

TESE DE
DOUTORADO

**Uma Discussão sobre o Spin e a
Estabilidade da Carga Elétrica na
Eletrodinâmica de Born-Infeld**

SERGIO DE OLIVEIRA VELLOZO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, 27 JULHO DE 2009

Dedicatória

À Isabela que chega.

Agradecimentos

É com imenso prazer que expresso o meu agradecimento a cada um dos que compartilharam comigo desse delicioso período de estudo, reflexão e muito trabalho. Muitos contribuíram, alguns à sua maneira, outros até mesmo sem saber, para que essa dissertação pudesse ser concluída. A sugestão de uns, a crítica de outros, sempre com o incentivo de todos, me ajudaram em cada etapa de progresso e em cada obstáculo.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) presto a minha homenagem na medida que cito o nome de cada um dos seus membros com os quais tive o privilégio de trabalhar durante esse período. Agradeço ao Prof. José Abdala Helayël Neto, e quero deixar bem registrado nesse espaço, a grande influência que exerceu sobre a minha decisão de voltar à Física, me encorajando a entrar no programa de doutoramento, gesto esse que me deu confiança e segurança em cada passo dessa experiência nova que pude vivenciar. Além disso, como profissional e amigo, me indicou os desafios atuais da Física, tanto nos cursos como nas conversas informais. Foi um privilégio receber a sua idéia germinal, que é a essência de todo esse trabalho. Mesmo nos momentos de total ceticismo, ou nos desdobramentos finais, me deu a liberdade de um colaborador, apesar de estar recém ingresso ao grupo. Um privilégio raro de ser encontrado em grupos de pesquisa. Ainda nesse departamento pude conhecer uma gama de outros colaboradores que hoje me deixam orgulhoso por permitirem fazer parte desse círculo de amizade. Ao Prof. Sebastião Alves Dias, pelas mãos do Prof. Helayël, agradeço a ajuda e a tranquilidade para

dar continuidade aos trabalhos naquele departamento, num momento muito particular desse período. Ao Pós-Doc Leonardo P. G. De Assis devo não só todos os caminhos e infraestrutura necessária para a publicação dos artigos e confecção dessa dissertação, mas também a colaboração nas discussões polêmicas, tornando-se um membro do grupo nas publicações recentes. Ao Dr. Alexander W. Smith, devo o entusiasmo e a força, me fazendo acreditar que "ousar é o caminho para a mudança". Nunca vou esquecer essas palavras ditas nos primórdios do curso.

Agradeço ao Centro Tecnológico do Exército (CTEx) pela oportunidade de me permitir esse compartilhamento profissional, muito rico e ímpar, da minha carreira. O meu agradecimento se estende a todos os diretores, bem como ao corpo de profissionais que agregam respeito científico e tecnológico à essa instituição, bem como aos colegas de trabalho que contribuem para que se respire uma atmosfera científica e cordial.

Um agradecimento especial dirijo ao Dr. Hélio de Carvalho Vital pelas suas críticas e sugestões oportunas. Além disso ele foi o grande entusiasta em cada resultado conquistado. Sem dúvida, é um grande privilégio dividir o espaço profissional com pessoas desse gabarito.

Outro agradecimento importante eu dirijo ao Dr. Dalton Ellery Girão Barroso, não apenas por suas incontáveis caronas mas pelas intermináveis conversas sobre as mais intrigantes áreas da ciência, inclusive os alcançados aqui nessa dissertação. Um tempo maravilhoso que sempre fará parte das minhas melhores lembranças.

Quero agradecer ao Dr. Diego J. Cirilo Lombardo que lá do Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, na região de Moscou, fez a gentileza de atender ao meu pedido de envio de uma referência chave para esta dissertação.

Digo que não tenho uma só família mas várias. Me sinto adotado por cada uma delas. Portanto, não poderia deixar de citá-las separadamente.

À Família Pedras, o meu carinho e agradecimento são eternos. É um privilégio ser acolhido por pessoas de sentimentos tão nobres.

À Família Fabris, a minha gratidão e admiração por tantos anos de convívio, unidos pela amizade e pela música.

Agradeço ao Jardim Botânico do Rio de Janeiro por dispor, aos seus usuários, aquele espaço mágico, que não é só belo mas também um convite à reflexão. Lá obtive o refúgio necessário para a organização das ideias e o descanso necessário, longe do burburinho da cidade.

Finalmente, concluo esses agradecimentos entendendo que o espaço é limitado e que é humanamente impossível citar todos os nomes. Quero dizer do quanto estou feliz por esse convívio fértil e sadio. Sintetizo todos os momentos de alegria, assim como os momentos de apreensão, numa única e curta frase: “Não desista nunca”.

Resumo

As equações da Eletrodinâmica Clássica, não linear de Born-Infeld são utilizadas para descrever a carga elétrica em repouso. A solução encerra, além do campo elétrico, campos magnéticos regulares, fornecendo, através da interação entre esses setores, mecanismos simples e naturais para o entendimento da natureza do spin e da estabilidade da carga elétrica. Além disso, objetos tipo carga magnética, com intensidade próxima ao monopolo de Dirac, são apresentados sem violar a identidade de Bianchi. Adicionalmente, representando o eletromagnetismo neutro, o neutrino é acomodado dentro desse modelo e sua massa é estimada.

Summary

The nonlinear Born-Infeld Classical Electrodynamics equations are used to describe the electric charge at rest. Regular electric and magnetic fields solutions provide, through the interaction between those sectors, simple and natural mechanisms for understanding the nature of the spin and the stability of the electric charge. Furthermore, magnetic charge type objects, close to the Dirac monopole in strength, are presented without violating the Bianchi identity. In addition, representing the neutral electromagnetism, the neutrino is described in this model and its mass is estimated.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	v
Summary	vi
Índice	vii
1 INTRODUÇÃO	1
2 A ELETRODINÂMICA DE BORN-INFELD (EBI)	5
2.1 A Teoria do Elétron e a Divergência na Eletrodinâmica	5
2.2 A Eletrodinâmica de B-I no Contexto Moderno	10
2.3 A Estrutura Geral da Eletrodinâmica Não linear	12
2.4 O Formalismo Canônico	15
2.5 A Eletrodinâmica de Born-Infeld	17
3 A CARGA ELÉTRICA EM REPOUSO NA EBI	20
3.1 Descrição do Setor Magnético	21
3.2 Solução das Equações de B-I para a Carga Elétrica	25

3.3	Estudo dos Limites Assintóticos	29
3.4	A Solução Geral	31
3.5	Conclusão	38
4	PREVISÕES DO MODELO	39
4.1	A Definição dos Parâmetros b e r_o	42
4.2	A Carga Magnética	48
4.3	O Momentum Angular	51
4.4	A Estabilidade da Carga Elétrica	53
4.5	O Neutrino	57
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

É sabido que uma carga elétrica em repouso gera ao seu redor um campo puramente elétrico, sendo que uma componente magnética surgirá quando ela se mover. Isso é o que prevê o eletromagnetismo linear de Maxwell. Entretanto, a singularidade do campo elétrico e sua auto-energia infinita só são equacionadas com a introdução de uma teoria não linear. Os artigos de Max Born e Leopold Infeld[1-4], inspirados nos trabalhos pioneiros de Gustav Mie[8], indicam que a energia, associada ao campo elétrico, totalmente livre de singularidade, é finita. Sem qualquer modificação das equações de Maxwell, a não linearidade, introduzida através das relações constitutivas, foi capaz de dar respostas satisfatórias para o problema da singularidade do campo sobre a carga. Sabe-se que sobre a partícula carregada, os campos são intensos o bastante para que a natureza não poder ser adequadamente descrita por uma teoria linear. A Teoria Eletromagnética de Maxwell torna-se muito limitada nesse caso, prestando-se apenas a fornecer uma visão macroscópica do problema. Esse foi o legado deixado por Mie e aprimorado por Born e Infeld, bem como por outros posteriormente; descrever as propriedades intrínsecas das partículas carregadas apenas em termos dos seus campos.

A motivação para este trabalho parte dos seguintes fatos: uma partícula carregada,

em repouso, é estável, pois não se desintegra devido à repulsão coulombiana, possui momento de dipolo magnético e momentum angular intrínseco (spin). Esses três fatos estão intimamente ligados por uma única hipótese.

O presente trabalho tem como alvo essas questões e parte somente dos campos oriundos da própria carga elétrica em repouso, sem invocar nenhuma interação adicional e sem modificar as equações de Maxwell. A semente original repousa na hipótese básica e fundamental, aqui levantada, e enunciada da seguinte forma:

“Carga elétrica em repouso pode gerar
campo magnético regular em todo o espaço,
além do seu campo elétrico.”

Com o suporte da Eletrodinâmica não linear de Born-Infeld (EBI) na formulação Abelian, estuda-se como as relações constitutivas, juntamente com as equações de Maxwell, são capazes de gerar campos magnéticos intrínsecos e regulares. Ali repousa a não linearidade, misturando os setores elétrico e magnético. Numa teoria não linear como a de B-I, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, ε_0 e μ_0 , respectivamente, não são mais constantes, mas dependem das componentes do tensor eletromagnético antissimétrico $F_{\mu\nu}$. Ao menos na região próxima à carga elétrica, onde o campo elétrico é muito intenso, o espaço à sua volta, o vácuo, se comporta como um meio material descrito pelos campos \vec{D} e \vec{H} . Estes têm uma relação nada trivial com o tensor $F_{\mu\nu}$. É o vácuo de Born-Infeld com suas propriedades peculiares. Longe dela, o regime Maxwelliano é restabelecido.

Impõe-se como única condição, que o módulo do campo fundamental $|\vec{B}| \ll b$, sendo b o campo máximo na Teoria de Born-Infeld. Ele representa o valor limite para qualquer componente do tensor $F_{\mu\nu}$. Essa imposição pode ser interpretada de maneira diferente e

pragmática. O setor elétrico excita o setor magnético, mas o primeiro não é perturbado pelo segundo.

Em seguida, são investigadas as interações entre os setores elétrico e magnético, bem como as interações dentro do próprio setor magnético e seus efeitos sobre as componentes do tensor momento-energia, $T^{\mu\nu}$. Levando os resultados desse modelo ao elétron, por ser uma partícula elementar bem estudada e possuir uma boa quantidade de medidas experimentais, obtém-se uma rica descrição de sua estrutura, consistente com o modelo aqui desenvolvido e dentro do limite que o regime clássico pode suportar. O seu momentum angular intrínseco[58, 59], ou seja, seu “spin”, é calculado apenas em termos da interação da indução elétrica \vec{D} com a indução magnética \vec{B} , gerado pela própria carga. Auto-campos em interação. É a não linearidade mostrando os seus efeitos, ou seja, campo elétrico intenso gerando o setor magnético e esse interagindo com aquele que o gerou. O desvio é menor que 3 % do valor experimental. Trata-se de um êxito para uma teoria clássica e uma forma de aferir numericamente os próximos resultados. Por conta dessa aferição, fica a dúvida se o “spin” pode ser inteiramente reduzido às interações eletromagnéticas ou se essa representação é responsável apenas por uma parte dele, no caso, quase a totalidade.

Explorando-se a potencialidade do modelo, obtém-se, dos campos da solução de dipolo magnético, o campo magnético puramente radial, deixando-se revelar um objeto equivalente a “carga magnética”, de certa forma compatível com o valor proposto por Dirac[23]. Na eletrodinâmica clássica[33, 44, 50, 60, 61, 62, 63, 71], esses objetos completam a simetria das equações de Maxwell, resultando numa divergência não nula para a indução magnética, em outras palavras, violando a identidade de Bianchi. Nesse trabalho o campo magnético não modifica as equações de Maxwell. A divergência total do campo \vec{B} continua nula. Porém, internamente, a componente polar será a fonte de campo da componente radial. Dessa interpretação é extraída a “carga magnética”. Mais uma vez, a não lin-

earidade mostra seus efeitos exóticos. Não existe ainda nenhuma evidência experimental desses objetos, embora monopólos magnéticos também estejam presentes em modelos de Grande Unificação.

Outro resultado é o mecanismo, simples e natural, que dá estabilidade à carga elétrica. A interação entre os campos \vec{H} e \vec{B} gera pressão suficiente para inverter a tendência repulsiva Coulombiana e torna a carga estável. Especula-se sobre uma possível relação da estabilidade com o “spin”, resultando em algumas previsões de caráter mais abrangente.

Finalmente, estende-se o modelo ao caso mais extremo, o eletromagnetismo neutro, sem carga elétrica, representado pelo neutrino.

A estruturação geral da tese é descrita a seguir: o Primeiro Capítulo faz uma pequena introdução à eletrodinâmica não linear, incluindo a de Born-Infeld, e o formalismo canônico. O Segundo Capítulo contém os desenvolvimentos originais para todo o trabalho. O Terceiro Capítulo trata de cada problema separadamente. Finalmente, o Quarto Capítulo faz as considerações finais, consolidando as conclusões parciais e sugerindo os desdobramentos futuros.

Para não onerar a leitura, toda a álgebra tediosa foi colocada no Apêndice.

Capítulo 2

A ELETRODINÂMICA DE BORN-INFELD (EBI)

Neste capítulo é feita uma breve descrição histórica do problema das divergências na eletrodinâmica clássica, incluindo o problema conhecido como “Teoria do Elétron”, bem como a evolução da Eletrodinâmica de Born-Infeld. De forma sucinta, apresenta-se a estrutura geral da eletrodinâmica não linear e seu formalismo canônico, incluindo Eletrodinâmica de Born-Infeld. Destaca-se apenas o que é relevante para o desenvolvimento desse trabalho.

2.1 A Teoria do Elétron e a Divergência na Eletrodinâmica

A questão da divergência no eletromagnetismo levou Born e Infeld, na década de 30, à importante descoberta das equações não lineares, conhecidas como equações de Maxwell-Born-Infeld, ou simplesmente equações de Born-Infeld [1-7].

Desde quando a lei de Coulomb foi formulada no século XVIII, ficou evidente que

a força elétrica era infinita quando a fonte era representada por cargas do tipo ponto. Mais adiante, quando Maxwell formulou as leis da eletrodinâmica, a energia também permanecia infinita para esse tipo de representação da carga. A descoberta do elétron, no final do século XIX, exigiu a formulação de modelos que pudessem representá-lo como objeto finito em dimensão, dotando-o de uma distribuição de carga e energia[9]. Os elétrons eram representados como corpos carregados e muito pequenos que preenchiam com campos todo o espaço à sua volta. A força era o resultado da interação da carga com o campo e, de acordo com a segunda lei de Newton, o produto da massa pela aceleração. Portanto, mediante experimentos, podia ser determinada. Com base nessas hipóteses foi possível atribuir-se um tamanho finito para o elétron. Em seguida propôs-se que este não possuía uma massa do tipo comum às partículas macroscópicas, mas somente massa de origem eletromagnética. Posteriormente, descobriu-se que essa “massa eletromagnética” dependia da velocidade. A primeira observação deste efeito[10, 11, 12, 13], realizado por Kaufmann em 1906, foi considerada como um grande êxito da teoria. O cálculo dessa massa eletromagnética repousa sobre a hipótese que esta é rígida e mantém a sua forma durante o movimento. Entretanto, a hipótese da rigidez absoluta é incompatível com a teoria da relatividade especial. Adicionalmente teria que haver forças internas de coesão para manter unidas as partes do elétron que tenderiam a repelir-se mutuamente. De acordo com Einstein, essa massa poderia ser obtida calculando-se a energia interna da carga total reunida no elétron. Esta energia seria proporcional a e^2/a , sendo “ a ” o raio clássico do elétron, pois as forças de coesão teriam de contribuir também para a energia. Devido às dificuldades crescentes a idéia da massa eletromagnética foi sendo abandonada. Com o desenvolvimento da teoria dos quanta, a tendência foi supor o elétron como sendo uma partícula sem dimensão, dotada de carga “ e ” e massa “ m ”, sem interesse na sua estrutura interna. Tornava-se embaraçoso, no entanto, manter a energia própria do elétron

como sendo proporcional a e^2/a . A divergência é explícita quando o raio clássico vai a zero. Uma maneira de superar essa dificuldade consistiu em banir os termos divergentes da eletrodinâmica. Dirac[24, 25] fez isso em 1938 e 1942, com a modificação da força de uma carga do tipo ponto. Pryce[14, 15, 16, 17], em 1938[18], redefiniu o momento e a energia eletromagnética. Mas isso não se mostrou uma solução para o problema. A razão é que o raio do elétron tem um significado físico real. Ele é o comprimento que satisfaz a relação de Einstein $e^2/a = mc^2$. No cálculo da dispersão de ondas eletromagnéticas por elétrons livres, realizados por Klein-Nishina em 1929[28], não foi feita nenhuma consideração a respeito da estrutura interna dos mesmos, e os resultados conduziram a uma dependência da seção de choque com esse raio. No limite não relativístico, ela reproduz a fórmula para o espalhamento de Thomson:

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{Lab} = \frac{r_o^2}{2} [1 + \cos^2(\theta)],$$

onde r_o é o raio clássico do elétron ($r_o = e_{obs}^2/4\pi mc^2 = 2,8 \times 10^{-13} cm$).

Em geral, as teorias apresentam problemas em comprimentos de onda da ordem desse raio clássico. Portanto, a situação requeria uma modificação da eletrodinâmica, de tal maneira que esse parâmetro não interferisse na massa do elétron definida mecanicamente. A questão básica era: por que uma partícula eletricamente carregada não explode devido à repulsão coulombiana dos seus constituintes? Com o advento da Teoria Especial da Relatividade (TER), essa questão passou a se chamar Teoria do Elétron. Dentre os esforços feitos nesse sentido, o modelo proposto por G. Mie em 1912[8] pode ser considerado como um dos mais bem sucedidos para a época em que foi publicado. A idéia básica sustentava-se na hipótese de que a eletrodinâmica de Maxwell é uma aproximação linear de uma teoria não linear maior. Quando os campos são débeis, uma teoria linear pode dar conta de de-

screvê-los. Isso equivale a observar a fonte de longe e conseqüentemente vê-la como um ponto. A natureza extensa dos objetos se revelaria somente para distâncias próximas à carga que produziu o campo descrito. Nessa escala, os efeitos não lineares dominam. O modelo citado se livra de ter que invocar forças coesivas de natureza não eletromagnética. Ele generaliza as equações de Maxwell, tornando-as não lineares, e levanta a hipótese da existência de um valor de campo elétrico máximo, certamente influenciado pela Teoria da Relatividade Especial de Einstein, publicada em 1905. Mie desejava que somente o campo eletromagnético fosse o responsável por todas as propriedades do elétron. Sendo assim, o potencial quadri-vetor, A_μ , foi introduzido diretamente na Lagrangeana e não somente no campo. O resultado foi uma solução não singular para o campo elétrico com energia finita. Para regiões afastadas da carga, o campo restabelecia seu comportamento coulombiano. Entretanto, alguns aspectos indesejáveis estavam presentes nesse modelo e o preço pago foi alto. O potencial adquiriu um significado físico real. A solução dependia do valor absoluto do mesmo. A invariância de “gauge” foi perdida, bem como a covariância em relação a uma transformação de Lorentz. Essa propriedade, considerada totalmente inaceitável, fez a teoria de Mie ser engavetada por aproximadamente duas décadas. Em 1933, Born iniciou seus trabalhos com a intenção de modificar a Teoria de Maxwell[1, 2, 3]. Juntando-se a Infeld, generalizaram, de forma covariante, a teoria de Mie. Numa série de artigos, eles propuseram não apenas um modelo, mas uma teoria eletrodinâmica não linear, totalmente relativística e que preservava a invariância de “gauge”. A idéia original não apresenta dificuldades. Ela é derivada da Lagrangeana mais simples possível, ou seja, a raiz quadrada de um determinante de um tensor de posto (rank) dois. Coube ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ representar o setor simétrico. Ao tensor eletromagnético $f_{\mu\nu}$, dividido por uma constante dimensional, b , para haver a equivalência de unidades, coube representar o setor antisimétrico. Essa constante dimensional está relacionada com o

valor máximo que o campo eletromagnético pode assumir. Assim, somadas às exigências de Mie, isto é, que as equações fossem invariantes sob as transformações do grupo de Poincaré e que se reduzissem às equações de Maxwell no vácuo, quando os campos fossem débeis, Born adicionou mais duas: que as equações de campo fossem covariantes sob o grupo de Weyl, que se traduz por invariância de “gauge”. Por último, que a densidade de energia do campo eletromagnético, produzido pela carga elétrica, fosse integrável[4]. Porém, a covariância sob o grupo de Poincaré e a integrabilidade do campo, juntas, a princípio, não seriam suficientes para identificar as equações de campo. Entretanto, em 1970, Boilat[29, 30] e Plebański[31] descobriram que se fosse acrescida ao novo modelo a exigência de a velocidade da luz ser independente do estado de polarização, chegar-se-ia a uma família de equações de campo de um único parâmetro, embora isso já estivesse implicitamente inserido na eletrodinâmica proposta por Born-Infeld. Essa é uma outra maneira, mais sofisticada, de chegar-se à Teoria de Born-Infeld; impor-se que a velocidade da luz não dependa da polarização. Isso é chamado de condição de não bi-refringência. Convém salientar que essa eletrodinâmica não linear é a única, entre todas outras teorias não lineares, na qual a velocidade da luz é independente da polarização. É claro que a eletrodinâmica de Maxwell também apresenta essa propriedade, porém é linear. Portanto, a Eletrodinâmica de Born-Infeld substitui o puro “Éter de Maxwell” por um éter não trivial na sua essência. Esse Éter de Born-Infeld se comporta de forma análoga a um meio material que admite ser polarizado.

As dificuldades encontradas na quantização da teoria e o êxito da Eletrodinâmica Quântica, QED, desenvolvida por Dyson, Feynman, Schwinger e Tomonaga, fizeram com que a Teoria de Born-Infeld fosse esquecida por quase meio século. Born sustentava que a auto-energia infinita, que ainda infestava a QED, poderia ser eliminada pela quantização das equações não lineares do eletromagnetismo clássico, que atribuem energia finita

para uma carga do tipo ponto. Mas apesar da intensa perseguição dessa idéia, todas as tentativas de adaptação aos princípios da Mecânica Quântica e a introdução do “spin” fracassaram[5, 6, 7, 26, 49]. Além disso, as equações de campo de Maxwell-Born-Infeld atribuem uma auto-força de Lorentz sobre a carga, tomada como um ponto, indefinida em direção, uma vez que existe uma discontinuidade do campo sobre a mesma. Posteriormente, vários Lagrangeanos foram propostos[20, 21, 22], perdendo-se a invariância de “gauge”, na tentativa de eliminar essa descontinuidade.

2.2 A Eletrodinâmica de B-I no Contexto Moderno

No início da década de 80, surge a primeira versão não abeliana da Teoria de Born-Infeld, proposta por Hagiwara[51]. Ela se restringe apenas ao grupo de simetria $SU(2)$ e estabelece a mais simples Lagrangeana possível em termos dos respectivos geradores. A partir desse trabalho, várias outras diferentes versões não abelianas surgiram[52, 53, 54]. O primeiro passo na construção da Teoria de Born-Infeld não Abelianas consistiu em substituir o tensor $f_{\mu\nu}$ pelo seu equivalente não abeliano $f_{\mu\nu}^a t^a$, sendo t^a os geradores do grupo em questão. Nessa mesma década, surge a Teoria das Cordas. Sua origem tem como razão a intenção de descrever as propriedades das interações fortes. Porém, logo ficou claro que essa não podia dar uma descrição completa dessas interações. A Cromodinâmica Quântica já estava presente como alternativa para descrevê-las. Em seguida, apareceram novas motivações para que a rica estrutura da Teoria das Cordas não fosse abandonada. Seu excelente comportamento na região do UV, a presença de um estado sem massa e “ $spin = 2$ ”, tornando-o um possível candidato ao graviton, alm da consistência da teoria para dimensões maiores que quatro, tornaram-na uma possível teoria quântica candidata à unificação das interações fundamentais, incluindo a gravidade. Em paralelo, Polyakov formula a Teoria das Cordas em termos de integrais funcionais.

Foi a partir dessa última formulação, que a ação de Born-Infeld reapareceu novamente, vista sob um contexto mais moderno[41, 42, 45, 47]. De fato, usando-se o formalismo de Polyakov, Fradkin e Tseytlin obtiveram, em 1985[46], a ação de Born-Infeld como uma ação de baixa energia da Teoria das Cordas abertas. Com condições de contorno de Neumann para os extremos da corda acoplada a um campo de “gauge” abeliano, a ação de Born-Infeld foi obtida na aproximação de campos eletromagnéticos quase constantes. Ou seja, desprezando-se as derivadas de $f_{\mu\nu}$. Dois anos depois, a ação de Born-Infeld foi novamente obtida acoplando-se uma corda bosônica aberta, com condições de Neumann, à um campo de “gauge” abeliano e exigindo-se Invariância Conforme da teoria, com a mesma aproximação anterior. O passo seguinte foi derivar a ação efetiva que resulta na mesma forma da ação de Born-Infeld obtida anteriormente. Surpreendente é ver que os cálculos, em ambos os casos, são exatos, em α' , até a ordem de aproximação calculada. O parâmetro α' está relacionado com a tensão da corda pela equação $T = (2\pi\alpha')^{-1}$, que determina o valor crítico do campo elétrico. Em 1987, Cecotti e Ferrara, apresentam uma versão supersimétrica, N=1, D=4, para a ação de Born-Infeld. Porém essa condição não fixava, de forma única, o setor bosônico da ação $\sqrt{-\det(\eta_{mn} + T^{-1}F_{mn})}$. Mais tarde ficaria claro que para N=4 e D=4, ou N=1 e D=10, isso seria possível. Em 1995, Witten mostrou a necessidade de ampliar a ação de Born-Infeld não Abelianas, no contexto de branas superpostas.

A Eletrodinâmica de Born-Infeld ainda não teve nenhuma comprovação experimental direta[55, 56]. Em 1997, Burke e colaboradores[73] conseguiram, pela primeira vez, produzir, em laboratório, pares e^+e^- , oriundos do espalhamento inelástico de fótons de alta energia ($\omega_1 + \omega_2 \rightarrow e^+e^-$). Acredita-se que esse tipo de evento ocorra nos processos astrofísicos, porém nunca tinha sido observado em laboratório. Em 2006, Carley e Kiessling[72] apresentaram o primeiro cálculo relativístico não perturbativo do espectro

do átomo de hidrogênio, previsto pela primeira quantização da Eletrodinâmica de Born-Infeld. A julgar pelos valores encontrados, confrontados com os resultados experimentais, o parâmetro b está significativamente restrito a um intervalo maior.

Esse é o contexto no qual a Teoria de Born-Infeld está imersa, o qual explica o crescente interesse por essa teoria desde a década de oitenta. O fato de até hoje não ter sido possível quantizá-la[26, 34] torna-a mais desafiante, face às respostas que essa teoria pode fornecer, assumindo que uma versão quântica ainda será obtida.

2.3 A Estrutura Geral da Eletrodinâmica Não linear

As equações de Maxwell formam a base do eletromagnetismo clássico, bem como o ponto de partida para a formulação da eletrodinâmica quântica. No vácuo, elas são escritas em termos dos campos elétrico e magnético, oriundos de cargas e correntes, respectivamente. Na presença de um meio material, essas equações são modificadas para incluir a polarização e a magnetização. Isso é feito introduzindo-se, além dos campos \vec{E} e \vec{B} , os campos \vec{D} e \vec{H} . Os dois primeiros se relacionam através de um conjunto de equações homogêneas, ou seja, livre de fontes,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (2.3.2)$$

Na notação tensorial relativística apresenta-se como:

$$\partial^\lambda F_{\mu\nu} + \partial^\nu F_{\lambda\mu} + \partial^\mu F_{\nu\lambda} = 0, \quad \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.3.3)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor anti-simétrico de Maxwell:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Mesmo em teorias não lineares, o tensor $F_{\mu\nu}$ é derivado do rotacional de um quadri-vetor potencial A_μ de maneira tal que, no caso Abeliano, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

O segundo conjunto de equações tem as cargas e correntes como fontes de campo.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.3.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (2.3.6)$$

que, na notação tensorial relativística, ganha o seguinte aspecto:

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = j^\mu \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}), \quad (2.3.7)$$

onde o tensor $G^{\mu\nu}$ é escrito em termos das componentes dos campos \vec{D} e \vec{H} . Ela deriva da variação de uma ação, como será visto à frente. Para (1+3)D:

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

Observa-se que toda contribuição para a polarização e magnetização está a cargo desses campos. Faz-se necessário o uso de uma relação entre $F^{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu}$, chamada de relação constitutiva, para que as equações (2.3.1), (2.3.2), (2.3.5) e (2.3.6) se completem.

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad (2.3.9)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (2.3.10)$$

A teoria é linear quando as equações (2.3.9) e (2.3.10) guardam uma relação linear simples, como é o caso da eletrodinâmica de Maxwell para os materiais que obedecem à uma relação do tipo $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, sendo ϵ e μ a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio em questão, respectivamente. Se essas relações são mais complexas, não sendo mais lineares, então uma teoria eletrodinâmica não linear particular está definida.

O método usual é admitir que existe um princípio de ação mínima que garante a consistência entre as equações (2.3.1), (2.3.2), (2.3.5), (2.3.6), (2.3.9) e (2.3.10). Assume-se que existe uma função escalar Lagrangeana, $\mathcal{L}(S, P)$, que depende apenas dos invariantes escalares, por não terem índices livres, S e P , definidos, a seguir, como:

$$S = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad (2.3.11)$$

$$P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}, \quad (2.3.12)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o dual de $F^{\mu\nu}$ definido como:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (2.3.13)$$

Este procedimento preserva a invariância relativística, bem como a invariância de "gauge".

2.4 O Formalismo Canônico

Admitindo-se que a função densidade de Lagrangeana \mathcal{L} não depende das derivadas dos campos, a variação da ação em relação às componentes $F_{\mu\nu}$ pode ser facilmente escrita como:

$$\delta \int [\mathcal{L} + A_\mu j^\mu] d^4 x = \int \left[\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) + j^\mu \right] \delta A_\mu d^4 x. \quad (2.4.14)$$

Tomando-se o extremo da variação acima, fica fácil reconhecer a equação (2.3.7) se $G^{\mu\nu}$ é identificado como:

$$G^{\mu\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}. \quad (2.4.15)$$

Com os índices adequadamente escolhidos, o princípio variacional vai estabelecer uma relação direta dos campos \vec{D} e \vec{H} com os campos fundamentais \vec{E} e \vec{B} , ligando o conjunto de equações homogêneas (2.3.1) e (2.3.2) com as equações de fonte (2.3.5) e (2.3.6). A indução elétrica \vec{D} tem o caráter de momentum canônico, uma vez que ele deriva do campo elétrico \vec{E} , e esse está associado à taxa de variação temporal do potencial A_o . Formalmente, ele é escrito como:

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}}. \quad (2.4.16)$$

De forma análoga, o campo magnético ganha a interpretação canônica de uma força mecânica, uma vez que é formalmente escrito como a variação da densidade de Lagrangeana em relação à indução magnética \vec{B} . Segue então que:

$$\vec{H} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{B}}. \quad (2.4.17)$$

As propriedades dinâmicas do campo eletromagnético são obtidas do tensor simétrico energia-momentum, definido por[32, 68]:

$$T^{\mu\nu} = F_{\alpha}^{\mu} G^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.4.18)$$

Cada componente desse tensor, de acordo com seus índices puramente temporal, espacial ou espaço-temporal, tem uma interpretação particular. A primeira, T^{00} , está relacionada com a densidade de energia. Traduzida em termos dos campos e da Lagrangeana, é escrita como:

$$T^{00} = \vec{E} \cdot \vec{D} - \mathcal{L}. \quad (2.4.19)$$

A densidade de momentum eletromagnético fica por conta das componentes tempo-espacial T^{0j} que, escrita em termos dos campos, reduz-se a:

$$T^{0j} = \left(\vec{E} \times \vec{H} \right)^j, \quad (2.4.20)$$

ou, em termos do seu simétrico:

$$T^{i0} = \left(\vec{D} \times \vec{B} \right)^i. \quad (2.4.21)$$

Finalmente, as componentes puramente espaciais de T^{ij} estão relacionadas com a força total por unidade de área, ou seja, a pressão mecânica dos campos eletromagnéticos:

$$T^{ij} = -E^i D^j - H^i B^j + \delta^{ij} \left(\mathcal{L} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right). \quad (2.4.22)$$

Essa componente tem papel de destaque nesse trabalho, uma vez que a estabilidade da carga elétrica está diretamente relacionada com esse setor tensorial.

Dessa maneira, o tensor energia-momentum pode ser mapeado da forma a seguir:

$$\begin{pmatrix} T^{00} & T^{0j} \\ T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \text{energia} & \text{momentum} \\ \text{momentum} & \text{pressão} \end{pmatrix}. \quad (2.4.23)$$

Além do mais, esse tensor é conservado e sua quadri-divergência é nula.

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.4.24)$$

A propriedade de simetria $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, adicionada à propriedade de conservação da equação (2.4.24), permite que o momentum linear, P^μ , e o angular, $L^{\mu\nu}$, se conservem:

$$P^\mu = \int d^3\vec{x} T^{\mu 0}, \quad (2.4.25)$$

$$L^{\mu\nu} = \int d^3\vec{x} (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}). \quad (2.4.26)$$

Essa rápida descrição da estrutura da eletrodinâmica, apresentada aqui, não é completa, porém, é suficiente para o desenvolvimento dessa dissertação. A literatura está repleta de ótimas referências[38, 43, 40] abordando o assunto de forma mais profunda.

2.5 A Eletrodinâmica de Born-Infeld

A Eletrodinâmica não linear de Born-Infeld[27, 57, 64, 69, 70, 74, 80], na versão original[4], está definida no quadridimensional (1+3)D e sua Lagrangeana está sujeita à duas importantes imposições:

- 1) Para campos débeis, ela deve se reduzir à Eletrodinâmica de Maxwell;
- 2) No caso puramente eletrostático, deve existir um limite superior para o campo elétrico[75, 76], b , enquanto que no caso geral[19], este estabelece os limite da diferença

$\sqrt{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}$, desde que esses dois campos sejam calculados num referencial de Lorentz, no qual o vetor de Poynting seja nulo. É claro que no caso de não existir este referencial, \vec{E} sendo perpendicular a \vec{B} e $\vec{E}^2 = \vec{B}^2$, também não existirá limite para o campo crítico.

Fazendo uma analogia com a Teoria da Relatividade Especial de Einstein, onde a velocidade da luz no vácuo, c , corresponderia ao campo máximo b , a Lagrangeana a seguir já satisfaz às duas imposições exigidas anteriormente.

$$\mathcal{L} = b^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{2S}{b^2}} - 1 \right\} \rightarrow b^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{b^2}} - 1 \right\}. \quad (2.5.27)$$

Porém, acrescida do outro invariante P , ela adquire novas e interessantes características. Uma delas é que ondas eletromagnéticas com diferentes polarizações se propagam com a mesma velocidade.

$$\mathcal{L} = b^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} - 1 \right\} \rightarrow b^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} - 1 \right\}. \quad (2.5.28)$$

Essa Lagrangeana pode ser considerada especial ainda por outra razão. Ela pode ser escrita de forma mais geral em termos de um determinante, muito útil para generalização quanto ao número de dimensões da teoria:

$$\mathcal{L} = b^2 \left\{ \sqrt{-\det \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{F_{\mu\nu}}{b} \right)} - 1 \right\}. \quad (2.5.29)$$

A interpretação mais moderna mostra que essa ação governa a dinâmica de uma D-brana.

Em resumo, so as seguintes as relações constitutivas do formalismo canônico:

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right) \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}}, \quad (2.5.30)$$

$$\vec{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{B}} = \frac{\vec{B} - \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right) \vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}}. \quad (2.5.31)$$

Contudo, mais interessante escrever \vec{E} e \vec{H} em termos da indução elétrica \vec{D} , e da indução magnética \vec{B} , a ser determinada. Toda a álgebra tediosa dessa inversão é desenvolvida no Apêndice A.

$$\vec{E} = \frac{\left(1 + \frac{\vec{B}^2}{b^2}\right) \vec{D} - \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{B}}{b^2}\right) \vec{B}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\vec{B}^2}{b^2}\right) \left(1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2}\right) - \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2}}, \quad (2.5.32)$$

$$\vec{H} = \frac{\left(1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2}\right) \vec{B} - \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{B}}{b^2}\right) \vec{D}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\vec{B}^2}{b^2}\right) \left(1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2}\right) - \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2}}. \quad (2.5.33)$$

Expressa dessa forma, fica explícita a dualidade discreta, se for feita a seguinte troca[38, 39, 40, 48, 79, 81]:

$$\vec{B} \rightarrow \vec{D} \quad e \quad \vec{H} \rightarrow \vec{E}.$$

O material aqui exposto é suficiente para a construção do modelo proposto neste trabalho, que irá descrever a carga elétrica em repouso. Com o suporte da Eletrodinâmica não linear de Born-Infeld, o modelo será desenvolvido no próximo capítulo. As relações constitutivas, derivadas do formalismo canônico, aqui rapidamente apresentado, irão compor, com o conjunto das Equações de Maxwell, as equações diferenciais, cujas soluções deverão descrever a partícula carregada.

Capítulo 3

A CARGA ELÉTRICA EM REPOUSO NA EBI

Este capítulo se dedica à busca de soluções regulares em todo o espaço para as equações clássicas, não lineares, da Eletrodinâmica de Born-Infeld na formulação Abelian. Estuda-se como o setor magnético é excitado devido à presença de um campo elétrico intenso, nas imediações de uma carga elétrica em repouso. Numa teoria não linear, como a de Born-Infeld, as relações constitutivas misturam os setores elétrico e magnético, gerando vários caminhos a serem explorados. Investiga-se como campo e objetos do tipo carga magnética originam-se da carga elétrica em repouso. Uma única hipótese adicional é introduzida visando a tornar integrável o sistema de equações diferenciais. O material incluído neste capítulo encontra-se publicado no periódico *International Journal of Theoretical Physics*[83, 84].

3.1 Descrição do Setor Magnético

Ao contrário do que o eletromagnetismo clássico de Maxwell estabelece, considera-se que o setor magnético pode ser influenciado pelo setor elétrico devido à presença de uma carga elétrica em repouso. Na eletrodinâmica linear de Maxwell, não cabe tal hipótese, uma vez que as relações constitutivas não misturam os dois setores.

Quando a natureza é descrita por um modelo não linear, efeitos anômalos, e intuitivamente imprevisíveis, podem surgir. É o caso da Eletrodinâmica de Born-Infeld[4], onde as relações constitutivas são bem mais complexas, com os dois setores, elétrico e magnético, misturados, conferindo mais riqueza à teoria.

Para uma carga elétrica do tipo ponto, poderia parecer que a simetria ajudaria na busca dessas soluções. Mas não é o que acontece. As soluções simétricas escondem [35, 36] essa possível relação entre os dois setores. Além disso, as equações de Maxwell não podem ser violadas. Nesse raciocínio, a equação homogênea da divergência para o campo \vec{B} só oferece a solução trivial, pois parte-se do princípio que não há nenhuma fonte de campo magnético externo. É necessário que a simetria seja quebrada[37] para que se perceba como a não linearidade é rica em resultados e interpretações.

Quebra-se a simetria do problema, adicionando-se a dependência ao ângulo polar, além da dependência radial. Existe uma razão muito forte para essa adoção. Linhas de campo encurvadas e fechadas dão divergência nula. Por isso, é razoável que o estudo se inicie com a introdução desse grau de liberdade. Por outro lado, uma componente com dependência azimutal, φ , colocaria em risco a circulação do campo magnético, que deve ser nula sempre. Levando-se em conta essas ponderações, considera-se que o setor magnético seja dotado de dois graus de liberdade, componente e dependência radial e polar.

$$\vec{H}(r, \theta) = H^r(r, \theta)\hat{r} + H^\theta(r, \theta)\hat{\theta}. \quad (3.1.1)$$

$$\vec{B}(r, \theta) = B^r(r, \theta)\hat{r} + B^\theta(r, \theta)\hat{\theta}. \quad (3.1.2)$$

Os índices referem-se a cada grau de liberdade do campo em questão. Preservou-se apenas a simetria axial por conta da exigência de $\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$, uma vez que as equações de Maxwell devem ser preservadas.

Por ser solução exata de uma carga elétrica do tipo ponto, a componente polar da indução elétrica, D^θ , é nula. Esse campo possui simetria esférica e sua solução, bem conhecida, singular na origem, escreve-se como:

$$\vec{D} = \frac{e}{r^2}\hat{r}.$$

O mesmo não acontece com o campo elétrico, que vê essa mesma carga, não como um ponto, mas como uma distribuição espacial contínua, permitindo que se mantenha finito em todo espaço, inclusive na origem. A simetria radial da indução elétrica não leva à simetria para o campo elétrico. Entretanto, a magnitude de E^θ é de segunda ordem em b^{-1} , quando comparada com a componente radial. Isso será discutido logo em seguida, quando for introduzida a hipótese simplificadora que restaura a simetria radial para o setor elétrico num todo, sem contudo desacoplar o setor magnético do setor elétrico. Escritas na forma original, as relações constitutivas não são adequadas para a análise do problema em questão.

Por conseguinte, escritas em termos dos campos \vec{D} e \vec{B} , as relações constitutivas podem ser apreciadas em suas componentes separadamente:

$$E^r = \frac{1}{R} \left\{ \left(1 + \frac{\vec{B}^2}{b^2} \right) D^r - \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{D}}{b^2} \right) B^r \right\}, \quad (3.1.3)$$

$$E^\theta = \frac{1}{R} \left\{ \left(1 + \frac{\vec{B}^2}{b^2} \right) D^\theta - \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{D}}{b^2} \right) B^\theta \right\}, \quad (3.1.4)$$

$$H^r = \frac{1}{R} \left\{ \left(1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2} \right) B^r - \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{D}}{b^2} \right) D^r \right\}, \quad (3.1.5)$$

$$H^\theta = \frac{1}{R} \left\{ \left(1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2} \right) B^\theta - \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{D}}{b^2} \right) D^\theta \right\}, \quad (3.1.6)$$

$$R = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{B^\theta}{b} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{D^r}{b} \right)^2 \right] + \left(\frac{B^r}{b} \right)^2}. \quad (3.1.7)$$

Aproveitando-se da simetria radial para o campo \vec{D} , estas relações são finalmente reescritas da seguinte forma:

$$E^r = \frac{\left[1 + \left(\frac{B^\theta}{b} \right)^2 \right]}{R} D^r,$$

$$E^\theta = -\frac{\left(\frac{B^r B^\theta}{b^2} \right)}{R} D^r,$$

$$H^r = \frac{B^r}{R},$$

$$H^\theta = \frac{\left[1 + \left(\frac{D^r}{b} \right)^2 \right]}{R} B^\theta,$$

Para tornar esse conjunto de equações algébricas integrável quando inserido nas equações de Maxwell, introduz-se uma hipótese simplificadora. Considera-se que o setor magnético é um efeito de segunda ordem, de tal maneira que $|\vec{B}| \ll b$ para todo o espaço, simplificando consideravelmente as relações constitutivas. Além disso, esse procedimento vai garantir um acoplamento mínimo entre o setor magnético e o elétrico, preservando-se a

principal característica da teoria que é a não linearidade. Posteriormente, será visto que os termos desprezados confirmam a hipótese aqui levantada. Portanto, introduzindo-se essa aproximação, as relações constitutivas podem ser escritas de forma mais simples:

$$R \rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{D^r}{b}\right)^2}, \quad (3.1.8)$$

$$E^r(r) \rightarrow \frac{D^r}{\sqrt{1 + \left(\frac{D^r}{b}\right)^2}}, \quad (3.1.9)$$

$$B^r(r, \theta) \rightarrow H^r(r, \theta) \sqrt{1 + \left(\frac{D^r}{b}\right)^2}, \quad (3.1.10)$$

$$B^\theta(r, \theta) \rightarrow \frac{H^\theta(r, \theta)}{\sqrt{1 + \left(\frac{D^r}{b}\right)^2}}. \quad (3.1.11)$$

O procedimento adotado restaurou ao campo elétrico \vec{E} sua forma original, com simetria radial. O tratamento rigoroso exigiria que ele tivesse componentes radial e polar, sendo esta última escrita em termos da primeira e do produto de duas grandezas de segunda ordem. Seguindo a idéia de deixar o setor elétrico livre da influência do setor magnético, despreza-se a componente polar, de tal forma que:

$$E^\theta = - \left(\frac{B^r B^\theta}{b^2}\right) \frac{D^r}{\sqrt{1 + \left(\frac{D^r}{b}\right)^2}} \simeq - \left(\frac{B^r B^\theta}{b^2}\right) E^r \ll E^r. \quad (3.1.12)$$

A manutenção dessa componente introduziria dificuldades matemáticas adicionais e também termos indesejáveis e pouco significantes no complexo problema em estudo.

Esta hipótese não só deixou o sistema tratável matematicamente, como ainda preservou o setor elétrico de qualquer perturbação oriunda do setor magnético, desprezível como será visto adiante. Em outras palavras, a carga elétrica perturba o espaço de sua vizinhança, excitando o setor magnético. Por outro lado, este último, dentro dos limites

impostos, não é capaz de perturbar o primeiro, pelo menos em primeira aproximação. O vínculo entre os dois setores continua preservado na forma das equações (3.1.10) e (3.1.11), porém em um único sentido. E mais, a permeabilidade magnética, μ , adquire uma representação anisotrópica, como pode ser visto a seguir.

$$\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \left(\frac{D^r}{b}\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{D^r}{b}\right)^2}} \end{pmatrix}. \quad (3.1.13)$$

Ela traz a informação apenas do setor elétrico e através da indução elétrica e rapidamente assume o regime linear quando $r \gg r_0$, recuperando seu caráter constante, $\mu \rightarrow 1$.

Por outro lado, admitindo que essa aproximação continue valendo quando $r \approx 0$, a componente radial domina, $\mu \rightarrow \frac{D^r}{b}$.

3.2 Solução das Equações de B-I para a Carga Elétrica

Os campos anteriormente descritos, quando devidamente removidos de componentes e variáveis indesejáveis, agora podem ser inseridos nas equações de Maxwell independentes do tempo. A primeira equação exige que o campo magnético $\vec{H}(r, \theta)$ tenha o seu rotacional nulo, $\vec{\nabla} \times \vec{H}(r, \theta) = \vec{0}$. Explicitando essa equação nas suas componentes, resta apenas a *EDP* a seguir:

$$\frac{1}{r} \{ \partial_r [rH^\theta(r, \theta)] - \partial_\theta H^r(r, \theta) \} = 0. \quad (3.2.14)$$

A segunda equação estabelece a ausência de fontes para a indução magnética, $\vec{B}(r, \theta)$.

Portanto, a sua divergência, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(r, \theta)$, tem que ser nula:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 B^r(r, \theta)] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta [\sin(\theta) B^\theta(r, \theta)] = 0. \quad (3.2.15)$$

Essas duas equações, (3.2.14) e (3.2.15), devem ser satisfeitas simultaneamente e devem gerar campos, B^r e B^θ , regulares e finitos, em todo o espaço. Os campos magnéticos H^r e H^θ , não precisam ser finitos pois eles derivam de relações canônicas e não estão comprometidos com a Lagrangeana \mathcal{L} . A separação das variáveis é o caminho para a solução dessas equações. Cada componente se desdobra no produto de duas funções. Uma descreve apenas a dependência radial e a outra descreve a dependência angular. Procedendo assim, os campos $\vec{H}(r, \theta)$ e $\vec{B}(r, \theta)$ se escrevem em termos de novas funções:

$$H^r(r, \theta) = h^r(r)G(\theta) \quad H^\theta(r, \theta) = h^\theta(r)J(\theta). \quad (3.2.16)$$

Segue, imediatamente, das equações (3.1.10) e (3.1.11), que a indução magnética \vec{B} se decompõe, na dependência radial, de forma similar ao campo \vec{H} , mas de forma idêntica na dependência angular:

$$B^r(r, \theta) = b^r(r)G(\theta) \quad B^\theta(r, \theta) = b^\theta(r)J(\theta). \quad (3.2.17)$$

Isso só foi possível porque a hipótese simplificadora livrou a função R , equação (3.1.7), da dependência angular. Caso contrário, a separação de variáveis não seria viável e as equações não seriam integráveis. As seis funções desconhecidas, h^r , h^θ , b^r , b^θ , G e J , serão determinadas satisfazendo as equações (3.2.14) e (3.2.15). As equações (3.1.10) e (3.1.11) vinculam b^r com h^r e b^θ com h^θ , reduzindo para quatro o número de funções independentes a serem determinadas.

O primeiro conjunto de equações diferenciais resulta da substituição de (3.2.16) em (3.2.14). Ele vincula, na forma diferencial, as funções com dependência radial, h^r com h^θ , e as funções com dependência angular, G com J , através da constante λ :

$$\frac{1}{hr(r)} \frac{d[rh^\theta(r)]}{dr} = \frac{1}{J(\theta)} \frac{d[G(\theta)]}{d\theta} = \lambda. \quad (3.2.18)$$

Procedendo da mesma maneira com (3.2.17) e (3.2.15) , ganha-se mais dois conjuntos de equações diferenciais e mais uma constante ς a ser determinada:

$$\frac{1}{rb^\theta(r)} \frac{d[r^2b^r(r)]}{dr} = -\frac{1}{\text{sen}(\theta)G(\theta)} \frac{d[\text{sen}(\theta)J(\theta)]}{d\theta} = \varsigma. \quad (3.2.19)$$

Essas quatro equações diferenciais ficam melhor dispostas para serem apreciadas quando separadas uma a uma.

As que descrevem somente os termos com dependência radial:

$$\frac{d[rh^\theta(r)]}{dr} = \lambda hr(r), \quad (3.2.20)$$

$$\frac{d[r^2b^r(r)]}{dr} = \varsigma rb^\theta(r). \quad (3.2.21)$$

E as que descrevem os termos com dependência angular:

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta} = \lambda J(\theta), \quad (3.2.22)$$

$$\frac{d[\text{sen}(\theta)J(\theta)]}{d\theta} = -\varsigma \text{sen}(\theta)G(\theta). \quad (3.2.23)$$

Satisfazer essas quatro equações simultaneamente significa satisfazer a divergência e o rotacional do setor magnético.

A substituição de $J(\theta)$ da equação (3.2.22) na equação (3.2.23) resulta numa EDO de segunda ordem para a função $G(\theta)$. Nela, aparece o produto $\lambda\varsigma$. Seu espectro de valores vai definir as soluções fisicamente aceitáveis.

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \text{sen}(\theta) \frac{dG(\theta)}{d\theta} \right\} + \lambda_{\zeta} \text{sen}(\theta) G(\theta) = 0. \quad (3.2.24)$$

A solução geral, com a única restrição ao produto λ_{ζ} de não tornar o índice complexo, é escrita em termos de uma classe mais geral de funções denominadas Funções de Legendre de primeira e segunda espécie, $P_n(\cos(\theta))$ e $Q_n(\cos(\theta))$ respectivamente.

$$G_n(\theta) = K_1 P_n(\cos(\theta)) + K_2 Q_n(\cos(\theta)), \quad n = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda_{\zeta}} - 1}{2}. \quad (3.2.25)$$

Entretanto, a segunda função, Q_n , não é sempre real e toma-se K_2 como nulo. A solução se restringe apenas às Funções de Legendre de primeira espécie $P_n(\cos(\theta))$.

$$G_n(\theta) = K_1 P_n(\cos(\theta)), \quad n = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda_{\zeta}} - 1}{2}. \quad (3.2.26)$$

Essas funções não formam curvas fechadas se $n \notin \mathbb{N}$. Somente valores inteiros podem gerar soluções que atendam aos interesses do problema, ou seja, as que apresentam n inteiro. Em consequência, as Funções de Legendre se reduzem aos conhecidos Polinômios de Legendre e a lista a seguir exhibe a lei de recorrência entre n e λ_{ζ} :

$$n = 0 \rightarrow \lambda_{\zeta} = 0$$

$$n = 1 \rightarrow \lambda_{\zeta} = 1 \times 2$$

$$n = 2 \rightarrow \lambda_{\zeta} = 2 \times 3$$

$$n = 3 \rightarrow \lambda_{\zeta} = 3 \times 4$$

.....

$$n = j \rightarrow \lambda_{\zeta} = j(j + 1)$$

Desse espectro infinito de polinômios, somente um não violará as condições necessárias

para que a solução represente um campo legítimo, em consequência da hipótese simplificadora.

3.3 Estudo dos Limites Assintóticos

As soluções radiais, regulares para todo o espaço, têm influência direta no conjunto infinito das soluções angulares. Cada solução angular tem sua solução radial associada de forma unívoca. Será descartada a solução para o índice n , ou seu produto $\lambda\varsigma$, que não cumprir as exigências que a tornam representante de um campo legítimo.

As equações (3.2.20) e (3.2.21) se referem a quatro funções desconhecidas. Todavia, os vínculos (3.1.10) e (3.1.11) reduzem-nas de quatro para duas e o sistema fica determinado. Finalmente, a equação diferencial para $\Psi(r) = rh^\theta(r)$ pode ser construída, eliminando-se h^r entre (3.2.20) e (3.2.21). Na forma adimensional, com $x = \frac{r}{r_o}$, $\sigma = \frac{r_E}{r_o} \sqrt{\frac{b_E}{b}}$, sendo $r_E = \sqrt{\frac{e}{b_E}}$ e b_E o valor do campo máximo quando da presença apenas do setor elétrico, ela se apresenta como:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sqrt{x^4 + \sigma^4} \frac{d\Psi(x)}{dx} \right\} - \frac{\lambda\varsigma x^2 \Psi(x)}{\sqrt{x^4 + \sigma^4}} = 0. \quad (3.3.27)$$

Este é o ponto de partida para a construção dos campos procurados. As constantes λ e ς não aparecem isoladamente, mas sim como o produto $\lambda\varsigma$, definido anteriormente no tratamento da dependência angular. Esse tipo de vínculo revela a unicidade entre os dois graus de liberdade.

Para uma escolha correta de quais condições de contorno a função $\Psi(x)$ deve satisfazer, é imprescindível uma análise dos limites quando $x \gg 1$ e $x \approx 0$.

No primeiro, $x \gg 1$, a equação (3.3.27) se reduz a:

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \right\} - \lambda_\zeta \Psi(x) = 0. \quad (3.3.28)$$

Nesse regime, o campo magnético \vec{H} guarda uma relação linear com o campo \vec{B} . A solução, para h^θ ou b^θ , é analítica e tem a seguinte forma geral:

$$h_\infty^\theta(x)|_{\lambda_\zeta} = b_\infty^\theta(x)|_{\lambda_\zeta} = C_{\lambda_\zeta} x^{-\frac{\sqrt{1+4\lambda_\zeta}+3}{2}} + A_{\lambda_\zeta} x^{\frac{\sqrt{1+4\lambda_\zeta}-3}{2}}. \quad (3.3.29)$$

Analisando as três primeiras soluções no quadro abaixo, observa-se que, associado à cada função bem comportada, acompanha uma função indesejável.

$b_\infty^\theta _{\lambda_\zeta=0}$	$\frac{C_0}{x^2} + \frac{A_0}{x}$
$b_\infty^\theta _{\lambda_\zeta=2}$	$\frac{C_2}{x^3} + A_2$
$b_\infty^\theta _{\lambda_\zeta=6}$	$\frac{C_6}{x^4} + A_6 x$

Aquelas rotuladas pelas constantes A_{λ_ζ} representam a parte divergente das soluções e devem ser anuladas. As que restam possuem interpretação física bem conhecida. A primeira, $\frac{C_0}{x^2}$, está relacionada com a solução de monopolo magnético, a segunda, $\frac{C_2}{x^3}$, com o momento de dipolo, a terceira, $\frac{C_6}{x^4}$, com o momento de quadrupolo, e assim segue. Para cada inteiro λ_ζ existe um multipolo associado. Não havendo nenhuma restrição, todos esses objetos são passíveis de existirem satisfazendo as exigências impostas nesse limite. Por outro lado, a equação (3.3.27) vai selecionar aquelas realmente podem ser candidatas a representar campos reais. Isso será discutido isso mais à frente.

Nas proximidades da carga, a equação (3.3.27) se reduz, por aproximação, à seguinte forma:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - \frac{\lambda_\zeta}{\sigma^4} x^2 \Psi(x) = 0. \quad (3.3.30)$$

A solução em série possui duas constantes:

$$\Psi(x) = \Psi(0) \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda_\zeta}{\sigma^4} \right) \frac{1}{3 \times 4} x^4 + \dots \right\} + \Psi'(0) \left\{ x + \left(\frac{\lambda_\zeta}{\sigma^4} \right) \frac{1}{4 \times 5} x^5 + \dots \right\}. \quad (3.3.31)$$

A escolha de $\Psi(0)$ e $\Psi'(0)$ determina as características do campo. Quando $x \sim 0$, a solução é linear $\Psi(x) \sim \Psi(0) + \Psi'(0)x$. O resultado é independente de λ_ζ por isso, todas as soluções se comportam de maneira idêntica próximo à origem. Assim, $h^\theta(x)$ é singular se $\Psi(0)$ e $\Psi'(0)$ são diferentes de zero. Se apenas $\Psi'(0)$ é nulo, $h^\theta(x)$ é singular e, se apenas $\Psi(0)$ for nulo, $h^\theta(x)$ é finito na origem.

3.4 A Solução Geral

O estudo dos extremos da equação (3.3.27) dá a orientação na escolha da condição de contorno correta. Sua solução geral e analítica é escrita em termos das funções de Legendre de primeira e segunda espécie, $P_n^{1/4}(z)$ e $Q_n^{1/4}(z)$, respectivamente.

$$\Psi_n(x) = A_n \sqrt{x} P_n^{1/4}(z) + C_n \sqrt{x} Q_n^{1/4}(z), \quad (3.4.32)$$

$$z = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sigma} \right)^4} \quad e \quad n = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda_\zeta}}{4} - \frac{1}{2}.$$

A segunda função de Legendre de (3.4.32), $Q_n^{1/4}(z)$, assume valores complexos e portanto $C_n = 0$. A solução geral se reduz a:

$$\Psi_n(x) = A_n \sqrt{x} P_n^{1/4}(z). \quad (3.4.33)$$

A construção do campo h^θ é feita para cada valor de n . Dentro desse espectro infinito de soluções, somente uma está apta a representar um possível campo físico, $\lambda_\zeta = 2$, que corresponde a $n = 1/4$. Todos os outros valores vão corresponder a soluções divergentes

no infinito, violando o requisito primário citado do campo ser nulo no infinito. Para x tendendo ao infinito, cada função $\Psi_n(x)$ descrita por sua solução assintótica. No caso $\lambda_\zeta = 2$, a função linear κx é solução exata da equação (3.3.27). Isto pode ser verificado por substituição direta, permitindo ser adicionada sem problema. Para outros valores de λ_ζ esse procedimento falha, pelo menos dentro dos limites do modelo aqui construído, impedindo que outras soluções representem genuínos campos físicos. Portanto, a única candidata a descrever um campo físico regular é:

$$\Phi_{1/4}(x) = \Psi_{1/4}(x) - \kappa x = A_{1/4} \left\{ \sqrt{x} P_{1/4}^{1/4}(z) - \kappa x \right\}. \quad (3.4.34)$$

Isto feito, a componente $h^\theta(x)$ é imediatamente construída:

$$h^\theta(x) = \frac{\Phi_{1/4}(x)}{x} = A_{1/4} \left\{ \frac{P_{1/4}^{1/4}(z)}{\sqrt{x}} - \kappa \right\}. \quad (3.4.35)$$

Ela é singular na origem e essa característica se traduz em regularidade para $b^\theta(x)$, que é uma das componentes do tensor $F^{\mu\nu}$. Esta sim, deve se manter infinita. O valor da constante κ para $\sigma = 1$ é igual ao limite:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi_{1/4}(x)}{x} \rightarrow 0.8221789587 \quad (3.4.36)$$

Esse valor também determina que o limite da componente $h^\theta(x)$ é nulo para valores assintóticos de x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h^\theta(x) \rightarrow 0 \quad (3.4.37)$$

Com a componente polar do campo magnético assim construída, o segundo passo é a determinação da indução magnética, definida pela equação (3.1.11):

$$b^\theta(x) = \frac{x^2}{\sqrt{\sigma^4 + x^4}} h^\theta(x). \quad (3.4.38)$$

Ela tem propriedades idênticas à $h^\theta(x)$ quando $x \gg 1$ e difere radicalmente da mesma quando $x \approx 0$. A *Figura 1* mostra como a ausência de linearidade atua de forma a deixar $b^\theta(x)$ regular em todo o espaço. Ainda nessa figura verifica-se que $b^\theta(x)$ só é significativo nas imediações da carga elétrica. A intensidade decresce rapidamente adquirindo o comportamento x^{-3} típico de uma configuração de campo de dipolo magnético.

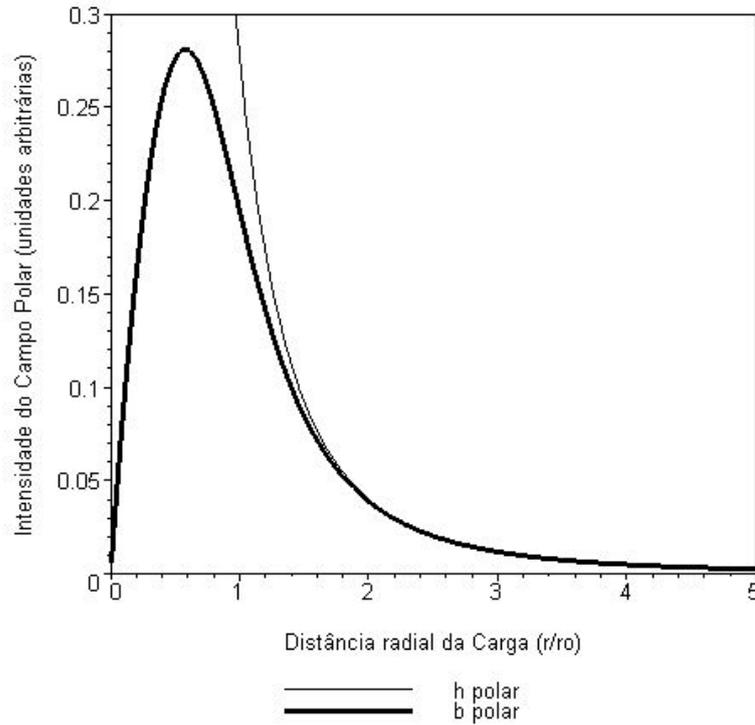


Figura 1 - Gráfico do campo magnético polar.

Reescrevendo $h^\theta(x)$ de uma forma mais apropriada, fica explícita a região de predominância dos efeitos não lineares. Multiplicando-se por x^2 o numerador e o denominador da função que a expressa:

$$h^\theta(x) = \frac{\Phi_{1/4}(x)}{x} = \frac{x^2 \Phi_{1/4}(x)}{x^3} = A \frac{f(x)}{x^3}. \quad (3.4.39)$$

Define-se a função $f(x)$, denominada aqui de “Função Forma”, como:

$$f(x) = x^2 \Phi_{1/4}(x) = x^2 \left\{ \sqrt{x} P_{1/4}^{1/4}(z) - \kappa x \right\}. \quad (3.4.40)$$

Existe uma razão especial para escrevê-la assim. Ela revela o rápido comportamento assintótico, como pode ser visto na *Figura 2*.

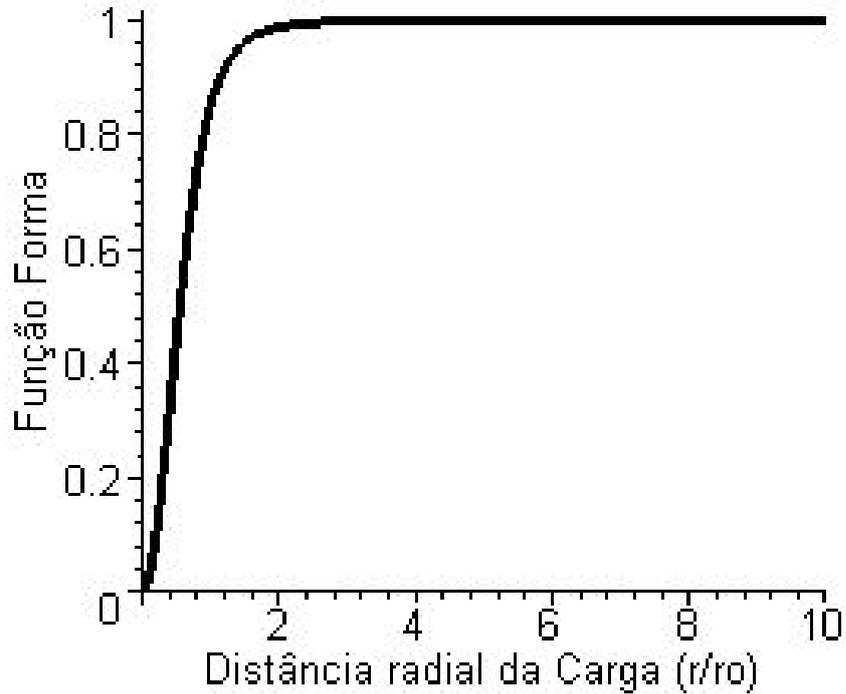


Figura 2 - A Função Forma e seu rápido limite assintótico.

Próximo à origem, ela varia muito rapidamente e logo atinge um valor constante, fazendo o campo magnético se identificar com um genuíno campo de dipolo magnético:

$$h^\theta(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{A}{x^3}. \quad (3.4.41)$$

A componente radial seguirá o mesmo caminho que levou à determinação da componente polar. Em primeira aproximação, ela tem sua definição na derivada da função Φ . Tomando-se a equação (3.2.20) com $\lambda = -1$, ela fica escrita como:

$$h^r(x) = -\frac{d\Phi}{dx}. \quad (3.4.42)$$

Por uma operação de derivação, é revelada uma estrutura mais rica para o campo h^r , composta de dois campos distintos. Aquele responsável pelo comportamento típico de dipolo magnético ($\sim x^{-3}$), e o outro com a estrutura de um campo de curto alcance:

$$\frac{dh^r(x)}{dx} = -A \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{x^2} \right) = A \left\{ 2 \frac{f}{x^3} - \frac{1}{x^2} \frac{df}{dx} \right\}. \quad (3.4.43)$$

Oculto na definição primitiva, está o termo Coulombiano x^{-2} atenuado pela derivada da função Forma. Observa-se na *Figura 3* que df/dx vai a zero muito rapidamente devido ao efeito de saturação. Isso faz com que esse termo não se propague muito longe. Sua contribuição se resume praticamente às imediações da carga, em forma análoga a de um dipolo, x^{-3} , sendo que cada termo contribui com valores assintóticos de sinais contrários, resultando numa componente $h^r(x)$ finita na origem, como pode ser visto no mesmo gráfico. Nele, exhibe-se cada contribuição separadamente e a componente radial do campo magnético é a soma dos dois termos.

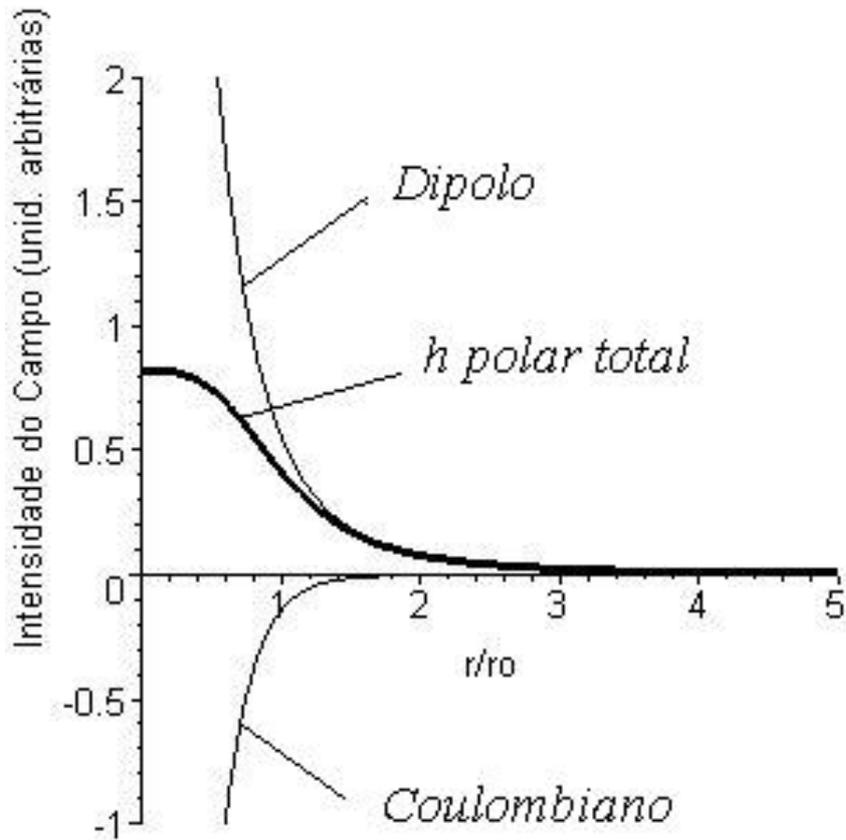


Figura 3 - O cancelamento dos valores assintóticos.

A componente radial da indução magnética, $b^r(x)$, calculada na forma da equação (3.1.11), carrega a singularidade na origem. Porém, calculada diretamente da equação diferencial, (3.2.21), tendo a componente polar como solução particular, elimina a singularidade e traz a regularidade ao setor magnético do tensor $F_{\mu\nu}$. Este cálculo assim é mais exato e a imprecisão estará limitada apenas à componente polar, determinada anteriormente. Tomando-se $\varsigma = -2$, uma vez que o produto $\lambda\varsigma = 2$, chega-se à equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} [x^2 b^r(x)] + \frac{2b^\theta(x)}{x} = 0. \quad (3.4.44)$$

A solução dela define a componente em questão:

$$b^r(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x u b^\theta(u) du. \quad (3.4.45)$$

Essa componente adquire rapidamente o comportamento coulombiano, definindo uma estrutura similar à uma “carga magnética”. Para um melhor entendimento dessa interpretação, reescreve-se a equação da divergência para o campo \vec{B} . Por fatoração da função angular, sobra apenas uma divergência do campo, puramente radial. O segundo termo é a fonte desse campo. Ou seja, campo gerando campo:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} [x^2 b^r(x)] = -\frac{2b^\theta(x)}{x}, \quad (3.4.46)$$

↓

$$\vec{\nabla} \cdot [b^r(x) \hat{x}] = \rho_{mg} \rightarrow \rho_{mg} = -\frac{2b^\theta(x)}{x}. \quad (3.4.47)$$

$$g \rightarrow 2 \int \frac{b^\theta(x)}{x} dV \quad (3.4.48)$$

A substituição da equação (3.4.45), na integral que define b^r , permite escrever essa componente como:

$$b^r(x) = A \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{f(u) du}{\sqrt{\sigma^4 + u^4}}. \quad (3.4.49)$$

3.5 Conclusão

Esse capítulo explorou a Eletrodinâmica Clássica de Born-Infeld na formulação Abelianana com o objetivo de descrever a carga elétrica em repouso. Por ser não linear, e ter nas suas relações constitutivas a mistura dos setores magnético e elétrico, uma estrutura mais rica se revelou e abriu um leque de possibilidades e consequências oriundas das soluções. Deixando de lado a natureza simétrica de uma partícula carregada do tipo ponto, obteve-se, além do campo elétrico, campos magnéticos regulares em todo o espaço, satisfazendo as equações de Maxwell. Considerou-se que somente o setor elétrico é capaz de interferir no setor magnético, deixando o primeiro intacto, livre de perturbação do segundo. Esse passo foi crucial para que o problema se tornasse integrável. A perda de informação, resultado da hipótese de $|\vec{B}| \ll b$, será avaliada no próximo capítulo. Esses campos magnéticos revelados pela não linearidade apresentam, predominantemente, uma configuração típica de dipolo magnético e estavam inicialmente ocultos nas equações de campo. Foi possível isolar matematicamente o campo puramente radial, simetricamente esférico, e associá-lo ao campo de uma estrutura similar à carga magnética. Esses campos adicionais tornam-se candidatos a descrever as auto-interações internas do setor magnético, bem como as interações com o setor elétrico. Cada uma dessas interações está associada à uma grandeza física de interesse. O spin, objetos do tipo carga magnética e a estabilidade da carga elétrica, são alguns dos pontos de interesse que serão descritos em termos dessas auto-interações.

Capítulo 4

PREVISÕES DO MODELO

No Capítulo 3, foram estabelecidos os campos do setor magnético são possíveis de serem gerados por uma partícula carregada eletricamente. Numa teoria não linear, é inevitável a interação entre os setores elétrico e magnético oriundos de uma mesma carga, assim como a interação com o próprio setor, ou seja, a auto-interação. Avaliar as consequências dessas interações é a meta do presente Capítulo.

Numa eletrodinâmica não linear, como a de Born-Infeld, o vácuo se comporta como um dielétrico sujeito a ser polarizado e magnetizado de forma análoga a um meio material. As relações constitutivas trazem, não apenas a polarização, mas também, a magnetização desse meio. Essa mistura torna-a rica em interpretações e resultados. Por isso, cada subseção trata de uma aplicação particular. A primeira cuida de objetos análogos a uma “carga magnética”. A componente polar do campo magnetostático passa a ser fonte para a componente puramente radial. Propõe-se, como interpretação, ser a componente polar a fonte para a componente radial. A segunda mostra como o mecanismo de interação entre os setores elétrico e magnético, este último oriundo do primeiro, dá origem ao Momentum Angular Intrínseco da partícula carregada. O valor numérico é cuidadosamente calculado para o elétron e mostra-se que está em concordância com o valor do seu “spin”. A terceira

trata do problema da estabilidade da carga elétrica. Mostra-se como a auto-interação entre os campos magnetostáticos é capaz de gerar uma pressão suficiente para inverter a tendência da carga elétrica de se auto destruir pela repulsão coulombiana. Mesmo sendo o modelo apresentado ainda incompleto, ele abre o caminho para uma investigação mais profunda, ainda no regime clássico, da conexão entre a não linearidade, auto-interação, estabilidade e “spin” . Finalmente, na quarta aplicação, explora-se os limites do modelo usando o setor neutro da família dos Leptons. O neutrino, visto sob a ótica de um eletromagnetismo neutro, é analisado à luz desse modelo. O “spin”, definido como a interação entre campos, é reinterpretado. Adicionalmente, a sua massa é estimada.

Antes, porém, é fundamental trazer aqueles campos para as unidades que seriam calculados e expressos. É necessário um elo de ligação da teoria com a experiência. Em suma, deve ser eleito um parâmetro macroscópico para que seja feita a correspondência entre o teórico e o experimental. O “spin” poderia ser considerado como teste, mas, no modelo, ele envolve mais de um campo. Além do mais, por ser um parâmetro quantizado, ele envolveria a Constante de Planck, h , rompendo com o objetivo de determinar até que ponto a não linearidade pode dar conta de áreas que são de domínio quase exclusivo da Mecânica Quântica. A solução para o campo magnético polar, quando o ponto de observação é distante da carga, se apresenta como um típico campo de dipolo magnético, reproduzido a seguir por comodidade:

$$h^\theta(r) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{A}{r^3}. \quad (4.0.1)$$

Nada mais adequado do que fazer esta solução corresponder ao genuíno campo de dipolo magnético, onde a constante A terá a tarefa de representar o momento de dipolo desta partícula. Se essa partícula é o elétron[65, 66, 67], essa constante vai corresponder ao seu momentum magnético que, com bastante precisão, pode ser igualado ao Magneton

de Bohr (μ_{Bohr}).

$$h^\theta(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_{Bohr}}{r^3}. \quad (4.0.2)$$

A solução assintótica completa, $H^\theta(r, \theta)$, é então construída:

$$H^\theta(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_{Bohr}}{r^3} \text{sen}(\theta). \quad (4.0.3)$$

Uma vez feita a correspondência, o campo magnético fica inteiramente determinado para todos os pontos do espaço:

$$H^\theta(r, \theta) = \frac{\mu_{Bohr}}{r^3} f(x) \text{sen}(\theta). \quad (4.0.4)$$

A componente radial é construída de forma semelhante:

$$h^r(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \frac{\mu_{Bohr}}{r^3} \quad (4.0.5)$$

$$H^r(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \frac{\mu_{Bohr}}{r^3} \cos(\theta). \quad (4.0.6)$$

E, finalmente, a solução radial completa do campo magnético para todo o espaço:

$$H^r(r, \theta) = \mu_{Bohr} \left\{ \frac{2f(x)}{r^3} - \frac{f' 1}{r_o r^2} \right\} \cos(\theta) \quad (4.0.7)$$

As componentes da indução magnética ficam igualmente determinadas:

$$B^\theta(r, \theta) = \mu_o \frac{\mu_{Bohr}}{r_o^3} \frac{f(x)}{x \sqrt{\sigma^4 + x^4}} \text{sen}(\theta). \quad (4.0.8)$$

$$B^r(r, \theta) = \frac{\mu_o \mu_{Bohr}}{r_o^3} \frac{\sqrt{\sigma^4 + x^4}}{x^2} \left\{ \frac{2f(x)}{x^3} - \frac{f'}{x^2} \right\} \cos(\theta). \quad (4.0.9)$$

Esta última componente exhibe uma nítida singularidade na origem. Embora nunca utilizada nas aplicações a seguir, ela será melhor determinada (3.4.49) a partir da equação da divergência.

4.1 A Definição dos Parâmetros b e r_o

No trabalho original de Born e Infeld, não havia maiores problemas na definição desses dois parâmetros, uma vez que eles consideraram somente um setor presente. Seguindo a filosofia original de Mie[8], a de que todas as propriedades do elétron são de origem eletromagnética, eles admitiram que toda a energia de repouso, ou seja, a sua massa, era de origem eletromagnética também. A partir dessa hipótese, puderam calcular o raio do elétron utilizando a relação de Einstein. Ou seja, admitiram que toda contribuição para a energia de repouso do elétron estava no setor elétrico, $1,236\frac{e^2}{r_o} = mc^2$, e não consideraram a contribuição do setor magnético. Através dos valores experimentais dessa simples relação, calcularam r_o e o campo único máximo $b = e/r_o^2$. O fator 1,236 é uma contribuição da não linearidade da Teoria:

$$\alpha = \int x^2 \left\{ \sqrt{1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2}} - 1 \right\} dx \approx 1,236. \quad (4.1.10)$$

No ano seguinte, 1935, Born e Schrödinger [19] reavaliaram a hipótese original e recalcularam, de forma rudimentar, esses dois parâmetros, ainda para o elétron, levando em conta o spin e admitindo que a maior contribuição para a energia total de repouso vinha do setor magnético, uma vez que era impossível resolver o problema de forma exata. Nesse cálculo, negligenciaram totalmente o setor elétrico. Como anteriormente, eles usaram a

relação de Einstein e igualaram a energia acumulada no campo magnético, no interior do elétron, à sua energia de repouso. De forma rudimentar e aproximada, a igualdade, $\mu_B^2/2r_o^3 = mc^2$, com μ_B igual ao Magneton de Bohr, definiu um novo valor para o raio r_o . O novo valor para b foi estimado, admitindo que todo o campo magnético está concentrado na região interna do elétron. O resultado mostrou que esse valor é pelo menos uma ordem de grandeza menor que o calculado apenas com o campo elétrico.

Contudo, com os dois setores estão presentes, definir r_o e b passa a não ser uma tarefa trivial. A estrutura não linear da Teoria impede que o problema se resuma a simples equações algébricas. A determinação correta desses parâmetros é de suma importância para a obtenção dos resultados que se apresentarão mais à frente.

Analisando novamente a componente T^{00} do tensor energia-momentum, observa-se que ela contém toda a informação necessária para o cálculo exato. Ela define a densidade de energia dos campos presentes no espaço. A integral de volume dessa componente representa toda a energia em forma de campo eletromagnético. Como foi feito para cada um dos setores separadamente, agora é feito com a presença de ambos:

$$\int T^{00} dV = mc^2. \quad (4.1.11)$$

No Apêndice A, após uma longa e tediosa álgebra, a estrutura dessa componente é deduzida e colocada de uma forma mais apropriada para o cálculo em questão, ou seja, em termos dos campos \vec{D} e \vec{B} :

$$b^2 \int \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{D}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\vec{B}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2} - 1 \right\} dV = mc^2. \quad (4.1.12)$$

Formalmente, essa equação define precisamente os parâmetros r_o e b na presença dos dois setores. Está explícito, dentro da raiz quadrada, a contribuição individual dos campos e uma contribuição da interação entre os dois setores na forma do produto $\vec{D} \times \vec{B}$. Porém,

o cálculo exato é impossível, pois essa integral não se reduz à uma forma algébrica como foi feito por Bohr, Infeld e Schrödinger, separadamente para cada setor. O processo iterativo se mostra o mais adequado. No entanto, é necessário um ponto de partida, ou seja, uma primeira aproximação. Esta pode ser obtida calculando-se, de forma ainda rudimentar, a soma dos dois termos de densidade de energia. Um proveniente do setor elétrico, $b^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{D}}{b}\right)^2} - 1 \right\}$, e outro oriundo do setor magnético, $b^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{B}}{b}\right)^2} - 1 \right\}$. O primeiro é responsável pelo fator de correção de 1,235 para a energia do setor elétrico. O segundo é calculado no presente trabalho usando os campos magnéticos oriundos da carga elétrica:

$$\beta = \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}(\theta) \int x^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{B}}{b}\right)^2} - 1 \right\} dx \approx 0,50264. \quad (4.1.13)$$

Assume-se, em primeira aproximação, que a energia total dos campos é a soma da contribuição de cada setor, corrigidos pelos fatores α e β , um resquício da não linearidade.

Define-se a função $U_{EM}(\nu)$, como uma versão linear da equação (4.1.12):

$$U_{EM}(\nu) = U_E + U_M = \frac{p}{\nu} + \frac{q}{\nu^3}, \quad (4.1.14)$$

$$\nu = \frac{x}{x_E} \quad x_E = \frac{r}{r_E} \quad r_E = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 b_E}}.$$

O raio r_E e o campo b_E são, respectivamente, o raio e o campo máximo de Born-Infeld na presença somente de campo elétrico. Os coeficientes p e q serão determinados segundo as exigências seguintes:

1) A energia total está toda no setor elétrico:

$$\nu = 1 \quad U(1) = E_E,$$

$$E_E = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_E}.$$

2) A energia total está toda no setor magnético:

$$\nu = \frac{x_M}{x_E} \quad U\left(\frac{x_M}{x_E}\right) = E_M,$$

$$E_M = \beta\mu_0 \frac{\mu_B^2}{r_M^3}.$$

Essas exigências definem o sistema de equações e os parâmetros p e q :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x_E}{x_M} & \left(\frac{x_M}{x_E}\right)^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_E \\ E_M \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \left(\frac{x_E}{x_M}\right)^3 E_E - E_M \\ E_M - \left(\frac{x_E}{x_M}\right) E_E \end{pmatrix}. \quad (4.1.15)$$

Dessa maneira a energia total $U(\nu)$ finalmente se escreve como:

$$U(\nu) = \left[\frac{\left(\frac{x_E}{x_M}\right)^3}{\nu} - \frac{\left(\frac{x_E}{x_M}\right)}{\nu^3} \right] \frac{E_E}{\Delta} + \left[\frac{1}{\nu^3} - \frac{1}{\nu} \right] \frac{E_M}{\Delta}, \quad (4.1.16)$$

$$\Delta = \left(\frac{x_E}{x_M}\right)^3 - \left(\frac{x_E}{x_M}\right).$$

Essa função satisfaz as condições impostas e leva em conta a presença dos dois setores, ainda como uma primeira aproximação. De posse dela, o problema se resume em determinar para que valor de ν essa função é igual à energia total de repouso da partícula, admitindo que toda a massa é de origem eletromagnética:

$$U(\nu) = mc^2. \quad (4.1.17)$$

Com os parâmetros corretos devidamente inseridos nessa equação cúbica, obtém-se o valor do raio de Born, que será inserido na equação (4.1.12) para a obtenção do

campo máximo b . Desse processo iterativo, resulta um valor final para cada um desses parâmetros:

$$r_o = 9,098 \times 10^{-14}m, \quad (4.1.18)$$

$$b = 1,308 \times 10^{18}N/C. \quad (4.1.19)$$

É interessante comparar os valores estabelecidos anteriormente por Born, Infeld e Schrödinger. No primeiro, com o elétron descrito apenas pelo setor elétrico[4], o raio eletrônico e o campo máximo foram estimados como:

$$r_E = 3,486 \times 10^{-15}m,$$

$$b_E = 1,185 \times 10^{20}N/C.$$

Esse valor é bem próximo e maior que o raio clássico do elétron, calculado sem a correção da teoria:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{clássico}} = mc^2 \rightarrow r_{clássico} = 2,8179 \times 10^{-15}m.$$

Posteriormente, considerando o spin do elétron, com o setor magnético inteiramente responsável pela energia total [19], uma nova estimativa para esses dois parâmetros foi feita:

$$r_M = 3,83121684 \times 10^{-14}m,$$

$$b_M = 8,04 \times 10^{18}N/C.$$

Considerando que os cálculos feitos na presença dos dois setores eletromagnéticos representam os valores mais significativos para os desenvolvimentos vindouros, serão considerados (4.1.18) e (4.1.19), daqui pra frente, como os verdadeiros raio e campo máximo da teoria.

O fator σ da equação (3.3.27) pode assim ser calculado:

$$\sigma = \frac{r_E}{r_o} \sqrt{\frac{b_E}{b}} = 0,3647 \quad (4.1.20)$$

4.2 A Carga Magnética

De posse dos campos gerados pela carga em repouso, o próximo passo é utilizar esses objetos para construir as grandezas físicas de interesse e explorar as suas consequências. Tomando-se a equação da divergência para a indução magnética \vec{B} , verifica-se que ela pode ser reinterpretada de forma um pouco diferente. Reproduzindo-a aqui, por comodidade, aparece como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B^r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}(\theta) B^\theta) = 0. \quad (4.2.21)$$

Com o objetivo de deixar essa equação como uma divergência puramente radial, explicita-se cada componente em termos das funções radial e angular:

$$\frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 b^r) + \frac{b^\theta}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{d}{d\theta} (\operatorname{sen}^2(\theta)) = 0. \quad (4.2.22)$$

O $\operatorname{sen}(\theta)$ se cancela e o $\cos(\theta)$ se fatora. Uma vez que esta equação deve ser satisfeita para qualquer ângulo θ , o termo entre parêntese deve ser sempre zero, revelando a equação da divergência do campo puramente radial, b^r :

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 b^r) + \frac{2b^\theta}{r} \right) \cos(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (b^r \hat{r}) = -2 \frac{b^\theta}{r}. \quad (4.2.23)$$

Esta equação pode ser interpretada da seguinte maneira: a componente polar da indução magnética atua como uma fonte para o campo radial, ou seja, campo gerando campo. Seguindo essa interpretação é imediato identificar o termo do lado direito como uma densidade de carga magnética. Entretanto, é conveniente lembrar que o modelo construído é de um dipolo magnético associado à carga elétrica em repouso. No processo de separação das variáveis, o setor angular ficou responsável por atribuir sinal à carga magnética, ou seja, sinais diferentes para cada hemisfério. Portanto, quando ele é

removido, as cargas perdem o sinal e resta uma única densidade para esse objeto, aqui chamada de carga magnética:

$$\rho_m = -2 \frac{b^\theta}{r}. \quad (4.2.24)$$

Essa densidade, integrada em todo o espaço, define, formalmente, cada carga magnética total associada à esse campo.

$$q_m = 2 \int \frac{b^\theta}{r} dV. \quad (4.2.25)$$

Em contraste com o monopolo de Dirac[23], oriundo de uma simetria local, ou o de t'Hooft[77, 78], proveniente de uma teoria de calibre, esse objeto, em analogia à carga magnética, tem origem na componente polar do campo magnetostático. Portanto, tem origem direta na não linearidade, uma vez que a existência desse último está ligada às relações constitutivas de Born-Infeld. Numa teoria linear, como é o caso da Eletrodinâmica de Maxwell, onde a intensidade dos campos não está limitada a nenhum valor, $b \rightarrow \infty$, b^θ se anula em todo o espaço e a carga magnética q_m não se sustenta, anulando todo o setor magnético. Além do mais, ela não pode ser observada diretamente, pois os campos de dipolo estão encurvados. Essa análise só é possível do ponto de vista matemático.

Um outro caminho pode ser seguido para se obter q_m e o campo puramente radial. Retomando (4.2.23) no Sistema Internacional, escreve-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 b^r) = -\frac{2}{r} \frac{\mu_o \mu_{Bohr}}{r_o^3} \frac{f(x)}{x \sqrt{\sigma^4 + x^4}} \quad (4.2.26)$$

$$r^2 b^r = -2 \frac{\mu_o \mu_{Bohr}}{r_o} \int_0^x \frac{f(u) du}{\sqrt{\sigma^4 + u^4}} \rightarrow b^r = -\frac{\mu_o}{4\pi r^2} \left(\frac{8\pi \mu_{Bohr} \gamma(x)}{r_o} \right) \quad (4.2.27)$$

↓

$$b^r = \frac{\mu_o q_m}{4\pi r^2} \quad (4.2.28)$$

O parâmetro γ é definido pela integral:

$$\gamma(x) = \int_0^x \frac{f(u)du}{\sqrt{\sigma^4 + u^4}}. \quad (4.2.29)$$

Se o campo não fosse encurvado a grandes distâncias, ele seria típico de uma carga magnética de intensidade q_m situada na origem. Essa carga pode ser escrita em termos dos parâmetros oriundos da teoria de Born-Infeld, r_o e γ e da constante $\mu_{Bohr}(9,2847701 \times 10^{-24} JT^{-1})$. Dividindo-se por c , para recuperar a unidade de coulomb, e pelo valor da carga elementar, para que fique expresso em número de cargas eletrônicas, q_m se escreve como:

$$|q_m| = 8\pi \frac{\mu_{Bohr}}{ecr_o} \gamma. \quad (4.2.30)$$

Usando (4.1.18) e calculando $\gamma(x)$ para $x \rightarrow \infty$, a carga q_m e a carga magnética $g = q_m/2$ total podem ser calculadas em número de cargas eletrônicas:

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = 3,697753170 \quad (4.2.31)$$

$$q_m \rightarrow 197,22 e$$

$$g \rightarrow 98,61 e$$

O valor encontrado por Dirac para a carga magnética fundamental é de aproximadamente $g \simeq 68,5 e$. Dirac encontrou uma partícula cuja carga vem da solução das equações

de campo de calibre com grupo de simetria Abelian $U(1)$. O objeto encontrado na presente dissertação é de origem radicalmente diferente. Não tem uma analogia direta com o monopólo de Dirac. Aqui, esse objeto se comporta como uma carga magnética oriunda da natureza não linear da teoria de Born-Infeld. É uma interpretação alternativa para o momento dipolar intrínseco do elétron e da sua origem, ou seja, da carga elétrica em repouso e da não linearidade. Por estar descrevendo os campos no regime clássico, não existe compromisso com o valor quantizado, que tem sua origem na Mecânica Quântica. Os campos encurvados guardam um campo magnético puramente radial e coulombiano (4.2.28) longe da carga elétrica, que só é desvendado pelo tratamento matemático. As Teorias de Unificação também prevêem cargas magnéticas com o valor proposto por Dirac. No contexto da Teoria das Cordas, o mesmo acontece, indicando uma unanimidade para a intensidade dessas cargas. A crença é que qualquer teoria que explique a quantização da carga elétrica terá que conter monopólos magnéticos. Mas isso ainda carece de uma prova definitiva.

4.3 O Momentum Angular

A eletrodinâmica define muito bem o momento angular em termos da interação entre os campos eletromagnéticos, qualquer que seja a origem deles. Se oriundos da mesma fonte, entende-se que isso representa uma auto-interação. Adicionalmente, essa auto-interação pode estar associada a um parâmetro da partícula, nesse caso a um momentum angular próprio. Essa grandeza, no mundo clássico, está associado à rotação. Porém, a definição proposta neste trabalho dispensa a necessidade de se atribuir um giro à partícula carregada em questão. A interação entre os campos \vec{D} e \vec{B} gera uma densidade de momentum linear azimutal, se o cálculo é tomado em relação ao eixo axial do dipolo. Traduzindo a equação (2.4.26) em termos de campos, e tomando-se o momento em relação

a esse eixo, o momentum angular tem sua definição em termos da integral a seguir:

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{D} \times \vec{B}) dV. \quad (4.3.32)$$

Desmembrando-se os termos do integrando em suas componentes, o duplo produto vetorial $\vec{r} \times (\vec{D} \times \vec{B})$ se reduz ao vetor $-rD^r B^\theta \hat{\theta}$. Projetada sobre o eixo axial, o módulo da componente axial de \vec{L} ganhará um $\text{sen}(\theta)$. Denominada de L_z , será escrito como:

$$L_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \text{sen}(\theta) \int_0^\infty dr r^2 \times \quad (4.3.33)$$

$$\times (r) \left(\frac{e}{4\pi r^2} \right) \left[\mu_o \left(1 + \frac{\vec{D}^2}{b^2} \right)^{-1/2} \frac{\mu_{Bohr}}{r^3} f(x) \text{sen}(\theta) \right] \text{sen}(\theta).$$

Após a integração, L_z se reduz a alguns parâmetros conhecidos e pode ser escrito como:

$$L_z = \frac{2}{3} \left(\frac{\gamma}{r_o} \right) (e\mu_o\mu_{Bohr}). \quad (4.3.34)$$

Esse resultado é o produto da auto-interação dos campos oriundos de uma teoria não linear clássica. O primeiro parêntese agrupa somente os parâmetros provenientes da Teoria de Born-Infeld. O segundo é preenchido com valores experimentais disponíveis e bem medidos. Portanto, a precisão do valor numérico dessa grandeza física está diretamente ligada aos valores fornecidos pela Teoria de Born-Infeld. Estes foram calculados anteriormente. Substituindo-se γ e r_o de (4.2.31) e (4.1.18) respectivamente, dentro da precisão que o modelo pode fornecer, chega-se ao valor:

$$L_z \simeq 0,556 \times 10^{-34} J_s. \quad (4.3.35)$$

Se for correta a correspondência entre esse momentum angular, que é de origem puramente eletromagnética, e o momentum angular intrínseco previsto pela Mecânica Quântica, então é possível sugerir que a não linearidade reduziu o "spin" a auto-interações de campos eletromagnéticos. A MQ prediz que esse valor é $\hbar/2$, sendo \hbar a constante de Planck dividida por 2π . A previsão clássica (4.3.35) difere em aproximadamente 2,7% desse valor. Vários fatores podem ter contribuído para esse desvio. Entre eles, está a dificuldade de definir com exatidão o parâmetro r_o da teoria, quando na presença de ambos os setores eletromagnéticos. Porém, uma visão mais profunda revela que não é apenas o valor numérico de \vec{L} que está em jogo, mas sim os mecanismos de geração, ou seja, a sua origem. Sabe-se que o "spin" é de origem quântico-relativística. Seu valor independe da massa ou de qualquer velocidade de rotação que se possa atribuir à partícula. Sabe-se também que, na MQ, as propriedades do "spin" estão diretamente associadas à função de onda do elétron, que se traduz em invariâncias bem conhecidas (CPT). Não há um paralelo para essas propriedades no ambiente clássico, como o do presente modelo. Entretanto, os campos e as interações entre eles descrevem as propriedades intrínsecas da carga associada à partícula carregada. Esse era o objetivo principal de Gustav Mie e, posteriormente, de Born-Infeld, ou seja, descrever as propriedades do elétron apenas em termos dos seus campos.

4.4 A Estabilidade da Carga Elétrica

Trata-se aqui da delicada questão referente à estabilidade da carga elétrica e como a não linearidade se relaciona com ela. É do tensor Energia-Momentum, $T^{\mu\nu}$, que algumas propriedades dinâmicas do campo eletromagnético podem ser derivadas. Dentre as diversas componentes, T^{ii} descreve a pressão da radiação. O interesse reside especificamente na componente T^{rr} , porque ela descreve a pressão na direção radial da carga. Na Teoria

de Born-Infeld, esse tensor é mais facilmente visualizado quando escrito em termos das componentes do campo eletromagnético e de sua Lagrangeana \mathcal{L}_{BI} :

$$T^{ij} = -E^i D^j - H^i B^j + \delta^{ij} \left\{ \mathcal{L}_{BI} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right\}. \quad (4.4.36)$$

Tomando-se apenas a componente T^{rr} desse tensor, é possível ver, explicitamente, a contribuição do setor magnético, $H^\theta B^\theta$, para a pressão total radial a seguir:

$$T^{rr} \rightarrow T_{Elétrico}^{rr} + \Delta T_{Magnético}^{rr} = -E^r D^r + \mathcal{L}_{BI} + H^\theta B^\theta, \quad (4.4.37)$$

$$\Delta T_{Magnético}^{rr} = H^\theta B^\theta. \quad (4.4.38)$$

A força resultante, em um hemisfério da esfera de raio r que envolve a carga elétrica, é calculada multiplicando-se $\hat{r} T^{rr} \hat{r}$ pelo elemento de área com vetor normal radial, $dS \hat{r}$, devidamente projetada na direção axial \hat{z} .

$$\int_{hemisfério} (dS \hat{r} \cdot \hat{r}) T^{rr} (\hat{r} \cdot \hat{z}) = \epsilon_o b^2 \pi r_o^2 P(x), \quad (4.4.39)$$

$$P(x) = -\frac{\sigma^4}{\sqrt{\sigma^4 + x^4}} + \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{\sigma^4 + x^4}} \right) x^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^4 \beta^2 f^2(x)}{x^2 \sqrt{\sigma^4 + x^4}}, \quad (4.4.40)$$

$$\beta = \frac{4\pi \mu_{Bohr}}{ecr_o}. \quad (4.4.41)$$

A função P descreve a força resultante sobre esse hemisfério. A Figura 4 exibe o comportamento dessa função para os dois casos em questão.

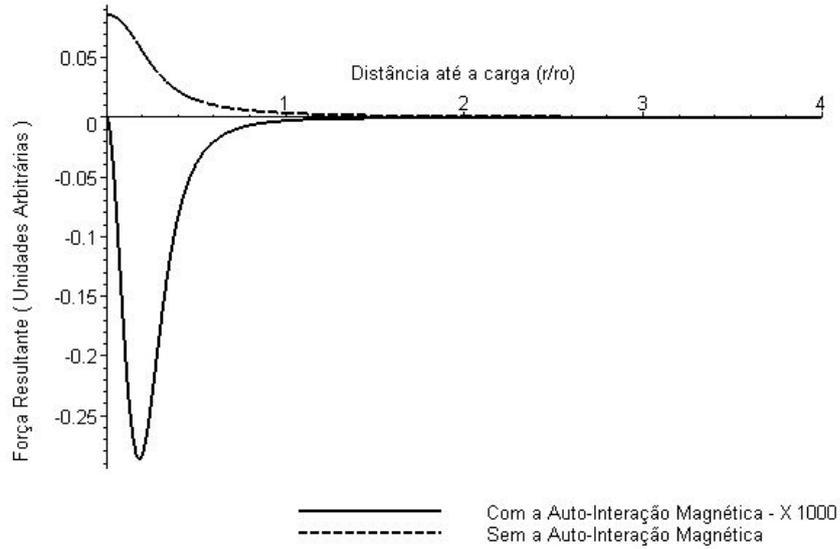


Figura 4 - Força radial resultante quando considera-se a auto-interação.

O primeiro considera apenas o campo elétrico ($\beta = 0$). Nessa situação, a força resultante é totalmente repulsiva e a carga não tem estabilidade. O segundo leva em conta o termo responsável pela interação entre H^θ e B^θ . Esse termo novo, adicionado pela não linearidade, é capaz de inverter a tendência repulsiva da força e assim garantir a estabilidade da carga, gerando uma pressão negativa que compensa a repulsão coulombiana.

O termo do coeficiente de (4.4.39), $\varepsilon_o b^2$, corresponde a uma pressão da ordem de 10^{25} N/m^2 , correspondente a uma pressão muito alta. Quando multiplicada pela área efetiva daquele hemisfério, corresponde a uma força líquida, $\varepsilon_o b^2 \pi r_o^2$, da ordem de 10^{-2} N . A função $P(x)$ expressa a competição entre a repulsão elétrica e a pressão negativa da auto-interação magnética. O termo quadrático garante que esse efeito independa do sinal da carga da partícula carregada. A componente T^{rr} expõe, dentro dessa abordagem, o mecanismo de auto-interação do campo, que preserva a estabilidade da carga elétrica.

Ainda é possível ir um pouco mais à frente. A equação (4.4.40) pode ser escrita em termos da projeção de \vec{L} sobre o eixo do dipolo magnético. Considerando que:

$$\frac{\mu_{Bohr}}{r_o} = \frac{3L_z}{2\gamma e\mu_o}, \quad (4.4.42)$$

e inserindo na equação (4.4.40), produz imediatamente uma conexão entre a estabilidade da carga e o spin da partícula [84]:

$$P(x) = u(x) + v(x)L_z^2, \quad (4.4.43)$$

$$u(x) = -\frac{\sigma^4}{\sqrt{\sigma^4 + x^4}} + \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{\sigma^4 + x^4}}\right)x^2, \quad (4.4.44)$$

$$v(x) = \left(\frac{6\pi}{e^2 c \mu_o}\right)^2 \frac{\sigma^4 f^2(x)}{x^2 \sqrt{\sigma^4 + x^4}}. \quad (4.4.45)$$

Baseado nessa expressão, se o termo que leva o spin acoplado for nulo, não pode haver estabilidade para uma partícula carregada. Essa interpretação sugere que partículas fundamentais carregadas devem necessariamente ter seu spin não nulo. Realmente, até o presente momento, não se conhece nenhuma partícula com características diferentes, reforçando as previsões desse modelo. Porém, o Modelo Padrão Minimamente Supersimétrico (MSSM) prevê a existência de dois bosons de Higgs carregados e de spin zero, ainda não detectados experimentalmente, contrariando explicitamente as previsões do presente modelo. Se sua existência for comprovada, ainda existe a possibilidade dessas partículas não serem fundamentais mas sim estruturas compostas.

4.5 O Neutrino

O conteúdo dessa discussão encontra-se no artigo em preparação para publicação em periódico científico[85].

Sob o ponto de vista do eletromagnetismo neutro, o neutrino é a partícula certa para se testar os limites do modelo aqui desenvolvido. Ele pode apontar a necessidade de uma extensão ou revisão mais profunda da Eletrodinâmica de B-I, em suas bases teóricas, na medida que as propriedades dessa partícula desviem da descrição em termos de seus débeis campos magnéticos. O neutrino possui um fraquíssimo momento de dipolo magnético ($\mu_n \sim 10^{-10} \mu_B$), sendo um fermion, o seu spin é $1/2$, não possui carga elétrica (carga Abelian), possui carga isospin, carga essa que não pode ser descrita nessa formulação Abelian, e portanto interage via interação fraca, que tem alcance da ordem de $10^{-18}m$ a $10^{-17} m$, . Sua massa é apenas uma estimativa tendo por base um limite superior. No caso do neutrino do elétron, dentre as diversas últimas estimativas[82], esse valor é menor que $0,47 eV$. De partícula fantasma, preconizada por Pauli para resolver o problema da conservação da energia, hoje ele tem um papel fundamental no Modelo Padrão e até conexão com a Energia Escura . Do ponto de vista quântico, ele sofre oscilação de sabor. As oscilações de neutrinos implicam massas não nulas sendo esta a primeira evidência clara de Física além do Modelo Padrão das interações eletrofracas. Os neutrinos ainda têm um papel especial em Física de Partículas e Cosmologia.

A presente abordagem, puramente especulativa, é um esforço de acomodação dessa partícula fundamental na eletrodinâmica de Born-Infeld, uma vez que ela não possui carga elétrica. Portanto, os resultados aqui apresentados são meramente estimativos.

A relação constitutiva para o setor magnético do neutrino impede que se faça a separação completa das variáveis. O campo em questão, que seria de um dipolo magnético, depende de r e θ . O argumento da raiz quadrada compromete a hipótese de fatoração

de ambos os campos. Se \vec{B} for fatorado, o mesmo não acontecerá com \vec{H} e vice-versa. Sendo b_n a intensidade máxima do campo, a relação constitutiva do setor magnético se apresenta como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\sqrt{1 + \frac{\vec{B}^2}{b_n^2}}}. \quad (4.5.46)$$

Considerando que \vec{B} pode ser fatorado nos mesmos moldes anteriores, escreve-se:

$$\vec{B} = b^r(r) \cos(\theta) \hat{r} + b^\theta(r) \text{sen}(\theta) \hat{\theta}. \quad (4.5.47)$$

Satisfazer as equações de Maxwell significa satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 b^r) + \frac{2b^\theta}{r} = 0, \quad (4.5.48)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0} \rightarrow \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{r b^\theta}{\sqrt{1 + \frac{\vec{B}^2}{b_n^2}}} - b^r \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 + \frac{\vec{B}^2}{b_n^2}}} = 0. \quad (4.5.49)$$

Não havendo uma solução analítica que satisfaça esse sistema, resta apenas o estudo dos limites assintóticos. Este revela uma estrutura de campo parecida com aquela do elétron. Quando $r \rightarrow \infty$, a função $\sqrt{1 + \frac{\vec{B}^2}{b_n^2}} \rightarrow 1$, pois nesse limite é mais do que justificável $|\vec{B}| \ll b_n$ e o sistema de equações (4.5.48) e (4.5.49) pode assim ser escrito:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 b^r) + \frac{2b^\theta}{r} = 0, \quad (4.5.50)$$

$$\frac{d(r b^\theta)}{dr} + b^r = 0, \quad (4.5.51)$$

A solução é um típico campo de dipolo com dependência igual a r^{-3} .

Por outro lado, quando $r \rightarrow 0$:

$$\sqrt{1 + \frac{\vec{B}^2}{b_n^2}} \rightarrow \text{valor constante.} \quad (4.5.52)$$

Na ausência do setor elétrico oriundo do próprio neutrino, pois ele é neutro, a solução não pode ser nula na origem pois não há nenhum mecanismo de acoplamento entre os dois setores, como no caso anterior. Ela deve tender para um valor finito, similar ao campo elétrico do elétron de Born-Infeld original.

A energia total de repouso, supondo que existe um tal referencial, está armazenada no seu campo magnético. Este é débil fora do raio clássico do neutrino, r_n , de modo que:

$$\varepsilon_o b_n^2 \int_{V_n} dV \left\{ \sqrt{1 + \frac{\vec{B}^2}{b_n^2}} - 1 \right\} = m_n c^2. \quad (4.5.53)$$

Ao contrário do elétron, que tem seus valores bem medidos experimentalmente, no caso, a massa do neutrino carece de medidas precisas. Em tese, essa equação define a massa eletromagnética dessa partícula. Portanto, com a estimativa do campo magnético do seu momento de dipolo, o modelo pode avaliar os limites dessa massa. Numa abordagem rudimentar, é razoável admitir que na região do espaço ocupada pelo neutrino, o campo magnético seja da ordem de b_n e a integral se divide em duas. Uma para a região interna do neutrino e outra para fora dessa região, onde o campo assume seu comportamento dipolar típico, de dependência r^{-3} . Desse modo, o lado esquerdo de (4.5.53) é uma função em princípio livre pra assumir qualquer valor. Escrita de forma segmentada para as duas regiões de comportamentos distintos do campo magnético, ela se apresenta como:

$$\Gamma \simeq \varepsilon_o b_n^2 \left\{ \int_0^{r_n} dV + \int_{r_n}^{\infty} dV \left[\sqrt{1 + \frac{\vec{B}^2}{b_n^2}} - 1 \right] \right\}. \quad (4.5.54)$$

No volume fora do neutrino, o campo $\vec{B} \ll b_n$ e a segunda integral pode ser aproximada assim:

$$\Gamma \simeq \varepsilon_o b_n^2 \left\{ \frac{4\pi}{3} r^3 + \frac{1}{2b_n^2} \int_r^\infty dV \vec{B}^2 \right\}. \quad (4.5.55)$$

O campo magnético, naquela região, pode ser aproximado, negligenciando a dependência angular, para $B \simeq \frac{c\mu_o\mu_n}{r^3}$ e o resultado é a seguinte expressão:

$$\Gamma \simeq \frac{4}{3} \pi \varepsilon_o \left\{ b_n^2 r^3 + \frac{(c\mu_o\mu_n)^2}{2r^3} \right\}. \quad (4.5.56)$$

Minimizando essa energia, o vínculo entre o campo máximo e o raio clássico do neutrino aparece de forma explícita:

$$\frac{d\Gamma}{dr} = 0 \rightarrow b_n \sim \frac{c\mu_o\mu_n}{r_n^3}. \quad (4.5.57)$$

Supondo que o neutrino se encontra nesse estado de energia mínima, e que esta é a sua energia de repouso, $m_n c^2$, a função (4.5.56) se reduz à equação:

$$m_n c^2 \approx 2\pi \varepsilon_o r_n^3 b_n^2 = 2\pi \varepsilon_o c \mu_o \mu_n b_n = 2\pi \frac{\mu_n}{c} b_n \quad (4.5.58)$$

Todos os parâmetros dessa última igualdade estão medidos, exceto b_n . Traduzindo em números, o produto $\frac{2\pi \varepsilon_o c \mu_o \mu_n}{1,6 \times 10^{-19}} \approx 1,2 \times 10^{-22}$ vai compor a massa de repouso do neutrino, em unidades de eV , se as unidades de b_n for N/C :

$$m_n c^2 \approx 1,2 \times 10^{-22} b_n \text{ eV}. \quad (4.5.59)$$

Tomando o comprimento do raio do neutrino como sendo da ordem de grandeza do alcance da força fraca, $0,5 \times 10^{-17} \text{ m}$, o campo máximo pode ser estimado:

$$b_n \sim \frac{c\mu_o\mu_n}{r_n^3} = 2,8 \times 10^{21} \text{ N/C}. \quad (4.5.60)$$

Levando esse valor à expressão (4.5.59), a massa do neutrino é estimada como:

$$m_n c^2 \approx 0,34 \text{ eV}. \quad (4.5.61)$$

Este valor está dentro dos últimos limites estimados[82]. Mais que isso, a expressão (4.5.59) sugere uma interpretação mais profunda a respeito do significado do campo máximo. Ele tem um caráter mais geral e universal. Dentro dessa eletrodinâmica, a massa do neutrino está intimamente ligada à existência desse parâmetro. Por outro lado, o problema maior reside em calcular o momentum angular nos mesmos moldes definidos para o elétron. Por não ter um campo elétrico próprio, a integral (4.3.32) seria nula, correspondendo a um spin nulo, contrariando a observação experimental. Porém, o par de leptons (ν, e) forma um duplete, independente da distância entre os mesmos. Fica difícil acomodar essa característica num regime totalmente clássico. Se o neutrino tomasse o setor elétrico do seu companheiro elétrico seria possível, numa discussão qualitativa, conectar o spin com aquela integral que define o momentum angular. Dessa forma, ela teria que manter a mesma estrutura, estando o elétron junto ao neutrino ou afastado dele. Fazendo interagir o seu fraco momento de dipolo com o campo do elétron, a contribuição para o spin seria algo da ordem:

$$\Delta L \propto r D_e B_\nu \Delta V$$

Destacou-se o campo do elétron como D_e e o campo do neutrino B_ν . O pequeno volume ΔV sobre o elétron pode ser escrito como $r^2 \Delta r \Delta \Omega$, sendo $\Delta \Omega$ o ângulo sólido subtendido pelo elétron e no referencial do neutrino $\Delta r \sim r_o$. Estimando-se o campo B_ν como o de um dipolo, essa quantidade acima se assemelha a:

$$\Delta L \propto r D_e B_\nu \Delta V \rightarrow (r) \left(\frac{e}{4\pi r_o^2} \right) \left(\frac{\mu_o \mu_\nu}{r^3} \right) (r^2 \Delta r \Delta \Omega) \rightarrow \frac{\mu_o \mu_\nu e}{r_o} \frac{\Delta \Omega}{4\pi}$$

Multiplicando-se e dividindo-se pelo momento de dipolo do elétron (μ_{Bohr}), essa estrutura recupera em parte a estrutura original do spin do elétron:

$$\Delta L \propto \frac{\mu_o \mu_{Bohr} e}{r_o} \left(\frac{\Delta \Omega}{4\pi} \frac{\mu_\nu}{\mu_{Bohr}} \right) \sim \frac{\mu_o \mu_{Bohr} e}{r_o} \left(10^{-10} \frac{\Delta \Omega}{4\pi} \right)$$

Entre parênteses estão quantidades pequenas mostrando que não se pode esperar que este produto possa gerar o spin do neutrino quantitativamente igual ao do elétron. Também não é possível afirmar que este seja um contra-exemplo, ou seja, que o momentum angular não possa sempre ser representado em termos da interação magnética com a elétrica. O neutrino é quase transparente ao setor eletromagnético, interagindo apenas com seu fraco momento magnético. É no setor da força fraca que ele interage com o mundo. Isto sugere que o spin deve, ainda assim, ser reduzido à interação entre os campos não Abelianos da Eletrodinâmica de Born-Infeld, estendida além do grupo de simetria $U(1)$.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa última etapa do trabalho consolida os resultados parciais de cada capítulo e discute-os com base em uma única origem:

AUTO-CAMPOS EM AUTO-INTERAÇÃO

O Reducionismo foi uma consequência natural e uma presença constante em cada etapa deste trabalho. De certa forma reviveu os ideais ingênuos e primeiros de Mie. Cada combinação de interações entre os campos gerados pela carga elétrica, respondeu por uma grandeza física diferente. Não existe nenhuma evidência experimental, até o presente momento, de que a Eletrodinâmica de Maxwell-Born-Infeld seja uma Teoria Efetiva. Uma teoria, para ser considerada científica, deve, em primeiro lugar, satisfazer uma condição de estabilidade. Uma teoria não é mais do que uma hipótese, uma tentativa que tem em vista compreender o mundo, se não pode ainda ser verificada na prática. Alguns resultados experimentais sugerem que talvez j tenha sido observado o espalhamento fóton-fóton[73]. A natureza não linear de efeitos atuando numa região muito pequena do espaço faz de B-I uma teoria ainda sem nenhum de seus parâmetros medidos experimentalmente. Se a

natureza escolheu esse caminho, certamente experimentos futuros irão comprovar sua autenticidade. No entanto, é no mínimo confortável ver que, utilizando seus mecanismos de forma consistente, foi possível fazer algumas previsões teóricas de como a natureza poderia se comportar na sua intimidade, ou melhor, na escala sub-atômica. Sendo uma teoria clássica, é limitada no que tange ao seu alcance. Mas buscar soluções regulares, livres de singulares, ainda no regime clássico, é fundamental, pois fornece uma base sólida para uma futura quantização. Na Teoria da Gravitação de Einstein, a auto-interação gravitacional produz o espalhamento das ondas gravitacionais, no regime clássico e não linear. Na Eletrodinâmica, tal efeito, o espalhamento fóton-fóton aparece como consequência da quantização das equações de Maxwell do vácuo ou das equações acopladas Dirac-Maxwell. Entretanto, a interação fóton-fóton decorrente da Eletrodinâmica Quântica, pode ser também descrita por uma eletrodinâmica clássica não linear, tarefa realizada por Schrödinger e por Born e Infeld. Em outras palavras, a ausência da não linearidade nas equações de Maxwell é compensada pela quantização. Para evitar interpretações errôneas, vale lembrar que, na versão Dirac-Maxwell, as equações são não lineares.

A essência dessa dissertação cabe no quadro de Causa e Efeito organizado a seguir. Ele resume os resultados da Eletrodinâmica Clássica e Abelianiana de Born-Infeld aplicada à descrição do elétron.

<i>CAUSA</i>	<i>EFEITO</i>
Componente Polar de \vec{B}	\implies Carga Magnética
Interação entre \vec{D} e \vec{B}	\implies Momentum Angular(spin)
Interação entre \vec{B} e \vec{H}	\implies Estabilidade da Carga

Ao investigar o Neutrino, ficou evidente que a formulação Abelianiana não é suficiente para descrevê-lo. Seu débil momento magnético interage fracamente com o setor eletromagnético. Apesar disso, a sua massa pode ser estimada ainda com base nessa formulação.

Isso é uma evidência de que o setor de massa está bem representado pelo grupo de simetria local $U(1)$ e pelo grupo de simetria de Lorentz. A ausência da carga elétrica e a presença de uma carga isospin fraca, evidenciou a exigência da formulação não Abelianiana dessa Eletrodinâmica. O seu Momentum Angular próprio, calculado com base na interação entre campos de setores opostos, não logrou êxito. A resposta pode estar nos campos adicionais de uma versão não Abelianiana, invisíveis na formulação atual. Dessa maneira, a equação (4.3.32) poderá ser generalizada e conterá novos termos adicionais:

$$\vec{L}_{\text{Não Abelianiano}} = \int \vec{r} \times \left(\vec{D} \times \vec{B} + \text{produtos adicionais?} \right) dV.$$

É instrutivo, ao final dessa dissertação, fazer um resumo dos resultados mais relevantes alcançados. A hipótese de uma carga elétrica em repouso gerar campos magnetostáticos só obteve êxito porque estava imersa na Eletrodinâmica não linear de Born-Infeld. Os desdobramentos a partir disso revelam a riqueza oculta nessa Teoria:

- (i) Solução magnética no nula para uma carga elétrica em repouso;
- (ii) Objetos do tipo carga magnética;
- (iii) Momentum Angular próprio (spin) descrito em termos de interação entre campos,
- (iv) Estabilidade da carga elétrica quanto à repulsão coulombiana;
- (v) Previsão da massa de repouso do neutrino do elétron.

Como proposta de desdobramentos futuro, a mais imediata seria a busca por soluções magnetostáticas na Eletrodinâmica de Born-Infeld, estendida para o caso não Abelianiano. A principal motivação estaria nos resultados alcançados aqui apenas com a formulação Abelianiana. Em princípio, o grupo de simetria $U(1) \times SU(2)$ apresenta maior interesse por razão histórica. Nesse grupo de calibre foi feita a unificação da força fraca com a eletromagnética, realizada por Glashow, Salam e Weinberg. A objetivo é acomodar todo

o setor Leptônico nessa formulação, e não apenas o elétron e seu neutrino associado.

A segunda sugestão parte da formulação não Abelianas dessa Eletrodinâmica, poderia basear-se no grupo de simetria local de Lorentz $SO(3,1)$, para investigar se essa proposta resultaria numa solução Born-Infeld Gravitacional. A principal motivação vem da incerteza da validade da Lei da Gravitação de Newton na região submilimétrica. O objetivo principal é avaliar a influência do setor eletromagnético sobre o potencial gravitacional e suas consequências. Nessa escala, esses desvios seriam tangíveis ao nível macroscópico, abrindo possibilidades de teste em nível laboratorial.

A terceira e última sugestão se refere ao Born-Infeld planar com o termo de Chern-Simons, na formulação Abelianas e não Abelianas. A Física em duas dimensões espaciais apresenta aspectos interessantes, mesmo no nível clássico. Em particular, o elétron se comporta de forma diferente. No campo de aplicação está o mais conhecido, dentre outros, o Efeito Hall fracionário. O estudo dos fermions planares é de grande interesse na Matéria Condensada.

Bibliografia

- [1] Born, M., Modified Field Equations With a Finite Radius of the Electron, Nature 132, 282 (1933)
- [2] Born, M., Infeld, L., Foundations of the New Field Theory, Nature 132, 1004 (1933)
- [3] Born, M., Infeld, L., Electromagnetic Mass, Nature 132, 970 (1933)
- [4] Born, M., Infeld, L., Fondation of the New Field Theory, Proc, Roy. Soc. London A144, 425-451 (1934)
- [5] Born, M., On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field, Proc, Roy. Soc. A143, 410-437 (1934)
- [6] Born, M., Infeld, L., On the Quantization of the New Field Equations. Part I, Proc, Roy. Soc. London A147, 522-546 (1934)
- [7] Born, M., Infeld, L., On the Quantization of tht New Field Equations. Part II, Proc, Roy. Soc. London A150, 141-166 (1935)
- [8] G. Mie, Ann. Physik, Grundlagen einer theorie der materie. Annalen der Physik, vol 37, pg 511, (1912), vol 39, pg 1, (1912), vol 40, pg 1, (1913)
- [9] H. A. Lorentz, Archives Néerl. Vol. XXV, p.363 (1892).

- [10] Kaufmann, W. (1902), "Über die elektromagnetische Masse des Elektrons",
Göttinger Nachrichten (5): 291-296
- [11] Kaufmann, W. (1902), "Die elektromagnetische Masse des Elektrons", Physikalische
Zeitschrift 4 (1b): 54-56
- [12] Kaufmann, W. (1903), "Über die "Elektromagnetische Masse" der Elektronen",
Göttinger Nachrichten (3): 90-103
- [13] Kaufmann, W. (1906), "Über die Konstitution des Elektrons", Annalen der Physik
19: 487-553
- [14] Pryce, M.H.L., On a Uniqueness Theorem, Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 625-628 (1935)
- [15] Pryce, M.H.L., Commuting Co-ordinates in the New Field Theory, Proc. Roy. Soc.
London A150, 166-172 (1935)
- [16] Pryce, M.H.L., On the New Field Theory.II. Quantum Theory of the Field and
Charges, Proc. Roy. Soc. London A159, 355-382 (1937)
- [17] Pryce, M.H.L., The Two-Dimensional Electrostatic Solutions of Born's new Field
Equations, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol.
31, issue 01, p. 50 (1935)
- [18] Pryce, M.H.L., Electromagnetic energy of a point charge, Proc. Roy. Soc. A, 168,
389 (1938)
- [19] Schrödinger, E., Contribution to Born's New Field Theory of the Electromagnetic
Field, Proc. Roy. Soc. London A150, 465-477 (1935)
- [20] Infeld, L., A New Action Function and the Unitary Field Theory-I, Proc. Camb.
Phil. Soc. 32, 127-137 (1936)

- [21] Infeld, L., A New Action Function and the Unitary Field Theory-II, Proc. Camb. Phil. Soc. 33, 70–78 (1937)
- [22] Hoffmann, B., Infeld, L., On the Choice of the Action Function in the New Field Theory, Phys. Rev., vol. 51, 765-773 (1937)
- [23] Paul A.M. Dirac, Quantised Singularities in the Electromagnetic Field, Proc. Roy. Soc. A 133, p. 610-624, (1931)
- [24] Paul A.M. Dirac, (1938) Classical theory of radiating electrons. Proc. Roy. Soc. of London. A929:0148-0169
- [25] Dirac, P.A.M., An extensible model of the electron, Proc. Roy. Soc. A 268, p. 57-67, (1962)
- [26] Dirac, P.A.M., A Reformulation of the Born-Infeld Electrodynamics, Proc. Roy. Soc. London A257, 32-43 (1960)
- [27] Pryce, M. H. L., The Two-Dimensional Electrostatic Solutions of Born's New Field Equations,
- [28] O. Klein, Y. Nishina, Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac, Z. für Phys. 52, 853-868 (1929)
- [29] Boillat, G., Nonlinear Electrodynamics: Lagrangians and Equations of Motion, J. Math. Phys. 11, 941-951 (1970)
- [30] Boillat, G., Exact plane-wave solution of Born-Infeld Electrodynamics, Lettere al Nuovo Cimento, Vol. 4 No 7 (1972)
- [31] J. Plebanski. Lectures on nonlinear electrodynamics, Nordita, Copenhagen, (1970)

- [32] Bialynicki-Birula, I., Quantum Electrodynamics, General Series of Monographs in Natural Philosophy, Vol. 70, Ed. D.T. Haar, Pergamon Press (1975)
- [33] Nakamura, A., Born-Infeld Monopoles and Instantons, Hadronic Journal, vol. 14, 369-375 (1991)
- [34] Brunelli, J.C., Das, A., A Lax representation for the Born-Infeld equation, Physics Letters B 426, 57-63 (1998)
- [35] Ikeda, M., Miyachi, Y., On the Static and Spherically Symmetric Solutions of the Yang-Mills Field, Progress of Theoretical Physics, vol. 27, n° 3, 474-482 (1962)
- [36] Ikeda, M., Miyachi, Y., On an Extended Framework for the Description of Elementary Particles, Progress of Theoretical Physics, vol 16, n° 6, 537-547 (1956)
- [37] Loos, H.G., The Range of Gauge Fields, Nucl. Phys. 72, 677-691 (1965)
- [38] Gaillard, M. K., Zumino, B., Self-Duality in Nonlinear Electromagnetism, arXiv:hep-th/9705226, Lecture Notes in Physics, V. 509 Springer Berlin / Heidelberg (1998)
- [39] Gibbons, G.W., Rasheed, D.A., Electric-Magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics, Nuclear Phys. B 454, 185-206 (1995)
- [40] Gibbons, G.W., Rasheed, D.A., $SL(2, \mathbb{R})$ Invariance of Non-Linear Electrodynamics coupled to an Axion and a Dilaton, Phys. Letters B 365, 46-50 (1996)
- [41] Gibbons, G.W., Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes, Nuclear Physics, B 514 (1998)
- [42] Gibbons, G.W., Aspects of Born-Infeld Theory and String/M-Theory, Rev.Mex.Fis. 49S1 (2003)

- [43] Gibbons, G.W., Herdeiro, C.A.R., The Melvin universe in Born-Infeld theory and other theories of nonlinear electrodynamics, *Classical and Quantum Grav.* 18 1677-1690 (2001)
- [44] Grandi, N., Moreno, E.F., Schaposnik, F.A., Monopoles in Non-Abelian Dirac-Born-Infeld Theory, *Phys. Rev. D* 59, 125014 (1999)
- [45] Lombardo, D.J.C., New Spherically Symmetric Monopole and Regular Solutions in Einstein-Born-Infeld Theories, *Journal of Math. Phys.* 46 042501 (2005)
- [46] Fradkin, E.S., Tseytlin A.A., Non-linear electrodynamics from quantized strings, *Phys. Lett. B* 163 (1985)
- [47] Ketov, S.V., Many Faces of Born-Infeld Theory, arXiv:hep-th/0108189 v1 25 Ago (2001)
- [48] Khoudeir, A., Parra, Y., Duality in the Born-Infeld Theory, *Phys. Rev. D* 58 025010 (1998)
- [49] Sinclair, D.K., Kogut, J.B., Quantization and simulation of Born-Infeld nonlinear electrodynamics on a lattice, *Phys. Rev. D* 73, 114508 (2006)
- [50] Kim, H., Genuine dyons in Born-Infeld electrodynamics, *Phys. Rev. D* 61, 085014 (2000)
- [51] Hagiwara, T., A non-abelian Born-Infeld Lagrangian, *J. Phys. A: Math. Gen.* 14 3059-3065 (1981)
- [52] Kerner, R., Serié, E., Non-commutative versions of Born-Infeld theory, *Physics of Atomic Nuclei*, Vol. 68, p.1730-1738 (2006)

- [53] Park, J.H., A study of a non-Abelian generalization of the Born-Infeld action, *Physics Letters B* 458, 4 (1999)
- [54] Serié, E., Masson, T., Kerner, R., Non-Abelian generalization of Born-Infeld theory inspired by noncommutative geometry, *Phys. Rev. D* 68, 125003(2003)
- [55] Denisov, V.I. , New effect in nonlinear Born-Infeld electrodynamics, *Phys. Rev. D* 61, 036004 (2000)
- [56] Victor I. Denisov, Sergey I. Svertilov, Vacuum nonlinear electrodynamic effects in hard emission of pulsars and magnetars, *Astron.Astrophys.* 399 L39-L42 (2003)
- [57] Chernitskii A.A., Born-Infeld equations, arXiv:hep-th/0509087
- [58] Chernitskii A.A., The field nature of spin for electromagnetic particle, arXiv:hep-th/0611342, *AIPConf.Proc.*915:264-267 (2007)
- [59] Chernitskii A.A., Mass, spin, charge, and magnetic moment for electromagnetic particle, arXiv:hep-th/0603040
- [60] Adawi, I., Magnetic charges in special relativity, *Am. J. Phys.* 59 (5) 410 Maio (1991)
- [61] Zeleny, W.B., Symmetry in electrodynamics: A classical approach to magnetic monopoles, *Am. J. Phys.* 59 (5) 412 Maio (1991)
- [62] Adawi, I., Thomson's monopoles, *Am. J. Phys.* 44 (8) 412 Agosto (1976)
- [63] Hraskó, P., Quasiclassical quantization of the magnetic charge, *Am. J. Phys.* 45 (9) Settembre (1977)
- [64] Schrödinger, E., The general unitary theory of the physical fields, *Proc. of the Royal Irish Academy*, 49 A, 43-58 (1943)

- [65] Okun, L.B., Zeldovich, Y.B., Paradoxes of unstable electron, *Physics Letters*, Vol 78 B 5 (1978)
- [66] Okun, L.B., Photon: History, mass, charge, *Acta Physica Polonica B* 37 (2006)
- [67] Birula, I.B., Classical model of the electron. Exactly soluble example, *Phys. Rev. D* Vol 28 (8) (1982)
- [68] Birula, I.B., Non-linear electrodynamics: variations on a theme of Born and Infeld, *Quantum Theory of Fields and Particles*, World Scientific (1983)
- [69] Chruscinski, D., Kijowski, J., Generation of a dipole moment by external field in Born-Infeld non-linear electrodynamics, *Compt.Rend.Acad.Sci.(Ser.II)* 324, 435 (1997)
- [70] Chruscinski, D., Point charge in the Born-Infeld electrodynamics, *Physics Letters A* 240, 23 (1998)
- [71] Chruscinski, D., Römer, H., Dynamics of the Born-Infeld dyons, *Phys. A: Math. Gen.* 32 263-268 (1999)
- [72] Carley, H., Kiessling, M.K.H., Nonperturbative calculation of Born-Infeld effects on the Schrödinger spectrum of the hydrogen atom, *Physical Review Letters*, vol. 96, 3 (2006)
- [73] Burke, D. L., Field, R. C., Horton-Smith, G., Spencer, J. E.; Walz, D., Berridge, S. C., Bugg, W. M., Shmakov, K., Weidemann, A. W., Bula, C., McDonald, K. T., Prebys, E. J., Bamber, C., Boege, S. J., Koffas, T., Kotseroglou, T., Melissinos, A. C., Meyerhofer, D. D., Reis, D. A., Ragg, W., Positron production in multiphoton light-by-light scattering, *Physical Review Letters*, 79, 9 ,p.1626-1629 (1997)

- [74] Yang, Y., Classical solutions in the Born-Infeld theory, Royal Society of London Proceedings Series A, vol. 456, (1995)
- [75] Rafelski J., Fulcher L.P., Greiner W., Superheavy Elements and an Upper Limit to the Electric Field Strength, Phys. Rev. Lett. 27, 958 - 961 (1971)
- [76] Rafelski J., Fulcher L.P., Greiner W., Superheavy elements and nonlinear electrodynamics, Il Nuovo Cimento B, vol. 13, 1, (1972)
- [77] 't Hooft, G., Magnetic monopoles in unified gauge theories, Nuclear Physics B 79, 274-284 (1974)
- [78] 't Hooft, G., Bruckmann, F., Monopoles, Instantons and Confinement, arXiv:hep-th/0010225 (2000)
- [79] Song, J.S., Theory of Magnetic Monopoles and Electric-Magnetic Duality: A Prelude to S-Duality, J. of Undergrad. Sci. 3, 47 (1996)
- [80] Kerner, R.; Barbosa, A. L.; Gal'Tsov, D. V., Topics in Born-infeld electrodynamics, arXiv:hep-th/0108026 (2001)
- [81] Kuzenko, S.M., Theisen, S., Nonlinear Self-Duality and Supersymmetry, Fortsch.Phys. 49 (2001)
- [82] Auriemma, G., Cosmological Implications of Neutrino Mass, Chin. J. Astron. Astrophys. Vol. 6, Suppl. 1, 29–39 (2006)
- [83] Vellozo, S.O., Helayël Neto, J.A., Smith, A.W., De Assis, L.P.G., Standstill Electric Charge Generates Magnetostatic Field under Born-Infeld Electrodynamics, arXiv:0712.0322, International Journal of Theoretical Physics, Springer US vol. 47 n° 11 (2008)

- [84] Vellozo, S.O., Helayël Neto, J.A., Smith, A.W., De Assis, L.P.G., Self-Interacting Electromagnetic Fields and A Classical Discussion on the Stability of the Electric Charge, arXiv:0811.3152, International Journal of Theoretical Physics, Springer US vol. 48 n° 7 (2009)
- [85] Vellozo, S.O., Helayël Neto, J.A., Smith, A.W., De Assis, L.P.G., The neutrino and its mass in the context of the Born-Infeld Electrodynamics, em preparo para publicação.

Apêndice

Este apêndice trata da inversão da equação canônica do campo \vec{D} . Para os objetivos desse trabalho é muito útil ter o campo elétrico \vec{E} escrito em termos desse vetor e da indução magnética \vec{B} . Ela é de caráter geral, visto que nenhuma restrição é introduzida nessa dedução. Essa troca facilita a visualização das imposições do problema em questão e explicita a dualidade quando se aplica o mesmo tratamento à equação canônica para o campo magnético \vec{H} . O ponto de partida é a equação canônica para \vec{D} , transcrita aqui por comodidade:

$$\vec{D} = \frac{\vec{E} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right) \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2} + \frac{B^2}{b^2} - \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Definindo-se a função $f(\vec{E}, \vec{B})$:

$$f(\vec{E}, \vec{B}) = \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2} + \frac{B^2}{b^2} - \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2}, \quad (\text{A.2})$$

reescreve-se (A.1) como:

$$f(\vec{E}, \vec{B}) \vec{D} = \vec{E} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right) \vec{B}. \quad (\text{A.3})$$

Aproveitando-se das propriedades do produto vetorial, multiplica-se pelo vetor \vec{B} , à direita, ambos os lados da equação (A.3):

$$f(\vec{E}, \vec{B}) \vec{D} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{B} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right) \vec{B} \times \vec{B}.$$

O último produto é nulo e repete-se esse procedimento, multiplicando-se, à direita, ambos os lados pelo vetor \vec{B} :

$$(f\vec{E}, \vec{B}) (\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (\text{A.4})$$

O produto vetorial triplo obedece à seguinte identidade:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Segue que, identificando-se o produto vetorial $(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}$ com os vetores daquela identidade, este será escrito como:

$$\begin{aligned} (\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B} &= -\vec{B} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \\ &= -\vec{E} (\vec{B} \cdot \vec{B}) + \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{E}) = \vec{B} (\vec{E} \cdot \vec{B}) - B^2 \vec{E}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Assim a equação (A.4) tem sua estrutura reescrita assim:

$$f(\vec{E}, \vec{B}) \frac{(\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{b^2} = \vec{B} \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right) - \frac{B^2}{b^2} \vec{E}. \quad (\text{A.6})$$

Apreciando-se as equações (A.3) e (A.6), verifica-se um termo comum a ambas. Portanto, a subtração de uma pela outra leva ao cancelamento do termo $\left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right) \vec{B}$. Se reescrita, ela toma a seguinte forma:

$$f(\vec{E}, \vec{B}) \left[\vec{D} - \frac{(\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{b^2} \right] = \vec{E} + \frac{B^2}{b^2} \vec{E}.$$

O próximo passo é escrever o campo \vec{E} em termos dos campos \vec{D} e \vec{B} e da função $f(\vec{E}, \vec{B})$.

$$\vec{E} = \frac{f(\vec{E}, \vec{B})}{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)} \left[\vec{D} - \frac{(\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{b^2} \right]. \quad (\text{A.7})$$

A tarefa seguinte consiste em trabalhar a função $f(\vec{E}, \vec{B})$ para deixá-la apenas em termos dos campos \vec{B} e \vec{D} . Tomando-se o quadrado de (A.1) dividido por b^2 , e multiplicado-o por $f^2(\vec{E}, \vec{B})$, obtêm-se uma expressão para $f^2 \frac{D^2}{b^2}$ onde aparece apenas os campos fundamentais \vec{E} e \vec{B} :

$$f^2 \frac{D^2}{b^2} = \frac{E^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right)^2 + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right)^2 \left(1 + \frac{B^2}{b^2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Multiplica-se, vetorialmente, a equação (A.1) por \vec{B} .

$$\vec{D} \times \vec{B} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{f}.$$

Quadrando-se ambos os lados chega-se a:

$$f^2 \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2} \right)^2 = \frac{(\vec{E} \times \vec{B})^2}{b^4}. \quad (\text{A.9})$$

Reescreve-se (A.3) multiplicada escalarmente por \vec{E} .

$$f \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{b^2} \right) = \frac{E^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right) \frac{\vec{B} \cdot \vec{E}}{b^2} = \frac{E^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right)^2. \quad (\text{A.10})$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{(\vec{E} \times \vec{B})^2}{b^4}$ à (A.8), chega-se a seguinte expressão:

$$f^2 \frac{D^2}{b^2} = \frac{E^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \right)^2 +$$

$$+\frac{(\vec{E} \times \vec{B})^2}{b^4} - \frac{(\vec{E} \times \vec{B})^2}{b^4} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2 \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right). \quad (\text{A.11})$$

Oculto nos produtos escalar e vetorial de (A.11), o $\text{sen}(\theta)$ e o $\text{cos}(\theta)$ ajudam a fundir os termos $\left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2 = \frac{E^2 B^2 \cos^2(\theta)}{b^4}$ e $\left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2 = \frac{E^2 B^2 \text{sen}^2(\theta)}{b^4}$, onde θ é o ângulo entre \vec{E} e \vec{B} . Lembrando também que $\left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2 = \frac{E^2 B^2 \text{sen}^2(\theta)}{b^4} = f^2 \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2$, a equação (A.11) fica pronta para o passo final:

$$f^2 \left\{ \frac{D^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2 \right\} = \frac{E^2}{b^2} + \frac{E^2 B^2}{b^4} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2 \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right), \quad (\text{A.12})$$

que fatorada resulta em:

$$f^2 \left\{ \frac{D^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2 \right\} = \left[\frac{E^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2 \right] \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right). \quad (\text{A.13})$$

Mas $f^2 = 1 - \frac{E^2}{b^2} + \frac{B^2}{b^2} - \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2$ e agrupando-se adequadamente os termos de interesse, escreve-se esse quadrado como $f^2 = 1 + \frac{B^2}{b^2} - \left[\frac{E^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2 \right]$. Portanto, o termo entre os colchetes é nada mais que:

$$\frac{E^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right) - f^2. \quad (\text{A.14})$$

Isso era o que faltava para a eliminação completa dos termos que continham \vec{E} . Agora a equação (A.13) permite escrever a função f em termos de \vec{B} e \vec{D} , explicitamente:

$$f^2 \left\{ \frac{D^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2 \right\} = \left\{ \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right) - f^2 \right\} \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right). \quad (\text{A.15})$$

Finalmente:

$$f = \frac{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2} + \frac{D^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2}}. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo-se em (A.7) resulta numa expressão para \vec{E} em termos dos campos \vec{B} e \vec{D} apenas.

$$\vec{E} = \frac{\vec{D} - \frac{(\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{b^2}}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2} + \frac{D^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2}}. \quad (\text{A.17})$$

Resta agora escrever a Hamiltoniana em função dos mesmos termos. A função $f(\vec{E}, \vec{B})$ pode se apresentar de duas formas diferentes, (A.2) ou (A.16). Usando-as juntamente com a expressão para o campo elétrico, equação (A.17), a Hamiltoniana pode ser escrita como:

$$H = \vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L} = b^2 \left\{ \frac{\vec{D}}{b^2} \cdot \frac{\left(\vec{D} - \frac{(\vec{D} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{b^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2} + \frac{D^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2}\right)^2}} + f - 1 \right\}. \quad (\text{A.18})$$

Utilizando novamente a relação (A.16), suprime-se o termo da raiz quadrada e troca-se a ordem do produto vetorial:

$$H = b^2 \left\{ \frac{\vec{D}}{b^2} \cdot \left(\vec{D} + \frac{\vec{B} \times (\vec{D} \times \vec{B})}{b^2} \right) \frac{f}{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)} + f - 1 \right\}. \quad (\text{A.19})$$

O produto vetorial entre parênteses é melhor escrito na forma seguinte:

$$\vec{B} \times (\vec{D} \times \vec{B}) = \vec{D}(\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{D}) = B^2 \vec{D} - \vec{B}(\vec{D} \cdot \vec{B}). \quad (\text{A.20})$$

Ele será inserido em (A.19). Após efetuar-se os respectivos produtos escalares, a Hamiltoniana (A.19) se reduz a:

$$H = b^2 \left\{ \left[\frac{D^2}{b^2} + \frac{D^2 B^2}{b^4} - \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{B}}{b^2} \right)^2 \right] \frac{f}{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)} + f - 1 \right\}. \quad (\text{A.21})$$

Fatorando a função f nessa expressão, chega-se a seguinte expressão:

$$H = b^2 \left\{ \frac{f}{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)} \left[\frac{D^2}{b^2} + \frac{D^2 B^2}{b^4} - \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{B}}{b^2} \right)^2 + \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right) \right] - 1 \right\}. \quad (\text{A.22})$$

A penúltima etapa restaura o produto vetorial através da relação:

$$\begin{aligned} (\vec{D} \times \vec{B}) \cdot (\vec{D} \times \vec{B}) &= D^2 B^2 \text{sen}^2(\theta) = \\ &= D^2 B^2 [1 - \cos^2(\theta)] = D^2 B^2 - (\vec{D} \cdot \vec{B}). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Esta reduz A.22 à seguinte expressão:

$$H = b^2 \left\{ \frac{f}{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)} \left[1 + \frac{D^2}{b^2} + \frac{B^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2} \right)^2 \right] - 1 \right\}. \quad (\text{A.24})$$

O passo final consiste em substituir f pela expressão (A.16) e a expressão final para a Hamiltoniana se escreve como:

$$H = b^2 \left\{ \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2} + \frac{B^2}{b^2} + \left(\frac{\vec{D} \times \vec{B}}{b^2} \right)^2} - 1 \right\}. \quad (\text{A.25})$$