



CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

LAFEX - COORDENAÇÃO DE FÍSICA EXPERIMENTAL DE ALTAS ENERGIAS

GRUPO DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS ELEMENTARES

TESE DE DOUTORADO

Dois Estudos em Teoria Quântica de Campos

RODRIGO TURCATI

Rio de Janeiro - RJ

Fevereiro de 2013

“Our aim as scientists is objective truth; more truth, more interesting truth, more intelligible truth. We cannot reasonably aim at certainty. Once we realize that human knowledge is fallible, we realize also that we can never be completely certain that we have not made a mistake.”

The Logic of Scientific Discovery, de Karl Popper.

Agradecimentos

“Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós.”

ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY

O tempo que passei aqui no Rio, época em que realizei meu Mestrado e agora finalizo meu Doutorado, várias pessoas com quem compartilhei diversos momentos trouxeram, de uma maneira ou outra, alguma contribuição a esse desafio a que me propus. Foi uma árdua jornada e talvez seja injusto citar apenas alguns nomes para mostrar minha gratidão. Mas mais injusto, seria esquecê-los.

Gostaria então de fazer um agradecimento especial às seguintes pessoas:

Aos meus pais, que sempre me incentivaram e através de seus esforços tornaram tudo isso possível.

Ao meu irmão, pela amizade e pelo companheirismo destes anos todos.

Ao Helayël, que sempre serviu de exemplo de humildade e altruísmo, além da sua imensurável ajuda prestada no meu momento mais difícil no CBPF.

Ao Accioly, não só orientador, mas também um grande amigo, com que tive a imensa honra de cooperar durante estes 4 anos, seja nas diversas discussões sobre física, assim como nos incontáveis cafés que tomamos. Seus ensinamentos serão para sempre lembrados.

Aos pessoal do CBPF, os quais tornaram a minha estadia na instituição mais agradável, em especial à Luisa, Felipe, Jimmy, Fatemeh, Paulo, Bonilla, Max, Roberta, Fabrício, Maurício, Gabriela, Grasiela, Eduardo, Júnior, Aline, Elvis, Martha, Ana, Isabel, Vinte, Leo, Érico, Julian, Brunos, Marília, Thamys, Danielle, Mexicano, Cobra,

Barto, Cinthia, Enrike, Kim, André, Flávio, entre outros.

Ao Jefferson e a Kelly, por todos estes anos de amizade e convivência.

Ao Esley, amigo e companheiro de trabalho.

Ao Atitude e ao Cavalão, grandes amigos de Porto Alegre.

Ao pessoal dos Filhos: Tamara, Linneu, Carol e Marcelo.

Ao grupo do LAFEX, em particular a Cris.

Ao excelente nível de cursos dados pelos professores Helayël e Tião, cursos estes que foram essenciais para minha formação acadêmica.

Ao Ivan, à Bete e ao Ricardo da CFC.

Ao CBPF, que me propiciou as condições necessárias para que este trabalho pudesse ser realizado.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E a todas as pessoas que minha memória falha não tenha permitido recordar.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Sumário | ii |
| Introdução | 3 |
| Referências Bibliográficas | 8 |
| | |
| I Teorias com Derivadas de Ordem Superior | 12 |
| | |
| 1 A Eletrodinâmica Finita de Lee e Wick | 13 |
| 1.1 Introdução | 13 |
| 1.2 O Modelo Abeliano de Lee e Wick | 16 |
| 1.3 Propagação Ondulatória na Eletrodinâmica de Lee e Wick | 19 |
| 1.4 O Momento Magnético Anômalo do Elétron | 23 |
| 1.5 Unitariedade Semiclássica e Acausalidade | 26 |
| 1.6 O Decaimento da Partícula Pesada de Lee e Wick | 29 |
| 1.7 Equivalência Entre os Diversos Lagrangianos Utilizados para a Descrição do Modelo de Lee e Wick | 34 |
| 1.8 Sistemas Vinculados de Ordem Superior | 35 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1.9 | Quantização Canônica da Eletrodinâmica de Ordem Superior | 42 |
| 1.10 | Discussão | 52 |
| | Referências Bibliográficas | 57 |
| 2 | Gravitação de Ordem Superior em D Dimensões | 62 |
| 2.1 | Contextualização | 62 |
| 2.2 | Teorema de Gauss-Bonnet Linearizado | 64 |
| 2.3 | Unitariedade ao Nível de Árvore da Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional | 67 |
| 2.4 | Potencial Interpartículas | 72 |
| 2.5 | Discussão | 78 |
| | Referências Bibliográficas | 80 |
| | Apêndice A Prescrição para o Cálculo do Propagador do Gráviton | 82 |
| | Apêndice B Um resultado útil para checar a unitariedade ao nível de árvore de um modelo genérico da gravitação em $D = 3$ | 86 |
| II | Determinação de Limites para a Massa do Fóton | 89 |
| 3 | A Massa do Fóton e a Interferometria de Linha de Base Extensa | 90 |
| 3.1 | Motivação | 90 |
| 3.2 | Combinando RG, QED Massiva e VLBI para limitar a massa do fóton . | 94 |
| 3.2.1 | Cálculo da Lagrangiana de Interação | 95 |
| 3.2.2 | Cálculo da Função de Vértice | 96 |
| 3.2.3 | Cálculo da Seção de Choque Diferencial Não-Polarizada | 98 |
| 3.3 | Relação entre Massa, Frequência e Parâmetro de Deflexão para o Fóton | 101 |

| | | |
|-----|---|------------|
| 3.4 | Encontrando Limites Gravitacionais Superiores para a Massa do Fóton | 105 |
| 3.5 | O Momento Magnético Anômalo do Elétron e a Massa do Fóton | 110 |
| 3.6 | Discussão | 113 |
| | Referências Bibliográficas | 117 |
| | Epílogo | 121 |
| | Referências Bibliográficas | 124 |

Resumo

Dois estudos em Teoria Quântica de Campos são realizados. O primeiro contempla as Teorias de Ordem Superior, as quais são ferramentas eficientes e bem conhecidas para se lidar com as divergências que usualmente infestam, no ultravioleta, tanto modelos eletromagnéticos como gravitacionais. Neste espírito, são discutidos alguns aspectos relativos a unitariedade ao nível de árvore para a Eletrodinâmica de Lee e Wick e para a Gravitação de Ordem Superior em Dimensões Arbitrárias. A quantização canônica da Eletrodinâmica de Lee e Wick é também abordada. O outro estudo enfoca o Fóton Massivo: limites ao nível de árvore e quântico para a massa desta partícula — baseados, respectivamente, em dados experimentais recentes referentes ao desvio de ondas de rádio pelo Sol e ao momento magnético anômalo do elétron —, são estimados.

Palavras-chave: Eletrodinâmica de Lee e Wick; Gravitação de Ordem Superior; Fóton Massivo.

Áreas de conhecimento: Teoria Quântica de Campos; Gravitação.

Abstract

Two studies in the framework of quantum field theory are carried out. The first is devoted to Higher-derivative Theories, which are efficient and well-known tools for dealing with the ultraviolet divergences that usually plague both electromagnetic and gravitational models. In this vein, some aspects concerning the tree-level unitarity of Lee-Wick Electrodynamics as well as Higher-Order Gravity in Arbitrary Dimensions, are discussed. The canonical quantization of Lee-Wick Electrodynamics is contemplated as well. The remaining study is focused on the Photon Mass: semiclassical and quantum bounds on the mass of this particle — based respectively on recent experimental measurements of the gravitational bending of radio waves by the Sun and the anomalous magnetic moment of the electron — are estimated.

Introdução

A Teoria Quântica de Campos surgiu como uma teoria para a descrição dos campos quânticos relativísticos, sendo neste sentido uma extensão natural das ideias da Mecânica Quântica e da Relatividade Restrita à Teoria Clássica de Campos [1,2]. Sua versatilidade e abrangência permiti aplicá-la a uma variedade de processos físicos, já que incorpora fenômenos que vão desde escalas astronômicas, como o cenário inflacionário do Big Bang [3-5], até distâncias microscópicas, como a estrutura atômica, entre outros. O Modelo Padrão da Física de Partículas, sistema que descreve as partículas fundamentais e suas interações, se inclui neste panorama. Suas predições teóricas, como a existência dos bósons mediadores e as três famílias de quarks e léptons, por exemplo, foram testadas e confirmadas experimentalmente [6].

Apesar de seu grande sucesso, a Teoria Quântica de Campos apresenta alguns pontos que quando olhados superficialmente parecem depor contra sua consistência. Senão, vejamos. Na região do infravermelho ($k \rightarrow 0$) os modelos físicos divergem. Contudo, esta dificuldade não é vista como um defeito intrínseco da Teoria Quântica de Campos, mas sim algo devido ao formalismo perturbativo utilizado. No limite ultravioleta ($k \rightarrow \infty$), por outro lado, os infinitos emergem devido ao fato que as partículas são

excitações pontuais e as interações são locais. O mecanismo de renormalização fornece uma maneira para tratar estas singularidades, tornando assim a teoria finita [7].

Ao longo dos anos, diversas questões foram discutidas e solucionadas no contexto desta teoria quântica, enquanto outras permanecem ainda em aberto [8]. Muitas linhas de pesquisas têm investido na possibilidade de novas propostas fora do escopo da Teoria Quântica de Campos com o objetivo de resolver alguns destes problemas [9-11].

Neste trabalho foram realizados dois estudos no contexto da Teoria Quântica de Campos. No primeiro abordamos as Teorias de Ordem Superior, enquanto que no segundo analisamos o Fóton Massivo. No primeiro estudo verificamos através da análise de dois casos específicos — oriundos um do eletromagnetismo e outro da gravitação —, se a popular conjectura sobre a impossibilidade de coexistência pacífica entre unitariedade e renormalizabilidade em uma mesma teoria de ordem superior de fato se aplica à situação em pauta [12-15]. No segundo estudo determinamos limites ao nível de árvore e quântico para a massa do fóton, que não sejam, como ocorre na literatura, baseados apenas em cálculos de ordem de grandeza mas sim em resultados provenientes de cálculos rigorosos realizados no âmbito da Teoria Quântica de Campos [16-19].

Teorias de Ordem Superior foram introduzidas na Teoria Quântica de Campos com a finalidade de tratar as divergências no ultravioleta [20-26]. Elas modificam as lagrangianas usuais através de derivadas de ordem superior nos campos, alterando, em decorrência, o termo cinético e são usadas geralmente como correções no limite de altas frequências de uma teoria de mais baixa energia. Contudo, os novos termos cinéticos, mesmo que associados a coeficientes com pequena magnitude, não podem ser vistos como uma mera perturbação do modelo inicial [27]. Sua presença modifica a estrutura da teoria através da adição de novos graus de liberdade. Classicamente, mais graus de liberdade implicam na necessidade de mais condições iniciais. Quanticamente, o pro-

pagador da teoria é alterado. Esses graus de liberdade adicionais melhoram aspectos da renormalizabilidade [28-33] no regime de altas frequências, mantendo inalterado o comportamento para valores baixos dos momenta. Contudo, teorias de ordem superior padecem, em geral, de problemas de instabilidade, unitariedade e causalidade [34]. A causa destas dificuldades está intimamente ligada ao fato destas teorias não possuírem na maioria das vezes um mínimo na energia [35], ou seja, não é possível construir um vácuo estável a partir do qual os modos de excitação são criados. O hamiltoniano gerado possui, além de um espectro infinito de energia positiva, também um espectro de energia negativa. Para a teoria livre, os modos de energia negativa estão desacoplados dos modos de energia positiva, o que a primeira vista não causa problemas. Contudo, quando leva-se em conta a interação, os estados ficam misturados, e a partícula pode decair em estados de energia negativa. Uma maneira de solucionar isto é associando estados de norma negativa aos estados de energia negativa [36-38]. O preço a ser pago é, grosso modo, a quebra da unitariedade do sistema. Mesmo possuindo em muitos casos inconsistências, teorias de ordem superior são utilizadas na modelagem de diversos processos extremamente importantes tais como, energia escura [39-41], lagrangianas efetivas [42-44], reguladores ultravioletas [45-47], etc, além de modelos gravitacionais 4D renormalizáveis [48]. Derivadas de ordem superior ocorrem também em teorias mais fundamentais, como Teoria de Cordas [49] e Teorias Não-Comutativas [50].

Neste espírito, conforme já mencionamos, analisamos a questão da unitariedade versus renormalizabilidade em teorias de ordem superior. Nesta investigação utilizamos dois modelos importantes: a Eletrodinâmica de Lee e Wick e a Gravitação de Ordem Superior em Dimensões Arbitrárias. Aspectos referentes a quantização canônica de modelos eletromagnéticos de ordem superior também serão abordados.

O outro estudo diz respeito a determinação de um limite superior para a massa

do fóton. Como é amplamente conhecido, o eletromagnetismo de Maxwell é um dos pilares da física. Testes relativos aos seus fundamentos são, em decorrência, de extrema importância uma vez que pequenos desvios dos valores preditos podem abrir caminhos para novos paradigmas na física. Nesse sentido, a procura por uma eventual massa associada ao fóton é bastante bem vinda. Estas investigações constituem uma área de pesquisa bastante importante e têm sido alvo de interessantes estudos no contexto da eletrodinâmica massiva. Procura-se, em geral, medidas que acusem a existência de polarizações longitudinais, variações da velocidade da luz, desvios das leis de Coulomb e Ampère, alterações no comportamento de campos estáticos, entre outros [51,52]. Apesar dos esforços hercúleos, até hoje nenhuma evidência no que refere à existência de uma massa para fóton foi observada [53]. Contudo, experimentalmente não é possível afirmar que o fóton tenha uma massa de repouso nula. Tudo que podemos afirmar é que até os limites inferidos, não há nenhuma mudança em relação ao eletromagnetismo usual.

No intuito de contribuir para esta discussão, estimamos dois limites superiores para a massa do fóton, utilizando medidas extremamente precisas. A primeira está associada ao momento magnético anômalo do elétron, um efeito puramente quântico, originado das correções radiativas do espalhamento de elétrons por um campo magnético externo e estático [54]. Atualmente, esta medida possui uma exatidão de uma parte em 10^{11} [55], sendo o experimento mais preciso da física. A segunda medida está associada ao desvio gravitacional das ondas de rádio pelo Sol. Utilizando os dados obtidos via VLBI (Very Long Baseline Interferometry), calculamos um limite ao nível de árvore para a massa do fóton usando o ângulo de desvio das ondas de rádio pelo Sol.

A bem da didática, esta Tese está dividida em duas partes. Na Parte I, são discutidos alguns aspectos de renormalizabilidade e unitariedade das Teorias de Ordem

Superior, especificamente, da eletrodinâmica de Lee e Wick e da Gravitação de Ordem Superior em Dimensões Arbitrárias. A quantização com vínculos do eletromagnetismo de Lee e Wick é também examinada. Na parte II, cálculos concernentes a determinação de limites superiores para a massa do fóton são realizados. Tanto o limite clássico quanto o quântico estimados foram incluídos no PDG [53]. Encerramos o trabalho analisando a importante e interessante questão, ainda em aberto, concernente a uma possível incompatibilidade entre renormalizabilidade e unitariedade em teorias com derivadas de ordem superior. Apresentamos também uma discussão sobre possíveis extensões dos resultados aqui elaborados.

Referências Bibliográficas

- [1] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A117** 610 (1928).
- [2] S. Weinberg, *Quantum Field Theory. Vols. I to III* Cambridge University Press (2000).
- [3] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981).
- [4] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48** 1220 (1982).
- [5] A. Linde, *Phys. Lett.* **108B** 389 (1982).
- [6] S. Weinberg, *The European Phys. J. C* **34** Issue 1, pp 5-13 (2004).
- [7] Roman Jackiw, *arXiv: hep-th/9911071* (1999).
- [8] Roman Jackiw, *arXiv: hep-th/9709212* (1997).
- [9] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55** 6760 (1997).
- [10] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58** 116002 (1998).
- [11] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **63** 065008 (2001).

- [12] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena, and R. Turcati, *Phys. Rev. D* **83** 104005 (2011).
- [13] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati, and B. Pereira-Dias, *Class. Quantum Grav.* **28** 225008 (2011).
- [14] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *Mod. Phys. Lett. A* **26** 1985 (2011).
- [15] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *arXiv: hep-th: 1012.1045v2* (2011).
- [16] A. Accioly, J. Helayël-Neto, R. Turcati, J. Morais and E. Scatena, *Class. Quantum Grav.* **27** 205010 (2010).
- [17] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Lett. A* **374** 3806 (2010). *This essay was awarded an honorable mention in the 2010 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*
- [18] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Int. J. Mod. Phys. D* **19** 2393 (2010).
- [19] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Rev. D* **82** 065026 (2010).
- [20] B. Podolsky, *Phys. Rev.* **62** 68 (1942).
- [21] B. Podolsky and C. Kikuchi, *Phys. Rev.* **65** 228 (1944).
- [22] B. Podolsky and C. Kikuchi, *Phys. Rev.* **67** 184 (1945).
- [23] D. J. Montgomery, *Phys. Rev.* **69** 117 (1946).
- [24] Alex E. S. Green, *Phys. Rev.* **72** 628 (1947).

- [25] Alex E. S. Green, *Phys. Rev.* **73** 26 (1948).
- [26] W. Thirring, *Phys. Rev.* **77** 570 (1950).
- [27] Jonathan Z. Simon, *Phys. Rev. D* **41** 3720 (1990).
- [28] P. Broadbridge, *J. Phys. A* **16** 3271 (1983).
- [29] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **51** 1 (1972).
- [30] K. S. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9** 353 (1978).
- [31] M. Mintchev, *J. Phys. A* **13** 1841 (1980).
- [32] U. Moschella, *J. Math. Phys.* **31** 2480 (1990).
- [33] S. W. Hawking and T. Hertog, *Phys. Rev. D* **65** 103515 (2002).
- [34] S. Coleman, in *Proceedings of Erice 1969, Ettore Majorana School on Subnuclear Phenomena*
- [35] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **79** 145 (1950).
- [36] T. D. Lee and G. C. Wick, *Nucl. Phys.* **B9** 209 (1969).
- [37] T. D. Lee and G. C. Wick, *Phys. Rev. D* **2** 1033 (1970).
- [38] T. D. Lee, in *Quanta* edited by P. G. O. Freund, C. J. Goebel, and Y. Nambu (Chicago U. P., Chicago, 1970), p.260.
- [39] G. W. Gibbons, *arXiv: hep-th/0302199* (1999).
- [40] S. M. Carroll, M. Hoffman, and M. Trodden, *Phys. Rev. D* **68** 023509 (2003).

- [41] R. P. Woodard, *Lect. Notes Phys.* **720** 403 (2007).
- [42] A. O. Barvinsky and G. A. Vilkovisky, *Nucl. Phys.* **B282** 163 (1987).
- [43] A. O. Barvinsky and G. A. Vilkovisky, *Nucl. Phys.* **B333** 471 (1990).
- [44] F. Cameli, G. Jona-Lasinio, C. Presilla, and F. Toninelli, *arXiv: quant-ph/9910065* (1999).
- [45] A. A. Slavnov, *Teor. Mat. Fiz* **13** 174 (1972).
- [46] D. Evens, J. W. Moffat, G. Kleppe, and R. P. Woodard, *Phys. Rev. D* **43** 499 (1991).
- [47] T. D. Bakeyev and A. A. Slavnov, *Mod. Phys. Lett. A* **11** 1539 (1996).
- [48] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D.* **16** 953 (1977).
- [49] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, *Nucl. Phys.* **B325** 389 (1989).
- [50] C. S. Chu, J. Lukierski, and W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys.* **B632** 219 (2002).
- [51] Liang-Cheng Tu, Jun Luo and George T. Gillies, *Rep. Prog. Phys.* **68** 77-130 (2005).
- [52] Alfred Scharff Goldhaber and Michael Martin Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **82** 939-979 (2010).
- [53] J. Beringer et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86** 010001 (2012).
- [54] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73** 416 (1948).
- [55] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **100** 120801 (2008).

Parte I

Teorias com Derivadas de Ordem Superior

A Eletrodinâmica Finita de Lee e Wick

Alguns aspectos da eletrodinâmica de Lee e Wick são analisados: potencial não-relativístico, propagação ondulatória, limites para a massa da partícula pesada de Lee e Wick e o formalismo hamiltoniano. São apresentadas também discussões sobre renormalizabilidade, unitariedade, causalidade e quantização com vínculos para o sistema em questão. Finalmente, são tecidas considerações sobre a existência de monopolos magnéticos neste modelo de ordem superior.

1.1 Introdução

A ambiguidade existente na manipulação de expressões divergentes para os sistemas hadrônicos - através de cálculos perturbativos na eletrodinâmica usual - fizeram com que Lee e Wick propusessem, no final dos anos 60, uma nova eletrodinâmica quântica, cuja ação era:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2M^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial^\lambda F_{\lambda\nu} \right], \quad (1.1)$$

onde $F_{\mu\nu} (\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ é o *field strength* e $M (> 0)$ é um parâmetro de massa.

A diferença de massa finita que era observada experimentalmente nos laboratórios

não era obtida nos cálculos teóricos, cálculos estes que divergiam quando inseridos no contexto da eletrodinâmica usual. Entre as várias propostas, a mais natural era supor que a diferença nas massas devia-se unicamente à interação eletromagnética, uma vez que os infinitos - associados aos comutadores a tempos iguais entre o operador de corrente e suas derivadas - não poderiam ser removidos pelas interações fortes [1-3].

A eletrodinâmica quântica, por sua vez, fornece resultados extremamente precisos para as medidas experimentais, como a anomalia do momento magnético anômalo do elétron, entre outros. Contudo, embora consistente do ponto de vista teórico, esta eletrodinâmica apresentava discrepâncias em relação aos dados observacionais no limite de altas energias. Sendo assim, uma proposta de modificação da teoria em vigor deveria levar em conta os bons aspectos do eletromagnetismo de Maxwell e alterar o sistema no setor no qual os problemas se apresentavam. Isso implicava uma alteração no regime de altas frequências a fim de eliminar os infinitos. Levando-se em conta estes aspectos, Lee e Wick propuseram a alteração da eletrodinâmica através da adição de um termo cinético de ordem superior nos campos [4-6]. Esta proposta dá ao regularizador de Pauli-Villars o *status* de um grau de liberdade adicional, introduzindo assim uma escala de comprimento no modelo. Esse novo modo de excitação modifica o comportamento do propagador usual através da adição de um pólo massivo. Como consequência, seu comportamento no ultravioleta fica mais suave, tornando a eletrodinâmica de Lee e Wick finita.

Contudo, foi a Cromodinâmica Quântica a responsável pela resolução do problema das diferenças de massas nos multipletos, colocando desta maneira o modelo de Lee e Wick no ostracismo por quase três décadas. Entretanto, em 2008, Grinstein, O'Connell e Wise construíram uma extensão do Modelo Padrão baseado nas ideias originais de Lee e Wick [7]. O Modelo Padrão de Lee e Wick (MPLW) [8-20] é uma generalização

não-abeliana da eletrodinâmica de Lee e Wick, onde cada campo do Modelo Padrão tem associado um termo cinético de ordem superior, correspondendo assim a uma ressonância massiva. Estes parâmetros livres são os únicos graus de liberdade adicionados ao modelo.

Devido a invariância de *gauge*, os termos de ordem superior induzem o aparecimento de novas interações, o que acaba gerando, no máximo, divergências logarítmicas no que diz respeito às correções radiativas. Isto implica, entre outras coisas, que o problema da hierarquia tem uma solução natural no contexto do MPLW. Contudo, para que isto seja possível, é necessário que as massas das partículas de Lee e Wick (cuja origem foge ao escopo do MPLW) sejam da ordem de TeV [21]. Diferentemente do modelo abeliano, o MPLW não é finito.

Uma vez que a eletrodinâmica abeliana de Lee e Wick é a pedra fundamental sobre o qual o MPLW é construído, aspectos relativos aos seus fundamentos são de extrema importância no seu entendimento. Sendo assim, estudamos algumas propriedades deste sistema de ordem superior, como a possibilidade da renormalizabilidade e da unitariedade coexistirem num mesmo cenário, além de um estudo da quantização com vínculos à la Dirac. No entanto, a fim de nos familiarizarmos com o modelo, vamos primeiro analisar uma série de pontos importantes do citado sistema.

Ao longo de todo o capítulo, utilizamos o sistema natural de unidades ($\hbar = c = 1$); a métrica por sua vez foi escolhida com a assinatura $(+1, -1, -1, -1)$.

1.2 O Modelo Abeliano de Lee e Wick

O eletromagnetismo abeliano de Lee e Wick é definido pela densidade de lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2M^2}\partial^\mu F_{\mu\nu}\partial_\lambda F^{\lambda\nu}, \quad (1.2)$$

o que claramente mostra que o lagrangiano usual de Maxwell é alterado pela adição de um operador cinético de dimensão 6, ou seja, através de derivadas de quarta ordem nos campos.

As equações de campo, em decorrência, assumem a forma:

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right)\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.3)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

Conseqüentemente, as equações com fonte são alteradas, enquanto que as equações homogêneas coincidem com as usuais identidades de Bianchi do eletromagnetismo ordinário. Mais derivadas nos campos, no entanto, implicam não só em mais condições iniciais mas também no aparecimento de instabilidades [22]. Entretanto, estas instabilidades podem ser evitadas através de condições de contorno no futuro que impeçam o crescimento exponencial de certos modos [4-6].

O propagador é obtido como de hábito via a adição de um termo de fixação de gauge $(-\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2)$, sendo dado por:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \lambda\frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right]. \quad (1.5)$$

O conhecimento dos graus de liberdade que o modelo carrega é aspecto fundamental

no entendimento de qualquer teoria quântica. Uma maneira de realizar esta análise, é através da contração do propagador com correntes externas conservadas $j^\mu(k)$. Realizando esta contração, obtemos:

$$\mathcal{M} \equiv j^\mu(k)D_{\mu\nu}(k)j^\nu(k) = -\frac{j^2}{k^2} + \frac{j^2}{k^2 - M^2}. \quad (1.6)$$

Levando-se em conta que $j^2 < 0$ [23-25], concluimos que existem dois pólos na região física:

$$Res\mathcal{M}(k^2 = 0) > 0, \quad Res\mathcal{M}(k^2 = M^2) < 0. \quad (1.7)$$

A análise destes pólos nos mostra de imediato que o modelo carrega dois modos de excitação de spin-1 na concha de massa: um de massa de repouso nula e outro massivo. O grau de liberdade massivo possui resíduo negativo, o que traz uma série de consequências desagradáveis [26]. Na escala quântica, há a perda do mínimo de energia implicando no aparecimento de estados de norma negativa (*ghosts*). Lee e Wick contornaram este problema impondo que a partícula massiva deveria decair de maneira a não interferir no espectro de partículas [4-6]. Desta modo, o modelo recupera a unitariedade.

Outro aspecto fundamental na construção de uma teoria quântica diz respeito à renormalizabilidade. Escrevendo o propagador, resulta:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)}\eta_{\mu\nu} = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - M^2}. \quad (1.8)$$

Isto mostra, que o propagador de Lee e Wick sem os termos que se anulam quando contraídos com correntes conservadas nada mais é que uma combinação do propagador usual de Maxwell com o propagador de Proca com o sinal trocado. O primeiro

termo é renormalizável por contagem de potências. O segundo, apresenta um mau comportamento no limite ultravioleta ($k \rightarrow \infty$). Teorias vetoriais massivas não se aproximam assintoticamente de zero. Contudo, existem duas exceções à esta regra: (i) teorias de gauge com quebra espontânea da simetria e (ii) teorias com bósons vetoriais neutros acoplados a correntes conservadas [27-30]. A condição (ii) garante a renormalizabilidade do modelo. A eletrodinâmica de Lee e Wick apresenta portanto melhor comportamento assintótico quando comparada com a eletrodinâmica usual, já que seu propagador cai com k^4 [31].

O potencial não-relativístico de Lee e Wick, por sua vez, apresenta um comportamento curioso. De fato, já que o propagador de Lee e Wick pode ser visto como a diferença entre o propagador de Maxwell e o propagador de Proca quando contraído com correntes conservadas, concluímos que:

$$\begin{aligned} U(r) &= U(r)_{(Coulomb)} - U(r)_{(Yukawa)} \\ &= -\frac{e^2}{4\pi r} [1 - \exp\{-Mr\}], \end{aligned} \quad (1.9)$$

o que implica nas seguintes propriedades:

- Diferentemente do potencial de Coulomb e do potencial de Yukawa, U é finito na origem ($U(0) = -\frac{e^2 M}{4\pi}$).
- U reproduz o potencial Coulombiano para grandes distâncias ($r \rightarrow \infty$), como era de se esperar.
- Para pequenas distâncias ($r \rightarrow 0$), U difere significativamente do potencial de Coulomb.

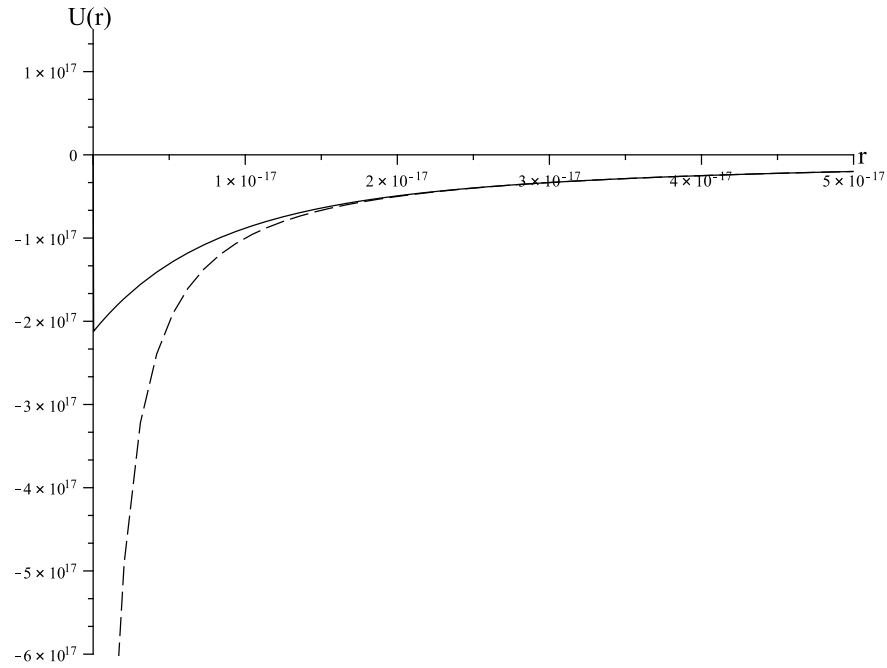


Figura 1.1: O POTENCIAL U (EM UNIDADES DE $\frac{e^2}{4\pi}$), COMO FUNÇÃO DA DISTÂNCIA r . A LINHA PONTILHADA REPRESENTA O POTENCIAL DE COULOMB NAS MESMAS UNIDADES.

1.3 Propagação Ondulatória na Eletrodinâmica de Lee e Wick

Na eletrodinâmica de Lee e Wick, o potencial A^μ obedece às equações

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) (\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) = 0, \quad (1.10)$$

que no *gauge* de Lorentz reduzem-se a

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \square A^\nu = 0. \quad (1.11)$$

A fim de encontrarmos as relações de dispersão passamos para o espaço dos momenta via o ansatz $A^\nu(x) = \tilde{A}^\nu e^{-ikx}$. Levando este resultado em (1.11), obtemos prontamente que

$$\left(1 - \frac{k^2}{M^2}\right) k^2 = 0. \quad (1.12)$$

Como $k^\mu = (w, \mathbf{k})$, podemos reescrever esta equação como

$$(w^2 - \mathbf{k}^2) \left[\frac{w^2 - \mathbf{k}^2}{M^2} - 1 \right] = 0. \quad (1.13)$$

A equação (1.13) admite duas classes de solução. A primeira família é a das soluções usuais da eletrodinâmica para as quais vale a relação de dispersão $w = |\mathbf{k}|$. A outra família satisfaz a relação $\mathbf{k}^2 = w^2 - M^2$, que pode ser colocada na forma mais familiar

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{w^2 - w_P^2} \quad (1.14)$$

com $w_P = M$. Esta equação descreve ondas eletromagnéticas propagando-se através de um plasma sem colisões [32-34] com um comprimento de atenuação $\delta \equiv \frac{1}{w_P} = \frac{1}{M}$ muito pequeno ¹ [35-37].

Examinando a equação (1.14) vemos que $|\mathbf{k}|$ é real somente se $w > w_P$. Se $w < w_P$, $|\mathbf{k}|$ é um número imaginário puro, tais modos não se propagam e são chamados de modos evanescentes

Podemos agora determinar as velocidades de grupo e fase para os modos dispersivos

¹Vamos estimar nesta e na próxima seção valores para M , o que nos permitirá constatar que $\delta \ll 1$.

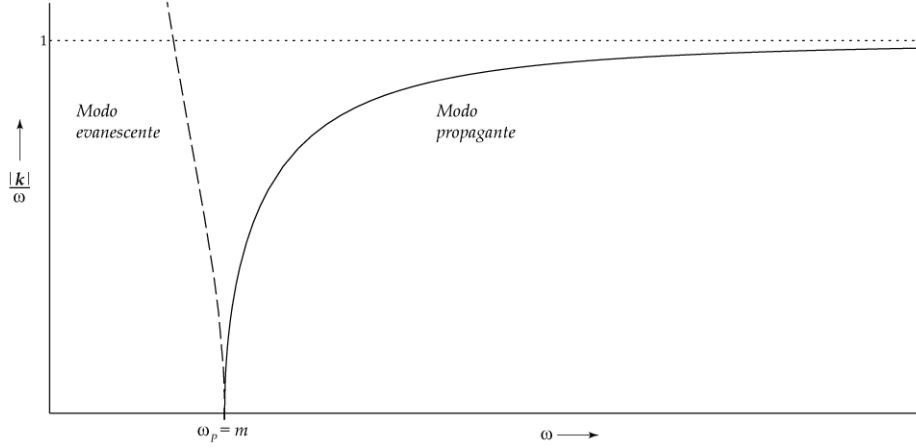


Figura 1.2: RELAÇÕES DE DISPERSÃO PARA A ELETRODINÂMICA DE LEE E WICK. A LINHA CONTÍNUA DENOTA O MODO PROPAGANTE E A LINHA TRACEJADA REPRESENTA A PARTE IMAGINÁRIA DO MODO EVANESCENTE.

propagantes. A velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{\partial w}{\partial |\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{w}, \quad (1.15)$$

ao passo que a velocidade de fase é determinada pela relação

$$v_p = \frac{w}{|\mathbf{k}|}. \quad (1.16)$$

Analisando (1.15) e (1.16) concluímos que $v_g < 1$ e $v_p > 1$, o que concorda com a ideia que estamos perseguindo de ser esta propagação eletromagnética análoga à propagação de ondas eletromagnéticas num vácuo tipo-plasma.

Das considerações anteriores concluí-se que M é um *cutoff* para o modelo de Lee e Wick. Seria fundamental, portanto, estimar um limite para este parâmetro. Examinemos, com este intuito, o potencial dado pela equação (1.9). O fato deste potencial

ser finito quando $r \rightarrow 0$ é uma indicação de que a auto-energia e a massa eletromagnética de uma partícula carregada puntiforme na teoria de Lee e Wick são finitas. Na realidade, como argumentaremos abaixo, no âmbito desta teoria não só a massa eletromagnética é finita, como o célebre problema dos 4/3 da eletrodinâmica de Maxwell encontra uma resolução natural.

A equação de movimento de Newton relativa à uma carga estendida no contexto do modelo de Abraham-Lorentz é dada por [33]

$$\frac{4}{3}m_e \dot{\mathbf{v}} - \frac{2}{3}e^2 \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (1.17)$$

onde \mathbf{v} , m_e e e são, respectivamente, a velocidade, a massa eletromagnética e a carga da partícula, e \mathbf{F}_{ext} é a força externa aplicada ao elétron. Supomos aqui que no referencial de repouso instantâneo da partícula, a distribuição de carga é rígida e esfericamente simétrica. Além disso, supomos também a ausência de massa mecânica. Evidentemente a massa eletromagnética entra com o coeficiente errado em (1.17). Por esta razão o fator 4/3 tem sido fonte de acirrados debates. Uma possível saída para esta dificuldade, entre outras, é calcular a auto-força que atua numa partícula puntiforme carregada no contexto da eletrodinâmica de Lee e Wick em pequenas distâncias. Neste caso a massa eletromagnética entra na equação de movimento em uma forma consistente com a relatividade especial; e mais, a equação de movimento correta não exhibe nem *runaway solutions* nem comportamento acausal, quando o *cutoff* $l(\equiv \frac{1}{M})$ é maior que o raio clássico do elétron [38,39]. Consequentemente $l > 1.4 \times 10^{-15}$ m, o que nos permite concluir que $M < 141$ MeV.

1.4 O Momento Magnético Anômalo do Elétron

A concordância entre teoria e experimento até a décima primeira casa decimal no que concerne ao momento magnético anômalo do elétron torna a eletrodinâmica quântica uma das teorias mais confiáveis da física. Por isso, é natural utilizar este resultado na determinação de um limite superior para a massa da partícula pesada de Lee e Wick. A ideia consiste basicamente em calcular o momento magnético do elétron no contexto do modelo de Lee e Wick e comparar o resultado obtido com aquele da eletrodinâmica usual [40]. O momento magnético anômalo do elétron provém da correção de vértice para o espalhamento do elétron por um campo magnético externo estático. No limite

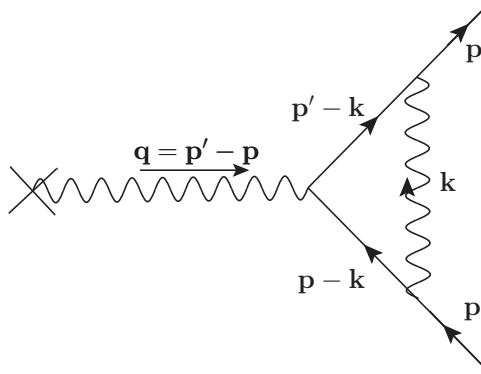


Figura 1.3: CORREÇÃO DO VÉRTICE DEVIDO A UM ELÉTRON ESPALHADO POR UM CAMPO EXTERNO.

$\mathbf{q} \rightarrow 0$, o fator giromagnético é dado por [41]:

$$g = 2[1 + F_2(0)] \quad (1.18)$$

O fator de forma ($F_2(0)$) corresponde a um deslocamento do fator giromagnético ($F_2(0) \equiv \frac{g-2}{2}$). A expressão geral é totalmente dependente do modelo, e para o caso de

Lee e Wick é dada por:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \Sigma\alpha_i) \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3} - \frac{\alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon}} \right], \quad (1.19)$$

onde $\epsilon \equiv \frac{m^2}{M^2}$, sendo m a massa do elétron. Chamamos atenção para o fato de que o termo $\frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} \left[-(1 - \lambda) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \lambda \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right]$ que aparece em (1.5) não contribui para o fator de forma porque o propagador aparece sempre acoplado com correntes conservadas.

Integrando a expressão acima primeiro com respeito a α_3 e, após, em relação a α_2 , obtemos

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} d\alpha_2 \left[\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon}} \right] \quad (1.20)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + \epsilon(1 - \alpha_1)^2}. \quad (1.21)$$

Contudo,

$$\int dx \frac{x^2}{\epsilon x^2 + x(1 - 2\epsilon) + \epsilon} = \frac{x}{\epsilon} - \frac{1 - 2\epsilon}{2\epsilon} \ln |\epsilon x^2 + x(1 - 2\epsilon) + \epsilon| \quad (1.22)$$

$$+ \frac{1 + 2\epsilon^2 - 4\epsilon}{2\epsilon^2 \sqrt{1 - 4\epsilon}} \ln \left| \frac{A - B}{A + B} \right| \quad (1.23)$$

onde $A \equiv 2\epsilon x + 1 - 2\epsilon$ e $B \equiv \sqrt{1 - 4\epsilon}$. Segue-se então que

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1 - 2\epsilon}{2\epsilon^2} \ln \epsilon + \frac{1 + 2\epsilon^2 - 4\epsilon}{2\epsilon^2 \sqrt{1 - 4\epsilon}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}} \right) \right]. \quad (1.24)$$

Lembrando que $\epsilon \ll 1$, o que implica que

$$\frac{1 + 2\epsilon^2 - 4\epsilon}{2\epsilon^2 \sqrt{1 - 4\epsilon}} \approx \frac{1 - 2\epsilon + 5\epsilon^4}{2\epsilon^2}, \quad (1.25)$$

$$\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}} \right) \approx - \left[2\epsilon + 3\epsilon^2 + \frac{20\epsilon^3}{3} + \frac{35\epsilon^4}{2} + \ln\epsilon \right], \quad (1.26)$$

chegamos à conclusão que o fator de forma é dado por:

$$F_2(0) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{m}{M} \right)^2 - 2 \left(\frac{25}{12} + \ln \left(\frac{m}{M} \right) \right) \left(\frac{m}{M} \right)^4 + O \left(\left(\frac{m}{M} \right)^6 \right) \right]. \quad (1.27)$$

O primeiro termo na expressão acima é igual àquele calculado por Schwinger em 1948 [42]. Atualmente, este valor é calculado até α^8 . O segundo termo é a correção mais importante relacionada ao parâmetro M da eletrodinâmica de Lee e Wick. Cálculos recentes no contexto da eletrodinâmica quântica para o fator de forma do elétron fornecem

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,181.13(.84) \times 10^{-12} \quad (1.28)$$

onde as incertezas associadas a medida provém em sua maior parte dos melhores valores para a constante de estrutura fina α não advindos da eletrodinâmica quântica. O valor experimental atual é [43]

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,180.73(0.28) \times 10^{-12}. \quad (1.29)$$

A concordância entre teoria e experimento é de uma parte em 10^{11} . Como consequência,

$$\frac{2}{3} \left(\frac{m}{M} \right)^2 < 10^{-11}. \quad (1.30)$$

Assim, um limite inferior para a massa da partícula pesada de Lee e Wick é $M \approx 132$ GeV. Vale ressaltar que este cálculo é puramente quântico (proveniente de *loops*).

1.5 Unitariedade Semiclássica e Acausalidade

Modelos dotados de norma negativa apresentam sérias dificuldades em relação à unitariedade. Para ilustrar este problema, analisaremos o espalhamento elétron-pósitron semiclássico. A fim de facilitar a descrição deste processo, apelamos para o formalismo de campos auxiliares. Esta técnica tem a vantagem de eliminar os termos cinéticos de ordem superior através da introdução de campos auxiliares, reduzindo a densidade de lagrangiano a termos puramente quadráticos nos campos. Para tanto, definimos o campo auxiliar como se segue:

$$Z^\mu \equiv -\frac{\partial_\lambda F^{\lambda\mu}}{M^2}. \quad (1.31)$$

Inserindo o resultado anterior em (1.2), a densidade de lagrangiano assume a forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}Z^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}M^2Z_\mu^2. \quad (1.32)$$

Com a ajuda do campo auxiliar Z^μ as equações do modelo de Lee e Wick reduzem-se a um conjunto de equações de segunda ordem nos campos A^μ e Z^μ . Uma vez que as duas descrições fornecem as mesmas equações de campo quando as devidas substituições são efetuadas, conclue-se que as duas abordagens são equivalentes. O fato dos termos cinéticos estarem misturados dificulta a interpretação física. Esta dificuldade pode ser contornada, no entanto, redefinindo-se o campo A^μ como $A^\mu = B^\mu + Z^\mu$. O resultante lagrangiano assume, em decorrência, a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 - \left[-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}M^2Z_\mu^2 \right]. \quad (1.33)$$

A densidade de lagrangiano escrita desta forma nos diz basicamente que o modelo

tem distintos comportamentos em diferentes escalas de energias. Em baixas energias, o fóton de massa nula domina a descrição do sistema, reproduzindo assim os resultados da eletrodinâmica quântica usual. Em altas energias, por sua vez, o modo massivo é excitado implicando em correções aos observáveis físicos no regime de altas frequências. Isso concorda com a ideia inicial de Lee e Wick que consistia em introduzir correções na eletrodinâmica quântica apenas no ultravioleta.

É interessante notar também que no formalismo adotado, a componente de massa nula mantém a estrutura de gauge, enquanto o modo massivo viola esta condição. Embora o propagador de Lee e Wick contenha duas partículas virtuais de spin-1, a noção de que ambas possam atuar independentemente uma da outra não é correta. De fato, os campos auxiliares não podem ser tratados independentemente, uma vez que ambos estão correlacionados via o campo A^μ , o que claramente mostra que darmos a estas duas partículas virtuais *status* de partículas livres, não faz sentido. Para o caso do campo de Lee e Wick A^μ , no formalismo usual, não é possível, por exemplo, criar estados assintóticos onde um dado campo carregue mais de uma partícula em sua propagação. Em Teoria Quântica de Campos, os estados *in* e *out* estão associados a campos — representações irredutíveis do grupo de Lorentz —, sendo que cada campo está associado a uma única partícula excitada. Desta maneira, não é possível construir partículas quânticas livres no modelo de Lee e Wick. Contudo, a mesma pode ser pensada como uma teoria para a mediação de interações, onde esta é realizada através do campo eletromagnético de Lee e Wick. Na verdade, tudo que podemos dizer é que em determinados níveis de energia, uma ou outra componente do campo é mais relevante no processo de interação. A não existência de partículas livres é, em geral, uma característica das teorias com derivadas de ordem superior. Em gravitação de ordem superior, por exemplo, como discutiremos no próximo capítulo, o propagador contém

três partículas virtuais. Obviamente, nenhuma destas partículas pode ser considerada uma partícula livre.

O propagador associado à partícula de massa de repouso nula, a menos de termos que se anulam quando contraídos com correntes conservadas, coincide evidentemente com o propagador de Maxwell

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-\eta_{\mu\nu}}{k^2}, \quad (1.34)$$

ao passo que o propagador relacionado à partícula pesada de Lee e Wick reproduz o propagador de Proca com o sinal trocado

$$D_{\mu\nu}^{LW}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - M^2}. \quad (1.35)$$

No espalhamento elétron-pósitron semiclássico, quando a massa da partícula de Lee e Wick excede as massas do par elétron-pósitron ($M > 2m_e$), o pólo de resíduo negativo surge na região física. A fim de evitar esta catástrofe, a ressonância precisa ter uma massa extremamente grande de modo a decair em partículas físicas [26]. Com o fito de analisar esta possibilidade, consideraremos inicialmente o propagador exato da partícula pesada de Lee e Wick,

$$D_{\mu\nu}^{LW}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - M^2} + \frac{\eta_{\mu\alpha}}{k^2 - M^2} (e^2 \Sigma^{\alpha\beta}(k^2)) \frac{\eta_{\beta\nu}}{k^2 - M^2} + \dots \quad (1.36)$$

$$= \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - M^2 + e^2 \Sigma(k^2)}. \quad (1.37)$$

No pico de ressonância, este propagador assume a forma

$$D_{\mu\nu}^{LW}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - M^2 - iM\Gamma} \quad (1.38)$$

onde Γ é o fator de decaimento. O sinal de menos no propagador da partícula pesada de Lee e Wick faz com que o termo $iM\Gamma$ entre com o sinal errado. Fisicamente, isto é fonte de diversos problemas. Este sinal, no entanto, pode ser absorvido na definição do fator de decaimento ($\Gamma' \rightarrow -\Gamma$). Contudo, isso implica que a ressonância de Lee e Wick decai antes mesmo de ser produzida, ou seja, tem uma probabilidade Γdt de decair num intervalo de tempo $-dt$ [7]. Consequentemente, o modelo apresenta violações da causalidade ao nível microscópico. Contudo, se a matriz de espalhamento é unitária, isso não é motivo de maiores preocupações. Uma vez que a unitariedade é mantida, os estados assintóticos após o espalhamento são compostos unicamente de partículas estáveis e nenhum paradoxo surge [26]. Comportamento similar ocorre na Mecânica Quântica quando analisamos a questão do determinismo dos processos físicos. Com o advento do formalismo quântico, ficou claro que o caráter determinístico dos sistemas era uma propriedade puramente clássica. Uma situação similar acontece aqui. De acordo com a proposta de Lee e Wick, a causalidade nada mais é do que um fenômeno que emerge do mundo clássico.

1.6 O Decaimento da Partícula Pesada de Lee e Wick

O principal argumento em defesa da unitariedade ao nível de árvore do modelo de Lee e Wick baseia-se no fato de que a partícula massiva virtual deve decair em léptons carregados, léptons estes que se encontram na concha de massa. Este fenômeno ocorre no regime de altas frequências; portanto, quando o modo de excitação massivo virtual domina o comportamento do modelo.

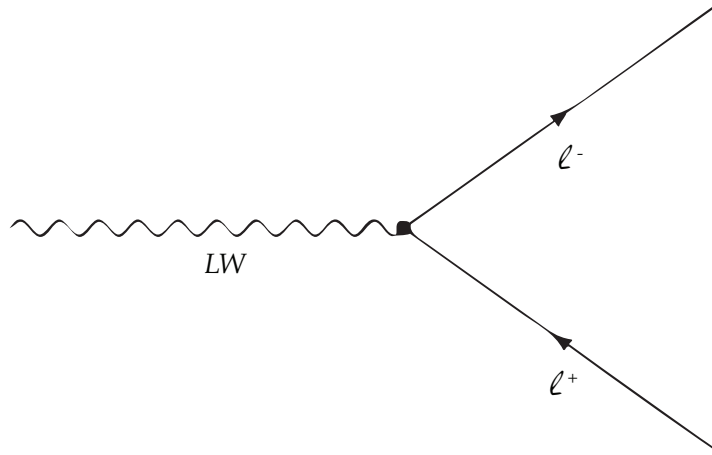


Figura 1.4: DECAIMENTO DA PARTÍCULA PESADA DE LEE E WICK EM DOIS LÉPTONS CARREGADOS.

Na realização do cálculo do decaimento em questão, adotaremos o formalismo de campos auxiliares desenvolvido na seção anterior, o que permite escrever a densidade de lagrangiano de Lee e Wick como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 - \left[-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}M^2 Z_\mu^2 \right]. \quad (1.39)$$

Como discutido anteriormente, esta prescrição nos mostra que o modelo de Lee e Wick apresenta comportamentos distintos em diferentes regimes de energia. No infravermelho, seu comportamento é similar ao caso da eletrodinâmica de Maxwell. No ultravioleta, ou seja, em pequenas distâncias, o *ghost* massivo domina a dinâmica do sistema, fazendo com que o modelo de Lee e Wick comporte-se de maneira semelhante ao eletromagnetismo de Proca, mas com sinal trocado. Conseqüentemente o propagador do modelo de Lee e Wick contraído com correntes externas conservadas tende no

limite assintótico ($k \rightarrow \infty$) ao propagador de Proca com o sinal trocado, ou seja,

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-\eta_{\mu\nu}}{k^2} - \frac{-\eta_{\mu\nu}}{k^2 - M^2} \rightarrow \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - M^2} \quad (1.40)$$

O decaimento da partícula de Lee e Wick só é possível na escala de energia próxima a massa do modo de excitação virtual. Neste limite, como já foi explanado, a dinâmica do campo de Lee e Wick é totalmente dominada pelo *ghost*, e os efeitos relativos a partícula de massa de repouso nula virtual não são relevantes e podem ser omitidos dos cálculos do decaimento.

Para realizarmos os cálculos referentes ao decaimento precisamos acoplar o campo Z^μ com correntes externas conservadas leptônicas $j^\mu(k)$. Desta maneira, obtemos a seguinte expressão para o decaimento da partícula pesada de Lee e Wick

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{2k^0} \int \frac{d^3q}{2q^0} \int \frac{d^3q'}{2q'^0} \delta^4(k - q - q') \frac{1}{12} \sum_{\lambda, s, s'} |\mathcal{M}|^2, \quad (1.41)$$

onde a amplitude de espalhamento \mathcal{M} obedece à relação

$$\mathcal{M} = e\epsilon_\mu(k, \lambda)\bar{u}_l(q, s)\gamma^\mu v_{l'}(q', s'). \quad (1.42)$$

Calculando agora o módulo ao quadrado desta amplitude e somando sobre os graus de spin, resulta

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, s, s'} |\mathcal{M}|^2 &= e^2 \sum_{\lambda, s, s'} \epsilon_\mu(k, \lambda)\bar{u}_l(q, s)\gamma^\mu v_{l'}(q', s')\epsilon_\nu(k, \lambda)\bar{v}_{l'}(q', s')\gamma^\nu u_l(q, s) \\ &= e^2 \left(\sum_{\lambda} \epsilon_\mu(k, \lambda)\epsilon_\nu(k, \lambda) \right) \left(\sum_s u_l(q, s)\bar{u}_l(q, s) \right) \gamma^\mu \left(\sum_{s'} v_{l'}(q', s')\bar{v}_{l'}(q', s') \right) \gamma^\nu \end{aligned} \quad (1.43)$$

As relações de completude para os modos de polarizações do bóson vetorial massivo e dos léptons fornecem, por sua vez, as seguintes relações

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(k, \lambda) \epsilon_{\nu}(k, \lambda) = -\eta_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{M^2}, \quad (1.44)$$

$$\sum_s u_{\alpha}(q, s) \bar{u}_{\beta}(q, s) = (\not{q} + m)_{\alpha\beta}, \quad (1.45)$$

$$\sum_{s'} v_{\alpha}(q', s') \bar{v}_{\beta}(q', s') = (\not{q}' - m)_{\alpha\beta}; \quad (1.46)$$

que quando inseridas na amplitude quadrática, nos permitem concluir que

$$\sum_{\lambda, s, s'} |\mathcal{M}|^2 = \left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{M^2} \right] \text{tr} \{ (\not{q} + m_l) \gamma^{\mu} (\not{q}' - m_l) \gamma^{\nu} \}. \quad (1.47)$$

Utilizando, por sua vez, as propriedades do traço das matrizes- γ , obtemos

$$\sum_{\lambda, s, s'} |\mathcal{M}|^2 = 4e^2 \left[-2(q \cdot q') + 4[m_l^2 + (q \cdot q')] + \frac{1}{M^2} [2(q \cdot k)(q' \cdot k) - k^2(m_l^2 + q \cdot q')] \right]. \quad (1.48)$$

Apelando para a conhecida expressão que relaciona a energia e o momentum de uma dada partícula, $k^2 = M^2$, podemos reescrever a equação anterior com se segue

$$\sum_{\lambda, s, s'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^2}{M^2} \left[(q \cdot k)(q' \cdot k) + \frac{1}{4} M^2 (M^2 + 4m_l^2) \right]. \quad (1.49)$$

Conseqüentemente, o fator de decaimento Γ para a partícula pesada de Lee e Wick assume a seguinte forma

$$\Gamma = \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{M^3} \int \frac{d^3 q}{2q^0} \int \frac{d^3 q'}{2q'^0} \delta^4(k - q - q') \left[(q \cdot k)(q' \cdot k) + \frac{1}{4} M^2 (M^2 + 4m_l^2) \right]. \quad (1.50)$$

Resolvendo esta integral, encontramos finalmente o fator decaimento da partícula pesada de Lee e Wick no referencial de repouso, ou seja,

$$\Gamma = \frac{e^2}{48\pi} M \sqrt{1 - 4\frac{m_l^2}{M^2}} \left(1 + 2\frac{m_l^2}{M^2}\right) \theta(M - 2m_l). \quad (1.51)$$

Por outro lado, tendo em conta que $M \gg 2m_l$, concluímos que

$$\Gamma \approx \frac{e^2}{48\pi} M. \quad (1.52)$$

É importante ressaltar que o tempo de meia vida τ do bóson massivo virtual de Lee e Wick abrange os canais associados a todos os léptons ($l = e, \mu$ e τ). E mais, em processos de colisão, há também a possibilidade de decaimento em hádrons. Em decorrência, o fator de decaimento total é maior que a soma dos fatores de decaimento associados aos léptons ($\Gamma_T > 3\Gamma_l$). Assim sendo, concluímos que o tempo de meia vida da partícula de Lee e Wick é dado por

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_T} < \frac{16\pi}{e^2 M} \quad (1.53)$$

Utilizando as estimativas recentes para os valores da massa do bóson vetorial virtual de Lee e Wick ($M \approx 132$ GeV), concluímos que o tempo de meia vida em questão obedece à relação $\tau \lesssim 10^{-24}s$. Consequentemente, o tempo de meia vida associado ao decaimento da partícula de Lee e Wick é extremamente pequeno, o que implica que ele não pode ser observado diretamente pelos aceleradores atuais. Seus efeitos, contudo, poderiam ser observados como ressonâncias na colisão de partículas altamente energéticas como, por exemplo, o espalhamento elétron-pósitron.

1.7 Equivalência Entre os Diversos Lagrangianos Utilizados para a Descrição do Modelo de Lee e Wick

O lagrangiano é um objeto matemático de grande utilidade na construção — no âmbito da física — de teorias covariantes; sendo de crucial importância no caso da Teoria Quântica de Campos uma vez que é a partir dele que construímos o propagador. Este, por sua vez, é de fundamental importância na análise dos aspectos quânticos da teoria tais como espectro de partículas, processos de espalhamento, decaimento de partículas, entre outros. Por outro lado, o modelo de Lee e Wick é definido na literatura utilizando-se duas lagrangianas que, a primeira vista pelo menos, não parecem ser equivalentes. Transcrevemos abaixo as lagrangianas em apreço:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4M^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}, \quad (1.54)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2M^2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\lambda\nu}. \quad (1.55)$$

Vamos mostrar que estas lagrangianas que aparentemente parecem ser inequivalentes, são na realidade equivalentes.

Partindo de (1.54) e utilizando a identidade de Bianchi para o tensor de Maxwell, ou seja,

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0,$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4M^2} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} = \partial^\lambda \left[-\frac{1}{4M^2} F^{\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{4M^2} \partial_\lambda F_{\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4M^2} \partial_\lambda F_{\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} = \frac{1}{4M^2} \partial_\lambda F_{\mu\nu} [-\partial^\mu F^{\nu\lambda} - \partial^\nu F^{\lambda\mu}] \\
&= -\frac{1}{4M^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial^\lambda F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4M^2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\lambda F_{\lambda\mu} \\
&= -\frac{1}{4M^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial^\lambda F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4M^2} \partial_\mu F^{\nu\mu} \partial^\lambda F_{\lambda\nu} \\
&= \frac{1}{2M^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial^\lambda F_{\lambda\nu}.
\end{aligned}$$

Como de praxe, na obtenção deste resultado apelamos para o Teorema de Gauss a fim de eliminarmos os termos de derivadas totais.

Concluimos, portanto, que as duas lagrangianas em questão são equivalentes a menos de derivadas totais, o que implica que ambas levam às mesmas equações de campo e ao mesmo propagador.

1.8 Sistemas Vinculados de Ordem Superior

Apresentamos agora, de passagem, os principais ingredientes relativos ao formalismo hamiltoniano no caso específico de uma teoria eletromagnética de ordem superior. O mecanismo de incorporação dos vínculos é explanado utilizando como paradigma a eletrodinâmica de Maxwell, que é um sistema de primeira ordem na lagrangiana. Na realidade, o procedimento adotado para a incorporação dos vínculos independe da ordem da lagrangiana do sistema,

Consideremos, para fixar ideias, uma teoria com derivadas de ordem superior defi-

nida pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\alpha, \partial_\beta A_\alpha, \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha), \quad (1.56)$$

onde A_α é um campo vetorial. Modelos com derivadas de ordem maior que a segunda podem ser tratados de maneira análoga à que será aqui apresentada.

As equações de campo para o modelo em questão são obtidas através do princípio variacional usual,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \delta \mathcal{L} = 0, \quad (1.57)$$

e levando em conta que nos instantes t_1 e t_2 o sistema seja caracterizado por

$$\delta A_\alpha(t_1) = \delta A_\alpha(t_2) = 0, \quad (1.58)$$

$$\delta \dot{A}_\alpha(t_1) = \delta \dot{A}_\alpha(t_2) = 0. \quad (1.59)$$

De (1.56) e (1.57), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} \right] \delta A_\alpha \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \left[\partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} \delta A_\alpha \right) - 2\partial_\beta \left(\partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha} \delta A_\alpha \right) \right. \\ & \left. + \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha} \delta A_\alpha \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} \right] \delta A_\alpha \\
&\quad + \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} \delta A_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - 2 \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \dot{A}_\alpha} \delta A_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} \right. \\
&\quad \left. + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \delta A_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \delta \dot{A}_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} \right]. \tag{1.60}
\end{aligned}$$

Em decorrência do resultado anterior, as equações de campo relativas à densidade de lagrangiana (1.56), assumem a seguinte forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} = 0. \tag{1.61}$$

Por outro lado, a passagem do formalismo lagrangiano para o formalismo hamiltoniano requer a introdução dos momenta canônicos. Em geral, estes momenta são determinados a partir do tensor de momentum-energia simétrico associado à teoria com derivadas de segunda ordem. Tal procedimento, apesar de não envolver cálculos complicados, é extremamente laborioso. Vamos aqui utilizar um método idealizado por Landau e Lifshitz [60], que simplifica enormemente esta tarefa. Em síntese, a prescrição consiste em considerar variações da ação com um dos extremos fixos, por exemplo,

$$\delta A_\mu(t_1) = 0, \tag{1.62}$$

$$\delta \dot{A}_\mu(t_1) = 0, \tag{1.63}$$

mas de modo tal que apenas as trajetórias clássicas sejam permitidas.

Utilizando a prescrição acima delineada, obtemos prontamente, usando (1.60), o

seguinte resultado

$$\delta S = \int d^3\mathbf{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} - 2\partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \dot{A}_\alpha} \right) \delta A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \delta \dot{A}_\alpha \right], \quad (1.64)$$

onde δA_α e $\delta \dot{A}_\alpha$ correspondem a variações em $t = t_2$. Os momenta canônicos π^α e η^α , conjugados respectivamente a A_α e \dot{A}_α são definidos pela relação

$$\delta S = \int d^3\mathbf{x} \left[\pi^\alpha \delta A_\alpha + \eta^\alpha \delta \dot{A}_\alpha \right]. \quad (1.65)$$

Comparando (1.64) e (1.65), concluímos que os momenta generalizados obedecem às equações

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} - 2\partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \dot{A}_\alpha}, \quad (1.66)$$

$$\eta^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha}. \quad (1.67)$$

Note que na ausência de derivadas de ordem superior, retorna-se ao resultado usual, ou seja,

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha}. \quad (1.68)$$

Isto posto, vamos definir a hamiltoniana canônica. Para tanto, adotamos o procedimento padrão, ou seja,

$$H_c = \int d^3\mathbf{x} \left[\pi^\alpha \dot{A}_\alpha + \eta^\alpha \ddot{A}_\alpha - \mathcal{L} \right]. \quad (1.69)$$

Procedendo a uma variação geral de H_c , obtemos

$$\begin{aligned} \delta H_c = & \int d^3\mathbf{x} \left[\dot{A}_\alpha \delta\pi^\alpha + \pi^\alpha \delta\dot{A}_\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta\eta^\alpha + \eta^\alpha \delta\ddot{A}_\alpha \right. \\ & \left. - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} \delta A_\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} \delta \partial_\beta A_\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha} \delta \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha \right] \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} = & \int d^3\mathbf{x} \left[\dot{A}_\alpha \delta\pi^\alpha + \left(\pi^\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} + 2\partial_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \partial_i \dot{A}_\alpha} \right) \delta\dot{A}_\alpha \right. \\ & + \left(\eta^\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha} \right) \delta\ddot{A}_\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta\eta^\alpha \\ & \left. + \left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} + \partial_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \partial_i A_\alpha} - \partial_i \partial_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \partial_i \partial_j A_\alpha} \right) \delta A_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Levando (1.66) e (1.67) em (1.71), concluimos que

$$\begin{aligned} \delta H_c = & \int d^3\mathbf{x} \left[\dot{A}_\alpha \delta\pi^\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta\eta^\alpha - \dot{\eta}^\alpha \delta\dot{A}_\alpha \right. \\ & \left. + \left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} + \partial_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \partial_i A_\alpha} - \partial_i \partial_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \partial_i \partial_j A_\alpha} \right) \delta A_\alpha - \dot{\eta}_\alpha \delta\dot{A}_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

H_c é, conseqüentemente, um funcional de A_α , \dot{A}_α , π^α e η^α , que são, em decorrência, as coordenadas canônicas deste formalismo.

As equações de Hamilton podem agora ser facilmente deduzidas. De fato, substituindo (1.61) em (1.72), obtemos

$$\delta H_c = \int d^3\mathbf{x} \left[\dot{A}_\alpha \delta\pi^\alpha + \ddot{A}_\alpha \delta\eta^\alpha - \dot{\pi}^\alpha \delta A_\alpha - \dot{\eta}^\alpha \delta\dot{A}_\alpha \right]. \quad (1.73)$$

As equações de Hamilton são, portanto,

$$\begin{aligned}
\dot{A}_\alpha(x) &= \frac{\delta H_c}{\delta \pi^\alpha(x)}, \\
\ddot{A}_\alpha(x) &= \frac{\delta H_c}{\delta \eta^\alpha(x)}, \\
\dot{\pi}_\alpha(x) &= -\frac{\delta H_c}{\delta A^\alpha(x)}, \\
\dot{\eta}_\alpha(x) &= -\frac{\delta H_c}{\delta \dot{A}^\alpha(x)}.
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Em sequência, vamos introduzir os parênteses de Poisson. Seja, então, um certo funcional $B_\alpha = B_\alpha[A_\beta, \dot{A}_\beta, \pi_\beta, \eta_\beta]$. Sua derivada total em relação ao tempo é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B_\alpha &= \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\delta B_\alpha}{\delta A_\beta} \dot{A}_\beta + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \dot{A}_\beta} \ddot{A}_\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \pi_\beta} \dot{\pi}_\beta + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \eta_\beta} \dot{\eta}_\beta \right].
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Utilizando as equações de Hamilton, obtemos

$$\frac{d}{dt}B_\alpha = \{B_\alpha, H_c\}, \tag{1.76}$$

onde

$$\begin{aligned}
\{B_\alpha, H_c\} &= \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\delta B_\alpha}{\delta A_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta \pi^\beta} + \frac{\delta B_\alpha}{\delta \dot{A}_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta \eta^\beta} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta B_\alpha}{\delta \pi_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta A^\beta} - \frac{\delta B_\alpha}{\delta \eta_\beta} \frac{\delta H_c}{\delta \dot{A}^\beta} \right],
\end{aligned} \tag{1.77}$$

é o parêntese de Poisson² entre B_α e H_c . No caso de dois funcionais B_μ e C_ν , o parêntese

²Os parênteses de Poisson são sempre calculados em tempos iguais e apresentam as seguintes propriedades algébricas:

de Poisson é definido da mesma maneira que em (1.77). Note que as expressões (1.75) e (1.76) atestam a consistência da definição da hamiltoniana canônica apresentada em (1.69).

Os parênteses fundamentais de Poisson são, no caso em pauta,

$$\{A_\alpha(x), \pi^\beta(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.78)$$

$$\{\dot{A}_\alpha(x), \eta^\beta(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.79)$$

sendo os demais parênteses nulos.

O próximo passo será estabelecer, a partir da lagrangiana , se o modelo a ser analisado é ou não singular. Um sistema de segunda ordem é dito singular se a sua matriz hessiana

$$W^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha \partial \ddot{A}_\beta} \quad (1.80)$$

possui determinante nulo. Sistemas que apresentam determinante diferente de zero são chamados sistemas regulares, ou seja, não possuem vínculos, o que implica que sua hamiltoniana é univocamente determinada.

No caso dos sistemas vinculados (que são precisamente os que nos interessam, uma vez que iremos analisar modelos invariantes de *gauge*), seria necessário mostrar como os diferentes vínculos são incorporados à teoria. Isto, no entanto, não requer um tratamento especial. O procedimento é o mesmo que no caso dos sistemas de primeira

-
- (i) $\{A, B\} = -\{B, A\}$;
 - (ii) $\{A + \alpha B, C\} = \{A, C\} + \alpha\{B, C\}$, com α independente das variações canônicas;
 - (iii) $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$;
 - (iv) $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$;
 - (v) $\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0$.

ordem [61-69].

1.9 Quantização Canônica da Eletrodinâmica de Ordem Superior

A bem da simplicidade, vamos usar a seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4M^2}\partial_\mu F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta}, \quad (1.81)$$

para efetuar a quantização canônica da eletrodinâmica de Lee e Wick.

A matriz hessiana do sistema,

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\alpha \partial \ddot{A}_\beta} \\ &= \frac{1}{M^2}(\eta^{\alpha\beta} - \delta_0^\alpha \delta_0^\beta) \\ &= \frac{1}{M^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tem determinante nulo, o que mostra que a lagrangiana em questão é singular. Tal resultado já era esperado, uma vez que esta lagrangiana é invariante de *gauge*. De acordo com os resultados da seção anterior, as variáveis dinâmicas são (A^α, π_α) e $(\bar{A}^\alpha, \eta_\alpha)$, onde $\bar{A}^\alpha \equiv \dot{A}^\alpha$ é considerada uma variável independente.

A partir do formalismo previamente desenvolvido, vemos que os momenta genera-

lizados são dados por:

$$\pi^\nu = -F^{0\nu} - \frac{1}{M^2} (\square F^{0\nu} + \partial_0 \partial_i F^{i\nu}), \quad (1.82)$$

$$\eta^\nu = \frac{1}{M^2} \partial_0 F^{0\nu}. \quad (1.83)$$

Os vínculos primários são vínculos obtidos da definição dos momenta, sendo no caso iguais a

$$\Omega_1 = \eta_0 \approx 0, \quad (1.84)$$

$$\Omega_2 = \pi_0 + \partial_i \eta_i \approx 0; \quad (1.85)$$

onde o símbolo “ ≈ 0 ” é lido como *fracamente igual a zero* e significa que a relação acima não vale, necessariamente, dentro dos parênteses de Poisson.

Notando que $\eta^i = \frac{1}{M^2} \partial_0 F^{0i}$, obtemos prontamente que

$$\dot{\bar{A}}_i = M^2 \eta_i + \partial_i \bar{A}_0, \quad (1.86)$$

e, conseqüentemente, que

$$\eta^\mu \dot{\bar{A}}_\mu = \eta^i \dot{\bar{A}}_i = M^2 \eta^i \eta_i - \bar{A}_0 \partial_i \eta^i.$$

A hamiltoniana canônica pode então ser escrita como

$$\begin{aligned}
H_C &= \int d^3\mathbf{x} \left[\pi^\alpha \bar{A}_\alpha + \eta^\alpha \dot{\bar{A}} - \mathcal{L} \right] \\
&= \int d^3\mathbf{x} \left[\pi_0 \bar{A}_0 - \pi_i \bar{A}_i + \bar{A}_0 (\partial_i \eta_i) - \frac{1}{2} M^2 \eta_i^2 - \frac{1}{2} F_{0i}^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2M^2} (\partial_j F_{0i}) (\partial_j F_{0i}) - \frac{1}{4M^2} (\partial_0 F_{ij}) (\partial_0 F_{ij}) + \frac{1}{4M^2} (\partial_k F_{ij}) (\partial_k F_{ij}) \right]. \quad (1.87)
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a hamiltoniana primária tem a seguinte forma

$$H_1 = H_C + \int d^3\mathbf{x} [\lambda_1 \eta_0 + \lambda_2 (\pi_0 + \partial_i \eta_i)]. \quad (1.88)$$

Podemos agora impor que os vínculos primários sejam preservados no tempo. Usando os parênteses de Poisson fundamentais,

$$\begin{aligned}
\{A^\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)\} &= \delta_\beta^\alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \\
\{\bar{A}^\alpha(\mathbf{x}, t), \eta_\beta(\mathbf{x}', t)\} &= \delta_\beta^\alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),
\end{aligned}$$

é fácil mostrar que

$$\dot{\eta}_0 = \{\eta_0, H_1\} \approx 0, \quad (1.89)$$

$$(\dot{\pi}_0 + \partial_i \dot{\eta}_i) = \{\pi_0 + \partial_i \eta_i, H_1\} = \partial_i \pi^i \approx 0, \quad (1.90)$$

o que mostra que existe um vínculo secundário $\partial_i \pi_i \approx 0$.

Vamos continuar procurando vínculos secundários. Utilizando a hamiltoniana

$$H_2 = H_C + \int d^3\mathbf{x} [\lambda_1 \eta_0 + \lambda_2 (\pi_0 + \partial_i \eta_i) + \lambda_3 \partial_i \pi_i], \quad (1.91)$$

e computando $\partial_i \dot{\pi}_i = \{\partial_i \pi_i, H_2\}$, concluímos que $\{\partial_i \pi_i, H_2\} \approx 0$, o que implica que a condição de consistência não fornece novos vínculos. Resulta, em decorrência, que a hamiltoniana estendida, H , coincide com H_2 .

Passemos agora à análise das equações de campo de Hamilton. As equações relativas a A_i nos dizem que

$$\dot{A}_i = \{A_i, H\} = \bar{A}_i + \partial_i \lambda_3, \quad (1.92)$$

enquanto que aquela associada a A_0 nos fornece

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H\} = \bar{A}_0 + \lambda_2, \quad (1.93)$$

o que permite escolher os seguintes valores para os multiplicadores de Lagrange acima

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0. \quad (1.94)$$

Por outro lado, as equações concernentes a \bar{A}_i e \bar{A}_0 , nos levam aos seguintes resultados

$$\dot{\bar{A}}_i = \{\bar{A}_i, H\} = M^2 \eta_i + \partial_i \bar{A}_0, \quad (1.95)$$

$$\dot{\bar{A}}_0 = \{\bar{A}_0, H\} = \lambda_1. \quad (1.96)$$

A equação (1.95) reproduz a equação (1.86), ao passo que a equação (1.96) nos assegura por um lado, que $\dot{\bar{A}}_0$ é uma função arbitrária e, conseqüentemente, que A_0 é também arbitrário; por outro, que podemos escolher o multiplicador de Lagrange

$$\lambda_1 = \dot{\bar{A}}_0.$$

As equações de campo concernentes a η_j , π_0 e π_j não trazem novas informações, e serão por isso omitidas.

A hamiltoniana estendida pode então ser escrita finalmente sob a forma

$$H = H_C + \int d^3\mathbf{x} \dot{A}_0 \eta_0. \quad (1.97)$$

Esta hamiltoniana gera a evolução temporal do sistema com total liberdade de *gauge*, isto é, ela descreve o sistema sem que haja ocorrido fixação de *gauge*.

Antes de procedermos à quantização canônica do sistema, é importante notar que a classificação dos vínculos em primários e secundários está diretamente ligada à maneira como os vínculos são obtidos. No que concerne à quantização canônica, no entanto, existe uma classificação mais apropriada para os vínculos, que consiste em organizá-los em dois grupos:

Vínculos de Primeira Classe: Possuem parênteses de Poisson (fracamente) iguais a zero com todos os vínculos da teoria.

Vínculos de Segunda Classe: Possuem pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero com os outros vínculos.

É importante frisar que a existência de vínculos de primeira classe implica na invariância da teoria por transformações de *gauge*.

Isto posto, retornemos ao problema da quantização canônica de nossa teoria. Os vínculos deste sistema, ou seja,

$$\eta^0 \approx 0, \quad \pi_0 + \partial_i \eta_i \approx 0, \quad \partial_i \pi_i \approx 0,$$

são vínculos de primeira classe, o que era esperado devido a invariância local $\mathbf{U}(1)$ da

teoria de Lee e Wick.

Sendo o número de vínculos igual a três³, todos vínculos de primeira classe, teremos então que a fixação de *gauge* deve nos fornecer mais três vínculos. Obviamente o conjunto formado por todos os vínculos, no caso seis, deve ser de segunda classe.

Estas condições podem ser encontradas através da análise das equações de campo do modelo de Lee e Wick reescritas como

$$\left[1 + \frac{\square}{M^2}\right] \square A^\nu - \partial^\nu \left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.98)$$

Vê-se facilmente que estas reduzem-se a uma “equação de onda generalizada”

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \square A_\nu = 0, \quad (1.99)$$

se e somente se a seguinte equação é satisfeita

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu A^\mu = C, \quad (1.100)$$

onde C é uma constante que pode ser escolhida igual a zero sem perda de generalidade.

A condição

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (1.101)$$

nada mais é que uma “condição de *gauge* de Lorentz generalizada”. Isto posto, retornemos à questão da determinação das três condições de *gauge*. Para tanto, notemos

³Três vínculos significam, na realidade, três equações de vínculos, já que em teoria de campos com vínculos, estes são sempre em número infinito, pois existe um vínculo em cada ponto do espaço-tempo.

que as equações de campo do modelo podem ser escritas como

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \square A_0 - \partial_0 \left[\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \bar{A}^0 + \left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = 0, \quad (1.102)$$

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \square A_i - \partial_i \left[\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \bar{A}^0 + \left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = 0. \quad (1.103)$$

Estas equações nos mostram que o conjunto de condições de *gauge*⁴,

$$\bar{A}_0 = 0, \quad \left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad A_0 = 0,$$

são compatíveis com as equações (1.102) e (1.103). Observe que estes vínculos são consistentes, isto é, não possuem evolução temporal.

Vamos então computar a matriz dos parênteses dos vínculos, que será inversível caso o conjunto de condições de *gauge* que selecionamos acima seja apropriado. Os vínculos de nosso modelo, todos de segunda classe, podem ser enumerados como se segue

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \bar{A}_0 \approx 0, & \Omega_2 &= \left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_i A_i \approx 0, & \Omega_3 &= A_0 \approx 0, \\ \Omega_4 &= \eta_0 \approx 0, & \Omega_5 &= \pi_0 + \partial_i \eta_i \approx 0, & \Omega_6 &= \partial_i \pi_i \approx 0. \end{aligned}$$

Operando com estes vínculos, obtemos prontamente a matriz dos parênteses dos

⁴Poderíamos ter escolhido igualmente o conjunto de condições de *gauge* $\bar{A}_0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, A_0 = 0$.

vínculos do sistema, ou seja

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \nabla^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \nabla^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Esta matriz é inversível, sendo sua inversa igual a

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 \\ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ é a função de Green do operador $\left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \nabla^2$ e satisfaz, portanto, à equação $\left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, que tem por solução

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[1 - e^{-M|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right].$$

Podemos agora determinar os parênteses de Dirac. Um cálculo direto nos mostra que os únicos parênteses de Dirac não triviais são $\{A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D$ e $\{\bar{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \eta^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D$.

Passemos, então, ao cômputo desses objetos.

$$\begin{aligned}\{A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D &= \eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}') \\ &\quad + \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \eta^{\mu i} \frac{\partial}{\partial y^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) G(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \frac{\partial}{\partial z^j} \eta^{\nu j} \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}'), \\ \{\bar{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \eta^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D &= \eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}').\end{aligned}$$

Portanto,

$$\{A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D = (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \eta^{\mu i} \eta^{\nu j} \left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$\{\bar{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \eta^\nu(\mathbf{x}', t)\}_D = (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Como as relações de vínculo valem fortemente no que concerne aos parênteses de Dirac, A_0 , \bar{A}_0 e η_0 são nulos. Assim sendo, os comutadores não nulos tomam a forma

$$[A^i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}, t)] = i \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i \left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \partial^i \partial_j' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.104)$$

$$[\bar{A}^i(\mathbf{x}, t), \eta_j(\mathbf{x}', t)] = i \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.105)$$

É importante notar que na ausência de derivadas de ordem superior (1.104) se reduz ao caso usual de Maxwell.

Outro ponto importante é verificar se a álgebra do grupo de Poincaré é satisfeita em termos dos parênteses de Dirac. Os cálculos neste caso são mais sutis e complicados que aqueles relacionados à eletrodinâmica de Maxwell, não trazendo, no entanto, nenhuma contribuição relevante à nossa investigação. Maiores detalhes sobre esta questão, assim como sobre a quantização canônica do modelo de Lee e Wick no “*gauge* de radiação

generalizado” podem ser encontrados na Ref. [45].

Para encerrarmos esta discussão vamos discutir, de passagem, sobre a história da quantização de Teorias Eletromagnéticas de Ordem Superior.

Ao que tudo indica, a primeira tentativa de se quantizar uma teoria eletromagnética de ordem superior foi feita por Podolsky e Kikuchi em 1944 [46], sendo repetida em 1948 por Podolsky e Schwed [47]. Nestes artigos a quantização foi realizada *à la* Gupta-Bleuler; os resultados, porém, são questionáveis, devido ao fato de que na época a questão da implementação do esquema de quantização que exige a quebra de simetria de *gauge*, ou seja, a eliminação das variáveis dependentes da teoria através da escolha de condições de *gauge* que devem ser impostas nas variáveis dinâmicas da teoria (um procedimento, convenhamos, nada trivial no caso de uma teoria de ordem superior, mesmo nos dias de hoje) – não era bem conhecido. É importante lembrar que a teoria de vínculos de Dirac só começou a dar os seus primeiros passos em meados dos anos 60. Nos anos 50, George R. Pitman, Jr.⁵ [48] e Richard E. Martin⁶ [49], analisaram em suas teses de doutorado orientadas por Podolsky, novos aspectos da citada eletrodinâmica. Novamente, os resultados encontrados são questionáveis devido a inabilidade em tratar com os vínculos de *gauge* e avaliar corretamente a auto-energia do elétron.

A quantização canônica de teorias com derivadas de ordem superior via formalismo com vínculos de Dirac tem sido, por sua vez, alvo de investigação de alguns autores [50-54]; por outro lado, a quantização de eletrodinâmicas de ordem superior por métodos que exigem como ponto de partida a determinação dos vínculos primários e secundários do modelo foram realizadas nas Refs. [55-58]. Em [55] e [56] a lagrangiana da teoria está

⁵Generalized Quantum Electrodynamics: a Covariant Formulation (University of Cincinnati, Ph.D., 1960)

⁶Electron Self Energy in Generalized Quantum Electrodynamics (University of Cincinnati, Ph.D., 1955)

errada. Por outro lado, em [55] o número de vínculos primários é igual a 2, enquanto que em [56], a mesma teoria discutida em [55] apresenta apenas um vínculo primário. Tanto em [55] quanto em [59] se reivindica que não se pode usar o *gauge* $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, mas sim $(1 + \frac{\square}{M^2}) \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Em [56], por sua vez, é alegado que os dois *gauges* são apropriados. Acreditamos que este pequeno resumo seja suficiente para mostrar que a quantização de uma Teoria de *Gauge* de Ordem Superior envolve, como dizia Camões, “engenho e arte”.

1.10 Discussão

Quando falamos de uma teoria quântica, aspectos como quantização, renormalização e unitariedade são essenciais para sua consistência. No modelo de Lee e Wick, mostramos que é possível a coexistência da renormalizabilidade e da unitariedade ao nível de árvore, quando consideradas as modificações propostas por estes autores. Contudo, fica em aberto a questão da unitariedade desta eletrodinâmica de ordem superior quando se leva em conta as correções radiativas. Nos processos de espalhamento, quando se consideram os *loops*, a massa pode assumir valores complexos e estes pólos surgem na região física como estados intermediários, comprometendo assim a unitariedade do modelo. Para contornar esta dificuldade, Lee e Wick sugeriram que o domínio de integração deveria ser deformado de tal maneira que não interceptasse nenhuma singularidade do integrando. Fisicamente, isso implicava que a partícula de Lee e Wick deveria ser pesada sendo obrigada a decair rapidamente, pois assim os estados de norma quadrada negativa não seriam excitados no espaço de Hilbert. Assim sendo, o caráter unitário do modelo seria mantido. O enfoque utilizado por Lee e Wick mantém o caráter invariante de Lorentz da teoria. Contudo, os pólos complexos levam a uma

violação da causalidade ao nível microscópico, o que por sua vez, não gera nenhum paradoxo visto que os estados assintóticos da matriz de espalhamento são formados unicamente por ondas planas. É importante frisar que a eletrodinâmica de Lee e Wick é uma teoria voltada para a mediação da interação, ou seja, suas partículas são virtuais, ou seja, estão fora da concha de massa. Certamente, não é possível a construção de estados *in* e *out* formado por partículas livres de Lee e Wick.

O campo eletromagnético de Lee e Wick carrega uma partícula virtual de spin-1 de massa nula e um *ghost* de spin-1 massivo. A análise realizada através da quantização canônica mostrou a existência de 3 vínculos de primeira classe, resultado que era esperado, uma vez que o sistema possuiu a invariância local $\mathbf{U}(1)$. Com isso, foram necessárias fixar três condições de *gauge* a fim de se realizar a quantização canônica.

Um aspecto interessante da eletrodinâmica de Lee e Wick é a possibilidade dela ser compatível com monopolos magnéticos [70]. Abordamos este assunto em sequência.

Na presença de uma fonte, $\mathcal{L}_{\text{fonte}} = -A^\mu J_\mu$, as equações de campo da eletrodinâmica de Lee e Wick são

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.106)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.107)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Agora, introduzindo uma corrente magnética $k^\mu = (\sigma, \mathbf{k})$ no lado direito da equação (1.107), obtemos as seguintes equações de campo de ordem superior modificadas

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.108)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu. \quad (1.109)$$

Não é difícil mostrar que este sistema de equações descreve a existência de uma carga magnética. De fato, na ausência de campos elétricos, cargas, correntes (elétricas e magnéticas), nos restam essencialmente duas equações para o campo magnetostático

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \sigma, \quad (1.110)$$

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (1.111)$$

Estas equações apresentam a familiar solução de monopolos de Dirac, ou seja, $\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^3} \mathbf{r}$, onde g é a carga magnética. Usando os métodos usuais, a famosa condição de quantização de Dirac $\frac{qg}{4\pi} = \frac{n}{2}$, onde q é a carga elétrica, e n é um inteiro, pode ser facilmente recuperada.

Conseguimos, deste modo, encontrar um sistema de equações consistente do tipo Maxwell + bóson vetorial massivo + carga magnética. É importante frisar que o monopolo de Dirac e o bóson vetorial massivo não podem coexistir no contexto da eletrodinâmica massiva de Proca [59] devido a esta, ao contrário da eletrodinâmica de Lee e Wick, não ser invariante de *gauge*. A própria existência do monopolo de Dirac é, sem dúvida, ligada à existência da invariância de *gauge* da teoria correspondente.

Curiosamente, o sistema formado pelas equações (1.106) e (1.107) não é simétrico sob transformações de dualidade $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$, $\tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}$, aumentado por $j^\mu \rightarrow k^\mu$, $k^\mu \rightarrow -j^\mu$. Este resultado nos motiva a procurar por uma generalização do modelo de Lee e Wick onde as equações de campo sejam simétricas sob transformações de dualidade, e compatíveis com uma carga magnética do tipo de Dirac. O modelo definido

pelas equações de campo

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.112)$$

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu, \quad (1.113)$$

é uma boa tentativa nesta direção, já que é simétrico sob transformações de dualidade⁷. Vejamos então se ele pode acomodar um monopolo do tipo de Dirac. Para um monopolo magnético estático de intensidade g fixo na origem, as equações anteriores se reduzem a

$$\left(1 - \frac{\square}{M^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{B} = g\delta(\mathbf{r}), \quad (1.114)$$

$$\left(1 - \frac{\square}{M^2}\right) \nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (1.115)$$

cuja solução é

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-Mr}}{r^2} - M \frac{e^{-Mr}}{r} \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.116)$$

Para grandes distâncias, esta solução reproduz a de Dirac, como deveria. Nosso ponto, contudo, é verificar se ela descreve ou não um monopolo em pequenas distâncias. Para tanto, vamos calcular o fluxo magnético radial dado pela equação (1.116) através de uma superfície esférica S de raio r com o monopolo estático de carga g no centro. Realizando este cálculo, encontramos imediatamente

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = g [1 - (1 + Mr) e^{-Mr}], \quad (1.117)$$

⁷É importante notar que $(1 + \frac{\square}{M^2}) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$ é identicamente nulo na ausência de corrente magnética.

o que implica que para $Mr \ll 1$, $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx 0$. Agora, levando em conta que se $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ é identicamente nulo, chegamos à conclusão de que \mathbf{A} pode existir em toda a região considerada. Portanto, esta é uma solução tipo-monopolo. No entanto, a carga magnética correspondente não obedece à condição de quantização de Dirac. De fato, para $Mr \ll 1$, $\mathbf{B} \approx \frac{g}{4\pi} \frac{M^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$, o que implica que o campo magnético decresce como $1/r$ em vez de $1/r^3$. Este comportamento bizarro do campo magnético certamente nos impede de recuperar a condição de quantização de Dirac. Uma maneira heurística de ver isso é considerar o movimento de uma partícula de massa m e carga q no campo do monopolo magnético. Da equação de movimento da partícula, $m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$, obtemos a variação de seu momentum angular, $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \frac{qgr^2M^2}{4\pi} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{r}})$, um resultado que nos impossibilita definir um momentum angular total conservado como no caso do monopolo de Dirac. Agora, se as distâncias não são nem tão grandes nem tão pequenas o potencial vetor não pode existir em todo lugar do domínio encerrado por S pois $\tilde{F}^{\mu\nu}$ satisfaz à equação (1.113) em vez de (1.109). Infelizmente não podemos superar esta dificuldade introduzindo o conceito de uma corda assim como Dirac fez, já que neste caso $\nabla \cdot \mathbf{B} (= \frac{g}{4\pi} \frac{M^2 e^{-Mr}}{r})$ não se anula em nenhum lugar da região em questão.

Resumindo: o modelo de Lee e Wick é compatível com monopolos magnéticos de Dirac, mas não é simétrico sob transformações de dualidade; sua versão generalizada, por sua vez, é invariante sob transformações de dualidade, porém incompatível com monopolos magnéticos de Dirac.

Referências Bibliográficas

- [1] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **148** 1467 (1966).
- [2] G. C. Wick and B. Zumino, *Phys. Lett.* **25B** 479 (1967).
- [3] I. S. Gerstein, B. W. Lee, H. T. Nieh and H. J. Schnitzer, *Phys. Rev. Lett.* **19** 1064 (1967).
- [4] T. D. Lee and G. C. Wick, *Nucl. Phys.* **B9** 209 (1969).
- [5] T. D. Lee, *Phys. Rev. D* **2** 1033 (1970).
- [6] T. D. Lee, in *Quanta* edited by P. G. O. Freund, C. J. Goebel, and Y. Nambu (Chicago U. P., Chicago, 1970), p.260.
- [7] B. Grinstein, D. O. Connell, and M. Wise, *Phys. Rev. D* **77** 025012 (2008).
- [8] C. Carone, *Phys. Lett. B* **677** 306 (2009).
- [9] C. Carone and R. Lebed, *J. High Energy Phys.* **01** 043 (2009).
- [10] C. Carone and R. Lebed, *Phys. Lett. B* **668** 221 (2008).

- [11] E. Gabrielli, *Phys. Rev. D* **77** 055020 (2008).
- [12] F. Wu and M. Zhong, *Phys. Lett. B* **659** 694 (2008).
- [13] F. Wu and M. Zhong, *Phys. Rev. D* **78** 085010 (2008).
- [14] A. Rodigast and T. Schuster, *Phys. Rev. D* **79** 125017 (2009)
- [15] A. van Tonder, *arXiv:0810.1928v1* (2008).
- [16] A. Shalaby, *arXiv:0812.3419v2* (2008).
- [17] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, *Phys. Rev. D* **77** 065010 (2008).
- [18] I. Cho and O-Kab Kwon, *arXiv: 1003.2716v1*.
- [19] B. Fornal, B. Grinstein, and M. Wise, *Phys. Lett. B* **674** 330 (2009).
- [20] Yi-Fu Cai, T. Qiu, R. Brandenberger, and X. Zhang, *Phys. Rev. D* **80** 023511 (2009).
- [21] E. Álvarez, C. Shat, L. Da Rold, and A. Szyrkman, *J. High Energy Phys.* **04** 026 (2008)
- [22] Jonathan Z. Simon, *Phys. Rev. D* **41** 3720 (1990).
- [23] A. Accioly, *Phys. Rev. D* **67** 127502 (2003).
- [24] A. Accioly, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **127** 100 (2004).
- [25] A. Accioly and M. Dias, *Int. J. Theor. Phys.* **44** 1123 (2005).
- [26] S. Coleman, in *Proceedings of Erice 1969, Ettore Majorana School on Subnuclear Phenomena* (Academic Press, New York, 1970), pp. 282-327.

- [27] D. Boulware, *Ann. Phys.* (N.Y.) **56** 140 (1970).
- [28] J. Cornwall, D. Levin, and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev. Lett.* **32** 498 (1974).
- [29] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford Science Publications) (1984).
- [30] M. Gomes, *Teoria Quântica de Campos* (Editora da Universidade de São Paulo) (2002).
- [31] A. Accioly and E. Scatena, *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 269 (2010).
- [32] M. Lieberman and A. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (Wiley, 1994).
- [33] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition (Wiley, 1998).
- [34] R. Santos, *Mod Phys. Lett. A* **26**, 1909 (2011).
- [35] A. Accioly, *Am. J. Phys.* **65**, 882 (1997).
- [36] M. Lieberman and A. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (Wiley, 1994).
- [37] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition (Wiley, 1998).
- [38] J. Frenkel, *Phys. Rev. E* **54**, 5859 (1996).
- [39] J. Frenkel and R. Santos, *Int. J. Mod. Phys. B* **13**, 315 (1999).
- [40] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayél-Neto, E. Scatena and R. Turcati, *Mod. Phys. Lett. A* **26**, 1985 (2011).

- [41] P. Frampton, *Gauge Field Theories* (Benjamin/Cummings, 1987).
- [42] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).
- [43] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Phys. Rev. D* **77**, 053012 (2008).
- [44] Particle Data Group (C. Amsler *et al.*), *Phys. Lett. B* **667**, 1 (2008).
- [45] A. Accioly and R. Turcati, Canonical Quantization of the Electromagnetic Sector of the Lee-Wick Standard Model (submetido ao Europ. Phys. J. C).
- [46] B. Podolsky and C. Kikushi, *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944).
- [47] B. Podolsky and P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40 (1948).
- [48] Pitman, G. R., Jr., Ph.D. Dissertation, University of Cincinnati (1955).
- [49] Martin, R. Eugene, Ph. D. Dissertation, University of Cincinnati (1960).
- [50] W. Garczyński, *Acta Phys. Pol. B* **20**, 1021 (1989).
- [51] J. Barcelos-Neto and N. Braga, *Acta Phys. Pol. B* **20** 205 (1989).
- [52] J. Barcelos-Neto and N. Braga, *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 2195 (1989).
- [53] J. Barcelos-Neto and C. Natividade, *Z. Phys. C* **51**, 313 (1991).
- [54] S. Muslin, *arXiv: math-ph/0010020v1* (2000).
- [55] C. Galvão and B. Pimentel, *Can. J. Phys.* **66** 460 (1988).
- [56] J. Barcelos-Neto, C. Galvão, and C. Natividade, *Z. Phys. C* **52**, 559 (1991).

- [57] A. Dutra and M. Hott, *arXiv: hep-th/9403167v1* (1994).
- [58] R. Bufalo, B. Pimentel, and G. Zambrano, *Phys. Rev. D* **83**, 045007 (2011).
- [59] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev. D* **53**, 984 (1996).
- [60] L.D. Landau, E.M. Lifshitz *The Classical Theory of Fields* **Vol. 2** (1951).
- [61] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964).
- [62] A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).
- [63] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics Vol. 1969 (Springer, New York, 1982).
- [64] E. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective* (Wiley, New York, 1974).
- [65] D. Gitman and I. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Springer, New York, 1990).
- [66] J. Barcelos-Neto, *Eletrodinâmica Quântica* (IF/UFRJ/Monografia/M88/03).
- [67] V. Nesterenko, *J. Phys A* **22**, 1673 (1989).
- [68] R. Marnelius, *Acta Phys. Pol. B* **13**, 669 (1982).
- [69] Qiong-gui Lin and Guang-jiong Ni, *Class. Quantum Grav.* **7**, 1261 (1990).
- [70] A. Accioly and R. Turcati, Monopoles, Duality, and Higher-Derivative Electromagnetic Theories *submetido à Phys. Rev. D*.

Gravitação de Ordem Superior em D Dimensões

A unitariedade ao nível de árvore de modelos gravitacionais D-dimensionais contendo derivadas de ordem superior é analisada. O potencial interpartículas para estes sistemas é então construído e um caso particular é explorado. É também mostrado que somente em 2+1 dimensões é possível a construção de um modelo unitário ao nível de árvore.

2.1 Contextualização

As teorias de gravitação com derivadas de ordem superior em 3+1 dimensões foram sugeridas por Weyl [1] e Eddington [2]. Estas teorias nada mais eram que simples generalizações da relatividade geral obtidas, grosso modo, acrescentando-se à lagrangiana de Einstein os escalares R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$. Uma interessante discussão sobre estas teorias pode ser encontrada em Havas [3]. Verificou-se mais tarde que, devido ao teorema de Gauss-Bonnet, somente era necessário considerar dois dos termos quadrá-

ticos acima mencionados. Assim sendo, as Teorias de Gravitação de Ordem Superior passaram, em geral, a serem definidas pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right),$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$, sendo G a constante de Newton, e α e β parâmetros arbitrários.

Com a constatação de que a gravitação não era renormalizável dentro do esquema perturbativo padrão, as teorias de gravitação de ordem superior, consideradas até então como simples extensões da relatividade geral, passaram a ocupar um lugar de destaque na busca por uma Teoria de Gravitação Quântica. Neste sentido é digno de nota o magistral trabalho de Stelle de 1977 [4], no qual é demonstrado que as Teorias de Ordem Superior são renormalizáveis juntamente com os seus acoplamentos com a matéria. Infelizmente estas teorias não são unitárias devido à presença de um *ghost* massivo de spin-2. Em 1986, Antoniadis e Tomboulis [5] argumentaram que a presença do *ghost* massivo de spin-2 no propagador nu era inconclusiva, já que esta excitação era instável. De acordo com eles, a posição dos pólos complexos no propagador vestido é explicitamente dependente de *gauge*. Utilizando argumentos padrões de Teoria Quântica de Campos eles concluíram que as Teorias de Gravitação de Ordem Superior são unitárias. No ano seguinte Johnston [6] provou que as conjecturas de Antoniadis e Tomboulis não eram verdadeiras, uma vez que o par de pólos complexos que aparecem no propagador re-somado são independentes de *gauge*, implicando na não-unitariedade das teorias de gravitação com derivadas de ordem superior.

Assim, acreditava-se até 2009 que as Teorias Gravitacionais de Ordem Superior não eram unitárias. Isto explica, em parte, o grande interesse que a teoria de gravitação massiva em 2+1 dimensões [7] provocou e, de certo modo continua provocando, na

comunidade científica já que a sua versão linearizada é unitária ao nível de árvore.

Neste capítulo realizamos um estudo detalhado da unitariedade ao nível de árvore das Teorias de Gravitação de Ordem Superior em D dimensões. Como esta análise requer a utilização apenas da versão linearizada do modelo, iniciamos a nossa discussão apresentando uma versão linearizada do Teorema de Gauss-Bonnet. Uma vez discutida a questão da unitariedade ao nível de árvore do sistema, estudamos o comportamento do potencial interpartícula deste modelo. O modelo de gravitação massiva em 2+1 dimensões (BHT)¹ é também focado em detalhe. Utilizamos unidades naturais $c = \hbar = 1$ e a métrica de Minkowski com assinatura, $(+1,-1,-1,-1,\dots)$; o tensor Ricci, por sua vez, é definido por $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda} \equiv \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \dots$.

2.2 Teorema de Gauss-Bonnet Linearizado

Em 3+1 dimensões, como é bem conhecido, os escalares quadráticos R^2 , $R_{\mu\nu}^2$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ não são independentes devido ao Teorema de Gauss-Bonnet²

$$\int \sqrt{-g} (R^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R_{\mu\nu\alpha\beta}^2) = 0. \quad (2.1)$$

O termo de Gauss-Bonnet é um invariante topológico em quatro dimensões, o que significa que ele não contribui para as equações de campo clássicas da gravitação.

¹O modelo BHT (E. A. Bergshoeff, O. Hohm e P. Townsend) é um modelo de gravitação massiva em $D = 3$. Possui propriedades interessantes como a presença de uma força gravitacional de curto alcance no limite não-relativístico e a existência de um ângulo de deflexão gravitacional que depende do parâmetro de impacto. Sua lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa} + \frac{2}{\kappa^2 M_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) \right],$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$ e M_2 é um parâmetro de massa.

² R , $R_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ denotam, respectivamente, o escalar de Ricci, o tensor de Ricci e o tensor de Riemann.

Para dimensões $D = 3$ e $D > 4$ este Teorema não mais se aplica. Como estamos interessados no estudo da unitariedade ao nível de árvore de Teorias de Gravitação de Ordem Superior em dimensões $D > 2$, onde se trabalha com a versão linearizada da teoria, seria interessante construirmos uma versão linearizada do teorema de Gauss-Bonnet. Considere, neste espírito, a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{D+1}g} (R^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R_{\mu\nu\alpha\beta}^2). \quad (2.2)$$

Linearizando, como de praxe, a métrica via a relação

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é um campo tensorial simétrico, obtemos prontamente as seguintes expressões para os termos quadráticos

$$R^2 = \frac{1}{4} [4\Box h \Box h + 4\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - 8\Box h \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu}], \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} -4R_{\mu\nu}^2 &= \frac{1}{4} [-4\Box h_{\mu\nu} \Box h^{\mu\nu} - 8\Box h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu h + 16\Box h_{\mu\nu} \partial^\nu \partial_\lambda h^{\lambda\mu} - 4\partial_\mu \partial_\nu h \partial^\mu \partial^\nu h \\ &\quad + 16\partial_\mu \partial_\nu h \partial^\mu \partial_\lambda h^{\lambda\nu} - 8\partial_\mu \partial^\lambda h_{\lambda\nu} \partial^\mu \partial_\rho h^{\rho\nu} - 8\partial_\mu \partial^\lambda h_{\lambda\nu} \partial^\nu \partial_\rho h^{\rho\mu}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\rho}^2 = \frac{1}{4} [4\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu h^{\alpha\beta} + 4\partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\lambda} \partial^\lambda \partial^\nu h^{\mu\rho} - 8\partial_\lambda \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\rho h^{\lambda\nu}]. \quad (2.6)$$

Como a gravitação é invariante por difeomorfismos, podemos fazer uso, sem perda de generalidade, de um *gauge* conveniente — no caso o *gauge* de de Donder —, a fim de

simplicarmos nossos cálculos. Neste *gauge* as equações precedentes assumem a forma

$$R^2 = \frac{1}{4} \square h \square h, \quad (2.7)$$

$$-4R_{\mu\nu}^2 = -\square h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\rho}^2 = 4\square h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + \square h \square h - 2\square h \square h. \quad (2.9)$$

Substituindo as relações acima em (2.2) concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \left[(4\partial_\nu h_{\alpha\beta} \partial^\nu - \square h_{\alpha\beta}) \partial^\mu h^{\alpha\beta} + 4 (\partial_\rho h^{\rho\lambda} \partial^\lambda - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\lambda\rho}) \partial_\nu h^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. + 8\partial^\rho h^{\mu\nu} \partial^\lambda \left(\partial_\rho h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h_{\lambda\rho} \right) - 8\partial^\lambda \partial^\nu h^{\mu\rho} \left(\partial_\nu h_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} \partial_\rho h_{\nu\lambda} \right) \right], \quad (2.10) \end{aligned}$$

o que mostra que o Teorema de Gauss-Bonnet linearizado é válido para $D > 3$. Para $D=3$, por outro lado, tanto o tensor de curvatura quanto o tensor de Ricci têm o mesmo número de componentes [8]. Conseqüentemente, em cálculos ao nível de árvore, podemos considerar como a versão mais simples de uma Teoria de Gravitação com Derivadas de Ordem Superior aquela cuja lagrangiana é uma combinação linear dos escalares R , R^2 e $R_{\mu\nu}^2$ linearizados. Esta definição vale, obviamente para $D > 2$.

Cabe aqui uma indagação importante: Seria o Teorema de Gauss, pelo menos em 3+1 dimensões, válido ao nível quântico? A resposta é negativa conforme mostraram Brunini e Marcelo [9].

2.3 Unitariedade ao Nível de Árvore da Gravitação de Ordem Superior D-Dimensional

Conforme vimos na seção anterior, podemos considerar a versão linearizada da lagrangiana abaixo

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-1)^{D+1}g} \left(\sigma \frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right), \quad (2.11)$$

onde α e β são parâmetros arbitrários, σ é um número que pode assumir os valores $+1$ ou -1 e $D > 2$, para cálculos ao nível de árvore no contexto da gravitação de ordem superior. Como estamos interessados em analisar a unitariedade desta teoria ao nível de árvore, é fundamental que computemos antes de mais nada o propagador associado à mesma. Seguindo o procedimento usual fixamos primeiramente o *gauge* adicionando à versão linearizada da lagrangiana anterior a lagrangiana fixadora de *gauge*³ e escrevemos a lagrangiana resultante como se segue

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{O}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

onde $\mathcal{O}^{\mu\nu, \alpha\beta}$ é o operador de onda. Em termos dos operadores de Barners-Rivers [10,11] este operador assume a forma⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \left(\sigma k^2 + \frac{\beta}{4} k^4 \kappa^2 \right) P^{(2)} + \frac{k^2}{2\Lambda} P^{(1)} + \frac{k^2}{4\Lambda} P^{(0-w)} \\ & + \left[-\sigma (D-2) k^2 + \alpha (D-1) k^4 \kappa^2 + \frac{\beta}{4} D k^4 \kappa^2 + (D-1) \frac{k^2}{4\Lambda} \right] P^{(0-s)} \\ & - \frac{k^2}{4\Lambda} \sqrt{D-1} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

³ $\mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2\Lambda} (\partial_\mu \gamma^{\mu\nu})^2$, onde $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ (*gauge* de de Donder).

⁴Vide o Apêndice A para o caso em que $D=3$.

O propagador é então dado pela relação

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-1} = & \frac{1}{\left(\sigma k^2 + \frac{\beta}{4} k^4 \kappa^2\right)} P^{(2)} + \frac{2\Lambda}{k^2} P^{(1)} \\
& + \frac{1}{\left(-\sigma(D-2)k^2 + \alpha(D-1)k^4\kappa^2 + \frac{\beta}{4}Dk^4\kappa^2\right)} P^{(0-s)} \\
& + \frac{\left(-\sigma 4\Lambda(D-2) + \alpha 4\Lambda(D-1)k^2\kappa^2 + \beta\Lambda Dk^2\kappa^2 + D-1\right)}{\left(-\sigma(D-2)k^2 + \alpha(D-1)k^4\kappa^2 + \frac{\beta}{4}Dk^4\kappa^2\right)} P^{(0-w)} \\
& + \frac{\sqrt{D-1}}{\left(-\sigma(D-2)k^2 + \alpha(D-1)k^4\kappa^2 + \frac{\beta}{4}Dk^4\kappa^2\right)} P^{(0-sw)} \\
& + \frac{\sqrt{D-1}}{\left(-\sigma(D-2)k^2 + \alpha(D-1)k^4\kappa^2 + \frac{\beta}{4}Dk^4\kappa^2\right)} P^{(0-ws)}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Para analisarmos a unitariedade ao nível de árvore contraímos, como de praxe, o propagador com correntes conservadas $T^{\mu\nu}$. O propagador saturado SP no espaço dos momenta

$$SP = T^{\mu\nu}(k) \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}^{-1}(k) T^{\alpha\beta}(k), \tag{2.15}$$

assume então a forma

$$SP = \frac{1}{\left(\sigma k^2 + \frac{\beta}{4} k^4 \kappa^2\right)} \left[T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right] + \frac{1}{\left(-\sigma(D-2)k^2 + \alpha(D-1)k^4\kappa^2 + \frac{\beta}{4}Dk^4\kappa^2\right)} \left[\frac{T^2}{D-1} \right]. \tag{2.16}$$

Definindo

$$M_2^2 \equiv -\frac{4\sigma}{\beta\kappa^2}, \tag{2.17}$$

$$M_0^2 \equiv \frac{4\sigma(D-2)}{\kappa^2(4\alpha(D-1) + D\beta)}, \tag{2.18}$$

e supondo que $-\frac{\sigma}{\beta} > 0$ e $\frac{\sigma}{(4\alpha(D-1) + D\beta)} > 0$, podemos interpretar M_2 como a massa da partícula de spin-2 e M_0 como a massa da partícula de spin-0.

Apelando para estas definições podemos reescrever o propagador saturado como se segue

$$SP = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M_2^2} \right] \left[T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right] + \frac{1}{\sigma(D-2)} \left[-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - M_0^2} \right] \left[\frac{T^2}{D-1} \right]. \quad (2.19)$$

Calculando agora os resíduos nos pólos, obtemos:

$$Res(SP)|_{k^2=0} = \frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2} \right) |_{k^2=0}, \quad (2.20)$$

$$Res(SP)|_{k^2=M_2^2} = -\frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) |_{k^2=M_2^2}, \quad (2.21)$$

$$Res(SP)|_{k^2=M_0^2} = \frac{1}{\sigma(D-2)} \frac{T^2}{(D-1)} |_{k^2=M_0^2}. \quad (2.22)$$

Os resultados anteriores nos mostram que o conteúdo de partículas associado às Teorias Gravitacionais de Ordem Superior é: um gráviton, uma partícula massiva de spin-2 e uma partícula massiva de spin-0.

Para sabermos se a teoria é unitária ao nível de árvore basta que verifiquemos se $Res(SP) \geq 0$ em cada um dos polos.

Caso I: $\sigma = +1$

Pode-se mostrar sem muita dificuldade que⁵

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2} \right) |_{k^2=0} \geq 0 \quad (2.23)$$

$$- \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1} \right) |_{k^2=M_2^2} < 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{T^2}{(D-2)(D-1)} |_{k^2=M_0^2} > 0 \quad (2.25)$$

⁵No Apêndice B demonstramos estas relações no caso particular da dimensão do espaço-tempo ser igual a 3.

Consequentemente o espectro da teoria é composto por uma partícula de massa nula e spin-2, uma partícula massiva de spin-0 e um *ghost* massivo de spin-2 que viola a unitariedade.

Quando $D = 3$, a partícula de massa nula e spin-2 não é excitada⁶. Este resultado é bastante conhecido visto ser a gravitação de Einstein em $D = 3$ trivial fora das fontes. Para $D > 3$, esta partícula é incorporada ao espectro da teoria.

Caso II: $\sigma = -1$

Agora, o conteúdo de partículas da teoria é: uma partícula massiva de spin-2 e dois *ghosts*, sendo um de massa nula e spin-2 e o outro massivo e de spin-0. Consequentemente a teoria não é unitária ao nível de árvore.

Vamos mostrar em sequência que em $D = 3$ é possível construir um modelo de gravitação de ordem superior que é unitário ao nível de árvore [12]. Tal sistema nada mais é que aquele proposto em 2009 por Bergshoeff, Hohm e Townsend [7], popularmente conhecido como ‘Nova Gravitação Massiva’ (NGM).

O propagador saturado no caso em pauta pode ser escrito como abaixo

$$SP = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M_2^2} \right] \left[T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{2} \right] + \frac{1}{\sigma} \left[-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - M_0^2} \right] \frac{1}{2} T^2. \quad (2.26)$$

onde $M_2^2 \equiv -\frac{4\sigma}{\beta\kappa^2}$, $M_0^2 \equiv \frac{4\sigma}{\kappa^2(8\alpha+3\beta)}$. Supondo que não existam táquions no modelo, encontramos os seguintes vínculos:

$$\frac{\sigma}{\beta} < 0, \quad \frac{\sigma}{8\alpha + 3\beta} > 0 \quad (2.27)$$

Por outro lado, os resíduos de SP nos pólos $k_2 = M_2^2$, $k_2 = 0$ e $k_2 = M_0^2$ são iguais,

⁶ $(T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0$.

respectivamente, a:

$$Res(SP)|_{k^2=M_2^2} = -\frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2 \right) |_{k^2=M_2^2}, \quad (2.28)$$

$$Res(SP)|_{k^2=0} = \frac{1}{\sigma} (T_{\mu\nu}^2 - T^2) |_{k^2=0}, \quad (2.29)$$

$$Res(SP)|_{k^2=M_0^2} = \frac{1}{2\sigma} T^2 |_{k^2=M_0^2}. \quad (2.30)$$

Como comentamos previamente, a unitariedade ao nível de árvore de um modelo genérico é assegurada se o resíduo em cada pólo de SP é ≥ 0 . Tendo em mente que $(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2) |_{k^2=M_2^2} > 0$ e $(T_{\mu\nu}^2 - T^2) |_{k^2=0} = 0$ (Veja o Apêndice B.), chegamos à conclusão que (i) $Res(SP)|_{k^2=M_2^2} > 0$ se $\sigma = -1$ (o que implica que $\beta > 0$ e $\alpha < 0$), e (ii) $Res(SP)|_{k^2=0} = 0$. Consequentemente, não precisamos nos preocupar com estes pólos; o pólo problemático é $k^2 = M_0^2$, uma vez que $Res(SP)|_{k^2=M_0^2} < 0$. Uma maneira de contornar esta dificuldade é considerar o limite $M_0^2 \rightarrow \infty$ no modelo em discussão, o que implica que $\alpha = -\frac{3}{8}\beta$. Concluimos então que a classe de modelos definida pela densidade de lagrangiano

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2}{\kappa^2}R + \frac{\beta}{2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right] \quad (2.31)$$

é livre de *ghosts* ao nível de árvore. Por conveniência, substituímos β por $\frac{4}{\kappa^2 M_2^2}$, onde M_2 é um parâmetro de massa. A densidade de lagrangiano resultante,

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2}{\kappa^2}R + \frac{2}{\kappa^2 M_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right], \quad (2.32)$$

nada mais é que o modelo BHT para a gravidade massiva em $D = 3$.

É interessante notar que não é totalmente claro se a particular combinação entre os

parâmetros α e β que encontramos irá sobreviver à renormalização a um dado *loop* [13]. Provavelmente, o modelo BHT é não-renormalizável, visto que a projeção de spin-0 não é excitada e este modo é essencial a renormalizabilidade do modelo [14].

2.4 Potencial Interpartículas

Na mecânica quântica, a noção de potencial é introduzida para ser utilizada com a equação de Schrödinger. Já na teoria quântica de campos, as interações são visualizadas como advindas da troca de quanta. É notável que estes dois conceitos possam ser mesclados para partículas que se movam lentamente, se nos restringirmos a processos de ordem mais baixa. De fato, de acordo com a aproximação de Born, a seção de choque diferencial que concerne, por exemplo, ao espalhamento de dois bósons escalares de mesma massa m é dada por $(\frac{d\sigma}{d\Omega}) = \left| \frac{m}{2\pi} \int e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) d^{D-1}\mathbf{r} \right|^2$, onde \mathbf{p} e \mathbf{p}' são, respectivamente, os momenta de entrada e saída de uma das partículas. Por outro lado, a seção de choque para a interação dos dois citados bósons via troca de grávitons pode ser expressa como $(\frac{d\sigma}{d\Omega}) = \left| \frac{\mathcal{M}_{\text{NR}}}{8m} \right|^2$, onde \mathcal{M}_{NR} é o limite não-relativístico da amplitude de Feynman para o processo que estamos discutindo. Como resultado, o potencial interpartículas em $D = 4$ assume a forma

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{M}_{\text{NR}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

A generalização desta expressão para um espaço-tempo D-dimensional é trivial e nos fornece o seguinte resultado

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} \mathcal{M}_{\text{NR}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.33)$$

onde \mathbf{k} é o momentum do gráviton trocado.

Utilizando a equação acima, iremos calcular em seguida a expressão para a energia potencial gravitacional D-dimensional. Consideremos então a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{esc.}} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] \sqrt{(-1)^{D-1} g} \quad (2.34)$$

que descreve a interação gravitacional entre bósons escalares neutros em dimensões arbitrárias.

Na aproximação de campo fraco esta lagrangiana pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{esc.}} &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] \left(1 + \frac{\kappa h}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} [(\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2] \left(1 + \frac{\kappa h}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \kappa h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2] \left(1 + \frac{\kappa h}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

A lagrangiana de interação, por sua vez, só contém termos em $\kappa h^{\mu\nu}$. A partir da equação anterior, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int.}} &= \frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \\ \mathcal{L}_{\text{int.}} &= \frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - m^2 \phi^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Escrevendo o termo entre colchetes no espaço dos momenta e simetrizando os índices,

encontramos o vértice elementar para o processo que acabamos de descrever

$$\Gamma_{\mu\nu}(p, p') = \frac{1}{2}\kappa [p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - \eta_{\mu\nu}(p \cdot p' + m^2)], \quad (2.37)$$

onde supomos que os momenta estão entrando, e multiplicamos por um fator 2, já que estamos lidando com bósons descarregados.

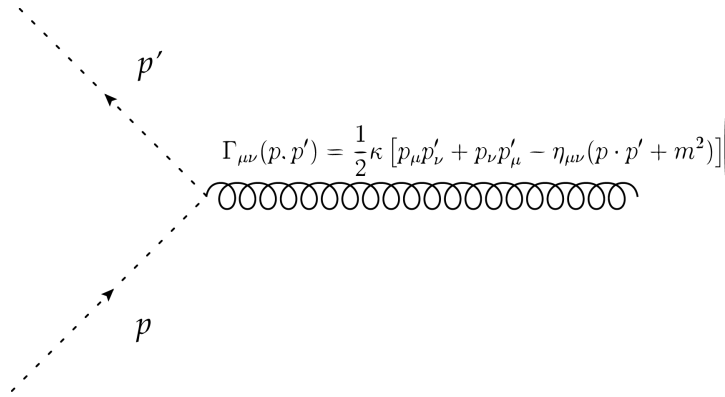


Figura 2.1: VÉRTICE RELEVANTE PARA A INTERAÇÃO GRAVITACIONAL DE BÓSONS ESCALARES.

A amplitude de Feynman resultante assume a forma

$$\mathcal{M} = \Gamma^{\mu\nu}(p, -p') \mathcal{O}^{-1}_{\mu\nu, \alpha\beta} \Gamma^{\alpha\beta}(q, -q'), \quad (2.38)$$

onde o propagador D-dimensional é dado pela equação (2.14)

No limite não-relativístico, a equação (2.38) se reduz a

$$\mathcal{M}_{NR} = -\frac{32m^4\pi G^{D-1}}{\sigma(D-1)} \left\{ \frac{1}{\mathbf{k}^2} \left[\frac{(D-2)^2 - 1}{D-2} \right] - \frac{(D-2)}{(\mathbf{k}^2 + M_2^2)} + \frac{1}{(D-2)} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + M_0^2)} \right\}. \quad (2.39)$$

Substituindo este resultado na expressão (2.33), obtemos finalmente

$$U(r) = -\sigma \frac{8\pi G^{(D-1)} m^2}{(2\pi)^{D-1} (D-1)} \int d^{D-1} \mathbf{k} \left\{ \frac{1}{\mathbf{k}^2} \left[\frac{(D-2)^2 - 1}{D-2} \right] - \frac{(D-2)}{(\mathbf{k}^2 + M_2^2)} + \frac{1}{(D-2)} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + M_0^2)} \right\} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.40)$$

Esta fórmula fornece a energia potencial interpartículas em qualquer dimensão. Contudo, em $D > 4$ a resolução das integrais envolvidas é extremamente complicada, sendo em geral somente possível via métodos numéricos. Isso pode ser constatado utilizando-se coordenadas esféricas

$$U(r) = -\sigma \frac{8\pi G^{(D-1)} m^2}{(2\pi)^{D-1} (D-1)} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^{D-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{D-2} \prod_{j=1}^{D-3} \int_0^\pi d\theta_j \sin\theta_j \times \left\{ \frac{1}{\mathbf{k}^2} \left[\frac{(D-2)^2 - 1}{D-2} \right] - \frac{(D-2)}{(\mathbf{k}^2 + M_2^2)} + \frac{1}{(D-2)} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + M_0^2)} \right\} e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\theta_{D-3}},$$

onde em $D = 3$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\theta, \quad (2.41)$$

$$d\theta_{D-2} = d\theta; \quad (2.42)$$

enquanto que em $D > 3$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\theta_{D-3}, \quad (2.43)$$

$$d\theta_{D-2} = d\phi. \quad (2.44)$$

Embora tenhamos feito toda esta construção utilizando a interação gravitacional entre bósons escalares neutros, o mesmo resultado seria obtido, devido ao princípio de

equivalência, se utilizássemos qualquer outro par de partículas quânticas.

Estamos particularmente interessados no comportamento da energia potencial associada ao modelo BHT [15], visto ser este o único modelo de ordem superior que é unitário ao nível de árvore. Realizando a integração apropriada em $D = 3$ e utilizando a equação (2.40), chegamos à conclusão que a energia potencial é dada por

$$U(r) = -2m^2 G K_0(M_2 r), \quad (2.45)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero. Note que $K_0(x)$ se comporta como $-\ln x$ na origem e como $x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$ assintoticamente. O potencial não-relativístico, por sua vez, tem a forma

$$V(r) = -2mG K_0(M_2 r). \quad (2.46)$$

Neste ponto, alguns comentários são pertinentes:

- Assim como o potencial newtoniano, $V_{\text{Newt}}(r) = 2mG \ln \frac{r}{r_0}$ (onde r_0 é um regulador infravermelho), o potencial concernente ao modelo BHT possui uma singularidade logarítmica na origem.
- $V(r) \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$.
- No limite em que $M_2 \rightarrow \infty$, $V(r) \rightarrow 0$, reproduzindo, deste modo, o potencial usual da gravitação tridimensional de Einstein.

Por outro lado, no limite não-relativístico, uma partícula teste de massa m_{teste} se deslocando num campo gravitacional fraco sofre a ação de uma força $\mathbf{F}(r) = -m_{\text{teste}} \nabla V(r)$.

Tendo em conta a equação (2.46), concluímos que $\mathbf{F}(r) = F(r)\hat{\mathbf{r}}$, onde

$$F(r) \equiv -2Gm_{\text{teste}}mM_2K_1(M_2r), \quad (2.47)$$

Aqui K_1 é a função de Bessel modificada de ordem 1. Lembrando que $-xK_1(x)$ é uma função negativa monotonicamente crescente no intervalo $0 \leq x < \infty$ – já que $\frac{d}{dx}[-xK_1(x)] = xK_0(x)$ – chegamos à conclusão que $\mathbf{F}(r)$ é sempre atrativa (veja a Fig. (2.2)). Esta força gravitacional de curto alcance não existe no contexto da relatividade geral tridimensional, sendo peculiar apenas ao modelo BHT.

A energia potencial dada pela equação (2.45) é, como esperado, ao nível linearizado, equivalente àquela obtida através do modelo (unitário) de Pauli-Fierz para um campo massivo de spin-2.

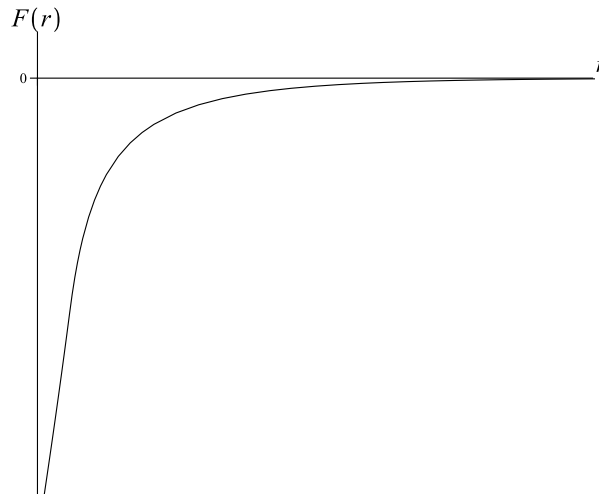


Figura 2.2: A FORÇA GRAVITACIONAL DE CURTO ALCANCE RELACIONADA AO MODELO BHT.

2.5 Discussão

Mostramos que a unitariedade de Modelos de Gravitação de Ordem Superior D -dimensionais somente não é violada na dimensão $D = 3$; mais especificamente, no caso do modelo BHT. Vamos, em decorrência nos concentrar em expor, de passagem, algumas de suas propriedades [12,15].

Como é bem conhecido, a gravitação de Einstein-Hilbert em $D = 3$ é trivial fora das fontes pois os tensores de Einstein e Riemann são equivalentes em $D = 3$. A quantização do campo gravitacional, por sua vez, não dá origem a grávitons propagantes uma vez que a métrica do espaço-tempo é localmente determinada pelas fontes. Consequentemente, a descrição dos fenômenos gravitacionais pela gravitação tridimensional fornece alguns resultados bizarros, tais como

- (i) Ausência de força gravitacional no limite não-relativístico.
- (ii) Deflexão gravitacional independente do parâmetro de impacto.

Contudo, estes estranhos fenômenos não ocorrem no contexto do modelo BHT. De fato, neste contexto, forças gravitacionais de curto alcance são exercidas sobre partículas se movendo lentamente, conforme demonstramos; por outro lado, é possível mostrar que o desvio da luz depende do parâmetro de impacto, como esperado [15]. Em outras palavras, as idiosincrasias da relatividade geral em $D = 3$ não acontecem no sistema BHT.

A principal razão para o estudo de modelos gravitacionais em $D = 3$ é, na verdade, encontrar um sistema gravitacional com divergências ultravioletas menos severas na teoria perturbativa. Uma vez que a relatividade geral em $D = 3$ é dinamicamente

trivial, o modelo BHT, que é unitário ao nível de árvore, é um passo importante nesta direção. Este tipo de pesquisa conduzida em dimensões menores certamente nos ajuda a compreender melhor as difíceis questões conceituais que estão presentes no mundo físico em $3 + 1$ dimensões.

Vale a pena mencionar que a trivialidade da relatividade geral em $D = 3$ pode também ser resolvida adicionando à ação de Einstein-Hilbert tridimensional um termo de Chern-Simons, termo este que viola a paridade. O modelo resultante é popularmente conhecido como *topological massive gravity* (TMG) [16]. Recentemente, Ahmedov e Aliev [17] mostraram que as equações de campo do modelo BHT consistem de uma equação massiva (tensorial) do tipo Klein-Gordon com um termo de fonte tipo curvatura quadrática e uma equação de vínculo; além disso, para espaços-tempo algébricos tipo D e N , as equações de campo da TMG poderiam ser pensadas como a “raíz quadrada” da equação tipo Klein-Gordon massiva, o que lhes permitiu mapear todas as soluções do tipo D e N da TMG nas do modelo BHT. Chamamos atenção para o fato de que, em contraste com a TMG, a gravitação massiva em $D = 3$ possui a grande vantagem de ser uma teoria que preserva a paridade.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Weyl, *Space-Time- Matter* Dover, New York (1952), Chap. IV.
- [2] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed, Cambridge University Press (1924), Chap. IV.
- [3] P. Havas, *General Relativity and Gravitation* **8** 631 (1977).
- [4] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977).
- [5] I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33** 2756 (1986).
- [6] D.A. Johnston, *Nuclear Physics B* **297** 721 (1988).
- [7] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102** 201301 (2009).
- [8] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Pol.* **24** 734 (1963).
- [9] S. A. Brunini and M. Gomes, *Modern Phys. Lett. A* **8** 1977 (1993).
- [10] P. Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* **60** 478 (1973).
- [11] I. Antoniadis and E. Tombouli, *Phys. Rev. D* **33** 2756 (1986).

- [12] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati, and B. Pereira-Dias, *Class. Quantum Grav.* **28** 225008 (2011).
- [13] Í. Güllü and B. Tekin, *Phys. Rev. D* **80** 064033 (2009).
- [14] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Cosmology, The Quantum Vacuum and Zeta Functions: A Workshop with a Celebration of Emilio Elizalde's Sixtieth Birthday 8-10 Mar 2010, Bellaterra, Barcelona, Spain.*
- [15] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena, and R. Turcati, *Phys. Rev. D* **83** 104005 (2011).
- [16] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** 975 (1982); *Ann. Phys. (N.Y.)* **140** 372 (1982); **185** 406 (E) (1988).
- [17] H. Ahmedov and A. Aliev, *Phys. Rev. Lett.* **106** 021301 (2011).

Apêndice **A**

Uma Prescrição para o cálculo do Propagador do Gráviton em $D = 3$, assim como uma lista composta por algumas identidades que facilitam enormemente esta tarefa [12]

Para encontrarmos o propagador relacionado à densidade lagrangiana exibida em (2.32), é bastante conveniente trabalharmos com o conjunto completo de operadores de Barnes-

Rivers, os quais são definidos, no espaço dos momenta, como se segue [10,11]

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa} - \theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}), \quad (\text{A.1})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda}), \quad (\text{A.2})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.3})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.5})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.6})$$

onde $\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ and $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ são, respectivamente, os projetores transversais e longitudinais usuais. A tabela multiplicativa para estes operadores é mostrada abaixo

Tabela A.1: Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers

| | $P^{(2)}$ | $P^{(1)}$ | $P^{(0-s)}$ | $P^{(0-w)}$ | $P^{(0-sw)}$ | $P^{(0-ws)}$ |
|--------------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $P^{(2)}$ | $P^{(2)}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $P^{(1)}$ | 0 | $P^{(1)}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $P^{(0-s)}$ | 0 | 0 | $P^{(0-s)}$ | 0 | $P^{(0-sw)}$ | 0 |
| $P^{(0-w)}$ | 0 | 0 | 0 | $P^{(0-w)}$ | 0 | $P^{(0-ws)}$ |
| $P^{(0-sw)}$ | 0 | 0 | 0 | $P^{(0-sw)}$ | 0 | $P^{(0-s)}$ |
| $P^{(0-ws)}$ | 0 | 0 | $P^{(0-ws)}$ | 0 | $P^{(0-w)}$ | 0 |

Para calcular o propagador do gráviton precisamos da parte bilinear da densidade de lagrangiana (2.32). Utilizando a lagrangiana fixadora de *gauge* $\frac{1}{2\Lambda}(\partial_\mu\gamma^{\mu\nu})^2$ (*gauge* de de Donder) reproduzimos, no espaço dos momenta a equação referente ao operador

de onda, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \left(\sigma k^2 + \frac{\beta}{4} k^4 \kappa^2 \right) P^{(2)} + \frac{k^2}{2\Lambda} P^{(1)} + \frac{k^2}{4\Lambda} P^{(0-w)} - \frac{k^2}{4\Lambda} \sqrt{2} P^{(0-sw)} \\ & + \left[-\sigma k^2 + 2\alpha k^4 \kappa^2 + \frac{3}{4} \beta k^2 \kappa^2 + \frac{2}{4\Lambda} \right] P^{(0-s)} - \frac{k^2}{4\Lambda} \sqrt{2} P^{(0-ws)}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

É importante frisar que a tarefa de calcular o operador \mathcal{O} é enormemente facilitada se utilizarmos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} [P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2} (\eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa}), \\ [2P^{(0-s)} + P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \eta_{\mu\nu} \eta_{\kappa\lambda}, \\ [2P^{(1)} + 4P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\kappa} k_\nu k_\lambda + \eta_{\mu\lambda} k_\nu k_\kappa + \eta_{\nu\lambda} k_\mu k_\kappa + \eta_{\nu\kappa} k_\mu k_\lambda), \\ [2P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\nu} k_\kappa k_\lambda + \eta_{\kappa\lambda} k_\mu k_\nu), \\ P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} &= \frac{1}{k^4} (k_\mu k_\nu k_\kappa k_\lambda). \end{aligned}$$

Se escrevermos agora o operador \mathcal{O} na forma genérica

$$\mathcal{O} = x_1 P^{(1)} + x_2 P^{(2)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)},$$

e levarmos em conta que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$, onde \mathcal{O}^{-1} é o propagador, obtemos prontamente

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} = & \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_s x_w - x_{sw} x_{ws}} \left[x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} \right. \\ & \left. - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De (A.8) e (A.7) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-1} &= \frac{1}{(\sigma k^2 + \frac{\beta}{4}k^4\kappa^2)}P^{(2)} + \frac{2\Lambda}{k^2}P^{(1)} + \frac{1}{(-\sigma k^2 + 2\alpha k^4\kappa^2 + \frac{3}{4}\beta k^4\kappa^2)}P^{(0-s)} \\
&+ \frac{(-4\sigma\Lambda + 8\alpha\Lambda k^2\kappa^2 + 3\beta\Lambda k^2\kappa^2 + 2)}{(-\sigma k^2 + 2\alpha k^4\kappa^2 + \frac{3}{4}\beta k^4\kappa^2)}P^{(0-w)} \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{(-\sigma k^2 + 2\alpha k^4\kappa^2 + \frac{3}{4}\beta k^4\kappa^2)}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}). \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Apêndice **B**

Um resultado útil para checar a unitariedade ao nível de árvore de um modelo genérico de gravitação em $D = 3$ [12]

Teorema 1. *Se m é a massa de uma partícula física genérica de spin-2 relacionada a um modelo gravitacional tridimensional e k é o momentum trocado correspondente, então*

$$(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2)|_{k^2=M^2} > 0 \quad \text{and} \quad (T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0.$$

Aqui $T^{\mu\nu}(= T^{\nu\mu})$ é a corrente externa conservada.

Iniciamos chamando atenção para o fato de ser o conjunto de vetores independentes no espaço dos momenta — $k^\mu \equiv (k^0, \mathbf{k})$, $\tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\mathbf{k})$, $\epsilon^\mu \equiv (0, \hat{\epsilon})$, onde $\hat{\epsilon}$ é um vetor unitário ortogonal a \mathbf{k} —, uma base bastante conveniente para expandirmos quaisquer

vetores tridimensionais $V^\mu(k)$. Utilizando esta base, podemos escrever o tensor de corrente simétrico da seguinte maneira

$$T^{\mu\nu} = Ak^\mu k^\nu + B\tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu + C\epsilon^\mu \epsilon^\nu + Dk^{(\mu} \tilde{k}^{\nu)} + Ek^{(\mu} \epsilon^{\nu)} + F\tilde{k}^{(\mu} \epsilon^{\nu)},$$

onde $a^{(\mu b^\nu)} \equiv \frac{1}{2}(a^\mu b^\nu + b^\mu a^\nu)$.

A conservação das correntes fornece os seguintes vínculos sobre os coeficientes A , B , D , E e F :

$$Ak^2 + \frac{D}{2}(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$B(k_0^2 + \mathbf{k}^2) + \frac{D}{2}k^2 = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$Ek^2 + F(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Das equações (B1) e (B2), obtemos $Ak^4 = B(k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2$, enquanto que a equação (B3) implica em $E^2 > F^2$. Por outro lado, saturando os índices de $T^{\mu\nu}$ com momenta k_μ , chegamos a uma relação de consistência para os coeficientes A , B e D :

$$Ak^4 + B(k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2 + Dk^2(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Após algumas manipulações algébricas utilizando as equações anteriores, encontramos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2 &= \left[\frac{k^2(A-B)}{\sqrt{2}} - \frac{C}{\sqrt{2}} \right]^2 + \frac{k^2}{2}(E^2 - F^2), \\ T_{\mu\nu}^2 - T^2 &= k^2 \left[\frac{1}{2}(E^2 - F^2) - 2C(A-B) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Portanto,

$$(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2)|_{k^2=M^2} > 0 \quad \text{e} \quad (T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Parte II

Determinação de Limites para a Massa do Fóton

Capítulo 3

A Massa do Fóton e a Interferometria de Linha de Base Extensa¹

É encontrada uma relação entre a massa do fóton, sua frequência (ν) e o parâmetro de deflexão (γ), determinado pelos experimentais (o qual caracteriza a contribuição da curvatura do espaço para a deflexão gravitacional). Este surpreendente resultado nos permite concluir que o conhecimento dos parâmetros ν e γ é tudo que precisamos para estabelecer limites gravitacionais sobre a massa do fóton. Utilizando como dados de entrada as mais recentes medidas de deflexão de ondas de rádio pelo Sol (obtidas via VLBI), são estimados limites para a massa do fóton. Um limite quântico para a massa desta partícula hipotética é também determinado utilizando-se as medidas mais recentes relativas ao momento magnético anômalo de elétron.

3.1 Motivação

Com o avanço das técnicas de interferometria que ocorreu nas últimas décadas, uma nova luz foi lançada sobre os fenômenos físicos nos quais efeitos quânticos e gravita-

¹VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*)

cionais estão interligados. Consideremos, por exemplo, o efeito quântico da mudança de fase de nêutrons causado pela sua interação com o campo gravitacional da Terra, o qual foi observado nos experimentos de Colella-Overhauser-Werner (COW) [1] e Bonse-Wroblewski [2], realizados com interferômetros de nêutrons. Estes testes pioneiros têm ajudado a nos convencer de que existem certos experimentos cujos resultados dependem tanto da constante gravitacional quanto da constante de Planck. O fato de que a mecânica quântica e a gravidade não desempenham *simultaneamente* um papel importante na maioria dos experimentos terrestres certamente é responsável pela ideia errada de que ambas não podem estar intimamente ligadas em certas circunstâncias especiais.

Nas últimas quatro décadas os experimentos tipo COW se tornaram mais sofisticados. O último experimento realizado apelando-se para interferometria de nêutrons [3] relata uma discrepância estatisticamente significativa entre os valores teóricos preditos e os valores experimentalmente medidos para a mudança de fase do nêutron devido à gravidade. Supondo que as massas inercial e gravitacional dos nêutrons sejam iguais, os experimentais mostraram que o fator de fase do nêutron é 1% menor do que o previsto [3], o que indica claramente uma possível violação do princípio de equivalência clássico. À primeira vista, parece que estes últimos experimentos de interferometria estão em conflito com os mais precisos testes do princípio de equivalência clássico, tanto os realizados por meio de interferometria atômica quanto os baseados em pêndulos de torção. Adunas, Rodriguez-Milla e Ahluwalia [4, 5] mostraram, contudo, que cada um dos experimentos anteriormente citados exploram diferentes aspectos da gravidade; e as técnicas experimentais atuais, quando associadas aos dados de neutrinos solares, podem ser capazes de explorar violações do princípio de equivalência clássico devidas à mecânica quântica. Eles também predizem uma violação quântica do princípio de

equivalência clássica para a próxima geração de experimentos de interferometria atômica. Na verdade, do ponto de vista operacional, não se pode dizer que, em princípio, para certos sistemas quânticos, exista uma igualdade das massas inercial e gravitacional. Portanto, chegamos à conclusão de que a mecânica quântica e o princípio de equivalência clássico não podem coexistir pacificamente [6, 7].

Recentemente foi realizado um experimento interessante, não diretamente relacionado às técnicas de interferometria, mas que diz respeito ao fato de que nêutrons podem existir em estados quânticos estacionários formados no campo gravitacional terrestre. Neste experimento, o estado quântico fundamental de nêutrons no campo gravitacional terrestre foi identificado na transmissão vertical de nêutrons entre um espelho horizontal (embaixo) e um detector/espalhador (em cima) [8, 9]. Este resultado motivou Ernest a fazer uma pesquisa cuidadosa sobre auto-estados gravitacionais em campos gravitacionais fracos [10, 11]. Na verdade, apesar de todos os estudos da teoria quântica relacionados a estados atômicos e moleculares, muito pouco tem sido feito para investigar as propriedades dos hipotéticos estados estacionários que deveriam existir em poços de potenciais gravitacionais centrais similares, em particular, àqueles com grandes números quânticos.

Os experimentos anteriores nos mostram claramente que fenômenos físicos nos quais a gravidade (o campo gravitacional terrestre, especificamente) e efeitos quânticos estão mesclados não estão mais além do nosso alcance. Enfatizamos que em todas estas investigações o campo gravitacional da Terra é descrito pela gravitação newtoniana.

Por outro lado, desde sua publicação original em 1915, a teoria da relatividade geral de Einstein continua sendo uma área ativa de pesquisas tanto teóricas quanto experimentais. Atualmente a teoria tem obtido sucesso em interpretar todos os dados reunidos até então [12]. Além disso, entre os chamados *testes clássicos da Relativi-*

dade Geral existe um, a deflexão gravitacional da luz, que tem sido confirmado com uma exatidão cada vez maior. Na verdade, espera-se que uma série de experimentos melhorados utilizando a VLBI aumentará a precisão atual do parâmetro de deflexão γ em, pelo menos, um fator de 4 [13]. Aliás, o valor atual para γ é de 0.9998 ± 0.0003 (68% de nível de confiança) [13], em acordo com a relatividade geral. Além disso, é de conhecimento geral que a deflexão gravitacional da luz pelo Sol pode ser medida de modo mais preciso utilizando-se comprimentos de onda na faixa de rádio (por meio de técnicas de interferometria) em vez de ondas na frequência do espectro visível (com as técnicas ópticas disponíveis) [14–17].

De fato, atualmente a VLBI é a técnica mais precisa que temos à nossa disposição para medidas de deflexão gravitacional de ondas de rádio [13]. Agora, levando em conta que a busca por limites superiores para a massa do fóton² têm aumentado ao longo das últimas décadas [20–22], seria interessante estimar limites gravitacionais para a massa do fóton considerando as medidas mais recentes da deflexão gravitacional de ondas de rádio obtidas por meio da VLBI. Este é, precisamente, um dos objetivos deste capítulo.

O capítulo é organizado como se segue. Na Seção 3.2 encontramos o ângulo de deflexão de um fóton massivo pelo Sol enquanto, na Seção 3.3, mostramos que existe um vínculo entre a massa do fóton, sua frequência e o parâmetro de deflexão determinado pelos experimentais (o qual caracteriza a contribuição da curvatura do espaço para a deflexão gravitacional). Partindo deste interessante resultado, limites superiores para

²Em todas estas pesquisas, o fóton é descrito pela QED massiva, a qual nada mais é do que a extensão mais simples da QED padrão. Sua lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2 - J^\mu A_\mu, \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu} (= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ é o *field strength* do campo, J^μ é a corrente (elétrica) conservada e m é a massa do fóton. Aqui, índices são levantados e abaixados com $\eta^{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$, respectivamente. Na verdade, a QED massiva é teoricamente mais simples do que a teoria padrão [18], além de ser renormalizável [19].

a massa do fóton são encontrados na Seção 3.4, considerando como dados de entrada as medidas mais recentes da deflexão gravitacional solar de ondas de rádio obtidas via VLBI [13]. Na Seção 3.5 estimamos, por sua vez, um limite quântico para a massa do fóton utilizando as medidas mais recentes do momento magnético anômalo do elétron. Finalizamos, apresentando na Seção 3.6 uma discussão sobre a possibilidade de melhorarmos os limites avaliados.

Nas nossas convenções $\hbar = c = 1$, sendo a assinatura da métrica (+ - - -).

3.2 Combinando Relatividade Geral, QED Massiva e VLBI para limitar gravitacionalmente a Massa do Fóton

Iniciamos lembrando que a lagrangiana para o campo do fóton massivo acoplado minimamente à gravitação é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right]. \quad (3.2)$$

Por outro lado, para pequenas flutuações em torno da métrica de Minkowski η , a métrica completa pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$. Aqui G é a constante de Newton. Utilizando-se o resultado precedente obtemos prontamente

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\alpha} h_{\alpha}^{\nu} + \dots, \quad (3.4)$$

e

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\kappa}{2}h + \frac{\kappa^2}{8}h^2 - \frac{\kappa^2}{4}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \dots. \quad (3.5)$$

3.2.1 Cálculo da Lagrangiana de Interação

A lagrangiana de interação é encontrada substituindo-se (3.3), (3.4) e (3.5) em (3.2). Calculando separadamente cada termo de (3.2) via as mencionadas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} & \bullet -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\eta^{\mu\alpha} - \kappa h^{\mu\alpha})(\eta^{\nu\beta} - \kappa h^{\nu\beta})F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \kappa h^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \kappa\eta^{\mu\alpha}h^{\nu\beta})F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}(F_{\mu}^{\beta}h^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta} + F_{\nu}^{\alpha}h^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}(2F_{\mu}^{\beta}F_{\alpha\beta})h^{\mu\alpha} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}h^{\mu\alpha}F_{\mu}^{\beta}F_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\bullet \frac{m^2}{2}A^{\mu}A_{\mu}$$

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{2}A^{\mu}A_{\mu} &= \frac{m^2}{2}A_{\alpha}g^{\mu\alpha}A_{\mu} = \frac{m^2}{2}A_{\alpha}(\eta^{\mu\alpha} - \kappa h^{\mu\alpha})A_{\mu} \\ &= \frac{m^2}{2}A^{\mu}A_{\mu} - \frac{m^2}{2}\kappa A_{\alpha}A_{\mu}h^{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Consequentemente,

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}h^{\mu\alpha}F_{\mu}^{\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2}A^{\mu}A_{\mu} - \frac{m^2}{2}\kappa h^{\mu\alpha}A_{\alpha}A_{\mu} \right] \left(1 + \frac{\kappa}{2} \right). \quad (3.8)$$

Supondo então que o fóton massivo é espalhado por um campo gravitacional externo fraco (veja a Figura (3.1)), chegamos à seguinte lagrangiana para a interação em questão, em primeira ordem em κ ,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[\eta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\alpha A_\alpha \eta_{\mu\nu} - m^2 A_\mu A_\nu \right]. \quad (3.9)$$

Note que agora os índices são levantados (abaixados) com $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$).

3.2.2 Cálculo da Função de Vértice

Partindo da lagrangiana (3.9) e expressando os campos A^μ como $A^\mu \propto e^{-ip^\nu x_\nu} \epsilon^\mu$, podemos calcular a função de vértice da interação descrita pela Figura (3.1). Calculando separadamente os termos massivos e os não-massivos, resulta

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[\frac{m^2}{2} A^\alpha A_\alpha \eta_{\mu\nu} - m^2 A_\mu A_\nu \right] &= 2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[\frac{m^2}{2} \eta_{\mu\nu} A_\lambda \eta^{\lambda\rho} A_\rho - m^2 A_\mu A_\nu \right] \\ &\Rightarrow m^2 \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \epsilon_\lambda \eta^{\lambda\rho} \epsilon_\rho - 2\epsilon_\mu \epsilon_\nu] \\ &= m^2 \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} - 2\eta_{\lambda\mu} \eta_{\rho\nu}] \epsilon^\lambda \epsilon^\rho; \end{aligned}$$

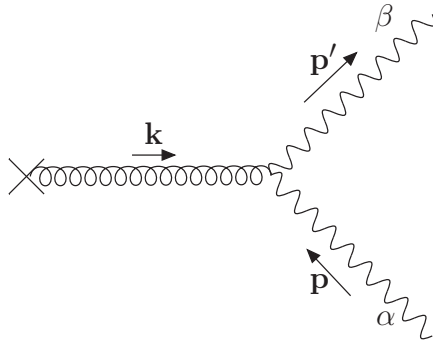


Figura 3.1: GRÁFICO DE FEYNMAN PARA A INTERAÇÃO ENTRE UM FÓTON MASSIVO E UM CAMPO GRAVITACIONAL EXTERNO.

- $2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu}] = \kappa h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta^{\alpha\beta} (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu)(\partial_\nu A_\beta - \partial_\beta A_\nu)]$
 $\Rightarrow -\kappa h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [p_\mu p'_\nu \eta_{\alpha\beta} - p_\mu p'_\beta \eta_{\nu\alpha} - p_\alpha p'_\nu \eta_{\mu\beta} + p \cdot p' \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}] \epsilon^\alpha \epsilon^\beta;$
- $2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right] = -\frac{1}{4} \kappa h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} [(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)] \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta}$
 $\Rightarrow -\frac{1}{4} \kappa h_{\text{ext}} [p \cdot p' \eta_{\alpha\beta} - p_\alpha p'_\beta - p_\beta p'_\alpha + p \cdot p' \eta_{\alpha\beta}] \epsilon^\alpha \epsilon^\beta$
 $= -\frac{1}{2} \kappa h_{\text{ext}} [p \cdot p' \eta_{\alpha\beta} - p_\alpha p'_\beta] \epsilon^\alpha \epsilon^\beta.$

Juntando os termos acima, encontramos a função de vértice desejada no espaço dos momenta,

$$V_{\alpha\beta}(p, p') = \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \left[(m^2 - p \cdot p') (\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}) + p'_\alpha p_\beta \eta_{\mu\nu} \right. \\ \left. + 2(-p'_\alpha p_\nu \eta_{\mu\beta} - p'_\mu p_\beta \eta_{\nu\alpha} + p'_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta}) \right]. \quad (3.10)$$

Ainda nos resta determinar a forma de $h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k})$. Supondo que o campo gravitacional externo fraco é gerado por uma massa pontual M em $\mathbf{r}=\mathbf{0}$, encontramos imediatamente a expressão para o campo gravitacional externo resolvendo as equações de Einstein linearizadas no *gauge* de de Donder [23]. A expressão resultante é

$$h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{16\pi r} (\eta^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}). \quad (3.11)$$

Portanto, o campo gravitacional no espaço dos momenta, $h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k})$, é dado por

$$h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \int d^3 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{r}) \\ = \frac{\kappa M}{2\mathbf{k}^2} \left(\frac{\eta^{\mu\nu}}{2} - \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} \right). \quad (3.12)$$

3.2.3 Cálculo da Seção de Choque Diferencial Não-Polarizada

Agora estamos prontos para calcular a seção de choque diferencial não-polarizada para o processo exibido na Fig. (3.1). Para tanto, relembramos que a expressão para a citada seção de choque é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \sum_{r=1}^3 \sum_{r'=1}^3 \mathcal{M}_{rr'}^2, \quad (3.13)$$

com

$$\mathcal{M}_{rr'} = \epsilon_r^\alpha(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\beta(\mathbf{p}') V_{\alpha\beta}(p, p'), \quad (3.14)$$

onde $\epsilon_r^\alpha(\mathbf{p})$ e $\epsilon_{r'}^\beta(\mathbf{p}')$ são os vetores de polarização para os bósons vetoriais incidentes e espalhados, respectivamente. Estes vetores, por sua vez, satisfazem a relação

$$\sum_{r=1}^3 \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{p}) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}. \quad (3.15)$$

A equação (3.13) para a seção de choque se torna então

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \sum_{r=1}^3 \sum_{r'=1}^3 \epsilon_r^\alpha(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\beta(\mathbf{p}') \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}') V_{\mu\nu}(p, p') V_{\alpha\beta}(p, p') \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[V_{\alpha\beta}^2 - \frac{p'^\nu p'^\beta}{m^2} V_\nu^\alpha V_{\alpha\beta} - \frac{p^\mu p^\alpha}{m^2} V_\mu^\beta V_{\alpha\beta} + \frac{p^\mu p^\alpha p'^\nu p'^\beta}{m^4} V_{\mu\nu} V_{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A conservação do momentum é dada por $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ e como não existe troca de energia com o campo gravitacional externo, $p_0 = p'_0 = E$, o que nos dá também $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$. Novamente, vamos trabalhar cada termo da expressão acima individualmente a

fim de encontrar uma relação em termos dos momenta envolvidos.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{p^\mu p^\alpha p'^\nu p'^\beta}{m^4} V_{\mu\nu} V_{\alpha\beta} &= \frac{1}{m^4} [(m^2 - p \cdot p')(2\eta_{0\alpha}\eta_{0\beta} - \eta_{\alpha\beta}) - p'_\alpha p_\beta + m^2 \eta_{\alpha\beta} \\
 &\quad + 2(E\eta_{0\alpha}p_\beta + E\eta_{0\beta}p'_\alpha - E^2\eta_{\alpha\beta})] p^\alpha p'^\beta \\
 &= 4E^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{p'^\nu p'^\beta}{m^2} V_\nu^\alpha V_{\alpha\beta} &= \frac{p^\mu p^\alpha}{m^2} V_\mu^\beta V_{\alpha\beta} \\
 &= \left(\frac{V_{\alpha\beta} p'^\beta}{m} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{2m^2 E \eta_{0\alpha}}{m} \right)^2 = 4m^2 E^2;
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad V^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} = 2p \cdot p' [(p \cdot p') - 4E^2 - 2m^2] + 5m^4 + 4E^2 m^2 + 8E^4.$$

Substituindo as quantidades anteriores na equação (3.16), obtemos a seção de choque diferencial não-polarizada

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa^2 M}{4\mathbf{k}^2} \right)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left[3\mathbf{p}^4 + \frac{3}{2}m^4 + 2\mathbf{p}^2 m^2 + 2\mathbf{p}^2 (\mathbf{p}^2 + 2m^2) \cos \theta + \mathbf{p}^4 \cos^2 \theta \right], \quad (3.17)$$

onde θ é o ângulo de espalhamento. Como $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ e $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^2 &= (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 \\
 &= \mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}'||\mathbf{p}| \cos \theta \\
 &= 2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos \theta).
 \end{aligned}$$

Utilizando a relação acima e lembrando que $\kappa^2 = 32\pi G$, (3.17) se torna

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{MG}{\mathbf{p}^2(1 - \cos\theta)} \right)^2 \frac{2}{3} \left[3\mathbf{p}^4 + \frac{3}{2}m^4 + 2\mathbf{p}^2m^2 + 2\mathbf{p}^2(\mathbf{p}^2 + 2m^2) \cos\theta + \mathbf{p}^4 \cos^2\theta \right].$$

Como $\mathbf{p}^2 = E^2 - m^2$, para ângulos pequenos ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{M^2G^2}{(2\sin^2\frac{\theta}{2})^2} \right) \frac{1}{(E^2 - m^2)^2} [4E^4 - 4m^2E^2 + m^4] \\ &= \left(\frac{M^2G^2}{4\frac{\theta^4}{16}} \right) \frac{4E^4 \left(1 - \frac{m^2}{2E^2}\right)^2}{E^4 \left(1 - \frac{m^2}{E^2}\right)^2} \\ &= \frac{16M^2G^2}{\theta^4} \left[\frac{1 - \frac{m^2}{2E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}} \right]^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde E é a energia do fóton espalhado.

A seção de choque diferencial acima pode ser relacionada a uma trajetória clássica com um parâmetro de impacto b através da relação

$$bdb = -\frac{d\sigma}{d\Omega} \theta d\theta. \quad (3.19)$$

Das equações (3.18) e (3.19), chegamos à conclusão de que

$$\theta = \frac{4MG}{b} \left(\frac{1 - \frac{m^2}{2E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}} \right), \quad (3.20)$$

a qual, no limite ultrarelativístico, i.e., $E \gg m$, leva a

$$\theta = \frac{4MG}{b} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \right),$$

ou seja,

$$\theta = \theta_E \left(1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) \quad (3.21)$$

$$= \theta_E \left(1 + \frac{m^2}{8\pi^2\nu^2} \right), \quad (3.22)$$

onde ν é a frequência do fóton massivo e $\theta_E \equiv \frac{4MG}{b}$.

3.3 Encontrando uma Relação entre Massa, Frequência e Parâmetro de Deflexão para o Fóton Massivo

Antes de continuarmos, seguem alguns comentários pertinentes.

- Recentemente foi mostrado que as seções de choque diferenciais não-polarizadas para o espalhamento de diferentes partículas quânticas são dependentes do spin, o que está em desacordo com o princípio da equivalência clássico [7] (veja a Tabela (3.1)). Este resultado levanta uma importante questão: Por que o campo gravitacional percebe o spin? Porque temos a presença de uma troca de momentum (\mathbf{k}) não nula no espalhamento, que é sensível à estrutura interna (spin) da partícula. Não obstante, se escolhermos duas expressões quaisquer daquelas listadas na Tabela (3.1), notamos que a diferença entre elas é sempre extremamente pequena para ângulos de deflexão típicos. Para demonstrar isto para partículas sem massa, por exemplo, estudamos o comportamento de

$$\frac{\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}} \equiv \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_s - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}}, \quad (3.23)$$

como uma função do ângulo de espalhamento θ (veja a Fig. (3.2)). É trivial mostrar que para pequenos ângulos a expressão anterior se reduz a

$$\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}} \approx -\frac{s\theta^2}{2}. \quad (3.24)$$

Para um ângulo de deflexão típico, digamos $\theta \sim 10^{-6}$, encontramos $\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}} \sim 10^{-12}$. A detecção de um efeito tão pequeno está, claramente, além da tecnologia atual. Conseqüentemente, para estes minúsculos ângulos de deflexão, as seções de choque não serão afetadas pelo spin das partículas.

| m | s | $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ |
|----------|---------------|--|
| 0 | 0 | $\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2$ |
| $\neq 0$ | 0 | $\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2$ |
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ |
| $\neq 0$ | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \lambda + 3 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$ |
| 0 | 1 | $\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}$ |
| $\neq 0$ | 1 | $\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^4 \frac{\theta}{2} - \frac{\lambda}{3} \left(1 - \frac{3\lambda}{4} - 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$ |
| 0 | 2 | $\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(\sin^8 \frac{\theta}{2} + \cos^8 \frac{\theta}{2} \right)$ |

Tabela 3.1: Seções de choque diferenciais não-polarizadas para o espalhamento de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional fraco externo gerado por uma partícula pontual estática de massa M . Aqui m é a massa da partícula, s o spin, θ o ângulo de espalhamento e $\lambda \equiv \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} = \frac{1-\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2}$, com \mathbf{v} e \mathbf{p} sendo a velocidade e o tri-momento, nesta ordem, da partícula incidente.

- De modo a recuperar os resultados geométricos de Einstein a partir da Tabela (3.1), devemos ter $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$; em outras palavras, no limite não-trivial de pequenas trocas de momentum, o qual corresponde a um limite de ângulo pequeno não-trivial já que $|\mathbf{k}| = 2|\mathbf{p}|\sin\frac{\theta}{2}$, as partículas massivas (não-massivas) se comportam da mesma maneira, independentemente do spin. De fato, quando o spin é “desligado”, i.e, para pequenos ângulos, obtemos da Tabela (3.1) que para $m = 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{16G^2M^2}{\theta^4}, \quad (3.25)$$

enquanto para $m \neq 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{16G^2M^2}{\theta^4} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2. \quad (3.26)$$

Utilizando a equação (3.18) concluímos que para $m = 0$,

$$\theta \approx \frac{4GM}{b}, \quad (3.27)$$

enquanto para $m \neq 0$,

$$\theta \approx \frac{4GM}{b} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right). \quad (3.28)$$

A primeira equação nos dá o ângulo de deflexão gravitacional para uma partícula sem massa — um resultado obtido por Einstein há muito tempo; enquanto a segunda coincide com a previsão da relatividade geral para a deflexão de uma partícula-teste massiva clássica por um campo gravitacional externo fraco [24]. Vale notar que as equações (3.21) e (3.28) são exatamente a mesma. Resumi-

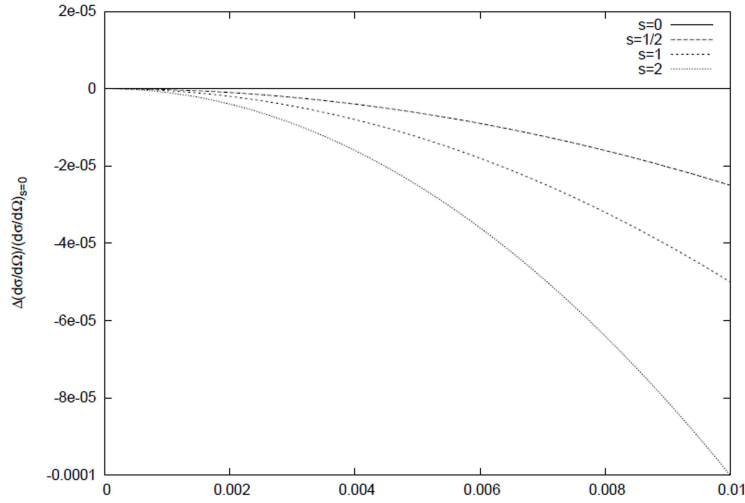


Figura 3.2: $\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}}$ COMO FUNÇÃO DO ÂNGULO DE ESPALHAMENTO θ .

damente, para ângulos pequenos os resultados da Tabela (3.1) não apenas se reduzem àqueles previstos pela teoria geométrica de Einstein mas eles também concordam com o princípio de equivalência clássico.

- À primeira vista parece que a equação (3.22) prediz um ângulo de deflexão dispersivo para fótons massivos. Na verdade, esta é uma falsa impressão; ainda mais, é simples mostrar que a equação (3.22) pode ser reescrita como

$$\theta = \theta_E \left(\frac{3 - \mathbf{v}^2}{2} \right). \quad (3.29)$$

Após estas importantes digressões, retornemos à análise da equação (3.22). O primeiro termo na expressão (3.22) coincide com aquele obtido por Einstein em 1916, resolvendo a equação da propagação da luz no campo gravitacional de um corpo estático [25], enquanto o segundo termo é a correção mais importante para a massa m do fóton massivo.

Por outro lado, o ângulo do desvio gravitacional determinado por grupos experimentais é geralmente expresso através da relação [26]

$$\theta_{\text{exp}} = \frac{1 + \gamma}{2} \theta_{\text{E}}, \quad (3.30)$$

onde γ é o parâmetro de deflexão, precisa e inequivocamente determinado pelos experimentais medindo a deflexão de radiação eletromagnética pelo campo do Sol.

Das equações (3.22) e (3.30), obtemos

$$m < 2\pi\nu\sqrt{|1 - \gamma|}. \quad (3.31)$$

Este surpreendente resultado claramente mostra que existe um vínculo entre a massa do fóton e os parâmetros γ e ν . Além disso, nos diz que o conhecimento destes parâmetros é tudo que precisamos saber para estabelecer limites superiores para a massa do fóton [27, 28].

3.4 Encontrando Limites Gravitacionais Superiores para a Massa do Fóton

Agora estamos prontos para encontrar limites gravitacionais superiores para a massa do fóton. Para tanto, faremos uso de medidas recentes da deflexão gravitacional solar de ondas de rádio encontradas por Fomalont *et al.* [13] utilizando a VLBI. As soluções para γ obtidas por meio destas medidas, assim como os limites correspondentes para a massa do fóton que estimamos utilizando a equação (3.31), estão organizadas na Tabela (3.2).

De modo a determinar o melhor valor de $(\gamma - 1)$ pelos resultados experimentais, os autores citados anteriormente minimizaram a seguinte expressão

$$\chi_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{d,i} \left(\frac{P_d(i) - 0.5(\gamma - 1)D_d(i)}{\sigma_d(i)} \right)^2, \quad (3.32)$$

onde $P_d(i)$ e $\sigma_d(i)$ são as medidas de deslocamento de posição e o erro estimado, nesta ordem. O termo $D_d(i)$ é a média da predição do desvio gravitacional previsto pela relatividade geral, tomada em cada sessão de observação. Os σ_d 's e χ_k^2 's diretamente relacionados às soluções para γ são exibidos na Tabela (3.2).

| Tipo de Solução | $(\gamma - 1) \times 10^{-4}$ | $\sigma_d \times 10^{-4}$ | χ_k^2 | $m \times 10^{-12}(MeV)$ |
|--|-------------------------------|---------------------------|------------|--------------------------|
| 43 <i>GHz</i> data (sem efeitos de corona) | -2.4 | 3.2 | 0.9 | 2.8 |
| 43 <i>GHz</i> | -1.0 | 2.6 | 2.2 | 1.8 |
| 43 <i>GHz</i> - Oct05 | -3.2 | 2.8 | 1.1 | 3.2 |
| 23 <i>GHz</i> - Oct05 | -2.0 | 2.4 | 4.7 | 1.3 |

Tabela 3.2: Limites superiores para a massa do fóton estimados utilizando as soluções para γ encontradas por Fomalont *et al.* [13].

Na Tabela (3.2), os valores relacionados à 43 *GHz* (sem efeitos de corona) são os mais precisos, já que possuem o menor valor para χ^2 . Isto se deve ao atenuamento de alguns efeitos da corona solar, e o aumento da estimativa dos erros na posição da fonte. Os dois valores para 43 *GHz* sem a correção dos efeitos de corona mostram as alterações nas medidas realizadas muito próximas ao Sol na seção de Oct05; a primeira destas soluções foi encontrada utilizando dados obtidos durante seções que duraram vários dias, enquanto a segunda é baseada em dados obtidos no intervalo de um único dia de observação. Finalmente, os valores para 23 *GHz* sugere que a refração devido à corona (a qual é quatro vezes maior do que a medida em 43 *GHz*), domina a sensibilidade do experimento em 23 *GHz*.

É importante notar que Fomalont *et al.* [13] utilizaram para os resultados que obtiveram no artigo uma média das quatro soluções exibidas na Tabela (3.2), obtendo $\gamma = 0.9998 \pm 0.0003$. Deste resultado — e assumindo que um fóton massivo passando próximo à borda solar possui uma frequência $\nu = 43GHz$, o que é perfeitamente justificável já que os dados deles são, em sua maioria, obtidos em observações de $43GHz$, onde os efeitos de refração da corona solar são desprezíveis além de 3 graus do Sol —, nós obtemos outro limite gravitacional para a massa do fóton, a saber, $m \sim 2.5 \times 10^{-12} MeV$.

Devido a razões já discutidas, chegamos à conclusão de que entre os limites gravitacionais para a massa do fóton que encontramos, o mais confiável é $m \sim 2.8 \times 10^{-12} MeV$. Além disso, o γ associado foi determinado, por um lado, utilizando uma única frequência; por outro lado, ele possui o melhor valor para χ^2 . Ademais, os dados utilizados para o cálculo de γ vêm principalmente das observações cujos efeitos de refração da corona solar são desprezíveis.

Chamamos atenção ao fato de que a equação (3.20) pode também ser deduzida, *à lá Einstein*, procurando uma solução aproximada para equação de movimento da geodésica de uma partícula teste massiva no campo de Schwarzschild. Adotando esta abordagem, uma expressão para o ângulo de deflexão de uma partícula pelo Sol foi obtido até a ordem $(\frac{GM}{b})^3$ na Ref. [24]. Este tipo de dedução, contudo, é muito trabalhosa. Por outro lado, Golowich, Gribosky e Pal [29], invés da usual abordagem geométrica, consideraram o fenômeno da curvatura da luz como um problema de espalhamento quântico. Este tratamento, que não só é instrutivo como também relativamente simples quando o campo gravitacional é fraco, permitiu-lhes facilmente obter uma expressão para a deflexão gravitacional de partículas massivas até a ordem $\frac{GM}{b}$. Um resultado idêntico foi encontrado por Mohanty, Nieves e Pal [30], utilizando um método desenvolvido originalmente por Ohanian e Ruffini [23].

Seguem alguns comentários importantes.

- De acordo com a relatividade geral, os fótons não apenas são defletidos mas também sofrem um atraso devido à curvatura do espaço-tempo produzida por qualquer massa. Além disso, o desvio e o atraso da luz são proporcionais à $\gamma + 1$. Consequentemente, técnicas utilizadas para medir tal atraso podem também ser empregadas para encontrar limites para a massa do fóton. É interessante notar que há alguns anos, Bertotti, Iess e Tortora [15] relataram uma medida do deslocamento de frequência de fótons (na faixa de rádio) trocados com a espaçonave Cassini quando eles passavam próximos ao Sol, levando a um resultado para γ que concorda com as previsões da relatividade geral com uma sensibilidade que se aproxima a um nível no qual, teoricamente, desvios são esperados em alguns modelos cosmológicos [31, 32].
- A equação (3.20) foi deduzida supondo que o campo responsável pela deflexão do fóton é um campo gravitacional estático. Contudo, como sabemos, tanto o Sol quanto os planetas não estão em repouso no Sistema Solar. Na verdade, eles estão se movendo em relação ao baricentro do Sistema Solar e ao observador. Este movimento certamente introduz correções dependentes da velocidade para a equação relativística da deflexão gravitacional da luz. Como consequência, a correção à deflexão gravitacional induzida pelos movimentos citados anteriormente devem estar correlacionadas com a correção da massa do fóton exibida na equação (3.22). Este fato nos leva a colocar uma questão importante: Atualmente, a tecnologia existente é sensível o suficiente para detectar estes pequenos efeitos da relatividade geral causados pela dependência temporal do campo gravitacional? Kopeikin [33] afirma que “futuros experimentos de deflexão de raios de luz [34]

tais como o BepiColombo (com ondas de rádio)[35], ASTROD (com laser) [36] e LATOR [37] irão, definitivamente, alcançar a precisão suficiente para medir $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$, $\bar{\beta}_{\text{PPN}}$ e $\bar{\delta}_{\text{PPN}}$, que é comparável às correções pós-newtonianas para o tempo de atraso estático e para o ângulo de deflexão causadas pelo movimento de corpos massivos no Sistema Solar [38]”. Aqui, os desvios da relatividade geral são denotados via os parâmetros PPN³ comparativos $\bar{\gamma}_{\text{PPN}} \equiv \gamma_{\text{PPN}} - 1$, $\bar{\beta}_{\text{PPN}} \equiv \beta_{\text{PPN}} - 1$ e $\bar{\delta}_{\text{PPN}} \equiv \delta_{\text{PPN}} - 1$. Por outro lado, pode-se mostrar, utilizando a equação para o tempo de atraso pós-pós-newtoniano (*post-post-Newtonian*), Δt , que foi obtida por Kopeikin acoplando os parâmetros PPN com os termos dependentes da velocidade, que para experimentos gravitacionais com a luz se propagando no campo do Sol,

$$\Delta t \approx (1 + \bar{\Gamma}) \ln \left(\frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} \right), \quad (3.33)$$

com

$$\bar{\Gamma} \approx \bar{\gamma}_{\text{PPN}} - 2\beta_{\odot}, \quad (3.34)$$

onde β_{\odot} ($= 5.3 \times 10^{-8}$) é a velocidade do Sol (em unidades naturais) em relação ao baricentro do Sistema Solar, r_{12} é a coordenada que expressa a distância entre os pontos de emissão e observação, r_1 , r_2 são as distâncias radiais dos pontos de emissão e observação, respectivamente. Agora, notando que as missões espaciais LATOR e ASTROD irão medir o parâmetro $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$ com uma precisão aproximada de 10^{-9} [36, 37], chegamos à conclusão que, num futuro próximo, correções dependentes da velocidade para a equação relativística da deflexão gravitacional do fóton deverão ser levadas em conta. Respondamos à questão levantada acima. Para simplificar vamos nos restringir a medidas de desvio da luz pelo Sol obti-

³*post-Newtonian parameters*

das por VLBI. Atualmente os grupos experimentais determinaram os parâmetros $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$ utilizando técnicas de VLBI com uma precisão de 10^{-4} [13]. Portanto, a citada correção dependente da velocidade é muito pequena e pode ser desprezada na determinação de $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$. Na verdade, a detecção de um efeito tão pequeno está além da tecnologia atual.

- Hoje em dia, como já dissemos, a VLBI é a técnica mais precisa que temos à nossa disposição para medir a deflexão gravitacional de ondas de rádio regularmente [14, 16, 17].
- Medidas da deflexão da luz com técnicas ópticas podem vir a se tornarem mais vantajosas para determinar o parâmetro γ num futuro próximo [39].

3.5 O Momento Magnético Anômalo do Elétron e a Massa do Fóton

A Eletrodinâmica Quântica, teoria originada do casamento bem sucedido entre a Mecânica Quântica e a Teoria de Campos, prediz o momento magnético anômalo do elétron com um precisão de onze casas decimais. Esta impressionante concordância entre teoria e experimento fez Ryder [47] perguntar: ‘O que mais alguém poderia querer de uma teoria física?’. É, portanto, totalmente justificável que escolhamos esta fantástica previsão da QED como alicerce para estimar outro limite sobre a massa do fóton. Neste espírito, recordemos que o momento magnético anômalo do elétron é descrito pela correção no vértice associada ao espalhamento do elétron por um campo externo, como mostrado na figura (3.3). Para um elétron espalhado por um campo magnético

estático externo, e no limite $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$, o fator giromagnético é dado por [48]

$$g = 2[1 + F_2(0)].$$

O fator de forma do elétron, $F_2(0)$, corresponde a uma variação no fator giromagnético, geralmente escrito na forma $F_2(0) \equiv \frac{g-2}{2}$.

Por outro lado, da parte quadrática da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2, \quad (3.35)$$

obtemos imediatamente o propagador para a QED massiva,

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2(k^2 - m^2)}. \quad (3.36)$$

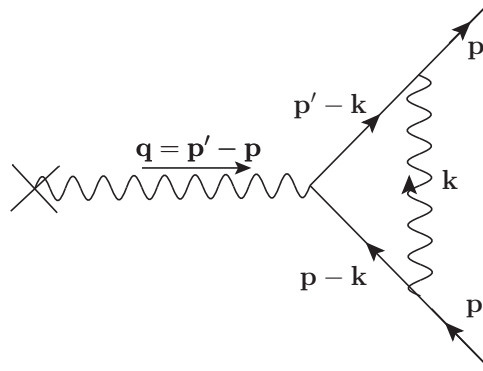


Figura 3.3: CORREÇÃO DO VÉRTICE DEVIDO A UM ELÉTRON ESPALHADO POR UM CAMPO EXTERNO.

Empregando esta expressão no cálculo do diagrama da figura (3.3), resulta

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \Sigma\alpha_i) \frac{\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \lambda^2\alpha_1},$$

onde $\lambda^2 \equiv \left(\frac{m}{\mu}\right)^2$ e μ é a massa do elétron. Observemos que o termo $\frac{k_\mu k_\nu}{M^2(k^2 - M^2)}$ que aparece na equação (3.36) foi omitido *ab initio* dos cálculos relativos à $F_2(0)$ porque o propagador para o fóton massivo sempre aparece acoplado com correntes conservadas.

Integrando a expressão acima com respeito a α_3 , e subsequentemente com respeito a α_2 , obtemos

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)^2 + \lambda^2\alpha_1} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)^2 + \lambda^2\alpha_1}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Agora,

$$\int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2 + \lambda^2x} = \frac{1}{2} - \lambda^2(1 + 2\ln\lambda) + \lambda^4\ln\lambda + \frac{4\lambda^3 - 2\lambda - \lambda^5}{\sqrt{4-\lambda^2}} \arctan \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\lambda}. \quad (3.38)$$

Portanto,

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \lambda^2(1 + 2\ln\lambda) + \lambda^4\ln\lambda + \frac{4\lambda^3 - 2\lambda - \lambda^5}{\sqrt{4-\lambda^2}} \arctan \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\lambda} \right]. \quad (3.39)$$

Levando em conta que $\lambda \ll 1$, chegamos à conclusão que

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \pi \left(\frac{m}{\mu} \right) - \left(\frac{3}{2} + 4\ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right) \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 + O \left(\left(\frac{m}{\mu} \right)^3 \right) \right]. \quad (3.40)$$

O primeiro termo da equação acima é igual ao calculado por Schwinger em 1948

[49]. Desde então, $F_2(0)$ tem sido calculado até ordem α^8 para a QED. O segundo termo da equação (3.40) é a mais importante correção associada ao parâmetro m da QED massiva.

Cálculos recentes do $F_2(0)$ no panorama da QED fornecem para o elétron [50]

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,181.13(.84) \times 10^{-12},$$

onde a incerteza vem principalmente dos ajustes das constantes de estrutura fina α , ajustes estes advindos de correções que não pertencem à QED. O valor experimental para o momento magnético anômalo é, por sua vez [51],

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,180.73(0.28) \times 10^{-12}.$$

A comparação entre o valor teórico previsto pela QED e o resultado experimental mostra que a concordância é uma parte em 11. Como consequência

$$\frac{\pi m}{\mu} < 10^{-11}, \tag{3.41}$$

o que implica $m < 1.6 \times 10^{-12}$ MeV.

3.6 Discussão

É natural, antes de mais nada, que indagemos sobre a possibilidade de melhorar os limites que encontramos para a massa do fóton. Iniciemos nossa análise pelo limite quântico. Uma rápida consulta à relação (3.41) nos mostra claramente que uma melhor concordância entre teoria e experimento no caso do momento magnético anômalo

do elétron necessariamente leva a uma melhora no limite quântico relacionado à massa do fóton. Em decorrência, existe uma grande probabilidade de obter-se um melhor limite quântico para a massa do fóton em um futuro próximo. Consideremos agora como um melhor limite para a massa do fóton poderia ser obtido usando a equação (3.31). Se as deflexões medidas via VLBI pudessem ser obtidas com maior precisão, o valor de $\sqrt{|1 - \gamma|}$ seria reduzido fornecendo, como resultado, uma melhor estimativa gravitacional. De acordo com Fomalont *et al.* [13], uma série de experimentos projetados para serem realizados com o detector VLBI poderiam aumentar a precisão de experimentos futuros ao menos por um fator de 4. Por outro lado, se as medidas de deflexão pudessem ser obtidas em frequências mais baixas, mantendo-se inalterado o valor do parâmetro de deflexão γ , o limite gravitacional seria melhorado na proporção direta da frequência. Este ponto, contudo, precisa ser tratado com cuidado. De fato, como já mencionamos, até agora, os melhores resultados obtidos para a deflexão gravitacional via VLBI são os que se encontram na faixa de 43 GHz , faixa esta na qual os efeitos da refração da corona solar são desprezíveis além de 3 graus do sol. Contudo, a frequência mais baixa empregada pelos rádio-astrônomos até hoje foi de 2 GHz . Entretanto, as medidas realizadas nesta frequência são menos confiáveis por causa dos efeitos de refração da corona solar. Na verdade, os rádio-astrônomos usam em seus experimentos uma mistura de diferentes frequências mas as contribuições mais significativas vem em geral de 43 GHz . A possibilidade de uma melhora no limite gravitacional é portanto muito limitada.

Certamente os limites que encontramos sobre a massa do fóton são maiores que o limite recentemente recomendado pelo Particle Data Group [40]. Eles são no entanto comparáveis a outros limites existentes (Veja Tabela (3.3)) e trazem novos elementos relativos à questão da restrição da massa do fóton. Consequentemente eles têm alguns

méritos. Discutimos abaixo suas principais qualidades

(i) A teoria adotada para descrever a massa do fóton tem o limite correto.

(ii) Os limites são baseados em cálculos exatos realizados no contexto da QED massiva e da Relatividade Geral, respectivamente; além do mais, utilizamos os resultados experimentais mais precisos disponíveis no momento como dados de entrada.

(iii) As abordagens conceituais aqui adotadas para estimar os limites são originais.

(iv) Os métodos usados para estabelecer os limites são interessantes por eles mesmos, apesar de não levarem a limites mais estridentes. De fato, o limite quântico foi estimado usando uma das mais notáveis previsões da eletrodinâmica quântica — o momento magnético anômalo do elétron, enquanto que o limite gravitacional foi obtido usando propriedades da gravitação. Na gravitação, o aspecto fundamental é essencialmente aquele relacionado ao fato de que o ângulo de desvio de um fóton massivo ocasionado por um campo gravitacional é diferente daquele associado a um fóton de massa de repouso nula. Conseqüentemente, observações do desvio da luz pelo Sol permitem que possamos determinar limites sobre a massa do fóton.

(v) Os limites são essencialmente uma medida do acordo entre teoria e experimento. Desde que os dois limites são da mesma ordem de grandeza, estes podem ser usados para termos uma ideia do quanto a previsão teórica se desvia do resultado experimental. Para os limites clássico e quântico estimamos que o limite inferior é $m^{-1} \sim 2$ cm. Portanto, quanto maior for o valor de m^{-1} , melhor é a concordância entre teoria e experimento. Em outras palavras, uma massa nula para o fóton implicaria em uma concordância perfeita entre teoria e experimento.

| Autor (ano) | Tipo de medida | Limites para m (MeV) |
|-------------------------------|---|----------------------------|
| Froome (1958) | Interferometria de ondas de rádio | 2.4×10^{-13} |
| Warner <i>et al.</i> (1969) | Observações do pulsar na Nebulosa do Caranguejo | 2.9×10^{-14} |
| Bay <i>et al.</i> (1972) [46] | Emissão de pulsar | 1.7×10^{-19} |
| Brown <i>et al.</i> (1973) | Pulsos de radiação curtos | 7.9×10^{-7} |
| Schaefer (1999) | Explosões de raios gama(GRB980703) | 2.4×10^{-17} |
| | Explosões de raios gama (GRB930229) | 3.4×10^{-12} |

Tabela 3.3: Alguns limites para massa do fóton obtidos utilizando medidas de dispersão da velocidade da luz em diferentes frequências do espectro eletromagnético (em ordem cronológica).

Referências Bibliográficas

- [1] R. Colella, A. Overhauser and S. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **34** 1472 (1975).
- [2] U. Bonse and T. Wroblewski, *Phys. Rev. Lett.* **51** 1401 (1983).
- [3] K. Littrell, B. Allman and S. Werner, *Phys. Rev. A* **56** 1767 (1997).
- [4] G. Adunas, E. Rodriguez-Milla and D. V. Ahluwalia-Khalilova, *Gen. Relativ. Gravit.* **33** 183 (2001).
- [5] G. Adunas, E. Rodriguez-Milla and D. V. Ahluwalia-Khalilova, *Phys. Lett. B* **485** 215 (2000).
- [6] A. Accioly and R. Paszko, *Phys. Rev. D* **78** 064002 (2008).
- [7] A. Accioly and R. Paszko, *Adv. Studies Theor. Phys.* **3** 65 (2009).
- [8] V. Nesvizhevsky *et al.*, *Nature* **415** 297 (2002).
- [9] V. Nesvizhevsky *et al.*, *Phys. Rev. D* **67** 102002 (2003).
- [10] A. Ernest, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 115207 (2009).

- [11] A. Ernest, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 115208 (2009).
- [12] S. Turyshev, *Usp. Fiz. Nauk* **179** 3 (2009).
- [13] E. Fomalont *et al.*, *Astrophys. J.* **699** 1395 (2009).
- [14] D. Robertson, W.Carter and W. Dillenger, *Nature* **349** 768 (1991).
- [15] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, *Nature* **425** 374 (2003).
- [16] S. Shapiro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92** 121101 (2005).
- [17] S. Lambert and C. Le Poncin-Lafitte, *Astron. Astrophys.* **499** 331 (2009).
- [18] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev. D* **53** 984 (1996).
- [19] D. Boulware, *Ann. Phys.* **56** 140 (1970).
- [20] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43** 277 (1971).
- [21] Liang-Cheng Tu, J. Luo, and G. Gilles, *Rep. Prog. Phys.* **68** 77 (2005).
- [22] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **82** 939 (2010).
- [23] H. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime* (Norton, New York, 1994), 2nd ed.
- [24] A. Accioly and S. Ragusa, *Class. Quant. Grav.* **19** 5429 (2002) [Erratum *Class. Quant. Grav.* **20** 4963 (2003)].
- [25] A. Einstein, *Ann. Phys.* **49** 769 (1916).
- [26] C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993).

- [27] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Lett. A* **374** 3806 (2010). *This essay was awarded an “honorable mention” in the 2010 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*
- [28] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Int. J. Mod. Phys. D* **19** 2393 (2010).
- [29] E. Golowich, P. Gribovsky, and P. Pal, *Am. J. Phys.* **58**(7), 688 (1990).
- [30] S. Mohanty, J. Nieves, and P. Pal, *Phys. Rev. D* **58**, 093007 (1998).
- [31] T. Damour and A.M. Polyakov, *Nucl. Phys. B* **423**, 532 (1994).
- [32] T. Damour, F. Piazza, and G. Veneziano, *Phys. Rev. D* **66**, 046007 (2002).
- [33] S. Kopeikin, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **399**, 1539 (2009).
- [34] S. Kopeikin and B. Mashhoon, *Phys. Rev. D* **65**, 064025 (2002).
- [35] A. Milani *et al.*, *Phys. Rev. D* **66**, 082001 (2002).
- [36] W.-T. Ni, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **166**, 153 (2007).
- [37] S. Turyshev, M. Shao and K. Nordtvedt, *Class. Quantum Grav.* **21**, 2773 (2004).
- [38] J. Plowman and R. Hellings, *Class. Quantum Grav.* **23**, 309 (2006).
- [39] S. Klioner, P. Seildemann, and M. Soffel, *International Astronomical Union Symposium* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010), Vol. 261.
- [40] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86** 010001 (2012).
- [41] D. Lowenthal, *Phys. Rev. D* **8** 2349 (1973).
- [42] A. Accioly and R. Paszko, *Phys. Rev. D* **69** 107501 (2004).

- [43] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Rev. D* **82** 065026 (2010).
- [44] A. Accioly, J. Helayël-Neto, R. Turcati, J. Morais and E. Scatena, *Classical Quantum Gravity* **27** 205010 (2010).
- [45] D. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **63** 2319 (1989).
- [46] Z. Bay and J. White, *Phys. Rev. D* **5**, 796 (1972).
- [47] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1985).
- [48] P. Frampton, *Gauge Field Theories* (Benjamin/Cummings, 1987).
- [49] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73** 416 (1948).
- [50] T. Ayoama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Phys. Rev. D* **77**, 053012 (2008).
- [51] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **100** 120801 (2008).

Epílogo

Como mencionamos na introdução, este trabalho tinha dois propósitos especiais:

- Compreender melhor a conjectura em voga sobre a incompatibilidade entre unitariedade e renormalizabilidade em teorias de ordem superior.
- Encontrar limites para a massa do fóton que não fossem baseados somente em cálculos de ordem de grandeza, mas sim em resultados provenientes de cálculos rigorosos realizados no contexto da Teoria Quântica de Campos e onde fossem utilizados como dados de entrada as mais recentes medidas experimentais.

Será que os objetivos foram atingidos? Antes de responder a esta indagação é necessário analisar o que os resultados obtidos até aqui nos dizem sobre os dois tópicos previamente mencionados.

Iniciemos pela conjectura sobre as Teorias com Derivadas de Ordem Superior.

No caso específico da versão atual da eletrodinâmica de Lee e Wick foi mostrado em detalhe que esta teoria é **não-unitária**, porém **renormalizável**. Por sua vez, Lee e Wick tentaram contornar o problema da não-unitariedade introduzindo modificações *ad hoc* nas regras usuais da teoria quântica de campos. Entre estas modificações engenhosas, porém inortodoxas, a assim chamada prescrição de Lee e Wick para a continuação

analítica das amplitudes foi alvo de críticas acerbas [1, 2]. Apesar de altamente instigantes e bem formuladas, as prescrições de Lee e Wick não foram ainda incorporadas ao ferramental da física teórica. Assim sendo, é mais prudente, por ora, nos basearmos na teoria quântica de campos ortodoxa que nos assevera que a eletrodinâmica de Lee e Wick é não-unitária. É importante notar, por outro lado, que nossos cálculos mostraram claramente que os efeitos devidos aos termos de ordem superior só se manifestam em distâncias muito pequenas, como se esperava. Portanto, fora desta diminuta região, não há diferença sensível entre as eletrodinâmicas de Maxwell e a de Lee e Wick. Em resumo, dentro do esquema padrão da teoria de campos, a eletrodinâmica de Lee e Wick é renormalizável mas não-unitária.

No que tange à gravitação massiva em $D = 3$, verificamos que ela é a única Teoria de Ordem Superior cuja versão linearizada é **unitária** ao nível de árvore. Será ela também renormalizável? Se assim for, a conjectura sobre a incompatibilidade entre unitariedade e renormalizabilidade em teorias de ordem superior cai por terra. Esta questão, como todas que envolvem renormalização de teorias gravitacionais, é sempre polêmica. Em 2009 Oda [3] “mostrou” que esta teoria era renormalizável e unitária. Bastante recentemente, no entanto, Muneyuki e Ohta [4, 5] demonstraram que as Teorias de Gravitação com Derivadas de Ordem Superior em $D = 3$ são renormalizáveis, porém aquelas teorias que demandam uma relação especial entre seus coeficientes, incluindo a nova gravitação massiva, não o são. Conseqüentemente, a gravitação massiva em $D = 3$ é **unitária** mas **não-renormalizável** .

Analisemos então a questão da determinação de limites clássicos e quânticos para a massa do fóton. Como mostramos no texto, os efeitos devidos a uma massa de repouso não nula para o fóton podem ser incorporados no eletromagnetismo de uma maneira bastante simples via a QED massiva. Neste espírito, duas interessantes implicações

decorrentes da possível existência de um fóton massivo na natureza, a saber, pequenas alterações nos valores conhecidos tanto do momento magnético do elétron como da deflexão gravitacional da radiação eletromagnética, foram utilizados para estabelecer limites superiores para a massa do fóton. Os limites obtidos não são tão bons quanto aqueles recentemente estimados, sendo porém comparáveis a outros limites existentes e trazem novas contribuições para a questão da restrição da massa do fóton. Podemos responder agora, com total segurança, que os objetivos principais do trabalho foram plenamente atingidos.

Encerrando esta discussão externamos a nossa opinião sobre a questão da conjectura relativa às Teorias de Ordem Superior, ou seja, sobre a questão da renormalizabilidade versus unitariedade. Acreditamos, baseado nos dois exemplos acima, que presentemente é impossível conciliar numa mesma Teoria de Ordem Superior os quesitos unitariedade e renormalizabilidade. A discussão sobre a renormalizabilidade da Teoria de Gravitação de Ordem Superior em 4D apresentada por Stelle em 1977 [6], que sem dúvida continua sendo o modelo ideal para quem deseja se aventurar neste importante campo de pesquisa, corrobora a nossa crença.

Como fecho deste trabalho comentaremos rapidamente sobre as investigações que seriam, de certa maneira, uma continuação natural do mesmo. Como vimos que não podemos acomodar simultaneamente monopolos de Dirac e transformações de dualidade na eletrodinâmica de Lee e Wick e nem em uma versão estendida da mesma, seria interessante investigar a possibilidade desta coexistência em eletrodinâmicas com violação da simetria de Lorentz, tais como a de Myers-Pospelov [7] e a de Gambini-Pullin [8]. Outro ponto interessante seria verificar, usando como paradigma o trabalho de Stelle [6], a questão da renormalizabilidade da teoria de gravitação massiva em $D = 3$.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Cutkosky *et al.*, Nucl. Phys. **B12**, 281 (1969).
- [2] D. Boulware and D. Gross , Nucl. Phys. **B233**, 1 (1984).
- [3] I. Oda, J. High Energy Phys. 05 (2009) 064.
- [4] K. Muneyuki and N. Ohta, Phys. Rev. D **85**, 101501 (R) (2012).
- [5] N. Ohta, Classical Quantum Gravity **29**, 015002 (2012).
- [6] K. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [7] R. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003).
- [8] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999).