Tese de Mestrado

Quantização de Wigner do Campo de Klein-Gordon em (1+1) dimensões

Edward Samuel Quijada Orellana

Orientador: Francesco Toppan

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Agosto de 2011

Agradecimentos

- Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

- A meu orientador Francesco Toppan, pela paciência.

- Aos colegas do Jornal Club, pelas suas contribuições no curso desta pesquisa.

- A Ricardo Kullock, Bruno Gomez e Paulo Guilherme Castro pela ajuda na correção do Português.

- Aos amigos que fizeram minha estadia no Rio de Janeiro mais agradável. Em especial a: Luis Bernald, Enrique Arias e Max Jauregui.

Lista de Notações

1. $\bigoplus_k^n$: somatório direto de n termos, e.g. $\bigoplus_k^n A_k = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n$.
2. $osp(1|2)$: superálgebra ortosimplética com dois geradores fermiônicos (ver apêndice B).
3. $osp(1|2n)$: superálgebra ortosimplética com $2n$ geradores fermiônicos (ver apêndice C).
4. $[,]$: comutador.
5. $\{,\}$: anticomutador.
6. Z_2 : anel dos inteiros módulo dois.
7. Z : inteiros.
8. $2Z$: inteiros pares.
9. $\mathbb{Z}_0^+$: inteiros positivos incluindo o zero.
10. $[\![,]\!]$: supercomutador.
11. $\cong$: isomorfismo.
12. $\bar{0}, \bar{1}$: elementos do anel Z_2

Resumo

Neste trabalho fazemos a chamada Quatização de Wigner do campo de Klein-Gordon em 1+1 dimensões.

Neste cenário estudamos principalmente o uso de duas estruturas algébricas:

- A superálgebra de Lie $\bigoplus_k^n osp_k(1|2)$ (i.e. n cópias da simples superálgebra $osp(1|2)$, sendo n muito grande ou quando $n \to \infty$),
- A superálgebra de Lie $osp(1|2n)$ (sendo n muito grande ou $n \to \infty$).

Com a primeira estrutura, o espectro da Hamiltoniana é facilmente obtido, porém, com esta estrutura não temos uma teoria quântica relativista. A segunda estrutura algébrica é difícil de tratar, porém com ela sim temos uma teoria quântica relativista.

Abstract

In this work we do the Wigner Quantization of the Klein-Gordon field in 1+1 dimensions. In this scenario, we focus on the application of manly two algebraic structures:

- The Lie superalgebra $\bigoplus_k^n osp_k(1|2)$(i.e. n simple copies of the $osp(1|2)$ superalgebra, where n is very big or $n \to \infty$)

- The Lie superalgebra $osp(1|2n)$ (where n is very big or $n \to \infty$).

The former structure allows us to obtain easily the spectrum of the Hamiltonian. However, with this structure, we do not have a relativistic quantum field theory. The latter turns out to be difficult to treat, in terms of finding basis vectors and representations of this superalgebra so as to find the spectrum of the Hamiltonian. However, with this structure, we do have a relativistic quantum field theory.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Em 1950 Wigner [1] perguntou-se se as relações de Heisenberg-Born-Jordan $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ poderiam ser obtidas partindo das equações de Hamilton e das equações de Heisenberg, sendo estas últimas mais fundamentais do que as relações canônicas de comutação. Wigner demonstrou que em geral isto não é possível. Deste modo teve origem a chamada quantização de Wigner, a qual consiste precisamente em postular estas relações mais fundamentais, i.e as equações do movimento (equações de Hamilton) e as relações de comutação de Heisenberg, como ponto de partida para a quantização de um sistema físico. Este procedimento de quantização foi ganhando interesse pelos físicos e matemáticos através dos anos [2, 3, 4]. Por outro lado, ao fazer-se uma quantização não-canônica de campos [5], foi introduzida a paraestatística. Ela é uma estatística que generaliza a estatística de bósons e férmions, resultado das relações de comutação mais gerais que são utilizadas no lugar das relações canônicas. Em seguida foram utilizadas as superálgebras de Lie [6, 7] para fazer uma interpretação à paraestatística [8] e mais tarde para resolver as equações de compatibilidade entre as equações de Hamilton e as equações de Heisenberg

[9, 10, 11], segundo o procedimento de quantização de Wigner (em especial um estudo sobre as múltiplas soluções superalgebraicas às equações de compatibilidade para um sistema de muitos osciladores livres é apresentado em [12]).

Até agora, dentro do cenário da quantização não-canônica de Wigner, foram estudados muitos sistemas quânticos não-relativistas [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Neles foram usadas distintas superálgebras para resolver as equações de compatibilidade. Porém ninguém fez propriamente um estudo de um sistema quântico relativista, embora em [5] se tratam sistemas relativistas, ali não são analisadas as simetrias de Lorentz que uma teoria quântica relativista deve cumprir , nem se estuda se a álgebra de Poincaré ainda se satisfaz para as cargas de Noether. É importante saber se por meio da quantização de Wigner e o uso das superálgebras, ainda conseguimos obter uma teoria quântica relativista [18, 19]. Isto é o objetivo deste trabalho, e para isso propomos estudar o sistema físico relativista mais simples como é o campo de Klein-Gordon em $D = 1 + 1$.

No capítulo **2** apresentamos uma revisão da quantização de Wigner para um oscilador unidimensional e a superálgebra $osp(1|2)$ como solução da equação de compatibilidade, juntamente com a solução deste sistema quântico em termos de representação de peso mínimo desta superálgebra. No capítulo **3** aplicamos o procedimento de quantização não-canônica de Wigner ao campo escalar de Klein-Gordon em D=1+1 dimensões. Ali analisamos os resultados de resolver as equações de compatibilidade com: primeiro a superálgebra de Lie $\bigoplus_r^\infty osp_r(1|2)$, a qual é a soma direta de muitas copias da superálgebra $osp(1|2)$, e em segundo lugar trabalhamos com a superálgebra $osp(1|2n)$, a qual é muito utilizada na literatura [9, 10, 15, 20]. No capítulo **4** apresentamos uma análise das Cargas de Noether, as quais são construídas dentro do âmbito de cada uma das superálgebras em estudo ($\bigoplus_r^\infty osp_r(1|2)$, $\lim_{n\to\infty} osp(1|2n)$). Finalmente testamos para cada caso, se estas cargas de Noether são efetivamente operadores que geram as transformações de uma teoria quântica relativista (como só trabalhamos em $D = 1 + 1$, somente teremos dois traslações e um boost).

Capítulo 2

Quantização de Wigner: Oscilador unidimensional e a superálgebra $osp(1|2)$

Nesta parte do trabalho revisamos a quantização de Wigner para um oscilador, também conhecido na literatura de oscilador de Wigner [10, 11, 21]. O propósito aqui é nos familiarizar com o procedimento de quantização não-canônica de Wigner, para em seguida aplicá-lo a nosso objetivo central, que é estudar o sistema relativista do campo de Klein-Gordon. As já mencionadas equações de compatibilidade entre as equações de Hamilton e as equações de Heisenberg incluem relações não-lineares, envolvendo (anti)comutadores dos operadores de momento e posição, os quais podem ser resolvidos em termos de superálgebras.

Seja a Hamiltoniana para um oscilador unidimensional de frequência ω

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} \tag{2.1}$$

temos logo que as equações de Hamilton e Heisenberg estão dadas respectivamente por:

$$\dot{x} = p \tag{2.2}$$

$$\dot{p} = -\omega^2 x \tag{2.3}$$

$$\dot{x} = i[H, x] \tag{2.4}$$

$$\dot{p} = i[H, p]. \tag{2.5}$$

Estas equações são o ponto de partida para resolver o sistema, i.e. achar uma base de vetores [16, 22] para os operadores deste sistema e assim (depois de diagonalizar) encontrar o espectro de energia do operador H. As equações de compatibilidade resultam de eliminar $\dot{x}$ e $\dot{p}$ das equações (2.2),(2.3),(2.4) e (2.5).

$$i[H, x] = p \tag{2.6}$$

$$i[H, p] = -\omega^2 x \tag{2.7}$$

Após de fazer a mudança $a^{\pm} = \dfrac{p \pm i\omega x}{\sqrt{2}}$ as expressões (2.1),(2.6) e (2.7) ficam:

$$\left\{a^+, a^-\right\} = 2H \tag{2.8}$$

$$[H, a^{\pm}] = \pm\omega a^{\pm}, \tag{2.9}$$

desta forma se definimos

$$\{a^{\pm}, a^{\pm}\} = E^{\pm}, \tag{2.10}$$

recuperaremos o conjunto de geradores $a^{\pm}$,H, $E^{\pm}$ de $osp(1|2)$ (ver apêndice B).

A seguir listamos todas as relações não nulas de (anti)comutação de $osp(1|2)$. Elas foram obtidas a partir de (2.8), (2.9) e (2.10) usando a identidade graduada de Jacobi do apêndice A .

$$[H, a^{\pm}] = \pm\omega a^{\pm} \tag{2.11}$$

$$\left\{a^{+}, a^{-}\right\} = 2H \tag{2.12}$$

$$\left\{a^{\pm}, a^{\pm}\right\} = E^{\pm} \tag{2.13}$$

$$\left[H, E^{\pm}\right] = \pm 2\omega E^{\pm} \tag{2.14}$$

$$\left[a^{\pm}, E^{\mp}\right] = \mp 4\omega a^{\mp} \tag{2.15}$$

$$\left[E^{+}, E^{-}\right] = -16\omega H \tag{2.16}$$

O espaço de Hilbert para osp(1|2), com vetor de vácuo $|0>$ [1] definido por meio de (ver [22]):

$$< 0|0 >= 1, \quad a^{-}|0 >= 0, \quad (a^{\pm})^{\dagger} = a^{\mp}$$

$$H|0 >= \frac{p\omega}{2}|0 >, \tag{2.17}$$

é gerado pelos vetores de base obtidos por meio de (2.11) e (2.14):

$$H(a^{+})^{2k+1}|0 >= \omega\left(\frac{p}{2} + 2k + 1\right)(a^{+})^{2k+1}|0 > \tag{2.18}$$

$$H(E^{+})^{k}|0 >= \omega\left(\frac{p}{2} + 2k\right)(E^{+})^{k}|0 >, \tag{2.19}$$

[1]Este vetor vai depender de p, segundo (2.17). Porém fazemos $|0>_p \equiv |0>$.

como resultado os vetores de autoestado normalizados são (ver [22]):

$$|2k+1>=\frac{(a^+)^{2k+1}}{2^k\omega^{k+1/2}\sqrt{k!2(p/2)_{k+1}}}|0> \tag{2.20}$$

$$|2k>=\frac{(E^+)^k}{2^{2k}\omega^k\sqrt{k!(p/2)_k}}|0>, \tag{2.21}$$

sendo $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$

O espaço de Hilbert se divide como a soma direta de duas representações de $sp(2) \cong sl(2)$: uma com vetor de peso mínimo $|1>$ (peso mínimo $1+p/2$) e vetores de base $|2k+1>$, e outra com vetor de peso mínimo $|0>$ (peso mínimo $p/2$) e vetores de base $|2k>$.

Observamos que o espectro de H é:

- $(\frac{p}{2}+1+2k)\omega$ para estados fermiônicos $|2k+1>$ e
- $(\frac{p}{2}+2k)\omega$ para estados bosônicos $|2k>$

Um jeito de recuperar a quantização canônica usual (ver [21]) é fazer $H' = \frac{H}{2\omega}$, tomar o valor $p=2$ e fazer uma projeção ao setor bosônico $|2k>$, com o qual o espectro para H' é $k+\frac{1}{2}$, onde $k \,\epsilon\, \mathbb{Z}_0^+$.

Outro jeito de recuperar a quantização canônica usual (ver [15, 16, 22]) é tomar o valor $p=1$. Neste caso, recuperamos as relações canônicas $[a^-, a^+] = 1$, porém o caráter fermiônico dos operadores $a^\pm$ desaparece.

Capítulo 3

Quantização de Wigner: Campo escalar de Klein-Gordon em D=(1+1)

A Lagrangiana (em unidades naturais $\hbar = c = 1$) para o campo escalar de Klein-Gordon de massa m em 1+1 dimensões é dado por:

$$L = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\phi'^2}{2} - \frac{m^2\phi^2}{2}, \tag{3.1}$$

onde $\phi = \phi(x,t)$, $\quad \dot{\phi} = \partial_t\phi(x,t) \quad$ e $\quad \phi' = \partial_x\phi(x,t)$.

O momento conjugado do campo é $\pi = \dot{\phi}$. Desta forma a Hamiltoniana pode ser escrita como:

$$H = \int dx \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + \frac{m^2\phi^2}{2} \right). \tag{3.2}$$

A seguir utilizamos o procedimento da Quantização de Wigner, então postulamos as seguintes equações para os campos quânticos π e ϕ :

$$i[H, \phi] = \dot{\phi} \tag{3.3}$$

$$i[H, \pi] = \dot{\pi} \tag{3.4}$$

$$\pi = \dot{\phi} \tag{3.5}$$

$$(\partial_x^2 - m^2)\phi = \dot{\pi}, \tag{3.6}$$

As equações (3.3) e (3.4) são as equações de Heisenberg, enquanto (3.5) e (3.6) são as equações de Hamilton.
Das equações (3.5) e (3.6) temos para ϕ:

$$\ddot{\phi} = (\partial_x^2 - m^2)\phi, \tag{3.7}$$

a qual é a equação de Klein-Gordon. Logo a solução dessa equação pode ser escrita como uma superposição de soluções de onda plana:

$$\phi = \int dp(u_p a_p^- + u_p^* a_p^+). \tag{3.8}$$

A expressão (3.8) é real (Hermitiana) e as funções $u = u(x,t)$ são definidas por:

$$u_p = N_p e^{i(px - \omega_p t)},$$

onde $\omega_p = (p^2 + m^2)^{1/2}$.

As funções $u_p(x)$ satisfazem as seguintes importantes propriedades:

$$\int dx u_p u_{p'} = N_p^2 \delta(p+p') e^{-2\omega_p t} \tag{3.9}$$

$$\int dx u_p u_{p'}^* = N_p^2 \delta(p-p'), \tag{3.10}$$

onde N_p é o fator de normalização, que será imposto em termos de ω_p. Após ter substituído (3.8) dentro da Hamiltoniana (3.2), ela fica :

$$H = \frac{1}{2}\int dp dp' (\frac{1}{2}(-\omega_p\omega_p' - pp' + m^2)\{a_p^-, a_{p'}^-\}\int dx u_p u_{p'}$$

$$+\frac{1}{2}(-\omega_p\omega_p' - pp' + m^2)\{a_p^+, a_{p'}^+\}\int dx u_p^* u_{p'}^* +$$

$$(\omega_p\omega_p' + pp' + m^2)\{a_p^-, a_{p'}^+\}\int dx u_p u_{p'}^*). \tag{3.11}$$

Usando (3.9) e (3.10) reduzimos a expressão (3.11).

$$H = \frac{1}{2}\int dp (\frac{1}{2}(-\omega_p^2 + p^2 + m^2)\{a_p^-, a_{-p}^-\} N_p^2 e^{-2\omega_p t}$$

$$+\frac{1}{2}(-\omega_p^2 + p^2 + m^2)\{a_p^+, a_{-p}^+\} N_p^2 e^{+2\omega_p t} +$$

$$(\omega_p^2 + p^2 + m^2)\{a_p^-, a_p^+\} N_p^2),$$

e como $\omega_p^2 = p^2 + m^2$, finalmente obtemos:

$$H = \int dp \omega_p^2 N_p^2 \{a_p^-, a_p^+\}. \tag{3.12}$$

Até agora somente utilizamos as equações (3.5) e (3.6), precisamos também satisfazer as equações (3.3) e (3.4). Como a equação (3.4) é a derivação temporal da equação (3.3) só precisamos fazer que seja satisfeita a equação (3.3). Então substituímos (3.12) em (3.3):

$$i\left[\int dp\omega_p^2 N_p^2\{a_p^-, a_p^+\}, \int dp'(u_{p'}a_{p'}^- + u_{p'}^* a_{p'}^+)\right] =$$

$$\int dp'(-i\omega_{p'})(u_{p'}a_{p'}^- - u_{p'}^* a_{p'}^+), \tag{3.13}$$

consequentemente as equações de compatibilidade são:

$$\left[i\int dp\omega_p^2 N_p^2\{a_p^-, a_p^+\}, a_{p'}^-\right] = -i\omega_{p'}a_{p'}^- \tag{3.14}$$

$$\left[i\int dp\omega_p^2 N_p^2\{a_p^-, a_p^+\}, a_{p'}^+\right] = +i\omega_{p'}a_{p'}^+. \tag{3.15}$$

Neste caso as equações de compatibilidade (3.14) e (3.15) têm a forma de integração sobre relações triplas de funções contínuas $a_p^\pm = a^\pm(p)$, mas se nós tivéssemos partido de uma expressão discreta em (3.8) teríamos obtido uma expressão de tipo somatório sobre relações triplas de elementos discretos $a_i^\pm$.

Para "resolver" estas equações de compatibilidade faremos uso neste trabalho das seguintes estruturas algébricas: a álgebra de Heisenberg, a qual pertence ao âmbito da quantização canônica usual, a superálgebra $\bigoplus_k^\infty osp(1|2)$ e a superálgebra $\lim_{n\to\infty} osp(1|2n)$, as quais pertencem ao âmbito não-canônico de quantização.

3.1 Solução álgebra de Heisenberg

Esta é a álgebra usada para a quantização canônica usual.

A versão "contínua" da álgebra de Heisenberg é :

$$[a_p^-, a_{p'}^-] = [a_p^+, a_{p'}^+] = 0 \tag{3.16}$$

$$[a_p^-, a_{p'}^+] = \delta(p - p'), \tag{3.17}$$

substituindo (3.16) e (3.17) na primeira equação de compatibilidade (3.14) temos:

$$i \int dp N_p^2 \omega_p^2 (a_p^- [a_p^+, a_{p'}^-] + [a_p^+, a_{p'}^-] a_p^-) = -i\omega_{p'} a_{p'}^-, \tag{3.18}$$

logo N_p deve tomar o valor:

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}. \tag{3.19}$$

Este valor achado para N_p (3.19) concorda com a segunda equação de compatibilidade (3.15).

Para obter o espectro da Hamiltoniana H, iremos utilizar a versão discreta da álgebra de Heisenberg. Então dividimos o espaço p em células de volume ΔV_{p_i}, e fazemos a substituição (no limite $\Delta V_{p_i} \to 0$), ver [18]:

$$a_p \to \frac{a_{p_i}}{\sqrt{\Delta V_{p_i}}}, \qquad \int dp \to \sum_i \Delta V_{p_i} \quad \text{e} \quad \delta(p - p') \to \frac{\delta_{ij}}{\Delta V_{p_i}}. \tag{3.20}$$

Como resultado as seguintes relações são obtidas ($a_{p_i} = a_i$):

$$[a_i^-, a_j^+] = \delta_{ij} \qquad \text{e} \qquad H = \sum_i^{\infty} \frac{\omega_i}{2} \{a_i^-, a_i^+\}. \tag{3.21}$$

Com o uso da álgebra de Heisenberg o operador H pode ser escrito como:

$$H = \sum_i^{\infty} \omega_i \left(a_i^+ a_i^- + \frac{1}{2} \right). \tag{3.22}$$

O espaço de Fock é definido como um espaço de Hilbert com um vetor do vácuo $|0>$, tal que :

$$< 0|0 >= 1, \qquad a_i^-|0 >= 0, \qquad (a_i^\pm)^\dagger = a_i^\mp, \tag{3.23}$$

logo o conjunto de vetores de autoestado será:

$$|k_1, ..., k_N >= \frac{(a_1^+)^{k_1}...(a_N^+)^{k_N}}{\sqrt{k_1!...k_N!}}|0 >, \tag{3.24}$$

com o qual o espectro da Hamiltoniana H é :

$$\sum_i^N \omega_i \left(k_i + \frac{1}{2}\right) \tag{3.25}$$

Interpretamos o valor de N como o número de partículas criadas com energias $\omega_i \left(k_i + \frac{1}{2}\right)$, com $i = 1, ...N$.

3.2 Solução $\oplus_k^\infty osp_k(1|2)$

Este caso consiste em tomar a soma direta de muitas cópias de $osp(1|2)$ para "resolver" as equações de compatibilidade (3.14) e (3.15). Veremos a seguir como é a soma direta de duas álgebras $osp(1|2)$. Sejam os conjuntos de geradores $\{H_i, a_i^-, a_i^+, E_i^-, E_i^+\} \in osp(1|2)$ e $\{H_j, a_j^-, a_j^+, E_j^-, E_j^+\} \in osp(1|2)$, realizando a soma direta $osp(1|2) \oplus osp(1|2)$ teremos:

$$[a_i^-, a_j^-] = 0, \quad [a_i^+, a_j^+] = 0, \quad [a_i^+, a_j^-] = 0, \tag{3.26}$$

quando $i \neq j$. Se fizermos a mudança $\tilde{a}_i^- = \gamma_i \otimes a_i^-$,

onde $\{\gamma_i, \gamma_j\} = \delta_{ij}$ e sendo $(a^{\pm})^{\dagger} = a^{\mp}$, obteremos o seguinte anticomutador :

$$\{\tilde{a}_i^-, \tilde{a}_j^-\} = (\gamma_i \otimes a_i^-)(\gamma_j \otimes a_j^-) + (\gamma_j \otimes a_j^-)(\gamma_i \otimes a_i^-)$$

$$= \gamma_i\gamma_j \otimes a_i^- a_j^- + \gamma_j\gamma_i \otimes a_j^- a_i^-$$

$$= \gamma_i\gamma_j \otimes [a_i^-, a_j^-] = 0$$

$$\{\tilde{a}_i^-, \tilde{a}_j^-\} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j. \tag{3.27}$$

Da mesma forma obtemos:

$$\{\tilde{a}_i^+, \tilde{a}_j^+\} = \{\tilde{a}_i^+, \tilde{a}_j^-\} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j. \tag{3.28}$$

Porém, quando $i = j$ os anticomutadores resultam:

$$\{\tilde{a}_i^+, \tilde{a}_i^+\} = E_i^+, \quad \{\tilde{a}_i^-, \tilde{a}_i^-\} = E_i^-, \quad \{\tilde{a}_i^+, \tilde{a}_i^-\} = 2H_i. \tag{3.29}$$

Como consequência quando se faz a soma direta de muitas cópias de $osp(1|2)$, as relações de (anti)comutação serão[1]:

$$[H_i, a_j^{\pm}] = \pm\omega_i a_i^{\pm}\delta_{ij} \tag{3.30}$$

$$\{a_i^+, a_j^-\} = 2H_i\delta_{ij} \tag{3.31}$$

$$\{a_i^{\pm}, a_j^{\pm}\} = E_i^{\pm}\delta_{ij}. \tag{3.32}$$

[1] foram omitidas as tildes

O resto das relações é obtida com ajuda da identidade graduada de Jacobi (5.3):

$$[H_i, E_j^{\pm}] = \pm 2\omega_i E_i^{\pm} \delta_{ij} \tag{3.33}$$

$$[a_i^{\pm}, E_j^{\mp}] = \mp 4\omega_i a_i^{\mp} \delta_{ij} \tag{3.34}$$

$$[E_i^{+}, E_j^{-}] = -16\omega_i H_i \delta_{ij}. \tag{3.35}$$

A versão contínua desta álgebra será escrita após de fazer a seguinte substituição (no limite $\Delta V_{p_i} \to 0$):

$$a_i \to \sqrt{2\Delta V_{p_i}} a_p, \quad E_i \to 2E_p, \quad \omega_i \to \frac{\omega_p}{\Delta V_{p_i}}$$

$$\text{e} \quad \delta_{ij} \to \delta(p - p')\Delta V_{p_i}. \tag{3.36}$$

Como resultado temos:

$$[H_p, a_{p'}^{\pm}] = \pm \omega_p a_p^{\pm} \delta(p - p') \tag{3.37}$$

$$\{a_p^{+}, a_{p'}^{-}\} = H_p \delta(p - p') \tag{3.38}$$

$$\{a_p^{\pm}, a_{p'}^{\pm}\} = E_p^{\pm} \delta(p - p') \tag{3.39}$$

$$[H_p, E_{p'}^{\pm}] = \pm 2\omega_p E_p^{\pm} \delta(p - p') \tag{3.40}$$

$$[a_p^{\pm}, E_{p'}^{\mp}] = \mp 2\omega_p a_p^{\mp} \delta(p - p') \tag{3.41}$$

$$[E_p^{+}, E_{p'}^{-}] = -4\omega_p H_p \delta(p - p'). \tag{3.42}$$

De (3.12) e (3.38), a expressão do Hamiltoniano para este caso é:

$$H = \int dp \omega_p^2 N_p^2 \delta(0) H_p, \tag{3.43}$$

usando (3.37) e (3.38) resolvemos as equações de compatibilidade (3.14) e (3.15), com o qual o valor do N_p é:

$$N_p = \frac{1}{\omega_p \sqrt{\delta(0)}}. \tag{3.44}$$

Esta é só uma expressão formal que nos permite tirar $\delta(0)$ do (3.43), como consequência (3.43) resultará:

$$H = \int dp H_p. \tag{3.45}$$

Em seguida vamos tentar obter uma base para o espaço de Fock que diagonalize a Hamiltoniana H, para este propósito achamos primeiramente a forma discreta de H.
Com ajuda das relações (3.36), a forma discreta de (3.12) seria:

$$H = \sum_i^{\infty} \Delta V_{pi}^2 \omega_i^2 N_{p_i}^2 H_i \tag{3.46}$$

igualmente a forma discreta de (3.8) seria:

$$\phi = \sum_i^{\infty} \frac{\Delta V_{p_i}}{(2\Delta V_{p_i})^{1/2}} (a_i^- u_{p_i} + a_i^+ u_{p_i}^*) \tag{3.47}$$

substituímos (3.46) e (3.47) em (3.3) e obtemos:

$$N_{p_i} = \frac{1}{\omega_i \Delta V_{p_i}}, \tag{3.48}$$

finalmente substituímos (3.48) em (3.46) :

$$H = \sum_{i}^{\infty} H_i \tag{3.49}$$

A expressão (3.49) junto com as expressões para a superálgebra (3.30) até (3.35) serão usadas para tentar descrever o espaço de Fock.
O espaço de Fock é definido como um espaço de Hilbert com vetor de vácuo $|0>$[2] tal que:

$$<0|0>= 1, \quad a_i^-|0>= 0, \quad H_i|0>= \frac{p_i\omega_i}{2}|0>, \quad (a_i^\pm)^\dagger = a_i^\mp. \tag{3.50}$$

De (3.50)

$$H|0>= \sum_{i}^{\infty} \frac{\omega_i p_i}{2}|0> . \tag{3.51}$$

De (3.49) e (3.30)

$$[H, a_i^+] = \omega_i a_i^+. \tag{3.52}$$

De (3.51) e (3.52)

$$H(a_1^+)^{k_1}...(a_N^+)^{k_N}|0>= \left[\sum_{i}^{N}(k_i + p_i/2)\omega_i\right](a_1^+)^{k_1}...(a_N^+)^{k_N}|0> . \tag{3.53}$$

Os vetores de base $|k_1...k_N>$ são iguais a $(a_1^+)^{k_1}...(a_N^+)^{k_N}|0>$ multiplicados por algum fator de normalização.
De (3.32) $(a_i^+)^{2k_i} \sim (E_i^+)^{k_i}$, então os vetores de base são da forma:

$$|2k_1 + 1, ..., 2k_M + 1, 2k_{M+1}, ..., 2k_N>$$

$$\sim (a_1^+)^{2k_1+1}...(a_M^+)^{2k_M+1}(E_{M+1}^+)^{k_{M+1}}...(E_N^+)^{k_N}|0> .$$

[2] Este vetor vai depender dos p_i , segundo (3.50). Porém fazemos $|0>_{p_1,p_2,...} \equiv |0>$.

Isto é; M estados obtidos aplicando ao vácuo M operadores de tipo fermiônico (os $a_i^{2k_i+1}$) e $N-M$ operadores de tipo bosônico (os $E_i^{k_i}$) , sendo o autovalor de energia:

$$\sum_{i}^{M} 2\omega_i(k_i+\frac{1}{2}+\frac{p_i}{4})+\sum_{M+1}^{N} 2\omega_i(k_i+\frac{p_i}{4}). \tag{3.54}$$

Para recuperar a quantização usual podemos fazer $H'=\frac{H}{2}$, tomar todos os $p_i=2$ e pegar somente os kets com entradas pares $|2k_1, 2k_2, ... >$, assim temos que o espectro de H' será:

$$\sum_{i}^{N} \omega_i \left(\frac{1}{2}+k_i\right), \tag{3.55}$$

onde $k_i \,\epsilon\, \mathbb{Z}_0^+$.

Outra forma de recuperar o caso usual é fazer todos os $p_i=1$, com o qual recuperamos $[a_i^-, a_j^+]=\delta_{ij}$, mas se perde o caráter fermiônico dos operadores $a_i^{\pm}$.

3.3 Solução $\lim_{n\to\infty} osp(1|2n)$

Neste caso a superálgebra é dada pelo seguinte conjunto de relações triplas(ver apêndice C) :

$$[\{a_i^{\xi}, a_j^{\eta}\}, a_k^{\epsilon}]=(\epsilon-\xi)\delta_{ik}a_j^{\eta}+(\epsilon-\eta)\delta_{jk}a_i^{\xi}, \tag{3.56}$$

onde ξ, ϵ e η podem tomar valores de $+1$ e -1 correspondentes aos superíndices $+$ e $-$ respetivamente [8, 9, 22].

Usando as mesmas relações (3.20) da seção (3.1), obtemos a versão contínua desta álgebra:

$$[\{a_p^\xi, a_q^\eta\}, a_r^\epsilon] = (\epsilon - \xi)\delta(p-r)a_q^\eta + (\epsilon - \eta)\delta(q-r)a_p^\xi. \tag{3.57}$$

Das relações de consistência (3.14) e (3.15), obtemos o fator de normalização:

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}. \tag{3.58}$$

Substituímos (3.58) em (3.12) para obter:

$$H = \int dp \frac{\omega_p}{2}\{a_p^-, a_p^+\}. \tag{3.59}$$

Passando à forma discreta, H resulta em:

$$H = \sum_i^\infty \frac{\omega_i}{2}\{a_i^-, a_i^+\}. \tag{3.60}$$

Queremos conhecer o espaço de Fock da superálgebra de Lie $osp(1|2n)$, porém, é muito difícil de obtê-la. O problema de construir o espaço de Fock e representações unitárias irredutíveis da superálgebra de Lie $osp(1|2n)$ é resolvido em [22]. Nesse trabalho o espaço de Fock é um espaço de Hilbert com um vetor de vácuo $|0>$ [3], definido por meio de:

$$< 0|0 >= 1, \qquad a_i^-|0>= 0, \qquad (a_i^\pm)^\dagger = a_i^\mp$$

$$\{a_i^-, a_j^+\}|0>= p\delta_{ij}|0>, \tag{3.61}$$

este espaço está definido por irredutibilidade pela ação da álgebra gerada pelos elementos a_i^+ e a_i^- $(i = 1, ...n)$, sujeitos às relações triplas (3.56).

[3] O vetor de vácuo depende de p, segundo (3.61). Porém aqui fazemos $|0>_p \equiv |0>$.

Em resumo, temos que o autovalor para $h_k = \frac{1}{2}\{a_k^-, a_k^+\}$ na base de autoestados $|m)$, está dado pelo resultado:

$$h_k|m) = \left(\frac{p}{2} + \sum_{j=1}^{k} m_{jk} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{jk-1}\right)|m), \tag{3.62}$$

onde $|m)$ é um vetor da base Gelfand-Zetlin (GZ) (ver também [23]) , definido pelo padrão:

$$\left|\begin{array}{ccccc} m_{1n} & \dots & \dots & m_{n-1n} & m_{nn} \\ m_{1n-1} & \dots & \dots & m_{n-1n-1} & \\ \vdots & \iddots & & & \\ m_{11} & & & & \end{array}\right),$$

onde os $m_{ij} \, \epsilon \, \mathbb{Z}_0^+$ satisfazem as *relações de medianidade*:

$$m_{ij+1} \geqslant m_{ij} \geqslant m_{i+1j+1}, \tag{3.63}$$

aqui o vácuo $|0>$ corresponde a $|0)$. Como consequência o espectro para (3.60) é:

$$\sum_{k}^{\infty} \omega_k \left(\frac{p}{2} + \sum_{j=1}^{k} m_{jk} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{jk-1}\right). \tag{3.64}$$

Recuperamos o caso da quantização canônica usual para $p = 1$, com o qual temos $[a_i^-, a_j^+] = \delta_{ij}$, e fazendo a correspondencia:

$$n_k = \sum_{j=1}^{k} m_{jk} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{jk-1},$$

onde $n_k \epsilon \mathbb{Z}_0^+$ (ver [15, 22]).

Capítulo 4

Quantização de Wigner, Transformações de Simetria e álgebra de Poincaré

Neste capítulo estudamos se a Quantização de Wigner, junto com a aplicação das superálgebras $\bigoplus_k^\infty osp(1|2)$ e $\lim_{n\to\infty} osp(1|2n)$, conduz à invariância de Lorentz da teoria quântica, por meio das cargas de Noether como geradores destas transformações. Primeiro devemos calcular as cargas de Noether para o campo de Klein-Gordon em $(1+1)$ dimensões.

4.1 Cargas de Noether

Como estamos trabalhando em $D = 1+1$, temos somente três cargas de Noether:

$$P_0 = \int dx \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + \frac{m^2\phi^2}{2} \right) \tag{4.1}$$

$$P_1 = \int dx \left(\frac{\pi\phi'}{2} + \frac{\phi'\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}\int dx \{\pi, \phi'\} \tag{4.2}$$

$$M_{01} = \int dx \left(\frac{t}{2}\{\pi, \phi'\} + x \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + \frac{m^2\phi^2}{2} \right) \right). \tag{4.3}$$

Note que as cargas foram simetrizadas, isto é necessário para ter operadores Hermitianos. Tomemos as derivadas das cargas :

$$\dot{P}_0 = \int dx \left(\frac{\{\pi, \dot{\pi}\}}{2} + \frac{\{\phi', \dot{\phi}'\}}{2} + \frac{m^2\{\dot{\phi}, \phi\}}{2} \right), \tag{4.4}$$

logo, de acordo com (3.5), (3.6) temos para (4.4):

$$\dot{P}_0 = \int dx \left(\frac{\{\pi, \phi''\}}{2} - \frac{m^2\{\pi, \phi\}}{2} + \frac{\{\phi', \pi'\}}{2} + \frac{m^2\{\pi, \phi\}}{2} \right) = \int dx \left(\frac{d}{2dx}\{\pi, \phi'\} \right) = 0.$$

Analogamente para P_1 :

$$\dot{P}_1 = \int dx \left(\frac{\{\dot{\pi}, \phi'\}}{2} + \frac{\{\pi, \dot{\phi}'\}}{2} \right) = \int dx \left(\frac{\{\phi'', \phi'\}}{2} - \frac{m^2\{\phi, \phi'\}}{2} + \frac{\{\pi, \pi'\}}{2} \right)$$

$$= \int dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi'^2}{2} - \frac{m^2\phi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right) = 0.$$

De (4.2) e (4.3), reduzimos a expressão para M_{01}

$$M_{01} = P_1 t + \int dxx \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + \frac{m^2\phi^2}{2} \right). \tag{4.5}$$

Embora M_{01} tenha uma dependência explícita da coordenada temporal t, ela será independente do tempo sempre que a integração da direita for não nula, como mostramos em seguida:

$$\dot{M}_{01} = P_1 + \int dxx \left(\frac{\{\dot{\pi}, \pi\}}{2} + \frac{\{\phi', \dot{\phi}'\}}{2} + \frac{m^2\{\phi, \dot{\phi}\}}{2} \right),$$

onde foi levado em conta que $\dot{P}_1 = 0$, assim :

$$\dot{M}_{01} = P_1 + \int dxx \left(\frac{\{\phi'', \pi\}}{2} - \frac{m^2\{\phi, \pi\}}{2} + \frac{\{\phi', \pi'\}}{2} + \frac{m^2\{\phi, \pi\}}{2} \right),$$

$$\dot{M}_{01} = P_1 + \int dxx \frac{d}{2dx}\{\pi, \phi'\} = P_1 - \frac{1}{2}\int dx\{\pi, \phi'\} = P_1 - P_1 = 0.$$

Nós acabamos de verificar que P_0, P_1 e M_{01} não dependem do tempo, usando somente as equações de Hamilton (3.5), (3.6). É importante levar em conta que o resultado $\dot{M}_{01} = 0$ está sujeito à condição de que em (4.5), a parte que tem uma integração na expressão para M_{01} seja não nula.

4.2 Transformações de Simetrias

Agora vamos verificar se as cargas de Noether satisfazem as relações de comutação que são necessárias para que a teoria quântica seja covariante por uma operação de traslação temporal gerada pelo P_0, uma traslação espacial gerada pelo P_1 e por um boost gerado pelo M_{01}. Assim, é conveniente escrever as cargas de Noether em termos dos operadores de criação e aniquilação a_p^+ e a_p^-. Sendo $P_0 = H$, então de (3.12):

$$P_0 = \int dp\omega_p^2 N_p^2 \{a_p^+, a_p^-\}. \tag{4.6}$$

De (4.2) e (3.8), temos para P_1:

$$P_1 = \int dx \frac{1}{2}\{\pi, \phi'\} = \frac{1}{2}\int dpdp'\omega_p p'(\{a_p^-, a_{p'}^-\}(\int dx u_p u_{p'}) + \{a_p^+, a_{p'}^+\}(\int dx u_p^* u_{p'}^*)$$

$$-\{a_p^+, a_{p'}^-\}(\int dx u_p^* u_{p'}) - \{a_p^-, a_{p'}^+\}(\int dx u_p u_{p'}^*)), \qquad (4.7)$$

usando (3.9) e (3.10) em (4.7) :

$$P_1 = -\frac{1}{2}\int dp\omega_p p \left(\{a_p^-, a_{-p}^-\}N_p^2 e^{-2\omega_p t} + \{a_p^+, a_{-p}^+\}N_p^2 e^{2\omega_p t}\right)$$

$$-\int dp\omega_p p\{a_p^+, a_p^-\}N_p^2, \qquad (4.8)$$

a primeira integração que depende do tempo t em (4.8) é uma integração sobre uma função ímpar na variável p, então ele vai anular-se, então P_1 resulta:

$$P_1 = -\int dp\omega_p N_p^2 p\{a_p^+, a_p^-\}. \qquad (4.9)$$

Tentemos calcular M_{01} de (4.3) e (3.8) :

$$M_{01} = tP_1 + \int dxx(\frac{1}{4}\int dpdp'(-\omega_p\omega_{p'} - pp' + m^2)\left[\{a_p^-, a_{p'}^-\}u_p u_{p'} + \{a_p^+, a_{p'}^+\}u_p^* u_{p'}^*\right]$$

$$+\frac{1}{2}\int dpdp'(\omega_p\omega_{p'} + pp' + m^2)(\{a_p^-, a_{p'}^+\}u_p u_{p'}^*)), \qquad (4.10)$$

não é conveniente tentar reduzí-la mais.

É amplamente conhecido o fato da álgebra de Heisenberg (seção 3.1) verificar as seguintes relações de comutação [19] :

$$i[P_0, \phi] = \partial_0 \phi \qquad (4.11)$$

$$i[P_1, \phi] = \partial_1 \phi \qquad (4.12)$$

$$i[M_{01},\phi] = x_0\partial_1\phi - x_1\partial_0\phi. \tag{4.13}$$

Agora queremos saber o que acontece quando utilizamos as superálgebras $\bigoplus_k^\infty osp_k(1|2)$ e $\lim_{n\to\infty} osp(1|2n)$.

4.2.1 Solução $\bigoplus_k^\infty osp_k(1|2)$

Já que $P_0 = H$, temos de (3.45) que:

$$P_0 = \int dpH_p. \tag{4.14}$$

Por outro lado, das expressões (3.38), (3.44) e (4.9), temos para P_1 :

$$P_1 = -\int dp\omega_p N_p^2 p\delta(0)H_p = -\int \frac{dp}{\omega_p}\omega_p^2 N_p^2\delta(0)pH_p$$

$$P_1 = -\int dp\frac{p}{\omega_p}H_p. \tag{4.15}$$

Em seguida achamos o comutador de P_0 com ϕ, de (4.14) e (3.37):

$$[P_0,\phi] = \int dp'dp\left([H_p,a_{p'}^-]u_{p'} + [H_p,a_{p'}^+]u_{p'}^*\right)$$

$$= -i\left(\int dp(-\omega_p i)(u_p a_p^- - u_p^* a_p^+)\right) = -i\dot{\phi}$$

$$i[P_0,\phi] = \dot{\phi}. \tag{4.16}$$

De (4.15) e (3.37), o comutador de P_1 e ϕ é :

$$[P_1,\phi] = -\int dpdp'\frac{p}{\omega_p}\left([H_p,a_{p'}^-]u_{p'} + [H_p,a_{p'}^+]u_{p'}^*\right)$$

$$= -\int dp\frac{p}{\omega_p}(-\omega_p a_p^- u_p + \omega_p a_p^+ u_p^*) = -i\int dp(ip)(a_p^- u_p - a_p^+ u_p^*)$$

$$i[P_1, \phi] = \partial_1 \phi. \tag{4.17}$$

Porém, M_{01} não é independente do tempo, pois a parte da integração na fórmula para M_{01} em (4.10) se anula. De (4.10), (3.38) e (3.39), temos:

$$M_{01} = tP_1 + \int dxx \left(\frac{1}{4} \int dp(-2p^2)(E_p^- u_p^2 + E_p^+ (u_p^*)^2) + \frac{1}{2} \int dp 2\omega_p^2 N_p^2 H_p \right)$$

$$= tP_1 - \frac{1}{2} \int dpp^2 \left(E_p^- (\int dxxu_p^2) + E_p^+ (\int dxx(u_p^*)^2) \right) + \int dp\omega_p^2 N_p^2 H_p \int dxx$$

$$= tP_1 - \frac{1}{8i} \int dpp^2 N_p^2 \delta'(p) \left(E_p^- e^{-2i\omega_p t} - E_p^+ e^{+2i\omega_p t} \right)$$

$$= tP_1 + \frac{1}{8i} \frac{d}{dp} \left(p^2 N_p^2 (E_p^- e^{-2i\omega_p t} - E_p^+ e^{+2i\omega_p t}) \right)_{p=0}$$

$$M_{01} = P_1 t + \frac{1}{8i} \frac{d}{dp} (p^2 f(p))_{p=0} = P_1 t + \frac{1}{8i} (2pf(p) + p^2 f'(p))_{p=0} = P_1 t$$

$$M_{01} = P_1 t. \tag{4.18}$$

Logo (4.18) não é o gerador de boost. Não temos outra forma de procurar uma nova constante do movimento M_{01}.

4.2.2 Solução $osp(1|2n)$

Agora utilizaremos a superálgebra $osp(1|2n)$ para saber se as cargas de Noether geram transformações de simetria. A primeira é evidente, pois $P_0 = H$, e trata-se de um de nossos postulados (3.3) então :

$$i[P_0, \phi] = \partial_0 \phi. \tag{4.19}$$

De (4.9) e (3.58), temos para P_1:

$$P_1 = -\int dpp \frac{\{a_p^+, a_p^-\}}{2}. \tag{4.20}$$

De (4.20) e (3.57), calculamos o comutador de P_1 e ϕ:

$$[P_1,\phi] = -\frac{1}{2}\int dpdp'p[\{a_p^+,a_p^-\},a_{p'}^-u_{p'} + a_{p'}^+u_{p'}^*]$$

$$= -\frac{1}{2}\int dpdp'p\left([\{a_p^+,a_p^-\},a_{p'}^-]u_{p'} + [\{a_p^+,a_p^-\},a_{p'}^+]u_{p'}^*\right)$$

$$[P_1,\phi] = \int dpp(a_p^-u_p - a_p^+u_p^*) = -i\phi'$$

$$i[P_1,\phi] = \partial_1\phi. \tag{4.21}$$

De (4.10) e (3.57), calculamos o comutador de P_1 e ϕ:

$$[M_{01},\phi] = -it\phi' + \int dxx($$

$$\frac{1}{4}\int dpdp'dp''(-\omega_p\omega_{p'}-pp'+m^2)(-2a_{p'}^+\delta(p-p'')-2a_p^+\delta(p'-p''))u_p^*u_{p'}^*u_{p''}(x')$$

$$+\frac{1}{2}\int dpdp'dp''(\omega_p\omega_{p'} + pp' + m^2)(-2a_p^-\delta(p'-p''))u_pu_{p'}^*u_{p''}(x')$$

$$+\frac{1}{4}\int dpdp'dp''(-\omega_p\omega_{p'}-pp'+m^2)(2a_{p'}^-\delta(p-p'')+2a_p^-\delta(p'-p''))u_pu_{p'}u_{p''}^*(x')$$

$$+\frac{1}{2}\int dpdp'dp''(\omega_p\omega_{p'} + pp' + m^2)(2a_{p'}^+\delta(p-p''))u_pu_{p'}^*u_{p''}^*(x')),$$

integrando p'':

$$[M_{01},\phi] = -it\phi' + \int dxx(-\int dpdp'(-\omega_p\omega_{p'} - pp' + m^2)a_{p'}^+u_p^*u_{p'}^*u_p(x')$$

$$-\int dpdp'(\omega_p\omega_{p'} + pp' + m^2)a_p^-u_pu_{p'}^*u_{p'}(x')$$

$$+\int dpdp'(-\omega_p\omega_{p'} - pp' + m^2)a_{p'}^-u_pu_{p'}u_p^*(x')$$

$$+\int dpdp'(\omega_p\omega_{p'} + pp' + m^2)a_{p'}^+u_pu_{p'}^*u_p^*(x')),$$

fazendo a integração iterada:

$$[M_{01},\phi] = -it\phi' + \int dxx(\int dp\omega_p u_p^*(x)u_p(x')\int dp'\omega_{p'}a_{p'}^+u_{p'}^* +$$

$$\int dppu_p^*(x)u_p(x')\int dp'p'a_{p'}^+u_{p'}^* - m^2\int dpu_p^*(x)u_p(x')\int dp'a_{p'}^+u_{p'}^*$$

$$-\int dp\omega_p u_p^*(x)u_p(x')\int dp'\omega_{p'}a_{p'}^-u_{p'} - \int dppu_p^*(x)u_p(x')\int dp'p'a_{p'}^-u_{p'}$$

$$-m^2\int dpu_p^*(x)u_p(x')\int dp'a_{p'}^-u_{p'} - \int dp\omega_p u_p(x)u_p^*(x')\int dp'\omega_{p'}a_{p'}^-u_{p'}$$

$$-\int dppu_p(x)u_p^*(x')\int dp'p'a_{p'}^-u_{p'} + m^2\int dpu_p(x)u_p^*(x')\int dp'a_{p'}^-u_{p'}$$

$$+\int dp\omega_p u_p(x)u_p^*(x')\int dp'\omega_{p'}a_{p'}^+u_{p'}^* + \int dppu_p(x)u_p^*(x')\int dp'p'a_{p'}^+u_{p'}^*$$

$$+m^2\int dpu_p(x)u_p^*(x')\int dp'a_{p'}^+u_{p'}^*).$$

Os termos que contêm ω_p se fatorizam e conseguimos obter uma delta de Dirac[1] : $\int dp\omega_p u_p^*(x)u_p(x') = \frac{1}{2}\delta(x-x')$. Os termos que contêm p se fatorizam e dentro da integral conseguimos obter uma função ímpar do tipo: $pu_p(x)u_p^*(x') + pu_p^*(x)u_p(x') \sim N_p^2 p\cos p(x-x')$, e portanto a integração em p se anula. Os termos com m^2 são fatorizados e conseguimos uma integral de uma função ímpar: $u_p(x)u_p^*(x') - u_p^*(x)u_p(x') \sim N_p^2\sin p(x-x')$, logo este termo é nulo. Como resultado obtemos:

$$[M_{01},\phi] = -it\phi' + \int dxx\left(\delta(x-x')\int dp\omega_p a_p^+u_p^*(x) - \delta(x-x')\int dp\omega_p a_p^-u_p(x)\right)$$

$$= -it\phi' + x'\int dp\omega_p(a_p^+u_p^*(x') - a_p^-u_p(x')),$$

finalmente

$$[M_{01},\phi] = -it\phi' - ix\dot{\phi}, \tag{4.22}$$

[1]Sempre que for usado o fator de normalização (3.58) correspondente a $osp(1|2n)$.

ou

$$i[M_{01}, \phi] = x_0\partial_1\phi - x_1\partial_0\phi.$$

Assim, para $osp(1|2n)$ as relações seguintes ainda continuam valendo:

$$i[P_0, \phi] = \partial_0\phi \tag{4.23}$$

$$i[P_1, \phi] = \partial_1\phi \tag{4.24}$$

$$i[M_{01}, \phi] = x_0\partial_1\phi - x_1\partial_0\phi \tag{4.25}$$

4.3 Álgebra de Poincaré

Agora queremos saber se a álgebra de Poincaré verifica-se no caso da Quantização de Wigner. Isto só será possível para o caso da superálgebra $osp(1|2n)$, já que precisamos das relações de comutação (4.23), (4.24) e (4.25). Derivando estas últimas equações e utilizando (3.5) e (3.6), podemos obter (levando em conta que as cargas P_0, P_1 e M_{01} são independentes das coordenadas x e t):

$$[P_0, \phi'] = -i\pi' \tag{4.26}$$

$$[P_0, \pi] = -i\dot{\pi} \tag{4.27}$$

$$[M_{01}, \phi'] = -it\phi'' - i\pi - ix\pi' \tag{4.28}$$

$$[M_{01}, \pi] = -i\phi' - it\pi' - ix\phi'' + im^2x\phi. \tag{4.29}$$

Agora usaremos estas relações para calcular os comutadores dos elementos P_0, P_1 e M_{01}.

Calculando $[P_1, P_0]$:

$$[P_1, P_0] = [\int \frac{dx}{2}\{\pi, \phi'\}, P_0] = \int \frac{dx}{2}[\{\pi, \phi'\}, P_0]$$

$$[P_1, P_0] = \int \frac{dx}{2}\left(\{\pi, [\phi', P_0]\} + \{[\pi, P_0], \phi'\}\right),$$

de (4.26) e (4.27):

$$[P_1, P_0] = i \int \frac{dx}{2}\left(\{\pi, \pi'\} + \{\dot{\pi}, \phi'\}\right) = \frac{i}{2}\int dx \left((\pi^2)' + \{\phi'', \phi'\} - m^2\{\phi, \phi'\}\right)$$

$$[P_1, P_0] = \frac{i}{2}\int dx(\pi^2 + \phi'^2 - m^2\phi^2)' = 0,$$

logo $[P_1, P_0] = 0$.

Calculando $[M_{01}, P_1]$:

$$[M_{01}, P_1] = [M_{01}, \int \frac{dx}{2}\{\pi, \phi'\}] = \int \frac{dx}{2}\left(\{\pi, [M_{01}, \phi']\} + \{[M_{01}, \pi], \phi'\}\right),$$

de (4.28) e (4.29):

$$[M_{01}, P_1] = \int \frac{dx}{2}(-it\{\pi, \phi''\} - i\{\pi, \pi\} - ix\{\pi, \pi'\} - i\{\phi', \phi'\} - it\{\phi', \pi'\}$$

$$-ix\{\phi', \phi''\} + ixm^2\{\phi', \phi\})$$

$$= \int \frac{dx}{2}\left(-it(\{\pi, \phi'\})' - i\pi^2 - i\phi'^2 - im^2\phi^2\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\int dx(\pi^2 + \phi'^2 + m^2\phi^2) = -iP_0,$$

logo $[M_{01}, P_1] = -iP_0$.

Calculando $[M_{01}, P_0]$:

$$[M_{01}, P_0] = \int \frac{dx}{2}\left(\{[M_{01}, \pi], \pi\} + \{[M_{01}, \phi'], \phi'\} + m^2\{[M_{01}, \phi], \phi\}\right)$$

$$= \int \frac{dx}{2}(-i\{\phi', \pi\} - it\{\pi', \pi\} - ix\{\phi'', \pi\} + ixm^2\{\phi, \pi\} - it\{\phi'', \phi'\}$$

$$-i\{\pi, \phi'\} - ix\{\pi', \phi'\} - it\{\phi', \phi\}m^2 - ixm^2\{\pi, \phi\})$$

$$\int \frac{dx}{2}(-2i\{\pi, \phi'\} + i\{\phi', \pi\}) = -i \int \frac{dx}{2}\{\phi', \pi\} = -iP_1,$$

logo $[M_{01}, P_0] = -iP_1$.

Assim, conseguimos fechar a álgebra de Poincaré no caso $D = 1 + 1$.

$$[P_1, P_0] = 0 \tag{4.30}$$

$$i[M_{01}, P_1] = P_0 \tag{4.31}$$

$$i[M_{01}, P_0] = P_1. \tag{4.32}$$

Capítulo 5

Conclusões

A Quantização de Wigner, no caso de sistemas de osciladores , permite a utilização direta de superálgebras de Lie. No caso da quantização de uma partícula (capítulo **2**), a superálgebra $osp(1|2)$ é a escolha mais natural. Então a superálgebra $\bigoplus_k^\infty osp_k(1|2)$, i.e. a soma direta de muitas cópias de $osp(1|2)$, parecia ser a escolha mais natural para tratar nosso problema. Porém, ela não faz com que M_{01} seja um gerador de boost. Por outro lado, a superálgebra $\lim_{n\to\infty} osp(1|2n)$ resulta ser uma ótima escolha para ter uma teoria relativista de campos quânticos. A verificação da álgebra de Poincaré se segue diretamente deste último fato.

Para a superálgebra $\bigoplus_k^\infty osp_k(1|2)$ sempre é possível recuperar a quantização canônica usual, porém temos que escolher entre se manter ou não o caráter fermiônico dos operadores $a_i^\pm$. Para $\lim_{n\to\infty} osp(1|2n)$, somente recuperamos a quantização canônica usual perdendo o caráter fermiônico de $a_i^\pm$ (quando $p = 1$).

Para todos os casos, temos que eliminar o infinito autovalor para o vácuo $|0>$, redefinindo o vetor de energia-momento:

$$P'_\mu = P_\mu - <0|P_\mu|0>,$$

assim, a energia do vácuo será zero :

$$P'_\mu|0>=0.$$

Desta forma, temos que a translação $U = \exp i(\epsilon_\mu P'^\mu)$ leva o vácuo em si mesmo:

$$U|0>=|0>,$$

quer dizer que o vácuo não muda ao fazer uma translação. Porém não sabemos o que ocorre no caso da carga M_{01}, i.e. não sabemos qual é o spin do vácuo.

Apêndice A

Definição de Superálgebra de Lie

Uma superálgebra de Lie [23, 24] é uma generalização duma álgebra de Lie [25, 23]. Ela contém uma graduação Z_2, onde Z_2 são os números inteiros modulo os números pares: $Z_2 = Z/2Z = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. As superálgebras de Lie são importantes em física teórica porque elas são usadas para descrever a matemática da supersimetria. Em muitas destas teorias, a parte *par* da superálgebra corresponde a bósons, e a *ímpar* a férmions.

A seguir adotamos a convenção: x denotará um elemento do subespaço vetorial de índice k (G_k), y denotará um elemento do subespaço vetorial de índice l (G_l) e z denotará um elemento do subespaço vetorial de índice m (G_m), onde os índices k, l e m pertencem ao conjunto Z_2.

Formalmente dizemos que $G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}}$ é uma álgebra Z_2-graduada de Lie ou superálgebra de Lie, se dado um mapa bilinear (supercomutador) $[\![,]\!] : G \times G \to G$, as três condições seguintes são satisfeitas:

$$[\![G_k, G_l]\!] \subset G_{k+l}, \tag{5.1}$$

onde a soma $k+l$ é tomada modulo $2Z$ (números pares),

$$[\![x,y]\!] = -(-1)^{kl}[\![y,x]\!] \tag{5.2}$$

$$[\![x,[\![y,z]\!]]\!] = [\![[\![x,y]\!],z]\!] + (-1)^{kl}[\![y,[\![x,z]\!]]\!]. \tag{5.3}$$

A condição (5.1) simplesmente diz que a operação do supercomutador é consistente com a graduação. A condição (5.2) é a versão graduada da (anti)comutatividade. A condição (5.3) é a versão graduada da identidade de Jacobi.

Seja o supercomutador $[\![x,y]\!]$, definido por:

$$[\![x,y]\!] = xy - (-1)^{kl}yx \tag{5.4}$$

Temos que com esta definição, as condições (5.1) e (5.2) são satisfeitas e uma verificação imediata mostra que também (5.3) é satisfeita.

No caso x e y pertençam ao setor "bosônico" $G_{\bar{0}}$, a relação (5.4) é simplesmente: $[x,y] = xy - yx$, e se x e y pertencem ao setor "fermiônico" $G_{\bar{1}}$, então (5.4) resulta: $\{x,y\} = xy + yx$.

Apêndice B

Superálgebra $osp(1|2)$

A superálgebra $osp(1|2)$ pode ser vista como a versão supersimétrica de $sl(2)$. Ela contém três geradores bosônicos E^+, E^- e H que formam a álgebra de Lie $sl(2)$ e dois geradores fermiônicos F^+ e F^-, sendo suas relações de comutação não-nulas na base de Cartan-Weyl escritas como:

$$
\begin{aligned}
[H, E^{\pm}] &= \pm E^{\pm} & \qquad [E^+, E^-] &= 2H \\
[H, F^{\pm}] &= \pm\frac{1}{2}F^{\pm} & \qquad \{F^+, F^-] &= \frac{1}{2}H \\
[E^{\pm}, F^{\mp}] &= -F^{\pm} & \qquad \{F^{\pm}, F^{\pm}\} &= \pm\frac{1}{2}E^{\pm}.
\end{aligned}
$$

Apêndice C

Superálgebra $osp(1|2n)$

A superálgebra de Lie $osp(1|2n)$ [6, 7] tem como parte *par* a álgebra de Lie $sl(2n)$ e como parte *ímpar* a representação $(2n)$ da parte *par*; ela tem rango n e dimensão $2n^2 + 3n$.

Ela consiste de matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a_1 \\ a_1^t & b & c \\ -a^t & d & -b^t \end{pmatrix}$$

onde a e a_1 são matrizes de $(1 \times n)$, b é qualquer matriz de $(n \times n)$, e c e d são matrizes simétricas $(n \times n)$. Os elementos *pares* têm $a = a1 = 0$ e os elementos *ímpares* são aqueles com $b = c = d = 0$.

Esta superálgebra é gerada por $2n$ elementos *ímpares* $b_k^{\pm}$, sujeitos à seguinte relação:

$$[\{b_j^{\xi}, b_k^{\eta}\}, b_l^{\epsilon}] = (\epsilon - \xi)\delta_{jl} b_k^{\eta} + (\epsilon - \eta)\delta_{kl} b_j^{\xi},$$

onde ξ, η e ϵ podem tomar os valores $\pm$, os quais equivalem a ± 1 na parte direita da expressão anterior.

Bibliografia

[1] E.P.Wigner, *Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?*, Phys. Rev 77, 711-712. (1950)

[2] Y.Ohnuki and S.Kamefuchi, *On the wave-mechanical representation of a Bose-like oscillator* , J. Math. Phys. 19, 67 (1978)

[3] N. Mukunda, E.C.G. Sudarshan, J.K.Sharma, and C.L.Mehta, *Representations and properties of para-Bose oscillator operators. I. Energy position and momentum eigenstates*, J. Math. Phys. 21, 2386 (1980)

[4] L.M.Yang, *A Note on the Quantum Rule of the Harmonic Oscillator*, Phys. Rev. 84, 788-790 (1951)

[5] H.S.Green, *A generalized method of field quantization*, Phys. Rev. 90, 270-273. (1953)

[6] V.Kac, *Representations of classical Lie superalgebras* ,Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II, Lecture Notes in Mathematics, 676, 597-626. (1978)

[7] V.Kac, *A sketch of Lie superalgebra theory*, Communications in Mathematical Physics, 53, 1, 31-64. (1977)

[8] A.Ch. Ganchev and T.D. Palev, *A Lie Superalgebraical Analysis of The Parabose Statistics*, J. Math. Phys. 21, 797-799. (1980)

[9] Tchavdar D.Palev, *Wigner approach to quantization. Noncanonical quantization of two particles interacting via a harmonic potential*, J.Math.Phys. 23, 10 (1982)

[10] T.D.Palev, N.I.Stoilova, *Wigner quantum oscillators*, J.Phys.A:Math.Gen.27, 977-983. (1994)

[11] T.D.Palev and N.I.Stoilova, *Wigner quantum oscillators. osp(3/2) oscillators* , J.Phys.A:Math.Gen. 27, 7387 (1994)

[12] N.I.Stoilova, J.Van der Jeugt, *Solutions of the compatibility conditions for a Wigner quantum oscillator*, J.Phys.A 38, 9681-9688 (2005)

[13] S.Lievens, N.I.Stoilova, J.Van der Jeugt, *Harmonic oscillators coupled by springs: discrete solutions as a Wigner Quantum System*, J.Math.Phys.47, 113504,(2006)

[14] S.Liebens, N.I.Stoilova and J.Van der Jeugt, *Harmonic oscillator chains as Wigner Quantum Systems: periodic and fixed wall boundary conditions in gl(1|n) solutions*, J. Math. Phys. 49, 073502 (2008)

[15] G.Regniers and J.Van der Jeugt, *Wigner Quantization of Hamiltonians Describing Harmonic Oscillators Coupled by a General Interaction Matrix*, SIGMA 5, 106 (2009)

[16] G.Regniers and J.Van der Jeugt, *Wigner quantization of some one-dimensional Hamiltonians*, e-Print: arXiv:1011.2305v1 [math-ph]

[17] R.C.King, T.D. Palev, N.I.Stoilova, J.Van der Jeugt, *A non-commutative n-particle 3D Wigner quantum oscillator*, J.Phys.A 36, 11999-12019. (2003)

[18] J.D.Bjorken and S.D.Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill Book Company (1965)

[19] W.Greiner and J.Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1996)

[20] S.Liebens, J.Van der Jeugt, *Spectrum generating functions for non-canonical quantum oscillators* , J. Phys.A 41, 355204

[21] P.G.Castro, B.Chakraborty, F.Toppan, *Wigner oscillators, twisted Hopf algebras, and second quantization*,J. Math. Phys. 49, 082106 (2008)

[22] S.Liebens, N.I.Stoilova and J.Van der Jeugt, *The paraboson Fock space and unitary irreducible representations of the Lie superalgebra osp(1/2n)*, e-Print: arXiv:0706.4196 [hep-th]

[23] L.Frappat, P.Sorba and A. Sciarrino, *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras*, Academic Press.(verção e-print: arXiv:9607161v1[hep-th] (2000)

[24] L.Corwin, Y. Ne'eman, S. Sternberg, *Graded Lie algebras in mathematics and physics (Bose-Fermi symmetry)*,Rev. Mod. Phys. 47, 573-603. (1975)

[25] B.G.Wybourne, *Classical groups for physicists*, New York, Wiley (1974)