

Dissertação de
Mestrado

**“Uma Discussão do Espectro Fóton-Fotino
em Cenários com Condensados Fermiônicos
e Violação da Simetria de Lorentz”**

Luis Giraldo Durand Bernald

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Agosto de 2010.

A mis seres queridos

Resumo

Partindo da extensão mínima supersimétrica- $N=1$ da Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, estudamos os campos componentes do Supercampo de Fundo e sua influência no espectro de excitações do sistema fóton-fotino. Analisamos especialmente o papel dos parceiros supersimétricos da componente bosônica v_μ na violação da simetria de Lorentz, a saber, o campo espinorial de fundo Ψ e o campo auxiliar F .

Abstract

Starting with a minimal supersymmetric-N=1 extension of the Carroll-Field-Jackiw Electrodynamics, we studied the field components of the Background Superfield and their influence in the excitations spectrum of the foton-fotino system. We analyzed specifically the role of supersymmetric partners of the bosonic component v_μ in the violation of the Lorentz invariance, namely the background spinorial field Ψ and the auxiliar field F .

Agradecimentos

-A Deus, que faz possível todas as coisas.

-Ao professor Helayël, um grande ser humano, pela excelente orientação, a grande paciência, o estímulo para trabalhar e pelo exemplo que ele é para todo cientista, inclusive além da Física.

-A minha família pelo carinho de sempre, pela confiança e o apoio constante.

-Ao CBPF pela acolhida e as condições de trabalho concedidas.

-A todos meus amigos do CBPF, pelos bons momentos, a companhia e o afeto.

-Ao Kim, Bruno D., Bruno G. e Enrique, que leram e apresentaram sugestões e críticas ao manuscrito.

-À CAPES pelo apoio financeiro.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Introdução à Supersimetria	8
2.1	O modelo elementar	12
2.2	Fechamento da álgebra das transformações de SuSy	15
2.3	A super-álgebra de Poincaré	17
2.4	Formalismo em supercampos N=1	21
2.5	Supercampos quirais	27
2.6	Integração sobre as coordenadas de Grassmann	30
2.7	O modelo de Wess-Zumino no formalismo de supercampos	32
2.8	Supercampos vetoriais	32
2.8.1	Teoria de gauge abeliana supersimetrica	33
3	Extensão Supersimétrica da Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw	38
4	O Espectro do Dupleto Fóton-Fotino com Violação da Simetria de Lorentz	43
4.1	O Propagador Bosônico	45
4.2	O Propagador Fermiônico	51
5	Considerações Finais e Futuros Encaminhamentos	56
A	Apêndice 1	59
A.1	Transformações de Lorentz	59
A.2	Caso 1: Vácuo trivial (Figura 1)	59
A.3	Caso 2: Vácuo não trivial (Figura 2)	60
B	Apêndice 2	62
B.1	Espinores	62
B.2	Convenções para a adição e conjugação Hermiteana	63
B.3	Relações para a “métrica” espinorial	63
B.4	Relações para variáveis grassmannianas	64
B.5	Relações entre as matrizes sigma	64
B.6	Condição de realidade	65
B.7	Álgebra para os operadores de spin	66

C	Apêndice 3	67
C.1	Rearranjamento de Fierz	67
C.2	Bilineares fermiônicos de Majorana adicionais	75
C.3	Convenções e propriedades das matrizes gama	76
C.4	Relações utilizadas na derivação do propagador bosônico	76

Capítulo 1

Introdução

Partindo do antigo conceito de simetria, harmonia entre as proporções, os físicos têm desenvolvido e estendido esta ideia, que se transformou em uma ferramenta básica para a formulação e análise dos princípios fundamentais das teorias modernas da Física. Neste contexto, a simetria de Lorentz, que consiste na covariância das leis da Física sob rotações e *boosts*, é uma das mais importantes para a Teoria Quântica de Campos e para o Modelo-Padrão da Física de Partículas (MP). Seu estabelecimento como pilar da Física atual vem sendo respaldado pelas inumeráveis verificações experimentais ao longo da história. Entretanto, vêm sendo observados fenômenos que sugerem que a simetria de Lorentz não possua caráter universal, mas seja restrita a um domínio de energias.

Na década passada, observações astronômicas do espectro de absorção e emissão de gases em torno de estrelas distantes sugerem que a constante de estrutura fina possa estar variando lentamente em escalas de tempos cosmológicos [1]. A constante de estrutura fina é uma medida da intensidade da interação eletromagnética entre fótons, elétrons e pósitrons, sendo formado pela combinação de outras 3 constantes fundamentais: A velocidade da luz, a carga elétrica do elétron e a constante de Planck. Já que os modelos são

construídos em torno destas constantes, uma alteração de qualquer uma delas provocaria grandes mudanças nas propriedades da matéria. E a velocidade da luz poderia ser uma dentre elas.

Outro fenômeno intrigante são os raios cósmicos ultra-energéticos que violam o limite GZK (Greisen-Zatsepin-Kuzmin) [2],[3]. Este limite que é calculado tomando em conta a simetria de Lorentz, estabelece que partículas com energias superiores a $E_{GK} = 4 \times 10^{19}$ eV, provenientes de fontes que ficam a distâncias maiores de 100 Mpc (chamado de horizonte GZK) da Terra, não podem ser detectadas. Isto se deve ao fato de que a Relatividade Restrita prediz que elas devam decair antes de chegar à Terra, como consequência de sua interação com os fótons livres da radiação cósmica de fundo. Entretanto, na última década, o observatório japonês AGASA (Akeno Giant Air Shower Array), e mais recentemente o observatório argentino Pierre Auger, já tinham detectado a presença no espectro de partículas acima deste limite. Uma possível alternativa para explicar este desvio é que a simetria de Lorentz possa não ser mais verificada, e portanto deva ser modificada, a esta faixa de energias.

Os físicos teóricos vêm introduzindo a quebra da simetria de Lorentz na construção de modelos de unificação na escala de Planck. Um dos primeiros trabalhos nesta direção é o artigo de Kostelecky e Samuel [4]. Nele, os autores mostraram que interações na teoria de cordas podem conduzir à quebra da simetria de Lorentz, através de um mecanismo que quebra espontaneamente a simetria de Lorentz com campos tensoriais adquirindo valor esperado no vácuo não-trivial. Anos após, os trabalhos de Coleman e Kostelecky [5] deram

origem ao Modelo Padrão Estendido (MPE). O Lagrangeano do MPE contém todos os termos usuais do Modelo Padrão acrescido com todos os possíveis termos que se podem construir com os campos do MP e que quebrem a simetria de Lorentz. Este modelo foi desenvolvido para tratar os efeitos da quebra espontânea da simetria de Lorentz em um cenário de teoria efetiva a energias abaixo da escala das supercordas. O Modelo Padrão Estendido tem dado origem a uma nova e vasta literatura que contempla aplicações para a Teoria de Campos, Física de Partículas e Cosmologia.

Outro enfoque alternativo ao trabalho de Kostelecky e que descreve a quebra da simetria de Lorentz é a Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa [6]. Esta teoria é uma generalização da Mecânica Quântica Não-Comutativa (onde as coordenadas não mais comutam entre si) [7] e introduz comutadores canônicos modificados que podem descrever processos que se estendem além da invariância de Lorentz.

Na atualidade, o fenômeno da quebra da simetria de Lorentz vem ganhando muita atenção, o que levou à existência de uma variedade de modelos, além dos mencionados, que fornecem mecanismos para quebrar a simetria de Lorentz numa escala fundamental.

Em vários modelos, implementa-se a quebra da simetria de Lorentz por meio de campos de fundo. Para poder ilustrar o significado destes, e de que forma estes campos realizam a quebra, é preciso dizer algumas palavras sobre os dois tipos de transformações de Lorentz que existem. Em primeiro lugar, temos as transformações de observador, também chamadas de transformações passivas. Estas relacionam as medições feitas em sistemas de referência inerciais que apresentam movimento relativo. Por outro lado, sistemas idênticos podem ser transformados (por rotações e *boosts*) um com respeito ao outro, enquanto são

estudados por um mesmo observador inercial. Isto define o segundo tipo de transformação, chamada de transformação de partícula ou ponto de vista ativo. Nas transformações ativas, os campos do sistema são fisicamente transformados para uma nova configuração. No caso de um vácuo trivial, existe uma equivalência entre as transformações passivas e ativas, já que uma é a transformação inversa da outra.

Teorias que incorporam a quebra da simetria de Lorentz destroem esta equivalência devido à presença de campos externos que estão “congelados” no espaço-tempo, chamados de campos de fundo. Estes campos de fundo são grandezas tensoriais fixas que definem direções privilegiadas no espaço-tempo. Assim, sobre uma transformação de partícula, os campos de fundo não são afetados e a configuração final muda drasticamente.

É importante ressaltar aqui o seguinte fato: quando nos referimos à quebra da simetria de Lorentz, deve entender-se que estamos nos referindo à violação no sentido ativo da transformação. Todas as teorias, incluindo aquelas que quebram a simetria de Lorentz, precisam necessariamente respeitar a invariância das transformações de Lorentz passivas, já que uma mudança de observador não pode alterar a física de um sistema.

Na década de noventa Carroll, Field e Jackiw [8] propuseram uma teoria de gauge abeliana que contém um campo de fundo. O Lagrangeano do modelo é descrito pelo Lagrangeano de Maxwell acrescido de um termo do tipo Chern-Simons em $D = 4$, que é o responsável pela quebra da simetria de Lorentz:

$$S_{CFJ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}v_\mu\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}A_\nu F_{\alpha\beta}. \quad (1.1)$$

Aqui, o quadri-vetor, v_μ , é o campo de fundo que define uma direção preferencial no

espaço-tempo. É fácil mostrar, em virtude da constância de v_μ , que o termo de Chern-Simons é invariante sobre transformações de gauge, o que assegura a conservação da carga elétrica. O modelo de Carroll-Field-Jackiw tem sido discutido em grandes detalhes numa grande variedade de aspectos entre os quais podemos citar: a birrefringência (atividade ótica do vácuo) induzida pelo campo de fundo [9], estudos de correções radiativas [10], quebra espontânea da simetria de gauge [11], estudo da radiação Cerenkov no vácuo [12] e processos de decaimento do fóton [13].

Ainda que a violação da simetria de Lorentz e da simetria CPT, possibilidades não contempladas pelo Modelo Padrão, motive o estudo do Modelo Padrão Estendido de Koc-telecky, existem outros problemas que o MP não consegue acomodar, como por exemplo o problema de hierarquia de gauge (instabilidade do termo de massa para o bóson de Higgs frente às correções quânticas), o problema de hierarquia dos acoplamentos de Yukawa dos léptons e quarks e o problema da matéria escura. Um dos candidatos mais fortes para resolver estes problemas é o Modelo Padrão Minimamente Supersimetrizado (MSSM), que é definido como a extensão supersimétrica mínima do Modelo Padrão, ou seja, a extensão com o menor número de novos campos parceiros e novas interações.

Neste contexto, surge uma linha de pesquisa muito atual (e que vem sendo desenvolvida em vários trabalhos em nosso Grupo de Pesquisa) que consiste na extensão supersimétrica de modelos com distintas formas de se realizar a violação da simetria de Lorentz. A nossa premissa é que na escala fundamental na qual a quebra de $SO(1, 3)$ ocorre, a supersimetria é exata ou, se já foi quebrada, deixa os seus resíduos através da presença de parceiros supersimétricos já dissociados. Entretanto, mesmo sem nos comprometermos com algum

mecanismo de quebra de supersimetria, partimos da hipótese de que a violação da simetria de Lorentz deva ser realizada em um cenário onde os parceiros supersimétricos não estão completamente desacoplados. Desta forma, justificamos a nossa linha de investigação de quebra da simetria de Lorentz em um contexto fortemente marcado pela presença da supersimetria.

Estamos, para sermos mais específicos, interessados no modelo que discute a versão supersimétrica simples (supersimetria- $N=1$) do modelo de Carroll-Field-Jackiw [34]. A nossa proposta, e esta é a contribuição original contida nesta dissertação, consiste em estudar o espectro e o *splitting* entre o fóton e o fotino no modelo de Carroll-Field-Jackiw supersimetrizado levando em conta o efeito dos parceiros supersimétricos do vetor de fundo, v_μ , que marca a anisotropia espaço-temporal associada à quebra da simetria de Lorentz.

Esta Dissertação está organizada da seguinte forma. O Capítulo 2 propõe uma revisão dos principais conceitos da supersimetria, $N = 1$ e $D = 4$. Estuda-se o modelo de Wess-Zumino, a sua formulação em superespaço e uma teoria de gauge Abelian supersimétrica. No Capítulo 3, estuda-se a proposta dos autores do trabalho da referência [34] para implementar a quebra de Lorentz em um modelo supersimétrico no setor de gauge. O caminho adotado passa pela introdução de um termo em supercampos análogo ao termo que quebra a simetria de Lorentz no modelo da Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw. O conceito do supercampo de fundo é discutido. O Capítulo 4 apresenta o trabalho original da dissertação. Nele estudam-se os efeitos do supercampo de fundo sobre o espectro de massas dos campos fundamentais do modelo, a saber, o fóton e seu parceiro supersimétrico

o fotino. Seguem-se, no Capítulo 5, as discussões conclusivas e futuros encaminhamentos. Ao final, encontram-se três Apêndices. No Apêndice 1, apresentamos uma descrição sucinta do que consideramos ser uma violação da simetria de Lorentz. Comenta-se sobre transformações passivas (ou de observador) e ativas (ou de partícula) e se ilustra a não-equivalência destes 2 pontos-de-vista quando há um fundo externo, gerado por alguma fonte à qual não temos acesso. Nos Apêndices 2 e 3, coletamos uma série de resultados auxiliares aos desenvolvimentos técnicos necessários para os nossos resultados.

Capítulo 2

Introdução à Supersimetria

A supersimetria pode-se ser apresentada como uma das simetrias mais extraordinárias da Física Teórica, caso venha a se confirmar. A razão disto é que ela propõe uma relação entre os bósons (partículas de spin inteiro) e férmions (partículas de spin semi-inteiro), entidades que têm papéis muito diferentes na Natureza. No Modelo Padrão, os bósons atuam como portadores das interações, enquanto os férmions representam a matéria interagente. Contrariamente, na supersimetria, os bósons e férmions são alocados em uma mesma representação (ou supermultiplete) de um supergrupo estendido que engloba as transformações de Poincaré e as próprias transformações da supersimetria. Isto traz, como consequência, que a cada partícula está associada uma outra, denominada parceira supersimétrica. Assim para uma partícula bosônica (fermiônica), existe sua correspondente partícula fermiônica (bosônica) com a mesma massa. A supersimetria é uma simetria do espectro; daí a existência de estados degenerados e partículas de mesma massa nos sistemas supersimétricos.

Portanto, a supersimetria requer que o número de partículas fundamentais seja, no mínimo duplicado. Entretanto, isto entra em sério conflito com o observado, já que as ditas parceiras não foram ainda detectadas. Logo, se a supersimetria existe, deve ser quebrada no regime de baixas energias. Atualmente, existe uma grande expectativa sobre os resultados que o LHC possa trazer em favor ou detrimento da teoria nos próximos anos.

Historicamente, a supersimetria foi proposta pela primeira vez no contexto da física hadrônica, em 1966, por H. Myazawa [14],[15], que encontrou o primeiro supergrupo, enquanto tentava unificar as simetrias do espectro de bárions e mésons com as simetrias espaço-temporais do grupo de Poincaré, embora no tempo de sua publicação seu trabalho tenha sido ignorado. Esta unificação é um aspecto importante em qualquer modelo que tente unificar a gravidade com as outras forças, já que a gravitação está ligada às simetrias espaço-temporais e as outras forças estão associadas às simetrias internas. Um ano depois, Coleman e Mandula provaram seu famoso *teorema no-go* [16], que afirma não ser possível encontrar uma extensão não-trivial para as simetrias do espaço-tempo (grupo de Poincaré) na matriz S . Basicamente, estabelece que, se um sistema físico tem uma invariância descrita por um grupo de Lie, G , que contenha o grupo de Poincaré (com álgebra P) e alguma outra simetria interna (com álgebra I), então a álgebra de Lie correspondente deve ser a soma direta das álgebras P e I . Interpreta-se este teorema dizendo-se que a unificação da gravidade com os grupos de gauge têm que seguir um programa que estende os grupos de Lie e neste contexto, as super-álgebras apresentam-se como a resposta, já que elas nos permitem contornar o *teorema no-go* de Coleman-Mandula. O seguinte desenvol-

vimento foi simultâneo, já que vários físicos redescobriram a supersimetria. Por um lado, na União Soviética, em 1971, temos o trabalho de Yu A. Golfand e E.P. Likhtman [17], que apresentaram uma construção da super-álgebra de Poincaré . No ano seguinte, temos as contribuições contidas no trabalho de D.V. Volkov e V.P. Akulov [18], que tentaram associar o férmion sem massa (que aparece devido à quebra espontânea da supersimetria) ao neutrino. A base matemática para o trabalho de Volkov e seus colaboradores foi dada em 1969 (publicado em 1970), no trabalho de Berezin e Katz [19] onde as álgebras graduadas são estudadas cuidadosamente. Por seu lado, no ocidente, no contexto de uma versão incipiente da teoria das cordas, Ramond, Neveu e Schwarz [20] se confrontaram com um problema de estados não-físicos com norma negativa na teoria. Eles encontraram que a resposta para remover aqueles estados indesejáveis envolvia a adição de uma nova simetria anticomutativa. Também, no contexto das teorias de cordas, temos o trabalho de J. L. Gervais e B. Sakita (1971), onde a supersimetria foi introduzida em uma teoria de cordas em $D = 2$ dimensões e as propriedades que os campos fermiônicos e bosônicos tinham foi chamada de *supergauge invariance*, provavelmente a primeira referência ao prefixo *super*. A atenção da comunidade culminou, finalmente, no início do ano de 1974. J. Wess e J. Zumino escreveram a primeira teoria quântica de campos em $D = 4$ dimensões [24],[25], baseada em supersimetria e que estabeleceu o caminho para futuras pesquisas.

A concretização da teoria chegou só após a supersimetria em $D = 4$ dimensões ter sido estudada interamente. O nome de supersimetria foi cunhado por Salam e Strathdee em 1974, em Trieste [21], mudando assim o nome antigo *supergauge*. Teorias de Gauge não-Abelianas foram supersimetrizadas, simultaneamente por Ferrara e Zumino; e Salam

e Strathdee [22], em 1974. Também Salam e Strathdee introduziram o formalismo de superespaço [23]. Mecanismos para a quebra espontânea da supersimetria mediante os termos F e D foram encontrados por O’Raifeartaigh [26], e Fayet and Iliopoulos [32]. A primeira versão de um Modelo-Padrão supersimétrico foi proposta em 1981 por H. Georgi e S. Dimopoulos [33].

Como se pode observar, a supersimetria, apesar da ausência de provas experimentais que a corroborem, conquistou muitos físicos teóricos ao longo de sua história. Uma das principais razões para este fenômeno é que a supersimetria fornece a possibilidade de cancelar as divergências no setor ultravioleta em muitas teorias de campos, devido ao fato de se ter o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos em um mesmo multiplete de partícula. Estes cancelamentos são particularmente atraentes no caso de uma teoria quântica da gravitação e, como foi mostrado posteriormente, uma teoria supersimétrica local (Supergravidade) incorpora naturalmente a gravitação. Estes fatos fizeram com que a supersimetria seja considerada uma ideia central na tentativa de construir uma teoria de campos que combine todas as interações.

No presente capítulo, abordaremos as principais características da supersimetria. Partindo dos testes clássicos para o modelo de Wess-Zumino, introduzimos a super-álgebra de Poincaré. Em seguida, estudamos as bases do formalismo em super-espaço e culminamos com a apresentação da teoria de gauge Abelian supersimétrica. As referências para este capítulo estão listadas em [27], [28], [29], [30], [31] e, em particular, adotamos as convenções de [30].

2.1 O modelo elementar

Com o propósito de ilustrar as principais características da supersimetria, é conveniente começarmos por um modelo elementar. Um modelo supersimétrico consiste de um conjunto de campos bosônicos e fermiônicos, um conjunto de transformações lineares que misturem estes campos e uma ação que exiba esta simetria.

Para construir este modelo adotaremos como regra que o número de graus de liberdade bosônicos deva ser igual ao número de graus de liberdade fermiônicos.

Por simplicidade, analisamos a teoria livre. Supondo que nosso modelo admita um férmion de Majorana Ψ , então *on-shell*, temos $i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0$, o que confere a Ψ dois graus de liberdade fermiônicos. Segundo esta regra, para que os graus de liberdade estejam balanceados, é preciso que 2 graus de liberdade bosônicos sejam introduzidos. Isto pode ser feito introduzindo 2 campos escalares ou um campo vetorial sem massa com 2 graus de liberdade. Aqui trabalhamos só a primeira possibilidade, deixando a outra para a seção final deste capítulo de revisão.

Se agrupamos estes 2 campos escalares no campo escalar complexo, ϕ , e $\Psi = (\psi \ \bar{\psi})^T$ o Lagrangeano para o modelo é conhecido como o modelo de Wess-Zumino (sem massa) e é dado por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi. \quad (2.1)$$

A forma explícita das transformações de supersimetria que misturam os campos, parametrizadas por um espinor constante de Majorana ξ , são dadas por:

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \sqrt{2}\xi\psi \\ \delta\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Até este ponto, todo o modelo é construído impondo que os campos verificam as equações de movimento, ou seja é uma formulação *on-shell*. Se agora desejamos que os campos não estejam mais sujeitos a esta restrição, temos que introduzir algumas modificações .

Se Ψ não satisfaz a equação de movimento, então tem quatro graus de liberdade fermiônicos. Portanto, além do campo ϕ que introduzimos, é preciso acrescentar dois campos escalares a mais. Entretanto, temos que ter cuidado para que a presença destes campos não gere novos estados *on-shell*. Assim, como os termos em um Lagrangeno livre são quadráticos nos campos, podemos intruzir no Lagrangeano um termo do tipo $|F|^2$, sendo F é um campo escalar complexo. Logo nosso lagrangeano *off-shell* fica:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + |F|^2\tag{2.3}$$

O campo complexo F é chamado de campo auxiliar. O campo auxiliar, como se pode observar não tem dinâmica e é removido por meio das equações de movimento.

As transformações de supersimetria *off shell* são modificadas da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}\xi\psi \\
\delta\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F \\
\delta F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}\partial_\mu\psi \\
\delta\phi^* &= \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi} \\
\delta\bar{\psi} &= -i\sqrt{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\phi^* + \sqrt{2}\bar{\xi}F^* \\
\delta F^* &= -i\sqrt{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

O seguinte passo é mostrar que o modelo é invariante sob transformações de supersimetria. Para isto, vamos a encontrar as variações de cada termo no Lagrangeano.

De forma imediata, temos:

$$\begin{aligned}
\delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^*) &= \partial_\mu(\delta\phi)\partial^\mu\phi^* \\
\delta|F|^2 &= F\delta F^* + F^*\delta F \\
&= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}\partial_\mu\psi F^* - i\sqrt{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi F.
\end{aligned}$$

A variação do setor espinorial é:

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) &= \frac{i}{2}\partial_\mu(\delta\bar{\psi})\bar{\sigma}^\mu\psi + \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu(\delta\psi) \\
&\quad - \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu(\delta\psi) - \frac{i}{2}\delta(\bar{\psi})\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\xi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + \frac{i\sqrt{2}}{2}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\psi)\partial_\mu F^* \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}\partial_\nu\phi + \frac{i\sqrt{2}}{2}(\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi)F \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\partial_\nu\phi^* - \frac{i\sqrt{2}}{2}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi)F^* \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{i\sqrt{2}}{2}(\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi)\partial_\mu F
\end{aligned}$$

[fazendo integração por partes

e utilizando as identidades:

$$\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu + \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu + \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu = 2\eta^{\mu\nu}\text{temos:]}$$

$$= \sqrt{2}\xi\psi\Box\phi^* + i\sqrt{2}(\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi)F +$$

$$\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi}\Box\phi - i\sqrt{2}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi)F^* + \text{div.total}$$

$$= -\delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + |F|^2) + \text{div.total.} \quad (2.5)$$

Portanto, a variação do Lagrangeano por transformações de supersimetria é igual a uma divergência total; logo, a invarância do modelo está garantida já que a ação é invariante.

$$\boxed{\delta_{\text{susy}}\mathcal{L} = \text{div. total}}. \quad (2.6)$$

2.2 Fechamento da álgebra das transformações de SuSy

Se esperamos que as transformações de Supersimetria formem um grupo, temos que provar que elas constituem um conjunto de operações fechadas, isto é, temos que provar a

propriedade de fechamento ,calculando o comutador $[\delta_{\text{susy-1}}, \delta_{\text{susy-2}}]$ atuando em cada campo.

Para o campo escalar complexo, ϕ , o comutador assume a forma abaixo:

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\phi &= \delta_1(\sqrt{2}\xi_2\psi) - (1 \longleftrightarrow 2) \\
&= 2i(\xi_2\sigma_\mu\bar{\xi}_1)\partial_\mu\phi + 2\xi_2\xi_1 F - (1 \longleftrightarrow 2) \\
&= 2i(\xi_2\sigma_\mu\bar{\xi}_1 - \xi_1\sigma_\mu\bar{\xi}_2)\partial_\mu\phi \\
&= 2a^\mu(\xi_2, \xi_1)P_\mu\phi.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Similarmente, para o campo espinorial, ψ , temos:

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\psi &= \delta_1(i\sqrt{2}\sigma_\mu\bar{\xi}_2\partial_\mu\psi + \sqrt{2}\xi_2 F) \\
&= 2i\sigma^\mu\bar{\xi}_2(\xi_1\partial_\mu\psi) + \sqrt{2}\xi_2\delta_1 F \\
&= -2i(\xi_1\sigma^\mu\bar{\xi}_2)\partial_\mu\psi - i\sigma_\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(\xi_1\sigma^\nu\bar{\xi}_2) + \sqrt{2}\xi_2(i\sqrt{2}\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi) \\
&\quad [\text{utilizando a seguinte identidade (rearranjo de Fierz)} : \\
&\quad \xi_\alpha(\bar{\theta}\bar{\psi}) = -\frac{1}{2}(\sigma\bar{\psi})_\alpha(\xi\sigma^\mu\bar{\theta}) \text{ o \u00faltimo termo fica:} \\
&\quad 2i\xi_2(\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi) = -i\sigma_\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(\xi_2\sigma^\nu\bar{\xi}_1)] \\
&= -2i(\xi_1\sigma^\mu\bar{\xi}_2)\partial_\mu\psi + \text{sim}(1-2).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\psi &= -2i(\xi_1\sigma^\mu\bar{\xi}_2)\partial_\mu\psi + \text{sim}(1, 2) - (1 \longleftrightarrow 2) \\
&= -2i(\xi_1\sigma^\mu\bar{\xi}_2 - \xi_2\sigma^\mu\bar{\xi}_1)\partial_\mu\psi \\
&= 2a^\mu(\xi_1, \xi_2)P_\mu\psi
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Finalmente, para o campo auxiliar complexo, F ,

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]F &= \delta_1(i\sqrt{2}\bar{\xi}_2\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu) - (1 \longleftrightarrow 2) \\
&= 2i(\bar{\xi}_2\bar{\sigma}^\mu\xi_1)\partial_\mu F - 2\bar{\xi}_2\bar{\sigma}_\mu\sigma^\nu\bar{\xi}_1\partial_\mu\partial_\nu\phi - (1 \longleftrightarrow 2) \\
&\quad [\text{usando a propriedade : } \bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_2\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\xi}_1] \\
&= -2i(\xi_1\sigma_\mu\bar{\xi}_2 - \xi_2\sigma_\mu\bar{\xi}_1)\partial_\mu F \\
&= 2a^\mu(\xi_1, \xi_2)P_\mu F \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos que as transformações de supersimetria verificam a algebra seguinte:

$$\boxed{[\delta_{\text{susy}}, \delta_{\text{susy}}] = \delta_{\text{transl}}}. \tag{2.11}$$

Este fato joga luz sobre a estrutura da álgebra que estamos procurando. Como se pode observar, se desejamos que as transformações de supersimetria formem parte de uma álgebra, é preciso que as translações sejam introduzidas. Assim a álgebra procurada tem que ser uma extensão da álgebra de Poincaré. Este ponto será tratado na continuação.

2.3 A super-álgebra de Poincaré

Já que a linguagem natural para descrever a estrutura de uma álgebra está em função das relações que os geradores verifiquem, vamos definir o gerador de uma transformação de supersimetria da seguinte maneira:

$$\boxed{\delta_{\text{susy}} = i\epsilon^A Q_A = i(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}})}, \tag{2.12}$$

onde ϵ é o parâmetro constante da transformação de supersimetria e Q é o gerador da transformação, chamado de carga quiral. Tanto o parâmetro como o gerador são espinores

de Majorana, ou seja, são grandezas anti-comutantes (variáveis de Grassmann).

As relações que as cargas quirais formam podem ser obtidas do comutador de duas transformações de supersimetria.

$$\begin{aligned}\delta_1 &= i(\xi_1 Q + \bar{\xi}_1 \bar{Q}) \\ \delta_2 &= i(\xi_2 Q + \bar{\xi}_2 \bar{Q}).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Então, o comutador fica:

$$\begin{aligned}[\delta_1, \delta_2] &= -[\xi_1^\alpha Q_\alpha, \xi_2^\beta Q_\beta] - [\xi_1^\alpha Q_\alpha, \bar{\xi}_2^{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}] \\ &= -[\bar{\xi}_1^{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \xi_2^\beta Q_\beta] - [\bar{\xi}_1^{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{\xi}_2^{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}] \\ &= -\xi_2^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} \xi_1^\alpha - \xi_2^{\dot{\beta}} \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\xi}_1^{\dot{\alpha}} \\ &\quad - \xi_2^\alpha \{\bar{Q}^{\dot{\beta}}, Q_\alpha\} \bar{\xi}_1^{\dot{\alpha}} + \xi_1^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\xi}_2^{\dot{\beta}}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\tag{2.15}$$

Mas, na seção anterior, tínhamos encontrado:

$$[\delta_1, \delta_2] = (\xi_1 \sigma_\mu \bar{\xi}_2 - \xi_2 \sigma_\mu \bar{\xi}_1) P_\mu.\tag{2.16}$$

Comparando estes termos, obtemos:

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0 \\ \{\bar{Q}^{\dot{\beta}}, Q_\alpha\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\tag{2.18}$$

Para finalizar, temos que encontrar os comutadores das cargas quirais com os geradores do grupo de Lorentz e os geradores das translações.

Podemos supor que o comutador de uma carga quiral com uma translação possa ser escrito do seguinte modo :

$$[Q_\alpha, P_\mu] = a(\sigma)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}. \quad (2.19)$$

Tomando o conjugado Hermiteano

$$[\bar{Q}_\alpha, P_\mu] = a^*(\sigma)_{\beta\dot{\alpha}}Q^\beta. \quad (2.20)$$

Utilizando a identidade de Jacobi, temos:

$$[[Q_\alpha, P_\mu], P_\nu] + [[P_\mu, P_\nu], Q_\alpha] + [[P_\nu, Q_\alpha], P_\mu] = 0. \quad (2.21)$$

Então:

$$\begin{aligned} 0 &= [[Q_\alpha, P_\mu], P_\nu] + [[P_\nu, Q_\alpha], P_\mu] \\ &= a(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}[\bar{Q}^{\dot{\beta}}, P_\nu] - (\mu \longleftrightarrow \nu) \\ &= |a|^2(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu)_\alpha^\beta Q_\beta - (\mu \longleftrightarrow \nu) \\ &= |a|^2(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)_\alpha^\beta Q_\beta. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Portanto, $a = 0$ e o comutador fica

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0. \quad (2.23)$$

O último comutador pode ser encontrado a partir da relação que segue um espinor de Weyl $[M_{\mu\nu}, \psi_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \psi_\beta$. Assim, temos:

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta.$$

Então, a extensão da álgebra de Poincaré, que a partir de agora chamaremos de super-álgebra de Poincaré, fica:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] &= i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho}) \\
[P_\mu, M_{\rho\lambda}] &= i(\eta_{\mu\rho}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\rho) \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu \\
\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} &= 2(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}P_\mu \\
[Q_\alpha, P_\mu] &= 0 \\
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \\
[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Uma estrutura deste tipo é chamada de álgebra de Lie graduada, já que ela envolve comutadores e anti-comutadores.

Temos que mencionar aqui que esta não é a única generalização para a álgebra de Poincaré. Estas extensões acrescentam um novo índice, A , às cargas quirais, tal que $\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta} B}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu\delta_B^A$, onde $A = 1, 2, \dots, N$. Para o nosso caso, estamos estudando a super-álgebra quando $N=1$.

Na seguinte seção, vamos estudar um formalismo da supersimetria ($N=1$) muito van-

tajoso, que nos permitirá trabalhar com uma notação mais compacta e de mais fácil manipulação. Este formalismo introduz o conceito de superespaço, que é somente o espaço-tempo aumentado de novas coordenadas. Estas novas coordenadas têm sua origem na ideia de tentar encontrar uma representação diferencial para as cargas quirais que se possam interpretar como uma translação no dado espaço abstrato (do mesmo modo que o gerador P_μ representa as translações no espaço-tempo familiar). Motivados por esta ideia, tentaremos escrever uma expressão para a representação diferencial da forma $r(Q_\alpha) \approx \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$, onde θ^α é uma coordenada grassmaniana.

2.4 Formalismo em supercampos N=1

Um elemento do super-espaço é denotado por $p^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, M toma valores em $\{\mu, \alpha, \dot{\alpha}\}$; x^μ denota as coordenadas espaço-temporais e $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ denotam as coordenadas fermiônicas de natureza anti-comutante. Um elemento do grupo de translações finitas neste espaço pode ser definido como:

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{ip^M R_M}, \quad (2.25)$$

onde $R_M = (-P_\mu, Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}})$ representa um triplete de geradores. Então:

$$\begin{aligned} G(x, \theta, \bar{\theta}) &= \exp(-ix^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}) \\ &= \exp(-ixP + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

O produto de dois elementos $G_1(x, \theta, \bar{\theta}) = e^B$ e $G_2(y, \xi, \bar{\xi}) = e^A$, naturalmente, é outro elemento do grupo de super-translações $G_3(x', \theta', \bar{\theta}')$. Para encontrar sua expressão

explícita, usaremos a fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$$

Em seguida, calculamos o comutador entre os argumentos das exponenciais G_1 e G_2 :

$$\begin{aligned} [A, B] &= [-yP + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}, -xP + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q}] \\ &= [\xi Q, \theta Q] + [\bar{\xi}\bar{Q}, \theta Q] + \\ &\quad [\xi Q, \bar{\theta}\bar{Q}] + [\bar{\xi}\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}] \end{aligned}$$

(aqui, usamos as relações da super-álgebra de Poincaré). (2.27)

O primeiro comutador anula-se:

$$\begin{aligned} [\xi Q, \theta Q] &= \xi^\beta Q_\beta \theta^\alpha Q_\alpha - \theta^\alpha Q_\alpha \xi^\beta Q_\beta \\ &= \theta^\alpha \xi^\beta Q_\alpha Q_\beta + \theta^\alpha \xi^\beta Q_\beta Q_\alpha = \theta^\alpha \xi^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$= 0. \tag{2.29}$$

Do mesmo modo temos

$$[\bar{\xi}\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}] = 0. \tag{2.30}$$

Por último

$$\begin{aligned} [\bar{\xi}\bar{Q}, \theta Q] &= \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \theta^\alpha Q_\alpha - \theta^\alpha Q_\alpha \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \\ &= \theta^\alpha \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} Q_\alpha + \theta^\alpha \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \theta^\alpha \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \{ \bar{Q}^{\dot{\alpha}}, Q_\alpha \} \\ &= -2\theta_\beta \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} P_\mu = 2(\bar{\xi}\sigma^\mu\theta)P_\mu \\ &= -2(\theta\sigma^\mu\bar{\xi})P_\mu \end{aligned}$$

e (2.31)

$$[\xi Q, \bar{\theta}\bar{Q}] = -[\bar{\theta}\bar{Q}, \xi Q] = 2(\xi\sigma^\mu\bar{\theta})P_\mu.$$

Assim, podemos ver que o comutador $[A, B]$ é proporcional ao gerador das translações espaço-temporais, P_μ ; portanto, comutadores de ordem superior são nulos

$$\begin{aligned} G_2 \cdot G_1 &= G_3(x', \theta', \bar{\theta}') \\ &= \exp(-i[x^\mu + y^\mu - \theta\sigma\bar{\xi} + \xi\sigma\bar{\theta}]P_\mu + (\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Daqui, temos que a translação induzida pela multiplicação de G_1 e G_2 é

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + y^\mu + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta}) - i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi}) \\ \theta'^\alpha &= \theta^\alpha + \xi^\alpha \\ \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} &= \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Vamos, agora, introduzir o conceito do supercampo.

Os supercampos são funções definidas no superespaço. Devido ao caráter Grassmanniano das coordenadas fermiônicas, uma expansão em potências de $\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ tem um número finito de termos. Assim, as potências não-nulas que podemos formar são:

$$\{1, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}}, \theta^2, \bar{\theta}^2, \theta^2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^2\theta_\beta, \theta^2\bar{\theta}^2\}. \quad (2.34)$$

Então, o supercampo pode-se expressar como segue :

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + \theta^\alpha\psi_\alpha(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}(x) + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 N(x) + \theta^2\theta^\alpha\xi_\alpha(x) \\ &\quad + \theta^2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}(x) + \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_\mu(x) + \theta^2\bar{\theta}^2 F(x). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Os coeficientes desta expansão são chamados de campos componentes. O conjunto destes campos denomina-se o supermultiplete. Então, para um supercampo geral o supermulti-

plete, \mathbf{S} , é composto pelos campos :

$$\mathbf{S} = \{\psi_\alpha, \chi^{\dot{\alpha}}, \xi_\alpha, \lambda^{\dot{\alpha}}, \phi, M, N, F, A_\mu\}, \quad (2.36)$$

onde temos 4 espinores de Majorana que correspondem a 16 graus de liberdade fermiônicos, 4 escalares complexos com 8 graus de liberdade bosônicos e 1 vetor complexo com outros 8 graus de liberdade fermiônicos. Assim, o número de graus de liberdade fermiônicos é igual ao número de graus de liberdade bosônicos

Para encontrar a representação em operadores diferenciais dos geradores da supersimetria procedemos do mesmo modo que no caso do gerador P_μ . A representação diferencial de P_μ pode-se obter da relação:

$$e^{-iy.P} \phi(x) e^{iy.P} = \phi(x + y). \quad (2.37)$$

Assim em analogia, podemos utilizar a seguinte expressão como ponto de início:

$$e^{(-iyP + i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q})} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) e^{(iyP - \xi Q - i\bar{\xi}\bar{Q})} = \Phi(x', \theta', \bar{\theta}'). \quad (2.38)$$

Sem perda de generalidade podemos fazer $x = 0$ e $y = 0$. Então,

$$\begin{aligned} (1 + i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}) \Phi(1 - i\xi Q - i\bar{\xi}\bar{Q}) &= \Phi(i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \\ \Phi + i[\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}, \Phi] &= i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\Phi + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Psi + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}\Phi \\ \Phi + i[\xi Q, \Psi] + i[\bar{\xi}\bar{Q}, \Phi] &= \Psi + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu - i\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha})\Phi \\ &\quad + i(-\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu - i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}})\Phi. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aqui, usamos as seguintes convenções para as representações diferenciais das cargas quirais

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, \Phi] &= r(Q_\alpha)\Phi \\ [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \Phi] &= r(\bar{Q}_{\dot{\alpha}})\Phi. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Logo, a estrutura da representação diferencial fica :

$$\boxed{Q_\alpha = -i\partial_\alpha + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu} \tag{2.41}$$

$$\boxed{\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = i\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - \theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu}. \tag{2.42}$$

Além disto a lei de transformação para um supercampo é:

$$\boxed{\delta_{\text{susy}}^{(\xi, \bar{\xi})}V(x, \theta, \bar{\theta}) = i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})V(x, \theta, \bar{\theta})}. \tag{2.43}$$

Já que a derivada nas coordenadas espaço-temporais, ∂_μ , não tem caráter anticomutativo, o comutador $[\partial, \delta_{\text{susy}}]$ é nulo e, portanto, a derivada usual de um supercampo também é um supercampo. Este fato, porém, não é válido se consideramos as derivadas fermiônicas. Um cálculo rápido mostra que os comutadores $[\partial_\alpha, \delta_{\text{susy}}]$ e $[\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \delta_{\text{susy}}]$ não são nulos:

$$[\partial_\alpha, \delta_{\text{susy}}] = [\partial_\alpha, i\xi Q] + [\partial_\alpha, i\bar{\xi}\bar{Q}] \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_\alpha, i\xi Q] &= i(\partial_\alpha \xi^\beta Q_\beta - \epsilon^\beta Q_\beta \partial_\alpha) \\
&= -i\xi^\beta (\partial_\alpha [-i\partial_\beta + \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}}] \partial_\mu) - i\xi^\beta Q_\beta \partial_\alpha \\
&= -i\xi^\beta (i\partial_\beta \partial_\alpha - \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha) - i\xi^\beta Q_\beta \partial_\alpha \\
&= -i\xi^\beta (-Q_\beta) \partial_\alpha - i\xi^\beta Q_\beta \partial_\alpha = 0 \\
[\partial_\alpha, i\bar{\xi} \bar{Q}] &= i(\partial_\alpha \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} - \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha) \\
&= -i\bar{\xi}_{\dot{\beta}} (\partial_\alpha [-i\bar{\partial}^{\dot{\beta}} + \epsilon^{\dot{\beta}\beta} \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\gamma}}] \partial_\mu) - i\bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\Rightarrow \tag{2.46}$$

$$[\partial_\alpha, \delta_{\text{susy}}] \neq 0. \tag{2.47}$$

Portanto, as derivadas fermiônicas de um supercampo, $\partial_\alpha S$ e $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} S$, não são supercampos. Então, para encontrar expressões que sejam covariantes, temos que mudar as derivadas ∂_α e $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ por derivadas covariantes, D_α , $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, que verifiquem as regras de comutação $[D_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 0$ e $[D_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 0$.

As expressões das derivadas covariantes são dadas por :

$$\begin{aligned}
D_\alpha &= \partial_\alpha + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \\
D^\alpha &= -\partial^\alpha - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \theta_\beta \partial_\mu.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

A importância das derivadas covariantes reflete-se no fato de que elas permitem estabelecer vínculos covariantes para reduzir o número de graus de liberdade de um supercampo geral.

Este ponto será exposto em seguida.

2.5 Supercampos quirais

Definimos um supercampo quiral, Φ , pela condição

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0, \quad (2.49)$$

e um supercampo anti-quiral, $\bar{\Phi}$, por

$$D_{\alpha}\bar{\Phi} = 0. \quad (2.50)$$

Estas relações podem ser resolvidas fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

Primeiro, para o campo quiral, trabalhamos em um sistema de coordenadas no super-espaço que por simplificação denominaremos sistema *left*

$$\begin{aligned} y^{\mu} &= x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \\ \theta'^{\alpha} &= \theta^{\alpha} \\ \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} &= \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

segundo, para o campo antiquiral vamos a trabalhar em um sistema de coordenadas chamado sistema *right*

$$\begin{aligned} z^{\mu} &= x^{\mu} - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \\ \theta'^{\alpha} &= \theta^{\alpha} \\ \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} &= \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Em um sistema *left*, as derivadas covariantes ficam:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \quad e \quad D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}} \quad (2.53)$$

Assim, temos que a condição para que o campo quirral se expresse no sistema *left* é:

$$\boxed{\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^{(L)}(y, \theta, \bar{\theta}) = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi^{(L)}(y, \theta, \bar{\theta}) = 0} \quad (2.54)$$

Então, o supercampo $\Phi^{(L)}$ só tem dependência nas variáveis y e θ e tem expansão em componentes:

$$\Phi^{(L)} = L(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta)^2 F(y), \quad (2.55)$$

e, em termos das variáveis $x, \theta, \bar{\theta}$

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \Phi^{(L)}(y, \theta, \bar{\theta}) \\ &= L(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}L(x) + (\theta)^2 F(x) + \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta)^2\partial_{\mu}\psi(x)\sigma^{\mu}\bar{\theta} - \frac{1}{4}(\theta)^2(\bar{\theta})^2\Box L(x) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Similarmente, para o campo anti-quirral, encontra-se que

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \bar{L}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{L}(x) + (\bar{\theta})^2\bar{F}(x) + \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta})^2\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}(x) - \frac{1}{4}(\theta)^2(\bar{\theta})^2\Box\bar{L}(x). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Como acabamos de mostrar, as condições impostas a um supercampo geral reduziram o número de graus de liberdade. Fisicamente, um campo quirral descreve um campo escalar complexo, L , um campo auxiliar F e um spinor de Weyl ψ *left-handed*.

Em um sistema coordenado *left*, as cargas quirrais se representam como:

$$\boxed{Q_{\alpha} = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}} \quad (2.58)$$

Este sistema é conveniente para mostrar as transformações de supersimetria para um campo quirral.

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\Phi} &= i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi(y, \theta) \\
&= \left(\xi^\alpha \partial_\alpha + 2\theta(\sigma^\mu)_{\bar{x}i} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \Phi(y, \theta) \\
&= \sqrt{2}\xi\psi + 2\xi\theta F + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + 2\sqrt{2}i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi})\theta\partial_\mu\psi \\
&= \sqrt{2}\xi\psi + \sqrt{2}\theta \left(\xi F + i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi \right) + \theta^2(i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi}). \tag{2.59}
\end{aligned}$$

Assim, as variações das componentes de um campo quiral, Φ , são:

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}\xi\psi \\
\delta\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F \\
\delta F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \tag{2.60}
\end{aligned}$$

E tomando o conjugado Hermiteano, temos as variações para as componentes do campo anti-quiral :

$$\begin{aligned}
\delta\phi^* &= \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi} \\
\delta\bar{\psi} &= -i\sqrt{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\phi^* + \sqrt{2}\bar{\xi}F^* \\
\delta F^* &= -i\sqrt{2}\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Aqui temos que mencionar dois fatos. O primeiro é que este resultado é o mesmo que tínhamos ao início do capítulo quando postulamos as transformações de supersimetria para os campos do modelo de Wess-Zumino. A segunda observação é que o campo auxiliar, F , que para os supercampos quiral e anti-quiral representa o coeficiente do termo de maior orden na expansão, transforma-se como uma derivada total. Este último é muito importante já que se pode mostrar que este resultado é válido para um supercampo geral e

portanto estes coeficientes são bons candidatos a Lagrangeanos em teorias supersimétricas.

A formalização desta ideia será mostrada na seguinte seção.

2.6 Integração sobre as coordenadas de Grassmann

A principal ideia por trás da integração grassmanniana é simplesmente projetar a componente de maior ordem do supercampo que se está integrando. A partir disto, podemos encontrar as regras básicas para a integração. Seja θ uma variável grassmanniana, qualquer função de θ pode-se escrever

$$f(\theta) = f^{(0)} + f^{(1)}\theta \quad (2.62)$$

Segundo a ideia que estamos desenvolvendo, vamos exigir que a integral desta função seja igual à $f^{(1)}$, isto é:

$$\begin{aligned} I[f] &= \int d\theta f(\theta) \\ &= \int d\theta [f^{(0)} + f^{(1)}\theta] \\ &= f^{(0)} \int d\theta + f^{(1)} \int d\theta \theta. \end{aligned}$$

Então para que a nossa imposição seja válida é necessário definirmos as seguintes relações fundamentais de integração (RFI):

$$\boxed{\int d\theta = 0 \quad e \quad \int d\theta \theta = 1}. \quad (2.63)$$

Nosso próximo passo, é considerar uma álgebra de Grassmann gerada por 2 elementos θ_1 e θ_2 . A expressão de uma função de duas variáveis é

$$g(\theta_1, \theta_2) = g^{(0)} + g^{(1)}\theta_1 + g^{(2)}\theta_2 + g^{(3)}\theta_1\theta_2 \quad (2.64)$$

Antes de começar a integração, é necessário exigir que os diferenciais $d\theta_A$ sejam anticomutantes

$$\boxed{\{d\theta_A, d\theta_B\} = \{d\theta_A, \theta^B\} = 0}. \quad (2.65)$$

Então:

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 d\theta_2 g(\theta_1, \theta_2) &= g^{(0)} \int d\theta_1 d\theta_2 + g^{(1)} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 + \\ &\quad g^{(2)} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 + g^{(3)} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 \\ &= g^{(0)} \left(\int d\theta_1 \right) \left(\int d\theta_2 \right) - g^{(1)} \left(\int d\theta_1 \theta_1 \right) \left(\int d\theta_2 \right) + \\ &\quad g^{(2)} \left(\int d\theta_1 \right) \left(\int d\theta_2 \theta_2 \right) - g^{(3)} \left(\int d\theta_1 \theta_1 \right) \left(\int d\theta_2 \theta_2 \right) \\ &\quad \text{(usando as RFI)} \\ &= -g^{(3)}. \end{aligned}$$

Para o caso de $D = 4$ definimos os elementos de volume por

$$\boxed{d\theta^2 = -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \quad , \quad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad , \quad d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta}} \quad (2.66)$$

As seguintes relações são fáceis de derivar

$$\begin{aligned} \int d^2\theta(\theta\theta) &= \int d^2\bar{\theta}(\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1 \\ \int d^2\theta\theta^\alpha &= \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = 0, \end{aligned}$$

e motivam as seguintes definições:

$$\boxed{\delta\theta = \theta^2 \quad e \quad \delta\bar{\theta} = \bar{\theta}^2}. \quad (2.67)$$

Assim, o cálculo da integral de um supercampo, Φ , dado por (1.35), torna-se trivial

$$\boxed{\int d^4\theta\Phi = \Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = D(x)}. \quad (2.68)$$

2.7 O modelo de Wess-Zumino no formalismo de supercampos

Agora que sabemos como realizar uma integração em coordenadas de Grassmann, é natural perguntarmos qual é a ação em supercampos que é equivalente ao Lagrangeano proposto no início deste capítulo .

Seja Φ um campo quirral, a ação de Wess-Zumino é:

$$S = \int dx^4 d^4\theta \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.69)$$

A componente de maior ordem deste Lagrangeano é:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = & \partial^\mu\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x) + F^*(x)F(x) + \\ & \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}(x)\bar{\sigma}^\mu\psi(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x). \end{aligned}$$

2.8 Supercampos vetoriais

Um supercampo vetorial é definido como aquele que verifica a condição de realidade

$$\boxed{V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})} \quad (2.70)$$

Com esta condição, podemos mostrar que a expansão em série de potências de θ e $\bar{\theta}$ deste supercampo é:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + \theta\xi + \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 M^*(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + \\ & \theta^2\bar{\theta}^2[\bar{\Psi} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}\partial_\mu\xi] + \bar{\theta}^2\theta[\Psi + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\xi}] + \theta^2\bar{\theta}^2[D(x) - \frac{1}{4}\square C(x)] \end{aligned} \quad (2.71)$$

Então, este supercampo tem 8 graus de liberdade bosônicos e 8 graus de liberdade fermiônicos. Para reduzir este número vamos fazer uma generalização da transformação de gauge.

2.8.1 Teoria de gauge abeliana supersimetrica

Consideremos a soma $\Phi + \bar{\Phi}$, dada por:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) + \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = & [\phi(x) + \bar{\phi}(x)] + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \\ & \theta^2 H(x) + \bar{\theta}^2 H^*(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu[\phi(x) - \phi^*(x)] \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box[\phi(x) + \phi^*(x)]. \end{aligned}$$

Definimos a transformação de gauge supersimetrica por

$$\boxed{V' = V + \Phi + \bar{\Phi}}. \quad (2.72)$$

Portanto, o campo transformado é

$$\begin{aligned} V'(x, \theta, \bar{\theta}) = & [C(x) + 2\text{Re}\phi(x)] + \theta[\chi(x) + \sqrt{2}\psi(x)] + \bar{\theta}[\bar{\chi}(x) + \sqrt{2}\bar{\psi}(x)] + \\ & \theta^2[H(x) + M(x)] + \bar{\theta}^2[H^*(x) + M^*(x)] + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})[A_\mu(x) - 2\partial_\mu\text{Im}\phi(x)] + \\ & \theta^2\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu[\chi(x) + \sqrt{2}\psi(x)]\right) + \bar{\theta}^2\theta\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu[\bar{\chi}(x) + \sqrt{2}\bar{\psi}(x)]\right) + \\ & \theta^2\bar{\theta}^2\left(D(x) - \frac{1}{4}[C(x) + 2\text{Re}\phi(x)]\right). \end{aligned}$$

Então, as variações das componentes do supercampo devido a uma transformação

supersimétrica de gauge são:

$$\delta C(x) = 2\text{Re } \phi(x)$$

$$\delta \chi(x) = \sqrt{2}\psi(x)$$

$$\delta H(x) = M$$

$$\delta A_\mu(x) = -2\partial_\mu \text{Im } \phi(x)$$

$$\delta \lambda(x) = 0$$

$$\delta D(x) = 0.$$

Aqui, podemos observar que os campos λ e D são invariantes de gauge e que a transformação do campo $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - 2\partial_\mu \text{Im } \phi(x)$ corresponde à transformação Abelianiana de gauge familiar. Este último fato é o que motiva a nomenclatura desta transformação para os supercampos vetoriais.

Se a transformação de gauge supersimétrica é uma simetria da teoria, então é possível, mediante uma escolha adequada do supercampo Φ , eliminar os campos C', χ', F' e uma componente do campo A'_μ do supercampo vetorial transformado $V'(x, \theta, \bar{\theta})$. Esta escolha é conhecida como o calibre de Wess-Zumino e reduz o supercampo vetorial a:

$$\boxed{V_{WZ}(x) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \theta^2\bar{\theta}^2D(x)}. \quad (2.73)$$

Denotamos o supermultiplete vetorial no calibre de Wess-Zumino como \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = \{A_\mu, \lambda, D\} \quad (2.74)$$

Este multiplete tem 3 graus de liberdade bosônicos do campo A_μ , 1 grau de liberdade bosônico do campo F e 4 graus de liberdade fermiônicos do campo λ . É fácil notar que as potências do V_{WZ} são:

$$\begin{aligned} V_{WZ}^2 &= \frac{1}{2} \theta^2 \bar{\theta}^2 A_\mu A^\mu \\ V_{WZ}^n &= 0 \quad n \geq 3 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Para construir termos dinâmicos para o campo A_μ , definimos o *Super Field Strength*

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4} D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} V. \end{aligned}$$

Desta definição, é fácil mostrar, em virtude de $D^3 = \bar{D}^3 = 0$, que os supercampos W_α e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ são quiral e anti-quiral respectivamente.

Vamos mostrar que estes novos supercampos são invariantes de gauge:

$$\begin{aligned} W'_\alpha &= W_\alpha - \frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha (\Phi + \bar{\Phi}) = W_\alpha + \frac{1}{4} \bar{D}^{\dot{\beta}} \bar{D}_{\dot{\beta}} D_\alpha \Phi \\ &= W_\alpha + \frac{1}{4} \bar{D}^{\dot{\beta}} \{ \bar{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha \} \Phi = W_\alpha + \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu \bar{D}^{\dot{\beta}} \Phi = W_\alpha. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Para calcular a forma explícita destes supercampos, é melhor trabalhar em um sistema *left*. Portanto, neste sistema de coordenadas, temos que as derivadas covariantes ficam:

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \quad e \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Então

$$V_{WZ}(y) = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(y) + \theta^2 \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + \bar{\theta}^2 \theta \lambda(y) + \theta^2 \bar{\theta}^2 \left\{ D(y) - \frac{i}{2} \partial^\mu A_\mu(y) \right\}, \quad (2.77)$$

e a derivada covariante fica:

$$\begin{aligned}
D_\alpha V &= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu(y) + 2\theta_\alpha \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + \bar{\theta}^2 \lambda_\alpha(y) + \\
& 2\theta_\alpha \bar{\theta}^2 \left\{ D(y) - \frac{i}{2} \partial^\mu A_\mu(y) \right\} + \\
& 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} (\theta \sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\nu A_\mu(y) + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^2 \partial_\nu \bar{\lambda}(y),
\end{aligned}$$

para simplificar esta expressão é preciso trabalhar nos últimos dois termos :

$$\begin{aligned}
2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} (\theta \sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\nu A_\mu(y) &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \partial_\nu A_\mu(y) \\
&= i\bar{\theta}^2 \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\gamma\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \theta_\gamma \partial_\nu A_\mu(y) \\
&= i\bar{\theta}^2 (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\gamma \theta_\gamma \partial_\nu A_\mu(y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^2 \partial_\nu \bar{\lambda}(y) &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^2 \partial_\mu \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}(y) \\
&= -i\bar{\theta}^2 \theta^2 \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y),
\end{aligned}$$

além disso, definindo

$$\boxed{\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)}. \quad (2.78)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
D_\alpha V &= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu(y) + 2\theta_\alpha \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + \bar{\theta}^2 \lambda_\alpha(y) + \\
& 2\theta_\alpha \bar{\theta}^2 D(y) - i\bar{\theta}^2 \theta^2 \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^2 (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\gamma \theta_\gamma F_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

finalmente utilizando a identidade $\bar{D}^2 \theta^2 = -4$, chegamos à seguinte expressão para W_α :

$$\boxed{W_\alpha = \lambda_\alpha(y) + 2\theta_\alpha D(y) - i\bar{\theta}^2 \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\gamma \theta_\gamma F_{\mu\nu}}. \quad (2.79)$$

Similarmente usando um sistema *right* encontramos

$$\boxed{\bar{W}_{\dot{\alpha}} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(z) + 2D(z) \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\theta})^{\dot{\beta}} F_{\mu\nu}(z) + i\bar{\theta}^2 (\partial_\mu \lambda(z) \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}}. \quad (2.80)$$

Por último uma ação invariante por transformações de supersimetria e transformações de gauge pode ser construída da seguinte forma.

A componente de maior ordem de $W^\alpha W_\alpha$ é:

$$\begin{aligned} W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = & 4D^2(x) - 2i\lambda(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(x) \\ & - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{i}{2}F_{\mu\nu}^*(x)F_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (2.81)$$

e do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = & 4D^2(x) + 2i\partial_\mu\lambda(x)\sigma^\mu\bar{\lambda}(x) \\ & - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}^*(x)F^{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Assim, a ação para uma teoria de gauge supersimétrica Abelian é

$$\boxed{S_{U(1)} = \int d^4x d^4\theta \left\{ \frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha \delta^2(\bar{\theta}) + \frac{1}{4}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}} \delta^2(\theta) \right\}} \quad (2.83)$$

cuja expansão em campos componentes é:

$$\boxed{S_{U(1)} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\lambda(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\partial_\mu\lambda(x)\sigma^\mu\bar{\lambda} + 2D^2(x) \right\}} \quad (2.84)$$

O primeiro termo é a expressão familiar de ação para o campo A_μ , o segundo termo é uma contribuição exclusiva da supersimetria e introduz o campo fermiônico $\lambda(x)$, parceiro supersimétrico do fóton e que será chamado de “fotino” ou “gaugino”.

Agora que já temos a versão supersimétrica do Lagrangeano de Maxwell, o próximo passo é explorar como supersimetrizar o termo que quebra a simetria de Lorentz. Isto será feito no próximo capítulo.

Capítulo 3

Extensão Supersimétrica da Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw

Uma primeira proposta para incorporar supersimetria em modelos com quebra de Lorentz encontra-se no trabalho de V.Kostelecký e M.Berger [35]. O objetivo dos autores foi investigar se as propriedades dos modelos supersimétricos poderiam ser mantidas apesar da quebra da simetria de Lorentz. Seguindo uma sugestão original de Colladay [5], introduziram um tensor $k_{\mu\nu}$ real, simétrico e sem traço, que foi utilizado para modificar convenientemente a álgebra da supersimetria e as derivadas covariantes supersimétricas, acrescentando uma nova carga central, do tipo $k_{\mu\nu}\partial^\nu$. Assim, pôde-se mostrar que é possível construir uma teoria com campos de matéria e invariante sob supersimetria modificada, mas que quebra a simetria de Lorentz .

Em 2003, os autores do trabalho da referência [34], motivados por um enfoque diferente, propuseram um modelo no setor de gauge que evita a necessidade de modificar a

álgebra da supersimetria, mas que incorpora a violação da simetria de Lorentz em um modelo que é originalmente supersimétrico.

A extensão supersimétrica para o termo de Chern-Simons que viola a simetria de Lorentz é escrita no superespaço sob a forma:

$$S_{QL} = \int d^4x d^4\theta \{W^\alpha(D_\alpha V)S + \bar{W}_{\dot{\alpha}}(\bar{D}^{\dot{\alpha}}V)\bar{S}\}, \quad (3.1)$$

onde W^α é o *field strength* supersimétrico, V é o supercampo vetorial no calibre de Wess-Zumino e S é o supercampo de fundo que realiza a violação da simetria de Lorentz. O supercampo de fundo é escolhido como sendo quiral ($\bar{D}_{\dot{\alpha}}S = 0$). Isto permite estabelecer que o campo componente de S com spin $s = \frac{1}{2}$ é o que tem spin mais alto e que tem como parceiro um campo escalar sem dimensão. Assim, a expansão do supercampo para S em campos de fundo componentes é como segue:

$$S(y, \theta) = s(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y), \quad (3.2)$$

onde se adotou as coordenadas *left* do super-espaço.

Utilizando o sistema *left*, encontramos a expanssão de $W^\alpha(D_\alpha V)$:

$$\begin{aligned} W^\alpha(D_\alpha V) = & (\lambda\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + 2(\lambda\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) + \theta^2\lambda\lambda + 2(\lambda\theta)\theta^2 D + \bar{\theta}^2(\lambda\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\mu\nu} - \\ & i\bar{\theta}^2\theta^2(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) + 2(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu D + 4\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}D + 2(\theta\lambda)\bar{\theta}^2 D + \\ & 4\theta^2\bar{\theta}^2 D^2 + \underbrace{\bar{\theta}^2(\theta\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\mu\nu}}_{\propto \text{tr}(\sigma^{\mu\nu})=0} + \epsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_\beta{}^\rho\theta_\rho F_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\kappa\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_\kappa \\ & \underbrace{\epsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_\beta{}^\rho\theta_\rho F_{\mu\nu}(2\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda})}_{\propto \text{tr}(\sigma^{\mu\nu})=0} + \underbrace{\epsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_\beta{}^\rho\theta_\rho F_{\mu\nu}(2\theta_\alpha\bar{\theta}^2 D)}_{\propto \text{tr}(\sigma^{\mu\nu})=0} + \\ & \underbrace{\epsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_\beta{}^\rho\theta_\rho F_{\mu\nu}\bar{\theta}^2(\sigma^{\alpha\beta})_\alpha{}^\kappa\theta_\kappa F_{\alpha\beta}}_{\dots(1)} + \epsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_\beta{}^\rho\theta_\rho F_{\mu\nu}\bar{\theta}^2\lambda_\alpha. \end{aligned} \quad (3.3)$$

É preciso trabalhar um pouco o termo (1) da equação (3.3)

$$\begin{aligned}
(1) &= \epsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta}{}^{\rho}\theta_{\rho}F_{\mu\nu}\bar{\theta}^2(\sigma^{\alpha\beta})_{\alpha}{}^{\kappa}\theta_{\kappa}F_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\rho\kappa}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta}{}^{\rho}(\sigma^{\alpha\beta})_{\alpha}{}^{\kappa}\theta^2\bar{\theta}^2F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\text{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta})\theta^2\bar{\theta}^2F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

[utilizando a identidade :

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\
&= -\theta^2\bar{\theta}^2\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{4}F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, a componente de maior ordem de $W^{\alpha}(D_{\alpha}V)S$ no sistema *left* é:

$$\begin{aligned}
W^{\alpha}(D_{\alpha}V)S|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= 4sD^2 - 2is(\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}) - \frac{s}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{4}sF_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&\quad - 2\sqrt{2}(\lambda\psi)D - \sqrt{2}(\lambda\sigma^{\mu\nu}\psi)F_{\mu\nu} + \lambda\lambda F.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Tomando o conjugado Hermitiano, chegamos a:

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{\alpha}(\bar{D}^{\dot{\alpha}}V)\bar{S}|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= 4s^*D^2 - 2is^*(\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda) - \frac{s^*}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{4}s^*F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&\quad - 2\sqrt{2}(\bar{\lambda}\bar{\psi})D + \sqrt{2}(\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi})F_{\mu\nu} + \bar{\lambda}\bar{\lambda}F^*.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Logo, a expressão em campos componentes referente à ação (3.1) assume a forma:

$$\begin{aligned}
S_{EM} + S_{QL} &= \int d^4x \left[-\left[\frac{1}{4} + \frac{(s+s^*)}{2}\right] F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. \frac{i}{2}\partial_{\mu}(s-s^*)\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}F_{\alpha\beta}A_{\nu} + [2 + 4(s+s^*)] D^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} + 2s\right)i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - \left(\frac{1}{2} + 2s^*\right)i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2}\lambda\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} + \sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}F_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + \lambda\lambda F + \bar{\lambda}\bar{\lambda}F^* - 2\sqrt{2}\lambda\psi D - 2\sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\psi}D \right].
\end{aligned}$$

Como podemos ver, a Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw é reproduzida, fixando-se convenientemente a componente bosônica do supercampo como segue:

$$(s + s^*) = 0 \quad e \quad (s - s^*) = \frac{i}{2} v_\mu x^\mu \quad (3.6)$$

Assim, o quadrivetor constante, v_μ , que realiza a quebra da simetria de Lorentz no modelo clássico é acomodado dentro do supercampo de fundo e se obtém do gradiente da parte imaginária de campo s . A supersimetria, então, fixa que o vetor de fundo v^μ seja necessariamente dado pelo gradiente de uma função escalar, o que assegura a invariância de gauge do termo que viola a simetria de Lorentz. Por outro lado, se fixamos a componente fermiônica, ψ , do supercampo de fundo como uma constante sob transformações ativas, obtemos uma nova forma de quebrar a simetria de Lorentz. Este fato é uma consequência exclusiva da presença de supersimetria.

Agora que o supercampo de fundo está fixado, podemos eliminar o campo auxiliar D do setor de gauge. Utilizando as equações de movimento encontramos que o campo auxiliar verifica $D = \sqrt{2}\lambda\psi + \sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\psi} = \sqrt{2}\bar{\Lambda}\Psi$. Substituindo esta expressão na ação, reescrevendo todo em 4-componentes e utilizando os rearranjos de Fierz na expressão $(\bar{\Lambda}\Psi)(\bar{\Psi}\Lambda)$ chegamos à expressão:

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} v_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} A_\nu - \frac{i}{2} \bar{\Lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \Lambda + [\text{Re}(F) + \frac{1}{4} \bar{\Psi} \Psi] \bar{\Lambda} \Lambda - \right. \\ \left. i[\text{Im}(F) + \frac{i}{4} \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi] \bar{\Lambda} \gamma_5 \Lambda - \frac{1}{4} [v_\mu + \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi] \bar{\Lambda} \gamma^\mu \gamma_5 \Lambda + \sqrt{2} \bar{\Lambda} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \Psi F_{\mu\nu} \right\} \quad (3.7)$$

Os bilineares fermiônicos que aparecem na ação como consequência dos rearranjos

de Fierz são chamados de condensados fermiônicos e são denotados por:

$$\varpi = \bar{\Psi}\Psi$$

$$\tau = \bar{\Psi}\gamma_5\Psi$$

$$B_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$$

Neste breve capítulo, a nossa tarefa consistiu em preparar a base para a discussão à qual procederemos no Capítulo 4, onde resolvemos uma questão que consta em aberto na literatura da área. Aqui, fixamos a ação que introduz o desvio da simetria de Lorentz em conexão com a supersimetria e compreendemos como a quebra da simetria relativística interfere na mistura fóton-fotino, que será o foco de nosso estudo no capítulo que se segue.

Capítulo 4

O Espectro do Dupleto Fóton-Fotino com Violação da Simetria de Lorentz

No capítulo anterior, encontramos a expressão em campos componentes para a ação supersimetrizada de Carroll-Field-Jackiw. Também, fixamos o valor do supercampo de fundo na configuração de mínima energia como dado abaixo:

$$\mathbf{S} = \left\{ s = \frac{i}{4} x_\mu v^\mu, \psi = \psi_0, F = F_0 \right\}, \quad (4.1)$$

onde ψ_0 e F_0 são configurações constantes no espaço-tempo.

As transformações de SUSY para esta configuração do campo \mathbf{S} são :

$$\begin{aligned} \delta_{\text{susy}} s &= \sqrt{2} \xi \psi \\ \delta_{\text{susy}} \psi &= i \sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\xi} \partial_\mu s + \sqrt{2} \xi F \\ \delta_{\text{susy}} F &= i \sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Assim $\delta_{\text{susy}} S \neq S$, o que evidencia que o supercampo de fundo quebra a supersimetria.

A questão sobre a qual nos deteremos consiste em desenvolver um procedimento operacional, baseado na teoria de grupos em superspaço, para derivarmos o espectro de excitações do sistema fóton-fotino devido ao fundo que viola a simetria de Lorentz. Esta é uma contribuição à literatura da área.

Para encontrar o espectro de massa para o fóton e o fotino, o primeiro passo é calcular o propagador do sistema. Com tal propósito, expressamos o Lagrangeano em forma matricial:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Phi^t \mathcal{O} \Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_a & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{ab} & L^{a\nu} \\ M^{\mu b} & N^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_b \\ A_\nu \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Onde

$$\begin{aligned} L^{a\nu} &= 2\sqrt{2}(\gamma^{\mu\nu}\gamma_5)^{ab}\Psi\partial_\mu \\ M^{\mu b} &= 2\sqrt{2}\bar{\Psi}(\gamma^{\nu\mu}\gamma_5)^{ab}\partial_\nu \\ J^{ab} &= -i(\gamma^\mu\partial_\mu)^{ab} + 2(\text{Re} + \frac{1}{4}\bar{\Psi}\Psi)\mathbb{I} - \\ &\quad 2i(\text{Im}(F) + i\frac{1}{4}\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)\gamma_5^{ab} - \frac{1}{2}(v_\mu + \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\gamma^\mu\gamma_5)^{ab} \\ N^{\mu\nu} &= \square\theta^{\mu\nu} - v_\rho\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu}\partial_\lambda - \frac{1}{\alpha}\square\omega^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.4)$$

α é o parâmetro introduzido para a fixação do calibre. Assim o propagador é basicamente o inverso do operador de onda \mathcal{O} da expressão (4.2). O seu inverso é escrito como segue abaixo:

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ W & Z \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

com

$$\begin{aligned}
X &= (J - LN^{-1}M)^{-1} \\
Y &= J^{-1}LW \\
W &= -N^{-1}MX \\
Z &= (N - MJ^{-1}L)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Para observar de que forma os termos que dependem das componentes do supercampo de fundo (isto é, F , v_μ e os condensados fermiônicos) afetam as massas do fóton e o fotino, é preciso encontrar os denominadores das submatrizes X e Z , que correspondem aos propagadores bosônico e fermiônico, respectivamente. Estes denominadores permitirão que encontremos os pólos dos propagadores que associamos às excitações físicas que o fóton e o fotino descrevem.

Alem disso, já que o férmion ψ e F são os legados exclusivos da supersimetria, podemos considerar o caso particular $v_\mu = 0$ se quisermos compreender o papel exclusivo dos condensados fermiônicos e do campo- F na quebra da simetria de Lorentz.

4.1 O Propagador Bosônico

O nosso objetivo é encontrar

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = (N - MJ^{-1}L)^{-1}_{\mu\nu}. \tag{4.7}$$

O primeiro passo é calcular a inversa da matriz J . Para isto, vamos a separá-la em uma parte fermiônica e outra não fermiônica:

$$J = A + B$$

$$J = A(1 + A^{-1}B),$$

onde A e B são, respetivamente:

$$A = -iP + 2\text{Re}(F)1_{4 \times 4} - 2i\text{Im}(F)\gamma_5,$$

$$B = \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)1_{4 \times 4} + \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)\gamma_5 - \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\gamma^\mu\gamma_5) = -2\Psi\bar{\Psi}.$$

Já que a matriz B é construída a partir de bilineares fermiônicos e o espinor é dado em números grassmannianos, além de ser do tipo Majorana, então termos com potências de B maiores do que 2 são automaticamente nulos, consequência da anti-comutatividade das componentes Ψ_α . Usando este fato, o procedimento para inversão da matriz J é descrito em seguida:

$$\begin{aligned} J^{-1} &= (1 + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= (1 - A^{-1}B + (A^{-1}B)^2 + \mathcal{O}[B^3])A^{-1} \\ &= (1 - A^{-1}B + (A^{-1}B)^2)A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + (A^{-1}B)^2A^{-1} \end{aligned}$$

A inversão da matriz A é longa, mas não complicada, e sua expressão é:

$$\boxed{A^{-1} = \left(\frac{i}{4|F|^2 + \square} \right) P + \left(\frac{2\text{Re}(F)}{4|F|^2 + \square} \right) 1_{4 \times 4} + \left(\frac{2i\text{Im}(F)}{4|F|^2 + \square} \right) \gamma_5} \quad (4.8)$$

Por outro lado, vemos que a matriz $(A^{-1}B)^2$ é proporcional a ϖ^2 :

$$\begin{aligned}
(A^{-1}B)^2 &= (A^{-1}B)(A^{-1}B) \\
&= 4A^{-1}\Psi\bar{\Psi}A^{-1}\Psi\bar{\Psi} \\
&= 4A^{-1}(\bar{\Psi}A^{-1}\Psi)\Psi\bar{\Psi} \\
&= 4A^{-1}(\text{fact}(1)\varpi + \text{fact}(2)\tau)\left(-\frac{1}{4}\varpi I - \frac{1}{4}\tau\gamma_5 + B_\mu\gamma^\mu\gamma_5\right) \\
&= \propto \varpi^2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Então no cálculo de $M(J)^{-1}L$, temos que fazer o seguinte produto

$$\begin{aligned}
M([A^{-1}B]^2A^{-1})L &= \varpi^2 M(\text{Matriz})L \\
&= \varpi^2 (\Psi_\alpha [\text{Matriz}']_{\alpha\beta} \Psi_\beta) = (\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\Psi)(\Psi_\alpha [\text{Matriz}']_{\alpha\beta} \Psi_\beta) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com tudo isto, a expressão de $M(J)^{-1}L$ fica

$$\boxed{M(J)^{-1}L = M(A^{-1} - A^{-1}BA^{-1})L}. \tag{4.10}$$

A expressão para $M(A^{-1}BA^{-1})L$ é:

$$\begin{aligned}
M(A^{-1}BA^{-1})L &= -2\bar{\Psi}\{(\partial^\mu - \gamma^\mu P)\gamma_5(A^{-1}BA^{-1})(\partial^\nu - \gamma^\nu P)\gamma_5\}\Psi \\
&= 4[\bar{\Psi}(\partial^\mu - \gamma^\mu P)\gamma_5 A^{-1}\Psi][\bar{\Psi}A^{-1}(\partial^\nu - \gamma^\nu P)\gamma_5\Psi] \\
&= \frac{4}{(\square + 4|F|^2)^2}(-i\partial^\mu(B.\partial) + i\square B^\mu)(-i(B.\partial)\partial^\nu + i\square B^\nu) \\
&= \frac{4}{(\square + 4|F|^2)^2}(-\varpi^2\square\partial^\mu\partial^\nu + \square\partial^\mu B^\nu(B.\partial) + \square\partial^\mu B^\nu(B.\partial) - \square^2 B^\mu B^\nu)
\end{aligned}$$

Finalmente, a expressão para $M(A^{-1}BA^{-1})L$ é:

$$\boxed{M(A^{-1}BA^{-1})L = -4\frac{\varpi^2\Box^2}{(4|F|^2 + \Box)^2}\theta}, \quad (4.11)$$

onde $\theta = \theta_{\mu\nu}$ é o projetor vetorial transverso.

Por outro lado, temos que $M(A^{-1})L$ é igual a:

$$\begin{aligned} M(A^{-1})L &= \frac{1}{(4|F|^2 + \Box)} \times M[iP + \text{Re}(F) + 2i\text{Im}(F)\gamma_5]L \\ &= \frac{1}{(4|F|^2 + \Box)} \times [i(MPL) + \text{Re}(F)(M1L) + 2i\text{Im}(F)(M\gamma_5L)] \end{aligned}$$

Agora, usando as seguintes relações (encontradas no Apêndice 2) :

$$M(1)L = 2\varpi\Box\theta^{\mu\nu}$$

$$M(P)L = 2i\Box\Omega^{\mu\nu} \quad \Omega^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_\alpha\partial_\beta$$

$$M(\gamma_5)L = 2\tau\Box\theta^{\mu\nu} \text{ temos :}$$

$$= \frac{1}{(4|F|^2 + \Box)} \times [-2\Box\Omega + 4\{\varpi\text{Re}(F) + i\tau\text{Im}(F)\}\Box\theta].$$

Com tudo isto, a expressão para $M(J^{-1})L$ vem dada por

$$\boxed{M(J^{-1})L = \frac{-2\Box\Omega}{(4|F|^2 + \Box)} + 4\frac{\{\varpi\text{Re}(F) + i\tau\text{Im}(F)\}\Box\theta}{(4|F|^2 + \Box)} + 4\frac{\varpi^2\Box^2\theta}{(4|F|^2 + \Box)^2}} \quad (4.12)$$

Agora, lembrando que $v_\mu = 0$, N fica:

$$N_{\text{part}} = \Box\theta - \frac{\Box}{\alpha}\omega$$

Então, o propagador bosônico é o inverso do seguinte operador

$$\boxed{\langle A_\mu A_\nu \rangle = \left(\Box[1 - E_1 - E_2]\theta + E_3\Box\Omega - \frac{\Box}{\alpha}\omega \right)_{\mu\nu}^{-1}}, \quad (4.13)$$

Onde

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{4\{\varpi \operatorname{Re}(F) + i\tau \operatorname{Im}(F)\}}{4|F|^2 + \square} \\
E_2 &= \frac{4\varpi^2 \square}{(4|F|^2 + \square)^2} \\
E_3 &= \frac{2}{(4|F|^2 + \square)}.
\end{aligned}$$

Os operadores $\{\theta, \omega, \Omega\}$ formam uma álgebra fechada simples (Apêndice A). Logo, se expandirmos:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = x_1 \theta_{\mu\nu} + x_2 \omega_{\mu\nu} + x_3 \Omega_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}
x_1 E_3 &= -x_3 (1 - E_1 - E_2) \\
x_2 &= -\frac{\alpha}{\square} \\
1 &= x_1 \square (1 - E_1 - E_2) + 2x_3 E_3 \square^2 \varpi^2
\end{aligned}$$

A solução deste sistema é dada por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1 - E_1 - E_2}{(1 - E_1 - E_2)^2 - 2E_3^2 \varpi^2 \square} \\
x_2 &= -\frac{\alpha}{\square} \\
x_3 &= \frac{-E_3}{(1 - E_1 - E_2)^2 - 2E_3^2 \varpi^2 \square}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Agora analisaremos o denominador do propagador do fóton:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1 - E_1 - E_2)^2 - 2E_3^2 \varpi^2 \square \\
&= 1 + 16 \frac{[\text{Re}(F)\varpi + i\text{Im}(F)(F)\tau]^2}{(\square + 4|F|^2)^2} - 8 \frac{[\text{Re}(F)\varpi + i\text{Im}(F)\tau]}{(\square + 4|F|^2)} - 16 \frac{\varpi^2 \square}{(\square + 4|F|^2)} \\
&= \frac{\square^2 + \square(8|F|^2 + 8m_1^2 - 16\varpi^2) + (16|F|^4 + 16|F|^2\varpi^2 - 32|F|^2m_1^2)}{(\square + 4|F|^2)^2} \\
&\quad [\text{onde } m_1^2 = \text{Re}(F)\varpi + i\text{Im}(F)\tau] \\
&= \frac{(\square - x_1)(\square - x_2)}{(\square + 4|F|^2)^2}, \text{ que no espaço dos momentos :} \\
&= \frac{(k^2 + x_1)(k^2 + x_2)}{(4|F|^2 - k^2)^2}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Assim, o denominador do propagador fica $(k^2 + x_1)(k^2 + x_2)$ onde as raízes são dadas por

$$x_{1,2} = 8\varpi^2 - 4|F|^2 - 4m_1^2 \pm \sqrt{-32\varpi^2|F|^2}. \tag{4.17}$$

Para evitar termos pólos sem sentido físico, é preciso que o valor do condensado fermiônico ϖ (e portanto τ) seja nulo. A relação existente entre os condensados fermiônicos so deixa duas possibilidades para o condensado fermiônico $B_\mu = (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)$: pode ser um vetor tipo-luz ou  identicamente nulo.

Se $B_\mu \neq 0$ o propagador fica:

$$\langle A_\mu(k)A_\nu(k) \rangle = -\frac{1}{k^2}\theta_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{k^2}\omega_{\mu\nu} + \frac{1}{k^2(k^2 - 4|F|^2)}\Omega_{\mu\nu}, \tag{4.18}$$

o que nos dá um pólo não trivial para $k^2 = 4|F|^2$.

Se $B_\mu = 0$, o propagador fica

$$\langle A_\mu(k)A_\nu(k) \rangle = -\frac{1}{k^2}\theta_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{k^2}\omega_{\mu\nu}, \tag{4.19}$$

onde só temos a excitação de massa nula.

4.2 O Propagador Fermiônico

O propagador fermiônico é lido a partir de:

$$\langle \Lambda_a \Lambda_b \rangle = (J - LN^{-1}M)^{-1}. \quad (4.20)$$

Do mesmo modo como procedemos para o cálculo do propagador bosônico, temos que encontrar uma expressão para $LN^{-1}M$:

$$\begin{aligned} LN^{-1}M &= (2\sqrt{2}\gamma^{\rho\mu}\gamma_5\bar{\Psi}\partial_\rho)(N_{\mu\nu}^{-1})(2\sqrt{2}\gamma^{\lambda\nu}\gamma_5\bar{\Psi}\partial_\lambda) \quad \dots \text{ aqui } \gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ &= -\frac{1}{2}[P, \gamma^\mu]\gamma_5(\Psi\bar{\Psi})[P, \gamma^\nu]\gamma_5 N_{\mu\nu}^{-1}. \end{aligned}$$

Para o caso que estamos considerando, $v_\mu = 0$, temos

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu}^{-1} &= \frac{1}{\square}\theta_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{\square}\omega_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\square}\eta_{\mu\nu} - \frac{(1+\alpha)}{\square}\omega_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

É imediato notar que a parte longitudinal não contribui ao cálculo:

$$\begin{aligned} [P, \gamma^\mu](\text{Matriz})[P, \gamma^\nu]\omega_{\mu\nu} &= [P, \gamma^\mu](\text{Matriz})[P, \gamma^\nu]\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square} \\ &= \frac{1}{\square}[P, P](\text{Matriz})[P, P] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
LN^{-1}M &= -\frac{1}{2}[P, \gamma^\mu]\gamma_5(\Psi\bar{\Psi})[P, \gamma^\nu]\gamma_5\frac{\eta_{\mu\nu}}{\square} \\
&= -2(\partial^\mu - P\gamma^\mu)\gamma_5\left(-\frac{\varpi}{4}I - \frac{\tau}{4}\gamma_5 + \frac{1}{4}\mathcal{R}\gamma_5\right)(\partial^\nu - P\gamma^\nu)\frac{\eta_{\mu\nu}}{\square}\gamma_5 \\
&= -2(\partial^\mu - P\gamma^\mu)\left(-\frac{\varpi}{4}I - \frac{\tau}{4}\gamma_5 - \frac{1}{4}\mathcal{R}\gamma_5\right)(\partial_\mu - P\gamma_\mu)\frac{1}{\square} \\
&\quad [\text{mas} \\
&\quad (\partial^\mu - P\gamma^\mu)(\partial_\mu - P\gamma_\mu) = -3\square I \\
&\quad (\partial^\mu - P\gamma^\mu)\gamma_5(\partial_\mu - P\gamma_\mu) = -3\square\gamma_5 \\
&\quad (\partial^\mu - P\gamma^\mu)\gamma^\kappa(\partial_\mu - P\gamma_\mu) = 4\partial^\kappa P - \square\gamma^\kappa] \\
&= -\frac{3}{2}\varpi I - \frac{3}{2}\tau\gamma_5 + 2\frac{B.\partial}{\square}P\gamma_5 - \frac{1}{2}\mathcal{R}\gamma_5.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
J - LN^{-1}M &= -iP + 2[\text{Re}(F) + \frac{1}{4}\varpi]I - 2i[\text{Im}(F) + \frac{i}{4}\tau]\gamma_5 - \frac{1}{2}\mathcal{R}\gamma_5 + \\
&\quad \frac{3}{2}\varpi I + \frac{3}{2}\tau\gamma_5 - 2\frac{B.\partial}{\square}P\gamma_5 + \frac{1}{2}\mathcal{R}\gamma_5 \\
&= -iP + 2[\text{Re}(F) + \varpi]I - 2i[\text{Im}(F) + i\tau]\gamma_5 - 2\frac{B.\partial}{\square}P\gamma_5.
\end{aligned}$$

A inversão agora não é difícil e, finalmente, o propagador fermiônico assume a forma:

$$\langle \Lambda_a \Lambda_b \rangle = z_1 1_{ab} + z_2 P_{ab} + z_3 (\gamma_5)_{ab} + z_4 (P\gamma_5)_{ab} \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{2(\text{Re} + \varpi)}{\Delta_F} \\
z_2 &= \frac{i}{\Delta_F} \\
z_3 &= \frac{2i(\text{Im} + i\tau)}{\Delta_F} \\
z_4 &= \frac{2(B.\partial)}{\square\Delta_F} \\
\Delta_F &= 4|F|^2 + \square + 8m_1^2 + 12\varpi^2.
\end{aligned}$$

Mas, por consistência com os resultados achados para o propagador bosônico temos que fazer $\varpi = \tau = 0$. Isto reduz significativamente as expressões para os coeficientes do propagador fermiônico.

Para o caso $B_\mu \neq 0$, temos:

$$\boxed{\langle \Lambda_A(k)\Lambda_B(k) \rangle = -\frac{2\text{Re}(F)1_{AB}}{k^2 - 4|F|^2} - \frac{iP_{AB}}{k^2 - 4|F|^2} - \frac{2i\text{Im}(F)\gamma_{5AB}}{k^2 - 4|F|^2} - \frac{2iB_\mu k^\mu (P\gamma_5)_{AB}}{k^2(k^2 - 4|F|^2)}}. \quad (4.22)$$

Para o caso $B_\mu = 0$, temos:

$$\boxed{\langle \Lambda_A(k)\Lambda_B(k) \rangle = -\frac{2\text{Re}(F)1_{AB}}{k^2 - 4|F|^2} - \frac{iP_{AB}}{k^2 - 4|F|^2} - \frac{2i\text{Im}(F)\gamma_{5AB}}{k^2 - 4|F|^2}}. \quad (4.23)$$

Finalmente, podemos comparar os resultados obtidos neste capítulo.

Caso 1 : O caso trivial

O supercampo de fundo é identicamente nulo, $\mathbf{S} = \{0, 0, 0\}$. Isto corresponde à ação de Maxwell supersimetrizada, não existe quebra da simetria de Lorentz. O fóton e o fotino

têm pólos em $k^2 = 0$ e são degenerados.

Caso 2 : O caso geral

O supercampo de fundo é fixado, $\mathbf{S} = \{\frac{i}{4}x_\mu v^\mu, \Psi = \Psi_0, F = F_0\}$. Neste caso, existe quebra da simetria de Lorentz que é realizada pela componente bosônica e pela componente espinorial de \mathbf{S} . Como desejamos compreender exclusivamente o papel dos parceiros supersimétricos (v_μ já vem sendo estudado na literatura), contemplamos duas situações:

Caso 3: Caso particular 1

O supercampo de fundo é fixado, $\mathbf{S} = \{0, \Psi = \Psi_0, F = F_0\}$. Neste caso, existe quebra da simetria de Lorentz que é realizada pela componente espinorial de \mathbf{S} . O fóton tem pólos em $k^2 = 0$ e $k^2 = 4|F|^2$, o mesmo acontece para o fotino. Apesar da violação o fóton e o fotino continuam com o mesmo espectro.

Importante: O fundo fermiônico ψ_0 , através de seus condensados, não desloca os pólos dos propagadores do fóton e fotino. A massa não trivial depende apenas de $|F|$. Entretanto, se tomarmos $\psi_0 = 0$, o pólo $k^2 = 4|F|^2$ do fóton desaparece, restando apenas o pólo $k^2 = 4|F|^2$ do fotino, como se deve ocorrer se há quebra espontânea de SUSY.

Caso 4: Caso particular 2

O supercampo de fundo é fixado, $\mathbf{S} = \{0, \Psi = 0, F = F_0\}$. Neste caso, não existe quebra da simetria de Lorentz. Existe um *splitting* de massas entre o fóton e o fotino. O fóton tem um polo em $|k|^2 = 0$ e o fotino tem pólo em $|k|^2 = 4|F|^2$. É manifesta a quebra da

supersimetria pelo termo-F.

Concluimos este capítulo com uma clara visão sobre o papel dos condensados fermiônicos no problema da violação da simetria de Lorentz em cenários dominados pela supersimetria.

Capítulo 5

Considerações Finais e Futuros Encaminhamentos

O propósito central deste trabalho de Dissertação foi o estudo da mistura fóton-fotino e do espectro de excitações deste sistema em um modelo com violação da simetria de Lorentz, mas com presença de uma supersimetria que pode ter havido e ter sido quebrada em uma escala superior ou na faixa da escala onde se detecta a violação da simetria de Lorentz. Os traços remanescentes de uma supersimetria, e que chegam até a escala onde o desvio da simetria de Lorentz é percebido, consistem, em nossa descrição, do conteúdo do supercampo quiral, S , que traz consigo o pré-potencial, s , do vetor de fundo, v_μ , e seus parceiros, Ψ e F .

A nossa concepção é que a supersimetria possa ter sido quebrada em uma escala acima da região onde se dá a quebra da simetria de Lorentz, por algum mecanismo, que não cogitamos aqui, relacionado ao chamado setor escondido da Supergravidade. A herança desta época supersimétrica está no supercampo S . Apesar de ter ocorrido a quebra da supersimetria, é sempre mais oportuno manter a formulação de superespaço e supercampos, que nos viabilizam o cálculo tensorial adequado para o tratamento das questões que

estudamos.

Como consideramos que a violação da simetria de Lorentz seja mais visível em uma escala mais próxima da escala de cordas, algo como entre 10^{16} e 10^{19} GeV, então propomos que a supersimetria também seja quebrada nesta faixa.

De nossa simples análise das transformações de supersimetria sobre os campos de fundo componentes de S , fica claro que, sempre que o fundo for tal que a simetria de Lorentz é violada, então a supersimetria é também quebrada já que este fundo, S , não permanece invariante sob transformações de supersimetria:

$$\delta_{\text{susy}} S \neq S,$$

o que manifesta o fato de que o fundo propicia uma quebra explícita da supersimetria. O nosso ponto-de-vista é compreender como os possíveis parceiros supersimétricos do v^μ (o ψ e o F) interferem na violação da simetria de Lorentz e na eventual separação das massas do fóton e fotino. Por esta razão, apagamos o vetor de fundo v^μ e atribuímos a violação da simetria de Lorentz ao seu parceiro fermiônico. Sendo um espinor de Majorana, consideramos os possíveis condensados que se podem formar ($\bar{\Psi}\Psi$, $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ e $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$) e estudamos os seus efeitos, como discutido no Capítulo 4. Temos, sim, uma discussão parcial, que não contempla o máximo que possa ter sido herdado da supersimetria, já que desligamos os efeitos do v_μ para seguir puramente o papel do Ψ e do F .

Permanece a ser estudado, e este será o próximo passo, contemplar o efeito conjunto de todo o *background*, v_μ , Ψ e F . As dificuldades técnicas são bem maiores, por isto deixamos este estudo para uma segunda etapa. Mas, compreendemos a este ponto, que a

formação dos condensados fermiônicos pode induzir a formação de excitações não-físicas. O condensado $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$, sendo do tipo-luz, resulta ser o caso mais interessante no caso em que o background v^μ é trivial.

Outra questão programada para investigação é a relação entre a violação da simetria de Lorentz realizada pela condensação do vetor, ao qual a literatura se refere como $k_{\mu\nu\kappa\lambda}^F$ [36],[37],[38],[39], em conexão com a supersimetria. Os estudos desta Dissertação fornecem o ferramental tensorial e as bases operatoriais para o que se pretende discutir, a seguir, em relação à quebra da simetria de Lorentz por fundos tensoriais, como o $k_{\mu\nu\kappa\lambda}^F$.

Apêndice A

A.1 Transformações de Lorentz

A partir de 2 exemplos simples (Figuras 1 e 2) mostraremos a não equivalência entre os dois tipos de Transformações de Lorentz em presença de um campo de fundo.

Para os 2 exemplos os campos físicos de nosso sistema estão simbolizados pelo vetor T .

A.2 Caso 1: Vácuo trivial (Figura 1)

Neste caso a transformação de Lorentz passiva está representada por uma rotação de 90 graus no sentido anti-horário do sistema de referência (x, y) tendo como resultado o sistema transformado (x', y') . Por outro lado a transformação de Lorentz ativa está representada pela rotação de 90 graus no sentido horário do campo T até levá-lo à configuração final T' .

Como se pode observar a configuração final para as duas transformações é a mesma e podemos dizer que são equivalentes.

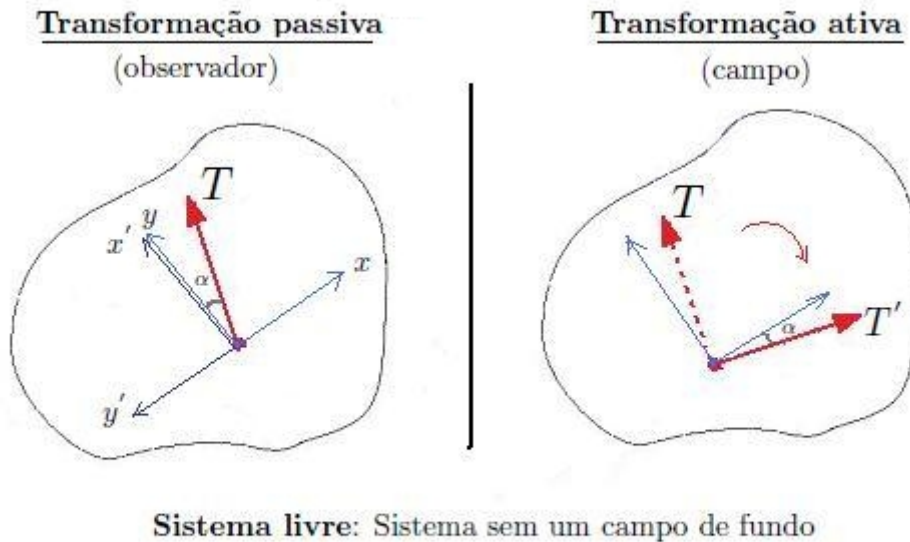
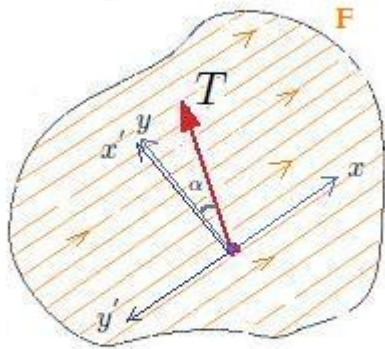


Figura 1

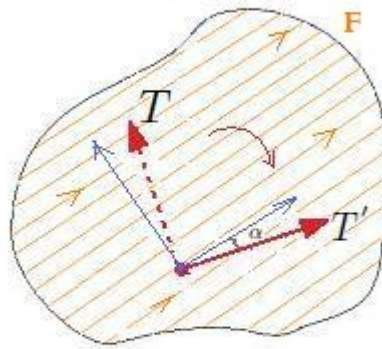
A.3 Caso 2: Vácuo não trivial (Figura 2)

Neste caso nosso sistema está localizado em uma região onde existe um campo de fundo, representado no gráfico pelo conjunto de vetores F . Se fazemos uma transformação de Lorentz passiva (uma rotação do sistema de referência (x, y) para o sistema (x', y')), o ângulo relativo entre o campo T e o campo de fundo F permanece invariante. Por outro lado ao fazer uma transformação de Lorentz ativa, isto é, se rotacionamos o campo T até T' , o ângulo relativo entre T' e o campo de fundo F é diferente do ângulo relativo inicial. Assim a configuração final de uma transformação de Lorentz ativa em presença de um campo de fundo é fisicamente diferente da configuração final de uma transformação passiva, portanto, a equivalência entre as duas é quebrada.

Transformação passiva
(observador)



Transformação ativa
(campo)



Campo de Fundo: Campo onde não temos acesso às fontes.
O campo de fundo fica invariante depois de uma transformação ativa.

Figura 2

Apêndice B

B.1 Espinores

Denotamos a componente de um espinor na representação $(\frac{1}{2}, 0)$ como ψ^α e um spinor na representação $(0, \frac{1}{2})$ como $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$.

$$(\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \quad (\psi^\alpha)^\dagger = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{B.1})$$

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad (\text{B.2})$$

B.2 Convenções para a adição e conjugação Hermiteana

$$\psi\xi = \psi^\alpha\xi_\alpha = -\xi_\alpha\psi^\alpha = \xi_\alpha\psi^\alpha = \xi\psi$$

$$\bar{\psi}\bar{\xi} = \bar{\psi}_\dot{\alpha}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_\dot{\alpha} = \bar{\xi}_\dot{\alpha}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}\bar{\psi}$$

$$\psi\sigma^\mu\bar{\xi} = \psi_\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$$

$$\bar{\psi}(\bar{\sigma}^\mu)\xi = \bar{\psi}_\dot{\alpha}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\xi_\alpha$$

$$(\psi\xi)^\dagger = \bar{\xi}\bar{\psi} = \bar{\psi}\bar{\xi}$$

$$(\psi\sigma^\mu\bar{\xi})^\dagger = \xi\sigma^\mu\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi$$

$$(\psi\sigma^{\mu\nu}\xi)^\dagger = \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}$$

$$(\xi\sigma^{\mu\nu}\psi) = -(\psi\sigma^{\mu\nu}\xi) \tag{B.3}$$

B.3 Relações para a “métrica” espinorial

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon^{\alpha\beta})^{-1}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon_{\alpha\beta})^t \tag{B.4}$$

$$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} := \bar{\epsilon}$$

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := \bar{\epsilon}^{-1} \tag{B.5}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\rho} = \delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\gamma - \delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\rho$$

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\rho}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\rho}}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} - \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\rho}} \tag{B.6}$$

B.4 Relações para variáveis grassmannianas

$$\begin{aligned}\theta^\alpha \theta^\beta &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} (\theta)^2 \\ \theta_\alpha \theta_\beta &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (\theta)^2 \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\theta})^2 \\ \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\theta})^2\end{aligned}\tag{B.7}$$

$$(\theta\phi)(\theta\psi) = -\frac{1}{2}(\phi\psi)(\theta)^2\tag{B.8}$$

B.5 Relações entre as matrizes sigma

$$\sigma^\mu := (1, \vec{\sigma}) = (\sigma^0, \sigma^i)\tag{B.9}$$

onde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{B.10}$$

A estrutura de índices espinoriais das matrizes σ^μ é:

$$\sigma^\mu = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\tag{B.11}$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu$$

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\beta\dot{\beta}}\tag{B.12}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)$$

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \bar{\sigma}^{\mu\nu}\tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) &= 2\eta^{\mu\nu} \\
\text{tr}(\sigma^{\mu\nu}) &= 0 \\
\text{tr}(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\
\text{tr}(\bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\sigma}^{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) - \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

B.6 Condição de realidade

Seja um supercampo $V(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$\begin{aligned}
V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 N(x) + \\
&\quad (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\Psi(x) + \theta^2\bar{\theta}^2 D(x)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

então o complexo conjugado fica

$$\begin{aligned}
V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &= C^*(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\xi + \bar{\theta}^2 M^*(x) + \theta^2 N^*(x) + \\
&\quad (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu^*(x) + \bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\Psi}(x) + \bar{\theta}^2\theta^2 D^*(x)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Para que $V = V^\dagger$, é preciso que:

$$\begin{aligned}
C(x) &= C^*(x) \\
\chi(x) &= \xi(x) \\
M(x) &= N^*(x) \\
A_\mu(x) &= A_\mu^*(x) \\
\Psi(x) &= \lambda(x)
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Logo, a expressão para o campo vetorial é a seguinte:

$$\begin{aligned}
V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + \theta\xi + \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 M^*(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + \\
& \theta^2\bar{\theta}^2\bar{\Psi} + \bar{\theta}^2\theta\Psi + \theta^2\bar{\theta}^2 D(x)
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Finalmente, nada impede reescrever o supercampo da seguinte forma que é mais conveniente para à análise da simetria de calibre:

$$\begin{aligned}
V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + \theta\xi + \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 M^*(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + \\
& \theta^2\bar{\theta}^2[\bar{\Psi} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}\partial_\mu\xi] + \bar{\theta}^2\theta[\Psi + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\xi}] + \theta^2\bar{\theta}^2[D(x) - \frac{1}{4}\square C(x)].
\end{aligned} \tag{B.19}$$

B.7 Álgebra para os operadores de spin

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu\alpha}\theta^\alpha{}_\nu &= \omega_{\mu\nu}, & \omega_{\mu\alpha}\theta^\alpha{}_\nu &= 0, & \omega_{\mu\alpha}\theta^\alpha{}_\nu &= \Omega_{\mu\nu}, \\
\theta_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu &= 0, & \omega_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu &= \omega_{\mu\nu}, & \Omega_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu &= 0, \\
\Omega_{\mu\alpha}\theta^\alpha{}_\nu &= \Omega_{\mu\nu}, & \Omega_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu &= 0, & \Omega_{\mu\alpha}\Omega^\alpha{}_\nu &= 2\varpi^2\square\theta_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{B.20}$$

onde

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} \\
\omega_{\mu\nu} &= \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square} \\
\Omega_{\mu\nu} &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^\alpha\partial^\beta
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Apêndice C

C.1 Rearranjamento de Fierz

O conjunto de 16 matrizes

$$\Gamma^A = \{1, \gamma^\mu, \Sigma^{\mu\nu}, \gamma_5, i\gamma^\mu\gamma_5\} \quad (\text{C.1})$$

forma uma base para as matrizes- 4×4 . Qualquer matriz pode ser expressa como uma combinação linear das matrizes Γ^A :

$$M = \sum c_A \Gamma^A \quad (\text{C.2})$$

Para encontrar os coeficientes c_A basta multiplicar a última expressão por Γ_B , onde o índice embaixo denota a inversa das matrizes Γ :

$$\Gamma_A = \{1, \gamma_\mu, \Sigma_{\mu\nu}, \gamma_5, i\gamma_\mu\gamma_5\}. \quad (\text{C.3})$$

$$\Gamma_A = (\Gamma^A)^{-1}. \quad (\text{C.4})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
M\Gamma_B &= \sum c_A \Gamma^A \Gamma_B \\
\text{tr}(M\Gamma_B) &= \text{tr}\left(\sum c_A \Gamma^A \Gamma_B\right) \\
\text{tr}(M\Gamma_B) &= \sum c_A \text{tr}(\delta_B^A 1) \quad \text{então} \\
c_A &= \frac{1}{4} \text{tr}(M\Gamma_A)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{M = \frac{1}{4} \text{tr}(M\Gamma_A) \Gamma^A}. \quad (\text{C.5})$$

Por exemplo, se $M_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta &= \frac{1}{4} \Psi_\gamma \bar{\Psi}_\delta (\Gamma_A)_{\delta\gamma} (\Gamma^A)_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{4} \bar{\Psi}_\delta (\Gamma_A)_{\delta\gamma} \Psi_\gamma (\Gamma^A)_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{4} (\bar{\Psi} \Gamma_A \Psi) \Gamma_{\alpha\beta}^A
\end{aligned}$$

Assim,

$$\boxed{\Psi \bar{\Psi} = -\frac{1}{4} (\bar{\Psi} \Gamma_A \Psi) \Gamma^A}. \quad (\text{C.6})$$

Também podemos trabalhar a expressão

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi} M \chi)(\bar{\Theta} N \xi) &= \bar{\Psi}_\alpha M_{\alpha\beta} \chi_\beta \bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta} \xi_\delta \\
&= (\bar{\Psi}_\alpha \xi_\delta) M_{\alpha\beta} \chi_\beta \bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\Psi}_\kappa \xi_\lambda (\Gamma_A)_{\lambda\kappa}] \Gamma_{\delta\alpha}^A M_{\alpha\beta} \chi_\beta \bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta} \\
&= -\frac{1}{4} (\bar{\Psi}_\kappa (\Gamma_A)_{\lambda\kappa} \xi_\lambda) (-\bar{\Theta}_\gamma N_{\gamma\delta} \Gamma_{\delta\alpha}^A M_{\alpha\beta} \chi_\beta).
\end{aligned}$$

Com esta última manipulação, estamos prontos para deduzir as relações de ortogonalidade para os condensados fermiônicos :

$$\boxed{(\bar{\Psi}M\chi)(\bar{\Theta}N\xi) = -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\xi)(\bar{\Theta}N\Gamma^A M\chi)} \quad (\text{C.7})$$

Se Ψ é um espinor de Majorana temos

$$\Psi = \Psi^c = C\bar{\Psi}^t \quad e \quad \bar{\Psi} = -\Psi^t C^{-1}, \quad (\text{C.8})$$

Onde C é a matriz de conjugação de carga, que tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} C &= i\gamma^0\gamma^2 \\ C^{-1} &= C^t = C^\dagger \\ C\gamma^{\mu t}C^{-1} &= -\gamma^\mu \\ C\gamma_5^t C^{-1} &= \gamma_5 \\ C[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^t C^{-1} &= C[\gamma^{\nu t}\gamma^{\mu t} - \gamma^{\mu t}\gamma^{\nu t}]C^{-1} \\ &= (C\gamma^{\nu t}C^{-1})(C\gamma^{\mu t}C^{-1}) - (C\gamma^{\mu t}C^{-1})(C\gamma^{\nu t}C^{-1}) \\ &= \gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu = -[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}\Psi = \varpi$$

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)^t &= -\Psi^t\gamma^{\mu t}\bar{\Psi}^t \\ &= (-\Psi^t C^{-1})(C\gamma^{\mu t}C^{-1})(C\bar{\Psi}^t) \\ &= -(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) \end{aligned}$$

$$(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0$$

$$\bar{\Psi}\gamma_5\Psi = \tau$$

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Psi)^t &= -\Psi^t\Sigma^{\mu\nu t}\bar{\Psi}^t \\ &= (-\Psi^t C^{-1})(C\Sigma^{\mu\nu t}C^{-1})(C\bar{\Psi}^t) \\ &= -(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Psi) \end{aligned}$$

$$(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Psi) = 0$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi = B^\mu$$

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi)^t &= -\Psi^t\gamma_5^t\Sigma^{\mu\nu t}\bar{\Psi}^t \\ &= (-\Psi^t C^{-1})(C\gamma_5^t C^{-1})(C\Sigma^{\mu\nu t}C^{-1})(C\bar{\Psi}^t) \\ &= -(\bar{\Psi}\gamma_5\Sigma^{\mu\nu}\Psi) = -(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi) \end{aligned}$$

$$(\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi) = 0.$$

Para $\Psi = \chi = \Theta = \xi$ e $M = N = 1$, temos

$$(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\Psi) = -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\Gamma^A\Psi)$$

(mas γ^μ e $\Sigma^{\mu\nu}$ não contribuem pois Ψ é Majorana)

$$(\bar{\Psi}\Psi)^2 = -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)$$

$$5(\bar{\Psi}\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 + (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2 \dots(*)$$

Além disto, se agora $\Psi = \chi = \Theta = \xi$ e $M = N = \gamma_5$, temos

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) = -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Gamma^A\gamma_5\Psi)$$

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\Psi)$$

$$5(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2 \dots(**)$$

Somando estas 2 relações :

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\Psi)^2$$

Lembrando-se que

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^* &= \overline{\bar{\Psi}\gamma_5\Psi} \\ &= \bar{\Psi}\bar{\gamma}_5\Psi \\ &= -\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \end{aligned}$$

então, $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ é puramente imaginário.

$$(\bar{\Psi}\Psi) = \underbrace{(i\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2}_{\text{real}} \quad (\text{C.9})$$

Levando $(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\Psi)^2$ na expressão (*) ou (**), chegamos ao resultado importante:

$$\boxed{(\bar{\Psi}\Psi)^2 = -(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 = \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2}. \quad (\text{C.10})$$

Vamos derivar, agora, as relações de ortogonalidade entre os condensados fermiônicos de Majorana.

1^{era} relação

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Gamma_A\Psi) \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_5\Psi) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\Psi) \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) \quad \text{então} \end{aligned}$$

$$\boxed{(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) = 0}. \quad (\text{C.11})$$

2^{da} relação

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma_A\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5\Psi) \\
&\quad + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}\eta_\mu^\nu(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) \text{ então}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) = 0}. \tag{C.12}$$

3^{da} relação

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma_A\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5\gamma_5\Psi) \\
&\quad + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma_5\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}\eta_\mu^\nu(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) \text{ então}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) = 0}. \tag{C.13}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) &= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Gamma_A\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma_A\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&\quad + \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\lambda\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\lambda\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&= \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi) - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\bar{\Psi}\gamma_\lambda\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma_5\Psi) \\
&= \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}[\eta_\nu^\lambda(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi) + \eta_\mu^\lambda(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) - \eta_{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma^\lambda\gamma_5\Psi)] \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Psi)^2 - \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^2 \\
\frac{3}{2}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) &= \frac{3}{2}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Psi)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{B_\mu B_\nu = (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\Psi) = \eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\Psi)^2 = \eta^{\mu\nu}\varpi^2} \quad (\text{C.14})$$

C.2 Bilineares fermiônicos de Majorana adicionais

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi &= \frac{1}{2}\bar{\Psi}(2\eta^{\mu\nu})\Psi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Psi \\ &= \eta^{\mu\nu}\bar{\Psi}\Psi = \eta^{\mu\nu}\varpi\end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu P\Psi = \partial^\mu(\bar{\Psi}\Psi) = \partial^\mu\varpi$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\Psi &= \frac{1}{2}\bar{\Psi}(2\eta^{\mu\nu})\gamma_5\Psi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\Psi \\ &= \eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) = \eta^{\mu\nu}\tau\end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu P\gamma_5\Psi = \partial^\mu\tau$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\Psi &= \bar{\Psi}(\eta^{\mu\nu}\gamma^\kappa + \eta^{\nu\kappa}\gamma^\mu - \eta^{\mu\kappa}\gamma^\nu - i\epsilon^{\alpha\mu\nu\kappa}\gamma_\alpha\gamma_5)\Psi \\ &= -i\epsilon^{\alpha\mu\nu\kappa}(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) = -i\epsilon^{\alpha\mu\nu\kappa}B_\alpha \\ &= -i\epsilon^{\mu\nu\alpha\kappa}B_\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu P\Psi &= -i\epsilon^{\mu\nu\alpha\kappa}B_\alpha\partial_\kappa \\ &= -i\Omega^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma_5\Psi &= \bar{\Psi}(\eta^{\mu\nu}\gamma^\kappa\gamma_5 + \eta^{\nu\kappa}\gamma^\mu\gamma_5 - \eta^{\mu\kappa}\gamma^\nu\gamma_5 - i\epsilon^{\alpha\mu\nu\kappa}\gamma_\alpha)\Psi \\ &= \eta^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma^\kappa\gamma_5\Psi) + \eta^{\nu\kappa}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi) - \eta^{\mu\kappa}(\bar{\Psi}\gamma^\nu\gamma_5\Psi) \\ &= \eta^{\mu\nu}B^\kappa + \eta^{\nu\kappa}B^\mu - \eta^{\mu\kappa}B^\nu\end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu P\gamma_5\Psi = (B.\partial)\eta^{\mu\nu} + \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{B}\gamma_5\Psi &= \eta^{\mu\nu}B^\kappa B_\kappa + \eta^{\nu\kappa}B^\mu B_\kappa - \eta^{\mu\kappa}B^\nu B_\kappa = 4\eta^{\mu\nu}\varpi^2 + \eta^{\nu\kappa}\varpi^2\delta_\kappa^\mu - \eta^{\mu\kappa}\varpi^2\delta_\kappa^\nu \\ &= 4\eta^{\mu\nu}\varpi^2\end{aligned}$$

C.3 Convenções e propriedades das matrizes gama

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{C.16})$$

C.4 Relações utilizadas na derivação do propagador bosônico

Se a Matriz = 1

$$\begin{aligned} M(1)L &= -2\bar{\Psi}(\partial^\mu - \gamma^\mu P)(\partial^\nu - \gamma^\nu P)\Psi \\ &= -2\bar{\Psi}(\partial^\mu\partial^\nu + \partial^\nu\gamma^\mu P - \partial^\mu\gamma^\nu P - \square\gamma^\mu\gamma^\nu)\Psi \\ &= -2\partial^\mu\partial^\nu(\bar{\Psi}\Psi) - 2\partial^\nu(\bar{\Psi}\gamma^\mu P\Psi) + 2\partial^\mu(\bar{\Psi}\gamma^\nu P\Psi) + 2\square(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi) \\ &= -2(\partial^\mu\partial^\nu\varpi - \square\eta^{\mu\nu}\varpi) \end{aligned}$$

$$M(1)L = 2\varpi\square\theta^{\mu\nu}$$

Se a Matriz = γ_5

$$\begin{aligned} M(\gamma_5)L &= -2\bar{\Psi}(\partial^\mu - \gamma^\mu P)(\partial^\nu - \gamma^\nu P)\gamma_5\Psi \\ &= -2\bar{\Psi}(\partial^\mu\partial^\nu\gamma_5 + \partial^\nu\gamma^\mu P\gamma_5 - \partial^\mu\gamma^\nu P\gamma_5 - \square\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5)\Psi \\ &= -2\partial^\mu\partial^\nu(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) - 2\partial^\nu(\bar{\Psi}\gamma^\mu P\gamma_5\Psi) - 2\partial^\mu(\bar{\Psi}\gamma^\nu P\gamma_5\Psi) + 2\square(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\Psi) \\ &= -2(\partial^\mu\partial^\nu\tau - \square\eta^{\mu\nu}\tau) \end{aligned}$$

$$M(\gamma_5)L = 2\tau\square\theta^{\mu\nu}$$

Se a Matriz = P

$$\begin{aligned}
M(P)L &= -2\bar{\Psi}(\partial^\mu - \gamma^\mu P)\gamma_5 P(\partial^\nu - \gamma^\nu P)\gamma_5 \Psi \\
&= 2\bar{\Psi}(\partial^\mu - \gamma^\mu P)\gamma^\kappa(\partial^\nu - \gamma^\nu P)\partial_\kappa \Psi \\
&= 2\bar{\Psi}(\partial^\mu \partial^\nu \gamma^\kappa - 2\partial^\nu \partial^\kappa \gamma^\mu - \partial^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu P + 2\partial^\kappa \gamma^\mu \gamma^\nu P - \partial^\nu \gamma^\mu \gamma^\kappa P + \square \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu)\partial_\kappa \Psi \\
&= -2\partial^\mu \partial_\kappa (\bar{\Psi} \gamma^\kappa \gamma^\nu P \Psi) + 4\partial^\kappa \partial_\kappa (\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^\nu P \Psi) - 2\partial^\nu \partial_\kappa (\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa P \Psi) + 2\square \partial_\kappa (\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \Psi) \\
&= 4i\square \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_\alpha \partial_\beta + 2i\square \epsilon^{\mu\kappa\alpha\nu} B_\alpha \partial_\kappa
\end{aligned}$$

$$M(P)L = 2i\square \Omega^{\mu\nu}$$

Bibliografia

- [1] A. Songaila and L.L. Cowie, *Nature* 398, 667 (1999); P.C.W. Davies, T.M. Davies and C.H. Lineweaver *Nature* 418, 602 (2002); A.Songaila and L.L. Cowie, *Nature* 428, 132 (2004).
- [2] J.W. Moffat, *Int. J. Mod. D* 12, 1279 (23); O. Bertolami, hep-ph/0301191
- [3] S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev. D* 59, 116008 (1999); V.A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* 87, 251304 (2001); *Phys. Rev. D* 66, 056005 (2002)
- [4] V. A. Kostelecky, S. Samuel, *Phys. Rev. D* 39, 683 (1989).
- [5] D. Colladay, V. A. Kostelecky *Phys.Rev. D*58, 116002 (1998).
- [6] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez *Phys. Lett. B*565, 222 (2003).
- [7] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, *Phys. Rev. D* 66, 045018 (2002).
- [8] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* 41, 1231 (1990).
- [9] M. Goldhaber and V. Timble, *J. Astrophys. Astron.* 17, 17 (1996); D. Hutsemekers and H. Lamy, *Astron. Astrophys.*332, 410 (1998); D. Hutsemekers and H. Lamy, *Astron. Astrophys.* 367, 381 (2001).
- [10] , *Phys. Rev. Lett.* 82, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung *Phys. Rev. D* 63, 105015 (2001); J.M. Chung, *Phys.Rev. D* 60, 127901 (1999); M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* 83, 2518 (1999); R. Jackiw and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* 82, 3572 (1999); G. Bonneau, *Nucl.Phys. B* 593, 398 (2001); M. Perez-Victoria, *JHEP* 0104, 032 (2001); A. P. Baeta Scarpelli et al., *Phys. Rev. D* 64, 046013 (2001).
- [11] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* 67, 085021 (2003).
- [12] R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* 93, 110402 (2004); -*ibid*, *Phys. Rev. D* 70, 125010 (2004).

- [13] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 657, 214 (2003).
- [14] H. Miyazawa , “Baryon Number Changing Currents”. Prog. Theor. Phys. 36 (6): 1266–1276 (1966).
- [15] H. Miyazawa , ”Spinor Currents and Symmetries of Baryons and Me- sons”. Phys. Rev. 170 (5): 1586–1590 (1968)
- [16] Coleman S. and Mandula J, “All possible symmetries of the S matrix”. Phys. Rev. 159 (1967) 1251.
- [17] Y. A. Golfand and E. P. Likhtman, “Extension Of The Algebra Of Poincare Group Generators And Violation Of P Invariance,” JETP Lett. 13, 323 (1971)
- [18] D. V. Volkov and V. P. Akulov, “Possible universal neutrino interac- tion,” JETP Lett. 16 438 (1972) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 16 (1972) 621]; “Is The Neutrino A Goldstone Particle?,” Phys. Lett. B 46, 109 (1973)
- [19] F.A. Berezin and G.I. Katz, Mat. Sborn. 83, 343 (1970).
- [20] P. Ramond, “Dual Theory For Free Fermions”. Phys. Rev. D 3, 2415 (1971); A. Neveu and J. H. Schwarz, “Factorizable Dual Model Of Pions” Nucl. Phys. B 31, 86 (1971).
- [21] Abdus Salam, J.A. Strathdee, ”Supergauge Transformations”. Nucl.Phys. B76:477-488, (1974)
- [22] Abdus Salam, J.A. Strathdee, ”Supersymmetry and Nonabelian Gau- ges”. Phys.Lett.B51:353-355 (1974)
- [23] Abdus Salam, J.A. Strathdee, ”Supersymmetry and Superfi- elds”.Fortsch.Phys.26:57,1978.
- [24] J. Wess and B. Zumino, “A lagrangian model invariant under supergauge transformations ”, Physics Letters B 49, 52-54 (1974).
- [25] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge transformations in four dimensi- ons”, Nuclear Physics B 70, 39-50 (1974).
- [26] L. O’Raifeartaigh, “Spontaneous Symmetry Breaking For Chiral Scalar Su- perfields,” Nucl. Phys. B 96, 331 (1975).
- [27] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity”, Princeton Uni- versity Press, Princeton, New Jersey.
- [28] B. de Witt, P. Fayet, P. Van Nieuwenhuizen, “Supersymmetry and Su- pergravity ’84” World Scientific

- [29] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory”. Cambridge University Press
- [30] H.J. Muller-Kirsten, A. Wiedemann , “Supersymmetry: An introduction with Conceptual and Computational Details” World Scientific Publishing (1987)
- [31] C.N. Ferreira, J.A. Helayel-Neto, L.R.U Manssur e M.E.X. Guimarães, “Introdução à Supergravidade”
- [32] P. Fayet and J. Iliopoulos, “Spontaneously Broken Supergauge Symmetries And Goldstone Spinors,” Phys. Lett. B 51, 461 (1974).
- [33] S. Dimopoulos, H. Georgi (1981). ”Softly Broken Supersymmetry and SU(5)”. Nuclear Physics B 193: 150.
- [34] H.Belich , J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, “Supersymmetric extension of the Lorentz and CPT violating Maxwell-Chern-Simons model”, Phys. Rev. D 68, 065030 (2003)
- [35] M.S. Berger and V.A. Kostelcky, Phys. Rev. D 65, 091701(R) (2002)
- [36] Q.G. Bailey and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D (2004) 076006
- [37] G. Betschart, E.Kant and F.R. Klinkhammer, Nucl.Phys. B 815 (2009) 198
- [38] H. Belich, L.P. Colatto, T.Costa-Soares, J.A.Helayel-Neto and M.T.D. Orlando, Europ. Phys. J. C62 (2009), 425
- [39] F.J Lina Leal, Tese de Doutorado (CBPF), em andamento