

TESE DE
MESTRADO

Escadas e Tubos de Spin Multiparamétricos

ZEILA VIRGINIA TORRES SANTOS

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, MARÇO 2006

Dedicatória

À minha família

Agradecimentos

Ao Professor Itzhak Roditi pelo apoio, em todos estes anos sob a sua orientação.

Aos professores José A. Helayel-Neto, Tião, Alexander Smith, por tudo que eu aprendi e seguirei aprendendo com eles. A todos aqueles *amigos que sempre estiveram por perto* nestes anos no CBPF, em especial ao Victor José, Moises, Carolina e Boiúna

Ao CNPq, pela bolsa a mim concedida.

Muito obrigada.

Resumo

Neste trabalho nós fazemos o estudo algébrico do modelo de Heisenberg XXZ e do modelo de Tubo de spin. Em ambos os casos o trabalho é feito com a introdução de parâmetros livre. Os modelos são resolvidos através do Método de Espalhamento Inverso Quântico *MEIQ* e as equações do Ansatz de Bethe *AB* são derivadas. Também obtemos os Valores Próprios e o Gap de Energia dos Hamiltonianos que descrevem os modelos.

Sumário

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Índice	iv
Introdução	2
1 Método de Espalhamento Inverso Quântico	4
1.1 Introdução	4
1.2 Equação de Yang-Baxter	6
1.3 Ansatz de Bethe Algébrico	9
1.4 Escadas de spin	12
1.5 Grupos Quânticos e parâmetros	16
1.5.1 <i>Definição de grupo:</i>	16
1.5.2 <i>Definição de grupos quânticos:</i>	16
1.5.3 <i>Álgebras de Hopf quase-triangulares:</i>	18
1.5.4 <i>Sistemas integráveis multiparamétricos:</i>	21
2 Método algébrico do Ansatz de Bethe para escadas de spin multiparamétricas.	23
2.1 Primeiro nível	28

2.2	Segundo nível	31
2.3	Terceiro nível	33
2.4	Equações do Ansatz de Bethe	37
2.5	Valores próprios da energia.	41
2.6	Gap de spin e diagonalização da Hamiltoniana	42
2.6.1	Método da diagonalização exata:	42
2.6.2	Método das equações do Ansatz de Bethe (EAB):	48
2.7	Método Algébrico do Ansatz de Bethe para o modelo multiparamétrico geral de seis parâmetros livres	50
2.7.1	Valores próprios da energia e gap de spin	53
3	Tubo de spin quântico SU(8)	56
3.1	Método de transformação de similaridade	60
3.2	Equações do Ansatz de Bethe	63
A	Diagonalização para o caso de seis parâmetros da escada de spin.	67
	Conclusões	75
	Bibliografia	77

Abstract

In this work we study two integrable models, a spin ladder and a spin tube, they are based, respectively, in the algebras of $SU(4)$ and $SU(8)$. Such models are exactly solved through the Algebraic Bethe Ansatz method. The two models are investigated with the introduction of free parameters by a procedure that preserves their integrability. For the ladder model we can introduce up to six parameters and for the tube model up to twenty eight. In both cases we obtain the Bethe ansatz equations, the energy eigenvalues and we study the spin gap.

Introdução

Esta tese se centra exclusivamente em modelos de escadas. Estes são arranjos simples de cadeias de spin. Uma cadeia de spin é um arranjo lineal de spines quânticos com uma dada interação. As interações são usualmente escolhidas com a intenção de produzir uma escada exactamente solúvel.

Talvez o exemplo mais conhecido de um modelo solúvel é o modelo unidimensional de spin $1/2$ de Heisenberg [7], é o modelo mais simples, pois nele somente aparecem interações do tipo Heisenberg entre as pernas e entre os degraus. Tais interações são apenas entre os vizinhos mais próximos.

Cadenas de Heisenberg são exemplos de modelos integráveis de $su(2)$ invariantes. Estes modelos são isotopicos no espaço de spin.

Nos concentraremos no modelo XXZ de spin $1/2$ e logo depois no modelo de Tubo de spin.

Um fato importante ao respeito de todos os materiais tipo escada, é que eles apresentam um gap de energia. Dizemos que um sistema têm um gap de energia quando existe uma diferença entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado. Isto se apresenta sem importar o tamanho do sistema, incluindo no limite termodinâmico. E dizemos que o sistema é gap nulo se tal energia não existe acima do estado fundamental [2]. A presença do gap nestas estruturas indicam que são fortes candidatas a explicar a supercondutividade, isto é uma condição necessaria mas não suficiente para que a superconductividade

a altas temperaturas ocorra sob dopagem.

O método utilizado para a resolução de tais modelos está baseado no Método do Espalhamento Inverso Quântico (*MEIQ*) [1] que permite encontrar o espectro de um modelo através da resolução de um sistema de equações transcendentais chamadas de *Equações do Ansatz de Bethe*, onde os autovetores e autovalores são caracterizados pelas raízes destas equações.

A matriz R introduzida desempenha um papel semelhante ao das constantes de estrutura nas *algebras de Lie* [20]. Nesta tese, empregaremos o *MEIQ* partindo de uma matriz R multiparamétrica que inclui o modelo de escada *XXZ*. Foi Faddeev e a escola russa [6] que deram um impulso na área de sistemas integráveis com o desenvolvimento do *MEIQ*. O *MEIQ* foi desenvolvido para solucionar alguns modelos em Mecânica Quântica Estatística e Teoria Quântica de Campos, os quais são definidos sobre a cadeia, é dizer uma rede unidimensional.

O capítulo 1, é dedicado a uma revisão geral do Método de Espalhamento Inverso Quântico que é uma poderosa ferramenta algébrica que contém a condição de integrabilidade dada pela equação de Yang-Baxter (*Y-B*) e fornece um método algébrico para determinar o espectro dos modelos, através das matrizes de monodromia determinada pela relação de *Y-B*.

O capítulo 2, é dedicado ao analisis do Método algébrico do Ansatz de Bethe do modelo de escada *XXZ* de spin $\frac{1}{2}$, com a inclusão de três e seis parâmetros livres.

O capítulo 3 tratará do modelo de Tubo de spin. Os tubos de spin são arranjos de cadeias com condições de contorno periódicas.

O modelo de escadas e tubo são modelos solúvel já que a algebra deles obedecem as relações de Yang-Baxter, que é condição suficiente para que um modelo seja integrável.

Capítulo 1

Método de Espalhamento Inverso

Quântico

1.1 Introdução

O Método de Espalhamento Inverso Quântico (*MEIQ*) [2] é uma poderosa ferramenta algébrica que contém a condição de integrabilidade dada pela equação de *Yang-Baxter* e fornece um método algébrico para determinar o espectro dos modelos, através da álgebra das matrizes de monodromia determinada pela relação de *Yang-Baxter* (*Y-B*). Com o mesmo método, pode-se tratar diferentes modelos, como Estatística Clássica em 2-dimensões, redes quânticas em 1-dimensão e Teorias Quânticas de Campos em (1+1)-dimensões. Além de unificar e sistematizar o tratamento de diferentes teorias, este método permite analisar a estrutura algébrica dos modelos. O *MEIQ* tem levado a novos resultados no estudo de sistemas integráveis. Entre eles está o fato de que diversos modelos de elétrons fortemente correlacionados podem ser resolvidos por meio deste método. Em particular o modelo *t-J*, que é um dos modelos mais simples para elétrons correlacionados,

e cujo Hamiltoniano é dado por

$$H_{t-J} = P \left\{ -t \sum_{j,\sigma} (c_{j,\sigma}^+ c_{j+1,\sigma} + c_{j+1,\sigma}^+ c_{j,\sigma}) \right\} P + J \sum_j \left(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} - \frac{n_j n_{j+1}}{4} \right)$$

pode ser resolvido exatamente em uma dimensão para uma determinada escolha de t e J .

Para o caso em que $J=2t$, $c_{j,\sigma}^+$ e $c_{j,\sigma}$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação que criam ou destróem um spin σ no sítio j . Neste caso o Hamiltoniano é dito super-simétrico pelo fato de se tornar invariante frente a superálgebra $gl(2|1)$. Este modelo foi proposto por Anderson[3], Zhang e Rice[4] em 1987 como um limite não trivial do modelo de Hubbard.

A equação de $Y-B$ pode ser vista como a análoga da *Identidade de Jacobi*. Qualquer matriz R satisfazendo as equações de $Y-B$ gera um modelo exatamente solúvel em Física Estatística Clássica sobre uma rede 2-dimensional.

Um exemplo a se considerar é o modelo XXX de spin $\frac{1}{2}$ na teoria do ferromagnetismo, *i.e.*, uma cadeia de átomos onde cada ponto j da cadeia está associado ao operador de spin definido da seguinte forma:

$$\vec{S}_j = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_j = \frac{1}{2} (\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z),$$

onde $\vec{\sigma}_j^i$ são as matrizes de Pauli usuais, dadas por:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Estas matrizes pertencem à representação de spin $\frac{1}{2}$ da Álgebra de Lie do grupo das rotações, atuando no espaço vetorial complexo 2-dimensional $V = C^2$.

Existem duas topologias para uma cadeia 1-dimensional: *aberta e fechada*[5]. Assim temos dois modelos de Heisenberg que descrevem a interação entre os primeiros vizinhos para estas topologias:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{L-1} H_{n,n+1} && \text{(aberto)} \\ H &= \sum_{n=1}^{L-1} H_{n,n+1} + H_{L,1} && \text{(fechado)} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

A Hamiltoniana de dois sítios é [6]:

$$H_{n,n+1} = \frac{J}{4} (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1} - I_L), \quad (1.1.3)$$

onde $n = 1, 2, \dots, L$ são os sítios da rede. Os operadores $\vec{\sigma}_n$ definidos como

$$\begin{array}{ccc} 1 & n & L \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vec{\sigma}_n & = & I \otimes \dots \otimes I \otimes \vec{\sigma} \otimes I \otimes \dots \otimes I, \end{array} \quad (1.1.4)$$

atuam sobre

$$\begin{array}{ccc} 1 & n & L \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ V \otimes \dots \otimes V \otimes \dots \otimes V, \end{array} \quad (1.1.5)$$

de modo não trivial sobre o espaço quântico n -ésimo e trivialmente nos outros.

1.2 Equação de Yang-Baxter

Consideremos a matriz R :

$$\begin{aligned}
R(\lambda) &= \lambda I \otimes I + iP \\
&= \begin{pmatrix} \lambda+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & i & 0 \\ 0 & i & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{1.2.6}
\end{aligned}$$

onde

$$a = \lambda + i, \quad b = \lambda, \quad \text{e } c = i \tag{1.2.7}$$

e P é a matriz de permutação. Levando em consideração que $R(\lambda)$ atua no espaço $V \otimes V$, λ é chamado de parâmetro espectral.

Mostraremos que esta matriz é solução da equação de Y - B . Para este propósito definimos:

$$R_{12}(\lambda) = R(\lambda) \otimes I = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{1.2.8}$$

$$R_{23}(\lambda) = I \otimes R(\lambda) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (1.2.9)$$

e finalmente,

$$R_{13}(\lambda) = P_{23}R_{12}(\lambda)P_{23},$$

com

$$P_{23} = I \otimes P,$$

onde P é uma matriz definida na equação (1.2.6). Assim escrevemos,

$$R_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (1.2.10)$$

A equação de Y - B é:

$$R_{12}(\lambda - \lambda') R_{13}(\lambda) R_{23}(\lambda') = R_{23}(\lambda') R_{13}(\lambda) R_{12}(\lambda - \lambda'). \quad (1.2.11)$$

Substituindo as matrizes (1.2.8), (1.2.9) e (1.2.10) nesta última, verifica-se a equação de Y - B .

1.3 Ansatz de Bethe Algébrico

Voltamos agora ao problema de diagonalizar a Hamiltoniana (1.1.2). De fato, o que devemos diagonalizar é a matriz de transferência, $\tau(\lambda)$. Esta matriz faz com que possamos escrever a Hamiltoniana em termos da matriz R e ainda que o modelo seja integrável, desde que ela seja uma solução da equação de Y - B .

A matriz de transferência esta definida como o traço sobre o espaço auxiliar (0), da matriz de monodromia $T_0(\lambda)$:

$$\tau(\lambda) = \text{tr}_0 T_0(\lambda), \quad (1.3.12)$$

esta atua somente sob o espaço quântico definido em (1.1.5).

A matriz de monodromia $T_0(\lambda)$ é, neste caso, uma matriz 2×2 cujos elementos são operadores que atuam no espaço quântico $V^{\otimes L}$ da seguinte forma:

$$T_0(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (1.3.13)$$

Um conjunto de relações algébricas entre os quatro operadores, $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ e $D(\lambda)$ é codificado na relação fundamental dada por:

$$R_{00}(\lambda - \lambda') T_0(\lambda) T_{0'}(\lambda') = T_{0'}(\lambda') T_0(\lambda) R_{00}(\lambda - \lambda').$$

Esses operadores também obedecem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
[B(\lambda), B(\lambda')] &= 0, \\
A(\lambda) B(\lambda') &= \frac{a(\lambda' - \lambda)}{b(\lambda' - \lambda)} B(\lambda') A(\lambda) - \frac{c(\lambda' - \lambda)}{b(\lambda' - \lambda)} B(\lambda) A(\lambda'), \\
D(\lambda) B(\lambda') &= \frac{a(\lambda - \lambda')}{b(\lambda - \lambda')} B(\lambda') D(\lambda) - \frac{c(\lambda - \lambda')}{b(\lambda - \lambda')} B(\lambda) D(\lambda'), \quad (1.3.14)
\end{aligned}$$

onde a, b e c são definidas na equação (1.2.7).

Seja o estado vácuo ferromagnético, Φ_n , com todos os spins para cima:

$$\Phi_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_L \quad (1.3.15)$$

que é um estado próprio de $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$, e é destruído por $C(\lambda)$, ou seja,

$$A(\lambda) \Phi_n = \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^L \Phi_n, \quad D(\lambda) \Phi_n = \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^L \Phi_n, \quad C(\lambda) \Phi_n = 0. \quad (1.3.16)$$

Logo usamos os operadores $B(\lambda)$ como operadores de criação para construir os chamados *estados de Bethe*:

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_M\rangle = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_M) \cdot \Phi_n. \quad (1.3.17)$$

Usando as relações algébricas (1.3.14) e a propriedade em (1.3.16), pode-se ver que o *estado de Bethe* é um estado próprio da matriz de transferência:

$$\tau(\lambda) |\lambda_1, \dots, \lambda_M\rangle = \Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_M) |\lambda_1, \dots, \lambda_M\rangle \quad (1.3.18)$$

com valores próprios dados da seguinte forma:

$$\Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_M) = \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^L \prod_{\alpha=1}^M \frac{\lambda - \lambda_\alpha - i}{\lambda - \lambda_\alpha} + \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^L \prod_{\alpha=1}^M \frac{\lambda - \lambda_\alpha + i}{\lambda - \lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, M. \quad (1.3.19)$$

se $\{\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ são diferentes e obedecem as equações do *Ansatz de Bethe(AB)*:

$$\left(\frac{\lambda_\alpha + \frac{i}{2}}{\lambda_\alpha - \frac{i}{2}}\right)^L = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^M \frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta + i}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta - i}, \quad \alpha = 1, \dots, M.$$

A matriz de transferência τ , contém também a Hamiltoniana da cadeia com condições de contorno periódicas,

$$H = \frac{J}{2} \left(i \frac{d}{d\lambda} \log \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}} - LI^{\otimes L} \right). \quad (1.3.20)$$

No caso particular para dois sítios na rede, a Hamiltoniana pode ser escrita como:

$$H_{ij} = \frac{J}{2} (P_{ij} R'_{ij}(0) - I^{\otimes L}), \quad (1.3.21)$$

onde, $R'_{ij}(0)$ significa a derivada em função de λ . Seja

$$\tau\left(\frac{i}{2}\right) = \text{tr}_0 T_0\left(\frac{i}{2}\right) = \text{tr}_0 R_{02}(0) R_{01}(0) = i^2 \text{tr}_0 P_{02} P_{01} = -P_{12}$$

fazendo uso da equação (1.2.6). Então para $L = 2$ podemos escrever

$$\tau'\left(\frac{i}{2}\right) = \text{tr}_0 R'_{02}(0) R_{01}(0) + \text{tr}_0 R_{02}(0) R'_{01}(0) = 2i R'_{12}(0). \quad (1.3.22)$$

Lembrando da expressão (1.2.6) e que $H_{12} = \frac{J}{2} (P - I \otimes I)$, vemos que a Hamiltoniana para dois sítios, eq. (1.3.21), coincide com a cadeia de Heisenberg (1.1.3). Daqui a Hamiltoniana (1.3.20) é justamente a Hamiltoniana de Heisenberg com condições de contorno periódicas ou fechada como foi especificado anteriormente.

Em particular podemos obter o valor próprio da energia usando (1.3.20) e (1.3.19), onde

$$E = -\frac{J}{2} \sum_{\alpha=1}^M \frac{1}{\lambda_\alpha^2 + \frac{1}{4}}. \quad (1.3.23)$$

Veremos mais adiante que dependendo do número de cadeias que formam uma escada, a

simetria aumenta de tal forma que no caso geral temos $su(N)$, onde N é o tamanho da escada ou número de degraus, definido como: $N = 2^n$ e n é o número de pernas.

É possível mostrar que a matriz de transferência comuta com os operadores de spin [7],

$$\left[\vec{S}, t(\lambda) \right] = 0,$$

onde

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L \vec{\sigma}_n.$$

Além disso os estados de Bethe (1.3.17) são estados de $su(2)$ de peso máximo,

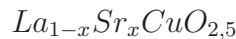
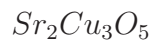
$$S^+ |\lambda_1, \dots, \lambda_M\rangle = 0, \quad S^\pm = S^x \pm iS^y$$

e são também estados próprios de S^z com autovalores $S^z = \frac{N}{2} - M$. Desde que $S = S^z \geq 0$, segue que $M \leq \frac{N}{2}$. Os estados mais baixos são obtidos agindo com operador S^- .

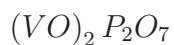
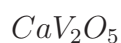
1.4 Escadas de spin

O estudo de escadas de spin quânticas cresceu, devido a sua possível conexão com a supercondutividade a altas temperaturas. Diversos compostos com a estrutura de uma escada, como por exemplo alguns cupratos e alguns compostos orgânicos podem ser sintetizados em laboratórios, a seguir damos uma lista de alguns desses compostos:

*CUPRATOS



*COMPOSTOS ORGÂNICOS



As propriedades supercondutoras são verificadas, por exemplo, em curvas de resistividades [8].

Uma escada de spin (fig. 1) esta formada por cadeias unidimensionais. Fisicamente a cadeia de átomos tem associado um operador de spin em cada ponto j da cadeia definido por

$$\vec{S}_j = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_j = \frac{1}{2}(\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z) \quad (1.4.24)$$

onde $\vec{\sigma}_j$ são as matrizes de Pauli usuais (1.1.1):

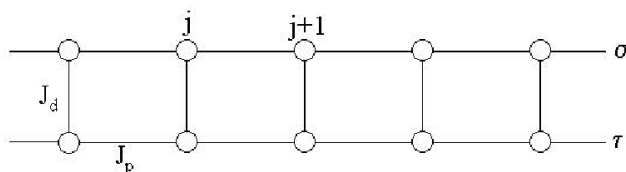


Figura 1.1: Representação de uma escada de Heisenberg com duas pernas.

Heisenberg introduziu o seguinte modelo

$$H = \frac{1}{2}J \sum_{j=1}^L (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z)$$

que descreve um sistema de L partículas de spin $\frac{1}{2}$ interagindo numa rede unidimensional. O caso particular: $J_x = J_y = J_z = J$, é o modelo XXX (ver pag. 2) ou modelo de Heisenberg isotrópico, foi resolvido por Hans Bethe em 1931[10]. Neste trabalho ele mostrou que os vetores próprios desta Hamiltoniana poderiam ser escritos em termos de uma função com uma forma especial, conhecida como *Ansatz de Bethe*(AB) (ver seção 1.3). A técnica desenvolvida por Bethe, baseada na equação de Schrödinger é chamada de *Ansatz de Bethe coordenada*.

O modelo $J_x = J_y \neq J_z$ ou modelo XXZ anisotrópico de Heisenberg, foi resolvido por Yang e Yang[11],[12]; através de uma generalização do AB .

O modelo padrão de escadas de spin é o modelo de Heisenberg, que não é integrável. O modelo apresentado (1.4.25) é o modelo mais simples integrável que existe na literatura:

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{4}J_p \sum_{j=1}^L (\vec{\sigma}_j^1 \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^1 + \vec{\sigma}_j^2 \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^2) + \frac{1}{2}J_d \sum_{j=1}^L \vec{\sigma}_j^1 \cdot \vec{\sigma}_j^2 + \\
+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^L (\vec{\sigma}_j^1 \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^1) (\vec{\sigma}_j^2 \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^2)
\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

onde $\vec{\sigma}_j^1$ e $\vec{\sigma}_j^2$ atuam no sítio j na perna 1 e 2 da escada. L é o número de degraus e condições de contorno periódicas são impostas.

O último termo da equação (1.4.25) define uma interação biquadrada. J_p denota o acoplamento nas pernas e J_d nos degraus. No limite $J_d = 0$ a escada de spin se desacopla em duas redes de Heisenberg unidimensionais independentes. Outro limite de interesse, é conhecido como "acoplamento forte" $J_d \gg J_p$, quando os degraus da rede interagem muito fracamente, e a teoria de perturbações pode ser aplicada. O gap obtido em primeira linha de perturbação[14] é:

$$\Delta = E_1^{(1)} - E_0^{(1)} \sim J_d - J_p + O\left(\frac{J_p^2}{J_d}\right)$$

A energia $E_1^{(1)}$ é a energia em primeira ordem do primeiro estado excitado que tem spin total $S = 1$ e $E_0^{(1)}$ é a energia do estado fundamental que tem spin total igual a zero $S = 0$.

Pôde-se formar também escadas de Heisenberg com mais de duas pernas. Neste caso, do ponto de vista teórico, a verificação do gap e o comportamento da susceptibilidade magnética em geral são possíveis somente através de cálculos numéricos. Da teoria sabe-se que as escadas com número par de pernas apresentam um gap e energia e os modelos com numero impar de pernas não apresentam gap. O gap é uma quantidade de energia necessária e suficiente para destruir um singlete (inverter um spin para acima) do *estado fundamental* e transformá-lo em uma excitação de *spin 1*. Esta constatação interessante foi feita por Rice, Gopalan e Sigrist [13]. Basicamente mostraram que todas as escadas com número ímpar (par) de pernas podem ser mapeadas numa rede unidimensional (escada de duas pernas) com uma constante de acoplamento efectiva que tem como característica à não existência de um gap (exibindo desta forma um gap).

Uma outra generalização é o caso dos Tubos de spin. Os tubos de spin são acoplamentos de cadeias de spin com condições de contorno periódicas nas pernas. A não localidade das interações aumenta com o número de pernas, por exemplo $\vec{\sigma}_j^{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^{(1)}$ sobre a perna 1 interage com $\vec{\sigma}_j^{(n)} \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^{(n)}$ sobre a perna n . Mas tais interações são necessárias para preservar a integrabilidade do modelo. Então como uma extensão dos modelos de escada estudamos mais adiante os *Tubos de spin* de três pernas com simetria $su(8)$ (Fig.2).

A Hamiltoniana que descreve tal modelo é da seguinte forma:

$$H_n^{tubo}(J) = \sum_{j=1}^L \left[\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n \left(1 + \vec{\sigma}_j^{(i)} \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^{(i)} \right) + \frac{1}{2} J \sum_{i=1}^N \left(\vec{\sigma}_j^{(i)} \cdot \vec{\sigma}_j^{(i+1)} - 1 \right) \right]$$

com $\vec{\sigma}_j^{(n+1)} = \vec{\sigma}_j^{(1)}$. Este modelo será estudado no capítulo 3, com a inclusão de parâmetros.

1.5 Grupos Quânticos e parâmetros

1.5.1 Definição de grupo:

Um conjunto de elementos, G , forma um grupo, G , se eles têm uma multiplicação (*i.e.*, uma operação de grupo) definida para quaisquer dois elementos, $a, b \in G$, concordando com os axiomas seguintes:

1. *Clausura*: se $a, b \in G$, então $a.b \in G$, onde $.$ é a operação do grupo.
2. *Associativa*: $(a.b).c = a.(b.c)$, onde c está também em G .
3. *Identidade*: existe um único elemento identidade, tal que $e.a = a.e = a$ para todo a em G .
4. *Inversa*: para cada a em G existe um elemento inverso, denotado por a^{-1} , tal que, $a^{-1}.a = a.a^{-1} = e$.

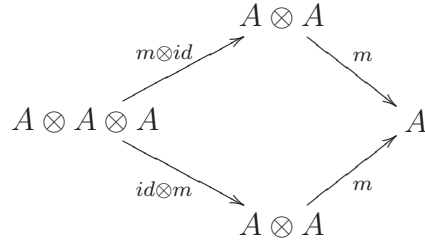
1.5.2 Definição de grupos quânticos:

Um grupo quântico está definido como sendo uma álgebra de Hopf (não necessariamente comutativa). Como uma álgebra de Hopf é essencialmente uma biálgebra com uma antípoda, definiremos primeiro uma biálgebra: Se A é uma álgebra associativa com elemento unidade 1, sobre um campo k (o qual pode ser um conjunto de números complexos C), então uma biálgebra sobre A está definida mediante quatro morfismos:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \\ & & \\ \mathbb{k} & \xrightarrow{\eta} & A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{k} \end{array}$$

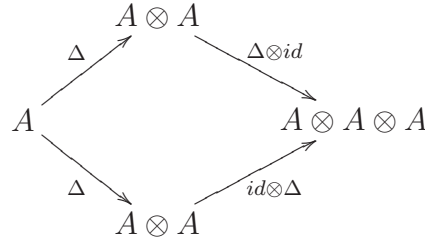
Satisfazendo os seguintes axiomas, escritos como diagramas comutativos:

Asociatividade:



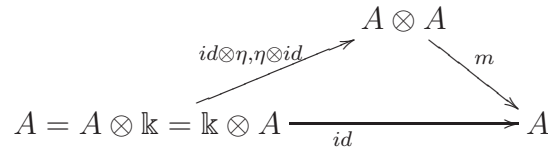
isto é, $m(m \otimes id) = m(id \otimes m)$.

Coassociatividade:



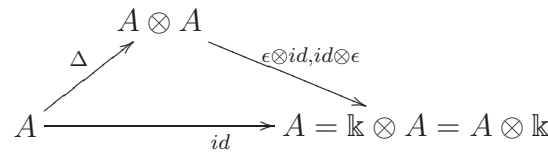
isto é, $(\Delta \otimes id) \Delta = (id \otimes \Delta) \Delta$. Co-multiplicação Δ é um homomorfismo de A em $A \otimes A$.

Unidade:



isto é, $m(a \otimes 1) = m(1 \otimes a) = a$ para todo $a \in A$. A operação η é definida mediante $\eta(c) = c1$ para todo $c \in \mathbb{k}$.

Counidade:



isto é, $(\epsilon \otimes id) \Delta = (id \otimes \epsilon) \Delta = id$, e ϵ também é um homomorfismo: $\epsilon(ab) = \epsilon(a) \epsilon(b)$

para todo $a, b \in A$.

Axiomas de conexão:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 m \nearrow & & \searrow \Delta \\
 A \otimes A & & A \otimes A \\
 \Delta \otimes \Delta \downarrow & & \uparrow m \otimes m \\
 A \otimes A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{S_{(23)}} & A \otimes A \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

onde $S_{(23)}$ é o morfismo intercambiando o segundo e terceiro lugar no produto tensorial.

Uma antípoda em uma bi-álgebra (A, m, Δ) é um mapeo linear $\gamma : A \rightarrow A$ tal que o

seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & A \otimes A & \xrightarrow{\gamma \otimes id} & A \otimes A & \\
 \Delta \nearrow & & & & \searrow m \\
 A & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{k} & \xrightarrow{\eta} & A \\
 \Delta \searrow & & & & \nearrow m \\
 & A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes \gamma} & A \otimes A &
 \end{array}$$

isto é, $m(id \otimes \gamma) \Delta(a) = m(\gamma \otimes id) \Delta(a) = \epsilon(a) 1$, onde $a \in A$. A antípoda é um anti-homomorfismo: $\gamma(ab) = \gamma(b) \gamma(a)$.

1.5.3 Álgebras de Hopf quase-triangulares:

Grupos Quânticos ou álgebras de Hopf quase-triangulares, tornaram-se um dos tópicos de maior interesse na física e na matemática nos últimos anos. Isto ocorreu, em parte, dada a variedade de áreas nas quais estes encontraram aplicações. Algumas das aplicações e conexões desses grupos na física são, por exemplo[1], os que envolvem gravidade quântica, teoria de gauge de Chern-Simons, simetrias escondidas em grupos quânticos para *QFT*, óptica quântica, física da materia condensada, entre outras.

As álgebras deformadas são generalizações das Álgebras de Lie onde as constantes de estrutura são series de potências de um parâmetro de deformação "q". Quando estas álgebras tem estrutura de uma álgebra de Hopf quase-triangulares são chamadas de Grupos Quânticos.

Definimos uma álgebra de Hopf quasi-triangular. Seja $\sigma : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ seja o operador permutação definidos mediante $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$, logo $\bar{\Delta} = \sigma \circ \Delta$ é outra co-multiplicação em A com antípoda $\bar{\gamma} = \gamma^{-1}$. Uma álgebra de Hopf é *quase-triangular* se Δ e $\bar{\Delta}$ estão em relação mediante:

$$\bar{\Delta}(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \quad a \in A$$

onde R (a matriz- R universal para A) é um elemento invertível em $A \otimes A$, e se as condições seguintes são satisfeitas:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id) R &= R_{13}R_{23}, & (id \otimes \Delta) R &= R_{13}R_{12} \\ (\gamma \otimes id) R &= R^{-1}, & (id \otimes \gamma) R^{-1} &= R \end{aligned}$$

Aqui $R \in A \otimes A \otimes A$ e atua como identidade no segundo fator, e como R no primeiro e terceiro fatores, assim similarmente para R_{12}, R_{23} .

Segue-se destes axiomas que R satisfaz à equação de $Y-B$. Escrevendo $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, temos:

$$R_{13}R_{23} = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j,$$

e daqui:

$$(\sigma \circ \Delta \otimes id)(R) = \sigma_{12}((\Delta \otimes id)(R)) = \sigma_{12}(R_{13}R_{23}) = R_{23}R_{13},$$

onde σ_{12} permuta as primeiras duas posições. Também,

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \Delta \otimes id)(R) &= \sum_i \bar{\Delta}(a_i) \otimes b_i = \sum_i R_{12} \Delta(a_i) R_{12}^{-1} \otimes b_i \\
&= R_{12} \sum_i \Delta(a_i) \otimes b_i R_{12}^{-1} = R_{12} (\Delta \otimes id(R)) R_{12}^{-1} \\
&= R_{12} R_{13} R_{12}^{-1}.
\end{aligned}$$

Comparando resultados nós determinamos que as equações $Y - B$ estão satisfeitas:

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$$

Grupos quânticos são essencialmente deformações contínuas de grupos de Lie ou álgebras de Lie. De uma maneira geral, a deformação de um grupo de Lie pode ser entendida a partir de sua representação matricial. Como é bem sabido, a cada elemento do grupo podemos associar uma matriz, e assim as propriedades daqueles se refletem nestas. Por exemplo, no caso do grupo $SU(2)$ podemos associar a cada um de seus elementos uma matriz 2×2 de elementos arbitrários que seja unitária e cujo determinante seja igual a um. O grupo quântico associado a este grupo de Lie é obtido quando os elementos que compõem a matriz deixam de comutar entre si, tornando-se quantidades não comutantes que obedecem, porém, a certas regras. Esta nova estrutura costuma ser chamada de q -grupo.

Por outro lado, as deformações das álgebras de Lie são obtidas quando mudamos as relações de comutação entre os geradores da álgebra. Em geral, esta deformação é tal que o resultado do comutador deixa de ser linear nos geradores, e a q -álgebra obtida não é mais uma álgebra de Lie.

1.5.4 *Sistemas integráveis multiparamétricos:*

Nesta seção veremos como obter cadeias de spin quânticas multiparamétricas[21] usando a construção de Reshetikhin[18].

Seja (A, Δ, R) uma álgebra de Hopf quase-triangular onde Δ e R são o co-produto e a matriz- R respectivamente. Suponhamos que existe um elemento $F \in A \otimes A$ tal que:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)(F) &= F_{13}F_{23}, & (I \otimes \Delta)(F) &= F_{13}F_{12}, \\ F_{12}F_{13}F_{23} &= F_{23}F_{13}F_{12}, & F_{12}F_{21} &= I \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

O teorema 1 de [18] estabelece que (A, Δ^F, R^F) é também uma álgebra de Hopf quase-triangular com co-produto e a matriz- R respectivamente dados por:

$$\Delta^F = F_{12}\Delta F_{21} \quad \text{e} \quad R^F = F_{21}R F_{21}$$

No caso que (A, Δ, R) é uma álgebra quântica afim de [18] temos que F pode ser escolhida como:

$$F = \exp \sum_{i < j} (H_i \otimes H_j - H_j \otimes H_i) \Phi_{ij},$$

onde $\{H_i\}$ é uma base para a sub-álgebra de Cartan da álgebra quântica afim e Φ_{ij} são parâmetros complexos arbitrários com $i < j$.

Sejam $R(\lambda), R^F(\lambda)$ as matrizes representativas de R e R^F , ambas satisfazendo a equação de Y - B :

$$R_{12}(\lambda - \mu) R_{13}(\lambda) R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu) R_{13}(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu).$$

Se $R(\lambda) |_{\lambda=0} = P$ com P sendo o operador de permutação, logo $R^F(\lambda) |_{\lambda=0} = P$ com o resultado de (1.5.26). Nós construímos a matriz de transferência:

$$\tau^F(\lambda) = \text{Tr}_0 \left(R_{0N}^F(\lambda) R_{0(N-1)}^F(\lambda) \dots R_{01}^F(\lambda) \right),$$

onde os sub-índices 0 e $1, 2, \dots, N$ denotam o espaço auxiliar e quântico e Tr_0 é o traço sobre o espaço zero.

A Hamiltoniana da cadeia de spin multiparamétrica associada é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H^F &= \left(\tau^F(\lambda) \right)^{-1} \frac{d}{du} \tau^F(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} h_{i,i+1}^F + h_{N1}^F, \end{aligned}$$

com

$$h^F = \frac{d}{du} P R^F(\lambda) \Big|_{\lambda=0}.$$

Um exemplo de sistemas integráveis multiparamétricos seria a generalização do modelo $SU(N)$ da matriz- R , que foi introduzida por Perk e Schultz [19],[16]:

$$\begin{aligned} R(x, q, \{p\}) &= a(x, q) \sum_{\alpha}^N e^{\alpha\alpha} \otimes e^{\alpha\alpha} + b(x) \sum_{\alpha \neq \beta}^N p_{\alpha\beta} e^{\alpha\alpha} \otimes e^{\beta\beta} + \\ &+ c_{-}(x, q) \sum_{\alpha < \beta}^N e^{\alpha\beta} \otimes e^{\beta\alpha} + c_{+}(x, q) \sum_{\alpha > \beta}^N e^{\alpha\beta} \otimes e^{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

onde x é o parâmetro espectral. No capítulo 3, vamos usar esta matriz- R para o modelo $SU(8)$ com 28 parâmetros livres, $p_{\alpha\beta}$, para o caso do Tubo de spin.

Capítulo 2

Método algébrico do Ansatz de Bethe para escadas de spin multiparamétricas.

Neste capítulo, analisamos em detalhe o modelo de escada XXZ de spin $1/2$ e de simetria $su(4)$. O método utilizado é o *MEIQ*, que nesse caso requer uma solução em diferentes níveis.

A hamiltoniana que estudamos neste capítulo é:

$$H = \sum_{j=1}^L \left[J_p h_{j,j+1} + \frac{1}{2} J_d (\vec{\sigma}_j \cdot \vec{\tau}_j - 1) \right], \quad (2.0.1)$$

onde $h_{j,j+1}$ contém os parâmetros livres t_1 , t_2 e t_3 e é escrito como:

$$\begin{aligned}
h_{j,j+1} = & \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- \left[\frac{t_1^{-1}}{4} (1 + \tau_j^z) (1 + \tau_{j+1}^z) + \frac{t_2}{4} (1 - \tau_j^z) (1 + \tau_{j+1}^z) + t_3 \tau_j^+ \tau_{j+1}^- + \tau_j^- \tau_{j+1}^+ \right] + \\
& + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \left[\frac{t_1}{4} (1 + \tau_j^z) (1 + \tau_{j+1}^z) + \frac{t_2^{-1}}{4} (1 - \tau_j^z) (1 - \tau_{j+1}^z) + \tau_j^+ \tau_{j+1}^- + t_3^{-1} \tau_j^- \tau_{j+1}^+ \right] + \\
& + \frac{1}{4} (1 + \sigma_j^z) (1 + \sigma_{j+1}^z) \left[\frac{1}{2} (1 + \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + t_1^{-1} \tau_j^+ \tau_{j+1}^- + t_1 \tau_j^- \tau_{j+1}^+ \right] + \\
& + \frac{1}{4} (1 - \sigma_j^z) (1 - \sigma_{j+1}^z) \left[\frac{1}{2} (1 + \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + t_2 \tau_j^+ \tau_{j+1}^- + t_2^{-1} \tau_j^- \tau_{j+1}^+ \right].
\end{aligned}$$

Na equação (2.0.1), J_p e J_d denotam o acoplamento nas pernas e nos degraus respectivamente, e t_1 , t_2 e t_3 são parâmetros livres que representam a anisotropia nas interações. O número de degraus ou comprimento da escada é L e são impostas as condições de contorno periódicas, $L + 1 = L$. Sem perda de generalidade vamos considerar $J_p = 1$ e $J_d > 0$.

Os primeiros objetos que devemos encontrar são a matriz R e a matriz de monodromia $T(x)$, os quais dão a noção da álgebra de Yang-Baxter.

A integrabilidade deste modelo pode ser mostrada usando o fato de que a Hamiltoniana anisotrópica H dada por (2.0.1) pode ser mapeada para a Hamiltoniana \hat{H} , que se origina a partir de uma matriz R que obedece à álgebra de Yang-Baxter para $J_d = 0$, em quanto para $J_d \neq 0$ o termo do degrau tem a forma de um potencial químico, ou seja,

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^L \left[\hat{h}_{j,j+1} - 2J_d X_j^{11} \right],$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{j,j+1} = & \sum_{\alpha=1}^4 X_j^{\alpha\alpha} X_{j+1}^{\alpha\alpha} + X_j^{31} X_{j+1}^{13} + X_j^{13} X_{j+1}^{31} + t_1 (X_j^{21} X_{j+1}^{12} + X_j^{23} X_{j+1}^{32}) + \\
& + t_2 (X_j^{41} X_{j+1}^{14} + X_j^{43} X_{j+1}^{34}) + t_3 X_j^{42} X_{j+1}^{24} + t_1^{-1} (X_j^{12} X_{j+1}^{21} + X_j^{32} X_{j+1}^{23}) + \\
& + t_2^{-1} (X_j^{14} X_{j+1}^{41} + X_j^{34} X_{j+1}^{43}) + t_3^{-1} X_j^{24} X_{j+1}^{42}.
\end{aligned}$$

Acima, $X_j^{\alpha\beta} \equiv |\alpha_j\rangle \langle\beta_j|$ são os operadores de Hubbard usuais com condição de ortogonalidade fixada por $\langle\alpha_i | \beta_j\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$. As hamiltonianas H e \hat{H} estão relacionadas através da transformação de similaridade que será discutida no caso de Tubo de Spin no Capítulo 3. Note que, em termos destes novos operadores, torna-se evidente que o termo de degrau tem a forma diagonal e a contribuição para a energia devido ao termo de potencial químico é muito simples quando usamos a forma diagonal.

O fato da matriz R satisfazer a relação (2.0.2) a seguir, é um indicador de integrabilidade do modelo, ou seja, o modelo podê ser resolvido via o Ansatz de Bethe (AB). Consideremos a matriz R seguinte:

$$R = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1^{-1}b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_2^{-1}b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & t_1b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_3^{-1}b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & t_1^{-1}b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2^{-1}b & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_3b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & t_2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

onde a, b são funções de x da seguinte forma: $a(x) = x + 1$, $b(x) = x$, $c = 1$ e t_1, t_2 e t_3 são os parâmetros livres deste modelo.

A matriz R deve satisfazer às equações de Yang-Baxter:

$$R_{12}(x-y) R_{13}(x) R_{23}(y) = R_{23}(y) R_{13}(x) R_{12}(x-y), \quad (2.0.2)$$

$$R_{13} = \sum_i a_i \otimes I \otimes b_i,$$

$$R_{23} = \sum_i I \otimes a_i \otimes b_i,$$

$$R_{12} = R \otimes I$$

Seguindo o método algébrico de AB a matriz de monodromia para este modelo é definida como:

$$T(x) \equiv R_{01}(x) R_{02}(x) \dots R_{0L}(x)$$

ou da forma matricial seguinte:

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 & T_4^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 & T_4^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 & T_4^3 \\ T_1^4 & T_2^4 & T_3^4 & T_4^4 \end{pmatrix}. \quad (2.0.3)$$

A matriz de transferência $\tau(x)$ é definida como o traço ou soma dos elementos da diagonal da matriz de monodromia, a qual comuta com a Hamiltoniana [5]:

$$[H, \tau(x)] = 0.$$

Esta última equação e a relação (2.0.2), são condições para que o modelo seja integrável.

Logo, como resultado da construção das funções de $\tau(x)$, é possível determinar as funções próprias da Hamiltoniana. A forma explícita das relações de comutação dos elementos da matriz de monodromia permite a construção das funções próprias da matriz de transferência. A matriz de transferência tem a forma seguinte:

$$\tau(x) = \text{tr}T(x) = \sum_{\rho=1}^4 T_{\rho}^{\rho} = T_1^1 + \sum_{\rho=2}^4 T_{\rho}^{\rho} \quad (2.0.4)$$

Utilizando a equação (2.0.2), podemos mostrar que a matriz de monodromia acima obedece à relação fundamental, a equação de Yang-Baxter:

$$R_{12}(x-y) T_{13}(x) T_{23}(y) = T_{23}(y) T_{13}(x) R_{12}(x-y), \quad (2.0.5)$$

As relações de comutação entre os elementos da matriz de monodromia são especificadas pela matriz R (equações (2.0.6) e (2.0.7)), de onde seguem as relações:

$$T_{\rho}^{\rho}(x) T_{\sigma}^{\rho}(y) = \frac{R_{\rho\rho}^{\rho\rho}(y-x)}{R_{\sigma\rho}^{\sigma\rho}(y-x)} T_{\sigma}^{\rho}(y) T_{\rho}^{\rho}(x) + t.i. \quad (2.0.6)$$

$$T_{\sigma}^{\rho}(x) T_{\gamma}^{\tau}(y) = \sum_{a,b} \frac{R_{\sigma b}^{a\gamma}(x-y)}{R_{\rho\tau}^{\rho\tau}(x-y)} T_b^{\tau}(y) T_a^{\rho}(x) + t.i. \quad (2.0.7)$$

O Ansatz de Bethe está baseado na idéia de construir funções próprias da Hamiltoniana via operadores de criação e destruição atuando num pseudovácuo. Os elementos da matriz de monodromia fazem o papel destes operadores.

Vamos a dividir o processo em três níveis:

2.1 Primeiro nível

O Ansatz de Bethe (AB) consiste em construir funções próprias Ψ , uma vez conhecido Φ_n , o qual representa o pseudovácuo para o primeiro nível:

$$\Psi \equiv T_{\alpha_1}^1(x_1) \dots T_{\alpha_{M_1}}^1(x_{M_1}) \Phi_n \Psi_{(1)}^{(\alpha)}, \quad \alpha_i = 2, 3, 4 \quad (2.1.8)$$

Consideremos o vetor Φ_n :

$$\Phi_n = \otimes_{n=1}^L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A idéia do pseudovácuo é pensar que existe um estado a partir do qual todos os outros estados podem ser criados. Por isso, a função de onda é dada, no caso do modelo de Heisenberg, por

$$\Psi = \prod_{i=1}^{M_1} T_{\alpha_i}^1(x_i) \Phi_n \Psi_{(1)}^{(\alpha)}.$$

Vamos encontrar os valores próprios do operador $\tau_L(x)$ associados às funções próprias na equação (2.1.8). Assim:

$$\tau_L(x) \Psi = \Lambda(x; x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_{M_1}}) \prod_{i=1}^{M_1} T_{\alpha_i}^1(x_i) \Phi_n; \quad (2.1.9)$$

multiplicando (2.1.8), por $T_1^1(x)$ à esquerda,

$$T_1^1(x) \Psi = T_1^1(x) \left[T_{\alpha_1}^1(x_1) \dots T_{\alpha_{M_1}}^1(x_{M_1}) \Phi_n \Psi_{(1)}^{(\alpha)} \right]. \quad (2.1.10)$$

Fazendo uso da equação (2.0.6),

$$T_1^1(x) T_{\alpha_1}^1(x_1) = \frac{R_{11}^{11}(x_1 - x)}{R_{\alpha_1 1}^{\alpha_1 1}(x_1 - x)} T_{\alpha_1}^1(x_1) T_1^1(x) + t.i.$$

que aplicada na equação (2.1.10), M_1 -vezes até que $T_1^1(x)$ chegue ao pseudovácuo, e depois usando o fato de que o estado Φ_n é um autoestado de T_λ^λ , obtém-se a seguinte expressão:

$$T_1^1(x) \Psi = \left[\prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{11}^{11}(x_i - x)}{R_{\alpha_i 1}^{\alpha_i 1}(x_i - x)} T_{\alpha_i}^1(x_i) \dots T_{\alpha_{M_1}}^1(x_{M_1}) \right] (T_1^1(x) \Phi_n) \Psi_{(1)}^{(\alpha)} + t.i. \quad (2.1.11)$$

e da equação (2.1.11) vê-se:

$$T_1^1(x) \Phi_n \equiv [R_{11}^{11}(x)]^L \Phi_n. \quad (2.1.12)$$

Usando as equações (2.1.11) e (2.1.12):

$$T_1^1(x) \Psi = [R_{11}^{11}(x)]^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{11}^{11}(x_i - x)}{R_{\alpha_i 1}^{\alpha_i 1}(x_i - x)} \Psi + t.i., \quad (2.1.13)$$

temos que a função própria $\Lambda_1(x)$ será:

$$\Lambda_1(x) = [R_{11}^{11}(x)]^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{11}^{11}(x_i - x)}{R_{\alpha_i 1}^{\alpha_i 1}(x_i - x)} \quad \alpha_i = 2, 3, 4. \quad (2.1.14)$$

Fazendo o mesmo processo, temos que analisar o segundo termo de (2.0.4), onde:

$$\sum_{\rho=2}^4 T_\rho^\rho(x) \Psi = \sum_{\rho=2}^4 T_\rho^\rho(x) \left[T_{\alpha_1}^1(x_1) \dots T_{\alpha_{M_1}}^1(x_{M_1}) \Phi_n \Psi_{(1)}^{(\alpha)} \right], \quad (2.1.15)$$

fazendo uso da relação de comutação (2.0.7), e aplicada $M_1 - 1$ vezes, temos:

$$\begin{aligned} T_\rho^\rho(x) \Psi &= \prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{\rho 1}^{\rho 1}(x - x_i)} \left(R_{\rho b}^{a \alpha_1}(x - x_1) R_{ab_1}^{a_1 \alpha_2}(x - x_2) \dots R_{a_{M_1-2} b_{M_1-1}}^{a_{M_1-1} \alpha_{M_1-1}}(x - x_{M_1}) \right) \times \\ &\times T_b^1(x_1) T_{b_1}^1(x_2) \dots T_{b_{M_1-1}}^1(x_{M_1}) T_{a_{M_1-1}}^\rho(x) \Phi_n \Psi_{(1)}^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Daí, obtém-se que

$$T_{a_{M_1-1}}^\rho(x) \Phi_n = \delta_{\alpha_{M_1-1}}^\rho [R_{\rho 1}^{\rho 1}(x)]^L \Phi_n. \quad (2.1.17)$$

Fazendo:

$$T_\rho^{a_{M_1-1}} \equiv R_{a_{M_1-2} b_{M_1-1}}^{a_{M_1-1} \alpha_{M_1-1}}(x - x_{M_1}) \dots R_{ab_1}^{a_1 \alpha_2}(x - x_2) R_{\rho b}^{a \alpha_1}(x - x_1) \quad (2.1.18)$$

e

$$\begin{aligned} T_\rho^\rho(x) \Psi &= [R_{\rho 1}^{\rho 1}(x)]^L \left(\prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{\rho 1}^{\rho 1}(x - x_i)} \right) T_\rho^{a_{M_1-1}} \times \\ &\times \left(T_b^1(x_1) T_{b_1}^1(x_2) \dots T_{b_{M_1-1}}^1(x_{M_1}) \Phi_n \Psi_{(1)}^{(\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

para $i = 1, \dots, M_1$, substituindo (2.1.19) em (2.1.15), obtemos:

$$\sum_{\rho=2}^4 T_{\rho}^{\rho}(x) \Psi = T_b^1(x_1) T_{b_1}^1(x_2) \dots T_{b_{M_1-1}}^1(x_{M_1}) \Phi_n \tau_{(1)}(x; x_i) \Psi_{(1)}^{(b)}, \quad (2.1.20)$$

logo

$$\tau_{(1)}(x; x_1 \dots x_M) = \sum_{\rho=2}^4 [R_{\rho 1}^{\rho 1}(x)]^L \left(\prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{\rho 1}^{\rho 1}(x - x_i)} \right) T_{\rho}^{\alpha_{M_1-1}}, \quad (2.1.21)$$

então, temos uma nova matriz de transferência que gera um novo problema de valores próprios.

2.2 Segundo nível

A matriz de monodromia para este novo problema é:

$$T_{(1)} = \begin{pmatrix} T_2^2 & T_3^2 & T_4^2 \\ T_2^3 & T_3^3 & T_4^3 \\ T_2^4 & T_3^4 & T_4^4 \end{pmatrix}. \quad (2.2.22)$$

Os valores próprios são definidos como:

$$\Psi_{(1)}^{(b)} \equiv T_{\beta_1}^2(y_1) \dots T_{\beta_{M_2}}^2(y_{M_2}) \Phi_{(1)} \Psi_{(2)}^{(b)} \quad \beta_i = 3, 4, \quad (2.2.23)$$

onde

$$\Phi_{(1)} = \otimes_{i=1}^{M_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_i \quad (2.2.24)$$

chamado o pseudovácuo para o segundo nível. Temos:

$$\tau_{(1)}(x; x_i) = T_2^2(x; x_i) + \sum_{\rho=3}^4 T_{\rho}^{\rho}(x; x_i) \quad (2.2.25)$$

e

$$\tau_{(1)}(x; x_i) \Psi_1^{(b)} = \left(T_2^2(x; x_i) + \sum_{\rho=3}^4 T_\rho^\rho(x; x_i) \right) T_{\beta_1}^2(y_1) \dots T_{\beta_{M_2}}^2(y_{M_2}) \Phi_{(1)} \Psi_{(2)}^{(b)}. \quad (2.2.26)$$

Usando a equação (2.1.19) para $\rho = 2$, e trabalhando com a primeira parte do lado direito da última equação:

$$T_2^2(x) \Psi_1^{(b)} = [R_{21}^{21}(x)]^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{21}^{21}(x - x_i)} T_2^2(x; x_i) \left(T_{\beta_1}^2(y_1) \dots T_{\beta_{M_2}}^2(y_{M_2}) \Phi_{(1)} \Psi_{(2)}^{(b)} \right), \quad (2.2.27)$$

aplicando (2.0.6), transportamos $T_2^2(x; x_i)$ até chegar a $\Phi_{(1)}$:

$$\begin{aligned} T_2^2(x) \Psi_1^{(b)} &= [R_{21}^{21}(x)]^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{21}^{21}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{22}^{22}(y_j - x; x_i)}{R_{\beta_j 2}^{\beta_j 2}(y_j - x; x_i)} \times \\ &\times T_{\beta_1}^2(y_1) \dots T_{\beta_{M_2}}^2(y_{M_2}) \left(T_2^2(x; x_i) \Phi_{(1)} \right) \Psi_{(2)}^{(b)}. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Fazendo uso da equação (2.1.12), temos:

$$T_2^2(x; x_i) \Phi_{(1)} = \prod_{i=1}^{M_1} R_{22}^{22}(x - x_i) \Phi_{(1)},$$

onde $\Phi_{(1)}$ é o valor próprio de T_λ^λ e

$$\Lambda_2 = [R_{21}^{21}(x)]^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{22}^{22}(x - x_i)}{R_{21}^{21}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{22}^{22}(y_j - x)}{R_{\beta_j 2}^{\beta_j 2}(y_j - x)}, \quad \beta_j = 3, 4 \quad (2.2.29)$$

chegando ao resultado seguinte:

$$T_2^2(x) \Psi_1^{(b)} = \Lambda_2 \Psi_1^{(b)}.$$

Trabalhando com a segunda parte do lado direito da equação (2.2.26):

$$\tau_1 \Psi_1^{(b)} = \left[\sum_{\rho=3}^4 (R_{\rho 1}^{\rho 1}(x)) \prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{\rho 1}^{\rho 1}(x - x_i)} T_\rho^\rho(x; x_i) \right] T_{\beta_1}^2(y_1) \dots T_{\beta_{M_2}}^2(y_{M_2}) \Phi_{(1)} \Psi_{(2)}^{(b)},$$

onde

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=3}^4 T_{\rho}^{\rho}(x; x_i) \Psi_1^{(b)} &= \sum_{\rho=3}^4 (R_{\rho 1}^{\rho 1}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{\rho 1}^{\rho 1}(x - x_i)} T_{\rho}^{\rho}(x; x_i) \times \\ &\times T_{\beta_1}^2(y_1) \dots T_{\beta_{M_2}}^2(y_{M_2}) \Phi_{(1)} \Psi_{(2)}^{(b)} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

e usando a equação (2.0.7), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=3}^4 T_{\rho}^{\rho}(x; x_i) \Psi_1^{(b)} &= \sum_{\rho=3}^4 (R_{\rho 1}^{\rho 1}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{1}{R_{\rho 1}^{\rho 1}(x - x_i)} \times \\ &\times \prod_{j=1}^{M_2} \frac{1}{R_{\rho 2}^{\rho 2}(x - y_j)} T_{b_1}^2(y_1) \dots T_{b_{M_2}}^2(y_{M_2}) \times \\ &\times R_{\rho b_1}^{a_1 \beta_1}(x - y_1) R_{a_1 b_2}^{a_2 \beta_2}(x - y_2) \dots R_{a_{M_2-1} b_{M_2}}^{a_{M_2} \beta_{M_2}}(x - y_{M_2}) T_{a_{M_2}}^{\rho}(x) \Phi_{(1)} \Psi_{(2)}^{(b)} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

e

$$T_{a_{M_2}}^{\rho}(x) \Phi_{(1)} = \delta_{a_{M_2}}^{\rho} \prod_{i=1}^{M_1} R_{\rho 2}^{\rho 2}(x - x_i) \Phi_{(1)} \quad . \quad (2.2.32)$$

Escrevemos o resultado final do segundo nível com a substituição seguinte:

$$\tilde{T}_{\rho}^{\rho}(x; x_i; y_j) = (R_{\rho 1}^{\rho 1}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{\rho 2}^{\rho 2}(x - x_i)}{R_{\rho 1}^{\rho 1}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{1}{R_{\rho 2}^{\rho 2}(x - y_j)} T_{\rho}^{\rho}(x; x_i; y_j) \quad (2.2.33)$$

para $j = 1, \dots, M_2$. Temos:

$$\sum_{\rho=3}^4 T_{\rho}^{\rho}(x; x_i) \Psi_1^{(b)} = T_{b_1}^2(y_1) \dots T_{b_{M_2}}^2(y_{M_2}) \Phi_{(1)} \sum_{\rho=3}^4 \tilde{T}_{\rho}^{\rho}(x; x_i; y_j) \Psi_{(2)}^{(b)}. \quad (2.2.34)$$

Agora, como no caso anterior, surge um novo problema de valores próprios.

2.3 Terceiro nível

A matriz de monodromia para este novo nível é:

$$T_{(2)} = \begin{pmatrix} T_3^3 & T_4^3 \\ T_3^4 & T_4^4 \end{pmatrix}$$

e os vetores próprios são dados por:

$$\Psi_2 = T_4^3(z_1) \dots T_4^3(z_{M_3}) \Phi_{(2)} \Psi.$$

Logo,

$$\tau_{(2)} \Psi_{(2)} = \left(\overset{\approx 3}{T}_3(x; x_i; y_j) + \overset{\approx 4}{T}_4(x; x_i; y_j) \right) \Psi_{(2)} = \sum_{\rho=3}^4 \overset{\approx \rho}{T}_\rho \Psi_{(2)} \quad (2.3.35)$$

$$\Phi_{(2)} = \otimes_{j=1}^{M_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i.$$

A última equação representa o pseudovácuo para o terceiro nível. Usando as equações (2.2.33) e (2.2.31) para $\rho = 3$ no primeiro termo do lado direito:

$$\begin{aligned} \overset{\approx 3}{T}_3(x; x_i; y_j) \Psi_2 &= (R_{31}^{31}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{32}^{32}(x - x_i)}{R_{31}^{31}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{1}{R_{32}^{32}(x - y_j)} T_3^3(x; x_i; y_j) \times \\ &\times T_4^3(z_1) \dots T_4^3(z_{M_3}) \Phi_{(2)} \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

e usando a equação (2.0.6) como nos casos anteriores, temos:

$$T_3^3(x; x_i; y_j) \Phi_{(2)} = \prod_{j=1}^{M_2} R_{33}^{33}(x - y_j) \Phi_{(2)}, \quad (2.3.37)$$

da qual chegamos ao seguinte resultado:

$$\overset{\approx 3}{T}_3(x; x_i; y_j) \Psi_2 = (R_{31}^{31}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{32}^{32}(x - x_i)}{R_{31}^{31}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{33}^{33}(x - y_j)}{R_{32}^{32}(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{R_{33}^{33}(z_k - x)}{R_{43}^{43}(z_k - x)} \Psi_2 + t.i. \quad , \quad (2.3.38)$$

logo

$$\Lambda_3 = (R_{31}^{31}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{32}^{32}(x - x_i)}{R_{31}^{31}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{33}^{33}(x - y_j)}{R_{32}^{32}(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{R_{33}^{33}(z_k - x)}{R_{43}^{43}(z_k - x)}. \quad (2.3.39)$$

Seguindo o mesmo procedimento do caso anterior para o segundo termo da equação (2.3.35), onde usamos que

$$T_4^4(x; x_i; y_j) \Phi_{(2)} = \prod_{j=1}^{M_2} R_{43}^{43}(x - y_j) \Phi_{(2)},$$

obtemos:

$$\overset{\approx 4}{T}_4(x; x_i; y_j) \Psi_2 = (R_{41}^{41}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{42}^{42}(x - x_i)}{R_{41}^{41}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{43}^{43}(x - y_j)}{R_{42}^{42}(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{R_{44}^{44}(x - z_k)}{R_{43}^{43}(x - z_k)} \Psi_2 + t.i., \quad (2.3.40)$$

onde

$$\Lambda_4 = (R_{41}^{41}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{42}^{42}(x - x_i)}{R_{41}^{41}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{43}^{43}(x - y_j)}{R_{42}^{42}(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{R_{44}^{44}(x - z_k)}{R_{43}^{43}(x - z_k)}. \quad (2.3.41)$$

Substituindo (2.3.38) e (2.3.40) na equação (2.3.35) resolvemos o problema para o terceiro nível.

O problema de valores próprios da matriz de transferência $\tau\Psi = \Lambda\Psi$ tem a seguinte solução:

$$\Lambda_1 = (R_{11}^{11}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{11}^{11}(x_i - x)}{R_{\alpha_i 1}^{\alpha_i 1}(x_i - x)} \quad \alpha_i = 2, 3, 4 \quad (2.3.42)$$

$$\Lambda_2 = (R_{21}^{21}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{22}^{22}(x - x_i)}{R_{21}^{21}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{22}^{22}(y_j - x)}{R_{\beta_j 2}^{\beta_j 2}(y_j - x)} \quad \beta_j = 3, 4 \quad (2.3.43)$$

$$\Lambda_3 = (R_{31}^{31}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{32}^{32}(x - x_i)}{R_{31}^{31}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{33}^{33}(x - y_j)}{R_{32}^{32}(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{R_{33}^{33}(z_k - x)}{R_{43}^{43}(z_k - x)} \quad (2.3.44)$$

$$\Lambda_4 = (R_{41}^{41}(x))^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{R_{42}^{42}(x - x_i)}{R_{41}^{41}(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{R_{43}^{43}(x - y_j)}{R_{42}^{42}(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{R_{44}^{44}(x - z_k)}{R_{43}^{43}(x - z_k)}. \quad (2.3.45)$$

Definimos N_α como o número de vezes em que α aparece, sendo:

$$M_1 = N_2 + N_3 + N_4 \quad (2.3.46)$$

$$M_2 = N_3 + N_4 \quad (2.3.47)$$

$$M_3 = N_4 \quad , \quad (2.3.48)$$

onde $L > M_1 > M_2 > M_3$.

Dependendo da escolha de α e β , teremos um elemento diferente para a matriz R . Os elementos nas sub-matrizes $R_{4 \times 4}$ podem ser identificados da seguinte forma:

$$R = \begin{bmatrix} (R_{\zeta b}^{\zeta a})_{4 \times 4} & (R_{\tau b}^{\tau a})_{4 \times 4} & (R_{\gamma b}^{\gamma a})_{4 \times 4} & (R_{\delta b}^{\delta a})_{4 \times 4} \\ (R_{\eta b}^{\eta a})_{4 \times 4} & (R_{\theta b}^{\theta a})_{4 \times 4} & (R_{\vartheta b}^{\vartheta a})_{4 \times 4} & (R_{\iota b}^{\iota a})_{4 \times 4} \\ (R_{\kappa b}^{\kappa a})_{4 \times 4} & (R_{\lambda b}^{\lambda a})_{4 \times 4} & (R_{\mu b}^{\mu a})_{4 \times 4} & (R_{\nu b}^{\nu a})_{4 \times 4} \\ (R_{\xi b}^{\xi a})_{4 \times 4} & (R_{\pi b}^{\pi a})_{4 \times 4} & (R_{\varpi b}^{\varpi a})_{4 \times 4} & (R_{\rho b}^{\rho a})_{4 \times 4} \end{bmatrix} .$$

Como exemplo, o primeiro elemento da matriz R : $(R_{\zeta b}^{\zeta a})_{4 \times 4}$ seria:

$$(R_{\zeta b}^{\zeta a}) = \begin{bmatrix} R_{11}^{11} & R_{12}^{11} & R_{13}^{11} & R_{14}^{11} \\ R_{11}^{12} & R_{12}^{12} & R_{13}^{12} & R_{14}^{12} \\ R_{11}^{13} & R_{12}^{13} & R_{13}^{13} & R_{14}^{13} \\ R_{11}^{14} & R_{12}^{14} & R_{13}^{14} & R_{14}^{14} \end{bmatrix} .$$

As equações de (2.3.42) até (2.3.45), após a substituição de cada elemento da matriz R , podem ser escritas como segue:

$$\Lambda_1 = (a(x))^L t_1^{-N_2} t_2^{-N_4} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(x_i - x)}{b(x_i - x)} \quad (2.3.49)$$

$$\Lambda_2 = (b(x))^L t_1^{L-M_1+N_3} t_3^{-N_4} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(x - x_i)}{b(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(y_j - x)}{b(y_j - x)} \quad (2.3.50)$$

$$\Lambda_3 = (b(x))^L t_1^{-M_1+M_2} t_2^{-N_4} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(x - y_j)}{b(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{a(z_k - x)}{b(z_k - x)} \quad (2.3.51)$$

$$\Lambda_4 = (b(x))^L t_2^{L-M_1+M_2-M_3} t_3^{M_1-M_2} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{a(x - z_k)}{b(x - z_k)} \quad (2.3.52)$$

2.4 Equações do Ansatz de Bethe

Nesta seção, obtemos as equações do AB . Notemos que escolhas nos denominadores dos Λ_i podem apresentar divergências, mas usaremos um método mais simples. Usamos o fato de que o Λ_i deve ser uma quantidade finita; então, escrevemos Λ como segue:

$$\Lambda(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x) + \Lambda_3(x) + \Lambda_4(x) \quad (2.4.53)$$

Dividindo esta última equação por $\Lambda_2(x)$, e tomando o limite $x \rightarrow x_l$, $l = 1 \dots M_1$, analisamos as equações da (2.3.49) à (2.3.52),

$$\Lambda_1(x) = (a(x))^L t_1^{-N_2} t_2^{-N_4} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(x_i - x)}{b(x_i - x)} \quad (2.4.54)$$

$$\implies \Lambda_1(x) \rightarrow \infty$$

$$\Lambda_2(x) = (b(x))^L t_1^{L-M_1+N_3} t_3^{-N_4} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(x-x_i)}{b(x-x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(y_j-x)}{b(y_j-x)} \quad (2.4.55)$$

$$\implies \Lambda_2(x) \rightarrow \infty$$

$$\Lambda_3(x) = (b(x))^L t_1^{-M_1+M_2} t_2^{-N_4} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(x-y_j)}{b(x-y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{a(z_k-x)}{b(z_k-x)} \quad (2.4.56)$$

$$\implies \Lambda_3(x) \rightarrow \textit{finito}$$

$$\Lambda_4(x) = (b(x))^L t_2^{L-M_1+M_2-M_3} t_3^{M_1-M_2} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{a(x-z_k)}{b(x-z_k)} \quad (2.4.57)$$

$$\implies \Lambda_4(x) \rightarrow \textit{finito}$$

Então, temos a seguinte expressão:

$$\frac{\Lambda(x)}{\Lambda_2(x)} = \frac{\Lambda_1(x)}{\Lambda_2(x)} + 1 + \textit{termos pequenos} \quad (2.4.58)$$

Agora, exigindo que o valor próprio $\Lambda(x)$, quando $x \rightarrow x_l$, seja uma quantidade *finita*, gera-se a primeira equação do AB :

$$\frac{\Lambda_1(x_l)}{\Lambda_2(x_l)} = -1 \quad (2.4.59)$$

Para gerar a segunda equação, divimos (2.4.53), por $\Lambda_3(x)$. Tomando o limite $x \rightarrow y_l$, $l = 1 \dots M_2$, analisamos da equação (2.3.49) até (2.3.52), da mesma forma, onde:

$$\implies \Lambda_1(x) \rightarrow \textit{finito}$$

$$\implies \Lambda_2(x) \rightarrow \infty$$

$$\implies \Lambda_3(x) \rightarrow \infty$$

$$\implies \Lambda_4(x) \rightarrow \textit{finito}$$

e temos a segunda equação do AB :

$$\frac{\Lambda_2(y_l)}{\Lambda_3(y_l)} = -1. \quad (2.4.60)$$

Para gerar a terceira equação, dividimos a equação (2.4.53), por $\Lambda_4(x)$ e tomando o limite $x \rightarrow z_l$, $l = 1 \dots M_3$, analisamos a equação (2.3.49) até (2.3.52), obtemos:

$$\implies \Lambda_1(x) \rightarrow \textit{finito}$$

$$\implies \Lambda_2(x) \rightarrow \textit{finito}$$

$$\implies \Lambda_3(x) \rightarrow \infty$$

$$\implies \Lambda_4(x) \rightarrow \infty$$

e temos a terceira equação do AB :

$$\frac{\Lambda_3(z_l)}{\Lambda_4(z_l)} = -1. \quad (2.4.61)$$

Fazendo uso das equações (2.4.59), (2.4.60) e (2.4.61), as quais ficam em função dos M 's [16] temos:

$$\left(\frac{a(x_l)}{b(x_l)} \right)^L t_1^{M_3-L} t_2^{-M_3} t_3^{M_3} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(x_i - x_l)}{b(x_i - x_l)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(y_j - x_l)}{b(y_j - x_l)} = -1 \quad (2.4.62)$$

$$t_1^{L-M_3} t_2^{M_3} t_3^{-M_3} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(y_l - x_i)}{b(y_l - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(y_j - y_l)}{b(y_j - y_l)} \cdot \frac{b(y_l - y_j)}{a(y_l - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{b(z_k - y_l)}{a(z_k - y_l)} = -1 \quad (2.4.63)$$

$$t_1^{M_3-M_1} t_2^{M_1-M_2-L} t_3^{M_2-M_1} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(z_l - y_j)}{b(z_l - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{a(z_k - z_l)}{b(z_k - z_l)} \frac{b(z_l - z_k)}{a(z_l - z_k)} = -1. \quad (2.4.64)$$

Sabe-se que $a(x) = x + 1$ e $b(x) = x$.

Para a equação (2.4.59), usamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_l \rightarrow i\lambda_l^{(1)} - \frac{1}{2} \quad y_j \rightarrow i\lambda_j^{(2)} - 1 \quad x_i \rightarrow i\lambda_i^{(1)} - \frac{1}{2},$$

e obtemos a *primeira EAB*:

$$t_1^{M_3-L} t_2^{-M_3} t_3^{M_3} \left(\frac{\lambda_l^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(1)} + \frac{i}{2}} \right)^L = \prod_{k \neq i}^{M_1} \frac{\lambda_l^{(1)} - \lambda_i^{(1)} - i}{\lambda_l^{(1)} - \lambda_i^{(1)} + i} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(1)} - \lambda_j^{(2)} + \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(1)} - \lambda_j^{(2)} - \frac{i}{2}}. \quad (2.4.65)$$

Para a equação (2.4.60), usamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$y_l \rightarrow i\lambda_l^{(2)} - 1 \quad y_j \rightarrow i\lambda_j^{(2)} - 1 \quad x_i \rightarrow i\lambda_i^{(1)} - \frac{1}{2} \quad z_k \rightarrow i\lambda_k^{(3)} - \frac{3}{2},$$

e obtemos a *segunda EAB*:

$$t_1^{L-M_3} t_2^{M_3} t_3^{-M_3} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_i^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_i^{(1)} + \frac{i}{2}} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_k^{(3)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_k^{(3)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_j^{(2)} - i}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_j^{(2)} + i}. \quad (2.4.66)$$

Para a equação (2.4.61), usamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$z_k \rightarrow i\lambda_k^{(3)} - \frac{3}{2} \quad y_j \rightarrow i\lambda_j^{(2)} - 1 \quad z_l \rightarrow i\lambda_l^{(3)} - \frac{3}{2},$$

e obtemos a *terceira EAB*:

$$t_1^{M_3-M_1} t_2^{M_1-M_2-L} t_3^{M_2-M_1} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(3)} - \lambda_j^{(2)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(3)} - \lambda_j^{(2)} + \frac{i}{2}} = \prod_{k \neq l}^{M_3} \frac{\lambda_l^{(3)} - \lambda_k^{(3)} - i}{\lambda_l^{(3)} - \lambda_k^{(3)} + i}. \quad (2.4.67)$$

2.5 Valores próprios da energia.

Os valores próprios da energia são dados pela expressão:

$$E = \frac{\partial}{\partial x} \ln (\Lambda (x)) |_{x=0} = \Lambda (x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \Lambda (x) |_{x=0} \quad (2.5.68)$$

na ausência de um termo de potencial químico, $J_d = 0$.

O valor da energia vai depender só de $\Lambda_1(x)$, porque temos que calcular a função em $x = 0$, então $\Lambda_i = 0$ para $i = 2, 3, 4$ e não se obtém contribuição para a expressão da energia.

$$\Lambda_1(x) = t_1^{-N_2} t_2^{-N_4} (x+1)^L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{x_i - x + 1}{x_i - x}$$

Substituindo esta última expressão na equação da energia, obtemos:

$$E = \Lambda_1(x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_1(x) |_{x=0} = t_1^{N_2} t_2^{N_4} \prod_{n=1}^{M_1} \frac{x_n}{x_n + 1} \times t_1^{-N_2} t_2^{-N_4} \times \left[L \prod_{i=1}^{M_1} \frac{x_i + 1}{x_i} + \sum_{i=1}^{M_1} \left(\frac{1}{x_i^2} \prod_{j \neq i}^{M_1} \frac{x_j + 1}{x_j} \right) \right].$$

A energia, com a mudança de variável seguinte, $x_i \rightarrow ix_i - \frac{1}{2}$, toma a forma

$$E = L - \sum_{i=1}^{M_1} \frac{1}{x_i^2 + \frac{1}{4}} \quad (2.5.69)$$

que é a energia sem termo de potencial químico. A contribuição devida ao termo J_d é obtida usando a forma diagonal da hamiltoniana:

$$H = -2J_d \sum_{i=1}^L X_i^{11} = -2J_d N_0 = -2J_d (L - M_1)$$

e

$$X_i^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_i.$$

Num problema de valores próprios simples, obtemos a contribuição para a energia, sendo $-2J_d N_0$, onde N_0 é o número total de singletos, e $M_1 = N_1 + N_2 + N_3$ é o numero total de tripletos existentes no sistema.

Fazendo $x_i = \lambda_i$, desta forma a contribuição do termo potencial químico na energia total do sistema será:

$$E = - \sum_{i=1}^{M_1} \left(\frac{1}{\left(\lambda_i^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{4}} - 2J_d \right) + (1 - 2J_d) L. \quad (2.5.70)$$

2.6 Gap de spin e diagonalização da Hamiltoniana

2.6.1 Método da diagonalização exata:

Para entender um pouco mais o modelo, vamos considerar primeiramente o caso de dois degraus, $L = 2$, para a escolha particular $t_3 = 1, t_2 = 1$ e $t_1 = t$. Para isto, expressamos a Hamiltoniana da seguinte forma:

$$H = \sum_{j=1}^L \left[\hat{h}_{j,j+1} - 2J_d X_j^{11} \right], \quad (2.6.71)$$

onde para dois degraus vamos ter X_1^{11} e X_2^{11} . Isto significa que para o caso X_1^{11} temos um operador de *Hubbard* do tipo $|1\rangle\langle 1|$ atuando não trivialmente no degrau 1, e um operador tipo identidade I_{4X_4} atuando trivialmente no degrau 2,

$$\begin{aligned} \hat{h}_{j,j+1} = & \sum_{\alpha=1}^4 X_j^{\alpha\alpha} X_{j+1}^{\alpha\alpha} + X_j^{31} X_{j+1}^{13} + X_j^{13} X_{j+1}^{31} + X_j^{24} X_{j+1}^{42} + X_j^{42} X_{j+1}^{24} + \\ & + t (X_j^{12} X_{j+1}^{21} + X_j^{32} X_{j+1}^{23} + X_j^{41} X_{j+1}^{14} + X_j^{43} X_{j+1}^{34}) + \\ & + t^{-1} (X_j^{21} X_{j+1}^{12} + X_j^{23} X_{j+1}^{32} + X_j^{14} X_{j+1}^{41} + X_j^{34} X_{j+1}^{43}). \end{aligned} \quad (2.6.72)$$

A mesma coisa acontece com X_2^{11} , atuando não-trivialmente só no degrau 2. Para dois degraus e supondo condições de contorno periódicas, a Hamiltoniana assume a forma:

$$H = \left(\hat{h}_{12} + \hat{h}_{21} - 2J_d (X_1^{11} + X_2^{11}) \right) = \left(\hat{h}_{12} + \hat{h}_{21} - 2J_d P_{1,2} \right). \quad (2.6.73)$$

A última equação pode ser expressa também em forma matricial, onde:

$$\hat{h}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6.74)$$

$$\hat{h}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6.75)$$

e

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6.76)$$

A diagonalização exata da Hamiltoniana (eq. 2.6.72), expressa em função das matrices acima, fornece os seguintes valores próprios da energia:

valores próprios de energia	multiplicidade	vetores próprios
$2 - 4J_d$	1	$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-\frac{(t^2+2tJ_d+1)}{t}$	2	$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0)$ $(0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\frac{(t^2-2tJ_d+1)}{t}$	2	$(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$\frac{(1+t^2)}{t}$	2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$
$-\frac{(1+t^2)}{t}$	2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-2J_d + 2$	1	$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-2J_d - 2$	1	$(0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
2	4	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
-2	1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

Este é o espectro de energia obtido da diagonalização da Hamiltoniana.

Na base utilizada, vemos que o primeiro vetor próprio corresponde ao produto tensorial de dois singletos expressos da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

um em cada degrau.

Para determinar que energias correspondem ao estado fundamental e ao primeiro estado excitado, fazemos o seguinte cálculo:

$$E_0 = 2 - 4J_d \quad (2.6.77)$$

e

$$E_1 = -2J_d - \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (2.6.78)$$

Então na equação (2.6.78), somando e subtraindo $2J_d$ e 2:

$$E_1 = E_0 + 2J_d - 2 - \left(t + \frac{1}{t} \right),$$

vemos que $E_1 > E_0$ quando $2J_d - 2 - \left(t + \frac{1}{t} \right) > 0$, onde:

$$J_d > 1 + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (2.6.79)$$

Assim E_0 corresponde à energia fundamental do sistema e E_1 corresponde à energia do primeiro estado excitado.

2.6.2 Método das equações do Ansatz de Bethe (EAB):

Fazendo uso das EAB (2.4.65, 2.4.66 e 2.4.67), também podemos encontrar os mesmo resultados para dois degraus e comparar com o método anterior.

Primeiro devemos fazer uma escolha dos números quânticos M_1, M_2, M_3 e M_4 para se poderem encontrar as energias.

Ao fazer $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, as equações do AB não existem, e na expressão da energia (eq. 2.5.70), onde $L = 2$, temos:

$$E_0 = (2 - 4J_d). \quad (2.6.80)$$

Para a escolha $M_1 = 1$, $M_2 = M_3 = 0$, temos duas raízes para λ em função do parâmetro:

$$\left(\lambda_1^{(1)} - \frac{i}{2}\right)^2 = t^2 \left(\lambda_1^{(1)} + \frac{i}{2}\right)^2,$$

o que gera:

$$\begin{aligned} \lambda_{1(+)}^{(1)} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1+t}{1-t}\right) \\ \lambda_{1(-)}^{(1)} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1-t}{1+t}\right). \end{aligned} \quad (2.6.81)$$

Para o caso $t = 1$ a primeira equação diverge e a segunda é zero, o que é bom, porque reproduz o modelo de Wang [9]. Então, pegamos $\lambda_{1(-)}^{(1)}$, que substituído na expressão da energia dá:

$$E_1 = -2J_d - \left(t + \frac{1}{t}\right). \quad (2.6.82)$$

Outra coisa que deve ser observada é que cada escolha dos M 's só deve produzir uma energia. A nível das equações do ansatz de Bethe, isto significa que só iremos encontrar duas soluções, já que é fato conhecido que as soluções das EAB correspondem apenas aos vetores de peso máximo ou mínimo da álgebra.

Dos métodos usados, *Diagonalização Exata* e EAB , vemos que:

<i>Diagonalização exata</i>	<i>EAB</i>
E_0 $2 - 4J_d$	$2 - 4J_d$
E_1 $-2J_d - \left(t + \frac{1}{t}\right)$	$-2J_d - \left(t + \frac{1}{t}\right)$

Então, com estes dois resultados, podemos encontrar o gap, definido como

$$\Delta \equiv E_1 - E_0 :$$

$$\Delta = 2 \left(J_d - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) - 1 \right) \quad (2.6.83)$$

2.7 Método Algébrico do Ansatz de Bethe para o modelo multiparamétrico geral de seis parâmetros livres

A hamiltoniana que descreve este modelo é o seguinte [17]:

$$H = \sum_{j=1}^L \left[h_{j,j+1} + \frac{1}{2} J_d (\vec{\sigma}_j \cdot \vec{\tau}_j - 1) \right], \quad (2.7.84)$$

onde

$$\begin{aligned}
4h_{j,j+1} = & 1 + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \tau_j^z \tau_{j+1}^z + q_1 (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + q_2 (\sigma_{j+1}^z \tau_j^z + \sigma_j^z \tau_{j+1}^z) + \\
& + k_1^+ \tau_j^- \tau_{j+1}^+ (1 + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + k_1^- \tau_j^- \tau_{j+1}^+ (\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z) + \\
& + k_2^+ \tau_j^+ \tau_{j+1}^- (1 + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + k_2^- \tau_j^+ \tau_{j+1}^- (\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z) + \\
& + k_3^+ \sigma_{j+1}^+ \tau_j^- (1 + \sigma_j^z \tau_{j+1}^z) + k_3^- \sigma_{j+1}^+ \tau_{j+1}^- (\sigma_j^z + \tau_{j+1}^z) + \\
& + k_4^+ \sigma_j^+ \tau_{j+1}^- (1 + \sigma_{j+1}^z \tau_j^z) + k_4^- \sigma_j^+ \tau_{j+1}^- (\sigma_{j+1}^z + \tau_j^z) + \\
& + k_5^+ \sigma_{j+1}^- \tau_j^+ (1 + \sigma_j^z \tau_{j+1}^z) + k_5^- \sigma_{j+1}^- \tau_j^+ (\sigma_j^z + \tau_{j+1}^z) + \\
& + k_6^+ \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- (1 + \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + k_6^- \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- (\tau_j^z + \tau_{j+1}^z) + \\
& + k_7^+ \sigma_j^- \tau_j^+ (1 + \sigma_{j+1}^z \tau_{j+1}^z) + k_7^- \sigma_j^- \tau_j^+ (\sigma_{j+1}^z + \tau_{j+1}^z) + \\
& + k_8^+ \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ (1 + \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + k_8^- \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ (\tau_j^z + \tau_{j+1}^z) + \\
& + q_3 [\sigma_{j+1}^+ \tau_{j+1}^- (\sigma_j^z - \tau_j^z) - \sigma_j^+ \tau_j^- (\sigma_{j+1}^z - \tau_{j+1}^z)] + \\
& + q_4 [\sigma_{j+1}^- \tau_{j+1}^+ (\sigma_j^z - \tau_j^z) - \sigma_j^- \tau_j^+ (\sigma_{j+1}^z - \tau_{j+1}^z)] + \\
& + q_5 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ \tau_j^- \tau_{j+1}^- + q_6 \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \tau_j^- \tau_{j+1}^+ + q_7 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- \tau_j^+ \tau_{j+1}^- + \\
& + q_8 \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- \tau_j^+ \tau_{j+1}^+ + q_9 [\sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \tau_j^+ \tau_{j+1}^- + \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- \tau_j^- \tau_{j+1}^+] , \tag{2.7.85}
\end{aligned}$$

com os coeficientes dados abaixo:

$$\begin{aligned}
k_1^\pm &= C_1 \pm C_{33} & k_2^\pm &= C_2 \pm C_{34} & k_3^\pm &= C_4 \pm C_{26} & k_4^\pm &= C_6 \pm C_{17} \\
k_5^\pm &= C_9 \pm C_{31} & k_6^\pm &= C_{12} \pm C_{15} & k_7^\pm &= C_{18} \pm C_{29} & k_8^\pm &= C_{20} \pm C_{23} \\
q_1 &= \frac{(1+C_3-C_{11})}{2} & q_1 &= \frac{(1+t_4)^2}{4t_4} & q_2 &= \frac{(1-C_3+C_{11})}{2} & q_2 &= -\frac{(1-t_4)^2}{4t_4} \\
q_3 &= 2C_5 & q_4 &= 2C_{10} & q_5 &= 4C_8 & q_6 &= 4C_{22} \\
q_7 &= 4C_{14} & q_8 &= 4C_{27} & q_9 &= 4C_{13} , & &
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{array}{lll}
C_{23}=C_{33}=\frac{p_5^{-1}+p_6^{-1}}{2} & C_2=C_{12}=\frac{(p_1+p_2)}{2} & C_3=C_{32}=\frac{(1+p_4)^2}{4p_4} \\
C_4=\frac{(p_1^{-1}-p_2^{-1})}{2} & C_5=C_{16}=\frac{(-1+p_4^2)}{4p_4} & C_6=C_9=\frac{(p_1-p_2)}{2} \\
C_{10}=-C_{19}=-\frac{(-1+p_4^2)}{4p_4} & C_{11}=C_{24}=C_8=-\frac{(-1+p_4)^2}{4p_4} & C_{13}=C_{21}=\frac{(1+p_4)^2}{4p_4} \\
C_{14}=p_3 & C_{15}=C_{34}=\frac{p_5+p_6}{2} & C_{16}=\frac{(-1+p_4^2)}{4p_4} \\
C_{17}=C_{31}=\frac{(p_5-p_6)}{2} & C_{18}=\frac{p_1^{-1}-p_2^{-1}}{2} & C_{22}=p_3^{-1} \\
C_{23}=C_{33}=\frac{p_5^{-1}+p_6^{-1}}{2} & -C_{25}=\frac{(-1+p_4^2)}{4p_4} & C_{26}=C_{29}=\frac{p_5^{-1}-p_6^{-1}}{2} \\
C_{27}=C_7=-\frac{(-1+p_4)^2}{4p_4} & -C_{30}=-\frac{(-1+p_4^2)}{4p_4} & ,
\end{array}$$

Seja R a matriz multiparamétrica para este modelo, onde a posição de cada elemento foi definida no caso anterior. Então, construímos a matriz cujos *termos diagonais* são:

$$\begin{array}{ll}
R_{11}^{11} = a(x) & R_{12}^{12} = p_1 b(x) \\
R_{13}^{13} = p_2 b(x) & R_{14}^{14} = p_3 b(x) \\
R_{21}^{21} = \frac{1}{p_1} b(x) & R_{22}^{22} = a(x) \\
R_{23}^{23} = p_4 b(x) & R_{24}^{24} = p_5 b(x) \\
R_{31}^{31} = \frac{1}{p_2} b(x) & R_{32}^{32} = \frac{1}{p_4} b(x) \\
R_{33}^{33} = a(x) & R_{34}^{34} = p_6 b(x) \\
R_{41}^{41} = \frac{1}{p_3} b(x) & R_{42}^{42} = \frac{1}{p_5} b(x) \\
R_{43}^{43} = \frac{1}{p_6} b(x) & R_{44}^{44} = a(x)
\end{array}$$

e os termos não-diagonais *diferentes de zero* são:

$$R_{21}^{12} = R_{24}^{13} = R_{41}^{14} = R_{12}^{21} = R_{32}^{23} = R_{42}^{24} = R_{13}^{31} = R_{23}^{32} = R_{43}^{34} = R_{14}^{41} = R_{24}^{42} = R_{34}^{43} = c,$$

onde $a(x) = x + 1$, $b(x) = x$ e $c = 1$.

Neste caso, vamos obter as equações do Ansatz de Bethe. O método usado é o mesmo que foi usado para o caso de três parâmetros.

A matriz R acima também satisfaz as equações de Yang-Baxter. Então, obtemos primeiro os valores próprios da matriz de transferência:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= (a(x))^L p_1^{N_2} p_2^{N_3} p_3^{N_4} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(x_i - x)}{b(x_i - x)}, \\
\Lambda_2 &= (b(x))^L p_1^{-L+M_1} p_4^{N_3} p_5^{N_4} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a(x - x_i)}{b(x - x_i)} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(y_j - x)}{b(y_j - x)}, \\
\Lambda_3 &= (b(x))^L p_2^{-L+M_1} p_4^{-M_1+M_2} p_6^{N_4} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{a(x - y_j)}{b(x - y_j)} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{a(z_k - x)}{b(z_k - x)} \quad e \\
\Lambda_4 &= (b(x))^L p_3^{-N+M_1} p_5^{-M_1+M_2} p_6^{-M_2+M_3} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{a(x - z_k)}{b(x - z_k)}. \tag{2.7.86}
\end{aligned}$$

As EAB são obtidas a partir das equações (2.4.59), (2.4.60) e (2.4.61), usando as mesmas mudanças de variáveis que no caso anterior. Desse modo as equações para os seis parâmetros livres são:

$$p_1^{L-M_2} p_2^{M_2-M_3} p_3^{M_3} p_4^{M_3-M_2} p_5^{-M_3} \left(\frac{\lambda_l^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(1)} + \frac{i}{2}} \right)^L = \prod_{k \neq l}^{M_1} \frac{\lambda_l^{(1)} - \lambda_i^{(1)} - i}{\lambda_l^{(1)} - \lambda_i^{(1)} + i} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(1)} - \lambda_j^{(2)} + \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(1)} - \lambda_j^{(2)} - \frac{i}{2}}, \tag{2.7.87}$$

$$p_1^{-L+M_1} p_2^{-L+M_1} p_4^{M_1-M_3} p_5^{M_3} p_6^{-M_3} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_i^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_i^{(1)} + \frac{i}{2}} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_k^{(3)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_k^{(3)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_j^{(2)} - i}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_j^{(2)} + i}, \tag{2.7.88}$$

e

$$p_2^{-L+M_1} p_3^{L-M_1} p_4^{-M_1+M_2} p_5^{M_1-M_2} p_6^{M_2} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(3)} - \lambda_j^{(2)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(3)} - \lambda_j^{(2)} + \frac{i}{2}} = \prod_{k \neq l}^{M_3} \frac{\lambda_l^{(3)} - \lambda_k^{(3)} - i}{\lambda_l^{(3)} - \lambda_k^{(3)} + i}. \tag{2.7.89}$$

Este resultado é parecido ao obtido no caso anterior para três parâmetros, a única mudança é a quantidade de parâmetros que acompanha cada equação do AB .

2.7.1 Valores próprios da energia e gap de spin

Na ausência do termo de potencial químico, $J_d = 0$, a energia é descrita pela equação:

$$E = \frac{\partial}{\partial x} (\ln \Lambda_1(x)) \Big|_{x=0} = \Lambda_1(x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (\Lambda_1(x)) \Big|_{x=0}, \quad (2.7.90)$$

onde

$$\Lambda_1 = (x+1)^L p_1^{N_2} p_2^{N_3} p_3^{N_4} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{x_i - x + 1}{x_i - x}, \quad (2.7.91)$$

então:

$$E = L - \sum_{i=1}^{M_1} \frac{1}{\left(\lambda_i^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (2.7.92)$$

e, considerando a contribuição do termo de potencial químico na energia, temos:

$$E = - \sum_{i=1}^{M_1} \left(\frac{1}{\left(\lambda_i^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{4}} - 2J_d \right) + (1 - 2J_d) L. \quad (2.7.93)$$

O gap de spin pode ser encontrado utilizando as EAB , como foi feito no caso de três parâmetros. Então, fazemos a seguinte escolha: $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Aqui as EAB não existem e na expressão da energia para $L = 2$ temos:

$$E_0 = (1 - 2J_d) 2.$$

Depois para a escolha de $M_1 = 1$ e $M_2 = M_3 = 0$, temos duas raízes (seção 2.6.2), mas só uma que satisfaz o modelo [9] e dada por:

$$\lambda^{(1)} = \frac{i(p_1 - 1)}{2(p_1 + 1)},$$

a qual substituída na energia (2.7.93), encontramos que

$$E_1 = - \left(p_1 + \frac{1}{p_1} \right) - 2J_d.$$

Com estes resultados podemos encontrar o gap, onde $\Delta \equiv E_1 - E_0$:

$$\Delta = -2 - \left(p_1 + \frac{1}{p_1} \right) + 2J_d,$$

este último resultado é o gap para o modelo estudado. Vemos que só um dos parâmetros aparece no gap de energia e tem a mesma forma que o gap para três parâmetros livres.

Capítulo 3

Tubo de spin quântico SU(8)

Os tubos de spin são acoplamentos de três cadeias de spin com *condições de contorno periódicas*, de tal modo que se fecha e formam uma rede triangular (Fig. 2). "Tubo", é uma escada com uma interação adicional entre a perna n e a perna 1. Consideremos os tubos em que o spin ao longo de cada perna e degrau têm uma interação isotrópica de Heisenberg.

Se escrevemos a Hamiltoniana de uma escada do caso $n = 3$ vamos ver que aparecem termos "triquadráticos" de interação:

$$\begin{aligned} H_3^{escada} = & \frac{1}{8} \sum_{j=1}^L [\sigma_j^{(1)} \cdot \sigma_{j+1}^{(1)} + \sigma_j^{(2)} \cdot \sigma_{j+1}^{(2)} + \sigma_j^{(3)} \cdot \sigma_{j+1}^{(3)} + \\ & + (\sigma_j^{(1)} \cdot \sigma_{j+1}^{(1)}) (\sigma_j^{(2)} \cdot \sigma_{j+1}^{(2)}) + (\sigma_j^{(1)} \cdot \sigma_{j+1}^{(1)}) (\sigma_j^{(3)} \cdot \sigma_{j+1}^{(3)}) + \\ & + (\sigma_j^{(2)} \cdot \sigma_{j+1}^{(2)}) (\sigma_j^{(3)} \cdot \sigma_{j+1}^{(3)}) + \\ & + (\sigma_j^{(1)} \cdot \sigma_{j+1}^{(1)}) (\sigma_j^{(2)} \cdot \sigma_{j+1}^{(2)}) (\sigma_j^{(3)} \cdot \sigma_{j+1}^{(3)})] + \frac{1}{8} L \end{aligned}$$

Em geral as escadas com $n - \text{pernas}$ incluem interações de $n - \text{pontos}$. Daqui, a não localidade das interações aumenta com o número de pernas, quer dizer $\sigma_j^{(1)} \cdot \sigma_{j+1}^{(1)}$ sobre a

perna 1 interage com $\sigma_j^{(3)} \cdot \sigma_{j+1}^{(3)}$ sobre a perna 3. O fato importante é que tais interações são necessárias para preservar a integrabilidade do modelo [15]. Podemos estender o estudo de $n = 3$ para o caso em que as 3 – *pernas* formam uma estrutura de tubo. O modelo de tubo de spin será estudado com a inclusão de parâmetros livres.

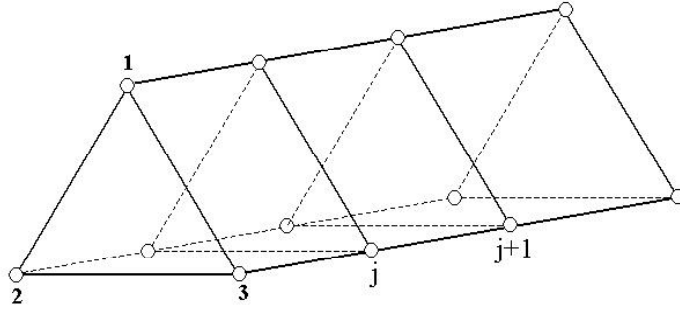


Figura 3.1: Tubo de spin ou acoplamento de três cadeias com condições de contorno periódicas.

Para a escada e tubo de spin, definimos as hamiltonianas:

$$H_n^{escada}(J) = \sum_{j=1}^L \left[\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (1 + \vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^i) + \frac{1}{2} J \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_j^{i+1} - 1) \right] \quad (3.0.1)$$

e

$$H_n^{tubo}(J) = \sum_{j=1}^L \left[\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (1 + \vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^i) + \frac{1}{2} J \sum_{i=1}^n (\vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_j^{i+1} - 1) \right] \quad (3.0.2)$$

para o ultimo caso temos que $\sigma_j^{n+1} = \sigma_j^1$.

A primeira parte da direita das duas equações tem a mesma forma, por isso a $H_{n-perna}^{escada}$ se aplica da mesma forma para $H_{n-perna}^{tubo}$. Por este motivo, os valores próprios das Hamiltonianas são equivalentes para o permutador do $su(N)$:

$$P_{j,j+1} = \frac{1}{N} \prod_{i=1}^n (1 + \vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^i) = \sum_{\alpha,\beta=1}^N X_j^{\alpha\beta} X_{j+1}^{\beta\alpha} \quad (3.0.3)$$

Lembramos que os operadores X estão definidos mediante $X_j^{\alpha\beta} = |\alpha_j\rangle \langle \beta_j|$, onde $|\alpha_j\rangle$ são estados próprios ortogonais da Hamiltoniana do degrau.

A matriz R , para $N = 8$ ($N = 2^n$ e neste caso o número de pernas, é $n = 3$) será expressa pela forma algébrica seguinte:

$$\begin{aligned} R(x, p) = & a(x) \sum_{\alpha}^8 e^{\alpha\alpha} \otimes e^{\alpha\alpha} + b(x) \sum_{\alpha \neq \beta}^8 p_{\alpha\beta} e^{\alpha\alpha} \otimes e^{\beta\beta} + c_-(x) \sum_{\alpha < \beta}^8 e^{\alpha\beta} \otimes e^{\beta\alpha} + \\ & + c_+(x) \sum_{\alpha > \beta}^8 e^{\alpha\beta} \otimes e^{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (3.0.4)$$

Onde x é o parâmetro espectral e:

$$a(x) = x + 1, \quad b(x) = x, \quad c_-(x) = c_+(x) = 1,$$

R , neste caso, será uma matriz de 64×64 , com 28 $p_{\alpha\beta}$ parâmetros livres, $p_{\alpha\beta} = \frac{N(N-1)}{2}$; $\alpha, \beta = 1 \dots N$, onde $p_{\beta\alpha} = (p_{\alpha\beta})^{-1}$. As matrizes $e^{\alpha\beta}$ são matrizes $N \times N$, quer dizer matrizes 8×8 , tais que tem elementos $(e^{\alpha\beta})^{\gamma\rho} = \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\rho}$ na posição $\alpha\beta$ o elemento é a unidade e todos os outros são nulos. É fácil mostrar que a equação (3.0.4), satisfaz a equação de $Y-B$. Note que ambos sitios na equação (3.0.4), atuam sobre o produto tensorial de 3-espacos auxiliares N -dimensionais $C_1^N \otimes C_2^N \otimes C_3^N$, onde a matriz $R_{ij}(x_{ik}, \{p\})$ atua sobre: $C_i^N \otimes C_k^N$

A Hamiltoniana para nosso modelo é:

$$H_{n=3}^{tubo} = \sum_{i=1}^L H_{i,j}^{perna} + \sum_{i=1}^L H_i^{\text{degrau}} \quad (3.0.5)$$

onde

$$H_{i,j}^{perna} = \frac{1}{8} \prod_{i=1}^3 (1 + \vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^i) \quad (3.0.6)$$

e

$$H_i^{\text{degrau}} = \frac{1}{2} J \sum_{i=1}^3 (\vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_j^{i+1} - 1) \quad (3.0.7)$$

Os operadores $(\sigma^x)_j^i$, $(\sigma^y)_j^i$ e $(\sigma^z)_j^i$ atuam como as matrizes de Pauli de spin-1/2 sobre o (i, j) -ésimo espaço de Hilbert h_L ,

$$H = \otimes_{i=1}^L V_i \quad V_i = \otimes_{j=1}^3 C^2 \quad (3.0.8)$$

Vemos que $H_{i,j}^{perna}$ é o operador de permutação sobre o espaço $V_i \otimes V_j$.

É conveniente mudar a base, onde o quadrado e a componente z do spin total de um triângulo dado, $\vec{S} = \vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)} + \vec{\sigma}^{(3)}$ sejam ortogonais. O triângulo é referido a tomar o primeiro degrau formando da forma indicada (3.2).

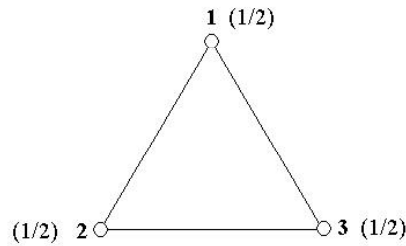


Figura 3.2: Representação do triângulo base.

Para o caso do tubo, são oito estados sobre um dado triângulo, já que temos em cada vértice um produto tensorial de três spins-1/2:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$$

dando dois dubletos de spin-1/2 e um quadrupletto de spin-3/2. A base é dada por:

$$\begin{aligned} |\uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle &\rightarrow |1\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} (2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ |\uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle &\rightarrow |2\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} (2|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) \\ |\uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle &\rightarrow |3\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ |\uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle &\rightarrow |4\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) \\ |\downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle &\rightarrow |5\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle \equiv |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle &\rightarrow |6\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \\ |\downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle &\rightarrow |7\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle &\rightarrow |8\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle \equiv |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

3.1 Método de transformação de similaridade

O método de transformação de similaridade é usado para poder escrever a Hamiltoniana em função dos operadores de Hubbard onde ela fica diagonalizada :

$$\hat{H}_i^{degrau} = B H_i^{degrau} B^{-1} \quad (3.1.9)$$

\hat{H}_i^{degrau} será nossa Hamiltoniana diagonalizada, onde $B = A_1 \otimes \dots \otimes A_L$, a matriz A é a matriz que realiza a transformação de base. Vamos construí-la usando a base dada acima:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{6} & 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.10)$$

A equação (3.0.7), é expandida e levando em consideração as condições de contorno periódicas obtemos:

$$H_i^{degrau} = \frac{J}{2} (\vec{\sigma}_i^1 \cdot \vec{\sigma}_i^2 + \vec{\sigma}_i^2 \cdot \vec{\sigma}_i^3 + \vec{\sigma}_i^3 \cdot \vec{\sigma}_i^1 - 3I_{8x8}) \quad (3.1.11)$$

onde I_{8x8} é uma matriz unitaria.

Aplicando os ket base à H_i^{degrau} , e usando o fato de que:

$$\vec{\sigma}_i^j \cdot \vec{\sigma}_i^{j+1} = (\sigma_z^j \sigma_z^{j+1} + \frac{1}{2} (\sigma_+^j \sigma_-^{j+1} + \sigma_-^j \sigma_+^{j+1})),$$

obtemos a seguinte matriz:

$$H_i^d = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.1.12)$$

Vemos que a Hamiltoniana acima é simétrica. Então, fazemos uso da equação (3.1.9), para encontrarmos a nova Hamiltoniana \widehat{H}_i^d :

$$\widehat{H}_i^d = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.13)$$

o que dá:

$$\widehat{H}_i^d = -3J [X_j^{11} + X_j^{22} + X_j^{33} + X_j^{44}] \quad (3.1.14)$$

Então, para o caso de uma escada de três pernas com condições de contorno periódicas ou tubo de spin a Hamiltoniana integrável é da seguinte forma:

$$H_{n=3}^{tubo} = \sum_{j=1}^L \sum_{\alpha, \beta=1}^N X_j^{\alpha\beta} X_{j+1}^{\beta\alpha} - 3J \sum_{j=1}^L (X_j^{11} + X_j^{22} + X_j^{33} + X_j^{44}) \quad (3.1.15)$$

A constante $3J$ no último termo representa o potencial químico aplicado sobre N_1, N_2, N_3 e N_4 , onde geralmente os operadores $N_\alpha = \sum_{j=1}^L X_j^{\alpha\alpha}$ são quantidades conservadas (*operadores número*).

Fazendo uso da equivalência entre a $H_{n-perna}^{escada}$ e a $H_{n-perna}^{tubo}$, o valor próprio da energia é:

$$E_{perna}^{tubo} = L - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{1}{\left(\lambda_j^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (3.1.16)$$

A segunda parte do lado direito da equação (3.1.15), que leva o J , sendo como nos casos anteriores o potencial químico das interações dos degraus, dá uma contribuição para a energia tal que esta assume a forma final seguinte:

$$E_{n=3}^{tubo} = L(1 - 3J) - \sum_{j=1}^{M_1} \left(\frac{1}{\left(\lambda_j^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{4}} - 3J \right) \quad (3.1.17)$$

onde $\lambda_j^{(1)}$ são soluções ou raízes das equações do ansatz de Bethe (*EAB*) com $N=8$, apresentadas abaixo.

3.2 Equações do Ansatz de Bethe

As *EAB* surgem da solução exata do método algébrico do ansatz de Bethe, como nos casos anteriores onde:

com:

$$M_1 = N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8,$$

$$M_2 = N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8,$$

$$M_3 = N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8,$$

$$M_4 = N_5 + N_6 + N_7 + N_8,$$

$$M_5 = N_6 + N_7 + N_8,$$

$$M_6 = N_7 + N_8,$$

$$M_7 = N_8.$$

obtemos:

$$t_1^{-L+M_2-M_6+M_7} t_2^{-M_7} t_3^{M_7} \left(\frac{\lambda_l^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(1)} + \frac{i}{2}} \right)^L = \prod_{i \neq l}^{M_1} \frac{\lambda_l^{(1)} - \lambda_i^{(1)} - i}{\lambda_l^{(1)} - \lambda_i^{(1)} + i} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(1)} - \lambda_j^{(2)} + \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(1)} - \lambda_j^{(2)} - \frac{i}{2}} \quad (3.2.18)$$

$$t_1^{L-M_3} t_2^{M_7} t_3^{-M_7} \prod_{i=1}^{M_1} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_i^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_i^{(1)} + \frac{i}{2}} \prod_{k=1}^{M_3} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_k^{(3)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_k^{(3)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(2)} - \lambda_j^{(2)} - i}{\lambda_l^{(2)} - \lambda_j^{(2)} + i} \quad (3.2.19)$$

$$t_1^{-M_1+M_2-M_3} t_2^{-M_7} \prod_{i=1}^{M_2} \frac{\lambda_l^{(3)} - \lambda_i^{(2)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(3)} - \lambda_i^{(2)} + \frac{i}{2}} \prod_{k=1}^{M_4} \frac{\lambda_l^{(3)} - \lambda_k^{(4)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(3)} - \lambda_k^{(4)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_3} \frac{\lambda_l^{(3)} - \lambda_j^{(3)} - i}{\lambda_l^{(3)} - \lambda_j^{(3)} + i} \quad (3.2.20)$$

$$t_1^{-M_5} \prod_{i=1}^{M_3} \frac{\lambda_l^{(4)} - \lambda_i^{(3)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(4)} - \lambda_i^{(3)} + \frac{i}{2}} \prod_{k=1}^{M_5} \frac{\lambda_l^{(4)} - \lambda_k^{(5)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(4)} - \lambda_k^{(5)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_4} \frac{\lambda_l^{(4)} - \lambda_j^{(4)} - i}{\lambda_l^{(4)} - \lambda_j^{(4)} + i} \quad (3.2.21)$$

$$t_1^{M_4} t_2^{M_4-M_3} \prod_{i=1}^{M_4} \frac{\lambda_l^{(5)} - \lambda_i^{(4)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(5)} - \lambda_i^{(4)} + \frac{i}{2}} \prod_{k=1}^{M_6} \frac{\lambda_l^{(5)} - \lambda_k^{(6)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(5)} - \lambda_k^{(6)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_5} \frac{\lambda_l^{(5)} - \lambda_j^{(5)} - i}{\lambda_l^{(5)} - \lambda_j^{(5)} + i} \quad (3.2.22)$$

$$t_1^{M_5} t_2^{M_7-M_4+M_3} \prod_{i=1}^{M_5} \frac{\lambda_l^{(6)} - \lambda_i^{(5)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(6)} - \lambda_i^{(5)} + \frac{i}{2}} \prod_{k=1}^{M_7} \frac{\lambda_l^{(6)} - \lambda_k^{(7)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(6)} - \lambda_k^{(7)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_6} \frac{\lambda_l^{(6)} - \lambda_j^{(6)} - i}{\lambda_l^{(6)} - \lambda_j^{(6)} + i} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned}
& t_1^{-L+M_1-M_2+M_3-M_4+M_5-M_6} \times \\
& \times t_3^{-M_1-M_2+M_3-M_4-M_5+M_6} \prod_{i=1}^{M_6} \frac{\lambda_l^{(7)} - \lambda_i^{(6)} - \frac{i}{2}}{\lambda_l^{(7)} - \lambda_i^{(6)} + \frac{i}{2}} = \prod_{j \neq l}^{M_7} \frac{\lambda_l^{(7)} - \lambda_j^{(7)} - i}{\lambda_l^{(7)} - \lambda_j^{(7)} + i}. \quad (3.2.24)
\end{aligned}$$

Neste caso, temos 28 parâmetros livres que são os $p_{\alpha\beta}$, mas, por simplicidade, analisaremos o modelo com apenas três parâmetros, escolhidos da seguinte forma:

$$t_1 = p_{21}, p_{23}, p_{56}$$

$$t_2 = p_{65}, p_{81}, p_{83}, p_{85}, p_{87}$$

$$t_3 = p_{82}, p_{84}, p_{86}$$

onde $p_{\beta\alpha} = (p_{\alpha\beta})^{-1}$ e os demais termos são iguais a 1.

Para encontrar o gap de energia fazemos, uma escolha dos M 's tal como fizemos no capítulo anterior. Fazendo $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = 0$, na equação (3.1.17) e na equação (3.2.18), encontramos que a energia fundamental, trabalhando para $L = 2$ é:

$$E_0 = (1 - 3J) 2 \quad (3.2.25)$$

Para encontrar a energia do primeiro estado excitado fazemos a seguinte escolha: $M_1 = 1$ e $M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = 0$, substituída na equação (3.2.18) encontramos:

$$\lambda_l^{(1)} = \frac{i}{2} \left(\frac{t_1 - 1}{-(t_1 + 1)} \right) \quad (3.2.26)$$

Logo, este valor (3.2.26) substituído na energia (3.1.17) fornece:

$$E_1 = -3J - \left(t_1 + \frac{1}{t_1} \right), \quad (3.2.27)$$

O gap de energia é $\Delta \equiv E_1 - E_0$, então obtemos:

$$\Delta \equiv E_1 - E_0 = 3J - \left(t_1 + \frac{1}{t_1} \right) - 2. \quad (3.2.28)$$

Obtivemos o gap de energia para um Tubo de spin o qual inclui um parâmetro livre. Uma vez que o modelo tem um numero impar de pernas, este gap não sobrevive, desaparece no limite termodinâmico.

Apêndice A

Diagonalização para o caso de seis parâmetros da escada de spin.

O hamiltoniano a ser diagonalizado será:

$$H = \sum_{j=1}^L \left[\hat{h}_{j,j+1} + \hat{H}_j^{degrau} \right], \quad (\text{A.0.1})$$

onde

$$\hat{h}_{j,j+1} = P_{j,j+1} \frac{d}{dx} R(x) \Big|_{x=0}, \quad (\text{A.0.2})$$

e

$$P_{j,j+1} = \frac{1}{N} \prod_{i=1}^n (1 + \vec{\sigma}_j^i \cdot \vec{\sigma}_{j+1}^i) = \sum_{\alpha, \beta=1}^N X_j^{\alpha\beta} X_{j+1}^{\beta\alpha}, \quad (\text{A.0.3})$$

lembrando que $N = 2^n$. Vamos usar a expressão em função dos operadores Hubbard X . Seja R a matriz multiparamétrica para este modelo. Então, construímos a matriz cujos *termos diagonais* são:

$$\begin{aligned}
R_{11}^{11} &= a(x) & R_{12}^{12} &= p_1 b(x) \\
R_{13}^{13} &= p_2 b(x) & R_{14}^{14} &= p_3 b(x) \\
R_{21}^{21} &= \frac{1}{p_1} b(x) & R_{22}^{22} &= a(x) \\
R_{23}^{23} &= p_4 b(x) & R_{24}^{24} &= p_5 b(x) \\
R_{31}^{31} &= \frac{1}{p_2} b(x) & R_{32}^{32} &= \frac{1}{p_4} b(x) \\
R_{33}^{33} &= a(x) & R_{34}^{34} &= p_6 b(x) \\
R_{41}^{41} &= \frac{1}{p_3} b(x) & R_{42}^{42} &= \frac{1}{p_5} b(x) \\
R_{43}^{43} &= \frac{1}{p_6} b(x) & R_{44}^{44} &= a(x)
\end{aligned} \tag{A.0.4}$$

e os termos não-diagonais *diferentes de zero* são:

$$R_{21}^{12} = R_{24}^{13} = R_{41}^{14} = R_{12}^{21} = R_{32}^{23} = R_{42}^{24} = R_{13}^{31} = R_{23}^{32} = R_{43}^{34} = R_{14}^{41} = R_{24}^{42} = R_{34}^{43} = c, \tag{A.0.5}$$

onde $a(x) = x + 1$, $b(x) = x$ e $c = 1$.

Diferenciando (A.0.4) e (A.0.5) quando $x = 0$, vamos obter:

$$\begin{aligned}
R_{11}^{11} &= 1 & R_{12}^{12} &= p_1 \\
R_{13}^{13} &= p_2 & R_{14}^{14} &= p_3 \\
R_{21}^{21} &= \frac{1}{p_1} & R_{22}^{22} &= 1 \\
R_{23}^{23} &= p_4 & R_{24}^{24} &= p_5 \\
R_{31}^{31} &= \frac{1}{p_2} & R_{32}^{32} &= \frac{1}{p_4} \\
R_{33}^{33} &= 1 & R_{34}^{34} &= p_6 \\
R_{41}^{41} &= \frac{1}{p_3} & R_{42}^{42} &= \frac{1}{p_5} \\
R_{43}^{43} &= \frac{1}{p_6} & R_{44}^{44} &= 1
\end{aligned} \tag{A.0.6}$$

e todos os elementos de (A.0.5) são iguais a zero.

Trabalhamos a segunda parte da equação (A.0.1) para escrever ela em função de X ,

fazemos uso da transformação de similaridade (Capitulo 3, seção 3.1):

$$\widehat{H}_j^{degrau} = AH_j^{degrau} A^{-1} \quad (\text{A.0.7})$$

usando a base seguinte:

$$\begin{aligned} |\uparrow, \uparrow\rangle &\rightarrow |0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle) \\ |\uparrow, \downarrow\rangle &\rightarrow |1\rangle \equiv (|\uparrow, \uparrow\rangle) \\ |\downarrow, \downarrow\rangle &\rightarrow |2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle) \\ |\downarrow, \downarrow\rangle &\rightarrow |3\rangle \equiv (|\downarrow, \downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

Construimos a matriz com a base anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.9})$$

A forma matricial da Hamiltoniana H_j^{degrau} se constroe aplicando ela sobre a base (A.0.8):

$$H_i^{degrau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.10})$$

Fazendo uso da equação (A.0.7) obtemos a Hamiltoniana dos degraus expressa em função de X :

$$\widehat{H}_j^{degrau} = \sum_{j=1}^L [-2J_d X_j^{11}], \quad (\text{A.0.11})$$

onde

$$X_j^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.12})$$

Agora voltamos ao problema da equação (A.0.2) ela fica:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{j,j+1} = & \sum_{\alpha=1}^4 X_j^{\alpha\alpha} X_{j+1}^{\alpha\alpha} + \frac{1}{p1} X_j^{12} X_{j+1}^{21} + p1 X_j^{21} X_{j+1}^{12} + \frac{1}{p2} X_j^{13} X_{j+1}^{31} + p2 X_j^{31} X_{j+1}^{13} + \\ & + \frac{1}{p3} X_j^{14} X_{j+1}^{41} + p3 X_j^{41} X_{j+1}^{14} + \frac{1}{p4} X_j^{23} X_{j+1}^{32} + p4 X_j^{32} X_{j+1}^{23} + \\ & + \frac{1}{p5} X_j^{24} X_{j+1}^{42} + p5 X_j^{42} X_{j+1}^{24} + \frac{1}{p6} X_j^{34} X_{j+1}^{43} + p6 X_j^{43} X_{j+1}^{34}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

Escrevendo a matriz para o caso $L = 2$ é dizer $\hat{h}_{1,2}$ e $\hat{h}_{2,1}$:

$$\hat{h}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.14})$$

e

$$\hat{h}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/p1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/p2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 01/p3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.15})$$

A forma matricial \widehat{H}_j^{degrau} é:

$$X_1^{11} \otimes 1 + 1 \otimes X_2^{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.16})$$

onde 1 é a matriz unidád 4×4 .

A diagonalização exata da Hamiltoniana, expressa em função das matrizes acima, fornece os seguintes valores próprios da energia:

valores próprios de energia	multiplicidade	vetores próprios
$2 - 4J_d$	1	$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-\frac{(p^{1^2}+2p^{1J_d+1})}{p^1}$	1	$(0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-\frac{(-p^{1^2}+2p^{1J_d-1})}{p^1}$	1	$(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\frac{(1+p6^2)}{p6}$	1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$
$-\frac{(1+p6^2)}{p6}$	1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0)$
$\frac{(1+p5^2)}{p5}$	1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$-\frac{(1+p5^2)}{p5}$	1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$\frac{(1+p4^2)}{p4}$	1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-\frac{(1+p4^2)}{p4}$	1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-\frac{(-p^{3^2}+2p^{3J_d-1})}{p3}$	1	$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$-\frac{(p^{3^2}+2p^{3J_d+1})}{p3}$	1	$(0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$-\frac{(p^{2^2}+2p^{2J_d+1})}{p2}$	1	$(0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$-\frac{(-p^{2^2}+2p^{2J_d-1})}{p2}$	1	$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
2	3	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

As duas primeiras energias são iguais as encontradas usando as *EAB* (seção 2.7.1).

Apesar do gap não depender dos parâmetros adicionais, o espectro de energias depende e, consequentemente, propriedades físicas importantes poderão depender destes parâmetros adicionais.

Conclusões

O tópico central desta tese foi o estudo de sistemas do tipo escadas de spin e tubos de spin quânticos. Estes modelos, são cadeias de spin com condições de contorno periódicas e de spin $\frac{1}{2}$, os quais são descritos no Metodo do Espalhamento Inverso Quântico (MEIQ) por uma matriz R multiparametrica. Os casos abordados foram de três, seis e 28 parâmetros livres, os dois primeiros para o caso da cadeia de Heisenberg e o último para o caso do Tubo de spin, resolvendo pelo Ansatz de Bethe Algébrico.

No Capítulo 1 fizemos uma revisão geral de ambos casos que logo são analisados em detalhe nos Capítulos 2 e 3. A introdução das ideias de Grupos foi feita pela conexão com o *MEIQ*.

O Capítulo 2, é dedicado ao estudo do modelo de escada de spin anisotrópico integrável. Este modelo é estudado com a introdução de três e seis parâmetros livres. Usando o método algébrico do Ansatz de Bethe foram derivados as equações do Ansatz de Bethe, a expressão da energia e o gap de spin.

Finalmente no Capítulo 3, é dedicado ao estudo de Tubo de spin $su(8)$. Neste Capítulo realizamos um estudo detalhado do modelo, com inclusão de parâmetros livres também, para logo obter as equações do AB, energia e gap do modelo.

Em todos os casos vimos que os parâmetros livres só estão presentes nas EAB, mas não na energia total do sistema. Tais parâmetros estão presentes quando fazemos uma análise

das energias do estado fundamental e do primeiro estado excitado, e por consequência no gap de energia.

Referências Bibliográficas

- [1] Biedenharn, L., C., Lohe M., A., *Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1995.
- [2] Tonin, G., R., C., tese de doutoramento na UFSCar, febrereiro de 1999.
- [3] Anderson, P., W., *The resonating valence bond state in LA2CuO4 and superconductivity*, Science, vol.235, no.4793, pag.1196-1198, 1987.
- [4] Zhang, F., C., Rice, T., M., *Effective hamiltonian for the superconducting Cu oxides*, Phys. Rev. **B37**, pag. 3759-3761, no.7, 1988.
- [5] Nepomechie, R. I., *A spin chain primer*, hep-th/9810032.
- [6] Faddeev, L., *Lectures on Quantum Inverse Scattering Method*, Series on Advances in Statistical Mechanics, vol. 6, pag. 9, 1990.
- [7] Faddeev, L. D., Takhtajan, L., A., J. Sov. Math., **24**, pag. 241, 1984.
- [8] Nagata, T., Uehara, M., Goto, J., Akimitsu, J., Motoyama, N., Eisaki, H., Uchida, S., Takahashi, H., Nakanishi, T., Mri, N., *Pressure-Induced Dimensional Crossover and Superconductivity in the Hole-Doped Two-Leg Ladder Compound*, Phys. Rev. Lett., **81**, pag. 1090-1093, 1998.
- [9] Wang, Y., *Exact solution of a spin-ladder model* Phys. Rev. **B60**, 9236, 1999.

- [10] Bethe, H., *Theory of metals Part.I Eigenvalues and eigenfunctions of the linear atomics chain*, Z. Phys., vol. 71, pag. 205-226, 1931.
- [11] Yang, C., N., Yang, C., P., *One dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions I. Proof of Bethes hypothesis for ground state in a finite system*, Phys. Rev., vol. 150, pag. 321-327, 1966.
- [12] Yang, C., N., Yang, C., P., *One dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions III. Applications*, Phys. Rev., vol. 151, pag. 258-264, 1966.
- [13] Rice, T., M., Gopalan, M., Sigrist, T., *Superconductivity, Spin Gap and Luttinger Liquids in a Class of Cuprates*, Europhys. Lett., vol.23, pag. 445-449, 1993.
- [14] Tonel P., A., *Escadas de spin integráveis*, tese de doutoramento na UFRGS, março de 2003.
- [15] Maslen, M. J., *Exactly Solved Quantum Solvable Ladders*, tese de doutoramento na Australian National University, dezembro de 2002.
- [16] Schultz, C. L., *Eigenvectors of the multi-component generalization of the six-vertex model*, Physica **A122**, pag. 71-88, 1983.
- [17] Foerster, A., Tonel P., A., *Integrable generalised spin ladder model*, Workshop on Integrable Field Theories, Solitons and Duality, JHEP Proceedings, hep2001.
- [18] Reshetikhin, N., Lett. Math. Phys., **20**, vol.331, 1990.
- [19] Perk, J., H., H., Schultz, C., L., Phys. Lett., **A84**, vol. 407, 1981
- [20] Gómez, Ruiz-Altaba, Sierra, *Quantum Groups and Two-dimensional Physics*, Cambridge University Press, 1996.
- [21] Roditi, I., *Integrable Systems and Quantum Groups*, Bra. J. Phys., vol. 30, no.2, 2000.