

TESE DE
DOUTORADO

Caos e Integrabilidade em Teorias com Supersimetria

LEONARDO PAULO GUIMARÃES DE ASSIS

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, 10 DE NOVEMBRO DE 2005

Dedicatória

Em memória de meus pais Francisco e Cleia

Agradecimentos

Gostaria de declarar inicialmente considerar os méritos por boa parte das conquistas que me trouxeram até aqui como não sendo exclusivamente meus, mas, compartilho e agradeço a um grande número de pessoas que me ajudaram ao longo de toda minha vida de estudante.

Na impossibilidade de citar todos, lembro aqui de algumas destas pessoas que de um modo marcante me influenciaram:

- Ao meu orientador e amigo, Prof. José Abdalla Helayël-Neto, a quem devo o meu resgate para a física, a maior parte do que hoje sei sobre Teoria de Campos, por sua dignidade pessoal e acadêmica. A ele todos os agradecimentos são poucos frente a toda a ajuda que me deu;

- Ao professor e amigo, Sebastião Alves Dias, agradeço pelo muito que me ensinou de teoria de campos, pelo companheirismo de quem nunca me desamparou nos momentos mais atribulados deste trajeto ;

- Ao Prof. Anibal Omar Caride meu primeiro professor aqui no CBPF, agradeço pelo apoio a mim dado como a muitos outros pós-graduandos;

- Aos colegas de convívio da DCP, digo CCP, digo LAFEX, com quem pude desfrutar de um ambiente poucas vezes encontrado em outras paragens: Álvaro Nogueira, Ricardo Paschoal, Leonardo Moraes (Chara), Thales Soares, Wesley Spalenza, Humberto Belich Jr., Marta Tureli, à Sergio Vellozo meu agradecimento pela primeira revisão desta tese e a

Nelson Panza meu agradecimento pelo fato de no apagar das luzes da redação desta tese ter feito a última leitura, a Moisés Rojas, Manoel Messias Jr., José Luís Boldo, Roger Barreto, Hector Leny Carrion, Álvaro Ferreira, Márcia Moutinho, Ricardo Sibanto, Marcelo Carvalho, Gustavo Dourado, Marcello Botta, Fabricio Barone, Cresus Godinho, Claudio e Daniel Sasaki, Patrick Brockill, Everton Abreu, José Luis Chauca Murga, Gilmar Dias, Edison Luiz da Graça, Rafael Chaves, Cristine Ferreira, Germano Monerat, Nemésio de Oliveira Neto, José Gomes, Valéria Nunes, ;

- Aos funcionários, pela ajuda e carinho: Às secretárias do CCP, Rosangela Marques, Elisete, amigas com quem pude contar a todo instante neste meu doutorado, à Beth Martins; da Biblioteca: Rosa, Marina, Cida, Marilena, Baiano, Fátima, Sergio Velho, e a galera da xerox, assim como o Prof. Emil Medeiros, a Ângela Melo, a Vera Toledo e o José Ramalho; do Setor de Publicações: Socorro e Valeria; todos da CAT, especialmente Marcio e Marcelo Albuquerque, Nilton Alves Jr., Fernanda, Denise Coutinho; da CFC: Myriam Simões e José Ricardo; ao pessoal da vigilância;

- Não poderia deixar de agradecer aos que durante minha graduação tiveram um papel decisivo em minha vida acadêmica e pessoal: Maria Darci Godinho minha grande amiga e orientadora de meu projeto de final de curso, Ivo Fernandez Lopez amigo, professor que também esteve presente nos momentos mais difíceis, Mario Cesar Barbatti é outro que não posso esquecer, amigo de todas as horas com quem publiquei meu primeiro artigo científico. A estes três meus agradecimentos especiais pois momentos que não pude andar com minhas próprias pernas, eles me carregaram;

- Aos Professores com que fiz disciplinas na UERJ durante este doutoramento: Prof. Cesar A. Linhares da Fonseca Jr., Prof. Marcelo Chiapparini e ao Prof. Ivan C. da Cunha Lima meus agradecimentos pelo muito que me ensinaram;

- Ao Prof. Ildeu de Castro Moreira com quem aprendi a gostar do caos e ao Prof.

Filadelfo Cardoso Santos com quem continuei estes estudos;

- Ao Prof. Nelson Maculan Filho pela ajuda que me deu durante a graduação e pelo que sei sobre otimização;

- As profs. Dr.Heloisa Tardin, Gilda M. Braga e Maria Cristina Soares Guimarães (minha prima), por todo carinho e pelos ensinamentos em Ciência da Informação;

-À Associação de Pós Graduandos José Leite Lopes da qual tive a honra de representar, agradeço pelo reconhecimento e a ela faço votos que continue com o mesmo espírito de combate pelos interesses do CBPF e da Física no Brasil;

-Ao Grupo de Física Teórica José Leite Lopes, pelo companheirismo que viabiliza uma maneira diferente de fazer física;

-Após estes dois últimos agradecimentos presto minha homenagem ao Prof. José Leite Lopes, patrono de nossa APG e do nossos grupos de pesquisa. À ele minha estima por tudo que fez pela ciência em nosso país;

-Ao Conselho Nacional de desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq/MCT pelo financiamento de meu Doutorado;

-Aos meus amigos da biblioteca do Inst. de Química da UFRJ, agradeço pelo apoio e amizade;

- A minha família, que pelo amor e carinho me sustentaram e me inspiraram em tudo aquilo de bom que tenho: em particular, a minha mãe, Cleia Guimarães de Assis, e meu pai, Francisco Paulo de Assis, meus avós, Sebastião e Maria da Gloria, meus irmãos, Ricardo, Andreia, Cristiano e Sergio, as minhas tias Luiza, Cidinha e Marilda.

Resumo

Neste Trabalho, explora-se a existência de caos em teorias supersimétricas.

Contempla-se sistemas mecânicos supersimétricos formulados a partir de teorias de campo reduzidas no regime de configurações espacialmente homogêneas e se aplicam aos mesmos testes de integrabilidade e caos.

Summary

The existence of chaos in supersymmetric theories is the focus of this work. Supersymmetric mechanical systems formulated from field theories reduced in the regime of spatially homogeneous configurations are contemplated and tests to find out integrability and chaos are applied. Our results suggest that supersymmetric models are more sensitive to the presence of chaos than non-supersymmetric ones.

Índice

| | |
|---|-----------|
| Dedicatória | i |
| Agradecimentos | ii |
| Resumo | v |
| Summary | vi |
| Índice | vii |
| Introdução e Motivação | 1 |
| 1 Caos e Integrabilidade em Teorias de Gauge | 12 |
| 1.1 Teoria de Gauge com Campos espacialmente Homogêneos | 12 |
| 1.2 Caos e Integrabilidade e Métodos de Análise | 17 |
| 1.2.1 Integrabilidade | 17 |
| 1.2.2 Simetrias pontuais de Noether. | 18 |
| 1.2.3 Teste de Painlevé | 20 |
| 1.2.4 Caos Determinístico | 23 |
| 1.2.5 Expoente de Lyapunov | 24 |
| 1.2.6 O método SALI | 25 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Modelo Mecânico de Yang-Mills Minimamente Supersimétrico | 27 |
| 2.1 | O Modelo Supersimétrico | 28 |
| 2.2 | Análise de Integrabilidade para o Setor Bosônico | 32 |
| 2.3 | Análise de Integrabilidade Considerando a Simetria de Paridade Imposta a todo o Modelo | 33 |
| 2.4 | Conclusões | 35 |
| 3 | Integrabilidade e Caos em um Modelo Planar Supersimétrico N=2 | 36 |
| 3.1 | O modelo Bosônico usual com considerações de Simetria de Paridade . . . | 37 |
| 3.2 | O modelo supersimétrico | 39 |
| 3.3 | O setor bosônico e sua integrabilidade. | 42 |
| 3.3.1 | Parâmetros que sobrevivem aos vínculos de paridade | 43 |
| 3.4 | Aplicando o teste de Painlevé | 44 |
| 3.5 | Estudo da Integrabilidade do Setor Bosônico com simetria de Paridade imposta a todo o modelo | 52 |
| 3.5.1 | Formulação a duas componentes do setor fermiônico | 52 |
| 3.5.2 | Estudo de integrabilidade com vínculos de paridade do setor fermiônico | 55 |
| 3.6 | Conclusões. | 60 |
| 4 | Limite Mecânico Supersimétrico de Yang-Mills com Quatro Graus de Liberdade | 70 |
| 4.1 | O Modelo Supersimétrico | 71 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2 | Análise de Integrabilidade para o Setor Bosônico | 76 |
| 4.3 | Estudo de Integrabilidade com Vínculos de Paridade Impostos a Todo o Modelo. | 76 |
| 4.4 | Conclusões. | 79 |
| 5 | Integrabilidade e Caos numa Versão D=(0+1) da Teoria N=2 Maxwell–Chern–Simons–Higgs. | 80 |
| 5.1 | Introdução | 80 |
| 5.2 | Descrição do Modelo | 82 |
| 5.3 | Análise de Integrabilidade: Caso Geral | 86 |
| 5.3.1 | Aplicando Simetrias pontuais de Noether. | 86 |
| 5.3.2 | Teste de Painlevé | 87 |
| 5.4 | Regime de acoplamento crítico. | 89 |
| 5.5 | Análise de caos | 91 |
| 5.5.1 | Equações de movimento e condições para análise | 92 |
| 5.5.2 | Caso com $g = 0$ | 93 |
| 5.5.3 | Caso com $g \neq 0$ fora do regime de acoplamento crítico | 95 |
| 5.5.4 | Caso com g no regime de acoplamento crítico | 97 |
| 5.6 | Conclusões. | 99 |
| 6 | Considerações Finais | 102 |
| | Bibliografia | 107 |

Introdução e Motivação

As propriedades dinâmicas de sistemas de gauge definem um foco de grande interesse, como se pode perceber a partir do notável esforço que foi dirigido, há algum tempo, à análise da estabilidade de configurações de campo de gauge [Bamba et al,2002]. Dada a sua importância na física teórica, as teorias de gauge vêm sendo investigadas intensamente, e o quadro atual é uma descrição abrangente, mas não-exaustiva, desta estrutura teórica. Um aspecto promissor de tais sistemas é a possibilidade de soluções solitônicas coerentes, que podem desempenhar um papel crucial na compreensão de fenômenos físicos como, por exemplo, o confinamento dos quarks. Por outro lado, a procura de janelas de regime caótico em teorias de gauge parece ser tão importante como a análise anterior, definindo uma contrapartida à abordagem baseada em soluções estáveis, o que pode conduzir à resposta de problemas-chave [Bamba et al,2002, Biro et al,1994]. Nos anos oitenta, desenvolveu-se um método para investigar caos em teorias de campo, que foi aplicado a sistemas de Yang–Mills [Biro et al,1994, Matinyan et al,1981]. A idéia principal é reduzir o modelo a seu limite mecânico, considerando configurações de campo espacialmente homogêneas. A discussão da evolução caótica neste regime restrito é suposta suficiente para assegurar comportamento caótico da teoria de campo completa [Biro et al,1994, Nikolaevski e Shur,1982]. A partir do trabalho pioneiro de Matinyan [Matinyan et al,1981] que, fazendo uso de campos espacialmente homogêneos viabilizou o estudo de caos em teoria de campos, muitos outros trabalhos se sucederam. A seguir, des-

tacaremos alguns casos da literatura que adotam este enfoque, e também outras maneiras de estudar caos em teorias de campos.

No trabalho [Lavkin,1991], o autor mostra que os campos de uma teoria de Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$, numa aproximação de grandes comprimentos de onda, exibem uma transição ordem-caos, à medida que a energia aumenta e que a massa do campo escalar apresenta um efeito estabilizador. Em [Kawabe,1992], o mesmo modelo foi acrescido do potencial de Higgs, e também uma transição ordem-caos foi observada, sendo que, nesta aproximação espacialmente homogênea, observou-se que existiam soluções do tipo monopólo. No trabalho [Lavkin,1992], o autor mostra que a quantização dos mesmos campos tratados em [Lavkin,1991] conduzem a um aumento do comprimento de correlação da carga de cor (confinamento). Estudando o modelo de Higgs Abeliano e o modelo $SO(3)$ de Georgi-Glaslow (modelo de Higgs não-Abeliano), que, respectivamente, apresentam soluções de vórtice e monopólo, os autores de [Dey et al,1993] mostraram que estes não são integráveis para qualquer valor de parâmetro, e exibem caos. Já em [Bamba et al,1993], os autores investigaram a dinâmica do modelo de Chern-Simons-Higgs, com e sem o termo de Maxwell. No caso do Chern-Simons-Higgs puro, verificaram que este era integrável, ao passo que a introdução do termo de Maxwell tornava o sistema não-integrável, exibindo caos. Outro estudo nesta linha [Kawabe,1993], mostrou que o modelo- $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs, com solução do tipo “sphaleron”, também apresenta transição ordem-caos. Ainda com a mesma abordagem que em [Sriram et al,1994] o modelo- $SU(2)$ Chern-Simons-Higgs foi analisado, e se descobriu que, em geral, este não é integrável, e que o acréscimo de um termo de energia cinética para o campo de Yang-Mills não alterava a situação de não-integrabilidade. No trabalho [Berman,1994], a teoria de gauge $SU(2) \times U(1)$ com fase espontaneamente quebrada mostrou possuir transição ordem-caos. Em [Kawabe,1995], as propriedades caóticas do modelo de Higgs Abeliano foram estudadas, e se observou

que existia transição ordem-caos para certos valores da constante de acoplamento e energia com propriedades diferentes daquelas observadas no caso das teorias topológicas de SU(2) Yang-Mills-Higgs. Já no trabalho [Salasnich,1995], através de um análogo quântico do critério de superposição de ressonâncias de Chirikov, o autor obteve uma estimativa analítica do caos para SU(2) Yang-Mills. Na referência [Lakshmibala et al,1997], existe uma revisão dos trabalhos que contemplam campos espacialmente homogêneos até 1997. Um estudo de caos quântico em modelo de campos espacialmente homogêneos é apresentado na ref. [Salasnich,1997]. Em [Kaminaga e Saito,1998:1, Kaminaga e Saito,1998:2], os autores mostraram a transição ordem-caos na Eletrodinâmica Escalar e no caso de Yang-Mills puro em 2+1 dimensões com grupo SU(2).

Além do caso com campos espacialmente homogêneos, onde somente a variável temporal era considerada, outros estudos levaram em conta os graus de liberdade espaciais, entretanto, em situações muito particulares. Estes eram os casos de teorias topológicas onde simetrias do tipo cilíndricas ou esféricas entravam em cena. Entre estes estudos está o da ref. [Kawabe e Ohta,1991], onde o caos foi estudado em um modelo SU(2) Yang-Mills com perturbações na solução de monopólo magnético do tipo 't Hooft-Polyakov. Averigüou-se que existe um valor crítico na perturbação, abaixo do qual o sistema é regular. Estudos semelhantes foram realizados nas referências [Joy e Sabir,1992:1, Kawabe e Ohta,1994]. Nas refs. [Kawabe e Ohta,1997, Ohta e Kawabe,1997, Kawabe e Ohta,2000], as propriedades caóticas do vórtice da solução de Nielsen-Olesen, com simetria cilíndrica na teoria de Higgs Abelian, foram estudadas em um acoplamento crítico constante. Os resultados mostraram que o sistema exhibe caos no caso de grandes perturbações e é similar à transição ordem-caos observada em várias soluções topológicas das teorias SU(2) Yang-Mills-Higgs. Um outro estudo que fez uma comparação entre o caos observado em teorias topológicas e não-topológicas, é apresentado na ref.[Mukku et al,1997]. Na ref.

[Dobrowolski e Szczesny,2000], é feito um estudo de caos no setor de Yang-Mills-Higgs, com simetria esférica, no contexto da técnica do desvio geodésico, e se encontrou que a massa de Higgs é um indicador natural da presença de sensibilidade às condições iniciais.

Dos estudos acima mencionados com teorias topológicas, um detalhe que chama a atenção é o fato de que, em uma mesma teoria, podem coexistir um regime de ultra-estabilidade (sóliton) e de ultra-instabilidade (caos) [Sriram e Segar,1997].

Embora nos estudos de teorias topológicas os graus de liberdade espaciais já pudessem ser considerados, existia uma limitação imposta pela exigência de simetrias nestes casos (esférica, cilíndrica e etc); por isto, um estudo mais amplo, levando em conta os graus de liberdade espaciais, foi conduzido por vários autores, fazendo uso das teorias de campos na rede. Desta maneira, na ref. [Müller e Trayanov,1992], uma análise da teoria de gauge $SU(2)$ em uma rede espacial mostrou a existência de caos no limite semiclássico. Na ref.[Pullirsch et al,1998], os autores fizeram um estudo na rede das flutuações no espectro de autovalores, e se calculou a distribuição de vizinhos mais próximos deste espectro. Os resultados concordavam com a teoria de Wigner, que indica caos nestes casos; não se encontrou nenhuma distribuição de Poisson, o que indicaria regularidade. Um estudo semelhante foi feito para a QED em 4D [Berg et al,1999], como também para QCD [Bittner et al,2001]. Uma revisão de estudos de caos na rede pode ser encontrada na ref. [Biro et al,1994].

Um resultado importante a se destacar foi um estudo [Steeb et al,1991], que mostrou que, se de um lado a versão usual de Yang-Mills em quatro dimensões exibia caos, por outro lado a sua versão auto-dual era completamente integrável.

Como boa parte dos estudos em caos nas teorias de campos foi feita em sua versão clássica, uma pergunta que alguns autores tentaram responder foi até que ponto a quantização da teoria teria um efeito estabilizador. Nesta linha, nos trabalhos das

refs.[Matinyan et al,1997:1]-[Kuvshinov e Kuzmin,2002], a ação efetiva à aproximação de 1-loop da Eletrodinâmica Escalar sem massa foi estudada, e se verificou que a quebra espontânea de simetria induzida radiativamente estabilizava o vácuo contra o caos.

Fora do cenário mais diretamente ligado ao estudo das interações fundamentais, outra área onde foram feitos muitos estudos de caos em teorias de campos foi o da Cosmologia, relacionados à expansão do Universo [Barrow e Levin,1998], teorias inflacionárias [Salasnich,1999], ADS/CFT [Rama e Sathiapalan,1999] e supercordas cosmológicas [Damour e Henneaux,2000, Damour,2002]. Outro campo onde este tipo de estudo de caos apresenta resultados na literatura foi o de Branas [Aref'eva et al,1998]-[Aref'eva et al,2000] e Supercordas [Henneaux,2001]-[Damour,2003:2].

Uma proposta interessante, envolvendo caos em teorias de campos, pode ser vista na ref. [Biro et al,2001], onde os autores propõem que um sistema de campos pode ser quantizado, fazendo uso do comportamento caótico de sua solução clássica. Esta proposta é análoga à quantização estocástica, que é reconhecida como uma forma de quantização em paralelo aos métodos canônico e do funcional de integral de caminho [Floratos e Iliopoulos,1983, Damgaard e Huffel,1988]. Enquanto na quantização estocástica existe o acréscimo de ruído, cujo caráter fenomenológico é mal compreendido, como fonte da quantização, na ref. [Biro et al,2001] a própria dinâmica do sistema clássico se encarrega deste papel, desde que seja considerada uma dimensão extra de tipo tempo que possibilita a termalização do sistema. Já o estudo de caos quântico foi feito tanto no limite espacialmente homogêneo [Salasnich,1998] como na rede [Matinyan et al,2003, Bittner et al,2004].

Embora a maior parte das técnicas para estudo do caos seja numérica, em tempos recentes, uma série de abordagens baseadas no estudo de curvaturas têm sido desenvolvida e que permite uma estimativa analítica da existência de caos. Exemplos desta

abordagem para o estudo de caos em teorias de campos podem ser encontradas nas refs. [Casettit et al,1999, Kawabe,2003].

Como um último ponto nesta revisão da literatura, destacamos um esforço em definir um critério para caos em teorias quânticas de campos. Segundo as referências [Kuvshinov e Kuzmin,2002] e [Kuvshinov e Kuzmin,2003], o caos quântico pode ser definido a partir da função de Green, em analogia com a função de correlação usada em Mecânica Estatística como método para estimar caos. Esta proposta traz duas vantagens: de um lado, a função de Green é um objeto próprio da teoria quântica de campos e, portanto, invariante relativístico, o que difere dos estimadores usuais de caos, que costumam não ser invariantes frente a transformações de coordenadas. A outra é que o caos, nesta proposta, é definido no regime quântico e, só então, é comparado com os resultados clássicos quando este limite é tomado. Deve-se observar que esta definição de caos quântico está na contra-mão da versão usual, onde o caos é definido classicamente e o caos quântico é o conjunto de manifestações especiais que a teoria exhibe no caso quântico, quando sua versão clássica é caótica.

No contexto desta revisão, um foco relevante de atenção é definido pela possibilidade de estabelecer uma receita de interdependência sistemática para a relação entre simetrias de gauge e o controle da dinâmica caótica. Ao considerarmos simetrias de gauge, encontramos eventualmente com sistemas supersimétricos considerados do ponto de vista fundamental, ou como modelos estendidos, concebidos para uma melhor descrição de situações físicas específicas.

Teorias de Maxwell–Chern–Simons–Higgs (MCSH) planares em $(2+1)D$, candidatas a uma descrição efetiva de fenômenos supercondutores em alta- T_c , foram recentemente escolhidas como modelos com o propósito de estudar transições ordem–caos. Bambah et al. [Bambah et al,1993] considerou tanto o modelo de Chern–Simons–Higgs (CSH) integrável,

minimamente acoplado, quanto sua extensão natural de momenta mais altos, o sistema de Maxwell–Chern–Simons–Higgs minimamente acoplado. O último falhou, quando submetido a um critério de integrabilidade, o teste de Painlevé, apresentando um regime caótico, confirmado através do uso da análise numérica do expoente de Lyapunov e da análise de diagramas de fase. Recentemente, Escalona et al. [Escalona et al,2000] efetuaram um trabalho semelhante em um sistema de MCSH dotado de ambos acoplamentos, mínimo e não-mínimo, no setor de interação. O acoplamento não-mínimo significa um termo do tipo Pauli descrevendo uma interação intensidade de campo-corrente de matéria, admitida em $(2+1)$ -D, indiferente ao spin do campo de matéria [Stern,1991]. Além disso, caso se busque uma extensão quântica, tal acoplamento não-mínimo deve ser considerado de saída [Kogan,1991]. No trabalho da Ref. [Escalona et al,2000], o sistema de CSH é discutido como ainda sendo integrável, enquanto o acoplamento não-mínimo do MCSH exhibe “janelas alternadas de ordem e caos”, à medida que a constante de acoplamento não-mínimo, g , é variada, com os outros parâmetros sendo mantidos constantes. O modelo que se adota é a projeção bosônica de um sistema $N = 1$ -supersimétrico já estabelecido; na verdade, um sistema de MCSH com interação não-mínima, que já havia sido estendido a uma teoria supersimétrica $N = 2$ on-shell [Navrátil,1996]. Na medida em que soluções do tipo-sóliton são um assunto de interesse, a extensão $N = 2$ define a estrutura própria, uma vez que permite regime auto-dual [Witten e Olive,1978, Bogomol’nyi,1976]. Neste sentido, Antillon, Escalona et al. haviam encontrado, em um trabalho anterior [Antillón et al,1997], enquanto trabalhavam em um modelo extensível $N = 2$, uma solução de vórtice auto-dual estática não-topológica, o que motivou a procura de dinâmica caótica no sistema espacialmente homogêneo como uma contraparte interessante para a descoberta anterior. Não obstante, até mesmo se supusermos a validade da conjectura que relaciona o limite mecânico à teoria completa, surge um problema se consideramos o caráter de contra-

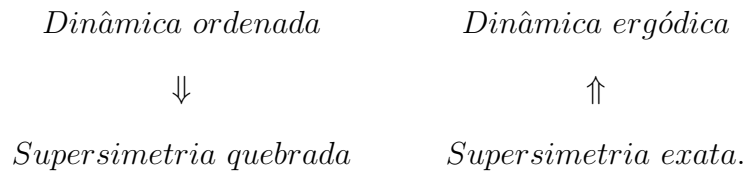
parte como rigoroso: o vórtice foi encontrado em um ambiente de supersimetria $N = 2$, enquanto o procedimento de variar g adotado em [Escalona et al,2000] necessariamente move o sistema para fora da situação de projeção de uma supersimetria bosônica $N = 2$. Como claramente tomado em [Navrátil,1996], um acoplamento crítico, isto é, $g = -e/k$, tem que ser suposto para assegurar supersimetria- $N = 2$ on-shell, onde e é a constante do acoplamento mínimo e k é o parâmetro de massa de Chern-Simons. Além disso, o potencial escalar é proibido de incluir qualquer termo que não seja ϕ^2 do tipo massa não-topológico. Assim, variando g , enquanto e e k são mantidos constantes, e adotando $V = \lambda(\phi^2 - v^2)^2$, faz daquele modelo, no máximo, um setor de um sistema $N = 1$.

Alternativamente, outro modelo planar não-mínimo $N = 2$ de MCSH foi proposto recentemente [Christiansen et al,1999:1], definindo um espectro mais rico, que apresenta soluções estáticas de vórtice tanto não-topológicas e topológicas auto-duais [Christiansen et al,1999:2], numericamente obtida depois da adoção da relação de acoplamento crítico. Tal sistema exhibe supersimetria $N = 2$ off-shell, e é obtido de um “ansatz” de $N = 1$, $D = 4$, depois de redução dimensional e uma apropriada identificação de supercampo covariante $N = 2$. Duas diferenças importantes surgem, caso se deseje comparar ambos os modelos de MCSH não-mínimo: no caso de $N = 2$ -off-shell, um campo escalar neutro “adicional” surge; também, no caso de $N = 2$ -off-shell, nenhuma relação entre as constantes de acoplamento e os parâmetros é exigida para assegurar supersimetria- $N = 2$ (entretanto, foi mostrado que as excitações de vórtice prevalecem no regime particular $g = -e/k$). Em outras palavras, se o modelo da Ref. [Christiansen et al,1999:1] é considerado, a estratégia de variar g livremente e a escolha de um potencial escalar topologicamente não-trivial vem a ser compatível com uma supersimetria $N = 2$.

Motivados por estas características interessantes, levamos a cabo, no Capítulo 5 uma

análise da versão reduzida da Lagrangiana mecânica do setor-bosônico extraída da Ref. [Christiansen et al,1999:2].

Do ponto de vista da integrabilidade, muitos estudos foram realizados com teorias supersimétricas, onde o caráter integrável, ou não-integrável, foi estabelecido, mas sem necessariamente esbalecer que mecanismos conferem estas propriedades aos sistemas [Evans e Madsen,1996]-[Hlavaty,1989]. Entretanto, estudos como os da teoria de Seiberg-Witten lançam luz sobre o caráter não-integrável das teorias supersimétricas e associam um caráter não-integrável às teorias supersimétricas, por conta do grande número de vínculos que estas possuem [Seiberg,1998]. Mais raro ainda, é o estudo de caos em teorias supersimétricas. Em [Gozzi, Reuter e Thacker,1992], os autores argumentam com base em um estudo em mecânica clássica supersimétrica, que uma dinâmica ordenada é observada em teoria com supersimetria quebrada, ao passo que supersimetria exata implica em dinâmica ergódica.



Cabe lembrar que dinâmica ergódica está associada à dinâmica caótica. Um outro resultado na literatura, que associa caos a cenário supersimétrico, é um trabalho devido a Horne e Moore [Horne e Moore,1994] onde se conclui que o espaço modular do vácuo de supercordas exhibe caos. Estes resultados nos levam a sugerir, nesta tese, a hipótese de que o ambiente supersimétrico é mais propício para o surgimento de caos do que o cenário não-supersimétrico.

Esta tese fundamenta-se em um conjunto de trabalhos [de Assis et al,2005:1], [de Assis et al,2005:2] e [de Assis et al,2005:3], realizados em colaboração com outros mem-

bros do Grupo de Pesquisa onde desenvolvo o meu projeto, e que marcam o início de uma linha de pesquisa que estuda integrabilidade e caos em conexão com supersimetria. Inicialmente, atacamos os modelos mecânicos para, em seguida, como discutido em nossas considerações finais, passarmos ao estudo da questão no âmbito das teorias de campos.

A seguir, apresentamos como este trabalho de tese está organizado:

No Capítulo 1, faremos uma revisão de conceitos usados nesta tese, e que não são de amplo domínio pela comunidade de teoria de campos.

Iniciamos apresentando a formulação de campos espacialmente homogêneos para estudo de teorias de gauge.

A seguir, apresentamos o conceito de integrabilidade e as técnicas que usamos nesta tese para sua detecção: a técnica das simetrias de Noether e a análise de Painlevé.

De maneira semelhante, apresentamos o conceito de caos determinístico e as técnicas que são utilizadas para sua determinação: o expoente de Lyapunov e o método SALI.

No Capítulo 2, iniciamos o estudo do papel da supersimetria frente à integrabilidade e caos, construindo uma versão planar supersimétrica $N = 1$ da versão mecânica da teoria de Yang-Mills e verificando sua integrabilidade.

No Capítulo 3, continuamos esta linha de estudo, construindo um modelo polinomial planar supersimétrico $N = 2$ de ordem 4. Comparamos a análise de integrabilidade feita somente no setor bosônico com a mesma análise feita para o modelo completo. Após esta análise, selecionamos um dos casos não-integráveis e verificamos a existência de caos neste modelo.

Os modelos mecânicos de Yang-Mills considerados nos Capítulos 2 e 3 podiam ser vistos como modelos planares derivados de uma versão em quatro componentes após mudança de coordenadas. Motivados por esta característica, no Capítulo 4, repetimos o estudo feito nos dois capítulos anteriores diretamente na versão em quatro componentes.

No Capítulo 5, fazemos um estudo de caos em um sistema mecânico originado de uma teoria de campos supersimétrica de Maxwell-Chern-Simons, com acoplamento não-mínimo após redução espacial homogênea.

Aproveitamos o importante papel que o parâmetro g desempenha, como destacado anteriormente, e realizamos cálculos em três cenários: $g = 0$, $g \neq 0$ mas fora do acoplamento crítico e g no acoplamento crítico.

Por último, Capítulo 6, apresentamos nossas Considerações Finais.

Capítulo 1

Caos e Integrabilidade em Teorias de Gauge

1.1 Teoria de Gauge com Campos espacialmente

Homogêneos

A proposta de que o caos pudesse ter um papel importante em teorias de interações fundamentais remonta a Heisenberg [Heisenberg,1949], antes do surgimento das teorias de gauge, em um trabalho descrevendo a produção de mésons em termos de campos turbulentos. Com o advento das teorias de gauge, estudos do vácuo perturbativo da teoria de Yang-Mills indicaram que este não era o verdadeiro vácuo. Como uma teoria quântica é probabilística por natureza, é necessário que a solução clássica escolhida para quantização seja a de mínima energia, a fim de evitar a possibilidade do estado quântico decair em um estado de mais baixa energia.

Ocorre que, nas teorias de Yang-Mills, não é possível se decompor o campo de gauge em osciladores de campo não-interagentes, devido ao fato da ação ser não-linear. Estes

osciladores anarmônicos acoplados dão origem a um condensado de glúon, manifestado em um valor esperado do vácuo não-nulo da ação de Yang-Mills, o que reduz a energia do estado fundamental.

Uma análise dos diferentes tipos de estados fundamentais da QCD revelou que o problema de encontrar uma configuração de campo não-trivial, onde técnicas de quantização perturbativa podem ser implementadas na forma-padrão, é ainda pouco claro.

Isto faz com que seja importante encontrar e analisar soluções clássicas das equações de Yang-Mills sem fontes externas no espaço de Minkowski. É esperado, então, que estas soluções possam servir de base sólida para investigação da estrutura de vácuo da QCD.

Considerando uma teoria de Yang-Mills no espaço-tempo de Minkowski com graus de liberdade internos respeitando $SU(2)$, temos as seguintes equações de campo:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g\epsilon^{abc} A^{a\mu} F_{\mu\nu}^c = 0,$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

com tensor momento-energia:

$$T_{\mu\nu} = -F_\mu^{a\lambda} F_{\nu\lambda}^a + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}^a F^{a\lambda\rho}.$$

Queremos descrever estados de vácuo para os quais o vetor de Poynting é anulado em um dado sistema de coordenadas,

$$T_{0j} = F_{0i}^a F_{ji}^a,$$

ou seja, não existe fluxo de energia.

Usando estas condições, e fixando o gauge como $A_0^a = 0$, as equações de campo podem ser reescritas como:

$$\ddot{A}_i^a - F_{ji,j}^a + g\epsilon^{abc} A_j^b F_{ji}^c = 0,$$

que admite as seguintes quantidades conservadas:

$$M_i = \epsilon_{ijk} A_j^a \dot{A}_k^a$$

e

$$N^a = \epsilon^{abc} A_i^b \dot{A}_i^c,$$

sendo que N^a é nulo para a solução de vácuo, e para os outros casos é igual à densidade de carga de cor externa. Estes vínculos,

$$N^a = 0 \quad \text{e} \quad \dot{M}_i = 0,$$

conduzem a:

$$\dot{A}_i^a (A_{i,j}^a - A_{j,i}^a) = 0.$$

Isto implica nas seguintes condições:

$$i) A_{i,j}^a = 0 \quad ii) \dot{A}_i^a = 0 \quad iii) A_{i,j}^a - A_{j,i}^a = 0,$$

onde:

- i) É o caso homogêneo,
- ii) Caso estático e
- iii) É o caso de potenciais vetores irrotacionais.

O caso homogêneo corresponde a uma aproximação no limite de grandes comprimentos de onda, o que reduz um sistema de equações parciais (EDP) a um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). Com esta redução advinda da hipótese de homogeneidade espacial dos potenciais, i.e.,

$$A_\mu(x) = A_\mu(t), \quad (1.1.1)$$

estes passam a ser funções só do tempo, enquanto ainda assumem valores na Álgebra de Lie. Outras simplificações podem ocorrer ao se tomar G como sendo o grupo não-Abeliano mais simples : $SU(2)$. Assim, o potencial de gauge é $A_\mu^a(t)$; onde $a=(1,2,3)$ é o índice para $G = SU(2)$ e

$$gA_\mu^1 = x(t); gA_\mu^2 = y(t); gA_\mu^3 = z(t), \quad (1.1.2)$$

e supondo para $\mu = 1, 2, 3$, enquanto

$$A_0^a = 0 \quad \forall a,$$

que é a fixação de gauge anteriormente mencionada. Com estas definições, o Hamiltoniano de Yang-Mills , H_{YM} , torna-se

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2), \quad (1.1.3)$$

O caso do Yang-Mills puro, descrito acima, corresponde à dinâmica de um sistema de osciladores acoplados com potencial quártico.

Uma versão mais simples deste modelo é dada em duas componentes [Biro et al,1994]:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}x^2y^2; \quad (1.1.4)$$

em ambos os casos, o modelo é totalmente caótico.

Se, por outro lado, fizermos a redução de uma teoria com o termo de Higgs,

$$H = H_{YM} + \frac{1}{2}(\dot{\sigma} + B_a^2) + \frac{g^2}{4}(A_i^a)^2(B_a^2 + (\sigma - v)^2) + \frac{\lambda^2}{2}(B_a^2 + (\sigma - v)^2 - v)^2, \quad (1.1.5)$$

onde o isodoublete do campo escalar de Higgs é dado por [Biro et al,1994]:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iB_1 + B_2 \\ \sigma - iB_3 - v \end{pmatrix},$$

(v estando relacionado ao valor esperado no vácuo; e λ sendo uma constante de acoplamento que descreve a intensidade de interação), após a redução espacialmente homogênea e a imposição de alguns vínculos, como lei de Gauss e $\sigma = B_a = 0$, obtemos o seguinte modelo mecânico com duas componentes:

$$g^2 H = H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{g^2v^2}{4}(x^2 + y^2). \quad (1.1.6)$$

Para a maior parte dos valores dos parâmetros, este modelo é não-integrável, sendo que, neste regime, ao contrário do Yang-Mills puro, exibe tanto ordem quanto caos; por isto, diz-se que a introdução do potencial de Higgs estabiliza a teoria.

É intuitivo, observando o Hamiltoniano acima, que quando as componentes exibem grandes valores, o termo x^2y^2 domina, e temos a dinâmica caótica típica do Yang-Mills puro. Por outro lado, se as componentes possuírem valores pequenos, o sistema passa a exibir comportamento ordenado.

De fato, a partir de uma análise que segue este raciocínio, podemos construir o seguinte parâmetro adimensional de controle, com o qual podemos distinguir ordem e caos:

$$k = \frac{g^2 v^4}{4H}.$$

Para $k = 0$, temos o caso de Yang-Mills puro e, portanto, caos. Para $k \neq 0$ e valores de k pequenos, temos caos, ao passo que, para k assumindo valores grandes, temos ordem. Para este caso com duas componentes, temos como limiar para ordem-caos $k \approx 0.15$.

1.2 Caos e Integrabilidade e Métodos de Análise

Antes de darmos início ao estudo da relação entre caos e integrabilidade com a supersimetria, convém que façamos uma revisão, ainda que breve, destes dois conceitos (caos e integrabilidade), assim como dos instrumentos que serão utilizados nesta tese para estudo sobre os mesmos.

1.2.1 Integrabilidade

Embora a noção de integrabilidade seja muito usada atualmente, não existe uma definição única compartilhada pela comunidade científica. Na verdade, os principais textos introdutórios à integrabilidade iniciam sua exposição enfatizando este fato. Por outro lado, a este ponto, cabe destacar que, ao contrário do que muitos pensam, integrabilidade não é sinônimo de solvabilidade que, no caso, é a existência de soluções de um sistema dinâmico em termos de funções conhecidas. O conceito de integrabilidade está ligado à idéia de se poder conhecer propriedades globais do sistema estudado, a ponto de sabermos caracterizar seu comportamento ao longo do tempo. De modo geral, o conceito mais amplamente relacionado a este conhecimento global do sistema é o de quantidades conservadas, também chamadas de integrais primeiras ou, também, invariantes.

As integrais primeiras são funções das variáveis dinâmicas do sistema que permanecem constantes ao longo do tempo. No caso integrável, por exemplo, estas integrais primeiras podem ser utilizadas para baixar a dimensionalidade do sistema até que este possa ser integrado por quadraturas.

Visto que não existe uma definição única de integrabilidade, podemos nos perguntar onde repousa o rigor nos vários trabalhos publicados neste assunto. A resposta é que cada um destes estudos adota uma definição de trabalho para integrabilidade e, ao fazer tal restrição, os autores podem ser tão precisos quanto queiram, dentro dos limites daquela definição. Assim ora encontramos frases como: “integrável à la Liouville”, “integrável de acordo com a Propriedade de Painlevé”, “integrável via pares de Lax” e outras mais.

É importante destacar, que tais definições de integrabilidade não são equivalentes e portanto um sistema que é integrável segundo uma destas definições pode não ser por outra. Daí o motivo de na literatura termos um mesmo sistema dinâmico sendo estudando segundo diferentes critérios de integrabilidade.

Dentro deste raciocínio, ao longo deste trabalho, adotaremos dois critérios de integrabilidade: Simetrias de Noether e Propriedade de Painlevé, que serão expostos nas seções que seguem.

1.2.2 Simetrias pontuais de Noether.

Uma questão importante relativa a um sistema Lagrangiano diz respeito às suas simetrias pontuais de Noether, uma vez que relacionadas a quantidades conservadas. Aqui, consideramos a pergunta da existência de simetrias pontuais de Noether no nosso sistema, seguindo o método mostrado na referência [Sarlet e Cantrijn,1981]. Procuramos por transformações infinitesimais de ponto da forma:

$$\bar{A} = A + \varepsilon\eta_A, \quad (1.2.7)$$

$$\bar{\zeta} = \zeta + \varepsilon\eta_\zeta, \quad (1.2.8)$$

$$\bar{\phi} = \phi + \varepsilon\eta_\phi, \quad (1.2.9)$$

$$\bar{M} = M + \varepsilon\eta_M, \quad (1.2.10)$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon\tau, \quad (1.2.11)$$

para funções dos campos e do tempo $\eta_A, \eta_\zeta, \eta_M, \eta_\phi, \tau$, e ε (um parâmetro infinitesimal). Estas transformações infinitesimais deixam invariante o funcional de ação, a menos da adição de uma constante numérica irrelevante, se e só se a seguinte condição de simetria de Noether [Sarlet e Cantrijn,1981] for satisfeita:

$$\begin{aligned} & \tau \frac{\partial L}{\partial t} + \eta_A \frac{\partial L}{\partial A} + \eta_\zeta \frac{\partial L}{\partial \zeta} + \eta_\phi \frac{\partial L}{\partial \phi} + \eta_M \frac{\partial L}{\partial M} + (\dot{\eta}_A - \dot{\tau} \dot{A}) \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} + \\ & + (\dot{\eta}_\zeta - \dot{\tau} \dot{\zeta}) \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} + (\dot{\eta}_\phi - \dot{\tau} \dot{\phi}) \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + (\dot{\eta}_M - \dot{\tau} \dot{M}) \frac{\partial L}{\partial \dot{M}} + \\ & + \dot{\tau} L = \dot{F}, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

onde F é uma função dos campos e do tempo. Se tal função pode ser encontrada, existe uma simetria pontual de Noether e um invariante de Noether associado I dado por:

$$I = \eta_A \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} + \eta_\zeta \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} + \eta_\phi \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \eta_M \frac{\partial L}{\partial \dot{M}} - \tau (\dot{A} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} + \dot{\zeta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \dot{M} \frac{\partial L}{\partial \dot{M}} - L) - F. \quad (1.2.13)$$

Na condição de simetria de Noether, as derivadas temporais serão entendidas como derivadas totais, por exemplo:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \tau}{\partial M} \dot{M} + \frac{\partial \tau}{\partial t}. \quad (1.2.14)$$

1.2.3 Teste de Painlevé

Diz-se que um sistema possui a propriedade de Kowalevskaja-Painlevé ou, como é mais freqüente, propriedade de Painlevé, se as singularidades móveis de suas soluções no plano complexo são pólos.

A proposta de relacionar a propriedade de Painlevé a sistemas integráveis teve início no final do século XIX, com os trabalhos de Sofia Kowalevskaja [Kowalevskaja,1889], que analisou a integrabilidade de um sistema de equações que tratavam da rotação de corpo rígido com um ponto fixo colocado em um campo gravitacional constante.

Já no início do século XX, Painlevé analisou equações que satisfaziam esta propriedade e estudou sua aplicação a equações diferenciais de segunda ordem.

Em seguida, os colaboradores de Painlevé catalogaram um conjunto de cinquenta equações que possuíam esta propriedade e, portanto, eram integráveis. Agora, de posse desta lista, a dificuldade estava em, dado um sistema de equações diferenciais qualquer, mostrar, via transformações de coordenadas, que tal sistema recaía nos casos listados como sendo integráveis, segundo a propriedade de Painlevé o que, em geral, não constitui tarefa trivial.

No final dos anos 70, Ablowitz, Ramani e Segur desenvolveram um algoritmo para testar se um dado sistema de equações possui esta propriedade [Ablowitz e Segur,1997, Ablowitz e Fokas,1981, Ablowitz, Ramani e Segur,1978]. Este procedimento ficou conhecido como teste de Painlevé, e é uma das poucas formas, incluindo a análise de simetrias, de se determinar via um procedimento algorítmico se um sistema é integrável.

A seguir, damos detalhes deste procedimento.

O teste de Painlevé [Tabor,1989]–[Ablowitz, Ramani e Segur,1978] estabelece se um sistema de ODEs exibe a propriedade de Painlevé.

Uma EDO tem a propriedade de Painlevé se suas soluções no plano complexo são

uni-valoradas na vizinhança de todas suas singularidades móveis.

Dado um sistema de equações diferenciais,

$$L_j(u_i, u_{it}) = 0 \quad \text{com} \quad i, j = 1, \dots, n \quad , \quad (1.2.15)$$

adotamos uma expansão de Laurent para a solução

$$u_i(t) = (t - t_0)^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} u_{i,k} (t - t_0)^k, \quad (1.2.16)$$

com

$$u_{i,0} \neq 0 \quad \text{and} \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}^- \quad , \quad (1.2.17)$$

onde $u_{i,k}$ são constantes. O algoritmo para o teste de Painlevé é implementado por meio dos seguintes três passos:

Passo 1: (Determinação da singularidade principal ou comportamento dominante). Substituímos

$$u_i(t) \simeq u_{i,0} (t - t_0)^{\alpha_i} \quad (1.2.18)$$

em (1.2.15) para determinar α_i e $u_{i,0}$, e obtemos um sistema algébrico com α_i assumindo valores inteiros negativos e t_0 arbitrário.

Impomos que dois ou mais termos de cada equação possam se equilibrar e determinar α_i e $u_{i,0}$.

Se qualquer α_i não for inteiro, o sistema não é do tipo-Painlevé em sua versão forte.

Se há mais de uma solução para α_i ou $u_{i,0}$, elas definem ramos, e os seguintes passos do algoritmo precisam ser aplicados para cada um destes ramos.

Passo 2: (Determinação das ressonâncias).

Para cada α_i e $u_{i,0}$, calculamos os inteiros r para os quais $u_{i,r}$ é uma função arbitrária em 1.2.15. Substituímos a série truncada,

$$u_i(t) = u_{i,0}(t - t_0)^{\alpha_i} + u_{i,r}(t - t_0)^{\alpha_i+r}, \quad (1.2.19)$$

por (1.2.15), e procuramos por inteiros r para quais $u_{i,r}$ é uma constante arbitrária.

Para fazer isto, depois de substituir a série truncada por (1.2.15), ficamos com os termos mais singulares em $(t - t_0)$, e os coeficientes de $u_{i,r}$ são fixados como zero.

Temos:

$$Qu_r = 0, \quad ur = (u_{1,r} \ u_{2,r} \dots \ u_{M,r})^T, \quad (1.2.20)$$

onde Q é uma matriz $M \times M$ que depende de r .

As ressonâncias são as raízes de $\det(Q) = 0$.

Em todo sistema com a propriedade de Painlevé, a ressonância (-1) estará presente e corresponderá a $(t - t_0)$ arbitrário. A ressonância com valor zero também pode estar presente, dependendo do número de valores arbitrários $u_{i,0}$.

Passo 3: (Condições de compatibilidade e constantes de movimento).

Para toda ressonância encontrada no passo anterior, há uma condição de compatibilidade que deve ser verificada para que o sistema passe no teste de Painlevé. As condições de compatibilidade são verificadas inserindo

$$u_i(t) = (t - t_0)^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{r_M} u_{i,k}(t - t_0)^k \quad (1.2.21)$$

em (1.2.15), onde r_M é a ressonância inteira positiva mais alta.

Se todas estas condições de compatibilidade forem satisfeitas de maneira que elas introduzam um número suficiente de constantes arbitrárias, então é dito que o sistema é do tipo-Painlevé. Exemplos simples destes algoritmo podem ser encontrados nas refs. [Tabor,1989, Ablowitz, Ramani e Segur,1978].

1.2.4 Caos Determinístico

O chamado caos determinístico é um comportamento imprevisível e aparentemente aleatório, que ocorre em sistemas dinâmicos, sejam eles contínuos ou discretos. A designação de caos determinístico vem do fato de que, apesar do comportamento aleatório, tais sistemas têm sua dinâmica governada por leis de movimento bem-definidas.

Sistemas como estes, regidos por leis físicas bem-definidas e cujo comportamento poderia ser, em princípio, previsto, são chamados sistemas determinísticos.

Assim como no caso da integrabilidade, não existe uma definição única de caos, entretanto existem definições matemáticas precisas, como a de York e a de Devaney. Entretanto, a mais conhecida é, na verdade, uma definição de trabalho que associa o processo caótico com sensibilidade às condições iniciais, e é assim que o caos clássico é caracterizado pelos seus estimadores, dos quais o mais conhecido é o expoente de Lyapunov, que apresentaremos neste capítulo.

Apesar de, neste trabalho, usarmos o expoente de Lyapunov para inspeção de caos, assim como um outro método chamado SALI, gostaríamos de destacar que caracterizar caos como sendo sensibilidade às condições iniciais é falhar ao defini-lo pois esta afirmação é incompleta.

Um contra-exemplo que destacamos é o de fenômenos com histerese. Estes são, por definição, sensíveis às condições iniciais, mas, nem por isto, caóticos.

Encerramos esta seção com a formulação de caos segundo Devaney:

Seja X um espaço métrico. A função $f : X \rightarrow X$ é caótica se:

- a) Os pontos periódicos de f são densos em X ,
- b) f é topologicamente transitiva, ou seja: para todos os conjuntos abertos U e V em X , existe um x em U e um número natural, n , tal que $f^n(x)$ está em V .

c) f exhibe sensibilidade às condições iniciais, ou seja: existe um $d > 0$ tal que para todo x em X e todo $e > 0$; existe um y em X e um número natural n , tal que $d[x, y] < e$ e $d[f^n(x), f^n(y)] > d$.

Podemos traduzir grosseiramente este enunciado matemático como significando que em um sistema caótico existe um conjunto de soluções tais, que para cada uma destas soluções, sempre existirá uma segunda solução tão próxima quanto desejarmos. Além disso, neste sistema, é possível que pontos que pertençam a uma solução possam evoluir para pontos que pertençam a outra solução. E, finalmente, em sistemas caóticos, dada uma distância inicial entre dois pontos, a evolução se dá no sentido de afastá-los.

Como podemos verificar da definição acima, dizer que um sistema é caótico se for sensível às condições iniciais, não é suficiente; entretanto, os estimadores usuais obedecem a esta definição, embora a justificativa que muitos autores costumam dar seja incorreta.

A seguir, apresentamos os dois métodos para detecção de caos usados nesta tese.

1.2.5 Expoente de Lyapunov

O método mais conhecido usado para detectar se um sistema é caótico, ou não, é o máximo Expoente Característico de Lyapunov (ECL)[Benettin et al,1980, Wolf et al,1985], σ_1 . Se $\sigma_1 > 0$ o fluxo é caótico. O coeficiente σ_1 é computado [Benettin et al,1980, Wolf et al,1985] a partir de

$$L_t = \frac{1}{t} \ln \frac{|\vec{w}(t)|}{|\vec{w}(0)|}, \quad (1.2.22)$$

$$\sigma_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t, \quad (1.2.23)$$

onde $\vec{w}(0)$, $\vec{w}(t)$ são vetores de divergência e a evolução temporal de \vec{w} é determinada resolvendo as equações de movimento e as equações variacionais associadas.

Uma vez que estes vetores tendem a adquirir um crescimento exponencial em curtos intervalos de tempo, muitos cálculos de L_{T_1} , à medida que $\vec{w}(t)$ evolui por curtos tempos t_1 , são levados a cabo e depois de cada $\vec{w}(t)$ é normalizado. Com este procedimento, o valor médio de L_{T_1} é computado como

$$\sigma_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_{T_i}.$$

Exemplos detalhados da implementação do cálculo do expoente de Lyapunov podem ser encontrados nas refs. [Tabor,1989, Benettin et al,1980, Wolf et al,1985].

1.2.6 O método SALI

Para sistemas Hamiltonianos, este cálculo fica muito prolongado e com convergência pobre. Este procedimento longo pode levar a um falso diagnóstico de caos.

Escolhemos adotar o método desenvolvido por Skokos, Antonopoulos, Boutis e Vrahatis, o assim chamado Índice de Menor Alinhamento (SALI) [Skokos et al,2004, Skokos et al,2003]. A razão para esta escolha é que o método SALI é computacionalmente mais rápido e menos instável do que a análise com expoente de Lyapunov, fazendo com que o primeiro seja mais adequado para o sistema que investigamos. O SALI é um indicador de caos que assume valor zero para órbitas caóticas, enquanto exibe flutuações pequenas ao redor de valores diferentes de zero para o caso de ordem. Portanto, o SALI é definido como:

$$\text{SALI}(t) = \min \left\{ \left\| \frac{\vec{w}_1(t)}{\|\vec{w}_1(t)\|} + \frac{\vec{w}_2(t)}{\|\vec{w}_2(t)\|} \right\|, \left\| \frac{\vec{w}_1(t)}{\|\vec{w}_1(t)\|} - \frac{\vec{w}_2(t)}{\|\vec{w}_2(t)\|} \right\| \right\}, \quad (1.2.24)$$

onde $\vec{w}_1(t)$, e $\vec{w}_2(t)$ são as evoluções dos dois vetores de divergências com diferentes condições iniciais, $\|\cdot\|$ é a norma Euclideana e t é o tempo.

Os autores do método SALI mostraram que ele pode ser aproximado por meio da diferença dos dois maiores expoentes característicos de Lyapunov, σ_1 e σ_2 .

A principal vantagem do SALI em regiões caóticas é que usa dois vetores de divergência e utiliza, a cada passo, a convergência de todos os passos prévios. O valor de SALI tende a zerar para fluxos caóticos a uma taxa que é uma função da diferença dos dois maiores expoentes característicos de Lyapunov σ_1, σ_2 como $\text{SALI} \propto e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)t}$. Como normalmente é feito em computações numéricas, precisamos definir um limiar, de forma que um número computado possa ser considerado zero. Na maioria dos casos, este valor é selecionado como sendo $< 10^{-5}$. Como no caso do expoente de Lyapunov, acontece também que, no método de SALI, este é o critério que nós usaremos para distinguir entre ordem e caos.

No próximo capítulo, daremos início ao estudo das propriedades de integrabilidade e caos presentes em modelos com supersimetria. Usaremos o tipo mais simples de supersimetria, que é o de modelos minimamente supersimétricos, e neste ambiente construiremos um modelo planar supersimétrico, inspirado em reduções espacialmente homogêneas da teoria de Yang-Mills presentes na literatura.

Capítulo 2

Modelo Mecânico de Yang-Mills Minimamente Supersimétrico

Neste Capítulo, propomo-nos atacar a questão de quais mecanismos, ou propriedades específicas da supersimetria, trabalham a favor ou contra a integrabilidade.

Para tanto, aqui e nos dois próximos Capítulos, faremos uso do fato de que, na redução por campos espacialmente homogêneos, o modelo final mecânico será o ponto de partida para construirmos diretamente modelos supersimétricos, sem realizarmos a redução por campos espacialmente homogêneos de uma teoria de campos. Adotamos esta liberdade ao levar em conta duas premissas: 1) os modelos mecânicos de partida que usamos neste e nos dois próximos capítulos provêm de reduções espacialmente homogêneas da teoria de Yang-Mills já construídas na literatura; 2) supomos que a versão supersimétrica de um modelo mecânico corresponde à redução espacialmente homogênea de uma certa teoria de campos supersimétrica.

O potencial deste sistema é dado por:

$$U = c_1 x^4 + c_2 y^4 + c_3 x^2 y^2.$$

2.1 O Modelo Supersimétrico

Para uma introdução e estudo de modelos mecânicos supersimétricos numa abordagem de superespaço, referimo-nos ao trabalho na ref. [Paschoal,2004], onde conceitos e detalhes técnicos são apresentados e discutidos.

Com base nos resultados encontrados em [Paschoal,2004], a versão supersimétrica deste modelo é construída com os seguintes supercampos bosônicos [Paschoal,2004]:

$$X = x(t) + i\theta\lambda_x(t),$$

$$Y = y(t) + i\theta\lambda_y(t),$$

e com os supercampos fermiônicos:

$$\Psi = \psi(t) + \theta f_1(t),$$

$$Z = \zeta(t) + \theta f_2(t),$$

$$P = \rho(t) + \theta f_3(t).$$

onde $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são componentes auxiliares.

O termo cinético nos supercampos é dado por:

$$Cine = \alpha_1 \dot{X}DX + \alpha_2 \dot{Y}DY + \alpha_3 \Psi D\Psi + \alpha_4 ZDZ + \alpha_5 PDP.$$

Após a expansão dos termos cinéticos em componentes, temos:

$$\begin{aligned} L_{Cine} = & i\alpha_1 \left(\frac{d}{dt}x(t) \right) \lambda_x(t) + i\alpha_3 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) \theta\psi(t) \right) + \\ & - \alpha_1 \left(\theta \frac{d}{dt}\lambda_x(t) \lambda_x(t) \right) + i\alpha_2 \left(\frac{d}{dt}y(t) \right) \lambda_y(t) + \\ & - i\alpha_5 \left(\theta \frac{d}{dt}\rho(t) \rho(t) \right) + \alpha_2 \left(\lambda_y(t) \frac{d}{dt}\lambda_y(t) \theta \right) + \\ & + \alpha_3 f_1(t) \psi(t) - i\alpha_1 \left(\frac{d}{dt}x(t) \right)^2 \theta + \alpha_3 f_1^2(t) \theta + \\ & + i\alpha_4 \left(\theta \zeta(t) \frac{d}{dt}\zeta(t) \right) + \alpha_4 f_2(t) \zeta(t) + \\ & - i\alpha_2 \left(\frac{d}{dt}y(t) \right)^2 \theta + \alpha_4 f_2^2(t) \theta + \alpha_5 f_3(t) \rho(t) + \alpha_5 f_3^2(t) \theta \end{aligned}$$

Dado o seguinte potencial em supercampos:

$$Pot = k_1 XX\Psi + k_2 YYZ + k_3 XYP,$$

a sua forma em componentes é dada a seguir:

$$\begin{aligned} L_{inte} = & k_1 x^2(t) \psi(t) + k_1 x^2(t) f_1(t) \theta - 2ik_1 x(t) (\theta\psi(t) \lambda_x(t)) + \\ & - 2ik_2 y(t) (\lambda_y(t) \theta\zeta(t)) - ik_3 y(t) (\theta\rho(t) \lambda_x(t)) + \\ & + k_2 y^2(t) \zeta(t) + k_2 y^2(t) f_2(t) \theta - ik_3 x(t) (\lambda_y(t) \theta\rho(t)) + \\ & + k_3 x(t) y(t) \rho(t) + k_3 x(t) y(t) f_3(t) \theta. \end{aligned}$$

Temos que, após a integração em θ , a Lagrangiana toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
L = & k_3 x(t) y(t) f_3(t) - i\alpha_5 \left(\frac{d}{dt} \rho(t) \rho(t) \right) - ik_3 y(t) (\rho(t) \lambda_x(t)) + \\
& + \alpha_4 (f_2(t))^2 + 2ik_2 y(t) (\lambda_y(t) \zeta(t)) - i\alpha_3 \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \psi(t) \right) + \\
& + \alpha_5 (f_3(t))^2 + i\alpha_4 \left(\zeta(t) \frac{d}{dt} \zeta(t) \right) - i\alpha_2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \\
& - i\alpha_1 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + ik_3 x(t) (\lambda_y(t) \rho(t)) - 2ik_1 x(t) (\psi(t) \lambda_x(t)) + \\
& - \alpha_1 \left(\frac{d}{dt} \lambda_x(t) \lambda_x(t) \right) + \alpha_2 \left(\lambda_y(t) \frac{d}{dt} \lambda_y(t) \right) + \\
& + k_2 (y(t))^2 f_2(t) + \alpha_3 (f_1(t))^2 + k_1 (x(t))^2 f_1(t)
\end{aligned}$$

As equações de Euler-Lagrange para f_1 , f_2 e f_3 nos dão respectivamente,

$$f_1 = -1/2 \frac{k_1 x^2(t)}{\alpha_3},$$

$$f_2 = -1/2 \frac{k_2 y^2(t)}{\alpha_4},$$

$$f_3 = -1/2 \frac{k_3 x(t) y(t)}{\alpha_5}.$$

Após substituir os termos auxiliares, temos a seguinte Lagrangiana para as coordenadas físicas::

$$\begin{aligned}
L = & -1/4 \frac{k_3^2 x^2(t) y^2(t)}{\alpha_5} - i\alpha_5 \left(\frac{d}{dt} \rho(t) \rho(t) \right) + 2ik_2 y(t) (\lambda_y(t) \zeta(t)) + \\
& -1/4 \frac{k_2^2 y^4(t)}{\alpha_4} - i\alpha_3 \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \psi(t) \right) - 2ik_1 x(t) (\psi(t) \lambda_x(t)) + \\
& + i\alpha_4 \left(\zeta(t) \frac{d}{dt} \zeta(t) \right) - ik_3 y(t) (\rho(t) \lambda_x(t)) + \\
& - i\alpha_1 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + ik_3 x(t) (\lambda_y(t) \rho(t)) - i\alpha_2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \\
& - \alpha_1 \left(\frac{d}{dt} \lambda_x(t) \lambda_x(t) \right) + \alpha_2 \left(\lambda_y(t) \frac{d}{dt} \lambda_y(t) \right) - 1/4 \frac{k_1^2 x^4(t)}{\alpha_3}.
\end{aligned}$$

Fixando os α_i ' como

$$\alpha_1 = 1/2 iM, \alpha_2 = 1/2 iM, \alpha_3 = 1/2 M_\psi, \alpha_4 = 1/2 M_\zeta, \alpha_5 = 1/2 M\rho$$

temos:

$$\begin{aligned}
L = & -1/2 \frac{k_3^2 x^2(t) y^2(t)}{M\rho} - 1/2 iM\rho \left(\frac{d}{dt} \rho(t) \rho(t) \right) + 2ik_2 y(t) \lambda_y(t) \zeta(t) + \\
& - 1/2 \frac{k_2^2 y^4(t)}{M_\zeta} - 1/2 iM_\psi \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \psi(t) \right) - 2ik_1 x(t) \psi(t) \lambda_x(t) + \\
& + 1/2 iM_\zeta \left(\zeta(t) \frac{d}{dt} \zeta(t) \right) - ik_3 y(t) \rho(t) \lambda_x(t) + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \\
& + ik_3 x(t) \lambda_y(t) \rho(t) + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 1/2 iM \left(\frac{d}{dt} \lambda_x(t) \lambda_x(t) \right) + \\
& + 1/2 iM \left(\lambda_y(t) \frac{d}{dt} \lambda_y(t) \right) - 1/2 \frac{k_1^2 x^4(t)}{M_\psi},
\end{aligned}$$

com setor bosônico dado por:

$$L_{bos} = 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 1/2 \frac{k_3^2 x^2(t) y^2(t)}{M\rho} - 1/2 \frac{k_2^2 y^4(t)}{M_\zeta} - 1/2 \frac{k_1^2 x^4(t)}{M_\psi}.$$

2.2 Análise de Integrabilidade para o Setor Bosônico

De acordo com os critérios de integrabilidade para o potencial quártico[Lakshmanan e Sahadevan,19

$$V_{quart} = Ax^2 + By^2 + ax^4 + by^4 + dx^2y^2, \quad (2.2.1)$$

temos a seguinte tabela com os casos integráveis:

| | |
|---|---------|
| a) $A = B, \quad a = b, \quad d = 6a.$ | (2.2.2) |
| b) $A, \quad B, \quad a = b, \quad d = 2a.$ | |
| c) $A = 4B, \quad a = 16b, \quad d = 12a.$ | |
| d) $A = 4B, \quad a = 8b, \quad d = 6b.$ | |
| e) $d = 0 \quad (trivial).$ | |

O nosso Lagrangiano,

$$L_{bos} = 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 1/2 \frac{k_3^2 x^2(t) y^2(t)}{M_\rho} - 1/2 \frac{k_2^2 y^4(t)}{M_\zeta} - 1/2 \frac{k_1^2 x^4(t)}{M_\psi}$$

que inclui o caso particular do potencial quártico e que possui casos não-trivialmente integráveis correpondendo aos itens a) e b) abaixo, que toma as seguintes possíveis formas para o nosso modelo:

a)

$$k_1 = k_1, \quad M_\psi = M_\psi, \quad k_3 = k_3, \quad M_\rho = \frac{1}{6} k_3^2 \frac{M_\psi}{k_1^2}, \quad (2.2.3)$$

b)

$$k_1 = k_1, \quad M_\psi = M_\psi, \quad k_3 = k_3, \quad M_\rho = \frac{1}{2} k_3^2 \frac{M_\psi}{k_1^2}. \quad (2.2.4)$$

2.3 Análise de Integrabilidade Considerando a Simetria de Paridade Imposta a todo o Modelo

Como o potencial de partida era invariante sob transformações de paridade, não houve a necessidade de verificarmos se o mesmo obedecia a esta simetria. Nesta seção, imporemos esta simetria ao modelo como um todo, e verificaremos até que ponto a simetria de paridade, também imposta ao setor fermiônico, afeta a integrabilidade do setor bosônico.

Para esta análise trabalharemos diretamente no superespaço fazendo o estudo no potencial em supercampos do nosso modelo supersimétrico:

$$L_{int} = k_1 X X \Psi + k_2 Y Y Z + k_3 X Y P.$$

Este potencial em supercampos possui simetria de paridade nos seguintes casos:

$$\{X, \Psi, -Y, -Z, -P\} \text{ ou } \{X, \Psi, Y, -Z, P\}$$

com

$$k_1 \neq 0, k_2 = 0, k_3 \neq 0,$$

o que resulta no seguinte Lagrangiano não-integrável para o setor bosônico:

$$L_{bos} = 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 1/2 \frac{k_3^2 x^2(t) y^2(t)}{M \rho} - 1/2 \frac{k_1^2 x^4(t)}{M \psi};$$

$$\text{ou } \{X, \Psi, -Y, -Z, P\} \text{ ou } \{X, \Psi, Y, -Z, -P\}$$

com

$$k_1 \neq 0, k_2 = 0, k_3 = 0,$$

que resulta no seguinte Lagrangiano integrável para o setor bosônico:

$$L_{bos} = 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 1/2 \frac{k_1^2 x^4(t)}{M\psi};$$

$$\text{ou } \{X, \Psi, -Y, Z, -P\} \text{ ou } \{X, \Psi, Y, Z, P\}$$

com

$$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0.$$

o que, neste caso, nos dá o Lagrangiano do setor bosônico com todos os parâmetros não-nulo. Dependendo da escolha destes, o sistema pode admitir integrabilidade e não-integrabilidade:

$$L_{bos} = 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 1/2 \frac{k_3^2 x^2(t) y^2(t)}{M\rho} - 1/2 \frac{k_2^2 y^4(t)}{M_\zeta} - 1/2 \frac{k_1^2 x^4(t)}{M\psi};$$

$$\text{ou, finalmente, } \{X, \Psi, -Y, Z, P\} \text{ ou } \{X, \Psi, Y, Z, -P\},$$

com

$$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 = 0,$$

que resulta no seguinte Lagrangiano integrável para o setor bosônico:

$$L_{bos} = 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 1/2 \frac{k_2^2 y^4(t)}{M_\zeta} - 1/2 \frac{k_1^2 x^4(t)}{M\psi}.$$

2.4 Conclusões

Neste capítulo, estudamos o papel que a supersimetria $N = 1$ desempenha na versão mecânica da teoria de Yang-Mills. Sabemos da literatura que esta exhibe tanto regimes integráveis quanto não-integráveis onde o comportamento caótico está presente. Após contruirmos a versão supersimétrica, apresentamos as condições de integrabilidade para o setor bosônico. Cabe lembrar que, como estamos tratando de um modelo com supersimetria $N = 1$, o setor bosônico é igual ao modelo original não-supersimétrico. Em seguida, verificamos até que ponto o setor fermiônico influenciava a integrabilidade do setor bosônico.

Esta análise foi realizada levando em consideração o fato de que o setor bosônico era invariante sob transformação de paridade, e impusemos esta simetria ao setor fermiônico para verificar como este afetaria os parâmetros no setor bosônico. Na verdade, a influência do setor fermiônico foi estudada ao verificar se todo o modelo supersimétrico era invariante de paridade. Os resultados mostraram que a supersimetria $N = 1$ não limitou mais as possibilidades de integrabilidade do que aquelas já observadas para o setor bosônico. Quanto à existência de caos, a supersimetria não ampliou a possibilidade de regime regular. O primeiro e terceiro modelos integráveis que surgem após a análise de paridade imposta ao setor fermiônico correspondem a casos triviais (não-interagentes) e, portanto, de nenhum interesse físico. Já o segundo modelo corresponde exatamente ao modelo original não-supersimétrico, onde, conforme apresentado no Capítulo 1, existe uma riqueza de possibilidades para dinâmica caótica, assim como para o comportamento regular.

Após estudarmos um modelo com supersimetria mínima, no próximo capítulo, faremos o nosso estudo em um modelo planar com supersimetria $N = 2$.

Capítulo 3

Integrabilidade e Caos em um Modelo Planar Supersimétrico $N=2$

O sistema que escolhemos trabalhar é construído como uma supersimetria estendida $N=2$, dimensionalmente reduzida da teoria de Yang-Mills $SU(2)$ que surge quando campos espacialmente homogêneos são considerados. Um Ansatz particular nos potenciais de gauge é adotado no esquema de redução dimensional, tal que somente dois graus de liberdade sobrevivem no limite mecânico. Dedicamos especial atenção à simetria de paridade, na medida em que vemos esta última como uma invariância das interações envolvidas nos sistemas que estaremos considerando. Nossa análise de integrabilidade irá, portanto, estar centrada em nossas considerações das invariâncias de supersimetria e paridade. Elas proporcionam especiais condições ao espaço de parâmetros tal que, ao invés de ter que tomar escolhas especiais destes parâmetros, como normalmente é feito, invocamos estas duas invariâncias para naturalmente restringir e selecionar possibilidades no espaço de parâmetros. Como uma questão de fato, antecipamos que a paridade pode aparecer em duas versões para sistemas planares, e este ponto será apropriadamente levado em conta

aqui.

Verificamos que, com a introdução da supersimetria, além do modelo de Yang-Mills, recuperamos também o modelo de Henon-Heiles e, considerando somente o setor bosônico, constatamos que a supersimetria impõe mais vínculos à integrabilidade do que o caso não-supersimétrico.

3.1 O modelo Bosônico usual com considerações de Simetria de Paridade

Adotamos o potencial polinomial mais geral de quarta ordem para dois graus de liberdade, descritos pelas variáveis x e y :

$$V = C_1x^4 + C_2y^4 + C_3x^3y + C_4xy^3 + C_5x^2y^2 + C_6x^3 + C_7y^3 + C_8x^2y + C_9xy^2 + C_{10}x^2 + C_{11}y^2 + C_{12}xy. \quad (3.1.1)$$

Este pode ser considerado como um tipo de protopotential usado para construir um potencial polinomial não-supersimétrico geral até a quarta ordem. Limitamos-nos à quarta ordem, porque temos em mente modelos mecânicos derivados de teorias de Yang-Mills e estes, como sabemos, apresentam vértices de auto-interação de potências três e quatro. Considerando que estamos interessados em modelos realísticos, impomos simetria de paridade, que é respeitada nos modelos mecânicos e eletromagnéticos. Não estaremos lidando com modelos baseados em simetria quiral.

Para implementar paridade no modelo, temos que considerar que há duas possibilidades, já que estamos em um espaço bi-dimensional:

$$\text{paridade} - x : \begin{array}{l} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow y \end{array} \quad (3.1.2)$$

ou

$$\text{paridade } -y : \begin{array}{l} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{array} \quad (3.1.3)$$

No primeiro caso, o potencial resultante é

$$V = C_1x^4 + C_2y^4 + C_5x^2y^2 + C_7y^3 + C_8x^2y + C_{10}x^2 + C_{11}y^2. \quad (3.1.4)$$

Este potencial se parece com a soma de dois potenciais bem conhecidos:

Um potencial quártico (tipo Yang-Mills)

$$V_{YM} = Ax^2 + By^2 + ax^4 + by^4 + dx^2y^2, \quad (3.1.5)$$

que é conhecido por ser integrável nos seguintes casos[Lakshmanan e Sahadevan,1993]:

| | |
|---|--|
| a) $A = B, \quad a = b, \quad d = 6a.$ | que no nosso caso é $C_{10} = C_{11}, C_1 = C_2, C_5 = 6C_1.$ |
| b) $A, \quad B, \quad a = b, \quad d = 2a.$ | que no nosso caso é $C_{10}, C_{11}, C_1 = C_2, C_5 = 2C_1.$ |
| c) $A = 4B, \quad a = 16b, \quad d = 12a.$ | que no nosso caso é $C_{10} = 4C_{11}, C_1 = 16C_2, C_5 = 12C_1$ |
| d) $A = 4B, \quad a = 8b, \quad d = 6b.$ | que no nosso caso é $C_{10} = C_{11}, C_1 = C_2, C_5 = 6C_1.$ |
| e) $d = 0$ (<i>trivial</i>) | que no nosso caso é $C_5 = 0.$ |

e o potencial de Henon-Heiles:

$$V_{HH} = \frac{1}{2} (Ax^2 + By^2) + ax^2y - \frac{1}{3}by^3. \quad (3.1.6)$$

Este exhibe os casos integráveis conhecidos[Lakshmanan e Sahadevan,1993]:

| | |
|------------------------------------|---|
| a) $A = B, \quad a = -b.$ | que no nosso caso é $C_{10} = C_{11}, \quad C_7 = \frac{1}{3}C_8.$ |
| b) $A, \quad B, \quad 6a = -b.$ | que no nosso caso é $C_{10}, \quad C_{11}, \quad C_7 = 2C_8.$ |
| c) $16A, \quad B, \quad 16a = -b.$ | que no nosso caso é $C_{10} = 16C_{11}, \quad C_7 = \frac{16}{3}C_8.$ |
| d) $a = 0$ (<i>trivial</i>) | que no nosso caso é $C_8 = 0$ |

3.2 O modelo supersimétrico

Agora, consideraremos um modelo mecânico $N = 2$ supersimétrico[Junker,1996], definido como segue: Os dois parâmetros Grassmannianos (complexos) do superespaço serão denotados por θ e $\bar{\theta}$. As duas coordenadas reais de uma partícula planar, x e y , são as componentes bosônicas das coordenadas do supercampo, as quais são determinadas por

$$X(t, \theta, \bar{\theta}) = x(t) + \Theta^\dagger \gamma_1 \Lambda(t) + \Lambda^\dagger(t) \gamma_1 \Theta - \frac{1}{2} \Theta^\dagger \gamma_3 \Theta f_1(t), \quad (3.2.7)$$

e

$$Y(t, \theta, \bar{\theta}) = y(t) + \Theta^\dagger \gamma_2 \Xi(t) + \Xi^\dagger(t) \gamma_2 \Theta - \frac{1}{2} \Theta^\dagger \gamma_3 \Theta f_2(t), \quad (3.2.8)$$

com

$$\Theta \equiv \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}, \quad \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.9)$$

onde todos os λ 's e ξ 's são variáveis Grassmannianas. Os γ_j 's são as matrizes de Dirac que correspondem ao espaço Euclidiano bi-dimensional sob consideração, e elas podem ser escolhidas para coincidir com as matrizes de Pauli: $\gamma_i \equiv \sigma_i$ e $\gamma_3 \equiv -i\gamma_1\gamma_2 = \sigma_3$. Θ é o espinor de Majorana que, nesta representação particular das matrizes- γ , toma a forma dada em(3.2.9), onde a "barra" representa conjugação complexa. De fato:

$$\Psi^c = C\Psi^* = \Psi.(\text{Majorana.}) \quad (3.2.10)$$

$$C\gamma_i^t C^{-1} = \gamma_i \text{ (Conj. de carga)}$$

$$C\gamma_1 = \gamma_1 C. \quad (3.2.11)$$

$$-C\gamma_2 = \gamma_2 C.$$

$$[C, \gamma_1] = 0. \quad (3.2.12)$$

$$\{C, \gamma_2\} = 0.$$

$$C = \gamma_1. \quad (3.2.13)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.14)$$

$$\Psi_1 = \Psi_2^*$$

$$\Psi_2 = \Psi_1^*$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Por outro lado, Λ e Ξ são férmions de Dirac. Então, Eqs. (3.2.7–3.2.8) conduzem a:

$$X = x + \theta (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) - \bar{\theta} (\bar{\lambda}_1 - \lambda_2) + \theta \bar{\theta} f_1 \quad (3.2.16)$$

e

$$Y = y + i\theta (\xi_1 - \bar{\xi}_2) + i\bar{\theta} (\bar{\xi}_1 - \xi_2) + \theta \bar{\theta} f_2. \quad (3.2.17)$$

É notável a observação que é precisamente a combinação $(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)$ que leva aos graus fermiônicos de liberdade de X . Por outro lado, como para Y , seus graus de liberdade espinoriais ficam todos acomodados na combinação $(\xi_1 - \bar{\xi}_2)$.

As derivadas covariantes de supersimetria são dadas abaixo:

$$D \equiv \partial_{\bar{\theta}} - i\theta \partial_t, \quad (3.2.18)$$

$$\bar{D} \equiv \partial_{\theta} - i\bar{\theta} \partial_t, \quad (3.2.19)$$

que satisfazem:

$$D^2 = 0, \quad (3.2.20)$$

$$\bar{D}^2 = 0, \quad (3.2.21)$$

$$\{D, \bar{D}\} = -2i\partial_t. \quad (3.2.22)$$

A super-ação a ser considerada contém, além dos termos cinéticos, o superpotential mais geral, até terceira ordem nas coordenadas do supercampo (isto implica um potencial de quarta-ordem em termos das coordenadas físicas),

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} : \left\{ \frac{M}{2} [DX\bar{D}X + DY\bar{D}Y] + U(X, Y) \right\}, \quad (3.2.23)$$

onde o primeiro termo dá origem aos termos cinéticos e o superpotential $U(X, Y)$ adotado é dado por:

$$U(X, Y) = k_1 X^2 Y + k_2 XY^2 + k_3 X^2 + k_4 Y^2 + k_5 XY + k'_1 X^3 + k'_2 Y^3, \quad (3.2.24)$$

os k 's sendo constantes reais arbitrárias. Como o termo em XY pode ser cancelado por meio de uma apropriada transformação linear (uma rotação no plano X - Y), então k_5 pode ser fixado como zero, $k_5 = 0$, sem perda de generalidade. De maneira semelhante, os termos lineares em X ou em Y não foram considerados, na medida que eles podem ser eliminados por uma redefinição de translação, $X' = X + \text{const}$ e $Y' = Y + \text{const}'$. As equações de movimento podem ser usadas para eliminar os graus de liberdade não-dinâmicos f_j e, assim, a super-ação, $S = \int dt L$ conduz ao seguinte Lagrangiano, onde

termos quárticos no potencial estão presentes:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{M\dot{x}^2}{2} + iM \left(\bar{\lambda}_j \dot{\lambda}_j + \bar{\xi}_j \dot{\xi}_j - \bar{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_1 - \bar{\xi}_1 \dot{\xi}_2 - \xi_2 \dot{\xi}_1 \right) - \frac{k_1^2 + 9k_1'^2}{2M} x^4 - \frac{k_2^2 + 9k_2'^2}{2M} y^4 + \\
& * - \frac{6k_1 k_1' + 2k_1 k_2}{M} x^3 y - \frac{6k_2 k_2' + 2k_1 k_2}{M} x y^3 + \\
& * - \frac{2k_1^2 + 2k_2^2 + 3k_1' k_2 + 3k_1 k_2'}{M} x^2 y^2 - \frac{6k_3 k_1'}{M} x^3 - \frac{6k_4 k_2'}{M} y^3 + \\
& * - \frac{4k_1 k_3 + 2k_1 k_4}{M} x^2 y - \frac{4k_2 k_4 + 2k_2 k_3}{M} x y^2 - \frac{2k_3^2}{M} x^2 - \frac{2k_4^2}{M} y^2 + \\
& * + [2ik_1 (\lambda_1 \bar{\xi}_1 - \lambda_1 \xi_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\xi}_1 + \bar{\lambda}_2 \xi_2 + \bar{\lambda}_1 \xi_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{\xi}_2 - \lambda_2 \xi_1 + \lambda_2 \bar{\xi}_2) + \\
& * \quad - 2k_2 (\xi_1 \bar{\xi}_1 - \xi_1 \xi_2 - \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 \xi_2) - 6k_1' (\lambda_1 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \lambda_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \lambda_2)] x \\
& * + [2ik_2 (\bar{\lambda}_1 \xi_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{\xi}_2 - \lambda_2 \xi_1 + \lambda_2 \bar{\xi}_2 + \lambda_1 \bar{\xi}_1 - \lambda_1 \xi_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\xi}_1 + \bar{\lambda}_2 \xi_2) + \\
& * \quad - 2k_1 (\lambda_1 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \lambda_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \lambda_2) - 6k_2' (\xi_1 \bar{\xi}_1 - \xi_1 \xi_2 - \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 \xi_2)] y \\
& * - 2k_3 (\lambda_1 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \lambda_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \lambda_2) - 2k_4 (\xi_1 \bar{\xi}_1 - \xi_1 \xi_2 - \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 \xi_2). \tag{3.2.25}
\end{aligned}$$

Nas próximas seções, as condições de integrabilidade para este Lagrangiano serão discutidas, e a influência da supersimetria e da invariância de paridade será realçada.

3.3 O setor bosônico e sua integrabilidade.

A aplicação direta do teste de Painlevé diretamente para o setor bosônico não é, de fato, um procedimento bom para a resolução dos sistemas que aparecem na análise, uma vez que se tornam muito complexos.

Nesta seção, levaremos em conta a observação de que o modelo original não é invariante sob as duas classes de transformações de paridade. Isto pode fixar um ambiente mais formal.

Assim, em uma primeira tentativa, imporemos a simetria de paridade, que é uma simetria discreta somente no setor bosônico da teoria e, depois disso, verificaremos como os vínculos impostos por esta invariância afetam a integrabilidade do modelo.

Adotando invariância sob a paridade- x , temos os seguintes vínculos nos coeficientes do potencial:

$$C_3 = (6k_1k'_1 + 2k_1k_2) = 0, \quad (3.3.26)$$

$$C_4 = (6k_2k'_2 + 2k_1k_2) = 0, \quad (3.3.27)$$

$$C_6 = (6k_3k'_1) = 0, \quad (3.3.28)$$

$$C_9 = (4k_2k_4 + 2k_2k_3) = 0, \quad (3.3.29)$$

onde os C 's acima são os coeficientes do setor bosônico do potencial original para os quais a simetria de paridade é quebrada.

3.3.1 Parâmetros que sobrevivem aos vínculos de paridade

Resolvendo o sistema de condições para $k_1, k_2, k'_1, k'_2, k_3$ e k_4 , nós obtemos como solução as seguintes possibilidades:

$$\{k'_1 = k'_1, k'_2 = k'_2, k_4 = k_4, k_3 = 0, k_2 = 0, k_1 = 0\}, \quad (3.3.30)$$

$$\{k_1 = k_1, k'_2 = k'_2, k_4 = k_4, k_3 = k_3, k'_1 = 0, k_2 = 0\},$$

$$\{k'_2 = 0, k'_1 = k'_1, k_2 = k_2, k_3 = 0, k_1 = 0, k_4 = 0\},$$

$$\{k'_1 = k'_1, k_1 = k_1, k_2 = -3k'_1, k'_2 = -1/3k_1, k_3 = 0, k_4 = 0\},$$

$$\{k'_2 = 0, k_2 = k_2, k_3 = k_3, k'_1 = 0, k_4 = -1/2k_3, k_1 = 0\}.$$

Para estudar as conseqüências destas soluções, apresentaremos na próxima subseção o teste do Painlevé, que foi muito usado na procura por sistemas integráveis, por ser um algoritmo de ampla aplicação.

3.4 Aplicando o teste de Painlevé

Para o primeiro caso $\{k'_1 = k'_1, k'_2 = k'_2, k_4 = k_4, k_3 = 0, k_2 = 0, k_1 = 0\}$, temos o seguinte potencial:

$$Pot_1 = \frac{9}{2} \frac{k'_1{}^2}{M} x^4 + \frac{9}{2} \frac{k'_2{}^2}{M} y^4 + 6k_4 \frac{k'_2}{M} y^3 + 2 \frac{k_4^2}{M} y^2. \quad (3.4.31)$$

E, aplicando o teste de Painlevé, obtemos quatro ramos referentes a sistemas desacoplados que passam no teste.

Para o segundo caso $\{k_2 = 0, k'_1 = 0, k'_2 = k'_2, k_4 = k_4, k_1 = k_1, k_3 = k_3\}$, temos o seguinte potencial:

$$Pot_2 = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + \frac{9}{2} \frac{k'_2{}^2}{M} y^4 + \frac{(2k_1^2 + 3k_1 k'_2)}{M} x^2 y^2 + 6k_4 \frac{k'_2}{M} y^3 + \frac{(4k_1 k_3 + 2k_1 k_4)}{M} x^2 y + 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + 2 \frac{k_4^2}{M} y^2. \quad (3.4.32)$$

Com potências dominantes:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1.$$

E quatro ramos com as seguintes expressões para ressonâncias:

$$-1, 4, \frac{(2k_1 - 3k'_2)}{k_1}, \frac{(3k'_2 + k_1)}{k_1}, \quad (3.4.33)$$

que fornecem ressonâncias como inteiros, se fixamos $k_1, k'_2 = n \frac{1}{3} k_1$, onde $n = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Para o caso $n = -1$, não é possível determinar as ressonâncias.

Para o caso $n = 0$, temos o seguinte potencial:

$$Pot_3 = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + 2 \frac{k_1^2}{M} x^2 y^2 + \frac{(4k_1 k_3 + 2k_1 k_4)}{M} x^2 y + 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + 2 \frac{k_4^2}{M} y^2, \quad (3.4.34)$$

mas este não cumpre o teste de Painlevé, pois surge uma condição de compatibilidade que não pode ser satisfeita:

$$-4i\sqrt{2}(18k_1^2 x_1^2 - 5k_4^2 - 4k_3 k_4) = 0, \quad (3.4.35)$$

pois esta igualdade é satisfeita se k_1, k_3 e $k_4 = 0$ que, no caso, anula o potencial ou no caso $k_1 = 0$, e $k_4 = -\frac{4}{5}k_3$ o que nos leva ao seguinte potencial livre:

$$Pot_4 = 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + \frac{32}{25} \frac{k_3^2}{M} y^2, \quad (3.4.36)$$

e portanto um caso integrável trivial.

Para o caso $n = 1$, temos o seguinte potencial:

$$Pot_5 = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} y^4 + 3 \frac{k_1^2}{M} x^2 y^2 + 2k_4 \frac{k_1}{M} y^3 + \frac{(4k_1 k_3 + 2k_4 k_1)}{M} x^2 y + 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + 2 \frac{k_4^2}{M} y^2, \quad (3.4.37)$$

e obtemos agora, quatro, ramos com as seguintes ressonâncias:

$$-1, 1, 2, 4,$$

mas, com a seguinte condição de compatibilidade:

$$-2(-k_4 + k_3)M = 0 \quad (3.4.38)$$

a ser cumprida na ressonância $j=1$ do primeiro e do segundo ramo.

Fixando $k_3 = k_4$, o sistema se torna compatível e passa no teste de Painlevé, com dois ramos e com o potencial agora escrito como abaixo:

$$Pot_6 = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} y^4 + 3 \frac{k_1^2}{M} x^2 y^2 + 2 \frac{k_3 k_1}{M} y^3 + 6 k_3 \frac{k_1}{M} x^2 y + 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + 2 \frac{k_3^2}{M} y^2, \quad (3.4.39)$$

com potências dominantes:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1.$$

Os valores das ressonâncias para os dois ramos são:

$$-1, 1, 2, 4.$$

E, para o primeiro ramo, os coeficientes dos termos dominantes são:

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{iM}{k_1}, y_0 = \frac{1}{2} i \frac{M}{k_1}. \quad (3.4.40)$$

Para o segundo ramo, os coeficientes são:

$$x_0 = -\frac{1}{2} \frac{iM}{k_1}, y_0 = -\frac{1}{2} i \frac{M}{k_1}. \quad (3.4.41)$$

No primeiro ramo, os coeficientes indeterminados são:

$$y_1, y_2 \text{ e } y_4. \quad (3.4.42)$$

E os coeficientes indeterminados do segundo ramo são:

$$y_1, y_2 \text{ e } x_4, \quad (3.4.43)$$

Para o caso $n = 2$, temos o seguinte potencial:

$$Pot_7 = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + 2 \frac{k_1^2}{M} y^4 + 4 \frac{k_1^2}{M} x^2 y^2 + 4k_4 \frac{k_1}{M} y^3 + \frac{(4k_1 k_3 + 2k_4 k_1)}{M} x^2 y + 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + 2 \frac{k_4^2}{M} y^2. \quad (3.4.44)$$

Não foi possível determinar os termos dominantes.

Lembramos que a variável t_0 é a quarta quantidade indeterminada, correspondendo à ressonância -1 .

Assim, o sistema, que é de quarta ordem, possui quatro coeficientes arbitrários e, portanto, é integrável.

Para o terceiro caso $\{k_3 = 0, k_4 = 0, k_2 = k_2, k_1 = 0, k'_1 = k'_1, k'_2 = 0\}$, temos o seguinte potencial:

$$Pot_8 = \frac{9}{2} \frac{k_1'^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} y^4 + \frac{(2k_2^2 + 3k_1' k_2)}{M} x^2 y^2; \quad (3.4.45)$$

as expressões para ressonâncias, neste caso, são:

$$-1, 4, \frac{(3k_1' + k_2)}{k_2}, -\frac{(-2k_2 + 3k_1')}{k_2}, \quad (3.4.46)$$

que fornecem ressonâncias como inteiros se fixamos $k_2, k'_1 = n \frac{1}{3} k_2$ onde $n = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Para o caso $n = -1$, o sistema passa no teste com o seguinte potencial:

$$Pot_9 = \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} y^4 + \frac{k_2^2}{M} x^2 y^2 \quad (3.4.47)$$

com potências dominantes:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1,$$

e os valores das ressonâncias para os dois ramos:

$$0, -1, 3, 4. \quad (3.4.48)$$

E, para o primeiro ramo, os coeficientes dos termos dominantes são:

$$x_0 = \frac{\sqrt{(-M^2 - k_2^2 y_0^2)}}{k_2}, y_0 = y_0; \quad (3.4.49)$$

para o segundo ramo, os coeficientes são:

$$x_0 = -\frac{\sqrt{(-M^2 - k_2^2 y_0^2)}}{k_2}, y_0 = y_0. \quad (3.4.50)$$

No primeiro ramo, os coeficientes indeterminados são:

$$y_0, x_3 \text{ e } y_4. \quad (3.4.51)$$

E os coeficientes indeterminados do segundo ramo são:

$$y_0, x_3 \text{ e } y_4. \quad (3.4.52)$$

Para o caso $n = 0$, o sistema não passa no teste com o seguinte potencial:

$$Pot_{10} = \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} y^4 + 2 \frac{k_2^2}{M} x^2 y^2, \quad (3.4.53)$$

pois surge a seguinte condição de compatibilidade:

$$18ik_2^2y_1^2 = 0. \quad (3.4.54)$$

Esta equação zera se k_2 for igual a zero, mas neste caso o potencial deixa de existir.

Para o caso $n = 1$, o sistema passa no teste com o seguinte potencial:

$$Pot_{11} = \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} y^4 + 3 \frac{k_2^2}{M} x^2 y^2, \quad (3.4.55)$$

e com potências dominantes iguais:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1,$$

e ressonâncias:

$$-1, 1, 2, 4$$

nos dois ramos.

E, para o primeiro ramo, os coeficientes dos termos dominantes são:

$$x_0 = -\frac{1}{2} i \frac{M}{k_2}, y_0 = -\frac{1}{2} i \frac{M}{k_2}. \quad (3.4.56)$$

Para o segundo ramo, os coeficientes são:

$$x_0 = \frac{1}{2} i \frac{M}{k_2}, y_0 = \frac{1}{2} i \frac{M}{k_2}. \quad (3.4.57)$$

No primeiro ramo, os coeficientes indeterminados são:

$$x_1, x_2 \text{ e } x_4, \quad (3.4.58)$$

e os coeficientes indeterminados do segundo ramo são:

$$y_1, y_2 \text{ e } x_4. \quad (3.4.59)$$

Para o caso $n = 2$, o sistema não passa no teste com o seguinte potencial:

$$Pot_{12} = 2\frac{k_2^2}{M}x^4 + \frac{1}{2}\frac{k_2^2}{M}y^4 + 4\frac{k_2^2}{M}x^2y^2, \quad (3.4.60)$$

pois não foi possível determinar os termos dominantes.

Para o quarto caso $\{k'_1 = k'_1, k'_2 = -1/3k_1, k_2 = -3k'_1, k_1 = k_1, k_3 = 0, k_4 = 0\}$, temos o seguinte potencial (quártico):

$$Pot_{13} = 5\frac{k_1^2}{M}x^4 + 5\frac{k_1^2}{M}y^4 + 10\frac{k_1^2}{M}x^2y^2, \quad (3.4.61)$$

com $k'_1 = k_1$ as ressonâncias neste caso são:

$$0, -1, 3, 4 \quad (3.4.62)$$

para os dois ramos.

Para o primeiro ramo, os coeficientes dos termos dominantes são:

$$x_0 = \frac{1}{10} \frac{\sqrt{(-10M^2 - 100k_1^2y_0^2)}}{k_1}, y_0 = y_0. \quad (3.4.63)$$

E para o segundo ramo, os coeficientes são:

$$x_0 = -\frac{1}{10} \frac{\sqrt{(-10M^2 - 100k_1^2 y_0^2)}}{k_1}, y_0 = y_0. \quad (3.4.64)$$

No primeiro ramo, os coeficientes indeterminados são:

$$y_0, x_3 \text{ e } y_4, \quad (3.4.65)$$

e os coeficientes indeterminados do segundo ramo são:

$$y_0, x_3 \text{ e } y_4. \quad (3.4.66)$$

Para o quinto caso $\{k'_2 = 0, k_2 = k_2, k_3 = k_3, k'_1 = 0, k_4 = -1/2k_3, k_1 = 0\}$, temos o seguinte potencial:

$$Pot_{14} = \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} y^4 + 2 \frac{k_2^2}{M} x^2 y^2 + 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + \frac{1}{2} \frac{k_3^2}{M} y^2. \quad (3.4.67)$$

Este potencial não passa no teste de Painlevé, pois surge a seguinte condição de compatibilidade:

$$-3ik_3^2 + 18ik_2^2 y_1^2 = 0, \quad (3.4.68)$$

que só é satisfeita se $k_2 = k_3 = 0$, que cancela o potencial. Portanto, este caso não passa no teste de Painlevé.

Como este potencial é do tipo quártico, é fácil verificar que o resultado desta análise de Painlevé está em acordo com as conhecidas condições de integrabilidade para este tipo de potencial.

3.5 Estudo da Integrabilidade do Setor Bosônico com simetria de Paridade imposta a todo o modelo

Como pudemos verificar na última seção, a imposição de paridade somente ao setor bosônico tornou o sistema muito mais integrável; porém, ainda é necessário determinarmos os valores de alguns parâmetros durante a análise de Painlevé para recuperarmos os casos integráveis listados acima.

Nesta seção imporemos a simetria de paridade, não só ao setor bosônico, mas a toda a teoria, e verificaremos até que ponto os vínculos que surgem nos parâmetros são capazes de tornar o modelo integrável, sem a necessidade de fixar parâmetros durante a análise de Painlevé.

3.5.1 Formulação a duas componentes do setor fermiônico

Como o modelo é clássico e não-relativístico, então é definido em um espaço bidimensional Euclidiano, E^2 , onde o grupo de covariância é $SO(2)$.

Portanto, podemos escrever:

$$\gamma^1 = \sigma_x, \tag{3.5.69}$$

$$\gamma^2 = \sigma_y, \quad (3.5.70)$$

$$\gamma_3 = -i\gamma^1\gamma^2 = \sigma_z, \quad (3.5.71)$$

tal que

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}1, \quad (3.5.72)$$

$$\{\gamma^i, \gamma_3\} = 0. \quad (3.5.73)$$

Para o espinor geral

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.5.74)$$

a ação das transformações de $SO(2)$ sobre o mesmo é dada abaixo:

$$\Psi' = e^{-\frac{i}{2}\omega\sigma_z}\Psi, \quad (3.5.75)$$

onde ω é o ângulo de rotação; portanto, $\Psi^\dagger\Psi$, é invariante. Não é necessário definir o conjugado de Dirac.¹

Agora, tentamos identificar as paridades- x -e- y no espaço espinorial. Para tanto, começamos com a equação de Dirac:

$$i\gamma^1\partial_x\Psi + i\gamma^2\partial_y\Psi = 0, \quad (3.5.76)$$

¹A representação de Majorana é dada por $\gamma_1 = \sigma_x$ e $\gamma_2 = \sigma_z$; daí, decorre que $\gamma_3 = -i\gamma_1\gamma_2 = -\sigma_y$, e espinores de Majorana, $\Psi^c = \Psi^* = \Psi$, apresentem as duas componentes reais, já que $C = 1$ nesta representação.

à qual impomos a simetria de paridade- x ,

$$\begin{aligned} \Psi(t; \vec{x}) \xrightarrow{P} \Psi'(t'; \vec{x}') &= \\ &= R\Psi(t; \vec{x}) \\ &= R\Psi(t'; -x', y'), \end{aligned} \tag{3.5.77}$$

onde R representa a matriz de paridade no espaço espinorial:

$$\begin{aligned} \gamma^1 R &= -R\gamma^1 \\ \gamma^2 R &= R\gamma^2. \end{aligned} \tag{3.5.78}$$

Então, nossa matriz de paridade pode ser escolhida como

$$R = \gamma^2, \tag{3.5.79}$$

e, portanto,

$$\Psi'(t'; \vec{x}') = \gamma^2 \Psi(t; \vec{x}) \tag{3.5.80}$$

Assim, todos os espinores, a menos de uma fase, transformam-se sob paridade por meio da matriz- γ^2 .

Considerando a outra possibilidade, a paridade- y , podemos facilmente verificar que a ação da mesma sobre espinores é representada pela matriz- γ^1 :

$$P \begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{cases} \tag{3.5.81}$$

$$\Psi \rightarrow \gamma^1 \Psi \quad . \quad (3.5.82)$$

$$\Psi'(t'; \vec{x}') \rightarrow \gamma_1 \Psi(t; \vec{x}).$$

3.5.2 Estudo de integrabilidade com vínculos de paridade do setor fermiônico

Ao incluir os vínculos ditados pela simetria de paridade- x ou $-y$ para o modelo completo (bosônico + fermiônico), propomo-nos levar a cabo a análise diretamente em termos de supercampos (3.2.7) e (3.2.8). Em lugar de seguir um longo procedimento e considerarmos todos os termos da ação em campos componentes, propomos trabalhar sem deixar o superespaço, o que tem conseqüências simplificadoras não-triviais.

A ação da paridade- x nos supercampos é determinada por

$$X \rightarrow -X \quad \text{e} \quad Y \rightarrow Y, \quad (3.5.83)$$

contanto que

$$\begin{aligned} \Theta &\rightarrow \gamma_2 \Theta, \\ \Lambda &\rightarrow \gamma_2 \Lambda, \\ \Xi &\rightarrow \gamma_2 \Xi, \\ f_1 &\rightarrow f_1, \\ f_2 &\rightarrow -f_2. \end{aligned}$$

De fato, a paridade $-x$ é implementada no espaço espinorial através da relação:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \pm \gamma_2 \Psi. \quad (3.5.84)$$

$$X = x + \Theta^\dagger \gamma_1 \Lambda + \Lambda^\dagger \gamma_1 \Theta - \frac{1}{2} \Theta^\dagger \gamma_3 \Theta f_1 \quad (3.5.85)$$

$$x \rightarrow -x. \quad (3.5.86)$$

$$X \rightarrow -X.$$

$$\Theta \rightarrow \gamma_2 \Theta.$$

$$\begin{aligned} \Theta^\dagger \gamma_1 \Lambda &\rightarrow \Theta^\dagger \gamma_2 \gamma_1 (\pm \gamma_2 \Lambda) \\ &\rightarrow \mp \Theta^\dagger \gamma_1 \Lambda. \end{aligned} \quad (3.5.87)$$

$$\Lambda \rightarrow \gamma_2 \Lambda. \quad (3.5.88)$$

$$\begin{aligned} \Theta^\dagger \gamma_3 \Theta &\rightarrow \Theta^\dagger \gamma_2 \gamma_3 \gamma_2 \Theta = -\Theta^\dagger \gamma_3 \Theta \\ &\rightarrow f_1 \mapsto f_1. \end{aligned} \quad (3.5.89)$$

$$y \rightarrow y. \quad (3.5.90)$$

$$Y \rightarrow Y.$$

$$\Theta^\dagger \gamma_2 \Xi \rightarrow \pm \Theta^\dagger \gamma_2 \Xi. \quad (3.5.91)$$

$$\Theta^\dagger \gamma_3 \Theta \rightarrow -\Theta^\dagger \gamma_3 \Theta. \quad (3.5.92)$$

$$\rightarrow f_2 \mapsto -f_2.$$

Com estas designações de paridade para os campos fermiônicos e auxiliares, as coordenadas dos supercampos se transformam sob paridade exatamente como acima. Além disso, em virtude da escolha específica de γ_2 , temos que a paridade age em $d\theta$, $d\bar{\theta}$ e as derivadas covariantes como abaixo:

$$\Theta \rightarrow \gamma_2 \Theta. \quad (3.5.93)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\theta \rightarrow -i\bar{\theta}. \quad (3.5.94)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow i\theta.$$

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\theta \partial_t \quad (3.5.95)$$

$$\rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \theta} - i(-i\bar{\theta}) \partial_t.$$

$$D \rightarrow -i \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - i\bar{\theta} \partial_t \right)$$

$$D \rightarrow -i\bar{D}. \quad (3.5.96)$$

$$\bar{D} \rightarrow iD.$$

$$d\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \mapsto \frac{\partial}{\partial (-i\bar{\theta})} \mapsto id\bar{\theta}. \quad (3.5.97)$$

$$d\theta \mapsto id\bar{\theta}. \quad (3.5.98)$$

$$d\bar{\theta} \mapsto -id\theta.$$

Portanto as derivadas covariantes de supersimetria e os elementos de volume se transformam como segue:

$$\begin{aligned} D &\rightarrow -i\bar{D}, & \bar{D} &\rightarrow iD; \\ d\theta &\rightarrow id\bar{\theta}, & d\bar{\theta} &\rightarrow -id\theta. \end{aligned}$$

Com todas estas prescrições, o elemento de volume $dt d\theta d\bar{\theta}$ recebe um sinal de menos. Isto significa que os termos cinéticos são naturalmente invariantes, mas a simetria de paridade do potencial nos obriga a fixar:

$$k_1 = k_3 = k_4 = k'_2 = 0, \quad (3.5.99)$$

podendo k_2 e k'_1 serem diferentes de zero.

Estes vínculos de parâmetros são iguais ao terceiro conjunto que achamos quando só o setor bosônico foi considerado e encontramos só dois casos integráveis: os potenciais (9) e (11), que renomeamos como abaixo:

$$Pot_{susy1-x} = \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} y^4 + \frac{k_2^2}{M} x^2 y^2, \quad (3.5.100)$$

e

$$Pot_{susy2-x} = \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{M} y^4 + 3 \frac{k_2^2}{M} x^2 y^2. \quad (3.5.101)$$

Assim, de todos os casos integráveis encontrados quando consideramos só o setor bosônico, só os dois potenciais acima preservam a paridade-x quando o modelo completo é considerado.

Por outro lado, se contemplarmos a simetria de paridade-y para todo o modelo, temos que

$$X \rightarrow X \quad \text{e} \quad Y \rightarrow -Y, \quad (3.5.102)$$

contanto que

$$\begin{aligned}
\Theta &\rightarrow \gamma_1 \Theta, \\
\Lambda &\rightarrow -\gamma_1 \Lambda, \\
\Xi &\rightarrow \gamma_1 \Xi, \\
f_1 &\rightarrow -f_1, \\
f_2 &\rightarrow f_2.
\end{aligned}$$

Também, $D \rightarrow -i\bar{D}$, $\bar{D} \rightarrow iD$, $d\theta \rightarrow id\bar{\theta}$ e $d\bar{\theta} \rightarrow -id\theta$.

Assim como no caso anterior, a invariância de paridade- y é assegurada só para aqueles monômios dos supercampos que mudam de sinal sob paridade. Isto impõe então:

$$k_2 = k_3 = k_4 = k'_1 = 0, \quad (3.5.103)$$

enquanto k_1 e k'_2 são os únicos coeficientes compatíveis com a invariância de paridade- y .

Estes vínculos nos parâmetros correspondem a um único conjunto de soluções encontrado quando só o setor bosônico é considerado com relação à paridade- y , de um modo semelhante ao que acontece para paridade- x . Só existem dois casos integráveis, que apresentamos a seguir:

$$Pot_{susy1-y} = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} y^4 + \frac{k_1^2}{M} x^2 y^2, \quad (3.5.104)$$

e

$$Pot_{susy2-y} = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} y^4 + 3 \frac{k_1^2}{M} x^2 y^2. \quad (3.5.105)$$

É importante notar que estes potenciais têm a mesma forma dos encontrados para o caso da paridade- x a menos de uma troca dos parâmetros k_2 por k_1 . Assim, de todos os casos integráveis encontrados quando só o setor de bosônico é considerado, só os dois potenciais acima conservam paridade- y se todo o modelo é analisado.

3.6 Conclusões.

Ao longo das seções anteriores, efetuamos uma análise de integrabilidade do setor bosônico do modelo supersimétrico, e verificamos o aparecimento de casos integráveis para ambos sistemas acoplados e desacoplados.

Os casos acoplados podem ser classificados em dois tipos: um potencial do tipo quártico e um potencial que é funcionalmente a superposição de um potencial quártico e de Henon-Heiles.

Ao contrário da situação onde impomos a simetria de paridade à ação completa (interações bosônicas e fermiônicas) e onde os potenciais gerados são totalmente integráveis (sem a necessidade de fixar vínculos de integrabilidade), o caso no qual é imposta a simetria de paridade somente ao setor bosônico só gera potenciais integráveis depois que levarmos em conta os vínculos que aparecem no curso de análise de Painlevé. Isto significa que, se estes vínculos não são cumpridos, estaremos lidando com potenciais não-integráveis e então com a possibilidade de caos.

Para os casos onde os potenciais têm a forma quártica, não há necessidade de fazermos uma análise de caos pois esta já foi discutida na literatura à que previamente nos remetemos.

Os casos para os quais os potenciais são dados pela superposição de um potencial de foma quártica e de Henon-Heiles estão em consideração e, em um trabalho futuro, informaremos os resultados de uma análise completa [de Assis et al,2005:4]. Porém, nesta seção, daremos um exemplo para ilustrar como este tipo de potencial não-integrável admite transição ordem-caos usando o potencial número 7 de Seção(3.4):

$$Pot_7 = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{M} x^4 + 2 \frac{k_1^2}{M} y^4 + 4 \frac{k_1^2}{M} x^2 y^2 + 4k_4 \frac{k_1}{M} y^3 + \frac{(4k_1 k_3 + 2k_4 k_1)}{M} x^2 y + 2 \frac{k_3^2}{M} x^2 + 2 \frac{k_4^2}{M} y^2. \quad (3.6.106)$$

Para este propósito, fazemos para uso do expoente característico Lyapunov (LCE), diagramas de fase [Benettin et al,1980, Wolf et al,1985] e [Tabor,1989] e Seções de Poincare. Por diagrama de fase, entendemos um gráfico das variáveis dinâmicas no espaço de fase que é usado para fornecer uma idéia qualitativa do comportamento dinâmico do sistema sob estudo. De maneira semelhante a Seção de Poincare [Almeida,1991, Tabor,1989], que é um gráfico gerado pelos pontos que surgem do fluxo do sistema diferencial que corta um plano do espaço de fase, nos fornece uma informação qualitativa do comportamento dinâmico do sistema. A precisão de nossa computação foi verificada conferindo se o Hamiltoniano era conservado durante a simulação.

Fixando por exemplo: $k_1 = 10$, $M = k_3 = k_4 = 1$, o potencial adquire a seguinte forma:

$$V := 50x^4 + 200y^4 + 400x^2y^2 + 40y^3 + 60x^2y + 2x^2 + 2y^2$$

Calculamos o maior σ_i , diagramas de fase e suas respectivas Seções de Poincare, e apresentamos dois casos para o mesmo conjunto de parâmetros fixados acima,mas com condições iniciais diferentes. Primeiro com $p_1(0) = 0.1, p_2(0) = 0.1, q_1(0) = 0.1, q_2(0) = 0.0$, Energia=0.035; apresenta comportamento regular (veja Figuras 1,2 e 3 abaixo).

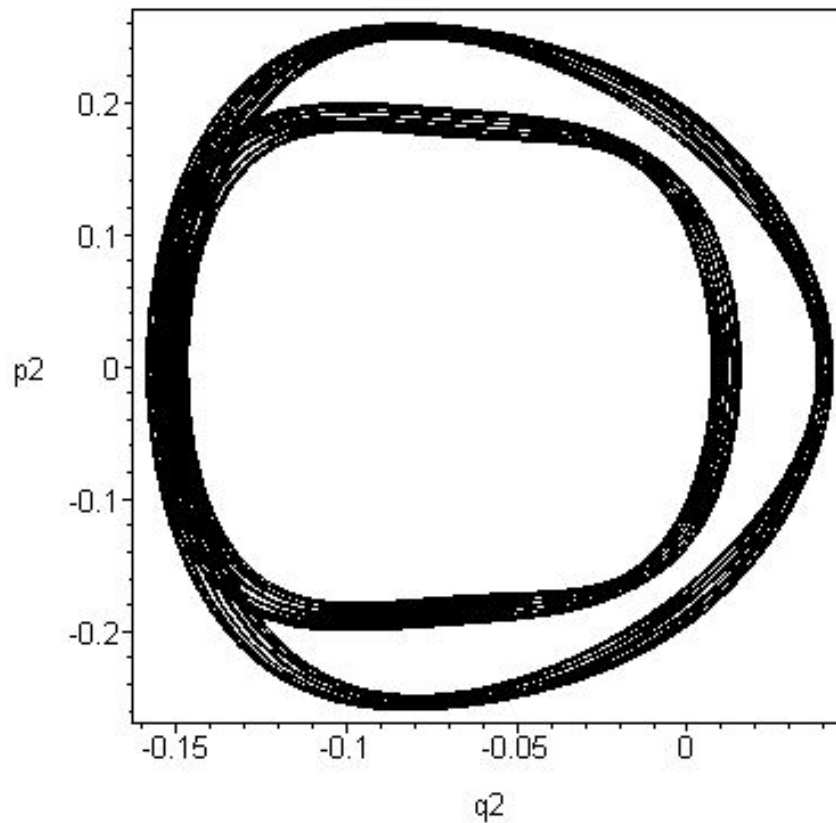
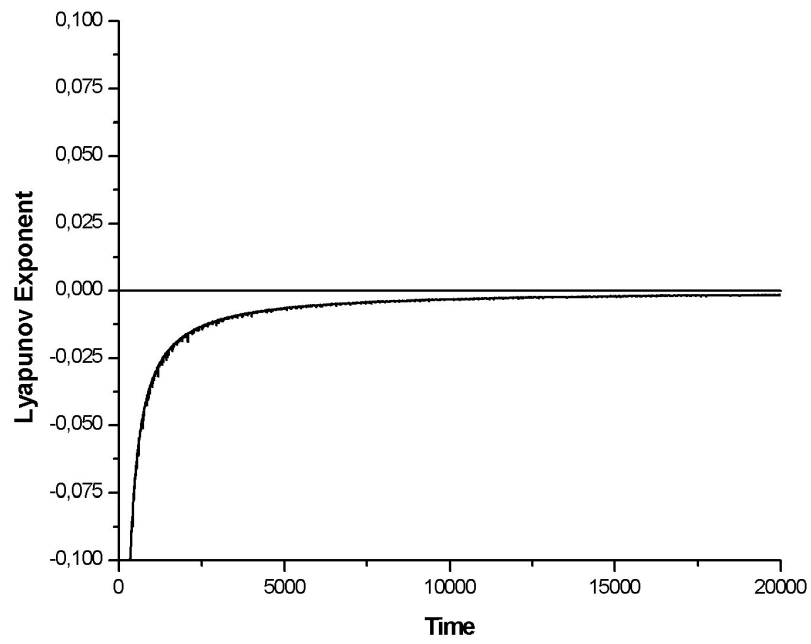


Gráfico de fase com condições iniciais:

$p_1(0) = 0.1, p_2(0) = 0.1, q_1(0) = 0.1, q_2(0) = 0.0$ e Energia=0.035

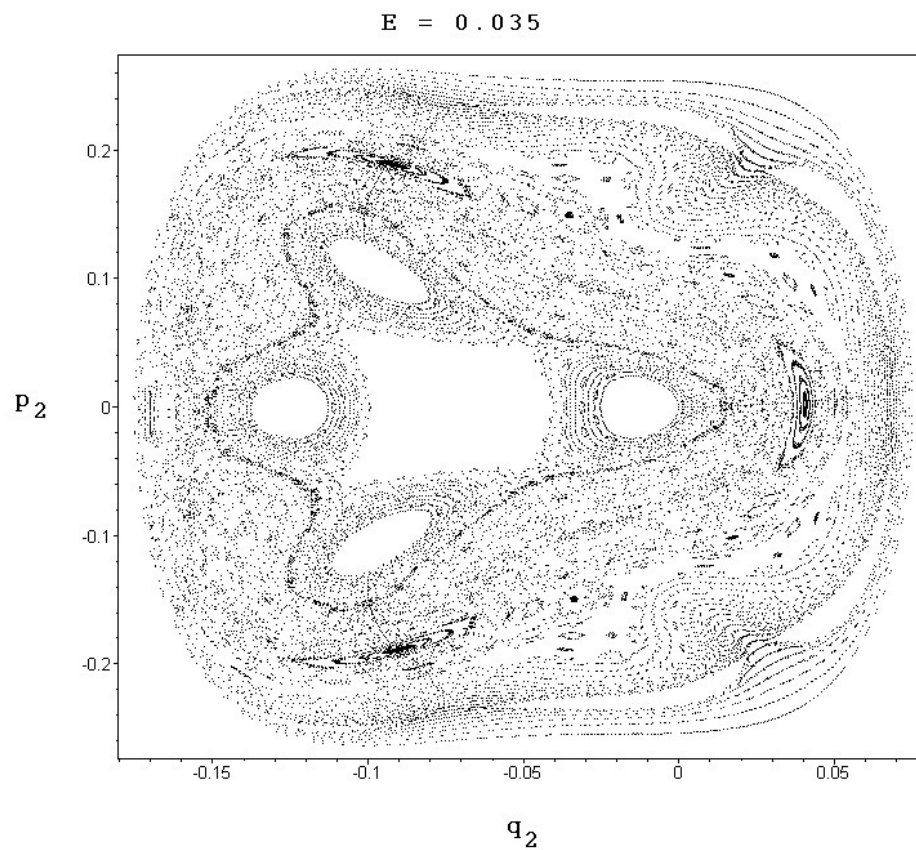
Figura 1



Expoente de Lyapunov para condições iniciais:

$p_1(0) = 0.1, p_2(0) = 0.1, q_1(0) = 0.1, q_2(0) = 0.0$ e Energia=0.035

Figura 2



Seção de Poincare no plano $p_1 = 0$ para Energia=0.035

Figura 3

O segundo caso com: $p_1(0) = 0.1, p_2(0) = 0.1, q_1(0) = 0.1, q_2(0) = 0.18$ e Energia=0.780631; apresenta comportamento caótico (veja Figuras 4,5 e 6 abaixo).

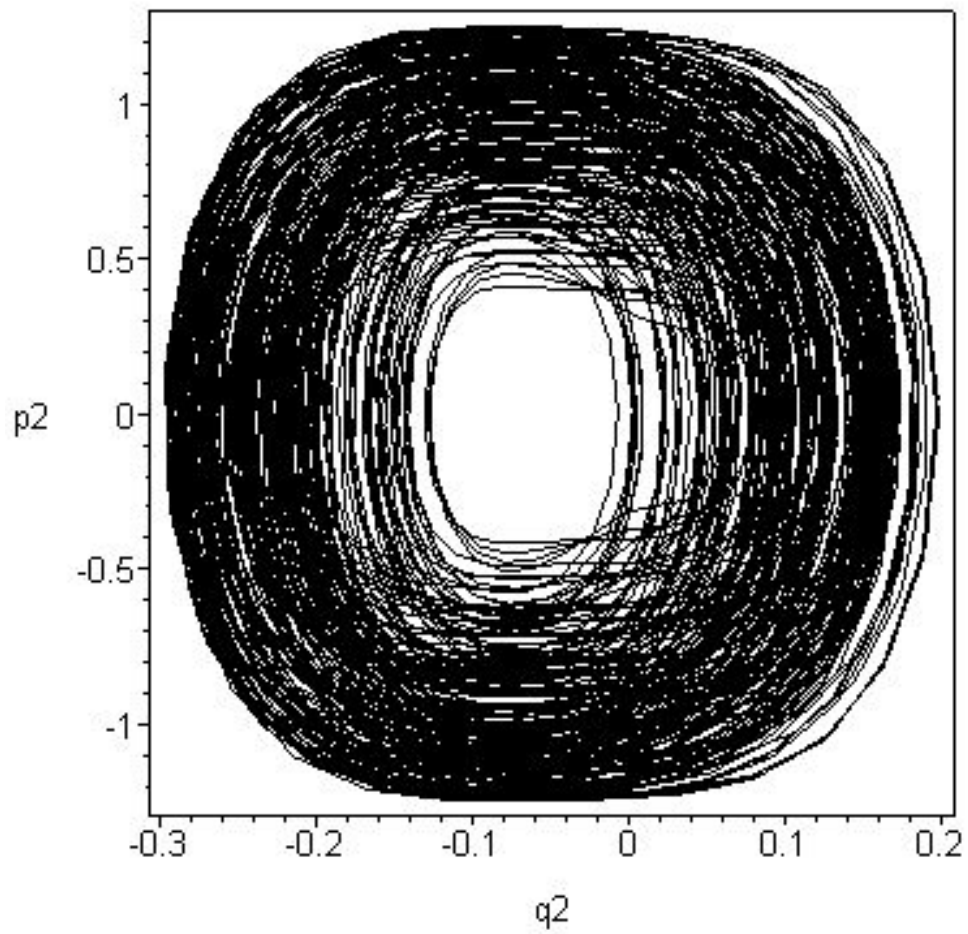
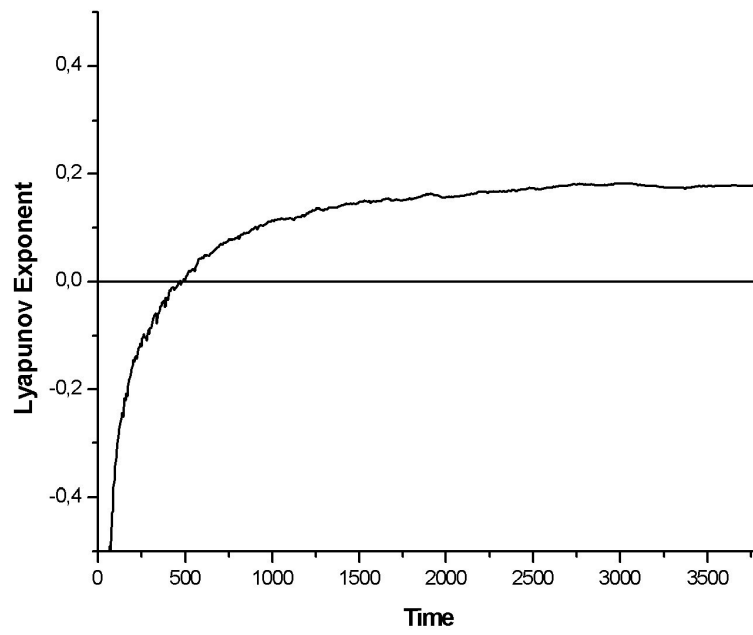


Gráfico de fase com condições iniciais:

$p_1(0) = 0.1, p_2(0) = 0.1, q_1(0) = 0.1, q_2(0) = 0.18$ e Energia=0.780631

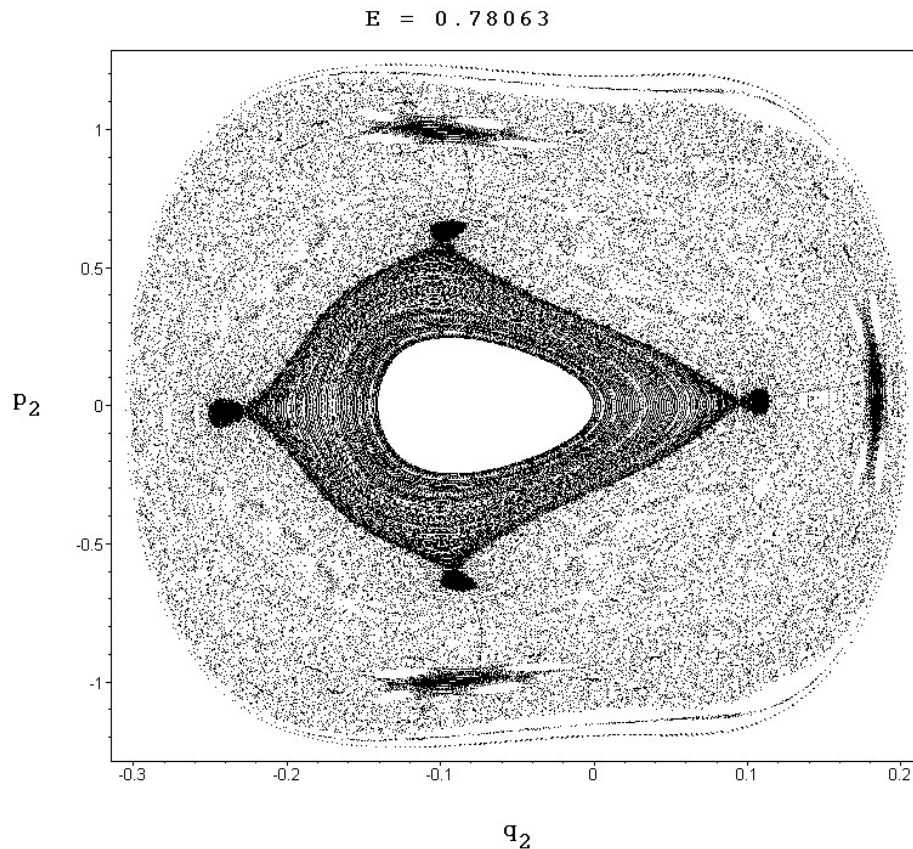
Figura 4



Expoente de Lyapunov para condições iniciais:

$p_1(0) = 0.1, p_2(0) = 0.1, q_1(0) = 0.1, q_2(0) = 0.18$ e Energia=0.780631

Figura 5



Seção de Poincare no plano $p_1 = 0$ para Energia=0.780631

Figura 6

Estes exemplos mostram que este sistema não integrável exibe tanto dinâmica ordenada quanto caótica. Isto não chega a ser um resultado excepcional no caso de sistemas hamiltonianos onde ordem e caos podem coexistir para uma dada energia. Entretanto, isto não constitui a regra. O caso já mencionado da versão mecânica do Yang-Mills puro só apresenta caos assim como também existem outros modelos não integráveis que não apresentam caos. Como nesta tese a questão central é a identificação de caos em teorias supersimétricas a simples demonstração de sua existência constitui o aspecto importante e não um estudo pormenorizado destes modelos.

No caso estudado em que a condição inicial escolhida correspondia a energia igual a 0.035 o sistema exibiu comportamento regular o que pode ser visto pelo diagrama de fase e pelo gráfico do expoente de Lyapunov. Para o caso em que a condição inicial escolhida correspondia a energia igual a 0.780631 o sistema desta vez exibiu comportamento caótico também visto a partir do diagrama de fase e do expoente de Lyapunov.

Entretanto uma visão global da dinâmica pode ser obtida através das respectivas seções de Poincare.

A seção de Poincare para energia igual a 0.035 (fig.3) apresenta em sua faixa mais externa varias separatrizes e no seu interior uma região caótica com bacias e varias ilhas de regularidade. Já para seção de Poincare para energia igual a 0.780631 (fig.6) vemos uma densa região de regularidade no centro e a maior parte do volume tomado por um comportamento caótico onde se notam três ilhas de regularidade. Outro motivo de destaque é a redução do numero de separatrizes.

É talvez notável dizer que um potencial da forma $(x^2 + y^2)^2$ pode ser gerado considerando o trabalho de Refs. [Ichtiaroglou,1989]–[Karkowski,1990], onde um sistema de Yang-Mills mecânico clássico com quatro graus de liberdade ξ_i é estudado, com Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2) + \frac{g^2}{8} (\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2)^2. \quad (3.6.107)$$

Realmente, se adotamos coordenadas hiperbólicas nos planos $(\xi_1; \xi_2)$ e $(\xi_3; \xi_4)$,

$$\xi_1 = r_1 \cosh \theta_1 \quad (3.6.108)$$

$$\xi_2 = r_1 \sinh \theta_1 \quad (3.6.109)$$

$$\xi_3 = r_2 \cosh \theta_2 \quad (3.6.110)$$

$$\xi_4 = r_2 \sinh \theta_2, \quad (3.6.111)$$

o Hamiltoniano se torna:

$$H = \frac{1}{2} \left(P_{r_1}^2 + P_{r_2}^2 - \frac{1}{r_1^2} P_{\theta_1}^2 - \frac{1}{r_2^2} P_{\theta_2}^2 \right) + \frac{g^2}{8} (r_1^2 + r_2^2)^2. \quad (3.6.112)$$

onde θ_1 e θ_2 são coordenadas ignoráveis, de forma que os correspondentes momenta são integrais de movimento. Se $P_{\theta_1}^2 = P_{\theta_2}^2 = 0$, nenhuma contribuição negativa para a energia cinética está presente e adquirimos um sistema efetivo com dois-grau-de-liberdade com potencial da forma $(x^2 + y^2)^2$. Além da discussão de integrabilidade e caos clássicos, estudos de caos quântico que usam este potencial receberam muita atenção na literatura [Steeb et al, 1988, Tomiya e Yoshinaga, 2000]. Esta observação pode ser um bom apoio a favor dos resultados que obtivemos com os potenciais integráveis produzidos depois que foi imposta a simetria de paridade ao modelo supersimétrico completo.

No próximo capítulo, retomamos um caso com supersimetria $N = 2$ mas, desta vez, com quatro componentes. Lá, verificaremos resultado similar ao obtido neste capítulo.

Capítulo 4

Limite Mecânico Supersimétrico de Yang-Mills com Quatro Graus de Liberdade

No final do capítulo anterior, mostramos que o caso integrável do setor bosônico de nossa versão supersimétrica de um modelo planar polinomial de ordem quatro podia ser identificado com um modelo mecânico de Yang-Mills com quatro componentes que, após mudanças de coordenadas, assumia uma forma planar.

Neste capítulo, faremos a supersimetrização diretamente na versão em quatro componentes do modelo mecânico de Yang-Mills, e mostraremos que, após a redução do setor bosônico (por mudanças de coordenadas) ao caso planar, obtemos o mesmo resultado que no capítulo anterior. Para tanto, tomamos como ponto de partida o potencial da versão em quatro componentes do modelo mecânico de Yang-Mills [Ichiaroglou,1989]–[Karkowski,1990]:

$$U = c(xw - yz)^2. \quad (4.0.1)$$

4.1 O Modelo Supersimétrico

Usando os supercampos quirais [Paschoal,2004]:

$$\Phi = x(t) + iy(t) + \theta\zeta(t) - i\theta\bar{\theta} \left(\frac{d}{dt}x(t) + i\frac{d}{dt}y(t) \right), \quad (4.1.2)$$

$$\bar{\Phi} = x(t) - iy(t) - \bar{\theta}\bar{\zeta}(t) + i\theta\bar{\theta} \left(\frac{d}{dt}x(t) - i\frac{d}{dt}y(t) \right), \quad (4.1.3)$$

$$\Lambda = w(t) + iz(t) + \theta\xi(t) - i\theta\bar{\theta} \left(\frac{d}{dt}w(t) + i\frac{d}{dt}z(t) \right), \quad (4.1.4)$$

$$\bar{\Lambda} = w(t) - iz(t) - \bar{\theta}\bar{\xi}(t) + i\theta\bar{\theta} \left(\frac{d}{dt}w(t) - i\frac{d}{dt}z(t) \right). \quad (4.1.5)$$

e o supercampo real:

$$H = h(t) + \theta\lambda_h(t) - \bar{\theta}\bar{\lambda}_h(t) + \theta\bar{\theta}f_h(t), \quad (4.1.6)$$

o termo cinético em supercampos pode ser posto sob a forma:

$$L_{Cin} = \alpha_1 D(\bar{\Phi})\bar{D}(\Phi) + \alpha_2 D(\bar{\Lambda})\bar{D}(\Lambda) + \alpha_3 D(H)\bar{D}(H). \quad (4.1.7)$$

O termo de potencial em supercampos é dado por:

$$L_{Int} = k_1 \Phi \Lambda H + k_1 \bar{\Phi} \bar{\Lambda} H. \quad (4.1.8)$$

Realizando integrações em θ e $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned}
L = & -4\alpha_1 \left(\frac{d}{dt}x(t) \right)^2 - 4\alpha_1 \left(\frac{d}{dt}y(t) \right)^2 - \alpha_3 \left(\frac{d}{dt}h(t) \right)^2 + & (4.1.9) \\
& -4\alpha_2 \left(\frac{d}{dt}w(t) \right)^2 - 4\alpha_2 \left(\frac{d}{dt}z(t) \right)^2 - 2k_1y(t)z(t)f_h(t) + \\
& +2k_1x(t)w(t)f_h(t) + k_1w(t)\zeta(t)\bar{\lambda}_h(t) - k_1w(t)\bar{\zeta}(t)\lambda_h(t) + \\
& -i\alpha_2\bar{\xi}(t)\frac{d}{dt}\xi(t) + k_1x(t)\xi(t)\bar{\lambda}_h(t) - i\alpha_2\xi(t)\frac{d}{dt}\bar{\xi}(t) + \\
& -i\alpha_1\zeta(t)\frac{d}{dt}\bar{\zeta}(t) + i\alpha_3\frac{d}{dt}\bar{\lambda}_h(t)\lambda_h(t) + i\alpha_3\frac{d}{dt}\lambda_h(t)\bar{\lambda}_h(t) + \\
& +ik_1y(t)\bar{\xi}(t)\lambda_h(t) + +ik_1z(t)\zeta(t)\bar{\lambda}_h(t) + ik_1y(t)\xi(t)\bar{\lambda}_h(t) + \\
& +ik_1z(t)\bar{\zeta}(t)\lambda_h(t) - i\alpha_1\bar{\zeta}(t)\frac{d}{dt}\zeta(t) - k_1x(t)\bar{\xi}(t)\lambda_h(t) + \\
& +2k_1x(t)\frac{d}{dt}z(t)h(t) + 2k_1\frac{d}{dt}x(t)z(t)h(t) + 2k_1y(t)\frac{d}{dt}w(t)h(t) + \\
& +2k_1\frac{d}{dt}y(t)w(t)h(t) - \alpha_3f_h(t)^2
\end{aligned}$$

Da equação de Euler-Lagrange para f_h , chega-se a:

$$f_h(t) = \frac{k_1(-y(t)z(t) + x(t)w(t))}{\alpha_3}. \quad (4.1.10)$$

A seguir, listamos os termos do Lagrangiano, após integração em θ e $\bar{\theta}$ e eliminação de f_h :

$$L_1 = -4\alpha_1 \left(\frac{d}{dt}x(t) \right)^2 - 4\alpha_1 \left(\frac{d}{dt}y(t) \right)^2 - 4\alpha_2 \left(\frac{d}{dt}w(t) \right)^2 + \quad (4.1.11)$$

$$- 4\alpha_2 \left(\frac{d}{dt}z(t) \right)^2 - \alpha_3 \left(\frac{d}{dt}h(t) \right)^2,$$

$$L_2 = \frac{k_1^2(-y(t)z(t) + x(t)w(t))^2}{\alpha_3}, \quad (4.1.12)$$

$$L_3 = k_1w(t)\zeta(t)\bar{\lambda}_h(t) - k_1w(t)\bar{\zeta}(t)\lambda_h(t) + \quad (4.1.13)$$

$$- i\alpha_1\bar{\zeta}(t)\frac{d}{dt}\zeta(t) + ik_1y(t)\xi(t)\bar{\lambda}_h(t) +$$

$$- i\alpha_2\bar{\xi}(t)\frac{d}{dt}\xi(t) + k_1x(t)\xi(t)\bar{\lambda}_h(t) +$$

$$+ i k_1z(t)\bar{\zeta}(t)\lambda_h(t) - i\alpha_2\xi(t)\frac{d}{dt}\bar{\xi}(t) +$$

$$+ ik_1y(t)\bar{\xi}(t)\lambda_h(t) + i\alpha_3\frac{d}{dt}\bar{\lambda}_h(t)\lambda_h(t) +$$

$$- i\alpha_1\zeta(t)\frac{d}{dt}\bar{\zeta}(t) + i\alpha_3\frac{d}{dt}\lambda_h(t)\bar{\lambda}_h(t) +$$

$$+ 2k_1x(t)\frac{d}{dt}z(t)h(t) + 2k_1\frac{d}{dt}x(t)z(t)h(t) +$$

$$+ 2k_1y(t)\frac{d}{dt}w(t)h(t) + 2k_1\frac{d}{dt}y(t)w(t)h(t) +$$

$$+ ik_1z(t)\zeta(t)\bar{\lambda}_h(t) - k_1x(t)\bar{\xi}(t)\lambda_h(t).$$

Fixando os α 's como:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{8}M, \alpha_2 = -\frac{1}{8}M, \alpha_3 = -\frac{1}{2}M, \quad (4.1.14)$$

podemos escrever os seguintes termos do Lagrangiano completo:

$$\begin{aligned} L_1 = & 1/2 M \left(\frac{d}{dt}x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt}y(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt}w(t) \right)^2 + \\ & + 1/2 M \left(\frac{d}{dt}z(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt}h(t) \right)^2, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$L_2 = -2 \frac{k_1^2 (-y(t)z(t) + x(t)w(t))^2}{M}, \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} L_3 = & k_1 w(t) \zeta(t) \bar{\lambda}_h(t) - k_1 w(t) \bar{\zeta}(t) \lambda_h(t) + \\ & + 1/8 i M \xi(t) \frac{d}{dt} \bar{\xi}(t) + 1/8 i M \zeta(t) \frac{d}{dt} \bar{\zeta}(t) + \\ & + i k_1 y(t) \xi(t) \bar{\lambda}_h(t) + k_1 x(t) \xi(t) \bar{\lambda}_h(t) + \\ & + 1/8 i M \bar{\xi}(t) \frac{d}{dt} \xi(t) + i k_1 z(t) \bar{\zeta}(t) \lambda_h(t) + i k_1 y(t) \bar{\xi}(t) \lambda_h(t) + \\ & + 1/8 i M \bar{\zeta}(t) \frac{d}{dt} \zeta(t) - 1/2 i M \frac{d}{dt} \lambda_h(t) \bar{\lambda}_h(t) + \\ & + i k_1 z(t) \zeta(t) \bar{\lambda}_h(t) + 2 k_1 x(t) \frac{d}{dt} z(t) h(t) + \\ & + 2 k_1 \frac{d}{dt} x(t) z(t) h(t) + 2 k_1 y(t) \frac{d}{dt} w(t) h(t) + \\ & + 2 k_1 \frac{d}{dt} y(t) w(t) h(t) - 1/2 i M \frac{d}{dt} \bar{\lambda}_h(t) \lambda_h(t) + \\ & - k_1 x(t) \bar{\xi}(t) \lambda_h(t), \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

onde o setor bosônico é dado por

$$\begin{aligned}
Lag_{Bos} = & 1/2 M \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 + \\
& + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)^2 + 1/2 M \left(\frac{d}{dt} h(t) \right)^2 - 2 \frac{k_1^2 (x(t) w(t) - y(t) z(t))^2}{M}.
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Se adotarmos as seguintes transformações ortogonais, que levam (x, y, z, w) em $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 2^{-\frac{1}{2}} (x + w), \\
\xi_2 &= 2^{-\frac{1}{2}} (x - w), \\
\xi_3 &= 2^{-\frac{1}{2}} (y + z), \\
\xi_4 &= 2^{-\frac{1}{2}} (y - z).
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

temos o seguinte modelo agora já na forma Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2) + \frac{g^2}{8} (\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2)^2. \tag{4.1.20}$$

Por outro lado, se adotarmos as coordenadas hiperbólicas nos planos $(\xi_1; \xi_2)$ e $(\xi_3; \xi_4)$,

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= r_1 \cosh \theta_1, & \xi_2 &= r_1 \sinh \theta_1, \\
\xi_3 &= r_2 \cosh \theta_2, & \xi_4 &= r_2 \sinh \theta_2,
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

a Hamiltoniana torna-se:

$$H = \frac{1}{2} \left(P_{r_1}^2 + P_{r_2}^2 - \frac{1}{r_1^2} P_{\theta_1}^2 - \frac{1}{r_2^2} P_{\theta_2}^2 \right) + \frac{g^2}{8} (r_1^2 + r_2^2)^2, \tag{4.1.22}$$

onde θ_1 e θ_2 são coordenadas ignoráveis, tal que seus correspondentes momenta são constantes de movimento. Se $P_{\theta_1}^2 = P_{\theta_2}^2 = 0$, forem contribuições não-negativas para a energia cinética, temos um sistema efetivo com dois graus de liberdade com potencial da forma $(x^2 + y^2)^2$.

4.2 Análise de Integrabilidade para o Setor Bosônico

Novamente, usamos os criterios de integrabilidade para o potencial quártico dados na ref.: [Lakshmanan e Sahadevan,1993]:

$$V_{quart} = Ax^2 + By^2 + ax^4 + by^4 + dx^2y^2, \quad (4.2.23)$$

são:

| | |
|---|----------|
| a) $A = B, \quad a = b, \quad d = 6a.$ | (4.2.24) |
| b) $A, \quad B, \quad a = b, \quad d = 2a.$ | |
| c) $A = 4B, \quad a = 16b, \quad d = 12a.$ | |
| d) $A = 4B, \quad a = 8b, \quad d = 6b.$ | |
| e) $d = 0 \quad (trivial),$ | |

e verificamos que o potencial respeita a condição de integrabilidade dada pelo item b).

4.3 Estudo de Integrabilidade com Vínculos de Paridade Impostos a Todo o Modelo.

Na seção anterior, havíamos verificado as condições de integrabilidade para o setor bosônico do modelo sem levarmos em conta a contribuição que o setor fermiônico poderia desempenhar neste estudo.

Nesta seção, imporemos, como no capítulo anterior, que todo o modelo obedeça à condição de paridade. Para tanto, voltaremos a considerar as transformações de paridade

no espaço espinorial como apresentado na seção 3.5, e definimos o seguinte espinor de Majorana:

$$Z \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}, \quad (4.3.25)$$

para o qual se fixa a transformação de paridade:

$$Z \longmapsto -\gamma_2 Z. \quad (4.3.26)$$

Tem-se, então, que

$$\begin{aligned} \xi &\longmapsto i\bar{\xi} \\ \bar{\xi} &\longmapsto -i\xi, \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

o que, finalmente, nos leva à transformação de paridade

$$\Phi \longmapsto -\bar{\Phi}, \quad (4.3.28)$$

para o supercampo quirial Φ .

Quanto ao supercampo Λ , temos a liberdade de fixar a sua paridade.

Adotando

$$\Lambda \longmapsto \bar{\Lambda}, \quad (4.3.29)$$

o que significa,

$$w \mapsto w, \tag{4.3.30}$$

$$z \mapsto -z,$$

$$\xi \mapsto i\bar{\xi},$$

$$\bar{\xi} \mapsto -i\xi.$$

Recordamos que o potencial é submetido à integração em θ e $\bar{\theta}$,

$$\int d\theta d\bar{\theta} \Phi \Lambda H, \tag{4.3.31}$$

e como

$$d\theta d\bar{\theta} \mapsto -d\theta d\bar{\theta}, \tag{4.3.32}$$

$$\Theta \mapsto -\bar{\Phi},$$

$$\Lambda \mapsto \Lambda$$

devemos fixar a paridade de H positiva:

$$H \mapsto H. \tag{4.3.33}$$

Isto assegura a invariância do potencial e nos leva às seguintes transformações para as componentes de H :

$$h \mapsto h, \tag{4.3.34}$$

$$\lambda \mapsto -i\bar{\lambda},$$

$$\bar{\lambda} \mapsto i\lambda,$$

$$f_h \mapsto -f_h,$$

De fato, a transformação $f_h \mapsto -f_h$ é compatível com a solução da equação de movimento para esta coordenada auxiliar, dada na eq.4.1.10.

Estes resultados têm como consequência que o parâmetro k é livre, não alterando os resultados obtidos por ocasião da análise de integrabilidade do setor bosônico.

4.4 Conclusões.

Neste capítulo, verificamos que, apesar de adotarmos um roteiro diferente para supersimetrização do modelo mecânico de Yang-Mills, comparado ao feito no capítulo anterior, chegamos ao mesmo modelo integrável. Cabe destacar que, enquanto no capítulo anterior, onde a supersimetria era aplicada a um modelo planar, fizemos uso de supercampos reais.

Neste capítulo, onde a supersimetrização foi feita em uma versão mecânica de Yang-Mills com quatro graus de liberdade, os supercampos usados foram quirais.

Neste caso verificamos que os vínculos do modelo supersimétrico nos levam a um caso integrável tanto quando olhamos somente para o setor bosônico como quando levamos em consideração o setor fermiônico. Cabe destacar que o uso de supercampos quirais implicou em mais vínculos do que quando realizamos a construção em termos de supercampos reais.

Após as investigações feitas nos últimos capítulos em modelos mecânicos supersimétricos, no próximo capítulo trataremos de um modelo mecânico que foi construído a partir da redução via campos espacialmente homogêneos de uma teoria de campos supersimétrica $N = 2$ de Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não-mínimo.

Capítulo 5

Integrabilidade e Caos numa Versão $D=(0+1)$ da Teoria $N=2$ Maxwell–Chern–Simons–Higgs.

5.1 Introdução

Neste capítulo, ao invés de aplicarmos procedimentos de análise de integrabilidade e caos a modelos supersimetrizados diretamente na forma mecânica, faremos estas análises em um sistema mecânico reduzido (especialmente homogêneo) derivado de um modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs $N=2$ off-shell com acoplamento não-mínimo que apresenta excitações de vórtices topológicos BPS, numericamente obtidas com um “ansatz” adotado no regime de validade de um acoplamento crítico especial. Como uma contrapartida da regularidade associada à solução estática do tipo sóliton, investigamos a possibilidade de existência de dinâmica caótica na evolução do sistema reduzido espacialmente homogêneo, descendente do modelo de campo $N=2$ sob consideração. O conteúdo originalmente rico

de simetrias e interações, supersimetria $N=2$ e acoplamento não- mínimo, tornam especial o modelo proposto como uma estrutura interessante para a investigação do papel desempenhado pelas (super) simetrias e domínios de parâmetros no favorecimento e no controle do comportamento caótico em sistemas de gauge. Depois de construir o Lagrangiano efetivo e o Hamiltoniano, e estabelecer as equações canônicas de Hamilton correspondentes, aplicamos os critérios globais de integrabilidade, simetrias pontuais de Noether e propriedade de Painlevé, tanto ao regime geral quanto ao regime de acoplamento crítico. Como um caráter não- integrável é revelado pelo par de critérios analíticos aplicados, efetuamos simulações numéricas na busca de padrões caóticos na evolução do sistema. Na próxima seção, apresentamos a teoria, as equações de campo e a sua contrapartida espacialmente homogênea, o Lagrangiano efetivo unidimensional e os momenta conjugados associados. Como aparece uma constante de movimento adicional (além do Hamiltoniano), uma reparametrização conveniente é implementada, e o sistema Hamiltoniano correspondente é escrito, levando às equações canônicas de Hamilton. Na Seção 3, retornamos a um regime geral com formulação de segunda-ordem, na qual começamos nossa análise da questão de integrabilidade, adotando dois critérios analíticos alternados – a abordagem de simetrias pontuais de Noether [Sarlet e Cantrijn,1981] e o procedimento do teste de Painlevé [Tabor,1989, Ablowitz, Ramani e Segur,1978]. A primeira estratégia conduz a um conjunto de dez equações diferenciais parciais acopladas que parecem só possuir uma solução de forma fechada no regime de acoplamento mínimo, $g = 0$. No contexto do teste de Painlevé, mostra-se que nenhum conjunto de expoentes dominantes inteiros negativos pode ser encontrado, na medida em que a equação para o campo de gauge é considerada, deteriorando o correspondente algoritmo de teste para a verificação de uma possível propriedade de Painlevé forte, associada ao sistema. O papel desempenhado pela equação de campo de gauge sugere que uma mudança na dinâmica do setor de gauge possa gerar uma situação

diferente para a análise de integrabilidade. Assim motivados, na Seção 4, adotamos o regime da relação de acoplamento crítico, chegando a equações de primeira ordem para os graus de liberdade de gauge. Apresentamos o Lagrangiano efetivo associado e a função Hamiltoniana, como também as correspondentes equações de campo iteradas de segunda ordem. Estes resultados nos habilitam a redirecionar o teste de Painlevé, que indica que o regime de acoplamento crítico apresenta uma característica até pior, no que diz respeito à negatividade rígida suposta para os expoentes dominantes. Retornando à abordagem de simetrias pontuais de Noether, vemos que estas também não nos dão nenhuma pista de possíveis configurações integráveis. Na Seção 5, procede-se a uma análise de caos para valores fisicamente aceitáveis dos parâmetros. Nos regimes caracterizados por $g \neq 0$, para valores de g tanto não-críticos quanto críticos, o modelo se torna mais estável do que na situação em que $g = 0$. Apresentamos, então, nossos comentários e discutimos a falha do sistema em obedecer à propriedade de Painlevé forte, um fato que pode conduzir à consideração futura de outros testes de integrabilidade. Também, tentamos explicar por que $g \neq 0$ conduz a um comportamento mais estável, apesar da não-linearidade inerente provocada pela presença de um g não-nulo.

5.2 Descrição do Modelo

Partimos [Christiansen et al,1999:2] da densidade de Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{boson}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu M\partial^\mu M + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi)(\nabla^\mu\phi)^* + \\ & -\frac{g}{2}(\partial_\mu M)(\partial^\mu|\phi|^2) + \frac{\kappa}{2}A_\mu\tilde{F}^\mu - U, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

onde

$$U = \frac{e^2}{8G} \left(|\phi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e}M + 2g|\phi|^2M \right)^2 + \frac{e^2}{2}M^2|\phi|^2,$$

$\nabla_\mu\phi \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu - ig\tilde{F}_\mu)\phi$ e $G \equiv 1 - g^2|\phi|^2$. As equações de campo para a teoria completa são:

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} + m\tilde{F}^\rho = -\mathcal{J}^\rho - \frac{g}{e}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\mathcal{J}_\nu,$$

onde $\mathcal{J}_\mu = \frac{ie}{2}(\phi^*\nabla_\mu\phi - \phi(\nabla_\mu\phi)^*)$, e também

$$\partial_\alpha\partial^\alpha M - \frac{g}{2}\partial_\alpha\partial^\alpha|\phi|^2 + \frac{e^2(|\phi|^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM|\phi|^2)(2\kappa/e + 2g|\phi|^2)}{4G} + e^2|\phi|^2M = 0,$$

e,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi)^* - \frac{g}{2}\phi^*(\partial_\alpha\partial^\alpha M) + \frac{e^2g^2\phi^* [|\phi|^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2g|\phi|^2M]^2}{8G^2} + \\ & + \frac{e^2\phi^* [|\phi|^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2g|\phi|^2M] (1 + 2gM)}{4G} + \frac{e^2\phi^*M^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Adotando a escolha de gauge $A_0 = 0$ e impondo a homogeneidade espacial, isto é, $\partial_i(\forall \text{ campos}) = 0$, a fase do campo escalar torna-se uma variável cuja derivada-temporal desaparece, o que permite que seja eliminada sem perda de generalidade. Assim, terminamos com um campo escalar real e o seguinte conjunto de equações reduzidas de movimento:

$$\frac{d}{dt} [G\dot{A}_1] = -2eg\phi\frac{d}{dt} [\phi A_2] - e^2\phi^2 A_1 - \kappa\dot{A}_2, \quad (5.2.2)$$

$$\frac{d}{dt} [G\dot{A}_2] = +2eg\phi\frac{d}{dt} [\phi A_1] - e^2\phi^2 A_2 + \kappa\dot{A}_1, \quad (5.2.3)$$

$$\ddot{M} = \frac{g}{2}(\dot{\phi}^2) - e^2\phi^2 M - \frac{e^2(\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2)(2\kappa/e + 2g\phi^2)}{4G},$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & -(eA_1 + g\dot{A}_2)^2 \phi - (eA_2 - g\dot{A}_1)^2 \phi + g\phi\ddot{M} - e^2\phi M^2 \\ & - \frac{e^2 g^2 \phi (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2)^2}{4G^2} + \\ & - \frac{e^2 \phi (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2)(1 + 2gM)}{2G}. \end{aligned}$$

O Lagrangiano efetivo que gera estas equações de movimento é:

$$\begin{aligned} L = & \frac{G}{2} [(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2] - \frac{Q}{2} (A_1\dot{A}_2 - A_2\dot{A}_1) - \frac{e^2\phi^2}{2} (A_1^2 + A_2^2) + \\ & + \frac{(\dot{M})^2}{2} - g\phi\dot{\phi}\dot{M} + \frac{(\dot{\phi})^2}{2} - \frac{e^2(\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2)^2}{8G} - \frac{e^2\phi^2 M^2}{2}, \end{aligned}$$

onde $G \equiv 1 - g^2\phi^2$ e $Q \equiv \kappa + 2eg\phi^2$.

Os momenta canonicamente conjugados definidos, como usualmente, por $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, têm as expressões:

$$\begin{aligned} \pi_1 & \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_1} = G\dot{A}_1 + \frac{Q}{2}A_2, \\ \pi_2 & \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_2} = G\dot{A}_2 - \frac{Q}{2}A_1, \\ p_\phi & \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} - g\phi\dot{M}, \\ P_M & \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{M}} = \dot{M} - g\phi\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Antes de derivarmos as equações canônicas de Hamilton, notemos que a quantidade

$$I \equiv A_2\pi_1 - A_1\pi_2 \tag{5.2.4}$$

é uma constante de movimento. Isto pode ser verificado facilmente, multiplicando e combinando as equações de "campos de gauge" de acordo com $A_2(5.2.2) - A_1(5.2.3)$. Motivados por este fato, reparametrizamos o setor de gauge adotando coordenadas polares, em vez de Cartesianas. Definindo: $A_1 = A \cos \zeta$, $A_2 = A \sin \zeta$, e o "novo" conjunto de variáveis é (A, ζ, ϕ, M) . O Lagrangiano agora se torna:

$$L = \frac{G}{2} \left[(\dot{A})^2 + A^2 (\dot{\zeta})^2 \right] - \frac{Q}{2} \left(A^2 \dot{\zeta} \right) + \frac{(\dot{M})^2}{2} - g\phi\dot{\phi}\dot{M} + \frac{(\dot{\phi})^2}{2} - \frac{e^2\phi^2 A^2}{2} - \frac{e^2(\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2)^2}{8G} - \frac{e^2\phi^2 M^2}{2}, \quad (5.2.5)$$

conduzindo às mesmas expressões para p_ϕ e P_M , e definindo $p_A \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} = G\dot{A}$, $p_\zeta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} = GA^2\dot{\zeta} - \frac{Q}{2}A^2$.

Pode-se facilmente verificar que $p_\zeta = -I$, resultando $\dot{p}_\zeta = 0$. O Hamiltoniano lê-se:

$$H_{CAN.} = \frac{1}{2G} \left[p_A^2 + \frac{p_\zeta^2}{A^2} + Qp_\zeta + p_\phi^2 + P_M^2 + 2g\phi p_\phi P_M \right] + \frac{1}{2G} \left[(Q/2)^2 + e^2G\phi^2 \right] A^2 + \frac{e^2\phi^2 M^2}{2} + \frac{e^2}{8G} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2g\phi^2 M)^2.$$

As equações canônicas de Hamilton resultantes são:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{p_A}{G} ; \quad \dot{p}_A = \frac{1}{G} \left[\frac{p_\zeta^2}{A^3} - ((Q/2)^2 + e^2G\phi^2) A \right] ; \\ \dot{\zeta} &= \frac{1}{G} \left[\frac{p_\zeta}{A^2} + \frac{Q}{2} \right] \quad \dot{p}_\zeta = 0 ; \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{G} [p_\phi + g\phi P_M] ; \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\phi = -\frac{1}{G^2} \left\{ g^2 \phi \left[p_A^2 + \frac{p_\zeta^2}{A^2} + p_\phi^2 + P_M^2 \right] + g\phi(\kappa g + 2e)p_\zeta + g(1 + g^2 \phi^2)p_\phi P_M \right. \\ \left. + (\kappa g + 2e)^2 \frac{\phi A^2}{4} + e^2 G^2 \phi M^2 + \frac{e^2 g^2 \phi}{4} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2)^2 \right. \\ \left. + \frac{e^2 G \phi}{2} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2) (1 + 2gM) \right\}; \end{aligned}$$

$$\dot{M} = \frac{1}{G} [P_M + g\phi p_\phi];$$

$$\dot{P}_M = -\frac{1}{G} \left[e^2 G \phi^2 M + \frac{e^2}{4} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2) \left(\frac{2\kappa}{e} + 2g\phi^2 \right) \right].$$

Estas equações de Hamilton serão utilizadas a seguir na análise de integrabilidade e caos.

5.3 Análise de Integrabilidade: Caso Geral

Apresentamos dois critérios analíticos Lagrangianos para atacar a questão da integrabilidade: simetrias pontuais de Noether, mais adequadas para estabelecer as constantes de movimento, e o teste de Painlevé, que se destina a conferir uma propriedade global (as variáveis dependentes serem meromórficas para singularidades móveis no plano complexo) que indica integrabilidade.

5.3.1 Aplicando Simetrias pontuais de Noether.

Agora, faremos uso do estudo das simetrias pontuais de Noether, conforme apresentado no Capítulo 1. Inserindo na condição de simetria o Lagrangiano dado pela equação (5.2.5),

obtemos que um polinômio cúbico nas velocidades tem que desaparecer. Os coeficientes de iguais potências das velocidades são anulados, e obtemos um sistema acoplado de equações diferenciais parciais lineares que determinam as simetrias e os invariantes de Noether. A condição cúbica simplesmente conduz a

$$\tau = \tau(t), \quad (5.3.7)$$

o que quer dizer que a variável independente transformada é uma função só do tempo. As equações associadas às condições quadráticas, porém, são um conjunto de dez equações diferenciais parciais acopladas que, aparentemente, só possuem uma solução de forma fechada no caso do acoplamento mínimo $g = 0$. Restringindo o tratamento a este caso quase trivial e considerando as condições para os termos de ordens zero e primeira, só achamos simetrias de translação temporal e simetrias translacionais de ζ . Estas simetrias estão associadas, de acordo com (1.2.13), às leis de conservação de energia e p_ζ . Estes são resultados quase óbvios, por mostrar que a não-linearidade e acoplamentos no potencial não dão muito espaço para a existência de leis de conservação do sistema, até mesmo no caso $g = 0$. Esta é uma assinatura de não-integrabilidade. Porém, outros métodos para investigar leis de conservação no sistema como simetrias pontuais de Lie [Olver,1986] não foram usados.

5.3.2 Teste de Painlevé

Voltamos, agora, a uma configuração do formalismo espacial de segunda-ordem, para estabelecer o ambiente para aplicação do teste de Painlevé [Tabor,1989] e [Ablowitz, Ramani e Segur,1978]. As equações são

$$G^2 \ddot{A} = 2g^2 G \phi \dot{\phi} \dot{A} + \frac{C^2}{A^3} - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 A - e(\kappa g + e)\phi^2 A, \quad (5.3.8)$$

onde C representa a constante p_ζ ,

$$\begin{aligned}
G^3 \ddot{\phi} &= g^2 G^2 \phi \dot{\phi}^2 - g^2 G^2 \phi \dot{A}^2 - \frac{g^2 C^2 \phi}{A^2} - gC(\kappa g + 2e)\phi - \frac{1}{4}(\kappa g + 2e)^2 \phi A^2 + \\
&+ \frac{e\phi}{4}(\phi^2 - v^2) [eg^2 v^2 - 2(\kappa g + e) + g^2(2\kappa g - e)\phi^2 + 2eg^4 \phi^4] \\
&- (\kappa g + e) [\kappa - ev^2 g + (3eg - \kappa g^2)\phi^2 - 2eg^3 \phi^4 + (\kappa g + e)M] \phi M \quad (5.3.9)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
G^3 \ddot{M} &= gG^2 \dot{\phi}^2 - g^3 G^2 \phi^2 \dot{A}^2 + \frac{g^3 C^2 \phi^2}{A^2} - \frac{g}{4}(\kappa g + 2e)^2 A^2 \phi^2 - g(\kappa g + e)^2 M^2 \phi^2 + \\
&+ \frac{e}{4}(\phi^2 - v^2)[-2\kappa + g(-4e + eg^2 v^2 + 2\kappa g)\phi^2 + 3eg^3 \phi^4] \\
&+ [-\kappa^2 + (\kappa^2 g^2 + e\kappa g^3 v^2 - e^2 - 3e\kappa g + e^2 g^2 v^2)\phi^2 + eg^2(2\kappa g - e)\phi^4 + e^2 g^4 \phi^6]M. \quad (5.3.10)
\end{aligned}$$

Tomando o tempo como uma variável complexa, o primeiro passo do teste de Painlevé está relacionado ao comportamento da singularidade dominante. Supõe-se que os termos dominantes tenham a forma geral $A \sim a(t - t_0)^\alpha$, $\phi \sim b(t - t_0)^\beta$, $M \sim c(t - t_0)^\gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma < 0$. Tais suposições transformam as últimas três equações nas seguintes relações assintóticas ($t \rightarrow t_0$):

$$g^4 ab^4 \alpha [\alpha - 1 + 2\beta] \tau^{\alpha+4\beta-2} \sim 0 ;$$

$$\begin{aligned}
g^6 b^7 \beta [2\beta - 1] \tau^{7\beta-2} &\sim g^6 b^5 a^2 \alpha^2 \tau^{2\alpha+5\beta-2} + \\
-2eg^3(\kappa g + e)b^5 c \tau^{5\beta+\gamma} &+ (\kappa g + e)^2 bc^2 \tau^{\beta+2\gamma} ;
\end{aligned}$$

$$c\gamma(\gamma - 1)\tau^{4\beta+\gamma-2} \sim gb^2\beta(2\beta - 1)\tau^{6\beta-2} ,$$

onde $\tau = t - t_0$.

A partir da última equação, obtemos $\gamma = 2\beta$ e $c = gb^2/2$. Inserindo $\gamma = 2\beta$ na segunda equação, o balanceamento reduz aos primeiros dois termos, o que conduz a $\alpha = \beta$ e $a^2 = (2\beta - 1)b^2/\beta$. Entretanto, a primeira equação mostra a impossibilidade de termos $\alpha, \beta < 0$, na medida em que $\alpha + 2\beta - 1 = 0$ é exigido, inviabilizando que seja satisfeito o teste de Painlevé. Outra possibilidade seria fixar $\alpha = 0$ na primeira equação, deixando-a para trás como uma identidade. Poderíamos descartar o segundo termo (primeiro no lado direito) da segunda equação, e o balanceamento dos três termos remanescentes conduziria a um conjunto interessante de valores negativos para γ e β : $\gamma = -4, \beta = -1$, contanto que a seguinte relação seja assegurada:

$$(\kappa g + e)^2 c^2 - 2(\kappa g + e)eg^3 b^4 c + 3g^6 b^6 = 0 .$$

Ainda, temos que lidar com um “expoente dominante” nulo que inviabiliza o teste de Painlevé.

Como umas das faces de um problema com a dinâmica do setor de gauge, a adoção da relação de acoplamento crítico (projetando o sistema sobre o regime que dá lugar às já estabelecidas excitações de vórtice) pode servir como uma valiosa ferramenta de investigação. Na realidade, impondo $g = -e/\kappa$ somos levados a equações de primeira-ordem para o campo de gauge [Christiansen et al,1999:2].

5.4 Regime de acoplamento crítico.

Se $g = -e/\kappa$, temos:

$$\kappa \tilde{F}_\nu = -\mathcal{J}_\nu ,$$

e a redução a configurações espacialmente homogêneas conduz a

$$\kappa G \mathcal{E}_{ij} \dot{A}_j = -e^2 A_i \phi^2 \quad , \quad (5.4.11)$$

onde $\mathcal{E}_{12} = +1 = -\mathcal{E}_{21}$. A partir deste conjunto de equações chegamos a

$$G \frac{d}{dt} (A_1^2 + A_2^2) = 0 \quad .$$

Na medida em que $G > 0$ (uma condição herdada da estrutura da supersimetria original $N = 2$), temos que $A_1^2 + A_2^2$ é uma constante de movimento (reproduzindo assim a situação do Chern–Simons–Higgs “puro” minimamente acoplado).

Adotando coordenadas polares, $A_1 = C \cos \zeta$, $A_2 = C \sin \zeta$ ($A_1^2 + A_2^2 = C^2$), e manipulando o conjunto (5.4.11), chegamos a $\dot{\zeta} = -e^2 \phi^2 / \kappa G$. Seguindo a mesma rota escolhida no caso geral (não–crítico), buscamos um Lagrangiano e um Hamiltoniano efetivos, estabelecendo as equações canônicas de movimento e, como desejável para o teste de Painlevé para integrabilidade, iterando-as para que adquiram a forma de equações diferenciais de segunda-ordem acopladas. Pode-se facilmente verificar que as seguintes funções Lagrangiano e Hamiltoniana são obtidas:

$$L = p_\zeta \left(\dot{\zeta} + \frac{e^2 \phi^2}{\kappa G} \right) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{e^2 C^2 \phi^2}{2} - \frac{e^4 C^2 \phi^4}{2\kappa^2 G} + \frac{\dot{M}^2}{2} - g\phi\dot{\phi}\dot{M} - \frac{e^2(\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2g\phi^2 M)^2}{8G} - \frac{e^2 M^2 \phi^2}{2} \quad ,$$

$$H_{CAN.} = \frac{1}{2G} \left[\frac{p_\zeta^2}{A^2} + Qp_\zeta + p_\phi^2 + P_M^2 + 2g\phi p_\phi P_M \right] + \frac{1}{2G} [(Q/2)^2 + e^2 G \phi^2] A^2 + \frac{e^2 \phi^2 M^2}{2} + \frac{e^2}{8G} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2g\phi^2 M)^2 \quad ,$$

onde $g = -e/\kappa$, $G = 1 - (e^2/\kappa^2)\phi^2$ e $p_\zeta = -\kappa C^2/2$, conduzem ao conjunto apropriado de equações de campo. O sistema iterado de segunda ordem passa a ser

$$-G^3\ddot{\phi} = -g^2G^2\phi\dot{\phi}^2 + \frac{g^2C^2\phi}{A^2} + e^2\frac{\phi A^2}{4} \\ + [eg(C + egv^4/4)]\phi + \frac{e}{2}[-2eg^2v^2]\phi^3 + e^2g^2\left[1 + \frac{g^2v^2}{4}\right]\phi^5 - \frac{e^2g^4}{2}\phi^7;$$

$$G^2\ddot{M} = (g - 2g^3\phi^2 + g^5\phi^4)\dot{\phi}^2 + (g\phi - 2g^3\phi^3 + g^5\phi^5)\ddot{\phi} + 2e^2\phi^2M \\ - e^2g^2\phi^4M - \kappa^2M - \frac{\kappa e}{2}\phi^2 - e^2g^2\left(1 + \frac{g^2v^2}{2}\right)\phi^4 + \frac{e^2g^3\phi^6}{2} + \frac{\kappa ev^2}{2}.$$

Novamente, no teste de Painlevé, as relações assintóticas são encontradas: $\phi : \beta = 0$ ou $\beta = 1/2$. Se tomarmos o caso $\beta = 0$, ficamos com dois resultados problemáticos, na medida em que a equação para M é considerada: tanto $\gamma = \beta = 0$, ou $\beta = 0$, $b^2 = 1/g^2$, γ são indeterminados. Assim, uma marca da falta da propriedade de Painlevé do tipo forte permanece.

5.5 Análise de caos

Como os resultados dos estudos analíticos sugerem que o sistema pode não ser integrável, voltamos, agora, para um estudo numérico para verificar se tal característica de não-integrabilidade é apresentada em uma forma caótica.

Método de SALI

Conforme apresentado em capítulo anterior, o principal instrumento para diagnóstico de caos que empregaremos é o Método de SALI. Na subseção que segue, faremos uso deste método, assim como também de diagramas de fase.

5.5.1 Equações de movimento e condições para análise

A integração do sistema foi feita por meio de um algoritmo de Gear [Gear,1971], com passo variável, o tamanho inicial do passo mínimo foi $h = 0.0001$, eventualmente era reduzido para preservar os valores do Hamiltoniano e de p_ζ , que são constantes de movimento conhecidas. Outro vínculo mantido ao longo da integração foi que G ($G \equiv 1 - g^2\phi^2$) deveria ser maior que zero. As seguintes equações de movimento de primeira ordem foram usadas na integração numérica:

$$\dot{A} = \frac{p_A}{G} ; \dot{p}_A = \frac{1}{G} \left[\frac{p_\zeta^2}{A^3} - ((Q/2)^2 + e^2 G \phi^2) A \right] ;$$

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{G} \left[\frac{p_\zeta}{A^2} + \frac{Q}{2} \right] ; \dot{p}_\zeta = 0 ;$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{G} [p_\phi + g\phi P_M] ;$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\phi = -\frac{1}{G^2} \left\{ g^2\phi \left[p_A^2 + \frac{p_\zeta^2}{A^2} + p_\phi^2 + P_M^2 \right] + g\phi(\kappa g + 2e)p_\zeta + g(1 + g^2\phi^2)p_\phi P_M \right. \\ \left. + (\kappa g + 2e)^2 \frac{\phi A^2}{4} + e^2 G^2 \phi M^2 + \frac{e^2 g^2 \phi}{4} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2)^2 \right. \\ \left. + \frac{e^2 G \phi}{2} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2) (1 + 2gM) \right\} ; \end{aligned}$$

$$\dot{M} = \frac{1}{G} [P_M + g\phi p_\phi] ;$$

$$\dot{P}_M = -\frac{1}{G} \left[e^2 G \phi^2 M + \frac{e^2}{4} (\phi^2 - v^2 + (2\kappa/e)M + 2gM\phi^2) \left(\frac{2\kappa}{e} + 2g\phi^2 \right) \right] .$$

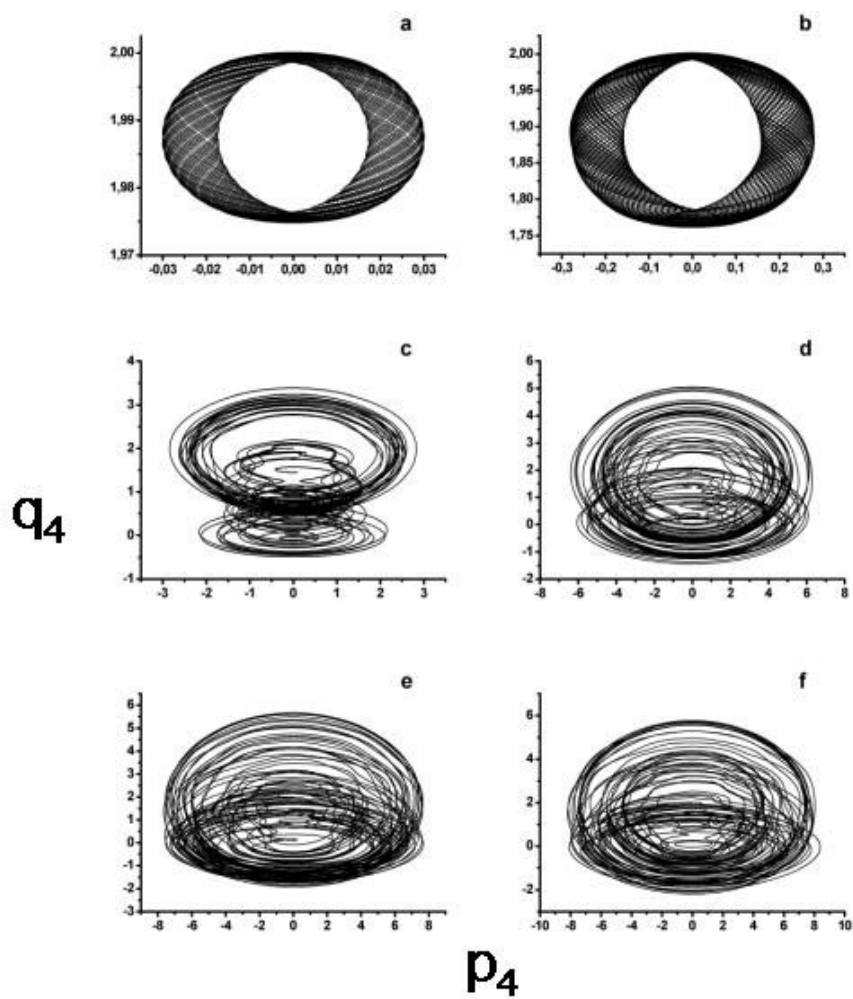
Por questão de simplicidade, adotamos a seguinte notação:

$\zeta = q_1$, $A = q_2$, $\phi = q_3$, $M = q_4$, $p_\zeta = p_1$, $p_A = p_2$, $p_\phi = p_3$, $P_M = p_4$. Para cada conjunto de parâmetros de entrada foi feita a integração numérica e o método de SALI foi usado depois que terminado o período transiente. A seguir, apresentamos amostras representativas de nossos achados.

5.5.2 Caso com $g = 0$

Considerando que nosso modelo vem de uma versão supersimétrica do modelo de Maxwell–Chern–Simons–Higgs com acoplamento não-mínimo, não é claro se recuperaremos propriedades dinâmicas semelhantes às observadas em outros estudos [Escalona et al,2000, Bambah et al,1993] quando $g = 0$. As duas propriedades principais encontradas nestes estudos foram a existência de caos na presença do termo de Maxwell e a sensibilidade das condições da evolução assintótica – ordem versus caos. Para verificar estas propriedades em nosso modelo, escolhemos as condições iniciais que definem um ponto fixo do sistema e, então, variamos q_3 de 0 a 2 com parâmetros fixados como $e = 2$, $k = 2$, $v = 2$ e, como mencionado acima, $g = 0$. As condições iniciais são $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 1$, $q_4(0) = 2$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = -1$, $p_3(0) = 0$ e $p_4(0) = 0$.

Os resultados são apresentados em uma sucessão de diagramas de fase. Na Figura 1, mostramos p_4 contra q_4 . Lembramos que poderíamos ter usado qualquer par de variáveis para perturbar o ponto fixo inicial e, então, apresentar o resultado nestes gráficos; mas, nossa escolha foi guiada pelo fato de que ambas as variáveis $q_3(\phi)$ e $q_4(M)$ estão presentes no potencial do tipo Higgs de nosso modelo. Depois, na Figura 2, mostramos um gráfico de SALI como uma função de q_3 .



a) $q_3(0) = 0.1$, b) $q_3(0) = 0.3$, c) $q_3(0) = 0.7$, d) $q_3(0) = 1.5$, e) $q_3(0) = 1.75$ e f) $q_3(0) = 2.0$.

Figura 1

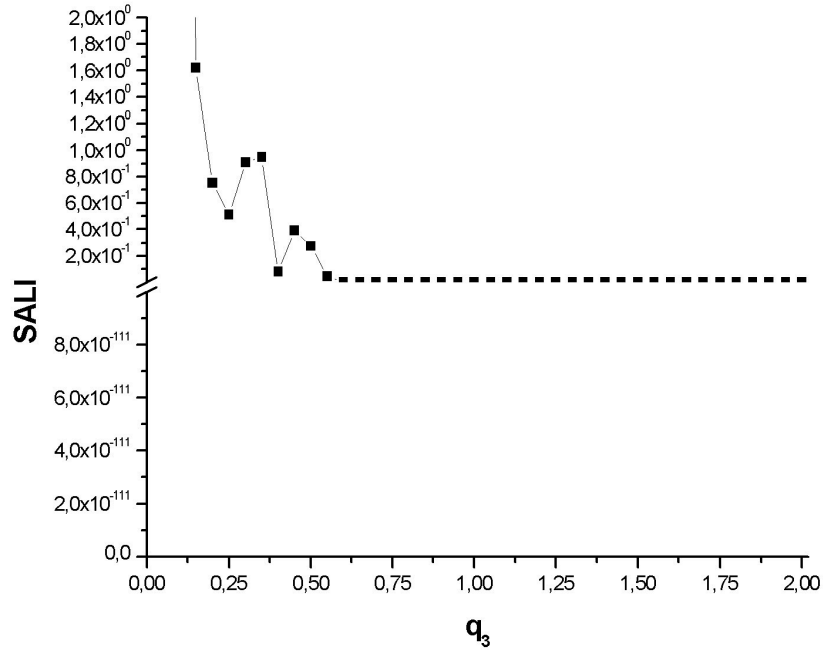


Gráfico de SALI com os parâmetros fixados em: $e = 2$, $k = 2$, $v = 2$ e $g = 0$.

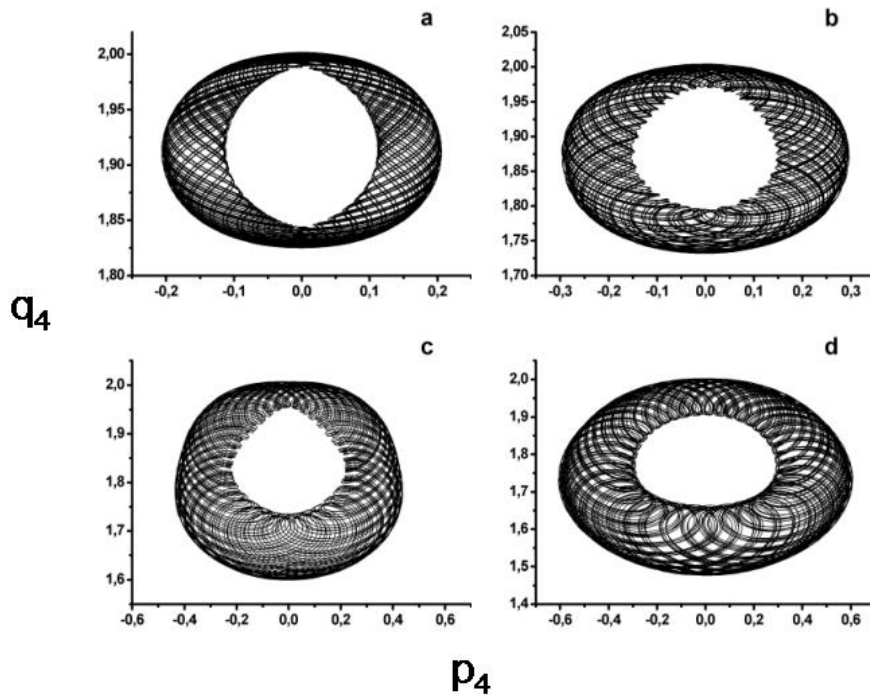
Figura 2

Podemos ver, na Figura 2, com ajuda de uma quebra no eixo vertical, que, para $q_3 \gtrsim 0,55$ o comportamento do sistema fica caótico, com SALI assumindo valores entre 10^{-89} e 10^{-33} .

5.5.3 Caso com $g \neq 0$ fora do regime de acoplamento crítico

Usamos aqui $g \neq 0$, mas fora do regime de acoplamento crítico, para conferir se a inclusão deste tipo de acoplamento pode transformar alguma configuração dinâmica em caótica, com condições iniciais que, no caso $g = 0$, conduziram à regularidade. Para isto, fixamos os parâmetros e as condições iniciais como $e = 2$, $k = 2$, $v = 2$ e $q_1(0) = 1$,

$q_2(0) = 1$, $q_3(0) = 0.25$, $q_4(0) = 2$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = -1$, $p_3(0) = 0$ e $p_4(0) = 0$ e analisamos o modelo com os seguintes valores de g : 0.1, 0.7, 1.5 e 2.5. Para todos estes casos, o comportamento permaneceu o mesmo, indicando que a variação de g não muda o comportamento do sistema de regular para caótico, como podemos ver na Figura 3.

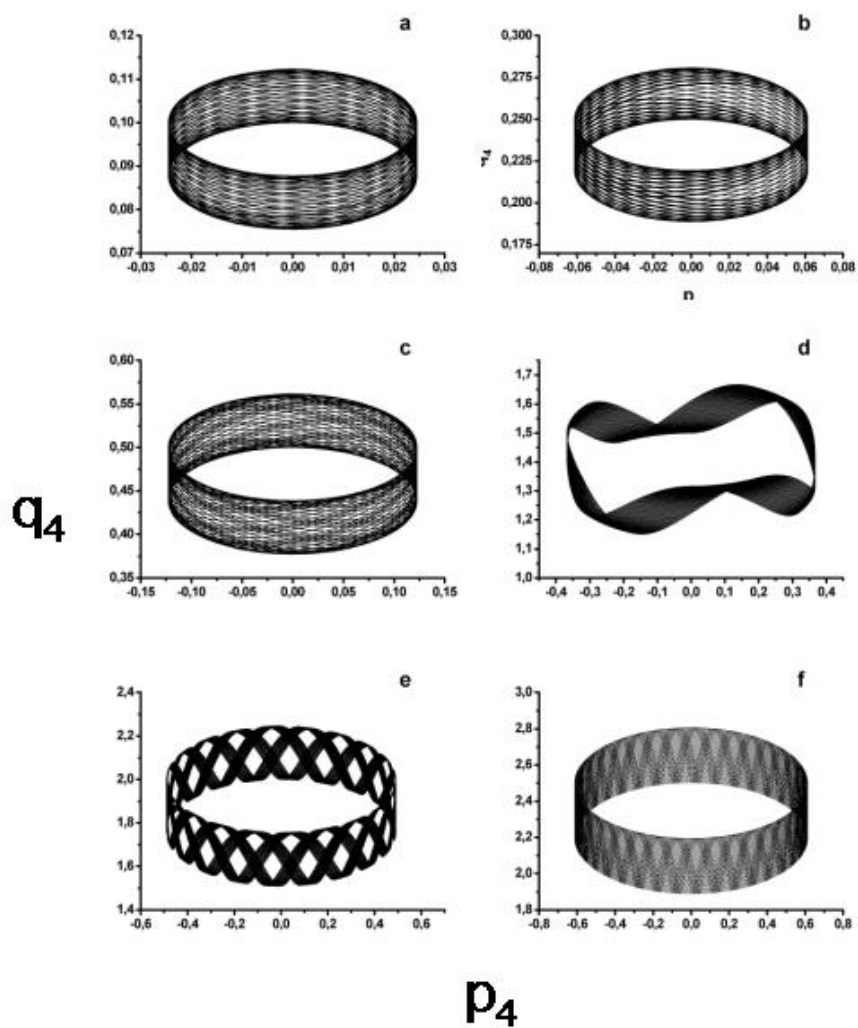


a) $g=0.1$, b) $g=0.7$, c) $g=1.5$ e d) $g=2.5$.

Figura 3

5.5.4 Caso com g no regime de acoplamento crítico

Agora, exploramos o regime de acoplamento crítico, onde $g = -\frac{e}{k}$. Fixamos os parâmetros $k = 2$, $v = 2$ e variamos e , enquanto mantemos as condições iniciais como um caso de perturbação do ponto fixo; contudo, neste caso, teremos um conjunto diferente de condições iniciais para cada e pois na expressão geral para o ponto fixo o elemento $p_4(0)$ depende de e . Pensando nisto, mantemos os mesmos valores $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = -1$, $p_3(0) = 0$, $p_4(0) = 0$ e fixamos $q_3(0) = 0.7$, um valor que torna o sistema caótico no caso $g = 0$ e $q_4(0) = e$. Neste caso, $q_3(0) = 0.7$ é uma perturbação, na medida em que, no ponto fixo, $q_3(0) = 0.0$. Como no caso $g = 0$, aqui também apresentamos um conjunto de diagramas de fase e um gráfico de e contra SALI. Nos gráficos de SALI, quebramos o eixo vertical para mostrar que os valores de SALI mínimos estão acima do limiar de caos, de acordo com os requisitos do método SALI, quer dizer, $\text{SALI} < 10^{-5}$.



Gráficos de fase com $q_3(0) = 0.7$ e e variando como:

a) $e = 0.10$, b) $e = 0.25$, c) $e = 0.50$, d) $e = 1.5$, e) $e = 2.0$ e f) $e = 2.5$.

Figura 4

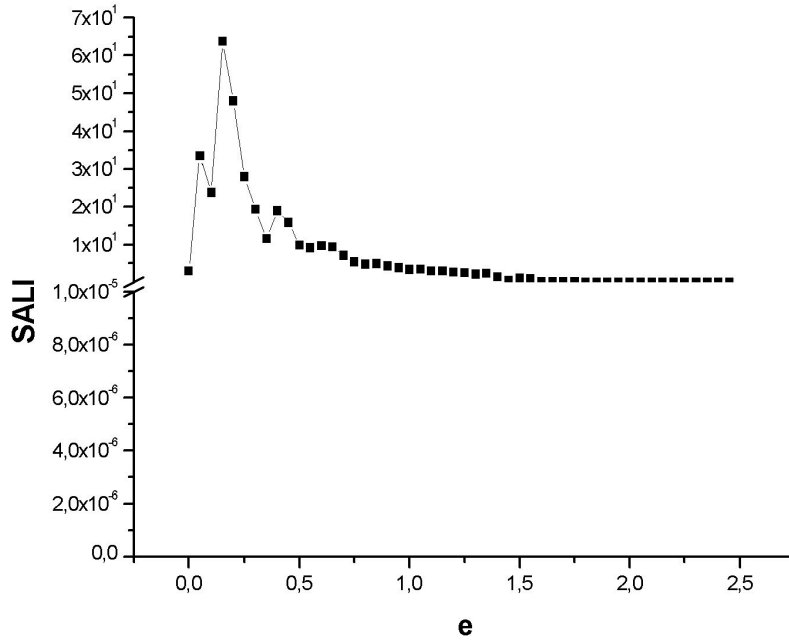


Gráfico de SALI em função de e com os parâmetros fixados em:

$$k = 2, v = 2 \text{ e } g = -e/k.$$

Figura 5

5.6 Conclusões.

Neste Capítulo, uma comparação entre o sistema mecânico integrável apresentado no trabalho da Ref. [Escalona et al,2000] - definido como limite de uma teoria completa $N=1$ -supersimétrica analisada no caso particular de acoplamento não-mínimo crítico (o que reduz a dinâmica do setor de *gauge* a equações de primeira ordem, motivando a nomenclatura “Chern–Simons puro”) - e o nosso modelo, descendente de uma teoria supersimétrica estendida $N = 2$, sugere que uma supersimetria extra pode ser responsável

[Evans et al,1996] pela não-integrabilidade global (no sentido de Painlevé forte). Ressalte-se que, mesmo na situação análoga de acoplamento não-mínimo crítico, a construção que apresentamos leva a um modelo “tipo Chern-Simons” (equações de primeira ordem) que não se revela globalmente integrável.

Nos estudos de caos, foram verificadas duas possibilidades principais. Primeiro, verificamos se o não-anulamento de g pode levar o sistema (previamente com condições iniciais e parâmetros tais que a regularidade fora observada para $g = 0$) a um regime caótico. O segundo ponto diz respeito ao efeito oposto, isto é, se uma configuração caótica para $g = 0$ poderia ficar regular sempre que g se tornasse não-trivial.

No caso de um acoplamento não-crítico, à medida que g aumenta a partir de zero, uma configuração estável para $g = 0$ mantém sua estabilidade, à medida em que g varia. Nesses casos, a diferença é que, para valores maiores de g , o sistema fica ligeiramente mais instável, mas sua dinâmica ainda é regular. Algo semelhante acontece para configurações que exibem caos para $g = 0$. Em tais casos, o sistema permanece caótico, mas um pouco mais instável. Para o acoplamento crítico, órbitas que eram caóticas para $g = 0$ agora ficam regulares; isto pode indicar que os acoplamentos críticos podem ter um papel estabilizador em nosso modelo. Estes resultados podem ser interpretados com base em dois pontos:

1. Para o regime de acoplamento crítico, ocorre um desacoplamento parcial entre as variáveis ϕ e M , e isto reduz a não-linearidade do sistema.
2. A quantidade G ($G = 1 - g^2\phi^2$) deve ser positiva, com $0 < G \leq 1$. Isto deve ocorrer para assegurar a positividade da energia, e a existência de um estado de vácuo estável. Nas Eqs. (5.3.8), (5.3.9) and (5.3.10), G acompanha todos os termos com derivadas temporais e, para valores grandes o bastante de g ou ϕ , G se torna pequeno, tornando dominantes os setores algébricos destas equações. Este fato pode

ter um efeito estabilizador, implicando que, no caso de um acoplamento não-crítico, a dinâmica para $g \neq 0$ não é tão diferente daquela do caso com $g = 0$. No regime de acoplamento crítico, o efeito estabilizador pode ser uma combinação dos destas duas propriedades apresentadas.

Também, é notável destacar que, para valores negativos de G , o volume do espaço de fase já não é conservado, e, como uma consequência, nós não temos mais um sistema Hamiltoniano. Por isto, os resultados relatados acima só fazem sentido se as condições iniciais e os parâmetros assegurarem a positividade de G . Finalmente, aparecem neste modelo configurações com comportamento mais regular (à medida que g aumenta) que aqueles encontrados na Ref. [Escalona et al,2000]. Perguntamos-nos até que ponto as condições físicas especiais – supersimetria estendida no sistema original - poderiam ser responsáveis por este efeito estabilizador.

Capítulo 6

Considerações Finais

Motivados por vários estudos presentes na literatura que trataram a questão do comportamento caótico em teorias de campos, e outros trabalhos que mostraram o caráter restritivo da supersimetria no que diz respeito a integrabilidade, efetuamos nesta tese um estudo exploratório com vistas a verificar a existência de caos em algumas teorias supersimétricas.

No Capítulo 2, estudamos o papel que a supersimetria $N = 1$ desempenha na versão mecânica da teoria de Yang-Mills e, após contruirmos a versão supersimétrica, apresentamos as condições de integrabilidade para o setor bosônico, tendo imposto simetria de paridade a este setor. Em seguida, impusemos a simetria de paridade a todo o modelo para verificamos até que ponto o setor fermiônico influenciava a integrabilidade do setor bosônico.

Os resultados mostraram que a supersimetria $N = 1$ não limitou mais as possibilidades de integrabilidade do que aquelas já observadas para o setor bosônico. Quanto à existência de caos, a supersimetria não ampliou a possibilidade de regime regular. O primeiro e terceiro modelos integráveis que surgem após a análise de paridade imposta ao setor

fermiônico correspondem a casos triviais (não-interagentes) e, portanto, de pouco interesse físico; teorias não-interagentes têm interesse apenas no que concerne a classificação e a descrição do espectro de partículas livres. Já o segundo modelo corresponde exatamente ao modelo original não-supersimétrico, onde, conforme apresentado no Capítulo 1, existe uma riqueza de possibilidades para dinâmica caótica, assim como para o comportamento regular.

Após estudarmos um modelo com supersimetria mínima, no Capítulo 2, fizemos o estudo de um modelo planar polinomial com supersimetria $N = 2$ e, tendo implementado a análise de integrabilidade do setor bosônico do modelo supersimétrico verificamos o aparecimento de casos integráveis para os sistemas acoplados e desacoplados que surgiram da análise de simetria de paridade imposta ao modelo.

Os casos acoplados encontrados podem ser classificados em dois tipos: um potencial do tipo quártico e um potencial que é funcionalmente a superposição de um potencial quártico e de Henon-Heiles.

Neste caso em que a simetria de paridade é imposta somente ao setor bosônico só foram gerados potenciais integráveis depois que levamos em conta os vínculos que aparecem no curso da análise de Painlevé. Isto significa que, se estes vínculos não são cumpridos, estaremos lidando com potenciais não-integráveis, segundo o teste de Painlevé, e, então, com a possibilidade de caos.

Não houve necessidade de fazermos uma análise de caos para os casos de potenciais com forma quártica, pois estes já haviam sido estudados na literatura. Nos casos para os quais os potenciais são dados pela superposição de um potencial de forma quártica e de Henon-Heiles estão, no presente momento, em consideração e, em um trabalho futuro, informaremos os resultados de uma análise completa [de Assis et al,2005:4]. Porém, demos um exemplo para ilustrar como este tipo de potencial não-integrável admite transição

ordem-caos usando um dos potenciais encontrados com esta característica.

Quando a simetria de paridade foi imposta à ação completa (interações bosônicas e fermiônicas), os potenciais gerados de acordo com este vínculo eram totalmente integráveis (sem a necessidade de fixar vínculos de integrabilidade).

No Capítulo 4, verificamos que, apesar de adotarmos um roteiro diferente para supersimetrização do modelo mecânico de Yang-Mills, comparado ao feito no Capítulo 3, chegamos ao mesmo modelo integrável. Cabe destacar que, no Capítulo 3, a supersimetria era aplicada a um modelo planar e naquela construção fizemos uso de supercampos reais. Neste Capítulo, a supersimetrização foi feita em uma versão mecânica de Yang-Mills com quatro graus de liberdade e os supercampos usados eram quirais.

Neste caso, os vínculos do modelo supersimétrico nos levam a um caso integrável, tanto quando olhamos somente para o setor bosônico como quando levamos em consideração o setor fermiônico. Cabe destacar que o uso de supercampos quirais implicou em mais vínculos do que quando realizamos a construção em termos de supercampos reais.

Após estas investigações em modelos mecânicos supersimétricos, no Capítulo 5, tratamos de um modelo mecânico supersimétrico construído diretamente a partir da redução via campos espacialmente homogêneos de uma teoria de campos $N = 2$ de Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não-mínimo.

A comparação entre o sistema mecânico integrável apresentado no trabalho da Ref. [Escalona et al,2000] - definido como limite de uma teoria completa $N=1$ -supersimétrica analisada no caso particular de acoplamento não-mínimo crítico (o que reduz a dinâmica do setor de *gauge* a equações de primeira ordem, motivando a nomenclatura “Chern-Simons puro”) - e o nosso modelo, descendente de uma teoria supersimétrica estendida $N = 2$, sugere que uma supersimetria extra pode ser responsável [Evans et al,1996] pela não-integrabilidade global (no sentido de Painlevé forte). Ressalte-se que, mesmo na si-

tução análoga de acoplamento não-mínimo crítico, a construção que apresentamos leva a um modelo “tipo Chern-Simons” (equações de primeira ordem) que não se revela globalmente integrável.

Nos estudos de caos feitos neste Capítulo, duas possibilidades principais foram discutidas.

Primeiro, se a manutenção de valores não-nulos de g levaria o sistema (antes com condições iniciais e parâmetros tais que a regularidade fora observada para $g = 0$) a um regime caótico. O segundo ponto diz respeito ao efeito oposto, isto é, se uma configuração caótica para $g = 0$ poderia transitar para uma regular sempre que g se tornasse não-trivial.

No caso de um acoplamento não-crítico, à medida que g aumenta a partir de zero, uma configuração estável para $g = 0$ tem sua estabilidade mantida, à medida em que g varia. Nesses casos, a diferença é que, para valores maiores de g , o sistema fica ligeiramente mais instável, porém sua dinâmica ainda é regular. Algo semelhante acontece para configurações que exibem caos para $g = 0$. Em tais casos, o sistema permanece caótico, mas um pouco mais instável. Para o acoplamento crítico, as órbitas que eram caóticas para $g = 0$ agora ficam regulares; isto pode indicar que os acoplamentos críticos podem ter um papel estabilizador em nosso modelo. Estes resultados podem ser interpretados com base em dois pontos:

1. Para o regime de acoplamento crítico, ocorre um desacoplamento parcial entre as variáveis ϕ e M , e isto reduz a não-linearidade do sistema.
2. A quantidade G ($G = 1 - g^2\phi^2$) deve ser positiva, com $0 < G \leq 1$. Isto deve ocorrer para assegurar a positividade da energia, e a existência de um estado de vácuo estável. Nas eqs. (5.3.8), (5.3.9) and (5.3.10), G acompanha todos os termos com derivadas temporais o que possibilita, para valores grandes o bastante de g ou

ϕ , que G se torne pequeno, fazendo com que os setores algébricos destas equações dominem. Este fato pode ter um efeito estabilizador, implicando que, no caso de um acoplamento não-crítico, a dinâmica para $g \neq 0$ não é tão diferente daquela do caso com $g = 0$. Sugerimos, portanto, que no regime de acoplamento crítico, o efeito estabilizador possa se dar por uma combinação destas duas propriedades apresentadas.

Também, é notável destacar que, para valores negativos de G , o volume do espaço de fase já não é conservado, e, como uma consequência, não temos mais um sistema Hamiltoniano. Por isto, os resultados relatados só faziam sentido se as condições iniciais e os parâmetros assegurassem a positividade de G . Finalmente, aparecem neste modelo configurações com comportamento mais regular (à medida que g aumenta) do que aqueles encontrados na Ref. [Escalona et al,2000]. Perguntamo-nos até que ponto as condições físicas especiais – supersimetria estendida no sistema original - poderiam ser responsáveis por este efeito estabilizador.

Bibliografia

- [Ablowitz, Ramani e Segur,1978] M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, Lett. Nuovo Cimento **23** (9),333 (1978).
- [Ablowitz e Segur,1997] M.J. Ablowitz, H. Segur, Phys. Rev. Lett.**38** 1103 (1977).
- [Ablowitz e Fokas,1981] M.J. Ablowitz, S. Fokas, Phys. Rev. Lett.**47** 1096 (1981).
- [Almeida,1991] A. M. O. de Almeida, Sistemas Hamiltonianos: Caos E Quantizacao (Unicamp, Campinas, 1991).
- [Antillón et al,1997] A. Antillón, J. Escalona, M. Torres, Phys. Rev. **D55** 6327 (1997).
- [Aref'eva et al,1998] I.Y. Aref'eva, A.S. Koshelev, P.B. Medvedev Mod. Phys. Lett. A **13**, 2481 (1998).
- [Aref'eva et al,1999] I.Y. Aref'eva, P.B. Medvedev, O.A. Rytchkov, I.V. Volovich, Chaos, Solitons & Fractals **10**, 213 (1999).
- [Aref'eva et al,2000] I.Y. Aref'eva, A.S. Koshelev, P.B. Medvedev, Nucl. Phys. B **579**, 411 (2000).
- [de Assis et al,2005:1] L. P. G. de Assis, R. Paschoal, J. A. Helayël Neto, Planar Supersymmetric Quantum Mechanics of a Charged Particle, aceito para publicação na Physics Letters A. (2005). Também como pré-print:hep-th/0407109.

- [de Assis et al,2005:2] L. P. G. de Assis, R. Paschoal, J. A. Helayël Neto, Supersymmetry and integrability in planar mechanical systems, submetido para publicação no Journal of Physics A, (2005). Também como pré-print:hep-th/0504212.
- [de Assis et al,2005:3] L. P. G. de Assis, F. Haas, A. L. M. A. Nogueira, J. A. Helayël Neto, On the Integrability and Chaos of an N=2 Maxwell-Chern-Simons-Higgs Mechanical Model, submetido para publicação no Physical Review D,(2005). Também como pré-print:hep-th/0505159.
- [de Assis et al,2005:4] L.P.G. de Assis, R.C. Pachcoal, J.A. Helayël-Neto, Trabalho em andamento.
- [Bamba et al,2002] B.A. Bambah, C. Mukku, M.S. Sriram, S. Lakshmibala, hep-th/0203177 e referências lá presentes.
- [Bamba et al,1993] B.A. Bambah, S. Lakshmibala, C. Mukku, M.S. Sriram, Phys. Rev. D **47**, 4677 (1993).
- [Bambah et al,1993] B.A. Bambah, S. Lakshmibala, C. Mukku, M.S. Sriram, Phys. Rev. **D47**, 4677 (1993).
- [Barrow e Levin,1998] J.D. Barrow, J. Levin, Phys. Rev. Lett. **80**, 656 (1998).
- [Benettin et al,1980] G.Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.M. Strelcyn, Meccanica **15**, 21 (1980).
- [Berg et al,1999] B.A. Berg, H. Markum, R. Pullirsch, Phys. Rev. D **59** (09), art. no.-097504 (1999).
- [Berman,1994] G. Berman, E. Bulgakov, D. Holm, Y. Kluger, Phys. Lett. A **194**, 251 (1994).

- [Biro et al,1994] T.S. Biro, S.G. Matinyan e B.Müller, Chaos and Gauge Field Theory (World Scientific Publishing Co Pte ltd, New Jersey, 1994).
- [Biro et al,1994] T.S. Biro, C. Gong, B. Muller, Trayanov, Inter. J. Mod. Phys. C-Physics and Computers **5**, 113 (1994).
- [Biro et al,2001] T.S. Biro, S.G. Matinyan, B. Muller, Found. Phys. Lett. **14**, 471 (2001).
- [Biro et all,2000] T.S. Biro, N. Hormann, H. Markum, R. Pullirsch, Nucl. Phys. B-Proc. Suppl. **86**, 403 (2000).
- [Bittner et al,2001] E. Bittner, H. Markum, R. Pullirsch, Nucl. Phys. B-Proceedings Supplements **96**, 189 (2001).
- [Bittner et al,2004] E. Bittner, S. Hands, H. Markum, R. Pullirsch, Progr. Theor. Phys. Supplement, 295 (2004).
- [Bogomol'nyi,1976] E.B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [Brunelli e Das,1991] J.C. Brunelli, A. Das, J. Math. Phys. **36**, 268 (1995).
- [Casettit et al,1999] L. Casettit, R. Gatto, M. Pettini, J. Phys. A-Math. Gen. **32**, 3055 (1999).
- [Christiansen et al,1999:1] H.R. Christiansen, M.S.Cunha, J.A.Helayël-Neto, L.R.U. Manssur and A.L.M.A. Nogueira, Int. J. Mod. Phys. **A14** 147 (1999).
- [Christiansen et al,1999:2] H.R. Christiansen, M.S.Cunha, J.A.Helayël-Neto, L.R.U. Manssur and A.L.M.A. Nogueira, Int. J. Mod. Phys. **A14** 1721 (1999).
- [Christiansen et al,2000] P.L. Christiansen, J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii, N.A. Kostov, Proc. R. Soc. London Ser. A **456**, 2263 (2000).

- [Damgaard e Huffel,1988] P.H. Damgaard, H. Huffel, Stochastic Quantization, (World Scientific Publishing Co., Singapore, 1988).
- [Damour e Henneaux,2000] T. Damour, M. Henneaux, Gen. Rel. Grav. **32**, 2339 (2000).
- [Damour,2002] T. Damour, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2655 (2002).
- [Damour e Henneaux,2001] T. Damour, M. Henneaux, Phys. Rev. Lett. **86**, 4749 (2001).
- [Damour,2003:1] T. Damour, Annales Henri Poincare **4**, S291 (2003).
- [Damour,2004] T. Damour, Inter. J. Mod. Phys. A **19**, 1499 (2004).
- [Damour,2003:2] T. Damour, Nuovo Cimento B **118**, 967 (2003).
- [Damour,2002] T. Damour, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2655 (2002).
- [Das, Huang e Roy,1991] A. Das, W.J. Huang, S. Roy, Phys. Lett. A **157**, 113 (1991).
- [Dey et al,1993] B. Dey, C.N. Kumar,A. Sen, Inter. J. Mod. Phys. A **8**, 1755 1993.
- [Dobrowolski e Szczesny,2000] T. Dobrowolski, J. Szczesny, Annalen der Physik **9**, 571 (2000).
- [Eckhardt, Hose e Pollak,1989] B. Eckhardt, G. Hose, E. Pollak, Phys. Rev. A **39**, 3776 (1989).
- [Escalona et al,2000] J. Escalona, A. Antillón, M. Torres, Y. Jiang, P. Parmananda, Chaos **10**, 337 (2000).
- [Evans et al,1996] Como um exemplo de “susy-destruição” da integrabilidade nós sugerimos J.M. Evans, J.O. Madsen, Phys. Lett. **B389**, 665 (1996) .
- [Evans e Madsen,1996] J.M. Evans, J.O. Madsen, Phys. Lett. B **389**, 665 (1996).

- [Floratos e Iliopoulos,1983] E.Floratos, J. Iliopoulos, Nucl. Phys. B **214**, 392 (1983).
- [Froyland,1983] J. Froyland, Phys. Rev. D **27**, 943 (1983).
- [Gal'tsov e Dyadichev,2003] D.V. Gal'tsov, V.V. Dyadichev, Jetp Letters **77**, 154 (2003).
- [Gear,1971] C.W. Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. (Prentice-Hall, 1971).
- [Gozzi, Reuter e Thacker,1992] E. Gozzi, M.Reuter, W.D. Thacker, Chaos, Solitons & Fractals **2**, 441 (1992).
- [Heisenberg,1949] W. Heisenberg, Nature **64**, 65 (1949).
- [Heiss e Kotze,1991] W.D. Heiss, A.A. Kotze, Phys. Rev. A **44**, 2403 (1991).
- [Henneaux,2001] M. Henneaux, Fortschritte Der Physik-Progress of Physics **49**, 529 (2001).
- [Hlavaty,1989] L. Hlavaty, Phys. Lett. A **137**, 173 (1989).
- [Horne e Moore,1994] J.H. Horne,G.Moore, Nucl. Phys. B **432** (1-2), 109-126 (1994).
- [Ichtiaroglou,1989] S. Ichtiaroglou, J. Phys. A-Math. Gen. **22**, 3461 (1989).
- [Joy e Sabir,1992:1] M.P. Joy, M. Sabir, Pramana-J. Phys. **38**, L91 (1992).
- [Joy e Sabir,1992:2] M.P. Joy, M. Sabir, J. Phys. A-Math. Gen. **25**, 3721 (1992).
- [Junker,1996] G. Junker, Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics, (Springer, Berlin, 1996).
- [Lavkin,1992] A.G. Lavkin, Sov. J. Nucl. Phys. **55**, 1422 (1992).
- [Kawabe,1992] T. Kawabe, Physics Letters B **274**, 399 (1992).

- [Karkowski,1990] J. Karkowski, Acta Phys. Pol. B **21**, 529 (1990).
- [Kawabe,1993] T. Kawabe, J. Phys. A-Math. Gen. **26**, L1131 (1993).
- [Kawabe,1995] T. Kawabe, Phys. Lett. B **343**, 254 (1995).
- [Kaminaga e Saito,1998:1] Y. Kaminaga, Y. Saito, M. Yahiro, Phys. Lett. A **243**, 301 (1998).
- [Kaminaga e Saito,1998:2] Y. Kaminaga, Y. Saito, Phys. Lett. B **426**, 347 (1998).
- [Kawabe e Ohta,1991] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Rev. D **44**, 1274 (1991).
- [Kawabe e Ohta,1994] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Lett. B **334**, 127 (1994).
- [Kawabe e Ohta,1997] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Lett. B **56**, 3660 (1997).
- [Kawabe e Ohta,2000] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Rev. D **6110**, art.no. 105013 (2000).
- [Kawabe,2003] T. Kawabe, Phys. Rev. E **67**,(2003).
- [Kogan,1991] I.I. Kogan, Phys. Lett. **B262**, 83 (1991).
- [Kowalevskaia,1889] S. Kowalevskaia, Acta Math.**12** 177 (1889).
- [Kuvshinov e Kuzmin,2002] V.I. Kuvshinov, A.V. Kuzmin, J. of Nonl. Math. Phys. **9** (4), 382 (2002).
- [Kuvshinov e Kuzmin,2002] V.I. Kuvshinov, A. Kuzmin, Phys. Lett. A **296**, 82 (2002).
- [Kuvshinov e Kuzmin,2003] V. Kuvshinov, A. Kuzmin, Progr. Theor. Phys. Supplement, number 150 (2003).
- [Lakshmibala et al,1997] S. Lakshmibala, B.A. Bambah, M.S. Sriram, C. Mukku, Pramana J. Phys. **48**, 617 (1997).

- [Lakshmanan e Sahadevan,1993] M. Lakshmanan, R. Sahadevan. Phys. Reports **224**, 1 (1993).
- [Latora e Bazeia,1999] V. Latora, D. Bazeia, Inter. J. Mod. Phys. A **14**, 4967 (1999).
- [Lavkin,1991] A.G. Lavkin, Soviet Journal of Nuclear Physics-USSR **53**, 377 (1991).
- [Matinyan et al,1997:1] S.G. Matinyan, B. Muller, Phys. Rev. Lett. **78**, 2515 (1997).
- [Matinyan et al,1997:2] S.G. Matinyan, B. Muller, Found. Phys. **27**, 1237 (1997).
- [Matinyan et al,2003] S.G. Matinyan, Y.J. Ng, J. Phys. A-Math. Gen. **36**, L417 (2003).
- [Matinyan et al,1981] S.G. Matinyan, G.K. Savvidy, N.G.T. Savvidy, Sov. Phys. JETP **53**, 421 (1981).
- [Matinyan e Müller,1997] S.G. Matinyan, B. Müller, Found. Phys. **27**, 1237 (1997).
- [Markum et al,2003] H. Markum, R. Pullirsch, W. Sakuler, Nucl. Phys. B-Proc. Suppl. **119**, 757 (2003).
- [Marshakov,1999] A.V. Marshakov, Phys. Part. Nuclei **30**, 488 (1999).
- [Mironov,2002] A. Mironov, Phys. Part. Nuclei **33**, 537 (2002).
- [Mukku et al,1997] C. Mukku, M.S. Sriram, J. Segar, B.A. Bambah, S. Lakshmibala, J. Phys. A-Math. Gen. **30**, 3003 (1997).
- S. Lakshmibala, J. Phys. A-Math. Gen. **30**, 3003 (1997).
- [Müller e Trayanov,1992] B. Müller, A. Trayanov, Phys. Rev. Lett. **68**, 3387 (1992).
- [Navrátil,1996] P. Navrátil, Phys. Lett. **B365**, 119 (1996).
- [Nikolaevski e Shur,1982] E.S. Nikolaevskii, L.S. Shur, JETP Lett. **36**, 218 (1982).

- [Ohta e Kawabe,1997] S. Ohta, T. Kawabe, Phys. Rev. D **56**, 3660 (1997).
- [Olver,1986] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics No. 107. Springer-Verlag: New York, 1986.
- [Paschoal,2004] R.C. Paschoal, Configurações de Campos e Mecânica Quântica Supersimétrica no Contexto da Eletrodinâmica Planar, Tese de Doutorado CBPF (2004).
- [Pullirsch et al,1998] R. Pullirsch, K. Rabitsch, T. Wettig, H. Markum, Phys. Lett. B, (1998).
- [Rama e Sathiapalan,1999] S.K. Rama, B. Sathiapalan, Mod. Phys. Lett. A **14**, 2635 (1999).
- [Salasnich,1995] L Salasnich, Phys. Rev. D **52**, 6189 (1995).
- [Salasnich,1997] L. Salasnich, Mod. Phys. Lett. A **12**, 1473 (1997).
- [Salasnich,1999] L. Salasnich, J. Math. Phys. **40**, 4429 (1999).
- [Salasnich,1998] L. Salasnich, Phys. Atom. Nuclei **61**, 1878 (1998).
- [Santhanam et al,1997] M.S. Santhanam, V.B. Sheorey, A. Lakshminarayan, Pramana-J. Phys. **48**, 439 (1997).
- [Sarlet e Cantrijn,1981] W. Sarlet, F. Cantrijn, *Generalizations of Noether's Theorem in Classical Mechanics*. SIAM Rev. **23** 467-494 (1981).
- [Seiberg,1998] N. Seiberg, The Superworld, hep-th/9802144(1998).
- [Sriram et al,1994] M.S. Sriram, C. Mukku, , S. Lakshmi bala, B.A. Bambah, Phys. Rev. D **49**, 4246 (1994).
- [Steeb et al,1991] W.H. Steeb, N. Euler, P. Mulser, Nuovo Cimento B **106**, 1059 (1991).

- [Sriram e Segar,1997] M.S. Sriram, J. Segar, Pramana-J. Phys. **48**, 205 (1997).
- [Skokos et al,2004] C. Skokos, C. Antonopoulos, T.C. Bountis, M.N. Vrahatis, J. Phys. A-Math. Gen. **37**, 6269 (2004).
- [Skokos et al,2003] C. Skokos, C. Antonopoulos, T.C. Bountis, M.N. Vrahatis, Prog. Theor. Phys. Suppl. (150), 439-443 2003.
- [Steeb et al,1988] W.H. Steeb, J.A. Louw, W. Debeer, A. Kotze, Phys. Scr. **37**, 328 (1988).
- [Stern,1991] J. Stern, Phys. Lett. **B265** , 119 (1991).
- [Tabor,1989] M.Tabor, Chaos and Integrability in Non-Linear Dynamics : An Introduction (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989).
- [Tomiya e Yoshinaga,2000] M. Tomiya, N. Yoshinaga, Physica E **18**, 350 (2003).
- [Witten e Olive,1978] E. Witten, D.I. Olive, Phys. Lett **B78**, 97 (1978).
- [Wolf et al,1985] A. Wolf,J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Physica D **16**, 285 (1985).
- [Zhang,1996] D. G. Zhang, Phys. Lett. A **223**, 436 (1996).