

TESE DE
DOUTORADO

**Violação da Simetria de Lorentz:
Resultados Recentes e Implicações
em Mecânica Quântica**

THALES COSTA SOARES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, 11 DE FEVEREIRO DE 2006

Tecendo a manhã

João Cabral de Melo Neto

*Um galo sozinho não tece uma manhã:
ele precisará sempre de outros galos.
De um que apanhe esse grito que ele
e o lance a outro; de um outro galo
que apanhe o grito que um galo antes
e o lance a outro; e de outros galos
que com muitos outros galos se cruzem
os fios de sol de seus gritos de galo,
para que a manhã, desde uma teia tênue,
se vá tecendo, entre todos os galos.
E se encorpando em tela, entre todos,
se erguendo tenda, onde entrem todos,
se entretendendo para todos, no toldo
(a manhã) que plana livre de armação.
A manhã, todo de um tecido tão aéreo
que, tecido, se eleva por si: luz balão.*

Mãos Dadas

Carlos Drummond de Andrade

Não serei o poeta de um mundo caduco.

Também não cantarei o mundo futuro.

Estou preso à vida e olho meus companheiros.

Estão taciturnos, mas nutrem grandes esperanças.

Entre eles, considero a enorme realidade.

O presente é tão grande, não nos afastemos.

Não nos afastemos muito, vamos de mãos dadas.

Não serei o cantor de uma mulher, de uma história,

não direi os suspiros ao anoitecer, a paisagem vista da janela,

não distribuirei entorpecentes ou cartas de suicida,

não fugirei para as ilhas nem serei raptado por serafins.

O tempo é a minha matéria, o tempo presente, os homens presentes,

a vida presente.

Dedicatória

À Minha Família

Agradecimentos

A José Abdalla Helajel Neto. Por tudo!

Ao Helajel, por nos ensinar, além da física, através de seus cursos extraordinários, valores que um cientista deve carregar para toda vida. Pelo exemplo de sua vontade de trabalhar, que vai a todo o canto do Brasil para ajudar e desenvolver a ciência de nosso País, alertando-nos sempre para sua dimensão Humana. Sua incansável luta para formação de recursos humanos qualificados e estímulo para integrarmos os quadros das universidades brasileiras sem distinção de região, mostrando como é possível, e de nossa responsabilidade, contribuirmos para o desenvolvimento científico nacional. Além de seu enorme respeito e luta para a educação básica.

Ao Helajel pela tão humana e carinhosa orientação que nos desperta o gosto pela atividade profissional de docência-pesquisa.

Ao nosso querido Professor-educador, mestre e guia Tião! Sem você nada seria o DCP. Sua semente por uma intransigente luta política com base em princípios éticos está plantada. E germinando em todos nós. Valeu pelas discussões políticas, pelos cursos que são importantíssimos em nossa formação. Para nós é um presente. Só tem um grande defeito. E é no coração! Tá faltando cores para ele. Ele é apenas Rubro-Negro.

Aos grandes companheiros Humberto Belich e Manoel Messias. Obrigado por me trazerem à área e à colaboração. Espero ainda poder muito colaborar com vocês aprendendo ainda

muito.

Valeu Álvaro, Humberto, Manoel e Ricardo Paschoal. Aprendemos muito nos grande embates travados com os representantes do MCT, quando queriam fechar as portas da nossa pós-graduação. Foi também um grande aprendizado

Muito obrigado Prof. Caride! Foi você quem primeiro me acolheu no CBPF. Muito gentil e acessível, sempre conversando nos corredores e estimulando a nossa militância científica e política, mostra-nos como é possível o diálogo opostos de idéias, abrindo-nos sempre o espaço justo. Sua visão ampla e aberta de pós-graduação nos contaminou.

Queria também agradecer ao Professor Alexander Smith pela contribuição à minha formação acadêmica, tanto pelos cursos, em que podemos desfrutar de sua experiência nas teorias de calibre, como pelo início de seu trabalho de orientação.

Queria lembrar também de dois grandes professores que muito contribuíram na minha história. A professora Penha Dias, que me resgatou à pesquisa quando eu achava que essa não seria mais meu caminho; Ao Fred (Frederico Cruz), responsável pela continuidade do resgate, meu orientador de mestrado. Sempre olho para o passado vejo o quanto aprendi com ele. E ao Helayel e Tião, que consolidaram esse processo. Espero agora conseguir retribuir o aprendizado.

A CFC que prestou a ajuda e infra-estrutura institucional, agora representada pelo Prof. João dos Anjos. Ao Evaldo e ao Caride, que anteriormente estiveram a frente da PG do CBPF

A Myryam! Quem mais se preocupa com todos os PGS do CBPF! Sempre muito carinhosa e atenciosa, resolvendo todos os nosso pepinos acadêmicos. Junto do Ricardo, formam uma dupla imbatível

À todos os companheiros do CBPF, meus colegas de turma Rubém, Nemésio, Wesley, Ri-

cardo e Gabriel; Os grandes companheiros do DCP (agora LAFEX) Leo Moraes (sempre paciente e acessível para tirar nossas dúvidas), Leo Coronel (sempre pela ordem!), Roger, Boldo (Grande amigo, dançarino de forró), Gustavo, Cristine, Martim (tricolor de coração), Álvaro Ferreira (companheiro da dança de salão, ele com aulas apenas teóricas), Sérgio (padeiro de mão cheia, que me ensinou vários de seus truques); Aos amigos peruanos, que não me arriscaria a dizer nome de todos eles, pois acabaria escrevendo errado. Mas valeu pelo aprendizado, eu queria o Cebiche na minha defesa, mas infelizmente não deu tempo!!! Um grande abraço ao Botta, à Márcia Moutinho, ao Cresus, ao Fabrício Barone, ao Gilmar e ao Moysés. Ao Guilherme Berredo, que apesar da ausência de humor é um cara bacana. Quando se junta ao André só se ouve reclamações e exclamações mau humoradas, mas têm bom coração.

Claro, à Rosângela, que por muito tempo nos aguentou diariamente. Além da Elizete, sempre nos ajudando. Ao pessoal da biblioteca, especialmente os que convivi de maneira mais próxima. À Rosa, Marina, Edileuza, e ao Baiano! Ao Almério, grande chapa da baixada! Ao amigos Josimar e Adré, guardiões do CBPF

Ao José Helayel, Humberto Belich, Manoel Ferreira, Gustavo Barbosa, Álvaro Nogueira, Ricardo Paschoal e Sebastião Dias, que leram e apresentaram sugestões e críticas ao manuscrito

Aos que me ajudaram com o LATEX, Leonardo de Assis, Gustavo Barbosa e Victor Otoyá Gostaria de agradecer aos meus colegas do CTU, meu atual local de trabalho. Pelo ambiente agradável, por terem me recebido muito bem. Ao Emanuel, pela parceria em trabalhos no CTU e ao Haroldo. Ao Romário, por ter aberto as portas da administração ao nosso trabalho.

Muito obrigado aos meus amigos da dança de salão, que tornaram essa etapa menos dolorosa... Especialmente aos grandes amigos da dança de Juiz de Fora.

Aos amigos da minha infância em São Gonçalo, e os que fiz na universidade, que onde estou carrego as melhores lembranças. Qualquer que seja a nova etapa concluída, eles estarão comigo. Luciano, Pierre, Jayme, Márcio André, André Assumpção, Humberto Oliveira, Eduardo de Carli, Marcos Scopel e Mário Reis e, meu grande amigo, Ricardo Sibanto Simões

À minha família, a base de tudo. Meus Pais, Pedro e Celina; meus irmãos, Fábio e Adriana; e minha avó, Maria. E aos que chegaram, Larissa e Richard, e aos que chegarão!

À minha mulher, ma petite, mon amour!!! Partrícia. Por tudo! Si tu n'exitais pas déjà, je t'inventais! Pra ti, nas palavras de Cartola, o que sinto: Linda, te sinto mais bela/ te fico na espera, me sinto tão só/ mas o tempo que passa, em dor maior/ bem maior/ Linda, no que se apresenta/ o triste se ausenta/ fez-se a alegria/ corra e olhe o céu/ que o sol vem trazer/ bom dia

Por fim, ao Povo Brasileiro, que financiou parte do meu doutorado, através do CNPq, durante o período em que tive bolsa, e através do CBPF, que ofereceu infraestrutura adequadíssima ao desenvolvimento da pesquisa. Agora temos que dar o retorno!

Resumo

Teorias com violação da simetria de Lorentz apresentam-se, hoje, como uma proposta consistente para teorias de calibre que vão além do Modelo Padrão da Física de Partículas. Vários de seus aspectos vêm sendo convenientemente abordados na literatura, dentre os quais destacamos as teorias planares resultantes da redução dimensional de modelos quadridimensionais.

Nesta tese, pretendemos abordar o modelo planar reduzido obtido a partir da teoria Abeliã de Carrol-Field-Jackiw. A esta, porém, acrescentamos um escalar de Higgs, responsável por quebrar espontaneamente a simetria de calibre, e conferir massa ao fóton. Este modelo apresenta um termo extra, tipo Chern-Simon, com um vetor de fundo que realiza uma quebra da simetria de Lorentz. Estudaremos as soluções clássicas para os potenciais e para os campos eletromagnéticos, quando o vetor de fundo for do tipo-espaço ou do tipo-tempo. Analisaremos, também, as soluções tipo-vórtice presentes nesta teoria. Chega-se a um resultado bastante interessante, pois estes vórtices têm carga elétrica e apresentam uma fase de Aharonov-Casher naturalmente, como consequência da violação da simetria de Lorentz.

Estaremos, também, interessados em possíveis efeitos da quebra da simetria de Lorentz no domínio da Mecânica Quântica de partícula. Através da proposta de um acoplamento não-mínimo na derivada covariante, partimos da equação de Dirac para computarmos o seu limite não-relativístico. Estaremos interessados, em particular, em efeitos não triviais

de fase quântica, sendo esta uma resposta natural à quebra da simetria de Lorentz.

Summary

Theories with violation of the Lorentz symmetry represents, nowadays, an alternative formulation in the realm of the fundamental physics beyond the Standard Model of Particle Physics. Several aspects of Lorentz-breaking gauge theories are under study and there is a huge literature in the area. Among interesting lines of investigation, we should point out the planar models that result, upon dimensional reduction, from 4-dimensional Lorentz-violation models.

In this work, we consider a planar model, enriched by a Higgs sector, that gives mass to the photon. We study classical solutions for the potential and the electromagnetic fields. Also, we are interested in vortex-type solutions, which here present a very interesting phenomenology: the vortex is electrically charged and an Aharonov-Casher phase comes out naturally, as a by-product of the Lorentz violation.

Another question of interest are the particles quantum mechanical implications of the Lorentz symmetry breaking. Here, by means of a sort of non-minimal coupling in the covariant derivative, induced by a Lorentz symmetry-breaking term, we describe relativistic and non-relativistic fermions and thoroughly discuss the generation of topological quantum phases.

Conteúdo

Dedicatória	ii
Agradecimentos	iv
Resumo	viii
Summary	x
Índice	xi
1 Introdução	1
2 Apresentação do modelo reduzido	9
2.1 O modelo estudado	11
3 Soluções Clássicas	17
3.1 Equações de Onda e Solução dos Campos	19
3.2 Soluções clássicas para o potencial escalar e para o campo elétrico no limite estático	23
3.2.1 O vetor de fundo é puramente tipo-tempo: $v^\mu = (v_0, 0)$	23
3.2.2 O vetor de fundo é puramente tipo-espaço: $v^\mu = (0, \vec{v})$	27
3.3 Solução para o potencial vetor e para o campo magnético no regime estático	32
3.3.1 O vetor externo é puramente tipo-tempo: $v^\mu = (v_0, 0)$	32
3.3.2 O vetor de fundo é puramente tipo-espaço: $v^\mu = (0, \mathbf{v})$	34

3.4	Comentários finais	38
4	Soluções tipo-vórtice	40
4.1	O modelo planar	43
4.2	Configurações de vórtice do modelo	44
4.3	O Efeito Aharonov-Casher	48
4.4	Comentários finais	49
5	Efeitos de fase quântica	51
5.1	O efeito Aharonov-Bohm	52
5.2	A fase de Aharonov-Casher	54
5.3	Equivalência entre os efeitos AC e AB	57
5.4	Topologia do Efeito AB e do Efeito AC	59
6	Implicações da Quebra da Simetria Lorentz em Mecânica Quântica	62
6.1	Violação de simetria de Lorentz por acoplamento não-mínimo, equação de Pauli e fase de Aharonov-Casher.	64
6.1.1	Acoplamento não-mínimo tipo-CFJ	64
6.1.2	Acoplamento não-mínimo tipo torção	66
6.1.3	Acoplamento não-mínimo com um tensor de fundo	68
6.1.4	Análise de AC e acoplamento não-mínimo com quebra da simetria de Lorentz	70
6.2	Violação de CPT	71
6.3	Limite não-relativístico para a anti-partícula:	73
6.3.1	O acoplamento mínimo	74
6.3.2	O acoplamento não-mínimo	75
6.3.3	Acoplamento não-mínimo com violação da simetria de Lorentz	77

6.3.4	Comentários Finais	78
7	Discussões e Perspectivas	82
7.1	Trabalho em Andamento	84
7.1.1	Mecânica Quântica Supersimétrica-N=1	84
7.2	Propostas em discussão	87
	Bibliografia	89

Capítulo 1

Introdução

Quais constantes da Natureza, como hoje acreditamos, são realmente invariantes em uma escala de tempo da ordem da idade do Universo? Este questionamento tem sido, ao longo do tempo, levantado de diversas maneiras em vários campos da Física. Fred Hoyle, o adversário de maior prestígio da Teoria do Big-bang, questionou se a constante da gravitação de Newton realmente era uma constante em escalas de tempo cosmológicas. Surgiram, na década passada, evidências de que constante de estrutura fina ($\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$), uma medida da intensidade da interação eletromagnética entre fótons, elétrons e pósitrons, esteja lentamente variando [1]. Anteriormente, Dirac já havia sugerido esta idéia [2]. Observações astronômicas do espectro de absorção e emissão de gases em torno de estrelas distantes também sugerem a variação desta constante [3]. Como α relaciona a carga elétrica e , a constante de Planck \hbar , e a velocidade de propagação da luz no vácuo c , qual destas “constantes” poderia variar? Sem dúvida, a alteração de qualquer uma delas provocaria grandes mudanças no nosso entendimento das propriedades da matéria.

A observação de raios cósmicos além do limite (GZK) de Greisen-Zatsepin-Kuzmin ($E_{GZK} \simeq 4.10^{19} eV$), [4, 5], levanta dúvidas sobre o conhecimento das leis que regem o tempo de vida das partículas que compõem estes raios. Seria esperado que estas partículas

decaíssem antes de chegar à Terra. Uma possível explicação é que estes raios desenvolvam uma velocidade superior a da luz para conseguir atingir o Sistema Solar.

A questão que se levanta, de alteração da velocidade limite de propagação, contraria frontalmente um dos pilares da teoria mais bem sucedida da Física atual, a Relatividade Restrita. Partindo do pressuposto de que a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética deve ser a mesma independentemente do sistema de referência que se adote, Einstein conseguiu dar uma interpretação revolucionária às transformações de Lorentz, provocando mudanças dos conceitos de espaço e de tempo, recolocando-os sob um novo pano de fundo onde a Física se desenvolve: o espaço-tempo.

A simetria de Lorentz, junto ao desenvolvimento da Mecânica Quântica, fornecem os guias para a formulação de uma teoria que possa descrever o comportamento das partículas elementares. Surgiu, então, a Teoria Quântica de Campos, que descreve as partículas como excitações localizadas de um campo que está imerso no espaço-tempo. O campo seria um grande “colchão de molas” onde as excitações se propagariam. A maturação destas idéias levou à formulação do Modelo Padrão, que descreve, de maneira unificada, as forças que regem as partículas elementares (eletromagnéticas, nucleares fortes e nucleares fracas) deixando de lado a força gravitacional. Uma das conhecidas dificuldades em se tratar a força gravitacional, de maneira resumida, reside no fato de não se ter massas que se repelem e, por isto, não se consegue a blindagem desta força. Einstein quando criou sua teoria da gravitação tentou também, sem sucesso, incluir o eletromagnetismo.

Desta tentativa de se incorporar a Teoria da Relatividade Geral, concebida para descrever a força gravitacional no cenário estabelecido pelo Modelo Padrão, aparece naturalmente a quebra da simetria de Lorentz. É de se esperar que, em altas energias, tenhamos uma teoria unificada descrevendo a Natureza de maneira simétrica. O Modelo Padrão com gravidade descreveria uma Física em que a energia envolvida seria da ordem de 10^{19} GeV (

a massa de Planck, considerando $c = 1$).

Dentre as possibilidades de violação da simetria de Lorentz, consolidou-se, ao longo da década passada, uma proposta de quebra desta simetria por um campo de fundo. Esta idéia ganhou uma atenção especial devido ao fato de que, em um processo de transição de fase, é natural que apareça um campo (escalar) de fundo não-nulo resultante quando o sistema físico atinge o estado de mínima energia. Este mecanismo é conhecido como quebra espontânea da simetria de Lorentz, e este processo de transição de fase, no contexto do Modelo Padrão, vem explicar como as partículas fundamentais adquirem massa [6].

A quebra espontânea de simetria de Lorentz aparece também no contexto da Teoria de Cordas. Esta teoria atribui dimensão a partículas pontuais; portanto, uma partícula movendo-se no espaço-tempo, ao invés de desenvolver uma trajetória linear, descreve uma folha, a chamada superfície de mundo. Os modos normais de vibração desta folha recuperariam as informações de descrição das partículas. Uma outra novidade desta teoria é lançar mão de uma idéia surgida no início das propostas de modelos cosmológicos: as teorias de Kaluza-Klein. Partindo inicialmente de uma teoria em dimensões mais altas, à medida que vamos reduzindo as dimensões, chegamos a uma teoria que explique os fenômenos que ocorrem no espaço-tempo ordinário quadridimensional[7].

A idéia da ocorrência da quebra espontânea de simetria no contexto da Teoria das Cordas e do Modelo Padrão Estendido foi lançada por Kostelesky e Samuel [8] em 1989, e, aos poucos, foi ganhando adesão na comunidade, como procedimento mais usual para se introduzir a quebra da simetria de Lorentz. No trabalho citado, os autores avaliam que ao Modelo Padrão da Física de Partículas devem ser incorporadas estas idéias.

Mas não é só neste contexto que é proposta uma quebra de Lorentz. Uma outra vertente teórica da Física que se estabeleceu ao longo dos últimos anos é a proposta de extensão da não-comutatividade para as coordenadas espaciais de uma partícula: as

teorias ditas não-comutativas,

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (1.0.1)$$

Esta linha de investigação considera que as coordenadas do espaço-tempo não mais comutem. Em Mecânica Quântica, esta propriedade implica na impossibilidade dos operadores posição serem medidos simultaneamente [9]. Partindo desta generalização, verifica-se que possíveis novos efeitos podem enriquecer nosso conhecimento em diversos campos da Física, e uma consequência imediata desta proposta é a quebra de simetria de Lorentz, que pode-se mostrar através do mapeamento de Seidberg-Witten.

Desenvolvemos um trabalho a ser submetido para publicação, que elucidada de que maneira ocorre esta violação de simetria por um campo de fundo, tomando como exemplo um elétron que se move em um campo elétrico uniforme gerado por um capacitor de placas paralelas. Chamamos um campo qualquer de campo de fundo quando não temos acesso às fontes destes campos. Vemos, através da trajetória balística do elétron num campo uniforme, que a equivalência na descrição do movimento do elétron por transformações ativa e passiva de Lorentz é quebrada. Trabalhamos este exemplo, porque acreditamos que o sentido em que ocorre a quebra da simetria de Lorentz não fica muito claro na literatura.

A presença da anisotropia espacial, manifesta nestas teorias, também apresentam-se em vários sistemas físicos de interesse. Como exemplos temos na transição de fase do ferromagnetismo no modelo de Ising; antes da transição, uma cadeia linear de spins com movimento térmico e descorrelacionados. À medida que o sistema é resfriado, os spins começam a ficar correlacionados e se orientam em uma determinada direção, gerando, como campo de fundo, um campo magnético. Desta forma, ocorre uma quebra de isotropia espacial, pois este campo de fundo seleciona espontaneamente uma direção preferencial.

Quando ocorre transição de fase nos supercondutores de alta temperatura, a supercorrente é transportada através dos planos de cobre-oxigênio. Portanto, estes planos criam também uma direção preferencial. Neste sentido, embora não seja objeto de aplicação desta tese, pretendemos trabalhar algumas questões no modelo com quebra da simetria de Lorentz que tenham algum potencial na modelagem de sistemas da matéria condensada.

Após a proposta da quebra de Lorentz, através da introdução de um fundo que promove anisotropia no espaço-tempo¹, alguns trabalhos testaram a validade deste modelo sob seus aspectos de consistência. Nosso Grupo, através de algumas teses de doutorado e algumas dissertações de Mestrado, prestou contribuições que consolidaram esta proposta. Especialmente, destacamos os trabalhos que compuseram a tese de doutorado de H. Belich [10], onde os aspectos de causalidade e unitariedade desta Teoria foram analisados, além de posteriores desdobramentos, como por exemplo, os aspectos técnicos inerentes à redução dimensional deste modelo, importantes sobretudo pela sua potencialidade de aplicações. Não se faz necessária a sua revisão, pois consta nas referências presentes na tese, que listamos em [11].

Outra linha de atuação do Grupo é a extensão supersimétrica de teorias com quebra de Lorentz, que tiveram sua origem em [12]. Neste trabalho, analisa-se a contribuição do vetor de fundo à massa do parceiro supersimétrico da partícula de calibre, o *gaugino*. As extensões supersimétricas do modelo Abelian, com duas ($N=2$) e quatro ($N=4$) supersimetrias, originadas a partir do modelo proposto em 6 e 10 dimensões, estão discutidas em [13]. Nestes trabalhos, explora-se ainda o mecanismo de redução dimensional à Legendre, que é o objeto de estudo de outra tese de doutorado do Grupo.

A presente tese de doutorado fortalece este cenário. Podemos dizer, de uma maneira geral, que ela se divide em duas partes. A primeira tem por objetivo preencher duas

¹desde que alguma componente espacial do vetor de fundo seja não-nula

lacunas presentes na literatura da teoria de campos, que são o estudo das soluções de vórtice e as soluções de campo clássicas do modelo planar com quebra espontânea da simetria interna.

Neste sentido, dedicamos um capítulo, o segundo desta tese, à exposição do modelo em questão, que será trabalhado nos terceiro e quarto capítulos, no qual destacamos não haver nenhuma contribuição original no que diz respeito ao seu conteúdo. Sua presença justifica-se pela necessidade em conhecer alguns dos aspectos mais gerais do modelo que servirão para o desenvolvimento das atividades seguintes, que constituem as contribuições originais desta tese. Escolhemos seguir trabalhando no modelo planar, pois nosso interesse residual e subliminar está no potencial de aplicação desta teoria, sobretudo na Física de baixas energias, em conexão com a Mecânica Quântica e eventuais sistemas da Matéria Condensada. Portanto, os aspectos estudados nesta tese cobrem uma lacuna de conhecimento sobre as teorias com violação da simetria de Lorentz.

No terceiro capítulo, estão descritas as soluções clássicas do modelo exposto no capítulo anterior, onde analisamos tanto as soluções de campo como dos potenciais, nos casos em que teremos os vetores de fundo responsáveis pela quebra de Lorentz tipo-espaço e do tipo-tempo. Fazemos uma comparação dos nossos resultados com o modelo de Chern-Simons, e em seguida tomamos o limite em que o vetor de fundo vai a zero como condição de teste de validade do modelo. Discutiremos em detalhes como a quebra de Lorentz apresenta modificações. Vamos observar que, para o caso em que o vetor de fundo é do tipo-tempo, as soluções obtidas são exatas; entretanto, para o caso do vetor tipo-espaço, algumas aproximações serão necessárias para desacoplarmos as equações de campo.

O quarto capítulo fecha a primeira parte da tese, ainda sob a perspectiva de análise de alguns aspectos da teoria, onde buscamos as soluções de vórtice do modelo assim como suas características. Observamos tais excitações topológicas tem carga elétrica no

contexto da teoria estudada, preservando as características do modelo quadridimensional. Isto se deve ao fato de que, nesta teoria, ao se observar as equações de Maxwell, o campo magnético é fonte para campo elétrico; portanto, em regiões onde há campo magnético, há também campo elétrico não-nulo. Observaremos, ainda, para estes vórtices, uma fase de Aharonov-Casher.

Nestes dois capítulos acreditamos ter contribuído com estes dois novos resultados, entendendo-lhes como seqüência dos trabalhos produzidos no Grupo até o momento. A partir deste ponto, teremos a segunda parte da nossa tese, que buscará novos caminhos para violação da simetria de Lorentz, sobretudo em sistemas de baixas energias. Nossa ênfase será em que condições um fundo responsável em quebrar Lorentz poderá gerar fases quânticas, e em especial, a fase de Aharonov-Casher.

Esta segunda parte, terá um novo capítulo, no qual nenhum novo resultado é apresentado, mas é de fundamental importância para que se crie um contexto em que o capítulo seguinte se desenvolva. Para tanto, o quarto capítulo fará uma pequena discussão de efeitos de fase quântica, dando um destaque a fase de Aharonov-Casher, e revisaremos alguns tópicos recentes de pesquisa na área.

O sexto capítulo discutirá implicações não-relativísticas da quebra da simetria de Lorentz, em Mecânica Quântica. Neste sentido, é proposto um novo tipo de acoplamento não-mínimo, realizado pelo acoplamento do setor de matéria de uma teoria de Dirac com vetores e tensores de fundo responsáveis pela quebra de Lorentz. O caminho seguido será, a partir da equação de Dirac, tomar seu limite não-relativístico. É obtido também a Hamiltoniana não-relativística, entretanto suas correções de energia não são ainda analisadas como objetivo desta tese.

Ainda no sexto capítulo, fazemos uma outra análise. Como se sabe da literatura, o termo de quebra de Lorentz também viola as simetrias de CPT. Sobre este ponto, uma

questão que se torna interessante, e com grande potencial de aplicação, é o comportamento da anti-partícula sob o mesmo tipo de acoplamento não-mínimo com violação da simetria de Lorentz. Estudaremos o limite não-relativístico da anti-partícula sob três diferentes acoplamentos: uma anti-partícula carregada, acoplada com o potencial de calibre (mínimo), e estudaremos a fase de Aharonov-Bohm; uma anti-partícula neutra, como momento de dipolo magnético, acoplada com o campo elétrico, para extrairmos a fase de Aharonov-Casher; por fim, analisamos a fase de Aharonov-Casher para anti-partícula em presença da quebra de Lorentz, e comparamos os três resultados.

Gostaríamos de alertar para uma questão de estilo; as conclusões mais técnicas são realizadas ao final de cada capítulo, com a finalidade de tornar a leitura mais fluente e focada, deixando o capítulo final para discutirmos de uma maneira mais geral e aberta as perspectivas de futuro que vislumbramos para a área assim como para apresentação dos trabalhos que estão em andamento e em que “status” de desenvolvimento os mesmos se encontram.

Capítulo 2

Apresentação do modelo reduzido

A Física planar, teorias e modelos em $(2 + 1) D$, é objeto de estudo da Física já há algum tempo, tanto pelos seus aspectos teóricos fundamentais como pelas potencialidades de aplicação em vários sistemas físicos de realização experimental, como se destacam na literatura os supercondutores e o Efeito Hall Quântico [15]. Recentemente, além de, recentemente, o estudo de vórtices em condensados de Bose-Einstein foi abordado segundo a Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons [16].

Uma implementação destes modelos em $(2 + 1) D$ bastante conhecida, e com resultados bastante incisivos na descrição dos fenômenos da Matéria Condensada é a teoria de Chern-Simons, conhecido como um termo de massa topológico, que viola as simetrias de paridade e reversão temporal, e que, para apresentar dinâmica, deve estar acoplado a um setor de matéria da teoria ou ao setor de Maxwell.

Quando o termo de Chern-Simons acopla-se ao setor de matéria, por exemplo, tem-se como solução desta teoria partículas de estatística fracionária, conhecida por *ânions*. Estas são partículas carregadas que têm a elas anexadas fluxo magnético. Destacamos, também, o estudo dos vórtices topológicos no contexto das teorias de Chern-Simons, que são soluções não-perturbativas de modelos onde o campo de Chern-Simons está

acoplado a campos carregados (matéria) e, eventualmente, também apresenta propagação corrigida por um termo do tipo-Maxwell($F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$). Estes vórtices também carregam fluxo magnético[17]. Há ainda várias outras características peculiares das teorias de Chern-Simons, e uma revisão de suas aplicações e resultados podem ser encontradas em [18].

Devemos destacar que a teoria de Chern-Simons apresenta sua formulação tendo como ponto de partida uma Física planar, pois há uma impossibilidade de defini-la em dimensões que não sejam ímpares. Entretanto, uma nova categoria de teoria topologicamente massiva surgiu na literatura por volta da década de 90, em que se havia a possibilidade de que ela existisse agora também em 4 dimensões, $(3 + 1) D$, mas havendo a necessidade de se quebrar a simetria de Lorentz através do acoplamento do setor de calibre com um vetor de fundo, este responsável em promover uma anisotropia no espaço-tempo, quebrando, assim, a simetria estabelecida pelo grupo de Lorentz nas transformações de partícula, preservando apenas as transformações sob o referencial de observador da teoria.

Esta modificação do Eletromagnetismo pela presença do termo de massa topológica, chamado, apenas por analogia, de uma nova categoria de Chern-Simons em 4 dimensões foi proposta inicialmente por Carrol, Field e Jackiw em[19], baseados tanto em dados observacionais da astrofísica¹, como pela consistência dos novos modelos da física teórica, que prevêem a quebra desta simetria na escala de energia de Planck.

Motivados por este cenário, entendemos que um estudo destas novas teorias de Chern-Simons torna-se relevante por várias razões, como por exemplo: avaliarmos como uma teoria planar, originária da redução dimensional de um Chern-Simons quadridimensional, aproxima-se dos resultados obtidos de uma teoria genuinamente planar; e também pelo fato de que, motivados pela aplicação em sistemas de baixas energias das teorias planares, avaliarmos novas possibilidades de aplicação de uma teoria planar resultante de uma

¹É interessante destacar que os dados observacionais do espectro de galáxias e a birrefringência do vácuo, posteriormente, foram refutados pelos mesmo autores como indicativos da quebra de Lorentz

quadridimensional, lembrando que há uma motivação bastante razoável para aventarmos a quebra da simetria de Lorentz na Matéria Condensada, pois este é um ambiente em que claramente esta quebra deva ocorrer. Por exemplo, no efeito Hall, a presença do campo magnético de fundo quebra a simetria de rotação do sistema.

Passaremos à exposição do modelo que será trabalhado nos Capítulos 3 e 4 desta tese, destacando que estaremos interessados em apurar as soluções de vórtice; por isto, adicionaremos ao modelo planar com quebra da simetria de Lorentz o setor de Higgs.

2.1 O modelo estudado

Nosso Modelo de Eletrodinâmica Planar com violação da simetria de Lorentz é obtido a partir da redução dimensional da Lagrangeana de Maxwell², obtida em $(3 + 1) D$, somada ao termo de Carrol, Field e Jackiw[19]

$$\mathcal{L}_{1+3} = \left\{ -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{4} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} v_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}} - A_{\hat{\nu}} J^{\hat{\nu}} \right\}, \quad (2.1.1)$$

onde v^{μ} é um quadrivetor externo e $A_{\hat{\nu}} J^{\hat{\nu}}$ é o termo responsável em fazer o acoplamento entre o campo de calibre e uma corrente externa; $\hat{\mu}$ é um índice que vai de 0 à 3.

Este modelo é invariante de calibre, porém não preserva a invariância de Lorentz e as simetrias simultâneas de conjugação de carga, invariância translacional e reversão temporal relativas ao referencial da partícula, as chamadas simetrias CPT. As motivações em se considerar o modelo reduzido $(2 + 1) D$, e os detalhes da redução, encontram-se no trabalho [20]. Usamos diretamente a Lagrangeana obtida no referido trabalho, que é a Lagrangeana de Maxwell em $1 + 3$ dimensões, adicionada ao termo de Carrol-Field-Jackiw, mais um setor escalar (de Higgs) que realiza a quebra espontânea da simetria[22]. Temos

²A métrica adotada segue a seguinte convenção: $g_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$ em $D = 1 + 3$, e $g_{\mu\nu} = (+, -, -)$ em $D = 1 + 2$. As letras gregas, $\hat{\mu}$, vão de 0 a 3, enquanto, μ , vão de 0 a 2.

assim

$$\mathcal{L}_{1+3} = \left\{ -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{4} \varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} v_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}} + (D^{\hat{\mu}}\phi)^* D_{\hat{\mu}}\phi - V(\phi^*\phi) + A_{\hat{\nu}} J^{\hat{\nu}} \right\}, \quad (2.1.2)$$

onde $D_{\hat{\mu}}\phi = (\partial_{\hat{\mu}} + ieA_{\hat{\mu}})\phi$ é a derivada covariante e $V(\phi^*\phi)$. Para obtermos o modelo reduzido, em suas linhas gerais, as prescrições para redução dimensional consistem, em relação a qualquer quadrivetor, em: i) mantemos imutável sua componente temporal e duas de suas componentes espaciais. ii) a terceira dimensão espacial é congelada, o que implicará: $\partial_3\chi \rightarrow 0$; iii) como o quadrivetor de fundo comporta-se de maneira que cada uma de suas componentes seja independente uma da outra, como um verdadeiro escalar, faremos com que a sua terceira componente espacial seja escrita separadamente das demais, e associaremos ela ao campo escalar de Higgs em 1 + 2 dimensões ($v^{(3)} = s$); iv) também, a terceira componente do potencial vetor tornar-se-á um escalar, ($A^{(3)} = \varphi$) ordenada do Note-se, que nesta prescrição de redução dimensional, fica assegurada automaticamente a invariância de calibre em 1 + 2 dimensões[10]

O escalar φ , que será associado à componente do campo $A^{(3)}$, é invariante de calibre ($\partial_3\alpha = 0$, α sendo o parâmetro de calibre), e o campo A^μ ($\mu = 0, 1, 2$) é invariante sob o calibre usual do Eletromagnetismo $U(1)$, cujo parâmetro de calibre é α . Portanto, este modelo de redução dimensional é perfeitamente compatível com a invariância de calibre.

Aplicando as prescrições descritas acima, para o quadrivetor de calibre, $A^{\hat{\mu}}$, e para o quadrivetor de fundo, $v^{\hat{\mu}}$, temos

$$A^{\hat{\nu}} \longrightarrow (A^\nu; \varphi) \quad (2.1.3)$$

$$v^{\hat{\mu}} \longrightarrow (v^\mu; s), \quad (2.1.4)$$

onde: $A^{(3)} = \varphi$, $v^{(3)} = s$ e $\mu = 0, 1, 2$.

Aparecem, então, dois escalares: o campo escalar, φ , que apresenta dinâmica, e s ,

uma constante (sem dinâmica). A Lagrangiana que se obtém após estas considerações, partindo de (2.1.2), é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+2} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu k}A^\mu\partial^\nu A^k - \varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k + \\ & +(D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - e^2\varphi^2(\phi^*\phi) - V(\phi^*\phi) - A_\mu J^\mu - \varphi J, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

onde o termo de fixação de calibre foi introduzido após realizada a redução dimensional. O campo escalar, φ , tem um comportamento típico de um campo de Klein-Gordon sem massa, e é responsável pelo acoplamento do vetor de fundo, v^μ , com o setor de calibre da teoria: $\varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k$. A presença do termo de Chern-Simons na Lagrangeana (2.1.5), com parâmetro de massa s , quebra a simetria de paridade e de reversão temporal. Deve-se notar que, apesar deste termo apresentar-se sob a forma covariante, a simetria de Lorentz é quebrada no referencial da partícula, uma vez que o trivetor de fundo, v^μ , não se comporta como um genuíno vetor perante as transformações de Lorentz, comportando-se como um conjunto de 3-escalares.

As dimensões de massa dos campos e dos parâmetros contidos na Lagrangeana (2.1.5) são os seguintes: $[\varphi] = [A^\mu] = [\phi] = 1/2$, $[s] = [v^\mu] = 1$, $[e] = 1/2$. Deve-se notar que, enquanto a constante de acoplamento quadridimensional do grupo de calibre $U(1)$, e_4 , é adimensional, a constante tridimensional apresenta uma dimensão $[\text{massa}]^{1/2}$. Este é o resultado usual de sistemas planares, que é um efeito remanescente da terceira dimensão espacial³. Após a quebra espontânea da simetria, e selecionando apenas termos bilineares,

³Em supercondutores de alta temperatura este efeito pode ser associado ao acoplamento entre dois planos de condução paralelos considerados em alguns modelos teóricos. Neste sentido, esta constante de acoplamento é interpretada como um acoplamento efetivo ($e_3 = e_4/\sqrt{l_\perp}$) por alguns autores [23], com l_\perp sendo o comprimento característico entre dois planos paralelos.

temos a seguinte Lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1+2} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}M_A^2\varphi^2 + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu k}A^\mu\partial^\nu A^k + \\ & -\varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k + \frac{1}{2}M_A^2A_\mu A^\mu - A_\mu J^\mu - \varphi J.\end{aligned}\quad (2.1.6)$$

Os propagadores obtidos a partir da Lagrangeana acima(2.1.6), são expressos em termos de operadores que formam a seguinte álgebra de spin

$$Q_{\mu\nu} = v_\mu T_\nu, \quad \Lambda_{\mu\nu} = v_\mu v_\nu, \quad \Sigma_{\mu\nu} = v_\mu \partial_\nu, \quad \Phi_{\mu\nu} = T_\mu \partial_\nu,$$

com as seguintes relações:

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu}T^\nu T^\alpha &= \square v_\mu T^\alpha - \lambda T^\alpha \partial_\mu = \square Q_\mu^\alpha - \lambda \Phi_\mu^\alpha, \\ Q_{\mu\nu}Q^{\alpha\nu} &= T^2 v^\alpha v_\mu = T^2 \Lambda_\mu^\alpha, \quad Q_{\mu\nu}\Phi^{\nu\alpha} = T^2 v_\mu \partial^\alpha = T^2 \Sigma_\mu^\alpha, \\ \lambda &\equiv \Sigma_\mu^\mu = v_\mu \partial^\mu, \quad T^2 = T_\alpha T^\alpha = (v^2 \square - \lambda^2).\end{aligned}$$

Após alguma álgebra, chegamos aos resultados abaixo:

$$\begin{aligned}\langle A^\mu(k) A^\nu(k) \rangle = & i \left\{ -\frac{(k^2 - M_A^2)}{\boxplus(k)} \theta^{\mu\nu} + \frac{(k^2 - M_A^2) \boxtimes \boxplus - \lambda^2 s^2 M_A^2 k^2}{M_A^2 (k^2 - M_A^2) \boxtimes(k) \boxplus(k)} \omega^{\mu\nu} + \right. \\ & -\frac{s}{\boxplus} S^{\mu\nu} + \frac{s^2 k^4}{(k^2 - M_A^2) \boxtimes(k) \boxplus(k)} \Lambda^{\mu\nu} - \frac{(k^2 - M_A^2)}{\boxtimes(k) \boxplus(k)} T^\mu T^\nu + \\ & + \frac{sk^2}{\boxtimes(k) \boxplus(k)} [Q^{\mu\nu} - Q^{\nu\mu}] + \frac{i(v \cdot k) s^2 k^2}{(k^2 - M_A^2) \boxtimes(k) \boxplus(k)} [\Sigma^{\mu\nu} + \Sigma^{\nu\mu}] + \\ & \left. -\frac{is(v \cdot k)}{\boxtimes(k) \boxplus(k)} [\Phi^{\mu\nu} - \Phi^{\nu\mu}] \right\},\end{aligned}\quad (2.1.7)$$

para o propagador do setor de calibre; os propagadores para o campo escalar, assim como para os termos misturados são dados por

$$\langle \varphi \varphi \rangle = i \frac{\boxplus(k)}{\boxtimes(k)(k^2 - M_A^2)},\quad (2.1.8)$$

$$\langle A^\alpha \varphi \rangle = \frac{-i}{(k^2 - M_A^2) \boxtimes(k)} [(k^2 - M_A^2) T^\nu + s k^2 v^\alpha + s(v \cdot k) k^\alpha], \quad (2.1.9)$$

$$\langle \varphi A^\alpha \rangle = \frac{i}{(k^2 - M_A^2) \boxtimes(k)} [(k^2 - M_A^2) T^\alpha - s k^2 v^\alpha + s(v \cdot k) k^\alpha], \quad (2.1.10)$$

onde: $\boxtimes(k) = [k^4 - (2M_A^2 + s^2 - v \cdot v) k^2 + M_A^4 - (v \cdot k)^2]$, $\boxplus(k) = (k^2 - M_A^2)^2 - s^2 k^2$.

Os resultados acima foram todos já analisados, sob os aspectos de consistência do modelo (causalidade, unitariedade e normalizabilidade), em [20] e não fazem parte dos resultados originais desta tese. Devemos direcionar aqui a leitura para os dois capítulos seguintes, que se baseará em soluções obtidas a partir do modelo exposto até o momento, que é o modelo de CFJ com quebra espontânea de simetria. A partir deste modelo, buscaremos as soluções clássicas e as soluções de vórtices.

Para isto, passemos agora a discutir possíveis papéis desempenhados pelos campos presentes na Lagrangiana. (2.1.5). O primeiro e o terceiro termo definem a Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons, que já foi bastante explorado na literatura, inclusive usados em muitas aplicações na matéria condensada em conexão com o aparecimento de defeitos topológicos, excitações aniônicas, etc., partindo daí nossa motivação. O campo escalar, ϕ , representa o setor de Higgs da teoria, responsável pelo surgimento de configurações de vórtices, já discutido tanto em teorias Abelianas como não-Abelianas escalares [24]-[27]. Em ausência de correntes, e com o campo φ indo a zero ($\varphi = 0$), obtemos a mesma Lagrangeana presente nos trabalhos [24]- [27], em que se obtém soluções de vórtices carregados e configurações auto-duais, em ausência do termo de Maxwell.

Devemos, então, destacar que é neste ponto que residirá a originalidade do nosso trabalho em relação aos demais apresentados na literatura, pois, nos trabalhos citados, não há o termo que quebra a simetria de Lorentz, acoplado com os setores escalares e de calibre da teoria.

Em um dos trabalhos gerados nesta tese, cuja referência é [28], estudamos as soluções

clássicas para este modelo bidimensional reduzido da teoria em 4-dimensões, que será exposto no Terceiro Capítulo. Foi verificado que a quebra de simetria de Lorentz modifica o comportamento do campo elétrico a longa distância, e a interação deve ser modificada de maneira logarítmica na presença do vetor de fundo para o caso em que este seja tipo-espaço. Com isto, deve-se esperar que o vetor de fundo promova não só a quebra da simetria de Lorentz e uma anisotropia no espaço, como também mudanças no comportamento físico de um sistema.

Capítulo 3

Soluções Clássicas

Neste capítulo, dedicaremos nossa atenção às equações de movimento clássicas para o modelo estendido com um termo de violação de Lorentz tal como descrito anteriormente, assim como estudaremos suas soluções para a equação de onda do modelo de Higgs abeliano planar com quebra espontânea de simetria, obtido em [20], para o potencial A^μ . O principal propósito aqui é investigar quais os efeitos tem o vetor de fundo responsável pela quebra da simetria de Lorentz nas soluções para os campos, e na solução do potencial gerada no contexto da eletrodinâmica planar.

Como a Lagrangeana com quebra espontânea de simetria apresenta o setor de calibre do modelo de MCS-Proca acoplado com um campo de Klein-Gordon massivo através do termo proporcional ao vetor de fundo, espera-se que as soluções obtidas correspondam às equações do modelo MCS-Proca corrigidas por termos que sejam dependentes deste. E é exatamente o que acontece; verificou-se, então, que as equações de movimento apresentam uma estrutura muito similar à estrutura usual do modelo MCS-Proca, adicionada de termos dependente do vetor de fundo. Em seguida, as soluções para os campos elétrico e magnético, e para o potencial, foram encontradas para os casos em que o vetor de fundo é puramente tipo espaço e puramente tipo tempo, separadamente, que exibe correções, em

relação ao modelo MCS-Proca, dependentes de v^μ .

Para o caso do vetor de fundo puramente tipo-tempo, são obtidas, através de integrações do tipo Fourier, soluções algébricas exatas. Tanto o potencial escalar quanto o potencial vetor são dados em termos de combinações lineares das funções de Bessel modificadas (K_0, K_1), e comporta-se, tanto perto como afastado da origem, como o caso MCS-Proca puro. As diferenças para as soluções ocorrem sempre na região radial intermediária. Como a função de Bessel decai exponencialmente, as soluções apresentam uma forte blindagem, que é um comportamento típico do caso em que a intermediação física da interação é realizada por partículas massivas. Também, notar-se-á que o potencial escalar tem forma similar às soluções do modelo MCS-Proca. Entretanto, os potenciais diferirão sensivelmente para o caso em que a massa de Proca for pequena, ($M_{A/s} \ll 1$), ou quando o vetor de fundo for grande ($v_0 \lesssim s$), que pode tornar a interação atrativa em determinada região do espaço. Em relação ao potencial vetor, é possível obter soluções bastante similares ao caso MCS-Proca, sem alterações qualitativas. Entretanto estas soluções modificar-se-ão substancialmente à distâncias intermediárias para o caso em que ($v_0 \lesssim s$).

Por outro lado, para o caso em que o vetor de fundo é puramente espacial, as integrais de Fourier não são mais solúveis exatamente, o que implicará em algumas aproximações conferindo maior complexidade algébricas às soluções. A presença da anisotropia espacial torna-se uma propriedade manifesta, no sentido que os termos de correção apresentar-se-ão com uma clara dependência no ângulo determinado pela fixação do vetor de fundo \vec{v} . O potencial escalar consiste em uma combinação complexa da função de Bessel e funções radiais ($K_0, rK_1, K_1/r$); sua forma, perto e longe da origem, aproxima-se do caso MCS-Proca: ele desaparece quando $r \rightarrow \infty$, e comporta-se como $\ln r$ para $r \rightarrow 0$. Quanto ao potencial vetor, ele também aparece como combinações das funções de Bessel e de

funções radiais $(rK_0, K_0/r, K_1, K_1/r^2)$, exibindo termos de anisotropia. Independente de qualquer complexidade em que se dá a análise, este potencial apresenta um comportamento idêntico, perto e longe da origem, ao potencial do modelo MCS-Proca. A análise gráfica mostrará que a presença do vetor de fundo não apresentará modificações qualitativas sensíveis comparadas ao MCS-Proca devido à pequena magnitude do vetor de fundo comparada aos parâmetros de massa de Chern-Simons ($v^2/s^2 \ll 1$).

Nosso método para esta análise consistirá em obtermos soluções para o campo de Klein-Gordon, revelando sua estrutura análoga ao potencial escalar tanto para o caso puramente espacial como para o puramente temporal do vetor de fundo. Em seguida, mostraremos como estas soluções recuperam o caso MCS-Proca no limite em que o vetor de fundo vai a zero ($v^\mu = 0$), condição necessária para garantia de validade de nosso modelo.

Passaremos, então, à análise detalhada da proposta que se dividirá da seguinte forma. Na próxima seção deste Capítulo apresentaremos as equações de movimento do modelo $(2 + 1)$ reduzido, a partir da qual extrairemos as equações de onda para o potencial e para os campos. Na segunda seção, resolvemos as equações para o caso do potencial escalar no limite estático para os casos em que o vetor de fundo é puramente tempo e puramente espaço e discutiremos os resultados. Na terceira seção, resolvemos as equações diferenciais para o potencial vetor de acordo com o procedimento adotado na segunda seção. Apresentaremos em seguida, as conclusões obtidas para a análise proposta.

3.1 Equações de Onda e Solução dos Campos

Em uma análise dimensional da Lagrangeana(2.1.6), observa-se as seguintes dimensões de massa para os campos e correntes

$$[A^\mu] = [\varphi] = 1/2, [s] = [v^\mu] = 1, [J^\mu] = 5/2. \quad (3.1.1)$$

As equações são obtidas, na forma covariante, ao escrevermos as equações de Euler-Lagrange (E-L)

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = s\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho + \varepsilon^{\mu\nu\rho}v_\nu\partial_\rho\varphi + M_A^2 A^\mu - J^\mu, \quad (3.1.2)$$

$$(\square + M_A^2)\varphi = -\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k - J. \quad (3.1.3)$$

Deve-se observar que as equações de Maxwell são modificadas pela presença do vetor de fundo e elas estão descritas abaixo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t B = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\partial_t \vec{E} - \nabla^* B = -\vec{j} - s\vec{E}^* - \left(\vec{v}^* \partial_t \varphi + v_0 \vec{\nabla}^* \varphi\right) + M_A^2 \vec{A}, \quad (3.1.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - sB = \rho - M_A^2 A_0 + \vec{v} \times \vec{\nabla} \varphi, \quad (3.1.6)$$

$$(\square + M_A^2)\varphi = v_0 \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{v} \times \vec{E} - J. \quad (3.1.7)$$

A primeira das equações é uma identidade de Bianchi ¹ ($\partial_\mu F^{\mu*} = 0$), portanto o vetor de fundo não a modifica. As duas seguintes obtêm-se a partir da equação de E-L (3.1.2), enquanto a última equação vem de (3.1.3). A dimensão de massa dos campos elétrico e magnético podem ser determinadas a partir das equações acima, o que nos dá $[\mathbf{E}] = [B] = 3/2$. A equação para a conservação da corrente também é modificada pela presença do vetor de fundo,

$$\partial_\mu J^\mu = -\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu\partial_\rho\varphi \quad (3.1.8)$$

que se reduz ao resultado usual $\partial_\mu J^\mu = 0$, quando v^μ é constante ou tem rotacional nulo ($\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu = 0$). Esta é também, como mostra [19], a condição que deixa a teoria invariante de calibre.

¹Em $D = 1 + 2$, o tensor dual, definido como $F^{\mu*} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$, é um trivetor, que é dado por: $F^{\mu*} = (B, -\vec{E}^*)$. Foi adotada a seguinte convenção: $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$. Em geral, o símbolo (*), indica também o comportamento dual de um bivector: $(E^i)^* = \epsilon_{ij}E^j \longrightarrow \vec{E}^* = (E_y, -E_x)$.

Manipulando de maneira conveniente as equações de Maxwell para extrairmos as equações de propagação da onda para B e \vec{E} , obtemos

$$(\square + s^2 + M_A^2)B = -s\rho + \vec{\nabla} \times \vec{j} + sM_A^2 A_0 - s\vec{v} \times \nabla\varphi + \\ -\partial_t(\nabla\varphi) \times \vec{v}^* - v_0\nabla^2\varphi, \quad (3.1.9)$$

$$(\square + s^2 + M_A^2)\vec{E} = -\vec{\nabla}\rho - \partial_t\vec{j} + s\vec{j}^* - \vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{\nabla}\varphi) - s\vec{v}(\partial_t\varphi) + \\ -sv_0\vec{\nabla}\varphi - sM_A^2\vec{A}^* - \vec{v}^*\partial_t^2\varphi + v_0\vec{\nabla}^*(\partial_t\varphi), \quad (3.1.10)$$

que no regime estacionário se escrevem como

$$(\nabla^2 - s^2 - M_A^2)B = s\rho - \vec{\nabla} \times \vec{j} - sM_A^2 A_0 + s\vec{v} \times \nabla\varphi + v_0\nabla^2\varphi, \quad (3.1.11)$$

$$(\nabla^2 - s^2 - M_A^2)\vec{E} = \vec{\nabla}\rho - s\vec{j}^* + sv_0\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{\nabla}\varphi) + sM_A^2\vec{A}^*. \quad (3.1.12)$$

Substituindo as definições dos campos em relação aos potenciais, as equações de onda para (A_0, \vec{A}) são

$$[\square(\square + (s^2 + 2M_A^2)) + M_A^2] A_0 = (\square + M_A^2) [\rho + (\vec{v} \times \vec{\nabla}\varphi)] + \\ + s(\partial_t\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{v}^* + s\vec{\nabla} \times \vec{j} - sv_0\nabla^2\varphi, \quad (3.1.13)$$

$$[\square(\square + (s^2 + 2M_A^2)) + M_A^2] \vec{A} = (\square + M_A^2) (\vec{j} + \vec{v}\partial_t\varphi + v_0\vec{\nabla}^*\varphi) - s\vec{\nabla}^*\rho + \\ + s\partial_t\vec{j}^* + s\vec{v}(\partial_t^2\varphi) - sv_0\vec{\nabla}(\partial_t\varphi) + \\ -s(\vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{\nabla}\varphi))^*, \quad (3.1.14)$$

Devemos notar que o resultado acima é similar ao modelo MCS clássico, onde as equações de onda para os potenciais obedecem uma equação diferencial de quarta ordem inhomogênea. A diferença do modelo estudado em relação ao MCS-Proca desaparece se tomarmos o vetor de fundo igual a zero ($v^\mu \rightarrow 0$), o que facilmente se verifica nas equações de onda

(3.1.9, 3.1.10, 3.1.13, 3.1.14) reduzindo ao caso MCS-Proca usual;

$$[\square(\square + s^2 + 2M_A^2) + M_A^4] A_0 = (\square + M_A^2) \rho + s \vec{\nabla} \times \vec{j}, \quad (3.1.15)$$

$$[\square(\square + s^2 + 2M_A^2) + M_A^4] \vec{A} = (\square + M_A^2) \vec{j} - s \vec{\nabla}^* \rho - s \partial_t \vec{j}^*, \quad (3.1.16)$$

$$[\square + s^2 + M_A^2] \vec{E} = -\vec{\nabla} \rho - \partial_t \vec{j} + s \vec{j}^* - s M_A^2 \vec{A}^*, \quad (3.1.17)$$

$$[\square + s^2 + M_A^2] B = -s \rho + \vec{\nabla} \times \vec{j} + s M_A^2 A_0. \quad (3.1.18)$$

A solução para as equações de onda para uma distribuição de carga pontual, e em ausência de correntes é dada por

$$A_0(r) = (e/2\pi) [c_+ K_0(m_+ r) + c_- K_0(m_- r)], \quad (3.1.19)$$

$$\vec{A}(r) = -(e/2\pi) c [m_+ K_1(m_+ r) - m_- K_1(m_- r)] \hat{r}^*, \quad (3.1.20)$$

$$\vec{E} = -(e/2\pi) [c_+ m_+ K_1(m_+ r) + c_- m_- K_1(m_- r)] \hat{r}; \quad (3.1.21)$$

$$B(r) = -(e/2\pi) c [m_+^2 K_0(m_+ r) - m_-^2 K_0(m_- r)], \quad (3.1.22)$$

onde

$$c_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4M_A^2}} \right], \quad c = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4M_A^2}}, \quad (3.1.23)$$

$$m_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(s^2 + 2M_A^2) \pm s \sqrt{s^2 + 4M_A^2} \right]. \quad (3.1.24)$$

As soluções acima serão usadas como referência para ajudar na identificação das contribuições relativas ao vetor de fundo em relação à Eletrodinâmica de MCS-Proca. Perto da origem, estas soluções comportam-se como: $A_0(r) \rightarrow -(e/2\pi) \ln r$, $\vec{A}(r) \rightarrow 0$, $\vec{E} \rightarrow (e/2\pi) \hat{r}/r$, $B(r) \rightarrow (e/2\pi) s \ln r$. Assintoticamente, estas soluções decaem a zero de acordo com o comportamento das Funções de Bessel.

3.2 Soluções clássicas para o potencial escalar e para o campo elétrico no limite estático

Nesta seção, analisaremos as soluções para o potencial escalar e o campo elétrico para uma carga eletrostática puntiforme, e o vetor de fundo em duas situações distintas. Primeiramente, puramente tipo-tempo e em seguida tipo-espaco, a partir das equações (3.1.7) e (3.1.13), que formam um sistema acoplado de equações diferenciais

3.2.1 O vetor de fundo é puramente tipo-tempo: $v^\mu = (v_0, 0)$

Para o caso de configuração estática, as Eqs. (3.1.7), (3.1.13) reduzem-se à

$$[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4]A_0 + sv_0\nabla^2\varphi = -(\nabla^2 - M_A^2)\rho, \quad (3.2.25)$$

$$v_0(\nabla^2 - M_A^2)A_0 - s(\nabla^2 - M_A^2)\varphi = -v_0\rho, \quad (3.2.26)$$

que consistem em um sistema de duas equações diferenciais acopladas, que se desacoplam sob a forma abaixo:

$$\begin{aligned} [\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4 + v_0^2\nabla^2](\nabla^2 - M_A^2)A_0 = \\ - [(\nabla^2 - M_A^2)(\nabla^2 - M_A^2) + v_0^2\nabla^2]\rho, \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

$$\begin{aligned} s[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4 + v_0^2\nabla^2][\nabla^2 - M_A^2]\varphi = \\ -v_0\{[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4] + v_0(\nabla^2 - M_A^2)(\nabla^2 - M_A^2)\}\rho. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Para resolvermos a Eq. (3.2.27), propomos que a distribuição de carga seja do tipo $\rho(r) = e\delta(r)$ e tomamos a transformada de Fourier para o potencial escalar, $A_0(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{A}_0(k)$, chegamos à solução em termos da função de Bessel K_0

$$A_0(r) = \frac{e}{(2\pi)} [(A_+ + v_0^2 B_+) K_0(M_+ r) + (A_- + v_0^2 B_-) K_0(M_- r) - v_0^2 (B_+ + B_-) K_0(M_A r)], \quad (3.2.29)$$

onde algumas constantes foram definidas para facilitar a visualização da solução

$$A_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{(s^2 - v_0^2)}{\sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)}} \right], \quad (3.2.30)$$

$$B_{\pm} = \left[\frac{2T_{\pm}}{(s^2 - v_0^2) \pm \sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)}} \right], \quad (3.2.31)$$

$$T_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{(s^2 - v_0^2 + 2M_A^2)}{\sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)}} \right], \quad (3.2.32)$$

$$M_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(s^2 - v_0^2 + 2M_A^2) \pm \sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)} \right]. \quad (3.2.33)$$

O campo elétrico obtido a partir do potencial eletrostático dado pela Eq. (3.2.29), é dado por

$$\begin{aligned} \vec{E}(r) = & -\frac{e}{(2\pi)} \left[-(A_+ + v_0^2 B_+) M_+ K_1(M_+ r) \right] \hat{r} + \\ & - \left[(A_- + v_0^2 B_-) M_- K_1(M_- r) + v_0^2 (B_+ + B_-) M_A K_1(M_A r) \right] \hat{r} \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Deve-se observar que, tanto o campo elétrico como o potencial eletrostático, apresentam a mesma forma funcional do modelo de MCS-Proca, descrito nas equações (3.1.19), (3.1.21), quando temos o limite $v_0/s \ll 1$ ou $M_A/s \sim 1$, como será explicado a seguir. No limite de pequenas distâncias, ($r \ll 1$), o potencial eletrostático (3.2.29) apresenta um comportamento puramente logarítmico e é repulsivo, enquanto o campo elétrico (3.2.34) decai com $1/r$,

$$A_0(r) = -\left(\frac{e}{2\pi}\right) \ln r, \quad \vec{E}(r) = -\left(\frac{e}{2\pi}\right) \frac{1}{r} \hat{r}, \quad (3.2.35)$$

ou seja, a presença do vetor de fundo não traz nenhuma mudança qualitativa a pequenas distâncias, em comparação com o modelo de MCS-Proca também próximo a origem. Distante da origem, tanto o potencial como o campo elétrico decaem exponencialmente sobrepondo-se um ao outro no infinito.

O papel do vetor de fundo, então, seria o de amortecer a projeção entre as soluções, aumentando seus alcances. Quanto menores forem os fatores M_{\pm} , maiores serão os alcances. Teremos ainda que, enquanto $M_{\pm}^2 < m_{\pm}^2$, o alcance destas novas soluções serão

maiores que o alcance das soluções para o modelo de MCS-Proca correspondente. Apesar da semelhança funcional entre as soluções para os potenciais dados por (3.1.19) e (3.2.29), estes diferem substancialmente em duas situações: i) quando a massa de Proca é pequena comparada a outros parâmetros de massa (s, M_+, M_-), que tornará o termo $K_0(M_A r)$ dominante e inverterá o comportamento do potencial eletrostático; ii) o módulo de v_0 é da ordem da massa topológica ($v_0/s \lesssim 1$), regime no qual a influência do vetor de fundo sob as soluções é máxima. Os Gráficos abaixo ilustram estas situações

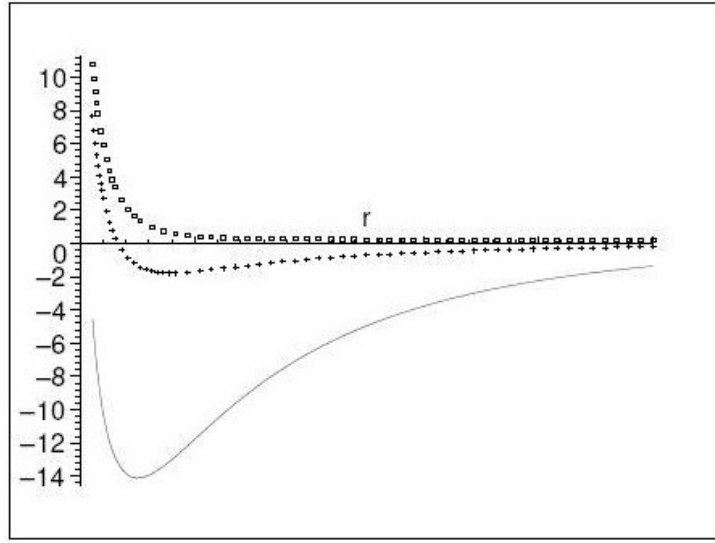


Figura 1: O gráfico acima corresponde ao comportamento do potencial escalar. A linha pontilhada em quadrados corresponde aos parâmetros $s = 20$ e $M_A = 2$ e $v_0 = 0$, que é o caso MCS-Proca puro; A linha pontilhada por x a $s = 20, M_A = 2$ e $v_0 = 8$; a linha contínua, corresponde a $s = 20, M_A = 2$ e $v_0 = 15$.

Na Fig. 1, mostra-se três curvas para pequenos valores da massa de Proca ($M_A = 2$): a linha pontilhada por quadrados, corresponde ao potencial de MCS-Proca; as linhas pontilhadas por x e a contínua, representa o potencial escalar (3.2.29) para dois diferentes valores para o vetor de fundo, $v_0 = 8$ e $v_0 = 15$. Podemos observar que quanto mais

próximo forem os valores de v_0 e $s-$ (neste caso $s = 20$), maior será o desvio do comportamento típico de um MCS-Proca puro, como ilustra a curva contínua. Com o valor de v_0 diminuindo, o potencial escalar tende ao comportamento do modelo de MCS-Proca, como mostrado pela curva intermediária, representada pelo pontilhado em x. Para $v_0 = 0$, obviamente recupera-se o mesmo comportamento que MCS-Proca, descrito pela curva em quadradinhos. O potencial escalar é negativo e seu comportamento dado pelo termo $-K_0(M_A r)$, que se torna dominante sobre $K_0(M_{\pm} r)$ quando $M_A \ll M_{\pm}$. De fato, este comportamento atrativo deve-se ao fato da razão entre as grandezas M_A/s ser pequena.

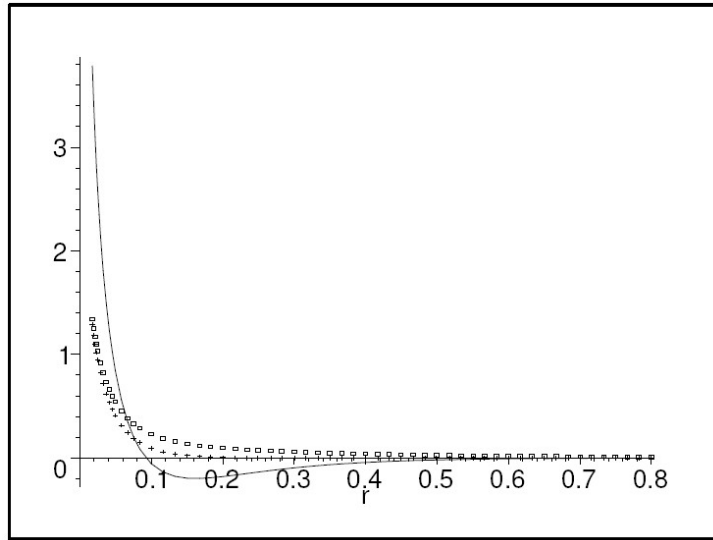


Figura 2: Novamente faz-se o estudo do comportamento do potencial escalar em função de r . A linha pontilhada por quadradinhos corresponde aos parâmetros $s = 20$ e $M_A = 8$ para o potencial do caso MCS-Proca puro; A linha pontilhada por x a $s = 20, M_A = 8$ e $v_0 = 8$; a linha contínua, corresponde a $s = 20, M_A = 8$ e $v_0 = 17$.

Tanto o gráfico descrito na Fig. 1, quanto o da Fig. 2, mostram que o potencial eletrostático é sempre repulsivo próximo da origem e decai exponencialmente a longa distância. Este comportamento é bastante similar ao MCS-Proca para o caso em que $v_0/s \ll 1$ ou $M_A/s \sim 1$, mas difere sensivelmente para o caso em que temos $M_A \ll M_{\pm}$

ou $v_0/s \lesssim 1$, onde observamos que o potencial tornar-se-á atrativo a distâncias intermediárias.

O último ponto a se destacar é que no limite em que o vetor de fundo vai a zero, ($v_0 \rightarrow 0$), trivialmente recuperamos as soluções para o modelo de MCS-Proca, já que $A_{\pm} \rightarrow c_{\pm}$.

3.2.2 O vetor de fundo é puramente tipo-espaço: $v^{\mu} = (0, \vec{v})$

Neste caso, devemos considerar as Eqs. (3.1.7),(3.1.13), que no regime estático são escritas sob a forma

$$[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4]A_0 + (\nabla^2 - M_A^2)(\vec{v} \times \vec{\nabla}\varphi) = -(\nabla^2 - M_A^2)\rho \quad (3.2.36)$$

$$(\vec{v} \times \vec{\nabla})A_0 + (\nabla^2 - M_A^2)\varphi = 0. \quad (3.2.37)$$

Desacoplando estas equações, temos

$$[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4 - (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla})]A_0 = -(\nabla^2 - M_A^2)\rho \quad (3.2.38)$$

$$[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4 - (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla})]\varphi = -(\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla})\rho. \quad (3.2.39)$$

Novamente, considerando uma distribuição de carga estática e puntiforme, $\rho(r) = e\delta(r)$, e tomando a transformada de Fourier para o potencial eletrostático, temos sua representação integral

$$A_0(r) = \frac{e}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{k}d\mathbf{k}}{[\mathbf{k}^2 + R_+^2]} \int_0^{2\pi} P_+ e^{ikr \cos \varphi} d\varphi - \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{k}d\mathbf{k}}{[\mathbf{k}^2 + R_-^2]} \int_0^{2\pi} P_- e^{ikr \cos \varphi} d\varphi, \quad (3.2.40)$$

onde

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{(s^2 + v^2 \sin^2 \alpha)}{\sqrt{(s^2 + v^2 \sin^2 \alpha)(s^2 + v^2 \sin^2 \alpha + 4M_A^2)}} \right], \quad (3.2.41)$$

$$R_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(s^2 + 2M_A^2 + v^2 \sin^2 \alpha) \pm \sqrt{(s^2 + v^2 \sin^2 \alpha)(s^2 + 4M_A^2 + v^2 \sin^2 \alpha)} \right], \quad (3.2.42)$$

e α é o ângulo definido através da relação $\cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{k} / vk$, que é o ângulo entre o vetor de fundo (\vec{v}) e o momento transferido (\vec{k}). O fato das constantes P_{\pm}, R_{\pm} dependerem de (α) traz uma dificuldade em realizarmos a integração acima, que não pode ser resolvida exatamente, a menos que se realizem algumas aproximações de maneira que possamos tratá-las algebricamente, sem precisarmos utilizar de recursos numéricos. Se consideramos que $s^2 \gg v^2$, a integração tornar-se-á realizável, e teremos

$$P_{\pm} \simeq \frac{1}{2} [1 \pm s/\gamma \pm (2M_A^2 v^2 / s\gamma^3) \sin^2 \alpha], \quad (3.2.43)$$

$$\frac{1}{[\mathbf{k}^2 + R_{\pm}^2]} \simeq \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + m_{\pm}^2]} \mp \frac{m_{\pm}^2}{s\gamma} \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{[\mathbf{k}^2 + m_{\pm}^2]^2}, \quad (3.2.44)$$

com: $m_{\pm}^2 = [s^2 + 2M_A^2 \pm s\gamma] / 2$, e $\gamma = \sqrt{s^2 + 4M_A^2}$. Devemos notar que os fatores m_{\pm}^2 são exatamente os mesmos que aparecem nas soluções de MCS-Proca que estão em Eq. (3.1.24). Aqui consideramos que o ângulo entre \vec{v} e \vec{r} é dado por $\cos \beta = \vec{v} \cdot \vec{r} / vr$, onde $\beta = cte$. Enquanto o vetor de fundo \vec{v} determina uma direção preferencial no espaço, a coordenada \vec{r} define a posição onde o potencial é medido; então β é o ângulo que indica a dependência dos campos em relação à direção do vetor de fundo. Como estão confinado no plano, estes ângulos satisfazem à relação: $\alpha = \varphi - \beta$, o que permitirá agora realizarmos a intergração na variável- φ baseado na identidade: $\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta - (\cos 2\beta) \cos^2 \varphi + c_3 \sin 2\varphi$. Temos, então

$$\int_0^{2\pi} [P_- e^{ikr \cos \varphi}] d\varphi \simeq \frac{(2\pi)}{2} \left[(1 - s/\gamma - (2M_A^2 v^2 / s\gamma^3) \sin^2 \beta) J_0(\mathbf{kr}) + (2M_A^2 v^2 / s\gamma^3) \cos 2\beta \frac{J_1(\mathbf{kr})}{\mathbf{kr}} \right], \quad (3.2.45)$$

$$\int_0^{2\pi} [P_+ e^{ikr \cos \varphi}] d\varphi \simeq \frac{(2\pi)}{2} \left[(1 + s/\gamma + (2M_A^2 v^2 / s\gamma^3) \sin^2 \beta) J_0(\mathbf{kr}) - (2M_A^2 v^2 / s\gamma^3) \cos 2\beta \frac{J_1(\mathbf{kr})}{\mathbf{kr}} \right]. \quad (3.2.46)$$

Para finalmente resolvermos a integração em \mathbf{dk} é importante notarmos que os termos R_{\pm}^2 , dados em Eq. (3.2.42), também são dependentes da variável angular, o que exigirá uma nova aproximação, que é descrita em Eq. (3.2.44). Considerando então a integração sob a variável angular e depois na variável- \mathbf{k} , temos o potencial, em primeira ordem em v^2/s^2

$$A_0(r) = \frac{e}{2(2\pi)} \left\{ A_+ K_0(m_+ r) + A_- K_0(m_- r) - D_+(r) K_1(m_+ r) + D_-(r) K_1(m_- r) \right\}, \quad (3.2.47)$$

onde

$$A_{\pm} = \left[1 \pm s/\gamma \pm \frac{v^2}{2s\gamma^3} (\gamma^2 \pm s\gamma - 4m_{\pm}^2 \sin^2 \beta) \right];$$

$$D_{\pm}(r) = v^2 \left[-\frac{2m_{\pm} \cos 2\beta}{s\gamma^3} \frac{1}{r} + \frac{m_{\pm} (1 \pm s/\gamma) \sin^2 \beta}{2s\gamma} r \right].$$

Nesta expressão, podemos notar claramente a dependência do potencial em relação ao ângulo β , uma evidência inquestionável da anisotropia espacial provocada pela presença do vetor de fundo.

Para obtermos o campo elétrico, basta usarmos sua definição em termos do potencial, Eq. (3.2.47), e temos o seguinte resultado:

$$\vec{E}(r) = -\frac{e}{2(2\pi)} \left\{ -m_+ \left[A_+ - \frac{4v^2 \cos 2\beta}{s\gamma^3 r^2} \right] K_1(m_+ r) - m_- \left[A_- - \frac{4v^2 \cos 2\beta}{s\gamma^3 r^2} \right] K_1(m_- r) + m_+ D_+ K_0(m_+ r) - D_- K_0(m_- r) \right\} \hat{r} \quad (3.2.48)$$

Vamos analisar agora os comportamentos do potencial e do campo elétrico. Perto da origem, o potencial comporta-se-á como uma função logarítmica, enquanto o campo elétrico vai com $1/r$:

$$A_0(r) = -\frac{e}{(2\pi)} \left[1 + \frac{v^2}{2\gamma^2} (1 - \cos 2\beta) \right] \ln r, \quad \vec{E}(r) = -\frac{e}{(2\pi)} \left[1 + \frac{v^2}{2\gamma^2} (1 - \cos 2\beta) \right] \frac{\hat{r}}{r}. \quad (3.2.49)$$

Pela análise acima, podemos notar que o potencial é repulsivo na origem. A presença da anisotropia, representada pelo fator β - dependente, não modifica este comportamento, uma vez que $v^2 \ll s^2$.

Distante da origem, o comportamento de longo alcance do potencial desaparece, pois é dominado pelo comportamento da função de Bessel: $A_0(r) \rightarrow 0$, $\vec{E}(r) \rightarrow 0$, o que mostra que tanto o campo elétrico quanto o potencial eletrostático decaem rapidamente a medida que $r \rightarrow \infty$, sobrepondo-se um ao outro no infinito, tal como observado no caso em que o fundo é puramente tipo-tempo. As curvas descritas na Fig. 3 mostram o comportamento do potencial eletrostático comparados com o caso MCS-Proca:

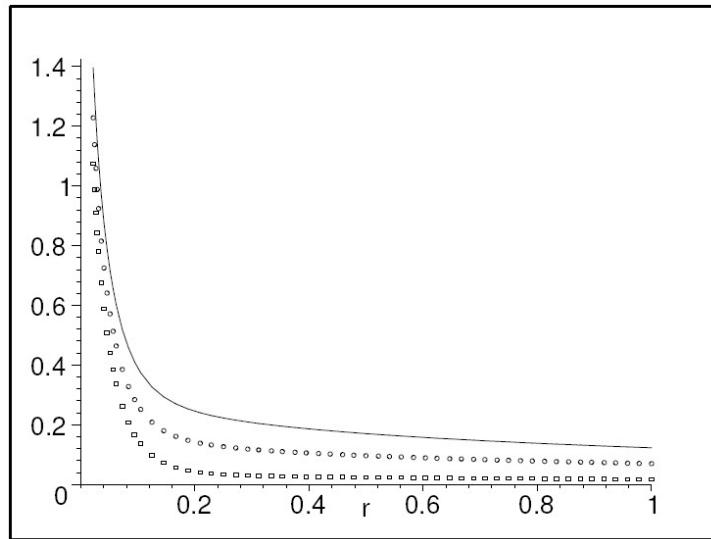


Figura 3: Este gráfico mostra o comportamento do potencial em função de r para o caso do vetor de fundo puramente tipo-espaço. A Linha pontilhada por quadrados corresponde ao caso MCS-Proca puro; A linha pontilhada por círculos com valores para $\beta = \pi/4$; a linha contínua, corresponde a $\beta = \pi/2$. Todas as curvas usam valores $s = 20$, $M_A = 2$ e $v_0 = 5$.

Um comportamento interessante a se destacar, é que o potencial, para todos os possíveis valores dos parâmetros, é sempre positivo.

Facilmente, observa-se que, quando o vetor de fundo se anula, $\vec{v} = 0$, o potencial eletrostático e o campo elétrico reduzem-se às soluções do modelo de MCS-Proca $A_0(r) = e/2(2\pi)[(1 + s/\gamma) K_0(m_+r) + (1 - s/\gamma) K_0(m_-r)]$, $\vec{E}(r) = -e/2(2\pi)[(1 + s/\gamma) m_+ K_0(m_+r) + (1 - s/\gamma) m_- K_0(m_-r)] \hat{r}$, que são as soluções dadas pelas equações (3.1.19), (3.1.21). O efeito do vetor de fundo aparece mais claramente nas soluções de campo. Análogo ao que acontece com os campos de MCS-Proca (B e \vec{E}), termos adicionais, dependentes do ângulo β responsável pela anisotropia, aparecem nos campos.

Para também obtermos a solução do campo escalar, no caso em que o vetor de fundo é puramente tipo-espaço, devemos seguir as mesmas aproximações feitas para o campo elétrico e o potencial eletrostático. Partindo da Eq. (3.2.39), temos a expressão para o campo escalar em sua forma integral,

$$\varphi(r) = -\frac{e}{(2\pi)^2} (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla}) \left[\int_0^\infty \frac{\mathbf{k}d\mathbf{k}}{[\mathbf{k}^2 + R_+^2]} \int_0^{2\pi} P e^{ikr \cos \varphi} d\varphi - \int_0^\infty \frac{\mathbf{k}d\mathbf{k}}{[\mathbf{k}^2 + R_-^2]} \int_0^{2\pi} P e^{ikr \cos \varphi} d\varphi \right], \quad (3.2.50)$$

onde: $P = [(s^2 + v^2 \sin^2 \alpha)(s^2 + 4M_A^2 + v^2 \sin^2 \alpha)]^{-1/2}$. Usando novamente a Eq. (3.2.44) e a aproximação, $P \simeq 1/(s\gamma) - (s^2 + 2M_A^2)v^2 \sin^2 \alpha / (s\gamma)^3$, temos a solução para o campo escalar

$$\varphi(r) = \frac{e}{(2\pi)} \left\{ m_+ H_+(r) K_1(m_+r) - m_- H_-(r) K_1(m_-r) - I_+(r) K_0(m_+r) + I_-(r) K_0(m_-r) \right\} (\vec{v}^* \cdot \hat{r}), \quad (3.2.51)$$

onde

$$H_\pm(r) = \left[\frac{1}{s\gamma} - \frac{2m_\pm^2}{(s\gamma)^3} v^2 \sin^2 \beta \pm \frac{v^2}{2(s\gamma)^2} \pm \frac{4v^2 \cos 2\beta}{(s\gamma)^3} \frac{1}{r^2} \right],$$

$$I_\pm(r) = \frac{m_\pm^2 v^2}{2(s\gamma)^2} \left(\pm \sin^2 \beta r - \frac{4 \cos 2\beta}{(s\gamma)} \frac{1}{r} \right).$$

Analisando novamente os comportamentos assintóticos, perto da origem o campo escalar é da forma: $\varphi(r) \rightarrow -e/(2\pi)[2v^2 \cos 2\beta / (s\gamma)^2] (\ln r/r) (\vec{v}^* \cdot \hat{r})$, o que implica também

um comportamento repulsivo na origem. Já no infinito, o campo escalar decai exponencialmente.

3.3 Solução para o potencial vetor e para o campo magnético no regime estático

Nesta seção, buscaremos a solução para o potencial vetor e para o campo magnético em uma configuração de carga puntiforme estática em presença de um vetor de fundo que viola a simetria de Lorentz puramente tipo-tempo e puramente tipo-espaço. Estas soluções são obtidas a partir das equações diferenciais (3.1.7) e (3.1.14), que no limite estático constituem-se em um conjunto de duas equações diferenciais acopladas.

3.3.1 O vetor externo é puramente tipo-tempo: $v^\mu = (v_0, 0)$

Partindo das equações (3.1.3) e (3.1.14), temos o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas, no limite estático

$$\begin{aligned} [\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4] \vec{A} + v_0 (\nabla^2 - M_A^2) (\nabla^* \varphi) &= -s \vec{\nabla}^* \rho, \\ v_0 \nabla \times \vec{A} + (\nabla^2 - M_A^2) \varphi &= 0, \end{aligned}$$

que podem ser desacopladas em uma equação para o potencial vetor e outra para o campo escalar

$$[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4] \vec{A} = -s \vec{\nabla}^* \rho, \quad (3.3.52)$$

$$[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4] (\nabla^2 - M_A^2) \varphi = sv_0 \nabla^2 \rho, \quad (3.3.53)$$

Tomando a transformada de Fourier para o potencial vetor, $\vec{A}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{k} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{A}(k)$, obtemos a seguinte expressão:

$$\vec{A}(r) = -\frac{es}{(2\pi)} C [M_+ K_1(M_+ r) - M_- K_1(M_- r)] \hat{r}^*, \quad (3.3.54)$$

onde: $C = 1/\sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)}$, e M_{\pm}^2 estão definidos em Eq. (3.2.33).

O campo magnético é obtido a partir de sua definição, $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, ou seja,

$$B(r) = -\frac{es}{(2\pi)} C [M_+^2 K_0(M_+ r) - M_-^2 K_0(M_- r)].$$

Comparando estas soluções para o potencial vetor e para o campo magnético, em relação ao caso de MCS-Proca, podemos notar que a presença do vetor de fundo não representa nenhuma modificação nas formas funcionais destes campos. Sua única contribuição é modificar seus alcances, tal como mostra a Fig. 4. Tanto o potencial vetor como o campo magnético apresenta o mesmo comportamento que MCS-Proca tanto perto como longe da origem. Quando $r \rightarrow 0$, o potencial vetor também vai a zero ($\mathbf{A} \rightarrow 0$), enquanto o comportamento do campo magnético é puramente logarítmico;

$$B(r) \rightarrow \left(-\frac{es}{2\pi}\right) \ln r,$$

da mesma maneira que o comportamento do MCS-Proca. Longe da origem, ambos decaem exponencialmente.

A Fig. 4 mostra um estudo comparativo entre o caso MCS-Proca e o resultado obtido pela expressão (3.3.54), o que explicita o papel do vetor de fundo: quanto maior for v_0 maior o desvio em relação ao caso MCS-Proca.

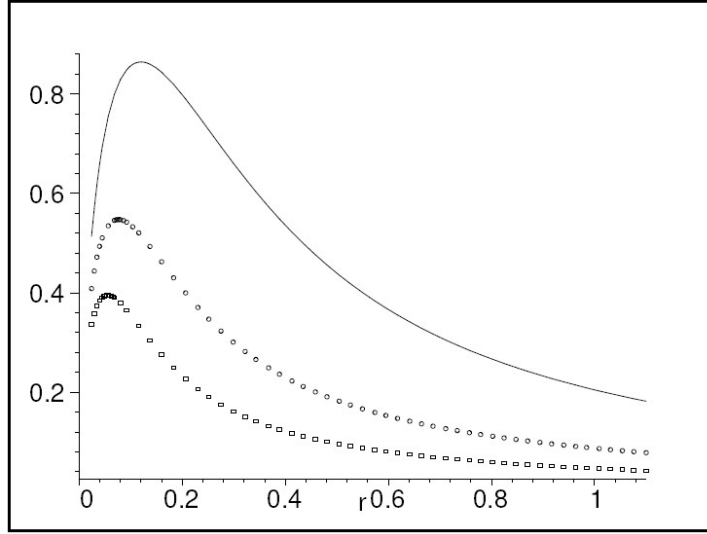


Figura 4: Gráficos para o potencial vetor em função de r , para o caso em que o vetor de fundo é puramente tipo-tempo. A linha pontilhada por quadrados corresponde ao caso MCS-Proca puro; A linha pontilhada por círculos com valor para o vetor de fundo $v_0 = 14$; a linha contínua, corresponde a $v_0 = 18$. Os valores dos parâmetros são $s = 20$ e $M_A = 2$.

A solução para o campo escalar no caso em que o vetor de fundo é puramente tipo-tempo, a partir da Eq. (3.3.53), e após o mesmo procedimento adotado na seção anterior, é

$$\varphi(r) = \frac{e}{(2\pi)} (sv_0) [B_+ K_0(M_+ r) + B_- K_0(M_- r) - (B_+ + B_-) K_0(M_A r)],$$

onde os coeficientes B_{\pm} são dados pelas Eqs. (3.2.31), (3.2.32).

Os comportamentos assintótico também são facilmente observáveis, e próximo a origem o campo escalar se anula, $\varphi(r) \rightarrow 0$, enquanto no infinito, decai exponencialmente de acordo com o comportamento assintótico da função de Bessel.

3.3.2 O vetor de fundo é puramente tipo-espaço: $v^\mu = (0, \mathbf{v})$

Partindo das Eqs. (3.1.7),(3.1.14), chegamos à

$$[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4]\vec{A} - s\vec{\nabla}^*(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}^*\varphi) = -s\vec{\nabla}^*\rho, \quad (3.3.55)$$

$$[(\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla})\nabla \times + M_A^2\vec{v} \cdot] \vec{A} - s(\nabla^2 - M_A^2)\varphi = 0, \quad (3.3.56)$$

que se desacopla no conjunto de equações

$$\left[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4 + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}^*)(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}^*) \right] \vec{A} = -s\vec{\nabla}^*\rho, \quad (3.3.57)$$

$$\begin{aligned} & \left[\nabla^2(\nabla^2 - s^2 - 2M_A^2) + M_A^4 + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}^*)(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}^*) \right] (\nabla^2 - M_A^2)\varphi = \\ & [(\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla})\nabla \times + M_A^2\vec{v} \cdot] \nabla^*\rho. \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

A solução da Eq. (3.3.57) é dada pela expressão integral

$$\vec{A}(r) = -\frac{es}{(2\pi)^2} \vec{\nabla}^* \left[\int_0^\infty \frac{\mathbf{k}d\mathbf{k}}{[\mathbf{k}^2 + R_+^2]} \int_0^{2\pi} D e^{ikr \cos \varphi} d\varphi - \int_0^\infty \frac{\mathbf{k}d\mathbf{k}}{[\mathbf{k}^2 + R_-^2]} \int_0^{2\pi} D e^{ikr \cos \varphi} d\varphi \right], \quad (3.3.59)$$

onde: $D = 1/\sqrt{(s^2 + v^2 \sin^2 \alpha)(s^2 + v^2 \sin^2 \alpha + 4M_A^2)}$, e os fatores R_\pm^2 são dados pela Eq. (3.2.42). Para resolvermos a integração acima, faremos as mesmas aproximações propostas na seção anterior, eq. (3.2.44) além da aproximação

$$D \simeq -\frac{1}{s\gamma} + \frac{(s^2 + 2M_A^2)}{(s\gamma)^3} v^2 \sin^2 \alpha,$$

Após estas considerações, o resultado obtido para o potencial vetor é dado por

$$\vec{A}(r) = -\frac{es}{(2\pi)} \left\{ \chi_+(r)K_0(m_+r) + \chi_-(r)K_0(m_-r) + \omega_+(r)K_1(m_+r) + \omega_-(r)K_1(m_-r) \right\} \hat{r}^*, \quad (3.3.60)$$

onde

$$\chi_{\pm}(r) = -\frac{m_{\pm}v^2}{(s\gamma)^2} \left(\mp \frac{2m_{\pm} \cos 2\beta}{(s\gamma) r} + \frac{m_{\pm} \sin^2 \beta}{2} r \right), \quad (3.3.61)$$

$$\omega_{\pm}(r) = \mp m_{\pm} \left(-\frac{1}{s\gamma} + \frac{v^2}{(s\gamma)^3} \left(2m_{\pm}^2 \sin^2 \beta \mp \frac{s\gamma}{2} \right) \right) \pm \frac{4v^2 m_{\pm} \cos 2\beta}{(s\gamma)^3 r^2}. \quad (3.3.62)$$

Podemos observar que a anisotropia que é provocada pela presença do vetor de fundo novamente manifesta-se explicitamente através da presença do ângulo β . Considerando o comportamento das funções- K_0, K_1 próximas da origem, [$K_0(sr) \rightarrow -\ln r - \gamma_{Euler} - \ln(s/2)$, $K_1(sr) \rightarrow 1/(sr) + sr(\ln r/2 + \ln(s/2)/2 + (1 - 2\gamma_{Euler})/4)$], é possível mostrar que o potencial vetor vai a zero neste limite ($\vec{A}(r) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow 0$). Longe da origem, todos estes termos podem ser desprezados, e assim, o potencial vetor vai a zero assintoticamente. É interessante notar que, tanto para o caso em que o vetor de fundo é tipo-tempo como tipo-espaço, o potencial vetor se anula assintoticamente, tal como acontece no caso MCS-Proca puro. Neste sentido, o vetor de fundo não modifica o comportamento físico do potencial nestes dois limites.

Na Fig. 5, ilustra-se o comportamento do potencial vetor para o caso em que temos o vetor de fundo que quebra Lorentz comparado com o potencial para o caso MCS-Proca puro. Podemos observar que o desvio em relação ao comportamento do MCS-Proca é pequeno em consequência da aproximação adotada, $(v/s)^2 \ll 1$. Neste caso é evidente que o vetor de fundo não traz nenhuma modificação expressiva para o potencial vetor mesmo na região intermediária, tal como no caso para o potencial eletrostático (escalar) obtido na Fig. 3, obtido segundo a mesma aproximação.

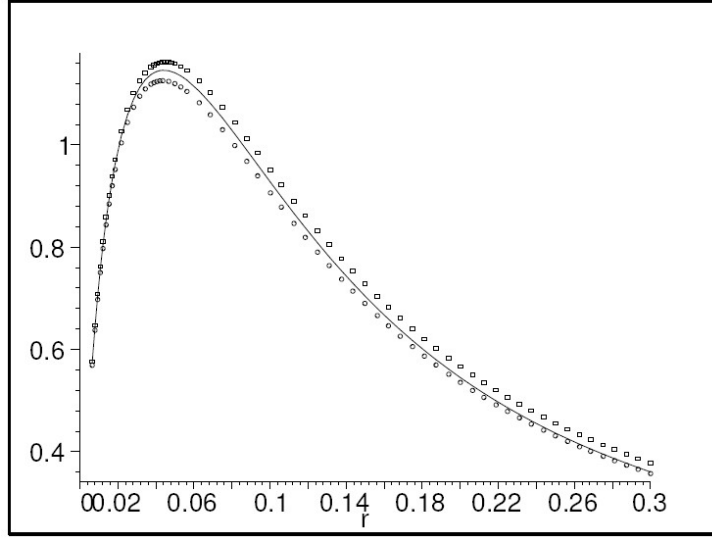


Figura 5: Gráficos para o potencial vetor para o caso em que o vetor de fundo é tipo-espaço. A Linha pontilhada por quadrados corresponde ao caso MCS-Proca puro; A linha pontilhada por círculos com valor $\beta = \pi/3$; a linha contínua, corresponde a $\beta = \pi$. com $s = 24$, $M_A = 4$ e $v = 8$.

Para concluirmos, o campo magnético associado a este potencial vetor, tem a forma

$$B(r) = \frac{es}{(2\pi)} \left\{ \eta_+(r)K_0(m_+r) + \eta_-(r)K_0(m_-r) + \xi_+(r)K_1(m_+r) + \xi_-(r)K_1(m_-r) \right\}, \quad (3.3.63)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_{\pm}(r) &= -\frac{m_{\pm}^2}{s\gamma} + \frac{2m_{\pm}^4v^2}{(s\gamma)^3} \sin^2 \beta + \frac{m_{\pm}^2v^2}{2(s\gamma)^2} (\pm 1 - 2\sin^2 \beta) \pm \frac{4m_{\pm}^2v^2 \cos 2\beta}{(s\gamma)^3 r^2}, \\ \xi_{\pm}(r) &= \frac{m_{\pm}^3v^2 \sin^2 \beta}{2(s\gamma)^2} r \mp \frac{8m_{\pm}v^2 \cos 2\beta}{(s\gamma)^3 r^3} \mp \frac{2m_{\pm}^2v^2 \cos 2\beta}{(s\gamma)^3 r}. \end{aligned}$$

Próximo da origem, o campo magnético tem o mesmo comportamento que MCS-Proca [$B(r) \rightarrow \ln r$ quando $r \rightarrow 0$], enquanto no infinito, ele decai exponencialmente.

3.4 Comentários finais

Partindo do modelo invariante de calibre com quebras de Lorentz e CPT, reduzido a duas dimensões espaciais [29], a partir do modelo de Carroll-Field-Jackiw com termo de quebra de Higgs [30], analisamos as equações de Maxwell modificadas pelos termos de quebra de Lorentz e as equações de onda correspondentes. Enquanto os campos satisfazem a equações de onda inhomogêneas de segunda ordem, as componente dos potenciais (A_0, \vec{A}) aparecem em equações de quarta ordem, de maneira análoga ao que acontece para o caso da Eletrodinâmica de MCS-Proca.

Para o caso de um vetor de fundo puramente tipo-tempo, observamos que as soluções para os potenciais (A_0, \vec{A}) e para os campos (B, \vec{E}) apresentam comportamento similares ao MCS-Proca, convergindo para as mesmas soluções ao tomarmos os limites assintóticos, perto e longe da origem, o que mostra que o vetor de fundo não afeta o comportamento das soluções de MSC-Proca nestes limites. A diferença qualitativa induzida pelo vetor de fundo fica por conta da região intermediária entre estes limites, e na direção radial, no limite em que a massa de Proca é pequena ($M_A/s \ll 1$), ou o vetor de fundo grande ($v_0 \lesssim s$). Outro efeito induzido pelo vetor de fundo é o aumento no alcance das soluções. Neste mesmo limite, ($v_0 \lesssim s$), observa-se este efeito de maneira mais acentuada. Como o caso em questão admite soluções exatas, o valor do vetor de fundo pode ser mais próximo possível do valor de s , o que revela sua contribuição para as soluções. Os gráficos da Fig. 1 e da Fig. 4 ilustram estas conclusões. As soluções para o caso de MCS-Proca puro são obtidas a partir do modelo com quebra de Lorentz ao tomarmos o vetor de fundo nulo ou muito pequeno em comparação aos outros parâmetros de massa, como esperado. A solução para o campo escalar (φ) apresenta um comportamento similar ao potencial escalar tanto para o caso em que o vetor de fundo é do tipo-espaço como para o vetor de fundo do tipo-tempo.

No caso do vetor de fundo puramente tipo-espaço, a integração na variável angular, só é possível mediante algumas aproximações. Estas, consistem em considerar o parâmetro de massa de Chern-Simons muito maior que o módulo da componente espacial do vetor de fundo ($s^2 \gg v^2$), e com isto as soluções obtidas serão válidas somente em primeira ordem em v^2/s^2 . Devido a esta aproximação, as soluções para os potenciais e para os campos são combinações complexas das funções de Bessel K_0 e K_1 . Todas as expressões obtidas apresentam uma dependência com o ângulo β , que representa a dependência das soluções na direção fixada pelo vetor de fundo (\vec{v}). Novamente, se tomarmos o valor do vetor de fundo como nulo, recuperam-se as soluções do modelo de MCS-Proca. De maneira análoga ao que acontece ao caso em que o vetor de fundo é puramente tipo-tempo, através dos limites assintóticos $r \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$, também recuperam-se as soluções do modelo de MCS-Proca, e na região intermediária as soluções são bem próximas ao caso em comparação, que é uma consequência direta da aproximação feita ($s^2 \gg v^2$). Em relação ao campo escalar, podemos notar uma anisotropia bastante parecida ao que observou-se para os potenciais. Finalmente, todas as soluções obtidas apresentam alguma blindagem, consequência da massa de Proca, que impede soluções sem blindagem (as logarítmicas), que ocorrem para o caso MCS planar com violação de simetria de Lorentz como discutido na Ref. [31].

Capítulo 4

Soluções tipo-vórtice

O formalismo da teoria de campos traz uma importante contribuição que vai além de suas fronteiras: o ferramental teórico para a descrição de fenômenos com número infinito de graus de liberdade modelados por objetos denominados campos. Algumas importantes aplicações deste ferramental foram construídas ainda no século passado, como por exemplo no âmbito dos fenômenos da Matéria Condensada, na aplicação da supercondutividade aniônica, que é descrita pela teoria planar de Maxwell-Chern-Simons[15].

Por outro lado, tal como discutimos na introdução desta tese, um outro tema que tem despertado grande interesse na Física de Altas-Energias são as teorias com quebra da simetria de Lorentz. Há várias possibilidades para realizar esta quebra, e a análise destas possibilidades foge ao escopo deste trabalho. É importante destacar, porém, que, em todas as possibilidades há limites bastante marcados para os parâmetros responsáveis pela quebra da simetria de Lorentz [5], [32]. Estes limites estimulam a investigação de outras situações tais como em sistemas de baixa dimensionalidade e, até mesmo, em sistemas de baixas energias, como na Matéria Condensada, sobretudo em suas manifestações físicas planares

Devemos notar, também, que muitos sistemas físicos de interesse na Matéria Conden-

sada apresentam uma anisotropia espacial inerente ao próprio sistema, como por exemplo o efeito Hall, devido à presença do campo magnético externo, sendo um campo de fundo, portanto, quebrando a simetria de rotação neste espaço. Deve-se lembrar que o grupo de Lorentz tem como subgrupo o grupo das rotações no espaço tri-dimensional.

Pode-se argumentar que a simetria de Lorentz não seria a simetria natural esperada para os sistemas de baixas energias, pois estas deveriam ser invariantes sobre o grupo de Galileu. Todavia, estes sistemas podem ser vistos como o limite de baixas energias do modelo relativístico, o que nos implica que a violação da simetria de Lorentz deve trazer contribuições de baixas-energias para o grupo de Galileu; ou seja, uma anisotropia na Matéria Condensada pode ser vista de maneira análoga à violação da simetria de Lorentz nas altas energias, para o caso em que o vetor de fundo responsável por esta violação seja puramente do tipo-espaço.

Por estas razões, acreditamos que o ambiente de uma teoria com quebra de Lorentz seja realmente bastante rico e talvez convirja como elemento importante na descrição de fenômenos de baixas energias.

Na direção de aplicação de teorias com quebra de Lorentz, motivados por um outro exemplo de aplicação do ferramental da Teoria de Campos em fenômenos da Matéria Condensada, estudou-se a geração de um potencial atrativo entre elétrons (e^-e^-), responsável pelo fenômeno da supercondutividade para o caso de $(1 + 3) D$ [33]. Para o caso de $(1 + 2) D$, com violação da simetria de Lorentz, citamos o trabalho da ref.[34].

A título de conjectura, para uma Física em $(1 + 3) D$, um quadri vetor de fundo $v^\mu = (v_0, \mathbf{v})$ pode ser usado para gerar uma anisotropia em uma determinada amostra, ou selecionar um plano preferencial, tal como acontece nos casos de supercondutores planares, ou mesmo para o efeito Hall quântico, modelando e simulando estas situações.

Neste contexto, estudar configurações de vórtices, para o modelo que apresentaremos

na seguinte seção, é não apenas de interesse teórico, o que já justificaria seu estudo, mas também com um grande potencial de aplicações em sistemas da Matéria Condensada. Esta proposta não é original, e sim inspirada no trabalho de Nilsen & Olesen [35], quando estudaram as soluções tipo-vórtices (não carregados) do modelo de Higgs Abeliano, no contexto das altas energias, fazendo as devidas analogias ao modelo de Landau-Ginzburg, revelando o potencial de aplicação do ferramental teórico do modelo no entendimento de questões da supercondutividade¹.

A presença de solução de vórtice estável no modelo não-Abeliano, também foi discutida em [24]. A introdução do termo de Chern-Simons permitiu soluções de vórtices carregados no contexto das teorias Abelianas e não-Abelianas [25, 26].

Nas seções seguintes deste capítulo, estaremos interessados em estudar os vórtices no contexto do modelo de Higgs Abeliano com presença do termo responsável pela quebra da simetria de Lorentz, composto por um quadri vetor de fundo, v^μ , considerando apenas não-nulas suas componentes tipo-espaço. O modelo considerado é o de Carroll-Field-Jackiw, com termo de Higgs, obtido a partir da redução dimensional do modelo em $(1 + 3) D$, em um esquema de redução dimensional onde uma terceira coordenada espacial é congelada[22]. O modelo resultante em $(1 + 2) D$ consiste em uma Eletrodinâmica Planar composta pelo campo de Maxwell-Chern-Simons-Proca, dois campos escalares e um termo de mistura, responsável por realizar a quebra de Lorentz[37], tal como apresentado

¹O funcional descrito pela teoria de Ginzburg-Landau, muito usada para descrever fenômenos da supercondutividade, admite soluções do tipo-vórtice, como mostra Abrikosov em[36]. Soluções do mesmo tipo também são presentes no modelo Abeliano de Higgs relativístico, com o campo de Higgs sendo interpretado como o parâmetro de ordem do supercondutor. Os vórtices deste modelo são conhecidos como vórtices de Nielsen-Olesen[35]. É importante de se destacar que o funcional de energia para o modelo de Higgs relativístico Abeliano, coincide com a energia livre de Ginzburg-Landau para supercondutores do tipo-II.

no segundo capítulo desta tese.

A organização deste capítulo é a seguinte: A seção 2 parte das equações de movimento obtidas a partir do modelo apresentado no capítulo dois desta tese. A seção 3 investiga a solução de vórtice do modelo em questão, sua carga e a possibilidade do aparecimento de uma fase quântica como consequência de sua não-neutralidade e das configurações de campo em um ambiente com quebra de Lorentz. Na seção 4, discutimos o surgimento natural de uma fase de Aharonov-Casher devido a estas configurações; finalmente, apresentamos algumas considerações dos resultados presentes neste capítulo.

4.1 O modelo planar

Como já mencionado, o modelo em questão é o mesmo apresentado no capítulo dois desta tese. As equações de movimento obtidas a partir de (2.1.5) são:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -s \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + \varepsilon^{\mu\nu\rho} v_\nu \partial_\rho \varphi + ie(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) + 2e^2 \phi^* \phi A^\mu + J^\mu, \quad (4.1.1)$$

$$(\square + M_A^2) \varphi = \epsilon_{\mu\nu k} v^\mu \partial^\nu A^k + J, \quad (4.1.2)$$

$$(D^\mu)^* D_\mu \phi = -e^2 \varphi^2 \phi - m^2 \phi - 2\lambda |\phi|^2 \phi, \quad (4.1.3)$$

onde temos: $M_A^2 = 2e^2 \phi^* \phi$.

Note-se que, na equação (4.1.3), temos um aumento no mínimo do potencial $V(\phi^* \phi)$, o que implica uma teoria de Landau-Ginzburg cujo campo crítico é mais forte que um campo crítico obtido a partir de um modelo genuinamente planar.

Podemos extrair de (4.1.1) as seguintes equações de Maxwell modificadas, na ausência

de fontes:

$$\partial_t \vec{E} + \tilde{\nabla} B = -s \vec{E} - \left(\vec{v} \partial_t \varphi - v_0 \tilde{\nabla} \varphi \right) - ie(\phi \tilde{\nabla} \phi^* - \phi^* \tilde{\nabla} \phi) - 2e^2 |\phi|^2 \vec{A}, \quad (4.1.4)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{s}{2} B = -\vec{v} \times \tilde{\nabla} \varphi - ie(\phi \partial_t \phi^* - \phi^* \partial_t \phi) - 2e^2 |\phi|^2 A_0, \quad (4.1.5)$$

onde o símbolo ($\tilde{}$) nos operadores e nos campos indica que estamos trabalhando com seus respectivos duais no espaço de 1 + 2 dimensões: $\tilde{\nabla}_i = \varepsilon_{ij} \nabla_j$, e $\tilde{E}_i = \varepsilon_{ij} E_j$.²

Através destas equações, podemos estabelecer a discussão que é o objetivo principal deste capítulo: as configurações de vórtice presentes neste modelo, que é o objeto de estudo da próxima seção.

4.2 Configurações de vórtice do modelo

Para analisarmos as soluções do tipo-vórtice, vamos considerar um campo escalar em um espaço bi-dimensional, cuja solução assintótica tem simetria circular (S^1):

$$\phi = ae^{in\theta} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (4.2.6)$$

onde r e θ são coordenadas polares no plano, a é constante e n um inteiro. Neste limite temos que $M_A^2 = 2e^2 a^2$.

Vamos estudar a equação(4.1.2), considerando este limite. Devemos também considerar que, nesta região, os campos elétrico e magnético se anulam. Em ausência de correntes, temos

$$(\square + M_A^2) \varphi = 0,$$

²Neste capítulo, denotaremos os duais pelo símbolo ($\tilde{}$), em vez de (\ast) como adotado no capítulo das soluções clássicas para que não haja confusão com o campo de Higgs.

o que nos dá uma equação do tipo Klein-Gordon para a terceira componente do potencial $A^{(3)} \equiv \varphi$. No regime estático, temos:

$$(\nabla^2 - M_A^2) \varphi = 0.$$

A solução é

$$\varphi \simeq \frac{1}{r} \exp(-M_A r), \quad (4.2.7)$$

que assintoticamente nos leva a $\varphi = 0$.

Por outro lado, o campo de calibre apresenta o seguinte comportamento assintótico:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{e} \nabla(n\theta); \quad (r \rightarrow \infty), \quad (4.2.8)$$

ou, em termos de suas componentes polares:

$$A_r \rightarrow 0, \quad A_\theta \rightarrow -\frac{n}{er} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (4.2.9)$$

A quebra da covariância de Lorentz frustra a escolha de A_μ como um puro calibre no infinito, como feito usualmente para os vórtices de Nielsen-Olesen, que também implica $A_0 = A_0(r)$, quando $r \rightarrow \infty$, além de considerarmos $\varphi \rightarrow 0$ neste limite. O comportamento assintótico da componente A_0 será fixado pelas equações de movimento, o que será mostrado adiante. O campo magnético apresenta simetria cilíndrica e, o escalar de Higgs é dado por:

$$\phi = \chi(r) e^{in\theta}. \quad (4.2.10)$$

Após a redução dimensional, o potencial obtido é:

$$\mathcal{V}(\phi^* \phi) = e^2 \varphi^2 \phi^* \phi + V(\phi^* \phi), \quad (4.2.11)$$

cuja análise de estabilidade exige a escolha dos pontos $(\varphi = 0, \chi = \sqrt{-\frac{m}{2\lambda}} = a)$ para seu mínimo.

Para evitar singularidades em $r \rightarrow 0$, e tirarmos as soluções assintóticas, teremos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \chi(r) = 0 \quad (4.2.12)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r) = a. \quad (4.2.13)$$

Assintoticamente, o sistema tende a uma configuração não-trivial para o campo escalar carregado, o que caracteriza uma quebra da simetria $U(1)$, mas que, aqui, ocorre em todas as direções do plano quando $r \rightarrow \infty$. Esta configuração não quebra a invariância de Lorentz e nem a simetria de rotação. Esta quebra é feita explicitamente pelo trivetor de fundo, v^μ , que cria uma direção privilegiada no espaço-tempo, e quebra a invariância de Lorentz ao nível da Lagrangeana.

Para encontrarmos os vórtices, precisamos analisar as equações de Maxwell modificadas, no regime estático, para obtermos as equações de Maxwell modificadas no limite assintótico. Tomando como ponto de partida a eq. (4.1.3),

$$(\partial_i - ieA_i)^* (\partial_i - ieA_i) \phi - m^2 \phi - 2\lambda^2 |\phi|^2 \phi = 0, \quad (4.2.14)$$

com a parametrização descrita em (4.2.10), e somando sob todas as componentes, temos a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) - \left[\left(\frac{n}{r} - eA \right)^2 + (e^2 \varphi^2 + m^2) + 2\lambda \chi^2 + e^2 A_0^2 \right] \chi = 0, \quad (4.2.15)$$

enquanto a equação de Maxwell modificada (4.1.5) escrever-se-á sob a forma:

$$\nabla^2 A_0 - \vec{v} \times \vec{\nabla} \varphi - \frac{s}{2} B - 2e^2 \chi^2 A_0 = 0. \quad (4.2.16)$$

Em seu limite assintótico, que é a análise de nosso interesse para as soluções de vórtice, teremos

$$\nabla^2 A_0 - M_A^2 A_0 = 0, \quad (4.2.17)$$

cuja solução será $A_0 \simeq \frac{1}{r} \exp(-M_A r)$.

Considerando a componente- θ da equação(4.1.1), teremos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA) \right) - 2e\chi^2 \left(\frac{n}{r} + eA \right) - s \frac{dA_0}{dr} - v^0 \frac{d}{dr} \varphi = 0, \quad (4.2.18)$$

que, assintoticamente, assume a forma abaixo:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA) \right) - 2ea^2 \left(\frac{n}{r} + eA \right) = 0. \quad (4.2.19)$$

A solução da equação acima é a conhecida solução de Nielsen-Olesen

$$A(r) = -\frac{n}{er} - \frac{c}{e} K_1 \left(\sqrt{2}a |e| r \right), \quad (4.2.20)$$

onde c é uma constante, e K_1 é a função de Bessel modificada.

Note-se que, assintoticamente, o campo escalar complexo $\phi = \chi(r)e^{in\theta}$ tende à solução de vácuo não-trivial, e se torna $\phi = ae^{in\theta}$, ou seja, a topologia para este vácuo é a variedade S^1 . Devemos também observar que o comportamento assintótico dos campos φ e A_0 apresentam soluções do tipo-Yukawa, cujo parâmetro de massa é dado por $M_A^2 = 2e^2 a^2$.

A estabilidade deste vórtice é confirmada pela expressão da energia deste sistema. Seguindo os resultados que constam em [19], a instabilidade é gerada pela componente v_0 do quadri vetor de fundo para um modelo em $(1+3)D$. Aqui, entendemos que, com o vetor de fundo $v^{\hat{\mu}} \rightarrow (v^\mu; s)$ escolhido como puramente tipo-espaço, a energia apresenta um mínimo estável no potencial, ou seja, há um estado ligado na teoria, o que assegura a estabilidade do vórtice. Observe-se também que, sempre que tivermos $sB \neq 0$, A_0 deve, necessariamente ser não-trivial, e um campo elétrico não-nulo aparecerá ao longo do fluxo magnético. Nesta situação, na região assintótica, A_0 decairá exponencialmente.

O surgimento deste campo elétrico anexado ao fluxo magnético é esperado desde que a condição $sB \neq 0$, seja satisfeita. Ele é a resposta natural à presença do termo de Chern-Simons, responsável pela quebra da simetria de Lorentz, pois neste regime um campo magnético funciona como fonte de campo elétrico, e vice-versa. O resultado marcante desta análise que obtemos é que a presença do potencial eletrostático A_0 , e conseqüentemente do campo elétrico não trivial, confere uma carga a este vórtice.

4.3 O Efeito Aharonov-Casher

Uma questão de grande relevância na Mecânica Quântica é como atribuir um fator de fase não-trivial para a função de onda de uma partícula que se move em uma região livre de forças. Exemplos notáveis, que focaremos em maior detalhe nos capítulos seguintes, são as fases de Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher. A fase de Aharonov-Casher é dada pela seguinte expressão:

$$\Delta\Phi_{AC} = \frac{1}{\hbar c^2} \oint \vec{\mu} \times \vec{E} \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.3.21)$$

onde $\vec{\mu}$ é o momento de dipolo magnético de uma partícula teste neutra e \rightarrow um campo elétrico externo, ao qual a partícula está submetida na região em que se movimenta. É importante destacarmos que o campo elétrico presente no trabalho [38] é um campo gerado por uma fonte específica: uma distribuição uniforme de cargas em um fio infinito. Em nosso modelo, em virtude de um termo de Chern-Simons, responsável pela quebra de Lorentz, presente no Lagrangeano(2.1.5), o potencial eletrostático é uma solução natural das equações de movimento, devido ao fato de, neste modelo, o campo magnético ser fonte de campo elétrico.³

³No capítulo seis desta tese, discutiremos este fato em maior detalhe.

Soluções de vórtice presentes em um modelo de Maxwell-Higgs com quebra espontânea de simetria em $(1 + 2)$ dimensões, apresentarão fase de Aharonov-Casher somente se tivermos um campo elétrico externo aplicado, como, por exemplo, se colocarmos um fio infinito carregado. Neste caso, a linha de vórtice será neutra, diferentemente do que temos no modelo que desenvolvemos neste capítulo.

Em nosso modelo, o fio infinito é substituído por uma linha de vórtices carregada, e a carga do vórtice será a fonte do campo elétrico, onde o potencial eletrostático será dado por $A_0 \simeq \frac{1}{r} \exp(-M_A r)$.

Vórtices carregados em supercondutores de alta temperatura foram propostos em [39], como consequência da variação do potencial químico na transição de fase. Vamos considerar um supercondutor planar, com geometria circular, com dois vórtices: um no centro do supercondutor, e o outro circulando em torno do primeiro. O momento de dipolo magnético é dado por $\vec{\mu} \simeq \Phi_0 \hat{z}$. A expressão para a fase de A-C do vórtice que circula o vórtice central será dada por:

$$\vec{V} \cdot \vec{E} \times \Phi_0 \hat{z}, \quad (4.3.22)$$

onde \vec{V} é a velocidade do vórtice, \vec{E} é o campo elétrico \hat{z} é a direção perpendicular ao plano do supercondutor, e $\Phi_0 = \frac{hc}{q}$ é o *quantum* de fluxo magnético. Este é o deslocamento da fase quando dois vórtices interagem.

4.4 Comentários finais

Podemos observar, através de nossos resultados, que a idéia de encontrarmos um modelo de calibre Abelian plano como produto de uma teoria de natureza quadridimensional é razoável e interessante tanto do ponto de vista teórico, quanto pelas motivações associadas a uma fenomenologia bastante rica. Em nosso esquema de redução dimensional, as manifestações planares são vistas como imersas em um cenário de 4 dimensões.

O ponto de vista que defendemos neste capítulo é que o parâmetro de massa topológica, $-s$, é nada mais é que a componente do quadrivetor responsável em quebrar as simetrias de CPT e Lorentz; ou seja, uma teoria de calibre planar massiva pode ser vista como uma herança da teoria de Carroll-Field-Jackiw em $(1 + 3) D$. Um resultado interessante que obtemos são as soluções de vórtices carregadas, como consequência da violação da simetria de Lorentz em $(1 + 3) D$. E é também este fato que induz naturalmente o aparecimento da fase de Aharonov-Casher, uma vez que o vetor de fundo induz, através de seu acoplamento com o campo magnético, um campo elétrico para o vórtice, dado pela expressão:

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{M_A}{r} \right) \exp(-M_A r) \hat{r}, \quad (4.4.23)$$

do que segue que teremos o termo de Aharonov-Casher(4.3.22) realizando interação entre os vórtices. Se considerarmos elétrons movendo-se em uma região próxima ao vórtice, região na qual devemos aproximar $\exp(-M_A r) \simeq 1 - M_A r$, este elétron deve adquirir um fator de fase dado por (4.3.21): $\Delta\Phi_{AC} = (\Phi_0/\hbar c^2) \frac{2\pi}{d}$, onde d é a distância do elétron ao centro do vórtice.

No sexto capítulo desta tese mostraremos como um esquema de acoplamento não-mínimo, que viola a simetria de Lorentz no setor de férmions, pode induzir fases quânticas, e, em especial, a fase de Aharonov-Casher. Sabemos que uma partícula neutra sem spin pode adquirir momento de dipolo magnético quando esta se acopla não-minimamente, ou seja, com os campos eletromagnéticos. Neste ambiente, torna-se interessante derivarmos explicitamente a fase de Aharonov-Casher na presença da quebra de Lorentz, pois o vetor de fundo pode gerar momento de dipolo magnético para a partícula. Parte destes resultados estão relatados em[40].

Capítulo 5

Efeitos de fase quântica

Aharonov e Casher[38], em 1984, analisaram um processo quanto-mecânico envolvendo a dinâmica de partículas com momento de dipolo magnético e carga elétrica nula, como por exemplo, um nêutron, em uma região afetada pela presença de um campo elétrico. Este nêutron era difratado por uma fenda dupla, o que produziria uma figura de difração. A conclusão é que tal figura de difração seria sensível à presença do campo elétrico, o que significa que seria diferente na ausência do campo \vec{E} . Tal diferença seria percebida através de um deslocamento relativo entre as franjas quando o campo \vec{E} fosse ligado. O trabalho de Aharonov e Casher consistia, então, em mostrar como seria possível obter este deslocamento, mesmo na ausência da interação eletromagnética entre o nêutron e o campo elétrico, ou seja, com o nêutron movendo-se em uma região livre de forças. A resposta só poderia ser dada em nível quântico, tal como acontece no efeito Aharonov-Bohm (AB).

Além destes efeitos de fase, que são os mais conhecidos na literatura e com comprovação experimental, existem outros efeitos análogos. Neste Capítulo, pretendemos fazer uma discussão do efeito de Aharonov-Casher (AC), além de apontarmos alguns outros efeitos existentes na literatura, quando estes tiverem alguma correlação com o AC. Isto porque

um dos pontos a ser explorado nesta tese é de como o mecanismo da quebra da invariância de Lorentz, através de um vetor de fundo que impõem uma anisotropia ao espaço-tempo, pode gerar a fase quântica de AC.

5.1 O efeito Aharonov-Bohm

O contexto apropriado em que esta discussão se inicia, parte do efeito Aharonov-Bohm (AB). Isto será feito de maneira abreviada, pois inúmeras são as referências que o fazem em detalhes[41]. O trabalho seminal em que se aborda soluções quânticas para um elétron movendo-se em uma região livre de forças, porém acoplado ao potencial, vetor, foi desenvolvido por Aharonov e Bohm [42]. A questão colocada é que, segundo a Física Clássica, o único efeito sobre uma carga elétrica é realizado por um campo, efeito medido através da força de Lorentz, em que a interação é medida através dos campos eletromagnéticos, ou, equivalentemente, pelo tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$. O quadripotencial vetor, A_μ , é um campo meramente auxiliar para determinação dos campos elétrico e magnético, que podem ser calculados pela definição $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, que é o tensor intensidade de campo de Maxwell escrito em notação covariante. Por esta definição, há uma liberdade na determinação dos potenciais: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, fornece a mesma expressão para os campos; esta é a liberdade de calibre dos potenciais. Esta liberdade faz com que este potencial seja interpretado apenas como objeto matemático no contexto da teoria; isto inviabilizaria pensá-los como quantidades físicas mensuráveis. O que Aharonov e Bohm observaram é que, quanticamente, estes objetos teriam conseqüências físicas mensuráveis, o que foi inicialmente proposto através de um “experimento teórico” de um elétron sendo difratado por uma dupla fenda. Na região acessível classicamente a este elétron, o campo eletromagnético é nulo, portanto também o é a força de Lorentz, de onde se esperaria que o movimento do elétron em nada fosse afetado. Portanto, o esperado seria uma figura

de interferência em que as franjas encontradas seriam obtidas pela aplicação da teoria de Huygens.

A idéia de teste do trabalho de Aharonov e Bohm consistia em colocar na região entre a fenda e o enteparo, onde se observaria a figura de difração, um solenóide infinito, que tem como solução um campo magnético constante em seu interior; porém, a região clássica acessível ao elétron não seria afetada por este campo. Todavia, uma possível solução para o potencial vetor, para esta configuração de campo magnético constante no interior do solenóide, faz com que este potencial seja não-nulo na região acessível ao elétron, o que classicamente não traria nenhum resultado diferente para o problema clássico, ou seja, as franjas de interferência seriam as mesmas. Porém, o que Aharonov e Bohm mostraram é que, se usássemos a descrição quântica, o que obteríamos seria um deslocamento das franjas de interferência em relação ao mesmo problema em que não temos a presença do solenóide. esta especulação foi posteriormente comprovada em alguns experimentos [43].

Isto se deve ao fato de que, na descrição quântica, o elétron sofre a influência do acoplamento com o potencial vetor, o chamado acoplamento mínimo, e é este acoplamento que seria responsável em gerar um deslocamento nas franjas de interferência. O real comportamento de uma partícula carregada deve ser descrito por: $\langle b|a\rangle_{inA} = \langle b|a\rangle_{A=0} \cdot \left\{ \exp(iq \int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) \right\}$.

Para obtermos a fase de AB, podemos partir da equação de Dirac, $(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0$, com acoplamento mínimo com o campo eletromagnético, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, e ao tomarmos o seu limite não-relativístico, através do momento canônico generalizado, $\vec{\Pi} = \left(\vec{p} - e\vec{A} \right)$, podemos extrair o termo de fase escrito no parágrafo anterior, que é a integral sobre um caminho fechado do momento generalizado. A fase de AB será dada por $\Phi_{AB} = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{x}$, onde c é um contorno fechado. Facilmente, observa-se que, usando o teorema de Stokes, esta fase depende do fluxo do campo magnético, ou seja, o elétron é influenciado pelo

potencial vetor \vec{A} ; por outro lado, o efeito físico depende do fluxo do campo magnético do interior do solenóide, portanto, influenciado pelo campo de uma região não acessível ao elétron. Isto revela uma natureza não-local para a integral de fase. Dito de outra forma, como a fase local depende do potencial vetor, ela não é uma quantidade invariante de calibre, portanto não pode ser medida localmente. Como a fase total depende do fluxo magnético, que é um invariante de calibre, esta sim, poderá ser mensurável, e é uma quantidade não-local para esta configuração. Este é o fato que confere uma topologia não-trivial para o vácuo. Esta discussão pode ser aprofundada em [44]. Por fim, apenas por completeza, a Lagrangeana que descreve tal fenômeno é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + e\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (5.1.1)$$

Como anunciado no início deste Capítulo, na literatura há muitos casos de efeitos de fase similares ao efeito Aharonov-Bohm. Similares no sentido de serem efeitos que não têm um análogo clássico, pois estão ligados ao movimento de partículas em regiões em que a força é nula. A similaridade deve-se também à fase estar ligada a um “potencial vetor”¹, e às fases serem dadas por uma integral de caminho, com resultados independentes do percurso de integração. Isto confere uma topologia não-trivial ao vácuo. Há uma generalização destes efeitos proposta por Berry [46].

5.2 A fase de Aharonov-Casher

Retomando a proposta inicial, no experimento proposto em 1984, Aharonov e Casher [38] mostraram que também existe um processo análogo, envolvendo agora movimento

¹Adiante, discutir-se-á, que o termo responsável por se gerar uma fase de Aharonov-Casher, que é o acoplamento de um dipolo magnético com um campo elétrico, poderá ser descrito em termos de um potencial vetor em uma Lagrangeana similar ao efeito AB.

de momentos de dipolo magnético, de carga nula, afetados pela presença de um campo elétrico. Trata-se do mesmo experimento de fenda dupla onde, agora, substitui-se o solenóide por uma linha infinita de carga de densidade linear λ e os elétrons incidentes são substituídos por nêutrons polarizados na direção- \hat{z} .

A maneira que usaremos para obter o termo de fase é através da equação de Dirac, tomando seu limite não-relativístico e, a partir do momento canônico generalizado, podemos facilmente obter o termo adicional na fase, da mesma forma como o caso anterior. A equação de Dirac para uma partícula massiva neutra, com momento de dipolo magnético anômalo $\vec{\mu}$, é dada por:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{\mu}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m)\Psi = 0. \quad (5.2.2)$$

As matrizes- γ são matrizes que fecham a Álgebra de Clifford. Uma representação destas matrizes, bem conhecida, é fornecida pelas matrizes- γ de Dirac, e a representação que adotaremos é dada por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.3)$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli.²

Para tomarmos o limite não-relativístico da equação de Dirac, devemos escrever o spinor Ψ em termos de suas componentes fraca (χ) e forte (ϕ), $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, o que nos dará um conjunto de duas equações diferenciais acopladas para χ e ϕ ,

$$(E - m)\phi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + i\mu\vec{E})\chi = 0, \quad (5.2.4)$$

$$-(E + m)\chi + \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu\vec{E})\phi = 0, \quad (5.2.5)$$

²A título de esclarecimento, o tensor $F_{\mu\nu}$ acomoda dois vetores em suas componentes; as componentes F_{0i} acomodam o vetor campo elétrico \vec{E} , enquanto as componentes F_{ij} o campo magnético, \vec{B} .

Escrevendo a componente fraca em termos da componente forte do spinor, temos:

$$\chi = \frac{1}{E + m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu \vec{E}) \phi. \quad (5.2.6)$$

Tomando o limite não-relativístico, que consiste na aproximação $E + m \sim 2m$, temos a expressão desacoplada para a componente ϕ , após substituímos (5.2.6) em (5.2.4):

$$\frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu \vec{E}) \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \mu \vec{E}) \phi = m\phi. \quad (5.2.7)$$

Utilizando a identidade vetorial,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (5.2.8)$$

chagamos à expressão:

$$H\phi = E\phi, \quad (5.2.9)$$

onde o operador H é o Hamiltoniano do sistema, dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \vec{E} \times \vec{\mu} \right)^2 - \frac{\mu^2 \vec{E}^2}{2m}. \quad (5.2.10)$$

Podemos, através da expressão acima, definir o momento canônico generalizado do sistema,

$$\vec{\Pi} = \left(\vec{p} - \vec{E} \times \vec{\mu} \right). \quad (5.2.11)$$

Para extrairmos a fase adquirida, bastaria resolver a integral de caminho $\Phi_{AC} = \oint_c \vec{\mu} \times \vec{E} \cdot d\vec{x}$; ao substituímos o campo elétrico gerado pelo fio infinito, teríamos como resultado para a integral $\Phi_{AC} = \lambda \mu n_{AC}$, onde n_{AC} é o “winding-number”, análogo ao caso para o efeito AB, pois o resultado depende da distribuição de cargas no fio, mesmo não havendo uma interação entre cargas, já que se trata de nêutrons.

As similaridades apontadas no parágrafo acima são aquelas desejadas para que o efeito de fase seja análogo ao efeito AB. Entretanto, para a fase de AC, Goldhaber[47] discute que o momento de dipolo magnético acopla-se diretamente com o campo elétrico, que fornece uma fase que é invariante de calibre e, portanto, pode ser medida localmente. A questão da não-localidade desta fase deve ser cuidadosamente analisada como apontam Peshkin e Lipkin[48]. Vamos analisá-la separadamente numa próxima seção.

5.3 Equivalência entre os efeitos AC e AB

Nesta seção, discutiremos as similaridades e possíveis diferenças entre alguns efeitos de fase, sobretudo as fases de AB e AC. Gostaríamos, também, de destacar que há ainda os efeitos AB escalar e AC escalar, formando um grupo de quatro fases quânticas para partículas com carga elétrica ou momento magnético, como mostram Lee e Choi[49].

A descrição de um sistema quântico que apresenta um efeito de AC é dada por uma Lagrangeana do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(\vec{\mu} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v}. \quad (5.3.12)$$

Para existir uma equivalência formal entre os efeitos, o ponto de vista é que se deve mostrar que o termo de potencial na Lagrangeana $\left(\vec{\mu} \times \vec{E} \right)$ pode ser escrito em termos do mesmo potencial vetor para o caso AB, $\left(\vec{\mu} \times \vec{E} \right) = q\vec{A}$, que é o ponto de vista trabalhado em [49].

Mostra-se, então, que pode existir uma correspondência formal entre estas fases, em alguns regimes, e que se atribui esta correspondência ao papel desempenhado pela simetria de calibre dos potenciais. Os autores apontam que, para existir a correspondência entre AB e AC, a partícula neutra de spin- $\frac{1}{2}$ deve ter seu movimento restrito a um plano. Deve-se observar que, fisicamente, para o caso do efeito AB, as condições para o surgimento de fases topológicas são dadas pela presença do campo, enquanto que para o caso da fase

de AC estas são dadas por fontes (cargas).

Apesar de serem, aparentemente, diferenças físicas, mostra-se que a diferença não existe e que ambas as fases têm origem físicas idênticas, se fizermos uma mudança conveniente de referencial de Lorentz. Esta demonstração de equivalência é trabalhada pelos autores[49] no nível da descrição microscópica. Se o acoplamento das cargas com os potenciais, para o caso do efeito AB, e do momento de dipolo magnético com o campo elétrico, para os casos de partículas neutras de spin não-nulo para a fase de AC, geram apenas efeitos de fase quântica, o estado fundamental de cada uma destas partículas quânticas não pode ser afetado por estes campos.

Prosseguindo nesta análise, Lee e Choi[49] propõem, para o caso do efeito AB, uma descrição quântica para todo o sistema, em que incluem a fonte e a partícula, numa mesma descrição, ou seja, a carga elétrica e o momento de dipolo magnético são descritos por uma única função de onda $|\Psi(\vec{r}, t)\rangle$, que pode ser escrita como $|\psi(\vec{r}, t)\rangle |J\rangle$, onde $|\psi(\vec{r}, t)\rangle$ é a função de onda do elétron e $|J\rangle$ a do dipolo magnético. Estuda-se, então, a evolução temporal deste sistema, onde o Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e\vec{A} \right)^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} + \sum_{k,\varepsilon} \hbar\omega n_{k,\varepsilon}. \quad (5.3.13)$$

O último termo descreve a energia do fóton responsável pela interação do campo magnético provocado pela carga em movimento e o dipolo magnético. É importante destacar que a hipótese básica é que esta interação não é suficiente para levar o dipolo magnético a um estado excitado.

Analisando os estados final e inicial, observar-se-á a diferença de fase entre eles, e que, para o caso em questão, o resultado concorda com o original de AB, obtido a partir da natureza topológica do fenômeno. A única hipótese restritiva neste estudo é que esta equivalência é obtida ao confinarmos o movimento do dipolo magnético ao plano.

Pode-se, também, incluir uma outra fase topológica, a fase de He, McKellar e Wilkens

(HMW)[50], que consiste no movimento de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico em uma região com campo magnético. Sua observação experimental foi proposta através de um experimento com um interferômetro atômico ou molecular.

Usando também esta fase, observa-se que algumas transformações de dualidade levam as fases de AB e AC em seus duais DAB e HMW. Os termos de fase seriam obtidos trivialmente através de uma transformação de dualidade do Eletromagnetismo: $\vec{A}_E \rightarrow \vec{A}_M$, $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{A}_M \rightarrow -\vec{A}_E$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, $e \leftrightarrow g$, $\vec{d} \leftrightarrow \vec{m}$. Nos trabalhos listados na Ref. [51], propõem-se um esquema experimental em que se poderia observar estas fases, além de como, através das transformações de dualidade, chegar-se aos termos de fase.

5.4 Topologia do Efeito AB e do Efeito AC

A questão de uma realidade física para o potencial vetor, como proposto no trabalho citado de Aharonov e Bohm, levantou um grande debate em toda a década de 60 contra a interpretação proposta em tal trabalho, a ponto de, por exemplo, de Witt [52] reformular toda a Eletrodinâmica Quântica sem a presença deste potenciais.

Entretanto, apesar da interpretação da realidade física para os potenciais, há de se observar que a fase quântica mensurável obtida pela partícula (a integral sob um contorno fechado do potencial vetor) depende do fluxo magnético no interior do solenóide, ou seja, da região não-acessível à partícula. Isto porque esta fase dependerá do rotacional do potencial vetor, em todo o caminho escolhido, e que o rotacional é nulo em toda a região fora do solenóide. Podemos observar este fato através da expressão matemática do potencial vetor, ou seja, a fase quântica adquirida é influenciada por um campo magnético de uma região não-acessível ao elétron. Isto revela a natureza não local da integral de caminho.

Há apenas uma restrição na escolha dos caminhos para que o resultado acima seja

válido, qual seja: o caminho escolhido deve ser um contorno fechado que englobe o solenóide. Por que este seria o ponto fundamental? Qualquer contorno fechado escolhido que não envolva o solenóide poderá ser continuamente deformado a qualquer ponto deste contorno, o que não é verdade quando se tem o solenóide no interior deste contorno. Este representa uma singularidade no espaço, que nos impediria de deformar continuamente o contorno em um único ponto deste contorno. Com isto, o espaço não é simplesmente conexo. Este é um exemplo do que se chama de uma topologia não-trivial do espaço.

O fator que confere a topologia não-trivial ao problema é o rotacional do potencial vetor ser nulo, de onde se pode definir uma grandeza χ , tal que o potencial vetor seja $\vec{A} = \nabla\chi$, ou seja, \vec{A} é um puro-calibre. Portanto, o mesmo deve ser observado para o efeito AC caso a topologia do problema seja a mesma.

Mais especificamente, o espaço de configuração do experimento de AB é o plano \mathcal{R}^2 com um buraco, que é, topologicamente, o produto direto de uma linha \mathcal{R}^1 com o círculo $S^1 : \mathcal{R}^1 \times S^1$. A linha pode ser parametrizada pela coordenada r e o círculo por ϕ . A função de calibre χ é um mapa do espaço dos grupos de calibre G , que no caso em questão é o $U(1)$, no espaço de configuração $X : \chi : G \rightarrow X$; no caso do experimento AB, $G = S^1$ e $X = S^1 \times \mathcal{R}^1$.

Devemos proceder da mesma maneira ao analisarmos o efeito AC. Primeiro, deve-se notar que a configuração proposta no artigo original é de um fio infinito e um nêutron com momento de dipolo magnético não-nulo. Neste caso, temos também que o rotacional do termo que gera a fase quântica, $\nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E})$, o que permite reescrevermos o termo de fase como um potencial vetor que também é um puro-calibre. Com isto, novamente teríamos que o espaço dos grupos também é o $U(1)$, e o espaço com a mesma topologia que a dada no problema de AB. De fato, esta é a argumentação seguida.

Entretanto, um ponto que vem ganhando grande destaque na literatura das fases

quânticas diz respeito a diferentes topologias para os efeitos AB e AC, pois se pode ter configurações em que estas fases não seriam ligadas à topologia não-trivial do espaço; em resumo, a fase não poderia ser descrita por um potencial vetor que é um puro-calibre. Este ponto foi mais comumente atribuído pela fase de AC em suas verificações experimentais, já que o campo elétrico e o momento de dipolo magnético não apresentavam rotacional nulo, pré-requisito para que a fase seja topológica. Estas fases estão encontradas nos trabalhos[53], e recentemente também para o efeito AB não-topológico[54].

Capítulo 6

Implicações da Quebra da Simetria Lorentz em Mecânica Quântica

Pretendemos analisar possíveis efeitos da quebra da simetria de Lorentz na Mecânica Quântica-não relativística. Como se trata de um efeito em altas energias, o caminho a ser seguido deve partir da equação de Dirac e, então, tomar o seu limite não-relativístico, o que nos permitirá detectar efeitos relativísticos importantes em baixas energias. A quebra da simetria de Lorentz será introduzida na derivada covariante, através de um termo de acoplamento não-mínimo. A literatura revela várias possibilidades para se implementar a violação da simetria de Lorentz. Nos capítulos anteriores, por exemplo, exploramos a questão através da presença de um vetor de fundo, o termo de Carrol, Field e Jackiw (CFJ) como já apresentado. E sobre este termo, propõe-se um tipo de acoplamento não-mínimo. Há ainda outras maneiras de implementar tal quebra, como por exemplo, através da presença de um tensor de fundo também acoplado ao campo de calibre como trabalhado em [55].

Neste capítulo iniciamos a discussão adotando como sistema físico uma partícula

teste neutra com diferentes tipos de acoplamentos não-mínimos que violam a simetria de Lorentz, e em quais situações pode-se gerar termos de fase quântica, em especial o termo de fase de Aharonov-Casher. A equação de partida, como já mencionado, é a equação de Dirac, de onde extraímos a equação de Pauli. O primeiro acoplamento considerado é do tipo $igv^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}$, que é o tradicional termo CFJ, onde o vetor de fundo desempenhará o papel de um momento de dipolo magnético. Em seguida, analisamos uma proposta em que a quebra é dada por um acoplamento do tipo torção (tipo- γ_5)[56], e se observará que não teremos fase quântica dada pela quebra. Analisaremos ainda a situação em que um tensor de fundo, $T_{\mu\nu}$, acoplar-se-á ao campo eletromagnético e ao campo de Dirac. Neste caso, observamos que a componente antissimétrica deste tensor induz uma fase de AC. Para concluir a seção, analisaremos simultaneamente dois termos que geram fase de AC: o termo padrão, sem quebra da simetria de Lorentz e o termo de CFJ, com o objetivo de observarmos como ambos competem na geração de uma fase quântica.

Após observarmos como a violação da simetria de Lorentz pode influenciar nos mecanismos de formação de fases quânticas, um ponto interessante a se destacar é o comportamento de uma anti-partícula em um cenário onde há quebra da simetria de Lorentz. Assim, na segunda seção, analisaremos a quebra de CPT para estes acoplamentos, o que nos permitirá estudar a diferença para as fases de AC no que diz respeito à partícula e à anti-partícula. Por fim, apresentaremos as conclusões parciais e perspectivas do presente capítulo.

6.1 Violação de simetria de Lorentz por acoplamento não-mínimo, equação de Pauli e fase de Aharonov-Casher.

6.1.1 Acoplamento não-mínimo tipo-CFJ

O nosso ponto de partida é a equação de Dirac,

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0, \quad (6.1.1)$$

em sua versão invariante de calibre. A derivada covariante escolhida é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + igv^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (6.1.2)$$

onde o v^μ é o vetor de fundo responsável pela anisotropia no espaço-tempo[19]. A representação adotada para as matrizes- γ é a usual representação de Dirac, que repetimos a seguir:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1.3)$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli. Para extrairmos o limite não-relativístico da equação de Dirac (6.1.1), devemos escrever o espinor Ψ em termos de suas componetes fraca (χ) e forte (ϕ), $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, o que nos dará o conjunto de equações diferenciais acopladas para ϕ e para χ (no espaço dos momenta, $(E; \vec{P})$)

$$\left(E - e\varphi - g\vec{v} \cdot \vec{B} \right) \phi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E})\chi = m\phi, \quad (6.1.4)$$

$$- \left(E - e\varphi - g\vec{v} \cdot \vec{B} \right) \chi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E})\phi = m\chi, \quad (6.1.5)$$

O limite não-relativístico consiste, neste caso, em escrever $(E + m - e\varphi - g\vec{v} \cdot \vec{B} \sim 2m)$, e, então, escrevendo a componente fraca em termos da componente forte, teremos

$$\chi = \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E}) \phi. \quad (6.1.6)$$

Substituindo esta relação na eq. (6.1.5), encontramos a equação de Pauli associada à componente forte do espinor

$$(E - e\varphi - g\vec{v} \cdot \vec{B}) \phi - \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}) \phi = m\phi, \quad (6.1.7)$$

onde o momento canônico generalizado é definido por,

$$\vec{\Pi} = (\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E}). \quad (6.1.8)$$

A presença do termo $g\vec{v} \times \vec{E}$, que apresenta rotacional não-nulo, é que determina o aparecimento do efeito Aharonov-Casher, onde o vetor de fundo desempenha o papel de um momento de dipolo magnético ($\vec{\mu} = g\vec{v}$), que induz a fase de AC na função de onda associada a uma partícula teste neutra ($e = 0$). Para o caso de uma partícula teste carregada, observa-se simultaneamente o efeito Aharonov-Bohm. Para uma partícula neutra sob a ação de um campo elétrico externo, a fase de AC induzida, como consequência da violação da simetria de Lorentz, é dada por $\Phi_{AC} = \oint_c (g\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \vec{dl}$ onde c é um caminho fechado.

Com este resultado, podemos ainda comentar sobre uma outra possibilidade, caso o acoplamento não-mínimo incluído na derivada covariante (6.1.2) fosse da forma $ihv^\nu F_{\mu\nu}$, onde h seria uma constante de acoplamento. Neste caso, teríamos um novo termo de fase quântica da forma $\vec{v} \times \vec{B}$, porém não teríamos a fase de AC.

Para obtermos a Hamiltoniana com quebra de simetria de Lorentz, pois esta pode ser de interesse para outros tipos de aplicação em Mecânica Quântica, devemos usar a

seguinte identidade:

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}\right)^2 = \vec{\Pi}^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{\Pi} \times \vec{\Pi}\right), \quad (6.1.9)$$

que, após algumas manipulações algébricas, fornece-nos o resultado

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 + e\varphi - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{2m} g v^0 \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{g}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}), \quad (6.1.10)$$

onde $\varphi \equiv A^0$.

Gostaríamos de remeter ao trabalho da ref. [57], onde os autores apresentam um método para derivar a Hamiltoniana relativística de férmions livres massivos a partir de uma Lagrangeana geral com violação da simetria de Lorentz, baseando-se na expansão de Foldy-Wouthuysen. Nossos resultados estão de acordo com o limite não-relativístico obtido em [57], após uma conveniente substituição do parâmetro a_μ em [57] por $eA_\mu + igv^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}$.

6.1.2 Acoplamento não-mínimo tipo torção

Nesta seção, novamente exploraremos o limite não-relativístico da eq. (6.1.1), mas agora considerando outro tipo de coplamento não-mínimo, onde comparece a matriz de quiralidade:

$$D_\mu = \partial_\mu + eA_\mu + ig_a \gamma_5 v^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (6.1.11)$$

na qual o quadrivetor v^μ acopla-se ao campo de calibre através de um termo tipo torção. A alusão à torção é feita de acordo com as idéias desenvolvidas em[56].

Novamente, vamos escrever o espinor Ψ em termos de suas componentes fraca e forte, do que derivaremos duas equações diferenciais acopladas, como feito anteriormente

para o termo do tipo CFJ

$$\left[(E - e\varphi) + \vec{\sigma} \cdot (g_a v^0 \vec{B} - g_a \vec{v} \times \vec{E}) \right] \phi - [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{v} \cdot \vec{B}] \chi = m\phi \quad (6.1.12)$$

$$- \left[(E - e\varphi) + \vec{\sigma} \cdot (g_a v^0 \vec{B} - g_a \vec{v} \times \vec{E}) \right] \chi + [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{v} \cdot \vec{B}] \phi = m\chi. \quad (6.1.13)$$

Segue deste sistema que

$$\chi = \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{v} \cdot \vec{B} \right] \phi. \quad (6.1.14)$$

Das eqs. (6.1.13,6.1.14), obtemos a equação de Pauli correspondente,

$$\begin{aligned} & \left(E - e\varphi + \vec{\sigma} \cdot (g_a v^0 \vec{B} - g_a \vec{v} \times \vec{E}) \right) \phi + \\ & - \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{v} \cdot \vec{B} \right] \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + g_a \vec{v} \cdot \vec{B} \right] \phi = m\phi, \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

cuja estrutura fornece o momento canônico conjugado usual, $\vec{\Pi} = (\vec{p} - e\vec{A})$, ou seja, a violação da simetria de Lorentz pelo acoplamento considerado não modifica o momento conjugado, fornecendo apenas contribuições do tipo energia para a Hamiltoniana; tais contribuições somam-se no termo

$$\begin{aligned} H_{nm} = & \vec{\sigma} \cdot (g_a v^0 \vec{B} - g_a \vec{v} \times \vec{E}) + \frac{1}{2m} (g_a \vec{v} \cdot \vec{B})^2 + \\ & + \frac{g_a}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{v} \cdot \vec{B} + \frac{g_a}{2m} \vec{v} \cdot \vec{B} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}), \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

e a Hamiltoniana total do sistema será dada por

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 + e\varphi - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \nabla \times \vec{A} + H_{nm}. \quad (6.1.17)$$

Podemos, então, concluir que, para o caso em que o vetor de fundo é associado à componente vetorial da torção, como feito no trabalho da ref. [56], não há indução de fase de

AC. O acoplamento do tipo torção contribui para energia total do sistema, não alterando a função de onda apenas por uma fase.

6.1.3 Acoplamento não-mínimo com um tensor de fundo

O ponto de partida desta subseção é uma equação de Dirac estendida, acoplada não-minimamente ao campo eletromagnético, como dado abaixo:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\lambda_1 T_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} + i\lambda_2 T_{\mu\kappa} F^\kappa{}_\nu \Sigma^{\mu\nu})\Psi = 0, \quad (6.1.18)$$

onde a derivada covariante é dada em sua forma usual, $D_\mu = \partial_\mu + eA_\mu$, e o tensor $T_{\mu\nu}$ é tomado antissimétrico. O termo bilinear, $\Sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$, é escrito como

$$\Sigma^{0i} = -\sigma_y \otimes \vec{\sigma}, \quad \Sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \sigma^k \otimes \mathbf{1}.$$

É a componente antissimétrica do tensor de fundo, $T_{\mu\nu}$, o elemento responsável pela quebra no nível do acoplamento com os férmions. Em analogia ao que ocorre quando o acoplamento dos férmions viola a simetria de Lorentz, através do termo do tipo $b_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi$ [58] na Lagrangeana, propomos aqui uma violação de simetria de Lorentz pela presença de acoplamentos que vêm de termos da forma; $\bar{\Psi} \Sigma^{\mu\nu} \Psi T_{\mu\nu}$ and $\bar{\Psi} \Sigma^{\mu\nu} \Psi F_{\mu\kappa} T^\kappa{}_\nu$.

Adotando o mesmo procedimento dos casos estudados anteriormente, escrevemos duas equações acopladas para as componentes forte e fraca

$$\begin{aligned}
& (E - e\varphi) \phi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \chi + 4i\lambda_1 T_{0i} \sigma^i \chi + \lambda_1 T_{ij} \varepsilon_{ijk} \sigma^k \phi + 2i\lambda_2 T^{0i} F_{ij} \sigma^j \chi \\
& + \lambda_2 T^{i0} F_{0k} \varepsilon_{ijk} \sigma^j \phi + \lambda_2 T^{ij} F_{jk} \varepsilon_{ijk} \sigma^j \phi + 2i\lambda_2 T^{ij} F_{j0} \sigma^i \chi = m\phi, \tag{6.1.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (E - e\varphi) \chi + \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \phi + 4i\lambda_1 T_{0i} \sigma^i \phi + \lambda_1 T_{ij} \varepsilon_{ijk} \sigma^k \chi + 2i\lambda_2 T^{0i} F_{ij} \sigma^j \phi \\
& + \lambda_2 T^{i0} F_{0k} \varepsilon_{ijk} \sigma^j \chi + \lambda_2 T^{ij} F_{jk} \varepsilon_{ijk} \sigma^j \chi + 2i\lambda_2 T^{ij} F_{j0} \sigma^i \phi = m\chi. \tag{6.1.20}
\end{aligned}$$

O conjunto das duas equações acima descritas envolve tanto um campo magnético como um campo elétrico externo. Como o principal objetivo da seção é averigüarmos diferentes possibilidades de violação da simetria de Lorentz e sua relação com a fase de AC, vamos considerar que o campo magnético seja nulo, $F_{ij} = 0$, o que nos leva à seguinte equação para a componente fraca do espinor em termos de sua componente forte,

$$\chi = \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \lambda_1 4i T_{0i} \sigma^i + \lambda_2 2i (\vec{T} \times \vec{E})_i \sigma^i \right] \phi. \tag{6.1.21}$$

Aqui, usamos que $T^{ij} F_{j0} = (\vec{T} \times \vec{E})_i$. Fatorando as matrizes de Pauli, encontramos um momento canônico generalizado descrito por

$$\vec{\Pi} = \left(\vec{p} - e\vec{A} - 4\lambda_1 \vec{T}_1 - 2\lambda_2 \vec{T}_2 \times \vec{E} \right), \tag{6.1.22}$$

onde identificamos as componentes “elétrica” e “magnética” de $T_{\mu\nu}$ definidas, respectivamente por $T_{0i} = \vec{T}_1$, $T_{ij} = \vec{T}_2$.

Substituindo-as na eq. (6.1.21), obtemos a equação para a componente forte do spinor

$$(E - e\varphi - \lambda_1 T_{kj} \varepsilon_{ijk} \sigma^i + \lambda_2 T^{j0} F_{0k} \varepsilon_{ijk} \sigma^i) \phi - \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})(\sigma \cdot \vec{\Pi}) \phi = m\phi. \tag{6.1.23}$$

Podemos, então, observar que duas diferentes fases quânticas aparecem neste caso: uma governada por λ_1 , e a outra governada por λ_2 . Como nosso propósito está relacionado

à fase de AC, e esta depende diretamente do campo elétrico, podemos fazer $\lambda_1 = 0$. O termo λ_2 associado à componente “elétrica” \vec{T}_2 do tensor de fundo $T_{\mu\nu}$, fornece-nos a fase de AC. Note-se que a condição para o surgimento da fase de AC seleciona apenas a componente “elétrica” do tensor antissimétrico $T_{\mu\nu}$.

Neste caso, a Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 + e\varphi - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} + \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times (2i\lambda_2 \vec{T}_2 \times \vec{E}). \quad (6.1.24)$$

6.1.4 Análise de AC e acoplamento não-mínimo com quebra da simetria de Lorentz

Nesta subseção, pretendemos comparar o acoplamento não-mínimo parametrizado pelo termo de CFJ descrito nas eqs. (6.1.1,6.1.2) com o acoplamento padrão, em que se obtém a fase de AC usual, com o propósito de verificarmos como tais termos se comportam ao serem considerados simultaneamente e entendermos seus papéis na descrição da fase de AC.

A equação de Dirac invariante de calibre, a partir da qual computaremos a equação de Pauli, é dada por

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m + f\Sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})\Psi = 0, \quad (6.1.25)$$

onde a derivada covariante com o acoplamento não-mínimo é a mesma dada na eq. (6.1.2). Seguindo o mesmo procedimento que realizamos em todas as subseções, tomaremos o limite não-relativístico da equação de Dirac. Escrevendo o espinor Ψ em termos de suas componentes fraca e forte, a partir da equação (6.1.25), obtemos o conjunto de equações

acopladas

$$\begin{aligned} & \left[E - e\varphi - g\vec{v} \cdot \vec{B} + (2f\Sigma^{0i}F_{0i} + f\Sigma^{ij}F_{ij}) \right] \phi + \\ & - \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E} \right) \chi = m\phi, \end{aligned} \quad (6.1.26)$$

$$\begin{aligned} & \left[-(E - e\varphi - g\vec{v} \cdot \vec{B}) + (2f\Sigma^{0i}F_{0i} + f\Sigma^{ij}F_{ij}) \right] \chi + \\ & + \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E} \right) \phi = m\chi. \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

No limite não-relativístico, obtém-se a equação de Pauli,

$$\left(E - e\varphi - g\vec{v} \cdot \vec{B} + f\varepsilon_{ijk}\sigma^k F_{ij} \right) \phi - \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}} \right) \frac{1}{2m} \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}} \right) \phi = m\phi, \quad (6.1.28)$$

onde $\vec{\mathcal{P}} = \left(\vec{p} - e\vec{A} + gv^0\vec{B} - g\vec{v} \times \vec{E} - 2if\vec{E} \right)$.

Novamente, usando a identidade (6.1.9), podemos observar que somente a interação com constante de acoplamento f contribui para o momento canônico conjugado, dado por

$$\vec{\Pi} = \left(\vec{p} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right). \quad (6.1.29)$$

Como conseqüência observamos que para o caso em que temos, concomitantemente, os dois acoplamentos responsáveis pela geração da fase de AC, o termo que viola a simetria de Lorentz não mais contribui para a fase quântica. A contribuição devida a tal acoplamento, neste caso, manifesta-se sob a forma de energia, introduzindo simplesmente um termo extra na Hamiltoniana que se escreve como $4fg\vec{\sigma} \cdot \left(\left(\vec{v} \times \vec{E} \right) \times \vec{E} \right)$.

6.2 Violação de CPT

Como sabemos, o termo de violação de simetria de Lorentz também viola a transformação de CPT. Na seqüência deste capítulo, torna-se uma porposta interessante avaliarmos o limite não-relativístico da anti-partícula para analisarmos, subseqüentemente, como o

termo de fase pode se comportar frente a tais transformações. A expectativa é que o termo de fase de AC, produzido via vetor de fundo que viola a simetria de Lorentz, forneça uma contribuição diferenciada em relação à fase de AC gerada pelo acoplamento não-mínimo padrão (que é invariante de Lorentz).

As transformações de paridade, conjugação de carga e reversão temporal, sobre uma função de onda espinorial de Dirac, são dadas, respectivamente, por

$$\bar{\Psi} \xrightarrow{\mathcal{P}} \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (6.2.30)$$

$$\bar{\Psi}^c \xrightarrow{\mathcal{C}} -\Psi^t C^{-1} \quad (6.2.31)$$

$$\Psi \xrightarrow{\mathcal{T}} \gamma^1 \gamma^3 \Psi^* \quad (6.2.32)$$

Para tomarmos as tranformações de CPT nos bilineares fermiônicos usaremos que, na representação de Dirac,

$$\begin{aligned} \gamma^{0t} &= \gamma^0, & \gamma^{2t} &= \gamma^2 \\ \gamma^{1t} &= -\gamma^1, & \gamma^{3t} &= -\gamma^3 \text{ e } \gamma_5^t = -\gamma^5 \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

e que

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, & \vec{\gamma}^{\dagger} &= -\vec{\gamma} \\ \bar{\gamma}^\mu &= \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

O “ t ” nas equações acima designa a operação matricial de transposição. Listamos abaixo as propriedades da matriz de conjugação de carga

$$\begin{aligned} C^{-1}C &= 1, & C^t &= -C \\ C\gamma_\mu^t C^{-1} &= -\gamma^\mu, & C\Sigma_{\mu\nu}^t C^{-1} &= -\Sigma_{\mu\nu} \\ \bar{C} &= \gamma^0 C^{-1} \gamma^0, & C\gamma_5^t C^{-1} &= \gamma_5. \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Após estas considerações, a análise de quebra de CPT pelos bilineares fermiônicos nos oferecem como resultado

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \xrightarrow{CPT} \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (6.2.36)$$

$$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{CPT} \bar{\Psi}\Psi \quad (6.2.37)$$

$$\bar{\Psi}\gamma_5\Psi \xrightarrow{CPT} \bar{\Psi}\gamma_5\Psi \quad (6.2.38)$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi \xrightarrow{CPT} \left\{ \begin{array}{l} \mu = 0, -\bar{\Psi}\gamma^0\gamma_5\Psi \\ \mu = i, \bar{\Psi}\gamma^i\gamma_5\Psi \end{array} \right\} \quad (6.2.39)$$

$$\bar{\Psi}\Sigma_{\mu\nu}\Psi \xrightarrow{CPT} \bar{\Psi}\Sigma_{\mu\nu}\Psi \quad (6.2.40)$$

Das transformações acima, também podemos obter um resultado que será bastante utilizado nos próximos cálculos de limite não relativístico para a anti-partícula, a saber, a transformação de CPT da função de onda spinorial

$$\Psi^{CPT}(r, t) = i\gamma_5\Psi(r, t) \quad (6.2.41)$$

6.3 Limite não-relativístico para a anti-partícula:

O nosso ponto de partida será a equação de Dirac

$$i\gamma^\mu(D_\mu - m)\Psi = 0 \quad (6.3.42)$$

Devemos lembrar as seguintes transformações sob CPT:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu &\xrightarrow{CPT} -\partial_\mu \\
A_\mu &\xrightarrow{CPT} -A_\mu \\
F_{\mu\nu} &\xrightarrow{CPT} F_{\mu\nu} \\
\Psi &\xrightarrow{CPT} \gamma_5 \Psi.
\end{aligned} \tag{6.3.43}$$

6.3.1 O acoplamento mínimo

Primeiramente, apenas para estabelecermos um guia e podermos comparar nossos resultados, vamos observar o limite não-relativístico para uma anti-partícula que interage via acoplamento mínimo. A equação de Dirac para a mesma escreve-se como

$$-i\gamma^\mu (D_\mu + m) \gamma_5 \Psi = 0. \tag{6.3.44}$$

O procedimento é o mesmo que adotamos desde o início deste capítulo, onde escrevemos o spinor Ψ em termos de suas componentes fraca e forte, o que nos dará um conjunto de duas equações diferenciais acopladas para χ e ϕ . Considerando que, na representação de Dirac;

$$\gamma^0 \gamma_5 = i\sigma_y \otimes \mathbf{1}, \quad \vec{\gamma} \gamma_5 = \sigma_z \otimes \vec{\sigma} \tag{6.3.45}$$

teremos

$$(E - e\varphi) \chi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \phi = m\chi, \tag{6.3.46}$$

$$-(E - e\varphi) \phi + \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \chi = m\phi, \tag{6.3.47}$$

Escrevendo a componente fraca em termos da componente forte do espinor, temos

$$\chi = \frac{1}{(E - e\varphi) + m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \phi. \tag{6.3.48}$$

Tomando o limite não-relativístico, que consiste na aproximação $(E - e\varphi) + m \sim 2m$, temos a expressão desacoplada para a componente ϕ , após substituímos (6.3.48) em (6.3.46)

$$\frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \right]^2 \chi = m\chi. \quad (6.3.49)$$

Novamente utilizando a identidade vetorial, chegamos à expressão

$$H\phi = E\phi, \quad (6.3.50)$$

onde o operador H é a Hamiltoniana do sistema, dado por

$$H = -\frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 - e\varphi + \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (6.3.51)$$

Podemos definir o momento canônico conjugado do sistema,

$$\vec{\Pi} = (\vec{p} - e\vec{A}). \quad (6.3.52)$$

Notamos, assim, que a energia da anti-partícula tem o seu sinal trocado em relação à energia da partícula, o que já era esperado, e que a fase topológica de AB da anti-partícula apresenta-se da mesma forma que aquela para a partícula.

6.3.2 O acoplamento não-mínimo

Devemos também extrair a Hamiltoniana não-relativístico para a anti-partícula em um esquema de acoplamento não-mínimo para o caso de a partícula ser neutra mas possuir momento de dipolo magnético, tal como descrevemos no segundo capítulo desta Tese, em que obtínhamos a fase de AC. Nosso objetivo é mostrar que há uma diferença na fase de AC das anti-partículas, em relação às correspondentes partículas, quando estas estão sujeitas a acoplamentos não-mínimos com violação de Lorentz.

A equação de Dirac para anti-partícula lê-se:

$$\left(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m + \frac{1}{2}\mu F^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\right)\gamma_5\Psi = 0, \quad (6.3.53)$$

pois o termo $\mu F^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} \xrightarrow{CPT} -\mu F^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}$. Considerando que temos apenas campo elétrico, ou seja, $F^{ij} = 0$, o termo $F^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}$ pode se escrever, após simples manipulações algébricas como $i\mu E^i\gamma_i\gamma_0$; e com isto, a equação de Dirac para anti-partícula assume a forma

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m - i\mu E^i\gamma^i\gamma^0)\gamma_5\Psi = 0. \quad (6.3.54)$$

Como $\gamma^i\gamma^0\gamma_5 = -\mathbf{1} \otimes \vec{\sigma}$ escrevendo o spinor Ψ em termos de suas componentes fraca e forte, chegamos ao seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas

$$(E - m)\phi + \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + i\mu\vec{E})\chi = 0, \quad (6.3.55)$$

$$-(E + m)\chi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu\vec{E})\phi = 0, \quad (6.3.56)$$

Escrevendo a componente fraca em termos da componente forte do spinor, obtém-se

$$\chi = -\frac{1}{E + m}\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu\vec{E})\phi. \quad (6.3.57)$$

Após o limite não-relativístico, $E + m \sim 2m$, temos a expressão desacoplada para a componente ϕ e após substituirmos (6.3.57) em (6.3.56) chega-se a

$$\frac{1}{2m}\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu\vec{E})\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \mu\vec{E})\phi = m\phi. \quad (6.3.58)$$

Após manipulações algébricas, chegamos à expressão

$$H\phi = E\phi, \quad (6.3.59)$$

e neste caso, o operador H é a Hamiltoniana do sistema:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \vec{E} \times \vec{\mu}\right)^2 - \frac{\mu^2\vec{E}^2}{2m}, \quad (6.3.60)$$

com momento canônico generalizado dado por,

$$\vec{\Pi} = \left(\vec{p} - \vec{E} \times \vec{\mu} \right). \quad (6.3.61)$$

6.3.3 Acoplamento não-mínimo com violação da simetria de Lorentz

O acoplamento não-mínimo que viola a simetria de Lorentz é dado por

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + igv^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (6.3.62)$$

A sua análise de quebra de CPT oferece duas possibilidades:

$$\begin{aligned} D_\mu &\xrightarrow{CPT} -\partial_\mu - ieA_\mu - igv^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \\ D_\mu &\xrightarrow{CPT} -\partial_\mu - ieA_\mu + igv^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.3.63)$$

A segunda possibilidade é para nós a mais interessante.

Com isto, a equação de Dirac para a anti-partícula toma a forma

$$\left(-i\gamma^0\gamma_5 D_0 - i\gamma^i\gamma_5 D_i + m\gamma_5 \right) \Psi = 0. \quad (6.3.64)$$

Para extrairmos o limite-não relativístico de (6.3.64) devemos escrever o espinor Ψ em termos de suas componentes fraca (χ) e forte (ϕ) o que nos dará o conjunto de equações diferenciais acopladas como abaixo:

$$\left(E + e\varphi + g\vec{v} \cdot \vec{B} \right) \chi + \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A} - gv^0\vec{B} + g\vec{v} \times \vec{E} \right) \phi = m\chi, \quad (6.3.65)$$

$$-\left(E - e\varphi + g\vec{v} \cdot \vec{B} \right) \phi - \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A} - gv^0\vec{B} + g\vec{v} \times \vec{E} \right) \chi = m\phi, \quad (6.3.66)$$

Escrevendo a componente fraca em termos da componente forte do spinor, temos

$$\chi = \frac{1}{m - \left(E - e\varphi + g\vec{v} \cdot \vec{B} \right)} \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A} - gv^0\vec{B} + g\vec{v} \times \vec{E} \right) \phi. \quad (6.3.67)$$

Tomando o limite não-relativístico, que consiste na aproximação $(E - e\varphi + g\vec{v} \cdot \vec{B}) + m \sim 2m$, temos a expressão desacoplada para a componente ϕ . Após substituirmos (6.3.67) em (6.3.65), encontramos

$$\frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A} - gv^0\vec{B} + g\vec{v} \times \vec{E} \right) \right]^2 \chi = m\chi. \quad (6.3.68)$$

Seguindo os mesmos passos como anteriormente, chegamos à expressão

$$H\phi = E\phi, \quad (6.3.69)$$

onde

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 - e\varphi - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{2m} gv^0 \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{g}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}), \quad (6.3.70)$$

e o momento conjugado

$$\vec{\Pi} = \left(\vec{p} - e\vec{A} - gv^0\vec{B} + g\vec{v} \times \vec{E} \right).$$

Podemos observar, na expressão do momento canônico conjugado acima, que a fase para anti-partícula produzida através do acoplamento não-mínimo com quebras das simetrias simultâneas de *CPT* e Lorentz tem o seu sinal invertido em relação à fase da partícula. Fica, assim, evidenciada a troca de sinal na fase de AC associada aos dois termos onde aparecem as componentes do vetor de fundo v^0 e \vec{v} do quadrivetor responsável pela violação da simetria de Lorentz

6.3.4 Comentários Finais

Na primeira seção, estudamos algumas possibilidades de violação de simetria de Lorentz e sua conexão com a fase de Aharonov-Casher. Usualmente esta fase é adquirida no movimento de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético em uma região

de campo elétrico, este gerado por uma distribuição axial de cargas. Entretanto, esta fase pode também aparecer em alguns outros contextos. O que foi argumentado nesta seção é que, no caso de um acoplamento não-mínimo com um vetor de fundo fixo, v^μ , a fase de AC pode se apresentar mesmo para uma partícula sem spin, através do termo $g \vec{v} \times \vec{E}$, presente no momento canônico conjugado, onde $g \vec{v}$ desempenha um papel de momento de dipolo magnético. Este resultado é análogo ao resultado da Eletrodinâmica $(1 + 2)$ -dimensional, onde partículas carregadas, acopladas não-minimamente aos campos elétrico e magnético, adquire momento de dipolo magnético[59]. No nosso caso, a situação é mais drástica. Uma partícula neutra e sem spin adquire momento de dipolo magnético $g \vec{v}$, induzido pelo acoplamento não mínimo com o vetor de fundo. Outras possibilidades também foram analisadas, como por exemplo o acoplamento tipo-torção. Neste caso não há a fase de AC induzida pelo acoplamento não-mínimo. Há somente termos extras na Hamiltoniana, devido ao acoplamento do spin com o vetor de fundo e com os campos elétrico e magnético, que corrigirão o espectro em relação ao caso em que não há a quebra de Lorentz. Para o caso parametrizado pelo tensor (anti-simétrico) de fundo $T_{\mu\nu}$, foi observado que apenas a componente “magnética ” deste tensor, $T^{ij} = \vec{T}_2$ fornece a fase de AC. A fase gerada por este mecanismo não é óbvia para partículas escalares, como a fase obtida pelo acoplamento não-mínimo para partículas de spin- $\frac{1}{2}$. Outro resultado interessante é obtido quando estudamos a competição entre as duas possibilidades de se gerar a fase de AC: uma construída por nós, em que se viola a simetria de Lorentz através do vetor de fundo no acoplamento CFJ; a outra, da maneira padrão existente na literatura. Quando estas duas interações são ligadas, o resultado que obtemos é somente a fase de AC que provem do termo padrão $\vec{\mu} \times \vec{E}$, onde $\vec{\mu}$ é o momento magnético da partícula de spin- $\frac{1}{2}$, que sobrevive.

A conclusão mais geral até o momento é que uma possibilidade interessante da quebra

das simetrias de Lorentz e de CPT é gerar efeitos de fase quântica, em particular a fase AC, quando a partícula estiver acoplada de maneira não-mínima. Esta propriedade da violação da simetria de Lorentz para os modelos invariantes de calibre ainda não havia sido discutida na literatura. O que precisamos enfatizar é que neste cenário, mesmo partículas escalares neutras podem adquirir fases de AC não-triviais.

Chamamos a atenção para o fato de que, neste cenário, partículas escalares neutras podem adquirir uma fase AC não-trivial, e a atribuímos à presença de um fundo em que se viola a simetria de Lorentz, via acoplamento não-mínimo na derivada covariante, a propriedade de induzir momento de dipolo magnético para a partícula, que se acopla ao campo elétrico para gerar a fase de A-C. Este resultado é bastante similar ao que acontece em teorias de calibre em $(1+2)D$, como mostra[60], ao analisar como uma partícula escalar em $(1+2)D$ pode adquirir momento de dipolo magnético às custas de acoplamento não-mínimo ao campo de Maxwell. Podemos comparar nosso resultado ao análogo bidimensional, para o caso em que a violação da simetria de Lorentz faz-se por um quadri-vector de fundo, tal como descrito na primeira seção deste capítulo, pois ele pode selecionar um mundo bidimensional para partículas interagentes enquanto que o acoplamento não-mínimo proposto na eq. (6.1.2) seleciona a componente elétrica do campo eletromagnético, que permite que identifiquemos a combinação $(-g\vec{v})$ como desempenhando o papel do spin da partícula de prova.

Outro ponto que gostaríamos de destacar, diz respeito ao comportamento diferenciado para as fases da partícula e da anti-partícula. Como exposto, a figura de difração para partícula deve deslocar-se em oposição à da anti-partícula. Este ponto pode apresentar duas possibilidades bastante fecundas se tomarmos como referência os trabalhos de Bluhm e colaboradores[61], onde é explorada a possibilidade experimental de se medir violações das simetrias simultâneas de *CPT*, através do acoplamento giromagnético. Usando o

mesmo procedimento experimental, poderia se verificar, através da medida das fases para partícula e para anti-partícula, evidências para a violação de CPT , assim como avaliarmos a natureza da fase de AC, que em nosso modelo, seria consequência não só das propriedades da partícula, como também do espaço-tempo.

Capítulo 7

Discussões e Perspectivas

A quebra da simetria de Lorentz é uma proposta recente, porém o conhecimento que dela se tem produzido permite-nos um posicionamento seguro a respeito de sua validade como descrição fundamental da Natureza. Os resultados que dela se têm extraído confirmam-na como uma teoria consistente e criam um ambiente seguro de trabalho no qual resolvemos trilhar parte de nossa militância científica.

A nossa escolha em trabalhar com o modelo planar com quebra espontânea de simetria reside no fato de termos como horizonte as aplicações em Física de Baixas Energias e Baixa Dimensionalidade, motivados pelo sucesso de aplicação das teorias de Chern-Simons no estudo do efeito Hall e na formulação de modelos para a supercondutividade no século passado. Investimos nesta idéia pelo fato de que estes sistemas apresentam uma anisotropia espacial, criada pela presença de um vetor de fundo, como acontece por exemplo no efeito Hall pela presença de um campo magnético externo perpendicular ao plano de uma amostra, ou seja, a simetria de rotação é quebrada. Portanto, não se trata de mera especulação teórica, mas de fato, a simetria de Lorentz é quebrada por este sistema, como no exemplo citado acima, o subgrupo das rotações. Com isto, entendemos que implicações não-relativísticas da quebra da simetria de Lorentz podem nos ajudar a entender

fenômenos em baixas energias que tenham suas raízes nos fenômenos relativísticos.

Os resultados dos três capítulos originais desta tese têm esta mesma perspectiva. Embora as soluções clássicas e os vórtices não tenham sido discutidos em nenhum ambiente específico, estes estão em busca de um sistema que tenham uma fenomenologia compatível a de seus resultados e, por esta razão, apontamos já um candidato à aplicação, que são a formação de vórtices em supercondutores de alta-temperatura.

O quinto capítulo já é mais específico no sentido das aplicações em baixas energias, pois encontramos, através do limite não relativístico da equação de Dirac, a Hamiltoniana de baixa energia assim como discutimos efeitos de fase quântica. Esta é uma nova perspectiva de aplicação da violação da simetria de Lorentz da qual apresentamos, além da contribuição de resultados, uma nova proposta de abordagem para estes fenômenos onde efeitos da quebra de simetria de Lorentz deverão ser observados. Uma consequência imediata da proposta deste capítulo para desenvolvimentos futuros é analisar outras possibilidades de geração de fase quântica através do mesmo mecanismo que utilizamos, do limite não-relativístico em presença de acoplamentos não-mínimos, para partículas de spins-1 e $-3/2$.

Por ser uma área bastante recente, acreditamos em seu potencial para entendermos os mecanismos de formação de fases quânticas e esperamos observar efeitos novos da quebra da simetria de Lorentz em sistemas da Matéria Condensada. Abaixo discutiremos um trabalho que está em andamento em nosso grupo, e que deve ser entendido como seqüência desta tese para perspectivas futuras.

7.1 Trabalho em Andamento

Nesta seção, vamos encaminhar os trabalhos que estão em desenvolvimento. A primeira proposta de trabalho é inspirada em um resultado bastante conhecido da literatura, que mostrou que a equação de Dirac tem uma supersimetria-N=1 em sua estrutura. Este resultado é extraído a partir de uma ação supersimétrica onde, ao se escrever o supercampo a partir de suas componentes bosônicas e fermiônicas, e incluindo o acoplamento mínimo na derivada covariante, chega-se à equação de Dirac[62]. Este é um ponto que também merece ser verificado no âmbito da mecânica quântica com quebra da simetria de Lorentz, que analisamos no capítulo seis desta tese: se a equação de Dirac, que obtemos em presença de acoplamento não-mínimo, apresenta uma estrutura supersimétrica.

7.1.1 Mecânica Quântica Supersimétrica-N=1

Uma partícula carregada no plano, não-minimamente acoplada a um campo magnético, é descrita como um sistema de MQS-N=1 por meio da seguinte ação no superespaço:

$$S = \frac{iM}{2} \int dt d\theta D \vec{X} \dot{\vec{X}} + iq \int dt d\theta D \vec{X} \cdot \vec{A}(\vec{X}), \quad (7.1.1)$$

onde θ e D são coordenadas Grassmanianas[63]. Usamos as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \vec{X}^j(t, \theta) &= x^j + i\theta \lambda^j(t) \\ D_\theta &= \partial_\theta + i\theta \partial_t. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Notando que $\int d\theta = \partial_\theta |_{\theta=0}$, podemos escrever a Lagrangeana em componentes. A parte cinética escreve-se como

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{M \dot{x}^2}{2} + \frac{iM}{2} \lambda \dot{\lambda}, \quad (7.1.3)$$

e a Lagrangeana de interação, após a expansão em série de Taylor do superpotencial, se escreve como

$$\mathcal{L}_{int} = q\dot{x}_i A_i + iq\lambda_i \lambda_j A_i. \quad (7.1.4)$$

Usando novamente o fato de que λ é uma coordenada Grassmaniana, escreve-se a Lagrangeana acima de maneira mais conveniente se fatorarmos as partes simétricas e anti-simétricas de $\partial_j A_i$. Desta forma

$$\mathcal{L}_{int} = q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} + \frac{iq}{2} \lambda_i \lambda_j (\partial_j A_i - \partial_i A_j), \text{ ou} \quad (7.1.5)$$

$$\mathcal{L}_{int} = q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} + \frac{iq}{4} \varepsilon_{ijk} [\lambda_i, \lambda_j] \tilde{B}_k. \quad (7.1.6)$$

Se temos acoplamento não-mínimo que viola a simetria de Lorentz, podemos redefinir o potencial através das parametrizações abaixo:

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{A} - \frac{g}{e} v^0 \vec{B} + \frac{g}{e} \vec{v} \times \vec{E}, \quad (7.1.7)$$

$$\tilde{B}_k = \nabla \times \vec{A} - \frac{g}{e} v^0 \nabla \times \vec{B} + \frac{g}{e} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{E}). \quad (7.1.8)$$

Definindo

$$\mu_k = \frac{iq}{4} \varepsilon_{ijk} [\lambda_i, \lambda_j],$$

a Lagrangeana de interação pode ser trazida sob a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & q\dot{\vec{x}} \cdot \left[\vec{A} - \frac{g}{e} (v^0 \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) \right] + \vec{\mu} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \\ & - \frac{g}{e} v^0 \vec{\mu} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{g}{e} \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}). \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

A Lagrangeana total é o $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_{int}$.

Calculando o momento canônico generalizado em relação à coordenada bosônica, encontramos

$$\vec{\Pi}_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = M\dot{\vec{x}} + e\vec{A} - g(v^0 \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}), \quad (7.1.10)$$

onde podemos perceber as fases de AB e AC.

Para obtermos a Hamiltoniana geral, devemos tomar a transformada de Legendre

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}_b^2 - \frac{iM}{2} \lambda \dot{\lambda} - \frac{ie}{4} \varepsilon_{ijk} [\lambda_i, \lambda_j] B_k + \frac{igv^0}{4} \varepsilon_{ijk} [\lambda_i, \lambda_j] (\vec{\nabla} \times \vec{B})_k + \left(\pi_i + \frac{1}{2} \lambda_i \right) \varepsilon_i - \frac{ig}{4} \varepsilon_{ijk} [\lambda_i, \lambda_j] \left(\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}) \right)_k \quad (7.1.11)$$

onde os π_i 's são os momenta generalizados em relação a coordenada fermiônica, definidos por

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = -\frac{-iM}{2} \lambda_i, \quad (7.1.12)$$

que correspondem aos vínculos de segunda classe

$$\chi_i = \pi_i - \frac{i}{2} \lambda_i \quad (7.1.13)$$

e os ε_i 's em (7.1.11) são multiplicadores de Lagrange. Usando a condição de consistência, $\dot{\chi}_i = 0$, temos, para os momenta Grassmanianos, $\dot{\lambda}_i = -2i\dot{\pi}_i$. De acordo também com a equação de Hamilton para os momenta Grassmanianos, $\dot{\pi}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}$, encontramos

$$-\dot{\pi}_i = \frac{-iM}{2} \dot{\lambda}_i - \frac{ie}{4} (\varepsilon_{ijk} \lambda_j B_k) + \frac{igv^0}{4} \varepsilon_{ijk} \lambda_j (\vec{\nabla} \times \vec{B})_k - \frac{ig}{4} \varepsilon_{ijk} \lambda_j \left(\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}) \right)_k + \frac{i}{2} \varepsilon_i \quad (7.1.14)$$

Esta equação permite-nos escrever os multiplicadores de Lagrange em termos das coordenadas Grassmanianas. Após este processo de quantização, obtemos a Hamiltoniana abaixo:

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}_b^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2m} gv^0 \vec{\mu} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{g}{2m} \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}), \quad (7.1.15)$$

que é a mesma Hamiltoniana encontrada na primeira seção do sexto capítulo desta tese, ou seja, mostra-se aqui que a equação de Dirac com acoplamento não-mínimo do tipo CFJ, apresenta uma supersimetria exata-N=1.

Por fim, calculando os parênteses de Dirac necessários para quantização de sistema vinculados, os quais nos revelarão as estruturas algébricas das coordenadas, temos que

$$\begin{aligned}
\{x_i, p_j\}_{DB} &= \delta_{ij}, \\
\{\pi_i, \pi_j\}_{DB} &= -\frac{M+2}{4}i\delta_{ij}, \\
\{\lambda_i, \lambda_j\}_{DB} &= \frac{M+2}{M}i\delta_{ij}, \\
\{\pi_i, \lambda_j\}_{DB} &= \frac{M+2}{2}\delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{7.1.16}$$

Há várias propostas de prosseguimento deste trabalho. Pode-se, por exemplo, considerar outros tipos de acoplamentos não-mínimos, tal como extensamente trabalhado no capítulo seis desta tese. Entretanto, acreditamos que a proposta mais interessante possa ser a análise de supersimetria-N=2 para tal acoplamento não-mínimo.

7.2 Propostas em discussão

Outra linha de trabalho que está em andamento diz respeito aos condensados de Bose-Einstein. Há duas vertentes de interesse. Uma, baseada no trabalho de Kavoulakis e colaboradores [65], em que se obtém soluções de vórtices através de um potencial de AC. Pretendemos observar se as mesmas soluções podem ser obtidas via acoplamento não-mínimo com quebra da simetria de Lorentz, interpretando que papel pode ter, na formação de vórtices em condensados, o vetor de fundo, além de outros possíveis efeitos. Outra questão interessante vem da aplicação da teoria de Chern-Simons a estes sistemas. Propomos analisar estes mesmos condensados à luz das teorias planares apresentadas nesta tese. Como ressaltado no capítulo três, há o aparecimento de um potencial atrativo elétron-elétron, o que pode gerar uma interessante fenomenologia para condensados fermiônicos, como muito se tem destacado na literatura recente.

Nosso horizonte de aplicação também se estende ao Efeito Hall. Como as equações de Maxwell são modificadas pela presença do termo de CFJ, há também modificações drásticas na força de Lorentz. Em estudo preliminar do problema de Landau, verificamos que as órbitas devem ser corrigidas não só nas energias; estas exibem também um arrastamento ao longo da trajetória de um elétron balístico. Portanto, há motivos bastante claros para acreditarmos que correções devido à presença de um vetor de fundo devam aparecer. Soma-se ainda o fato de que neste sistema o campo magnético externo é um campo de fundo, e quebra a simetria de rotação, subgrupo do grupo de simetria de Lorentz. A primeira proposta de trabalho neste ambiente de pesquisa é analisarmos o grupo das translações magnéticas.

Um ponto bastante promissor segue a linha dos trabalhos apresentados por Blum e colaboradores [61], onde se aponta experimentos nos quais indicativos da violação da simetria de Lorentz e CPT podem ser mensurados. Outra proposta de trabalho nesta linha, através da medida de fases quânticas, encontra-se em fase avançada de trabalho.

Bibliografia

- [1] A. Songaila and L. L. Cowie, *Nature* **398**, 667-668 (1999); P. C. W. Davies, T. M. Davies, and C. H. Lineweaver *Nature* **418**, 602-603 (2002); A. Songaila and L. L. Cowie, *Nature* **428**, 132-133 (2004).
- [2] P. A. M. Dirac *Directions In Physics*, John Wiley Sons, Inc., New York, 1978.
- [3] John D. Barrow, John K. Webb *Scientific American (Brasil)*, **38**, 28-35 (2005).
- [4] J. W. Moffat, *Int. J. Mod. Phys.* **D12**, 1279 (2003); O. Bertolami, hep-ph/0301191.
- [5] S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev.* **D 59**, 116008 (1999); V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001); *Phys. Rev.* **D 66**, 056005 (2002).
- [6] Gordon Kane, *Scientific American (Brasil)*, **39**, 100-107 (2005).
- [7] Lisa Randall *Science*, **296**, 1422-1427 (2002).
- [8] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev.* **D39**, 683 (1989); V. A. Kostelecky, *Scientific American (Brasil)* **29**, 72-81 (2004); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys.* **B359**, 545 (1991); *ibid*, *Phys. Lett.* **B381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev.* **D51**, 3923 (1995).
- [9] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* Addison-Wesley Publishing Company.

- [10] Humberto Belich Jr., Tese de Doutorado (CBPF, 2003)e ref. contidas.
- [11] H. Belich et al., Phys.Rev. **D 68** (2003) 065030; Nucl. Phys. **B.- Supp. 127**, 105-109, (2004).
- [12] Álvaro L. M. A. Nogueira, Tese de Doutorado (CBPF, 2003)e ref. contidas.
- [13] Wander Gomes Ney, Tese de Doutorado (CBPF, a ser defendida) e ref. contidas
- [14] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., and J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. **C 41**, 127 (2005).; H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., and J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. **C 41**, 421 (2005).; H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, hep-th/0407260. (Aceito para publicação em Int. J. Mod. Phys **A**); H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M. T. D. Orlando; Trabalho submetido ao Phys. Lett. **B**.
- [15] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anions Superconductivity* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [16] S. G. Bonghale Tese de Doutorado (JILA- University of Colorado, 2004)
- [17] R. Jackiw, Ann. Phys., **201**, 83 (1990)
- [18] Winder A. Moura-Melo, Tese de Doutorado (CBPF, 2001)
- [19] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. **D 41**, 4, 1231 (1990);
- [20] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayl-Neto, Eur. Phys. J. **C 38**, 511 (2005).; H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayl-Neto, M. T. D. Orlando, Phys. Rev. **D 67**,
- [21] Abreu, L. M., M. de Montigny, Journal of Physics A - Mathematical and General, **38**, 9877 (2005).

- [22] A. P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. **D** **67**, 085021 (2003).
- [23] Ya.I. Kogan, JETP Lett. **49**, 225 (1989); S. Randjbar-Daemi *et al.*, Nucl. Phys. **B** **340**, 403 (1990).
- [24] H. J. de Vega, Phys. Rev. **D** **18**, 2932 (1978), P. Hasenfratz, Phys. Lett. **B** **85**, 338 (1979); A. S. Schwartz and Y. S. Tyupkin, Phys. Lett. **B** **90**, 135 (1980).
- [25] S. K. Paul and A. Khare, Phys. Lett. **B** **174**, 420 (1986); Phys. Lett. **B** **182**, 414 (E) (1986); -*ibid*, Phys. Lett. **B** **191**, 389 (1986).
- [26] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. **56**, 2564 (1986); C. N. Khumar and A. Khare, Phys. Lett. **B** **178**, 395 (1986).
- [27] J. Hong, Y. Kim, and P. Y. Pac, Phys. Rev. Lett. **64**, 2230 (1990); R. Jackiw and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990).
- [28] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, Phys. Rev. **D** **68**, 025005 (2003).
- [29] H. Belich, M. M. Ferreira Jr and J. A. Helayel-Neto, hep-th/0401235 Eur. Phys. J. C **38** 511, (2005).
- [30] A. P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. **D** **67**, 085021 (2003).
- [31] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, Phys. Rev. **D** **68**, 025005 (2003).
- [32] E. O. Iltan, Mod. Phys. Lett. **A19**, 327 (2004); -*ibid*, Mod. Phys. Lett. **A19**, 2215 (2004).

- [33] B. Altschul, Phys. Rev. **D 70**, 056005 (2004).
- [34] M. M. Ferreira Jr, Phys. Rev. **D 70**, 045013 (2004); -ibid, Phys. Rev. **D 71**, 045003 (2005).
- [35] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B 61**, 45 (1973).
- [36] A.A. Abrikosov, Sov. JETP **5**, 1174 (1957).
- [37] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., and J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. **C 38**, 511 (2005).
- [38] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett., **53**, 319 (1984)
- [39] D. I. Khomskii and A. Freimuth, Phys. Rev. Lett. **75**, 1384-1386, (1995).
- [40] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., and J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. **C 41**, 421 (2005).
- [41] W. Greiner, *Quantum Mechanics. Special Chapters*, Springer-Verlag, Berlin, 1998; J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1967 ; L. Ryder Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996, Ed. 2 ; E. D. Commins, *Am. J. Phys.* **59** (1991),
- [42] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959)
- [43] M. E. Peskin and A. Tonomura; *The Aharonov - Bohm Effect* Springer International, Berlin, 1989
- [44] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Cambridge University Press.
- [45] W. Greiner *Quantum Mechanics: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1994, Ed. 3; *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, Ed. 2

- [46] M.V. Berry, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392**, **45** (1984);
- [47] A. S. Goldhaber, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 482 (1989).
- [48] M. Peshkin, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2017 (1992); M. Peshkin and H. J. Lipkin, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2847 (1995).
- [49] Lee, M and Choi, M. Y. *quant-ph/0310032*
- [50] X. G. He, B. H. J. McKellar, *Phys. Rev. A*, **47**, 3424 (1993); M. Wilkens *Phys. Rev Lett*, **72**, 5 (1994).
- [51] J. P. Dowling, C. P. Willians, J. D. Franson, *Phys. Rev Lett*, **83**, 2486 (1999)
- [52] B. de Witt, *Phys. Rev.* **125**, 2189 (1962);
- [53] B. Reznik and Y. Aharonov, *Phys. Rev. D* **40**, 4178 (1989).
- [54] Erik Sjöqvist, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 210401, (2002);
- [55] M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999).
- [56] L. H. Ryder and I. L. Shapiro, *Phys. Lett. A* **247**, 21 (1998); I.L. Shapiro, *Phys. Rep.* **357** (2001) 113; V.G. Bagrov, I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *Sov. J. Phys.* **35**, n.3 (1992) 5.
- [57] A. Kostelecky and C. Lane, *J. Math. Phys* **40** , 6245 (1999)
- [58] M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999).
- [59] A. Khare and J. Pramana, *J. Phys.* **49**, 41 (1997).
- [60] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayel-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 1721 1999 H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A.

- Helayel-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 147 (1999).
- [61] R. Blum, V. A. Kostelecký and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997); also the ref below discuss the implication of CPT- violation: R. Blum, V. A. Kostelecký and C. D. Lane, *Phys. Rev. D* **68** 125008 (2003); R. Blum, V. A. Kostelecký *Phys. Rev. Lett.* **84** 1381 (2000); R. Blum, V. A. Kostelecký and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **84** 1098 (2000) R. Bluhm, *Nucl. Instrum. Meth. B* **221** 6 (2004)
- [62] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer, Berlin, 1996.
- [63] Ricardo C. Paschoal, Tese de Doutorado (CBPF, 2004)
- [64] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M. T. D. Orlando; Trabalho submetido ao *Phys. Lett. B*.
- [65] L. G. Bossiakou. C.R. Bennet and M. Babiker, *Journal of Optics B* **4** (2), S25, (2002); J. M. Kailasvouori, T. H. Hansson and G. M. Kavoulakis, *Phys. Rev. A* **66**, 053603, (2002).