{\Sigma}_i, \tilde{\Sigma}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \tilde{\Sigma}_k, \quad (4.46)$$

isto concorda com o fato de que \mathbf{U}_i define as isometrias da Lagrangeana 8-dimensional (4.24).

Portanto a transformação

$$v \rightarrow (\lambda_0 \mathbf{1}_8 + \lambda_i \tilde{\Sigma}_i) v, \quad \lambda_0^2 + \sum \lambda_i^2 = 1 \quad (4.47)$$

deixa invariante as coordenadas x_μ . Porém, a fibração (4.41), como foi dito, identifica todos os pontos no qual difere pela transformação (4.47), e também se verifica

$$x_\mu x_\mu \equiv r^2 = (v_a v_a)^2 \equiv R^4. \quad (4.48)$$

Em termos das coordenadas z, \bar{z}, γ (que parametriza a esfera $x_\mu = \text{const}$) os campos vetoriais \mathbf{U}_i e \mathbf{V}_i são dados em (4.20) e (4.15), respectivamente.

De acordo como o Lema de Schur, cuja extensão supersimétrica é apresentada em [55], $\mathcal{N} = 5$ é o número máximo de geradores de supersimetria que atuam em $(8, 8)$ e comutam com os geradores $\tilde{\Sigma}_j = \tilde{\Sigma}_j \oplus \tilde{\Sigma}_j$ da álgebra $su(2)$.

Para $\mathcal{N} = 8$ (com estrutura octonionica) as transformações supersimétricas que atuam no multiplete raiz $(8, 8)$ são dadas por

$$Q_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j \\ -\gamma_j \cdot H & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\mathcal{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n \cdot H & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_A, \\ \gamma_2 &= \sigma_2 \otimes \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2, \\ \gamma_3 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_A, \\ \gamma_4 &= \sigma_A \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \gamma_5 &= \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \sigma_A, \\ \gamma_6 &= \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2, \\ \gamma_7 &= \sigma_1 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, \\ \gamma_8 &= \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

A representação gráfica destas transformações foi dada na Figura 2.1.

Logo, o subconjunto $\mathcal{N} = 5$ composto por Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_8 comutam com os geradores $\tilde{\Sigma}_j$ do $su(2)$,

$$[Q_I, \tilde{\Sigma}_j] = 0. \quad I = 1, 2, 3, 4, 8. \quad (4.51)$$

Passando à estrutura quaterniônica temos que $Q_1 \rightarrow Q_1, Q_2 \rightarrow Q_2, Q_3 \rightarrow Q_1, Q_4 \rightarrow \bar{Q}_4, Q_8 \rightarrow Q_4$ atuando sob o multiplete $(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i)$.

A Lagrangeana invariante manifesta sob $\mathcal{N} = 4$ é dada por

$$\mathcal{L} = Q_4 Q_3 Q_2 Q_1 F(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i), \quad (4.52)$$

considerando uma invariância sob uma quinta supersimetria, \bar{Q}_4 , geramos o seguinte vínculo $\square\Phi = 0$. Este processo já foi mostrado em (3.14). Portanto, como os geradores de $su(2)$ só comutam com estes 5 geradores supersimétricos, a Lagrangeana é invariante sob $su(2)$. Além disso, este vínculo, para ser invariante sob este grupo, tem que ser resolvido em termos das coordenadas invariantes bilineares x_μ (4.41). E explicitamente vai ser dado por

$$x_k = 2(v_0 \bar{v}_k - v_k \bar{v}_0 - \epsilon_{ijk} v_i \bar{v}_j) \quad (4.53)$$

$$x_4 = 2(v_0 \bar{v}_0 + v_i \bar{v}_i) \quad (4.54)$$

$$\bar{x}_5 = v_0 v_0 + v_i v_i - \bar{v}_0 \bar{v}_0 - \bar{v}_i \bar{v}_i. \quad (4.55)$$

Partindo destes 5 campos bosônicos x_μ e usando as 5 transformações do multiplete raiz que agem nas coordenadas v_a , obtemos o seguinte multiplete como resultado do

mapeamento bilinear $(5, 11, 10, 5, 1)$. Todos os campos componentes deste multipletto são invariantes sob $su(2)$ e é dado por combinações bilineares dos campos originais $v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i, \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i$.

Portanto, a extensão supersimétrica do segundo mapeamento de Hopf produz o mapa linear $(8, 8) \rightarrow (5, 11, 10, 5, 1)$. Este último é um multipletto onde as transformações supersimétricas induzidas são lineares. As restrições nas esferas podem ser obtidas usando projeções estereográficas ou usando coordenadas hiperesféricas, os quais permitem produzir realizações off-shell e não-lineares para $\mathcal{N} > 4$.

A restrição $\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{S}^7$ produz uma realização não-linear para $\mathcal{N} = 8$ que pode ser escrita em termos das constantes de estrutura octonônicas. Por exemplo, usando a projeção estereográfica obtemos,

$$\omega_j = \frac{Rv_j}{R - v_0}, \quad g = \frac{R\dot{v}_0}{R - v_0}, \quad (4.56)$$

$$\xi_j = \frac{R\lambda_j}{R - v_0}, \quad \xi_0 = \frac{R\lambda_0}{R - v_0}, \quad (4.57)$$

com $i, j, k = 1, \dots, 7$, onde os novos campos componentes introduzidos formam o multipletto não linear $(7, 8, 1)_{nl}$ dado por:

$$(\omega_i; \xi_0, \xi_i; g) \quad (4.58)$$

e as transformações supersimétricas não lineares (\hat{Q}) induzidas por (2.3) são dadas por

$$\hat{Q}_i \omega_j = -(\delta_{ij} \xi_0 + C_{ijk} \xi_k) + \frac{1}{R} (\omega_j \xi_i), \quad (4.59)$$

$$\hat{Q}_i \xi_0 = -\dot{\omega}_i + \frac{1}{R} (\omega_i g - \xi_0 \xi_i), \quad (4.60)$$

$$\hat{Q}_i \xi_j = \delta_{ij} g + C_{ijk} \dot{\omega}_k - \frac{1}{R} (C_{ijk} \omega_k g + \xi_j \xi_i) \quad (4.61)$$

$$\hat{Q}_i g = \dot{\xi}_i, \quad (4.62)$$

$$\hat{Q}_8 \omega_j = \dot{\xi}_0, \quad (4.63)$$

$$\hat{Q}_8 \xi_0 = g, \quad (4.64)$$

$$\hat{Q}_8 \xi_i = \dot{\omega}_i - \frac{1}{R} (\omega_i g + \xi_i \xi_0) \quad (4.65)$$

$$\hat{Q}_8 g = \dot{\xi}_0. \quad (4.66)$$

onde as constantes de estrutura octonônica C_{ijk} , que são totalmente antisimétricas, estão em (2.5). Note que no limite $R \rightarrow \infty$, as transformações supersimétricas lineares podem ser obtidas. Portanto, o multipletto $(7, 8, 1)_{nl}$ é mais geral com esse número de campos.

A construção de uma ação invariante não linear associada a este multipletto pode ser perfeitamente obtida usando-se a Construção I com quatro supersimetrias manifestas e impondo-se as demais supersimetrias. Dessa forma, vamos obter, como é natural, os vínculos na função prepotencial.

Desta mesma forma podemos fazer a restrição na esfera $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{S}^4$ para nosso multipletto encontrado.

Vamos apresentar agora mais um caso na construção de uma extensão supersimétrica do segundo mapeamento de Hopf. Isto será feito tomando-se em consideração o $\mathcal{N} = 5$ não-minimal estudado no Capítulo 2. O supermultipletto neste caso é $(8, 16, 8)$ com símbolo de conectividade $8_4 + 8_1$. A escolha deste supermultipletto foi feita pelo fato de o mesmo ser invariante sob o subgrupo $su(2)$.

Seus campos componentes são dados por

$$(v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i; \lambda_0, \lambda_i, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i, \psi_0, \psi_i, \bar{\psi}_0, \bar{\psi}_i; g_0, g_i, \bar{g}_0, \bar{g}_i) \quad (4.67)$$

$i = 1, 2, 3$, que contém 8 bósons, 16 férmions e 8 campos auxiliares, onde as coordenadas do espaço alvo são $v_a = (v_0, v_i, \bar{v}_0, \bar{v}_i)$, com $a = 1, \dots, 8 \in \mathbb{R}^8$.

As 5 transformações que agem neste multipletto são obtidas considerando o vestimento (1.36), onde as transformações supersimétricas do multipletto raiz são dadas nas Eqs.(2.42), (2.43) e 2.44, portanto temos,

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i v_0 &= \lambda_i, & \hat{Q}_i v_j &= -(\delta_{ij} \lambda_0 + \epsilon_{ijk} \lambda_k), \\ \hat{Q}_i \bar{v}_0 &= -\bar{\lambda}_i, & \hat{Q}_i \bar{v}_j &= \delta_{ij} \bar{\lambda}_0 + \epsilon_{ijk} \bar{\lambda}_k, \\ \hat{Q}_i \lambda_0 &= -\dot{v}_i, & \hat{Q}_i \lambda_j &= \delta_{ij} \dot{v}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{v}_k, \\ \hat{Q}_i \bar{\lambda}_0 &= \dot{\bar{v}}_i, & \hat{Q}_i \bar{\lambda}_j &= -(\delta_{ij} \dot{\bar{v}}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{\bar{v}}_k), \\ \hat{Q}_i \psi_0 &= g_i, & \hat{Q}_i \psi_j &= -(\delta_{ij} g_0 + \epsilon_{ijk} g_k), \\ \hat{Q}_i \bar{\psi}_0 &= -\bar{g}_i, & \hat{Q}_i \bar{\psi}_j &= \delta_{ij} \bar{g}_0 + \epsilon_{ijk} \bar{g}_k, \\ \hat{Q}_i g_0 &= -\dot{\psi}_i, & \hat{Q}_i g_j &= \delta_{ij} \dot{\psi}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{\psi}_k, \\ \hat{Q}_i \bar{g}_0 &= -\dot{\bar{\psi}}_i, & \hat{Q}_i \bar{g}_j &= -(\delta_{ij} \dot{\bar{\psi}}_0 + \epsilon_{ijk} \dot{\bar{\psi}}_k). \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_4 v_0 &= \bar{\lambda}_0, & \hat{Q}_4 v_i &= \bar{\lambda}_i, & \hat{Q}_4 \bar{v}_0 &= -\lambda_0, & \hat{Q}_4 \bar{v}_i &= -\lambda_i, \\ \hat{Q}_4 \lambda_0 &= -\dot{\bar{v}}_0, & \hat{Q}_4 \lambda_i &= -\dot{\bar{v}}_i, & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_0 &= \dot{v}_0, & \hat{Q}_4 \bar{\lambda}_i &= \dot{v}_i, \\ \hat{Q}_4 \psi_0 &= \bar{g}_0, & \hat{Q}_4 \psi_i &= \bar{g}_i, & \hat{Q}_4 \bar{\psi}_0 &= -g_0, & \hat{Q}_4 \bar{\psi}_i &= -g_i \\ \hat{Q}_4 g_0 &= -\dot{\bar{\psi}}_0, & \hat{Q}_4 g_i &= -\dot{\bar{\psi}}_i, & \hat{Q}_4 \bar{g}_0 &= \dot{\psi}_0, & \hat{Q}_4 \bar{g}_i &= \dot{\psi}_i, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_9 v_0 &= \psi_0, & \hat{Q}_9 v_i &= \psi_i, & \hat{Q}_9 \bar{v}_0 &= \bar{\psi}_0, & \hat{Q}_9 \bar{v}_i &= \bar{\psi}_i, \\ \hat{Q}_9 \lambda_0 &= -g_0, & \hat{Q}_9 \lambda_i &= -g_i, & \hat{Q}_9 \bar{\lambda}_0 &= -\bar{g}_0, & \hat{Q}_9 \bar{\lambda}_i &= -\bar{g}_i, \\ \hat{Q}_9 \psi_0 &= \dot{v}_0, & \hat{Q}_9 \psi_i &= \dot{v}_i, & \hat{Q}_9 \bar{\psi}_0 &= \dot{\bar{v}}_0, & \hat{Q}_9 \bar{\psi}_i &= \dot{\bar{v}}_i, \\ \hat{Q}_9 g_0 &= -\dot{\lambda}_0, & \hat{Q}_9 g_i &= -\dot{\lambda}_i, & \hat{Q}_9 \bar{g}_0 &= -\dot{\bar{\lambda}}_0, & \hat{Q}_9 \bar{g}_i &= -\dot{\bar{\lambda}}_i, \end{aligned} \quad (4.70)$$

Os geradores da álgebra $su(2)$ que comutam com as $\mathcal{N} = 5$ transformações são neste caso

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1 &= 1_2 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \otimes \sigma_A, \\ \tilde{\Sigma}_2 &= 1_2 \otimes 1_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_1, \\ \tilde{\Sigma}_3 &= 1_2 \otimes 1_2 \otimes \sigma_A \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (4.71)$$

As 5 matrizes gama do mapeamento bilinear Eq.(4.1) são dadas pelas mesmas da equação (4.42). É claro que elas também comutam com os geradores do $su(2)$.

Neste caso, o multiplete obtido como resultado do mapeamento bilinear é dado por: $(5, 16, 21, 15, 6, 1) = (4, 11, 11, 5, 1, 0) \oplus (1, 5, 10, 10, 5, 1)$.

Não existe obstrução para aplicarmos este método ao terceiro mapeamento de Hopf, onde o mapeamento bilinear é agora $\mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^9$. O multiplete raiz $(16, 16, 0)$ carrega a representação linear minimal para $\mathcal{N} = 9$, aqui a extensão supersimétrica mapeia o supermultiplete raiz em um supermultiplete $(9, 37, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1)$ $\mathcal{N} = 9$. Isto é uma perspectiva para futuros trabalhos.

Conclusão

Para finalizar este trabalho, podemos dizer que desenvolvemos um formalismo alternativo ao formalismo de supercampo. Esse formalismo introduz um número finito de campos para uma supersimetria \mathcal{N} -estendida baseado nas representações da álgebra da supersimetria unidimensional.

A motivação deste trabalho foi concentrada no estudo e na classificação dessas representações lineares, finitas, da álgebra de supersimetria unidimensional \mathcal{N} -estendida em termos de multipletos, nas quais algumas delas podem ser obtidas como o produto de uma redução dimensional de teorias em altas dimensões como foi mencionado no capítulo 1. O entendimento destas representações nos fornece informações de certos aspectos ou propriedades elementares da teoria a qual nos permitirá avançar no caminho de obtermos representações que descrevam teorias de unificação tais como a supergravidade para $\mathcal{N} = 32$.

Num primeiro caso, para $\mathcal{N} = 4$, estudamos dois tipos de representações que são 2-minimal (completamente redutível) e não-minimal (redutível mas indecomponível). Diferentes representações inequivalentes “off-shell” de comprimento três foram encontradas e classificadas em cada um deles, isto de acordo com o símbolo de conectividade e grupos invariantes que possuem. Além disso, mostramos que multipletos inequivalentes com um mesmo número de campos componentes induzem ações invariantes supersimétricas inequivalentes.

As constantes de estrutura mais gerais da álgebra dos grupos invariantes associados aos multipletos raízes de ambas representações foram representadas num plano de Fano, formando uma estrutura que chamamos de pseudo-octônions, já que é composta por linhas orientadas e não orientadas.

O processo de oxidação $\mathcal{N} = 4 \rightarrow \mathcal{N} = 5$ foi feito em ambas representações (2-minimal e não-minimal) por meio da adição de uma quinta transformação supersimétrica compatível com as demais 4 transformações. Ambos os casos recaem nas conectividades para $\mathcal{N} = 5$ minimal classificadas na literatura, onde é mostrado que são oxidáveis até o número máximo $\mathcal{N}_{max} = 8$.

Também foram estudadas as representações não-minimais $\mathcal{N} = 5$ contendo nos seus multipletos 16 bósons e 16 férmions, onde os grupos invariantes do multipletos raiz consistem de 15 geradores que produzem as relações de comutação e anti-comutação. Estes geradores foram representados graficamente num tetraedro com linhas orientadas e não-orientadas. A esta estrutura chamamos de pseudo-sedênions.

Considerando agora os modelos sigma associados, uma segunda construção (II) de ações é proposta neste trabalho, para aqueles casos em que a construção I não gera

uma ação de segunda ordem nos multipletos “off-shell” de comprimento três, tomando como ponto de partida a ação do multipletto raiz. Geralmente esta construção é usada para aqueles multipletos cujo grafo associado não possui nenhum parceiro bosônico com dimensão de massa zero que possa gerar a função Φ ou para aqueles multipletos cujo grafo possui fontes fermiônicas.

Encontramos que os modelos sigma de segunda ordem associados aos multipletos não-minimais com $\mathcal{N} = 4$ podem ser de dois tipos, por um lado com um prepotencial sem vínculos das coordenadas alvo e, por outro, com vínculo. Impondo uma invariância sob uma quinta supersimetria $\mathcal{N} = 5$, em ambos os casos, o sistema é automaticamente invariante até $\mathcal{N} = 6, 7, 8$ supersimetrias com um prepotencial vinculado. Como consequência deste fato, os modelos sigma das representações inequivalentes $\mathcal{N} = 4$ com o mesmo número de campos resultam ser equivalentes depois de ser oxidados.

Também foi construído o modelo sigma para a representação não-minimal $\mathcal{N} = 5$, em particular para o multipletto $(4, 16, 12)$ onde a quinta supersimetria é responsável por conectar os dois multipletos da subálgebra não-minimal $\mathcal{N} = 4$, dados por $(2, 8, 6)_b \oplus (2, 8, 6)_b$, obtendo-se assim os vínculos na função prepotencial.

Provamos que é possível construir Lagrangeanas invariantes sob $\mathcal{N} = 9$ supersimetrias baseado na representação não-minimal $\mathcal{N} = 5$ se os vínculos produzidos pela quinta e sexta supersimetria são consistentemente resolvidos. Porém, tal sistema com $\mathcal{N} = 9$ pode ser controlado por só $\mathcal{N} = 6$ supersimetrias. Provavelmente este mesmo resultado possa ser encontrado em supersimetrias mais altas, quer dizer, controlar com um número menor de supercargas.

Por fim, investigamos as propriedades da mecânica supersimétrica associada com o segundo mapeamento de Hopf. Encontramos que a redução por meio da ação do grupo $SU(2)$ no multipletto $(8, 8, 0)$ gera um supermultipletto supersimétrico 5-dimensional induzido pelos geradores de supersimetria $\mathcal{N} = 5$ atuando no $(8, 8, 0)$, estes geradores comutam com os geradores da álgebra $SU(2)$. O supermultipletto resultante é um supermultipletto de comprimento 5 redutível mas indecomponível com campos componentes dados por $(5, 11, 10, 5, 1)$.

A Lagrangeana do sistema foi explicitamente calculada no Capítulo 3 associado ao multipletto raiz $(8, 8, 0)$ com $\mathcal{N} = 8$. Os 8 campos bosônicos são considerados como as coordenadas 8-dimensionais do espaço alvo. Provamos que esta Lagrangeana admite uma invariância $SU(2)$ e invariância supersimétrica $\mathcal{N} = 8$. A invariância sob os 3 operadores supersimétricos ($\mathcal{N} = 6, 7, 8$), é menos importante pelas seguintes razões: primeiramente, é que eles são automaticamente induzidos sob invariância dos operadores $\mathcal{N} = 5$ e $SU(2)$. E em segundo lugar, é que a ação sob $\mathcal{N} = 8$ fecha sob um supermultipletto muito maior do que $(5, 11, 10, 5, 1)$, e os campos extras não são essenciais na obtenção da ação invariante.

O sistema final com a presença de um monopolo de Yang é caracterizado por sua invariância sob $\mathcal{N} = 5$ geradores supersimétricos os quais comutam com os geradores $SU(2)$.

As perspectivas mais importantes e gerais deste trabalho são as seguintes:

- Continuar com o processo de oxidação incrementando o número de supersimetrias com o objetivo de alcançarmos até $\mathcal{N} = 32$.

- Estender ou adicionar simetrias na álgebra da supersimetria global unidimensional tais como a invariância superconforme e a posterior aplicação na correspondência AdS_2/CFT_1 , por exemplo.

- Fazer o processo de oxidação dimensional, ou seja, no nosso caso, de uma dimensão (0+1) para duas dimensões (1+1). Para isto usaremos o formalismo desenvolvido neste trabalho, onde a álgebra das supertranslações pode ser dividida em duas partes independentes para serem descritas pelas coordenadas do cone de luz.

- Estudar o multiplete (9, 16, 7) unidimensional associado com a teoria de superYang-Mills em $D = 4$ onde, como um primeiro passo nessa direção já construímos para (4, 16, 12). Além disso, existe a possibilidade de implementarmos uma invariância superconforme.

- Aplicações das Lagrangeanas invariantes supersimétricas e invariantes sob um grupo de rotações construídas neste trabalho para descrevermos sistemas dinâmicos mecânico-quânticos onde os bósons com dimensão de massa zero podem ser considerados como as coordenadas espaciais dos férmions de dimensão de massa 1/2. De acordo com a representação escolhida, o sistema pode descrever férmions se movimentando em campos externos depois de realizarmos o processo de quantização canônica, por exemplo.

- Fechar o diagrama comutativo do segundo mapeamento de Hopf e continuar com o terceiro mapeamento de Hopf. Com base neste resultado obteremos as representações supersimétricas não-lineares.

Apêndice A

Representação irredutível $\mathcal{N} = 4$: Ações invariantes

A.1 Multipleteo Raiz $(4, 4, 0)$

As 4 transformações supersimétricas que atuam no $(v_0, v_i; \lambda_0, \lambda_i)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} Q_4(v_0, v_i; \lambda_0, \lambda_i) &= (\lambda_0, \lambda_j; \dot{v}_0, \dot{v}_j) \\ Q_i(v_0, v_i; \lambda_0, \lambda_i) &= (\lambda_i, -\delta_{ij}\lambda_0 - \varepsilon_{ijk}\lambda_k; -\dot{v}_i, \delta_{ij}\dot{v}_0 + \varepsilon_{ijk}\dot{v}_k), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

com $i, j, k = 1, 2, 3$.

A Lagrangeana invariante manifesta $\mathcal{N} = 4$ é:

$$\mathcal{L} = Q_4 Q_3 Q_2 Q_1 F(v_0, v_i), \quad (\text{A.2})$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i) \\ &+ \Phi_0(\lambda_0\lambda_i\dot{v}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\lambda_i\lambda_j\dot{v}_k) \\ &+ \Phi_i(\lambda_i(\lambda_0\dot{v}_0 + \lambda_j\dot{v}_j) + \varepsilon_{ijk}\lambda_j(\lambda_0\dot{v}_k - \frac{1}{2}\lambda_k\dot{v}_0)) \\ &+ \square\Phi\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}\lambda_0\lambda_i\lambda_j\lambda_k, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde $\Phi = \partial_{00}F + \partial_{ii}F$

A.2 Multipleteo $(k, 4, 4 - k)$

As Lagrangeanas para os multipletos $(k, 4, 4 - k)$ podem ser obtidos pela Construção I (veja [3]) ou II. Na continuação apresentamos as Lagrangeanas obtidos pela Construção II.

Para o multipleteo $(3, 4, 1) = (v_i; \lambda_0, \lambda_i, g_0)$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\Phi}{2}(\dot{v}_i^2 + \dot{\lambda}_i \lambda_i + \dot{\lambda}_0 \lambda_0 + g_0^2) \\
&+ \frac{\Phi_i}{2}[(\lambda_i \lambda_0 - \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \lambda_j \lambda_k)g_0 + (\lambda_i \lambda_k + \varepsilon_{ijk} \lambda_j \lambda_0)\dot{v}_k] \\
&+ \square \Phi \frac{\varepsilon_{ijk}}{12} \lambda_0 \lambda_i \lambda_j \lambda_k,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

onde $\Phi = \partial_{ii} F$

Para o multipleteo $(2, 4, 2) = (v_2, v_3; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; g_0, g_1)$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \Phi(\dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{\lambda}_0 \lambda_0 + \dot{\lambda}_1 \lambda_1 + \dot{\lambda}_2 \lambda_2 + \dot{\lambda}_3 \lambda_3 + g_0^2 + g_1^2) \\
&+ (\Phi_2 \lambda_2 \lambda_2 \dot{v}_2 + \Phi_2 \lambda_2 \lambda_3 \dot{v}_3 + \Phi_3 \lambda_3 \lambda_2 \dot{v}_2 + \Phi_3 \lambda_3 \lambda_3 \dot{v}_3) \\
&+ (\Phi_2 \lambda_2 \lambda_0 g_0 + \Phi_2 \lambda_2 \lambda_1 g_1 + \Phi_3 \lambda_3 \lambda_0 g_0 + \Phi_3 \lambda_3 \lambda_1 g_1) \\
&+ (\Phi_2 \lambda_3 \lambda_0 g_1 - \Phi_2 \lambda_3 \lambda_1 g_0 + \Phi_3 \lambda_2 \lambda_1 g_0 - \Phi_3 \lambda_2 \lambda_0 g_1) \\
&+ (\Phi_3 \lambda_1 \lambda_0 \dot{v}_2 - \Phi_2 \lambda_1 \lambda_0 \dot{v}_3) \\
&+ \square \Phi \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

onde $\Phi = \partial_{22} F + \partial_{33} F$

Para o multipleteo $(1, 4, 3) = (v_0; \lambda_0, \lambda_i, g_i)$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \Phi(\dot{v}_0^2 + \dot{\lambda}_0 \lambda_0 + \dot{\lambda}_i \lambda_i + g_i^2) \\
&+ \Phi_0(\lambda_0 \lambda_i \dot{v}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \lambda_i \lambda_j \dot{v}_k) \\
&+ \square \Phi \frac{\varepsilon_{ijk}}{6} \lambda_0 \lambda_i \lambda_j \lambda_k,
\end{aligned}$$

onde $\Phi = \partial_{00} F$.

Apêndice B

Ação invariante para o multipletto (4, 16, 12)

A Lagrangeana associada ao multipletto (4, 16, 12) com invariância supersimétrica sob $\mathcal{N} = 5$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Phi(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{\lambda}_0\lambda_0 + \dot{\lambda}_i\lambda_i + \dot{\bar{\lambda}}_0\bar{\lambda}_0 + \dot{\bar{\lambda}}_i\bar{\lambda}_i \\
& + \dot{\psi}_0\psi_0 + \dot{\psi}_i\psi_i + \dot{\bar{\psi}}_0\bar{\psi}_0 + \dot{\bar{\psi}}_i\bar{\psi}_i + h_i^2 + \bar{h}_i^2 + g_i^2 + \bar{g}_i^2) \\
& + \Omega(\dot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_3\dot{x}_4 + h_i\bar{h}_i - g_i\bar{g}_i + \bar{\lambda}_0\dot{\lambda}_0 + \lambda_i\dot{\bar{\lambda}}_i - \bar{\psi}_0\dot{\psi}_0 - \psi_i\dot{\bar{\psi}}_i) \\
& + \omega(\dot{x}_1\dot{x}_3 + \dot{x}_2\dot{x}_4 + h_i g_i + \bar{h}_i\bar{g}_i + \psi_0\dot{\lambda}_0 + \lambda_i\dot{\psi}_i + \bar{\lambda}_0\dot{\bar{\psi}}_0 + \bar{\psi}_i\dot{\bar{\lambda}}_i) \\
& + (\dot{x}_1\Phi_2 + \dot{x}_2(\Omega_2 - \Phi_1) + \dot{x}_3(\omega_2 - \Phi_4) - \dot{x}_4\Phi_3)(\bar{\lambda}_0\lambda_0 + \lambda_i\bar{\lambda}_i) \\
& + (\dot{x}_1(\omega_4 - \Phi_2) + \dot{x}_2(\Omega_4 - \Phi_1) + \dot{x}_3\Phi_4 + \dot{x}_4(\omega_4 - \Phi_3))(\bar{\psi}_0\psi_0 + \psi_i\bar{\psi}_i) \\
& + (\dot{x}_1\Phi_4 - \dot{x}_2\Phi_3 + \dot{x}_3\Phi_2 - \dot{x}_4\Phi_1)(\lambda_0\bar{\psi}_0 + \lambda_i\bar{\psi}_i + \bar{\lambda}_0\psi_0 + \bar{\psi}_i\lambda_i) \\
& + (\dot{x}_1\Phi_3 + \dot{x}_2(\omega_2 - \Phi_4) + \dot{x}_3(\omega_3 - \Phi_1) + \dot{x}_4\Phi_2)(\psi_0\lambda_0 + \lambda_i\psi_i + \bar{\lambda}_0\bar{\psi}_0 + \bar{\psi}_i\bar{\lambda}_i) \\
& + \Phi_1(h_i(\lambda_0\lambda_i + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \psi_0\psi_i + \bar{\psi}_0\bar{\psi}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\lambda_j\lambda_k) + \bar{h}_i(\lambda_i\bar{\lambda}_0 - \varepsilon_{ijk}\lambda_j\bar{\lambda}_k + \varepsilon_{ijk}\psi_j\bar{\psi}_k) \\
& + g_i(\lambda_i\lambda_0 + \bar{\psi}_i\bar{\lambda}_0 - \varepsilon_{ijk}\psi_j\lambda_k) + \bar{g}_i(\bar{\psi}_0\lambda_i + \bar{\lambda}_0\psi_i + \varepsilon_{ijk}\lambda_j\bar{\psi}_k) \\
& - (\bar{g}_i(\lambda_0\bar{\psi}_i + \psi_0\bar{\lambda}_i) - \varepsilon_{ijk}g_i\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k + \bar{h}_i\bar{\psi}_i\psi_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}h_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k)) \\
& + \Phi_2(\bar{h}_i(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \lambda_0\lambda_i + \psi_0\psi_i + \bar{\psi}_0\bar{\psi}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) + h_i(\bar{\lambda}_i\lambda_0 - \varepsilon_{ijk}\bar{\lambda}_j\lambda_k + \varepsilon_{ijk}\psi_j\bar{\psi}_k) \\
& + g_i(\lambda_0\bar{\psi}_i + \psi_0\bar{\lambda}_i + \varepsilon_{ijk}\psi_j\bar{\lambda}_k) + \bar{g}_i(\psi_i\lambda_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\psi}_0 - \varepsilon_{ijk}\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k) \\
& - (g_i(\bar{\psi}_0\lambda_i + \bar{\lambda}_0\psi_i) - \varepsilon_{ijk}\bar{g}_i\psi_j\lambda_k + h_i\psi_i\bar{\psi}_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}h_i\psi_j\psi_k)) \\
& + \Phi_3(g_i(\psi_0\psi_i + \bar{\psi}_0\bar{\psi}_i + \lambda_0\lambda_i + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\psi_j\psi_k) + \bar{g}_i(\psi_i\psi_0 - \varepsilon_{ijk}\psi_j\bar{\psi}_k - \varepsilon_{ijk}\lambda_j\bar{\lambda}_k) \\
& + h_i(\psi_i\lambda_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\psi}_0 - \varepsilon_{ijk}\lambda_j\psi_k) + \bar{h}_i(\bar{\psi}_0\lambda_i + \bar{\lambda}_0\psi_i + \varepsilon_{ijk}\bar{\lambda}_j\psi_k) \\
& - (\bar{h}_i(\lambda_0\bar{\psi}_i + \psi_0\bar{\lambda}_i) - \varepsilon_{ijk}h_i\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k + \bar{g}_i\bar{\lambda}_i\lambda_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}g_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k)) \\
& + \Phi_4(\bar{g}_i(\psi_0\psi_i + \bar{\psi}_0\bar{\psi}_i + \lambda_0\lambda_i + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k) + g_i(\bar{\psi}_i\psi_0 - \varepsilon_{ijk}\psi_j\bar{\psi}_k - \varepsilon_{ijk}\lambda_j\bar{\lambda}_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h_i(\lambda_0\bar{\psi}_i + \psi_0\bar{\lambda}_i + \varepsilon_{ijk}\lambda_j\bar{\psi}_k) + \bar{h}_i(\lambda_i\psi_0 + \bar{\psi}_i\bar{\lambda}_0 - \varepsilon_{ijk}\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k) \\
& - (h_i(\bar{\psi}_0\lambda_i + \bar{\lambda}_0\psi_i) - \varepsilon_{ijk}\bar{h}_i\lambda_j\psi_k + g_i\lambda_i\bar{\lambda}_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{g}_i\lambda_j\lambda_k) \\
& + (\Omega_1 - \Phi_2)(h_i\lambda_i\bar{\lambda}_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{h}_i\lambda_j\lambda_k) + (\Omega_2 - \Phi_1)(\bar{h}_i\bar{\lambda}_i\lambda_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}h_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) \\
& - (\Omega_3 + \Phi_4)(g_i\psi_i\bar{\psi}_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{g}_i\psi_j\psi_k) - (\Omega_4 + \Phi_3)(\bar{g}_i\bar{\psi}_i\psi_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}g_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k) \\
& + (\omega_1 - \Phi_3)(h_i(\lambda_i\psi_0 + \bar{\psi}_i\bar{\lambda}_0) + \varepsilon_{ijk}\bar{h}_i\lambda_j\bar{\psi}_k + \bar{g}_i\lambda_i\bar{\lambda}_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}g_i\lambda_j\lambda_k) \\
& + (\omega_2 - \Phi_4)(\bar{h}_i(\psi_i\lambda_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\psi}_0) + \varepsilon_{ijk}h_i\psi_j\bar{\lambda}_k + g_i\bar{\lambda}_i\lambda_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{g}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) \\
& + (\omega_3 - \Phi_1)(g_i(\psi_i\lambda_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\psi}_0) + \varepsilon_{ijk}\bar{g}_i\psi_j\bar{\lambda}_k + \bar{h}_i\psi_i\bar{\psi}_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}h_i\psi_j\psi_k) \\
& + (\omega_4 - \Phi_2)(\bar{g}_i(\lambda_i\psi_0 + \bar{\psi}_i\bar{\lambda}_0) + \varepsilon_{ijk}g_i\lambda_j\bar{\psi}_k + h_i\bar{\psi}_i\psi_0 + \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\bar{h}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k) \\
& + \Phi_{11}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\lambda_k + 3\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 3\psi_0\psi_i\lambda_j\lambda_k + 3\bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 6\bar{\lambda}_0\bar{\psi}_i\psi_j\lambda_k) \\
& + \Phi_{22}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 3\lambda_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 3\psi_0\psi_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 3\bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 6\lambda_0\psi_i\bar{\psi}_j\bar{\lambda}_k) \\
& + \Phi_{33}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\psi_0\psi_i\psi_j\psi_k + 3\bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 3\lambda_0\lambda_i\psi_j\psi_k + 3\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 6\bar{\psi}_0\psi_i\bar{\lambda}_j\lambda_k) \\
& + \Phi_{44}\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 3\psi_0\psi_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 3\lambda_0\lambda_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 3\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 6\psi_0\bar{\psi}_i\bar{\lambda}_j\lambda_k) \\
& - \Phi_{12}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_k + \bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 2\psi_0\psi_i\lambda_j\bar{\lambda}_k + 2\lambda_0\lambda_i\psi_j\bar{\psi}_k + 2\bar{\psi}_0\psi_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 2\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k \\
& + \psi_i\psi_j\bar{\lambda}_k\lambda_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k\bar{\psi}_0 + \bar{\psi}_i\lambda_j\lambda_k\psi_0 + \lambda_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k\bar{\lambda}_0) \\
& - \Phi_{34}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\psi_0\psi_i\psi_j\bar{\psi}_k + \bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\psi_k + 2\lambda_0\lambda_i\psi_j\bar{\psi}_k + 2\psi_0\psi_i\lambda_j\bar{\lambda}_k + 2\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\psi}_j\psi_k + 2\bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k \\
& + \psi_i\psi_j\bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_0 + \psi_i\lambda_j\bar{\lambda}_k\bar{\psi}_0 + \bar{\lambda}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k\lambda_0 + \bar{\psi}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\psi_0) \\
& - \Phi_{13}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\psi_k + \bar{\psi}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 2\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\lambda_j\bar{\psi}_k + \psi_0\psi_i\psi_j\lambda_k + \bar{\lambda}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 2\bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\lambda}_k) \\
& + \Phi_{14}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\lambda_0\lambda_i\lambda_j\bar{\psi}_k + \psi_0\lambda_i\lambda_j\bar{\lambda}_k + 2\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\lambda_j\bar{\psi}_k + \bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\lambda_k + \bar{\lambda}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\psi_k + 2\psi_0\psi_i\lambda_j\bar{\psi}_k) \\
& + \Phi_{23}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\psi_k + \bar{\psi}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 2\lambda_0\lambda_i\psi_j\bar{\lambda}_k + \psi_0\psi_i\psi_j\bar{\lambda}_k + \lambda_0\psi_i\psi_j\bar{\psi}_k + 2\bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k) \\
& - \Phi_{24}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}(\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k + \psi_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 2\lambda_0\lambda_i\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k + \bar{\psi}_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j + \lambda_0\psi_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k + 2\psi_0\psi_i\bar{\psi}_j\bar{\lambda}_k) \\
& + (\Omega_{11} - \Phi_{12})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0) + (\Omega_{22} - \Phi_{12})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0) \\
& - (\Omega_{33} + \Phi_{34})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\psi_i\psi_j\psi_k\bar{\psi}_0) - (\Omega_{44} + \Phi_{34})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k\psi_0) \\
& + (\Omega_{13} - \Phi_{23})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\psi}_0\lambda_i\lambda_j\lambda_j + 3\bar{\lambda}_0\lambda_i\lambda_j\psi_k) + (\Omega_{23} - \Phi_{13})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\bar{\psi}_0 + 3\psi_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k\lambda_0) \\
& - (\Omega_{13} + \Phi_{14})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\lambda}_0\psi_i\psi_j\psi_k + 3\bar{\psi}_0\psi_i\lambda_j\psi_k) - (\Omega_{14} + \Phi_{13})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k\bar{\lambda}_0 + 3\lambda_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k\psi_0) \\
& + (\Omega_{14} - \Phi_{24})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\psi_0 + 3\bar{\psi}_i\lambda_j\lambda_k\bar{\lambda}_0) + (\Omega_{24} - \Phi_{14})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\psi_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\lambda}_k + 3\lambda_0\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j\bar{\psi}_k) \\
& - (\Omega_{23} + \Phi_{24})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\psi_i\psi_j\psi_k\lambda_0 + 3\psi_i\psi_j\bar{\lambda}_k\bar{\psi}_0) - (\Omega_{24} + \Phi_{23})\frac{\varepsilon_{ijk}}{6}(\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k\lambda_0 + 3\psi_0\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\bar{\lambda}_k).
\end{aligned} \tag{B.1}$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega &= \partial_{11}F + \partial_{22}F = -(\partial_{33}F + \partial_{44}F), & \omega &= \partial_{14}F + \partial_{23}F, \\ \Phi &= \partial_{12}F = \partial_{34}F.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Bibliografia

- [1] E. Witten, *Dynamical breaking of supersymmetry*, Nucl. Phys. **B 188** (1981) 513.
- [2] A. Pashnev and F. Toppan, J. Math. Phys. **42** (2001) 5257 (hep-th/0010135).
- [3] F. Toppan, *Irrep and off-shell invariant action of the N -extended supersymmetric quantum mechanics*, PoS **IC2006** (2006) 033 (hep-th/0610180).
- [4] S. Bellucci, S. Krivonos, A. Nersessian, A. Shcherbakov, *$2k$ -dimensional $N=8$ supersymmetric quantum mechanics*, (hep-th/0410073v1)
- [5] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *Quaternionic and octonionic spinor. A classification*, *JHEP* **04** (2003), 040 (hep-th/0302113).
- [6] S. Gates, J. Gonzales, B. MacGregor, J. Parker, R. Polo-Sherk, V. G. J. Rodgers, L. Wassink, *$4D$, $N=1$ Supersymmetry Genomics (I)*, *JHEP* **0912** (2009), 008 (hep-th/0902.3830v4).
- [7] S. Gates, J. Hallett, J. Parker, V. G. J. Rodgers, K. Stiffler (II), *$4D$, $N=1$ Supersymmetry Genomics (II)*, (hep-th/1112.2147v1).
- [8] S. Coleman e J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.
- [9] J.L. Gervais, B. Sakita, Nucl. Phys. B **34** (1971) 427.
- [10] Y. A. Goldfand, E. P. Likhtman, JETP Lett. **13** (1971) 452.
- [11] D.V. Volkov, Akulov, JETP Lett. **16** (1972) 621.
- [12] J. Wess, B. Zumino, *Supergauge Transformations in Four Dimensions*, Nucl. Phys. B **70** (1974) 39; *A Lagrangian Model Invariant under Supergauge Transformations*, Phys. Lett. B **49** (1974) 52; *A Supergauge Invariant Extension of Quantum Electrodynamics*, Nucl. Phys. B **78**, (1974) 1.
- [13] A. Neveu and J.H. Schwartz, Nucl. Phys. B **31** (1971) 86.
- [14] S. J. Gates, Jr. and L. Rana, *Ultramultiplets: A new representation of rigid $2-d$, $N=8$ super- symmetry*, Phys. Lett. B **342** (1995) 132-137 (hep-th/9410150).
- [15] E.E. Donets, A. Pashnev, J.J. Rosales, M.M. Tsulaia, *$N=4$ Supersymmetric Multidimensional Quantum Mechanics, Partial SUSY Breaking and Superconformal Quantum Mechanics*, Phys. **Rev. D 61** (2000) 043512, (hep-th/9907224).

- [16] E. Ivanov, S. Krivonos, A. Pashnev, *Class. Quantum Grav.* 8 (1991) 19.
- [17] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P.K. Townsend, A. Van Proeyen, *Black Holes and Superconformal Mechanics*, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 4553, (hep-th/9804177).
- [18] G.W. Gibbons, G. Papadopoulos, K.S. Stelle, *HKT and OKT Geometries on Soliton Black Hole Moduli Space*, *Nucl. Phys. B* 508 (1997) 623, (hep-th/9706207).
- [19] A. Maloney, M. Spradlin, A. Strominger, *Superconformal Multi-Black Hole Moduli Spaces in Four Dimensions*, *JHEP* 0204 (2002) 003, (hep-th/9911001).
- [20] D. Bak, K. Lee, P. Yi, *Complete Supersymmetric Quantum Mechanics of Magnetic Monopoles in $N=4$ SYM Theory*, *Phys. Rev. D* 62 (2000) 025009, (hep-th/9912083).
- [21] E. Witten, *Anti De Sitter Space And Holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 253, (hep-th/9802150).
- [22] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 231, (hep-th/9711200).
- [23] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P.K. Townsend, A. Van Proeyen, *Black Holes and Superconformal Mechanics*, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 4553, (hep-th/9804177).
- [24] J. A. de Azcarraga, J. M. Izquierdo, J. C. Perez Bueno, P. K. Townsend, *Superconformal mechanics, black holes, and non-linear realizations*, *Phys. Rev. D* 59 (1999) 084015, (hep-th/9810230).
- [25] G.W. Gibbons, P.K. Townsend, *Black Holes and Calogero Models*, *Phys. Lett. B* 454 (1999) 187, (hep-th/9812034).
- [26] V. Akulov, M. Kudinov, *Extended Supersymmetric Quantum Mechanics*, *Phys. Lett. B* 460 (1999) 365, (hep-th/9905070).
- [27] E. Ivanov, S. Krivonos, O. Lechtenfeld, *New variant of $N=4$ superconformal mechanics*, *JHEP* 0303 (2003) 014, (hep-th/0212303).
- [28] Z. Kuznetsova, F. Toppan, *D -module Representations of $N=2,4,8$ Superconformal Algebras and Their Superconformal Mechanics*, (hep-th/1112.0995).
- [29] S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos and O. Lechtenfeld, *ABC of $N=8$, $d=1$ supermultiplets*, *Nucl Phys. B* **699** (2004) 226 (hep-th/0406015).
- [30] Z. Kuznetsova and F. Toppan, *Refining the classification of the irrep of the 1D N -extended supersymmetry*, *Mod. Phys. Lett. A* **23** (2008) 37 (hep-th/0701225).
- [31] Z. Kuznetsova, M. Rojas and F. Toppan, *Classification of irrep and invariant of the N -extended supersymmetry quantum mechanics*, *JHEP* **0603** (2006) 098 (hep-th/0511274).

- [32] Z. Kuznetsova and F. Toppan, *Decomposition and oxidation of the N -extended supersymmetric quantum mechanics multiplet*, Int. J. Mod. Phys. **A 23** (2008) 3947 (hep-th/0712.3176).
- [33] C.F. Doran, M. G. Faux, S. J. Gates Jr., T. Hubsch, K. M. Iga, G. D. Landweber and R. L. Miller, *Topology types of Adinkras and the corresponding representation of N -extended supersymmetry*, (hep-th/08060050).
- [34] M. Faux and S.J. Gates Jr., *Adinkras: A graphical technology for supersymmetric representation theory*, Phys. Rev. **D 71** (2005), 065002 (hep-th/0408004).
- [35] S. Bellucci, S. Krivonos, A. Nersessian, *$N=8$ supersymmetric mechanics on special Kahler manifolds*, Phys. Lett. **B 605** (2005) 181-184.
- [36] S. Bellucci, S. Krivonos, A. Marrani and E. Orazi, *Root action for $N=4$ supersymmetric mechanics theories*, Phys. Rev. **D 73** (2006), 025011 (hep-th/0511249).
- [37] S.J. Gates Jr. and L. Rana, *A theory of spinning particle for large N -extended supersymmetry*, Phys. Lett. **B 352** (1995), 50 (hep-th/9504025).
- [38] S. J. Gates and L. Rana, *A theory of spinning particle for large N -extended supersymmetry II*, Phys. Lett. **B 369** (1996), 261 (hep-th/9510151).
- [39] S. Bellucci, S. Krivonos, A. Sutulin, Phys. Lett. **B 605** (2005) 406.
- [40] M. Gonzales, Z. Kuznetsova, A. Nersessian, F. Toppan and V. Yeghikyan, Phys. Rev. **D 80** (2009), 025022 (hep-th/0902.2682).
- [41] S. Bellucci, A. Beylin, S. Krivonos, A. Nersessian and E. Orazi, Phys. Lett. **B 616** 2005 228 (hep-th/0503224); S. Bellucci and S. Krivonos, *Geometry of $N=4$ $d=1$ nonlinear supermultiplet*, Phys. Rev. **D 74** (2006) 125024 (hep-th/0611104); F. Delduc and E. Ivanov, Nucl. Phys. **B 787** (2007) 176 (hep-th/0706.0706).
- [42] F. Delduc and E. Ivanov, *New model of $N=4$ superconformal mechanics*, Phys. Lett. **B 654** (2007) 200 (hep-th/0706.2472).
- [43] E. Ivanov, S. Krivonos and O. Lechtenfeld, *$N=4$, $d=1$ supermultiplets from nonlinear realization of $D(2, 1; \alpha)$* , Class. Quant. Grav. **21** (2004), 1031 (hep-th/0310299).
- [44] E. Ivanov, *Nonlinear $(4, 8, 4)$ multiplet of $N=8$, $d=1$ supersymmetry*, Phys. Lett. **B 639** (2006), 579 (hep-th/0605194).
- [45] S. Bellucci and A. Nersessian, *A surprise in mechanics with nonlinear chiral supermultiplet*, Phys. Rev. **D 73** (2006), 107701 (hep-th/0512165).
- [46] S. Bellucci, A. Nersessian and A. Yeranyan, *Hamiltonian reduction and supersymmetric mechanics with Dirac monopole*, Phys. Rev. **D 74** (2006), 065022 (hep-th/0606152).

- [47] S. Bellucci, S. Krivonos and V. Ohanyan, *N=4 supersymmetry MICZ-Kepler systems on S^3* , *Phys. Rev. D* **76** (2007), 105023 (hep-th/0706.1469).
- [48] S. Krivonos and O. Lechtenfeld, *SU(2) reduction in N = 4 supersymmetric mechanics*(hep-th/0906.2469).
- [49] S. Bellucci, S. Krivonos and A. Sutulin, *Three dimensional N = 4 supersymmetric mechanics with Wu-Yang monopole*, (hep-th/0911.3257).
- [50] F. Delduc and E. Ivanov, *The common origin of linear and nonlinear chiral multiplets in N=4 mechanic*, *Nucl. Phys. B* **787** (2007), 176 (hep-th/0706.0706).
- [51] F. Delduc and E. Ivanov, *Gauging N=4 supersymmetric mechanic*, *Nucl. Phys. B* **753** (2006), 211 (hep-th/06052211).
- [52] K. Hasebe, *Hopf maps, lowest Landau level, and Fuzzy spheres*, *Sigma* **6** (2010) 071 (hep-th/1009.1192).
- [53] S. Bellucci, F. Toppan and V. Yeghikyan, *Second hopf map and Yang-Coulomb system on 5d (Pseudo)sphere*, *J. Phys. A* (hep-th/0905.3461).
- [54] S. Bellucci, A. Beylin, S. Krivonos, A. Nersessian and E. Orazi, *N=4 supersymmetric mechanic with nonlinear chiral supermultiplet*, *Phys. Lett. B* **616** 2005 228 (hep-th/0503244); F. Delduc and E. Ivanov, *Nucl. Phys. B* **787** (2007) 176 (arxiv:0706.0706[hep-th]).
- [55] L. Faria Carvalho, Z. Kuznetsova and F. Toppan, *Supersymmetric extension of Hopf map: N=4 sigma-models and the $S^3 \rightarrow S^2$ fibration*, *Nucl. Phys. B* **834**(2010) 237 (hep-th/0912.3279).
- [56] E. Ivanov and O. Lechtenfeld, *N=4 supersymmetric mechanic in harmonic superspace*, *JHEP* **0309** (2003), 073 (hep-th/0307111).
- [57] S. Fedoruk, E. Ivanov and O. Lechtenfeld, *Supersymmetric Calogero models by gauging*, *Phys. Rev. D* **79** (2009), 105015 (hep-th/0812.4276).
- [58] L. Baulieu, F. Toppan, *Twisted Superalgebras and Cohomologies of the N=2 Superconformal Quantum Mechanics*, *Nucl. Phys. B* **855** (2012) 742 (hep-th/1108.4370).
- [59] O. Lechtenfeld, F. Toppan, *An N=8 superconformal particle in the half-plane* (2011)(hep-th/1105.4067).
- [60] E. Ivanov, S. Krivonos, *Conformal and superconformal Mechanics Revisited*, *Nucl.Phys. B* **677** (2004) 485-500 (hep-th/0210196v1).
- [61] S. Bellucci, A. Galajinsky, E. Ivanov, S. Krivonos, *AdS₂/CFT₁, Canonical Transformations and Superconformal Mechanics*, *Phys.Lett. B* **555** (2003) 99-106 (hep-th/0212204v2).

- [62] R. Kallosh, *Black holes and quantum mechanics*, Scientific American 236 (2005) 7 (hep-th/9902007). P Claus, M Derix, R Kallosh, J Kumar, P K Townsend, A Van Proeyen, *Black Holes and Superconformal Mechanics*, Physical Review Letters 81 (1998) 21 (hep-th/9804177)
- [63] N. Berkovits, *A ten dimensional super-Yang-Mills action with off-shell supersymmetry*, Phys. Lett. **B 318** (1993) 104 (hep-th/9308128).
- [64] L. Baulieu, N. Berkovits, G. Bossard and A. Martins, *Ten dimensional super-Yang-Mills with nine off-shell supersymmetries*, Phys. Lett. **B 658** (2008) 249 (hep-th/0705.2002).
- [65] L. Baulieu, F. Toppan, *One-dimensional structures behind twisted and untwisted superYang-Mills theory*, Lett. Math. Phys. 98 (2011) p. 299-309 (hep-th/1010.3004v2).
- [66] L. Baulieu, G. Bossard, *New results on $N=4$ SuperYang-Mills Theory*, Phys. Lett. **B 632** (2005), p. 131 (hep-th/0507003v2).
- [67] M. Gonzales, M. Rojas and F. Toppan, *One-dimensional sigma-models with $N=5,6,7,8$ off-shell supersymmetries*, *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009), 4317 (hep-th/0812.3942).
- [68] F. Delduc and E. Ivanov, *New model of $N=8$ superconformal mechanics*, Phys. Lett. **B 654** (2007) 200 (hep-th/0706.2472).
- [69] M. Gonzales, S. Khodaei, F. Toppan, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 013514 (hep-th/1006.4678).
- [70] M. G. Faux, K. M. Iga and G. D. Landweber, *Dimensional enhancement via supersymmetry*, (hep-th/0907.3605).
- [71] M. G. Faux and G. D. Landweber, *Spin holografy via dimensional enhancement*, *Phys. Lett. B* **681** (2009), 161 (hep-th/0907.4543).
- [72] S.J. Gates Jr., T. Hubsch, (2011)(hep-th/1104.0722).
- [73] T. Hubsch, *Weaving Worldsheet Supermultiplets from the Worldlines Within* (2011)(hep-th/1104.3135).
- [74] T. Hubsch, I. E. Petrov, *Worldsheet matter superfields on half-shell*, *J. Phys. A* **43** (2010) 295206 (hep-th/0912.1038).
- [75] M. Gonzales, K. Iga, S. Khodaei and F. Toppan, *Pure and entangled $\mathcal{N} = 4$ linear supermultiplets and their one-dimensional sigma-model*, Submetido no Arxiv, (2012).