Tese de
Doutorado

Pedro Ricardo del Santoro

# “Mapas Conservativos Quadridimensionais: Aspectos Clássicos e Quânticos”

Orientador: Prof. Dr. Alfredo M. Ozorio de Almeida

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro
2008

*Para a querida Eliza, por ser algum que mesmo buscando o tempo perdido entre a nascentes e a foz de dois Tejos, ou conhecendo grandeza de todas as simetrias da Alhambra, ainda tem olhos para descobrir e me mostrar a beleza escondida das metrópoles e vilas por onde passeia comigo.*

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alfredo M. Ozorio de Almeida pela orientação e apoio durante todo doutorado.

Ao Prof. Dr. Raul O. Vallejos e ao Prof. Dr. Bartolomeu D. B. Figueiredo do CBPF pela ajuda para a conclusão deste trabalho.

A todos os pesquisadores e funcionários do CBPF em especial a Sra. Myriam S. Coutinho.

Ao IFGW-UNICAMP, na pessoa do Prof. Dr. Marcus A. M. de Aguiar, pelo uso da infraestrutura da pós-graduação.

Ao Prof. Dr. Sylvio G. Rosa Jr. pela orientação na graduação e mestrado, e pelo incentivo para continuar.

Ao Prof. Dr. Mauro W. B. de Almeida do IFCH-UNICAMP, assim como a todos seus alunos e colaboradores, por me darem o privilégio de sua convivência intelectual e amizade.

A UFSCAR, E. E. Miguel V. Cury, E. E. Barão G. de Resende, FATEC-SP e UDESC, lugares onde aprendi muito mais que ensinei.

A Cida minha mãe e ao Marinho meu sobrinho por existirem.

A memória de Lando meu pai e Bozó meu irmão, que não puderam esperar, mas estariam contentes.

Ao Fabio e ao Fernando por terem me permitido a muito tempo atrás freqüentar seu laboratório, fato o que está nas origens remotas deste trabalho.

A tantos amigos de tantos lugares e casas que eu já nem sei contar mas sei lembrar.

A Bela e Valente São Sebastião do Rio de Janeiro, a Campinas, a São Carlos, a Paulicéia Desvairada, a São Jorge dos Ilhéus e a inesperada Cidade das Flores, lugares em sempre estou em casa, como em Sorocaba minha cidade natal.

# Índice

# Resumo

O objetivo central deste trabalho é estudar o efeito da dimensionalidade sobre o comportamento clássico e quântico de sistemas dinâmicos descritos por mapas conservativos. Partindo da definição usual de uma transformação que mapeia um quadrado de lado unitário sobre si mesmo, conhecida como mapa do padeiro, definiram-se quatro mapas atuando no espço de fase de quatro dimensões.

A dinâmica clássica de cada um dos mapa, denominados Mapa Direto, Mapa Porta, Mapa Reempilhado e Mapa Loxodrômico, que mapeiam um hiper-cubo de lado um, foi definida procurando-se explorar diferentes possibilidades das novas características que podem aparecer nos mapas como conseqüência do aumento da dimensionalidade. Propriedades clássicas desses mapas, como suas funções geratrizes, dinâmicas simbólicas e a presença de simetrias foram estudadas.

Os propagadores quânticos correspondentes a cada mapa foram determinados utilizando-se os métodos existententes para a quantização do mapa do padeiro usual. Partindo desses operadores foram analisadas as características estatísticas de seus espectros de autoângulo, bem como a presença de simetrias que os influenciam.

# Abstract

The central goal of this work is to study the effect of dimensionality on the classical and quantum behavior of systems described by conservative maps. From the usual definition of a transformation that maps a square with unitary side in the two dimensional phase space into itself, known as a baker map, four maps acting in the a four dimensional phase space were defined.

The classical dynamics of each map, named Direct Map, Gate Map, Restacked Map and Loxodromic Map, which maps unit a hyper-cube onto itself, were defined intending to explore the different characteristics that can appear in the maps as a consequence of the increasing dimensionality. Classical properties of these maps, their generating functions the symbolic dynamics and the presence of symmetries were studded.

The quantum propagators corresponding to each map were determined using the existing methods for the quantization of the usual baker map. The statistical characteristics of the eigenangle spectra of the propagators were analyzed, as well the presence of symmetries that influence it.

# 1 Introdução

Na segunda metade do século XIX e início do século XX, começou a ganhar corpo, em especial no âmbito da mecânica celeste, a percepção de que as ferramentas matemt́icas usuais utilizadas no tratamento das formulações de Lagrange e Hamiltom da mecânica newtoniana, não eram suficientes para dar conta da complexidade de uma série de fenômenos que hoje denominaríamos caóticos.

Um dos primeiros a pesquisar de maneira sistemática esses problemas, através do estudo do problema dos três corpos, e propor uma abordagem para os mesmos foi Poincaré [1]. Fez isso usando o método das secções, que reduz a dimensionalidade dos sistemas estudados e substitui um fluxo hamiltoniano no espaço de fase por uma aplicação ou mapa de um plano no espaço de fase sobre si mesmo.

Com o advento da mecânica quântica nas primeiras décadas do século passado, e o sucesso alcançado por essa teoria na explicação de fenômenos da física microscópica [2], o estudo de sistemas mecânicos complexos permaneceu marginal em relação à corrente principal da pesquisa física [3], tornando-se um ramo da matemática pura. As principais razões o para isso eram a noção intuitiva de que todos os sistemas hamiltonianos seriam, em princípio, solúveis, ou, na linguagem atual, integráveis, e a pouca enfase dada nos primórdios da mecânica quântica ao estudo do comportamento de sistemas que têm como contrapartida clássica sistemas com auto grau de complexidade. Colocar as equações de movimento em uma forma simples, através de uma transformação canônica, seria apenas uma questão de trabalho algébrico, o que não traria nenhum avanço conceitual no entendimento do comportamento da natureza.

O conceito de integrabilidade tornou-se claro apenas com o trabalho de Arnold [4], que mostrou que a dinâmica de um sistema hamiltoniano, em um espaço de fase de $2N$ dimensões, só pode ser colocada em uma forma simples quando esse sistema apresentar N constantes de movimento em involução entre si. Nesses casos, a superfície de energia no espaço de fase é um folheado de toros de dimensão $N$.

Nas três últimas décadas, com o emprego de técnicas de simulação computacional numérica [5], tornou-se consensual uma percepção de que, longe de serem uma exceção, os sistemas hamiltonianos não-integráveis ou caóticos constituem uma regra. Com essa percepção, houve um florescimento da pesquisa em torno de sistemas dinâmicos que apresentam comportamento sensível às condições iniciais e a idéia de comportamento caótico passou a ser aplicada a áreas do conhecimento tão distantes da mecânica quanto a biologia [6] ou a economia [7].

Na física, entre os problemas mais importantes que vieram à tona com o estudo de sistemas caóticos, está a questão do caos quântico, entendido como tal, o problema da quantização de sistemas cujos análogos clássicos apresentam comportamento caótico. Durante os últimos anos este tema tem-se constituído um campo de intensa atividade de pesquisa.

Além dos sistemas hamiltonianos, como os bilhares [8] e o rotor rígido chutado [9], uma classe de sistemas que tem sua quantização pesquisada são os mapas, ou aplicações a tempo discreto, do tipo $M : D \to D$**,** onde $D$ é uma variedade no espaço de fase de $2N$ dimensões e $M$ é definido por um conjunto de equações :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^{n+1} \\ \mathbf{q}^{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{n} \\ \mathbf{q}^{n} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Com as sucessivas iterações de um ponto inicial, $(\mathbf{p^0}, \mathbf{q^0})$, definindo uma órbita temporal em $D$. Esses mapas são classificados como conservativos ou não, dependendo da área simplética de uma região do espaço de fase, pertencente ao domínio $D$, ser conservada através da iteração do mapa $M$ [10].

Como paradigmas no estudo de mapas, podem ser destacados: os Mapas do Padeiro ($B2D$), [11] e do Gato [12] entre os conservativos, e o Mapa da Ferradura de Smale entre os não conservativos [10]. Dentre as principais características que os elevaram a esse status estão a simplicidade do conjunto de equações que os definem, a fácil representação geométrica e a baixa dimensionalidade. A despeito desta aparente simplicidade, estes mapas apresentam, na nomenclatura cunhada por Gutzwiller [14], todas as características de um sistema caótico duro.

Uma motivação mais recente para o estudo desses mapas é dado pela possibilidade de aplicação desse formalismo, sendo o mapa $B2D$ visto como uma porta lógica quântica [15] atuando sobre uma seqüência infinita de q-bits que, por sua vez, estão associados a um vetor de estado do sistema [16, 17, 18].

Essa abordagem permite associar diferentes portas lógicas a diferentes versões do mapa $B2D$ [19] e usar esses sistemas como protótipos para o estudo de diversos fenômenos como, por exemplo, o emaranhamento quântico [20, 21].

Existem varias possibilidades para estender as características do Mapa do Padeiro de maneira a focalizar diferentes aspectos de sua dinâmica caótica e sua quantização, como por exemplo, modificar-se o esquema de empilhamento da partição do espaço de fase após as operações de expansão e compressão[22], ou aumentando-se a dimensão do espaço de fase onde atua [23].

O tema desta tese será o estudo das características clássicas e quânticas de quatro versões do Mapa do Padeiro no espaço de fase quadridimensional, tendo como motivação modelar sistemas caóticos com dois graus de liberdade. Esses mapas, atuando no espaço de fase 4-D, são denominados: Mapa Direto, Mapa Porta, Mapa Reempilhado e Mapa Loxôdromico.

As definições da dinâmica desses quatro mapas serão feitas a partir do mapa do padeiro usual da seguinte forma:

I) No Mapa Direto, as operações geométricas que definem o mapa usual serão aplicadas de forma independente a cada um dos pares de coordenadas canônicas que caracterizam um ponto do espaço de fase em quatro dimensões.

II) No Mapa Porta, a atuação sobre o primeiro par de coordenadas canônicas é a mesma do mapa $B2D$, enquanto a atuação sobre o segundo par será a do mapa $B2D$, ou, a de uma modificação deste, dependendo do valor do primeiro par de coordenadas.

III) No Mapa Reempilhado, sua dinâmica será obtida com a alteração da sequência em que certas regiões do domínio do mapa direto são mapeadas em sua imagem.

IV) O Mapa Loxôdromico será uma composição de duas rotações no espaço de fase quadridimensional, combinadas com o mapa direto. Deve-se notar que, nesse mapa, uma característica especial é a existência de autovalores complexos da matriz que descreve seu comportamento local. Característica essa que só pode estar presente em mapas bidimensionais.

Serão estudados os aspectos clássicos desses mapas e proposta sua quantização. Durante esse processo, faremos a comparação entre os resultados obtidos e aqueles presentes na literatura que tratam do mapa do padeiro usual. No que se refere ao comportamento quântico desses mapas, procuraremos dar especial atenção às suas características espectrais.

# 2 Mapas Direto e Porta

## 2.1 Introdução

Neste capítulo, serão definidas duas extensões do mapa do padeiro no espaço de fase com duas dimensões ($B2D$) para o espaço de fase com quatro dimensões, que denominamos Mapa Direto ($B4D$) e Mapa Porta ($B4G$).

Na seção 2.2, será feita uma breve recapitulação da dinâmica do $B2D$ e de suas modificações. Na seção 2.3, definiremos os dois novos mapas conservativos, suas notações matriciais e as representações gráficas de suas dinâmicas. Estas últimas serão obtidas traçando-se um paralelo qualitativo entre a dinâmica desses dois mapas e a do $B2D$.

## 2.2 Mapa do Padeiro no Espaço 2-D e Suas Modificações

O mapa $B2D$ é um isomorfismo $B2D : M_2 \to M_2$, que define um sistema dinâmico a tempo discreto, isto é:

$$\mathbf{x}^{n+1} = B2D\left(\mathbf{x}^{n}\right), \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{x}^{n+1} = (p^{n+1}, q^{n+1})$ e $\mathbf{x}^{n} = (p^{n}, q^{n})$ são vetores no espaço de fase 2-D em tempos sucessivos. Este mapa tem como domínio o quadrado de lado unitário definido por $M_2 \equiv \{p, q \ / \ 0 \leq p, q \leq 1\}$.

Esse mapa, cuja representação gráfica é feita pela figura 2.1, é definido através de três operações geométricas:

i) O quadrado de lado unitário no espaço de fase 2-D é comprimido por um fator $\frac{1}{2}$ na direção do eixo $p$ e expandido por um fator 2 no sentido positivo do eixo $q$.

ii) O retângulo de altura $\frac{1}{2}$ e comprimento 2, resultante da primeira operação, é seccionado em dois por uma linha perpendicular ao eixo $q$, no ponto $q = 1$.

iii) O retângulo da direita é empilhado sobre o retângulo da esquerda. Este empilhamento é feito de forma que a aresta inferior do retângulo da direita, que coincide com a linha $p = 0$, seja sobreposta à aresta superior ao retângulo da esquerda, que coincide com a linha $p = \frac{1}{2}$.

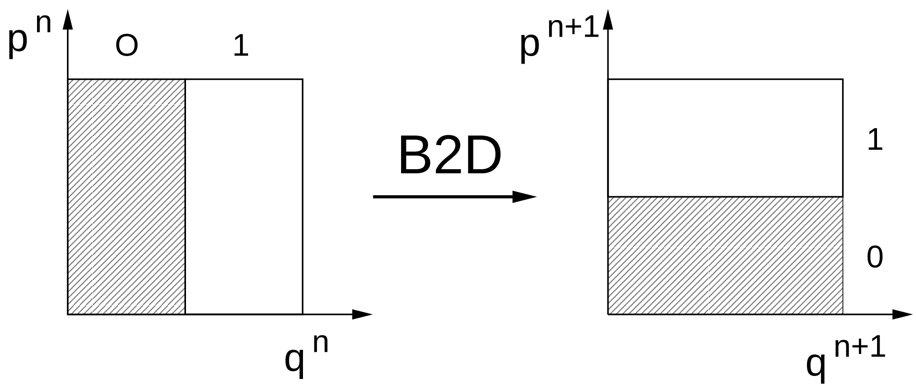


Figura 2.1: Representação gráfica da dinâmica do mapa $B2D$

Uma vez que $0 \leq p, q \leq 1$, este par de coordenadas canônicas, que representa um ponto pertencente ao domínio $M_2$, pode ser expandido em séries de potências negativas de dois na forma:

$$p^n = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{-k+1}^{n} \left(2\right)^{-k} \tag{2.2}$$

e

$$q^n = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k}^{n} \left(2\right)^{-k}, \tag{2.3}$$

onde $\varepsilon_k$ e $\varepsilon_{-k}$ assumem os valores 0 ou 1.

Sendo $\varepsilon_1^n$ o primeiro termo da expansão de $q^n$ em dígitos binários, a dinâmica do $B2D$ fica definida de forma explícita pelo par de equações:

$$p^{n+1} = \frac{1}{2} p^n + \frac{1}{2} \varepsilon_1^n, \tag{2.4}$$

e

$$q^{n+1} = 2q^n - \varepsilon_1^n. \tag{2.5}$$

Uma análise mais detalhada da dinâmica clássica do $B2D$ e sua caoticidade é dada por Devaney[24] e Ott[25].

Muitas variações conservativas ou não do $B2D$ podem ser obtidas pela modificação dos fatores de compressão, expansão e pela a forma como são feitas as operações de secção e empilhamento do domínio $M_2$. Como exemplo, temos o mapa composto por duas iterações sucessivas do $B2D$, isto é, o mapa $B2D^2$, que divide o domínio $M_2$ em quatro faixas verticais de largura 1/4 que, após a compressão e expansão, respectivamente por fatores 1/4 e 4, são reempilhadas.

Um mapa que generaliza esse tipo de variação foi introduzido por Farmer *et al.* [27], e definido por:

$$p^{n+1} = \begin{cases} \lambda_a p^n \quad para \quad q^n \leq \alpha \\ (1-\lambda_a) + \lambda_b p^n \quad para \quad q^n > \alpha \end{cases}, \tag{2.6}$$

e

$$q^{n+1} = \begin{cases} q^n/\alpha \quad para \quad q^n \leq \alpha \\ (q^n - \alpha)/\beta \quad para \;\; q^n > \alpha \end{cases}, \tag{2.7}$$

onde $\beta + \alpha = 1$ e $\lambda_a + \lambda_b \leq 1$, com o $B2D$ usual sendo recobrado quando fixamos os parâmetros $\alpha = \lambda_a = \lambda_b = \frac{1}{2}$.

Uma variação, que terá interesse particular mais adiante neste trabalho, é aquela em que são mantidas inalteradas as operações geométricas i e ii usadas acima para definir o $B2D$, sendo modificada apenas a operação iii que define o esquema de empilhamento das regiões do domínio $M_2$.

Neste mapa modificado, que daqui por diante será referido como $\overline{B2D}$, o empilhamento, como mostra a figura 2.2, é feito colocando-se o retângulo da esquerda sobre o retângulo da direita, de modo que a aresta superior deste último, que coincide com a linha $p = \frac{1}{2}$, seja sobreposta à aresta inferior do retângulo da esquerda.

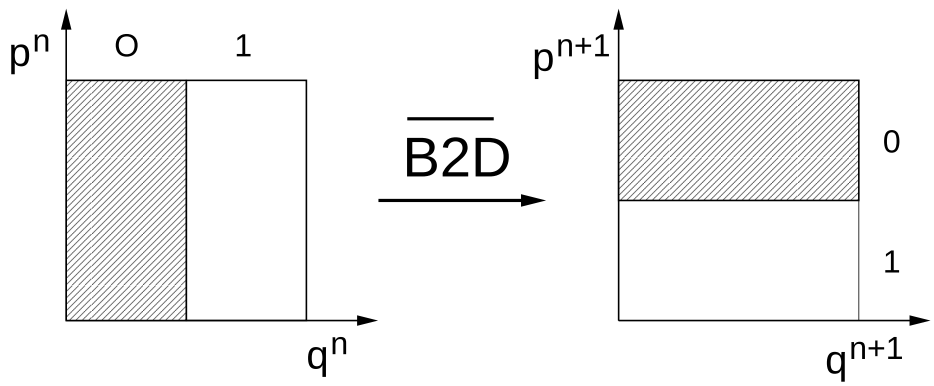


Figura 2.2: Representação gráfica da dinâmica do mapa $\overline{B2D}$

O par das equações que define a dinâmica clássica do $\overline{B2D}$ é:

$$p^{n+1} = \frac{1}{2}p^n + \frac{1}{2}\overline{\varepsilon}_1^n \tag{2.8}$$

e

$$q^{n+1} = 2q^n - \overline{\varepsilon}_1^n, \tag{2.9}$$

onde $\overline{\varepsilon}_1^n = 1 - \varepsilon_1^n$, representa o recíproco do primeiro dígito da expansão binária de $q^n$.

## 2.3 Definições dos Mapas Direto e Porta

### 2.3.1 Definição do Domínio $M_4$

O primeiro passo na construção de extensões do mapa do padeiro para espaço de fase 4-D é definir o domínio neste espaço em que essas extensões atuam.

Seja o conjunto $M_2^1 \equiv \{p_1, q_1 \ / \ 0 \leq p_1, q_1 \leq 1\}$ um quadrado de lado um no espaço de fase 2-D gerado pelo par de variáveis canonicamente conjugadas $(p_1, q_1)$, e, $M_2^2 \equiv \{p_2, q_2 \ / \ 0 \leq p_2, q_2 \leq 1\}$ outro quadrado de lado um gerado pelo par de variáveis canônicas $(p_2, q_2)$, a soma direta dos subespaços $M_2^1$ e $M_2^2$ define um hiper-cubo de lado unitário no espaço de fase 4-D:

$$M_4 = M_2^1 \oplus M_2^2, \tag{2.10}$$

onde um dos vértices coincide com a origem e cada aresta com a parte positiva de um eixo coordenado. Assim, representamos um ponto do domínio $M_4$ por um vetor $\mathbf{X}$ de coordenadas $0 \leq p_1, q_1, p_2, q_2 \leq 1$.

### 2.3.2 Mapa Direto

A própria definição do domínio $M_4$ sugere a extensão mais simples para o espaço de fase 4-D do mapa do padeiro usual.

Sejam $(p_1, q_1)$ e $(p_2, q_2)$ dois pontos pertencentes respectivamente a $M_2^1$ e $M_2^2$, usando a eq. 2.1, definimos uma transformação em que o $B2D$ atua de forma independente sobre $M_2^1$ e $M_2^2$, isto é $B2D : M_2^1 \rightarrow M_2^1$ e $B2D : M_2^2 \rightarrow M_2^2$. Obtemos a transformação $B4D : M_4 \rightarrow M_4$ através da aplicação, de forma independente, do mapa $B2D$ a cada um dos pares de coordenadas canônicas $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_1$, isto é:

$$\mathbf{X}^{n+1} = B4D\left(\mathbf{X}^n\right) \equiv \begin{cases} \left(p_1^{n+1}, q_1^{n+1})\right) = B2D\left(p_1^n, q_1^n\right) \\ \left(p_2^{n+1}, q_2^{n+1})\right) = B2D\left(p_2^n, q_2^n\right) \end{cases}, \tag{2.11}$$

onde $\mathbf{X}^n = (p_1^n, q_1^n, p_2^n, q_2^n)$ e $\mathbf{X}^{n+1} = \left(p_1^{n+1}, q_1^{n+1}, p_2^{n+1}, q_2^{n+1}\right)$.

Escrita explicitamente em termos das componentes dos vetores $\mathbf{X}^n$ e $\mathbf{X}^{n+1}$

no espaço de fase 4-D, a dinâmica do $B4D$ é dada pelo conjunto de equações:

$$\begin{cases} p_1^{n+1} = \frac{1}{2}p_1^n + \frac{1}{2}\varepsilon_{1,1}^n \\ p_2^{n+1} = \frac{1}{2}p_2^n + \frac{1}{2}\varepsilon_{1,2}^n \\ q_1^{n+1} = 2q_1^n - \varepsilon_{1,1}^n \\ q_2^{n+1} = 2q_2^n - \varepsilon_{1,2}^n \end{cases}, \tag{2.12}$$

onde $\varepsilon_{1,1}^n = [2q_1^n]$ e $\varepsilon_{1,2}^n = [2q_2^n]$ indicam os primeiros dígitos da expansão binária de $q_1^n$ e $q_2^n$, seguindo uma notação semelhante àquela utilizada quando tratamos do $B2D$.

A principal característica desse mapa é a independência entre os dois pares de variáveis canonicamente conjugadas. Isto é, o par de equações que definem $p_1^{n+1}$ e $q_1^{n+1}$ depende apenas das variáveis $p_1^n$ e $q_1^n$, assim como o par $p_2^{n+1}$ e $q_2^{n+1}$ dependem apenas de $p_2^n$ e $q_2^n$. Dessa forma, as projeções da dinâmica de um ponto pertencente a $M_4$ sobre $M_2^1$ e $M_2^2$ são completamente independentes entre si, o que permite uma descrição desse mapa por projeções de sua dinâmica sobre $M_2^1$ e $M_2^2$, como mostra a fig. 2.3.

Embora o $B4D$ não represente um sistema físico descrito por um hamiltoniano, essa característica pode ser interpretada intuitivamente como uma ausência de interação entre os pares de coordenadas canônicas pertencentes a $M_2^1$ e $M_2^2$. Apesar da simplicidade como o $B4D$ foi construído, este mapa apresenta uma dinâmica em vários aspectos mais rica que o mapa do padeiro usual, fato que ficará claro nos capítulos seguintes, quando forem estudadas outras das características clássicas desse mapa, como sua dinâmica simbólica, simetrias, e como o comportamento do mapa quântico correspondente será afetado por essas características.

Outro aspecto importante do $B4D$ é o fato de que ele servirá de base, no próximo capítulo, para a construção de duas outras extensões do mapa do padeiro no espaço de fase 4-D, a serem estudadas neste trabalho: o mapa loxodrômico e o mapa reempilhado.

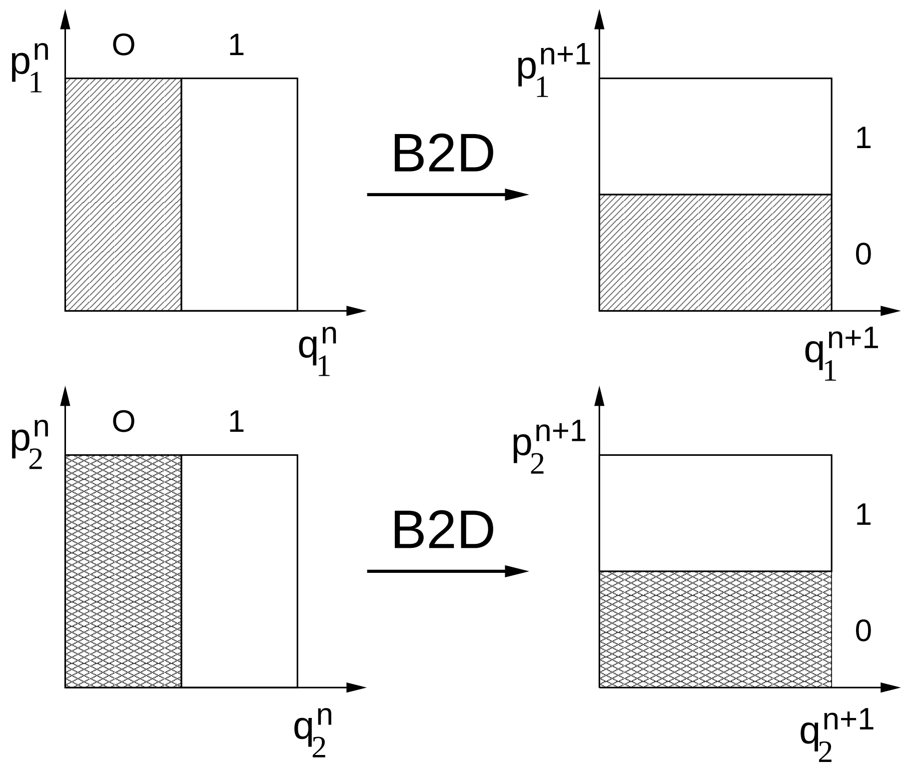


Figura 2.3: Representação gráfica da dinâmica do mapa $B4D$

### 2.3.3 Mapa Porta

A característica principal da definição do $B4D$, como visto acima, é que sua atuação se dá de forma independente sobre cada um dos pontos $(p_1^n, q_1^n)$ e $(p_2^n, q_2^n)$ pertencentes a $M_1^1$ e $M_2^2$. Tendo como motivação a tentativa de construir uma variação do $B4D$ onde exista interação entre os pares de coordenadas $(p_1^n, q_1^n)$ e $(p_2^n, q_2^n)$ , modificamos o par de eqs. 2.11 e definir-mos um novo mapa, aqui denominado mapa porta (B4G).

Esse mapa atua sobre o ponto $(p_1^n, q_1^n)$ como o mapa $B2D$, e sobre o ponto $(p_2^n, q_2^n)$ como o mapa $B2D$, ou como o mapa $\overline{B2D}$, dependendo do valor da coordenada $q_1^n$. Isto é, $B4G : M_4 \to M_4$ é um mapa que atua de tal forma que:

$$\mathbf{X}^{n+1} = B4G\left(\mathbf{X}^n\right) = \begin{cases} \left(p_1^{n+1}, q_1^{n+1}\right) = B2D\left(p_1^n, q_1^n\right) \\ \left(p_2^{n+1}, q_2^{n+1}\right) = \begin{cases} B2D\left(p_2^n, q_2^n\right) & \text{e} \quad q_1 \leq \frac{1}{2} \\ \overline{B2D}\left(p_2^n, q_2^n\right) & \text{se} \quad q_1 > \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \tag{2.13}$$

Dentre as diversas possibilidades de definições de mapas onde existe interação entre os dois pares de coordenadas, a que foi feita acima é uma das mais simples, uma vez que esta é uma variação em que o valor do par $\left(p_1^{n+1}, q_1^{n+1}\right)$ depende apenas do valor de $(p_1^n, q_1^n)$, enquanto que o valor do par $\left(p_2^{n+1}, q_2^{n+1}\right)$ depende dos pares $(p_1^n, q_1^n)$ e $(p_2^n, q_2^n)$. Ou seja, a interação entre as coordenadas afeta apenas o par de coordenadas pertencentes a $M_2^2$. Esta interação entre os pares de coordenadas pode ser vista na fig. 2.4, que mostra a representação gráfica do $B4G$.

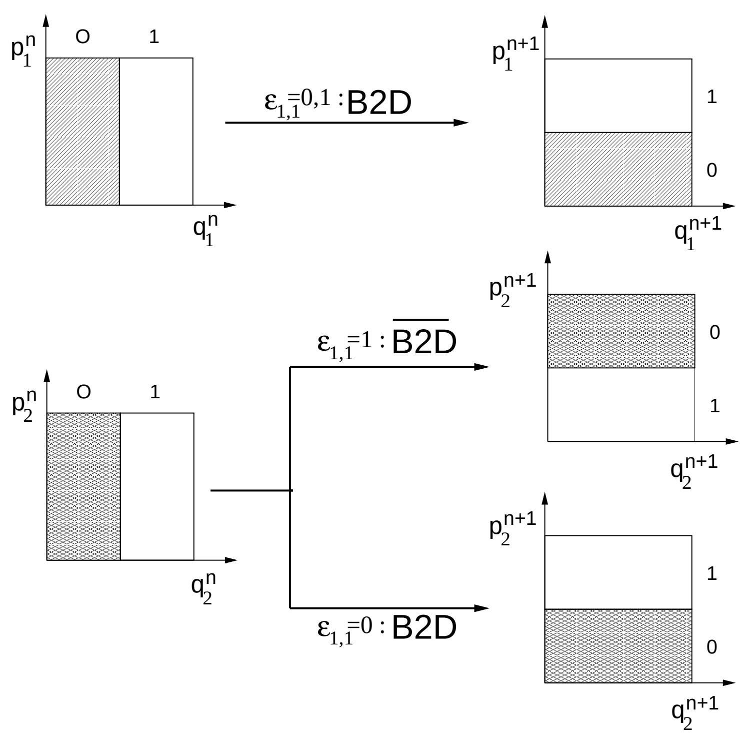


Figura 2.4: Representação gráfica da dinâmica do mapa $B4G$

Em termos das coordenadas de um vetor $\mathbf{X}^n \in M_4$, a dinâmica do $B4G$ é definida pelo conjunto de equações:

$$\begin{cases} p_1^{n+1} = \frac{1}{2}p_1^n + \frac{1}{2}\varepsilon_{1,1}^n \\ p_2^{n+1} = \frac{1}{2}p_2^n + \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_{1,1}^n\overline{\varepsilon}_{1,2}^n + \varepsilon_{1,2}^n\overline{\varepsilon}_{1,1}^n\right\} \\ q_1^{n+1} = 2q_1^n - \varepsilon_{1,1}^n \\ q_2^{n+1} = 2q_2^n - \varepsilon_{1,2}^n \end{cases} . \tag{2.14}$$

Podemos ver que a única diferença entre o conjunto de equações acima, e aquele que define o $B4D$ é o termo aditivo na segunda equação, e que:

$$\varepsilon_{1,1}^n\overline{\varepsilon}_{1,2}^n + \varepsilon_{1,2}^n\overline{\varepsilon}_{1,1}^n = \begin{cases} \varepsilon_{1,2}^n & se \quad \varepsilon_{1,1}^n = 0 \\ \overline{\varepsilon}_{1,2}^n & se \quad \varepsilon_{1,1}^n = 1 \end{cases} , \tag{2.15}$$

onde $\overline{\varepsilon}_{1,1}^n = 1 - \varepsilon_{1,1}^n$ e $\overline{\varepsilon}_{1,2}^n = 1 - \varepsilon_{1,2}^n$ são os recíprocos dos primeiros dígitos da expansão binária de $q_1$ e $q_2$.

É fácil verificar que, para $\varepsilon_{1,1}^n = 0$, este conjunto de equações coincide com aquele que define o $B4D$, e que, quando $\varepsilon_{1,1}^n = 1$, sua atuação sobre as coordenadas $p_1^n$ e $q_1^n$ é a do $B2D$ e sobre as cooordenadas $p_2^n$ e $q_2^n$ a do $\overline{B2D}$.

O nome $B4G$ foi dado devido ao fato do resultado da atuação deste mapa, sobres par de dígitos binários formado pelos primeiros termos da expansão em potências negativas de dois das coordenadas $q_1$ e $q_2$, ser mesmo de uma porta lógica **CNOT**[15].

Uma visão qualitativa da dinâmica dos mapas $B4D$ e $B4G$ pode ser obtida comparando-se a figura 2.1, que representa o $B2D$, com as figs. 2.3 e 2.4, que representam o $B4D$ e o $B4G$.

### 2.3.4 Notação Matricial

Introduzimos agora as notações matriciais para o conjunto de equações que definem a dinâmica do $B4D$ e o $B4G$. Estas notações facilitarão as manipulações algébricas quando, no próximo capítulo, construirmos outros dois mapas atuando no $M_4$, assim como a análise de suas propriedades dinâmicas e de suas simetrias

O lado direito de cada uma das eqs. 2.12 e 2.14, que definem o $B4D$ e o $B4G$, é o resultado da soma de dois termos. O primeiro termo é referente à parte linear dos mapas, representada por uma contração e uma expansão, e o segundo termo é referente à parte descontínua ou não-linear dos mapas, representando as operações de corte e empilhamento.

Tendo em mente o significado geométrico distinto de cada um destes termos, escrevemos o $B4D$ e o $B4G$ como a soma de dois mapas:

$$B4D\left(\mathbf{X}^{n}\right)=B4D^{LN}\left(\mathbf{X}^{n}\right)+B4D^{NL}\left(\mathbf{X}^{n}\right) \tag{2.16}$$

e

$$B4G\left(\mathbf{X}^{n}\right)=B4G^{LN}\left(\mathbf{X}^{n}\right)+B4G^{NL}\left(\mathbf{X}^{n}\right), \tag{2.17}$$

com $B4D^{LN}\left(\mathbf{X}^{n}\right)$ e $B4G^{LN}\left(\mathbf{X}^{n}\right)$ representando as partes lineares e $B4D^{LN}\left(\mathbf{X}^{n}\right)$ e $B4G^{NL}\left(\mathbf{X}^{n}\right)$ as partes não-lineares, dos mapas $B4D$ e $B4G$.

Como em ambos os mapas a parte linear é idêntica, temos:

$$B4D^{LN}\left(\mathbf{X}^{n}\right) = B4G^{LN}\left(\mathbf{X}^{n}\right) = \mathbf{B}\mathbf{X}^{n}, \tag{2.18}$$

onde $\mathbf{B}$ é uma matriz diagonal $4 \times 4$, com os elementos obtidos dos conjuntos de eqs. 2.12 e 2.14, isto é,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

É fácil verificar que a condição necessária e suficiente para que $\mathbf{B}$ seja simplética [10] é obedecida, ou seja,

$$\mathbf{B^T}\,\mathbf{J}\,\mathbf{B}=\mathbf{J}, \tag{2.20}$$

onde $\mathbf{B^T}$ é a matriz transposta de $\mathbf{B}$ e,

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

A parte descontínua dos mapas é dada por um vetor que depende apenas das componentes de posição, $q_1^n$ e $q_2^n$. Para o $B4D$ temos,

$$B4D^{NL}\left(\mathbf{X}^n\right)=\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon_{1,1}^n \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{1,2}^n \\ -\varepsilon_{1,1}^n \\ -\varepsilon_{1,2}^n \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

e para o $B4G$

$$B4G^{NL}\left(\mathbf{X}^n\right)=\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^n\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon_{1,1}^n \\ \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_{1,2}^n\overline{\varepsilon}_{1,1}^n+\varepsilon_{1,1}^n\overline{\varepsilon}_{1,2}^n\right\} \\ -\varepsilon_{1,1}^n \\ -\varepsilon_{1,2}^n \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Uma vez determinadas as partes linear e não linear dos mapas, escrevemos sua forma matricial como:

$$\mathbf{X}^{n+1}=\mathbf{B}\mathbf{X}^n+\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right), \tag{2.24}$$

para o $B4D$, e

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{X}^{n} + \mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{n}\right), \tag{2.25}$$

para o $B4G$.

Como a matriz $\mathbf{B}$ é a linearização dos mapas $B4D$ e $B4G$, ela estará associada à dinâmica local dos mapas, relacionando-se ao conjunto de expoentes de Liapunov e às variedades estáveis $M_4^s$ e instáveis $M_4^u$ contidas em $M_4$[10, 26]. Da mesma forma que existe uma ligação entre a parte linear e as propriedades dinâmicas locais dos mapas, haverá uma ligação entre os vetores $\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{n}\right)$ e $\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{n}\right)$ com características globais da dinâmica dos mapas, como veremos mais adiante.

### 2.3.5 Partições $\Sigma_q$ e $\Sigma_p$ do Domínio $M_4$

Um ponto em $\Re^3$, identificado pelas coordenadas $(x, y, z)$, é representado graficamente por três projeções isométricas nos planos coordenados $(x, y)$, $(x, z)$ e $(y, z)$. No caso do domínio $M_4$, um procedimento análogo tornaria necessário fazermos um total de seis projeções isométricas para representar um ponto. Isto tornaria confusa e contraproducente a representação da dinâmica dos mapas em um espaço de fase 4-D. Para evitar essas dificuldades, utilizaremos uma representação gráfica que leva em conta apenas as projeções de $M_4$ em dois planos coordenados: $(q_1, q_2)$ e $(p_1, p_2)$.

As projeções dos pontos de $M_4$ nos planos coordenados $(q_1, q_2)$ e $(p_1, p_2)$ são dadas, respectivamente, pelos pontos dos conjuntos $M_q$ e $M_p$, fig. 2.5, definidos por,

$$M_q = \{q_1, q_2 / 0 \leq q_1, q_2 \leq 1\} \tag{2.26}$$

e

$$M_p = \{p_1, p_2 / 0 \leq p_1, p_2 \leq 1\}. \tag{2.27}$$

A cada um dos planos coordenados $(q_1, q_2)$ e $(p_1, p_2)$ associamos uma partição de $M_4$ que permitirá, na próxima seção, uma visualização da dinâmica do $B4D$ e do $B4G$, equivalente àquela dada para a dinâmica do $B2D$ através da fig.2.1.

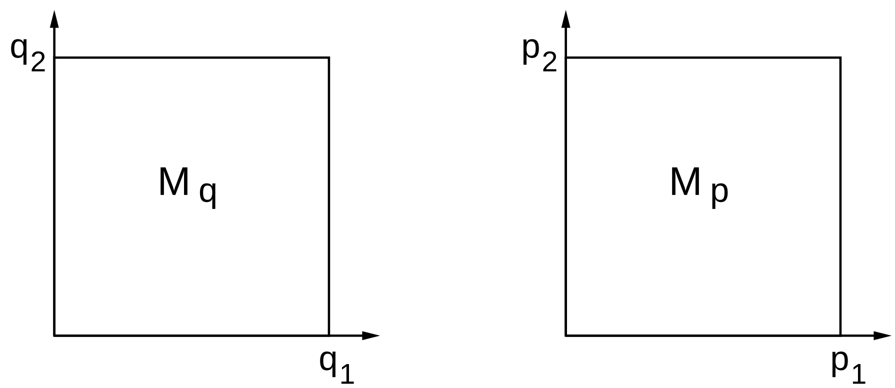


Figura 2.5: Projeções do hiper-cubo $M_4$ nos planos $(q_1, q_1)$ e $(p_2, p_2)$ .

A partição $\Sigma_q$, associada a $M_q$, divide $M_4$ em quatro regiões distintas, e essa divisão é feita por dois planos $\Sigma_q^1$ e $\Sigma_q^2$, perpendiculares entre si e ao plano $M_q$, sendo esses planos definidos por

$$\Sigma_q^1 = \left\{ (p_1, p_2, q_1, q_2) \ / \ q_1 = \frac{1}{2} \right\} \tag{2.28}$$

e

$$\Sigma_q^2 = \left\{ (p_1, p_2, q_1, q_2) \ / \ q_2 = \frac{1}{2} \right\}. \tag{2.29}$$

Cada uma das quatro regiões determinadas por $\Sigma_q$ será identificada por um par ordenado de números variando entre 0 e 1. A associação entre cada um dos quatro possíveis pares de números e as regiões da partição $\Sigma_q$ será feita por:

$$M_q^{00} = \left\{ q_1, q_2 \leq \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.30}$$

$$M_q^{01} = \left\{ q_1 \leq \frac{1}{2}, q_2 > \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.31}$$

$$M_q^{10} = \left\{ q_1 > \frac{1}{2}, q_2 \leq \frac{1}{2} \right\} \tag{2.32}$$

e

$$M_q^{11} = \left\{ q_1, q_2 > \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.33}$$

com $M_4 = M_q^{00} \cup M_q^{01} \cup M_q^{10} \cup M_q^{11}$. A projeção dessa partição no plano $(q_1, q_2)$ e a associação de pares de números a cada uma das regiões são mostradas na fig. 2.6.a.

De maneira análoga, definimos a partição $\Sigma_p$ através de dois hiperplanos $\Sigma_p^1$ e $\Sigma_p^2$, perpendiculares entre si e ao plano coordenado $(p_1, p_2)$, dados por:

$$\Sigma_p^1 = \left\{ (p_1, p_2, q_1, q_2) \ / \ p_1 = \frac{1}{2} \right\} \tag{2.34}$$

e

$$\Sigma_p^2 = \left\{ (p_1, p_2, p_2, q_2) \ / \ p_2 = \frac{1}{2} \right\}. \tag{2.35}$$

A associação entre um par coordenado de digítos binários e cada uma das regiões em que $\Sigma_p$ divide $M_4$ é feita por:

$$M_p^{00} = \left\{ p_1, p_2 \leq \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.36}$$

$$M_p^{01} = \left\{ p_1 \leq \frac{1}{2}, p_2 > \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.37}$$

$$M_p^{10} = \left\{ p_1 > \frac{1}{2}, p_2 \leq \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.38}$$

$$M_p^{11} = \left\{ p_1, p_2 > \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.39}$$

tal que $M_4 = M_p^{00} \cup M_p^{10} \cup M_p^{01} \cup M_p^{11}$, com a sua projeção sobre o plano coordenado $(p_1, p_2)$ sendo mostrada na fig. 2.6.b.

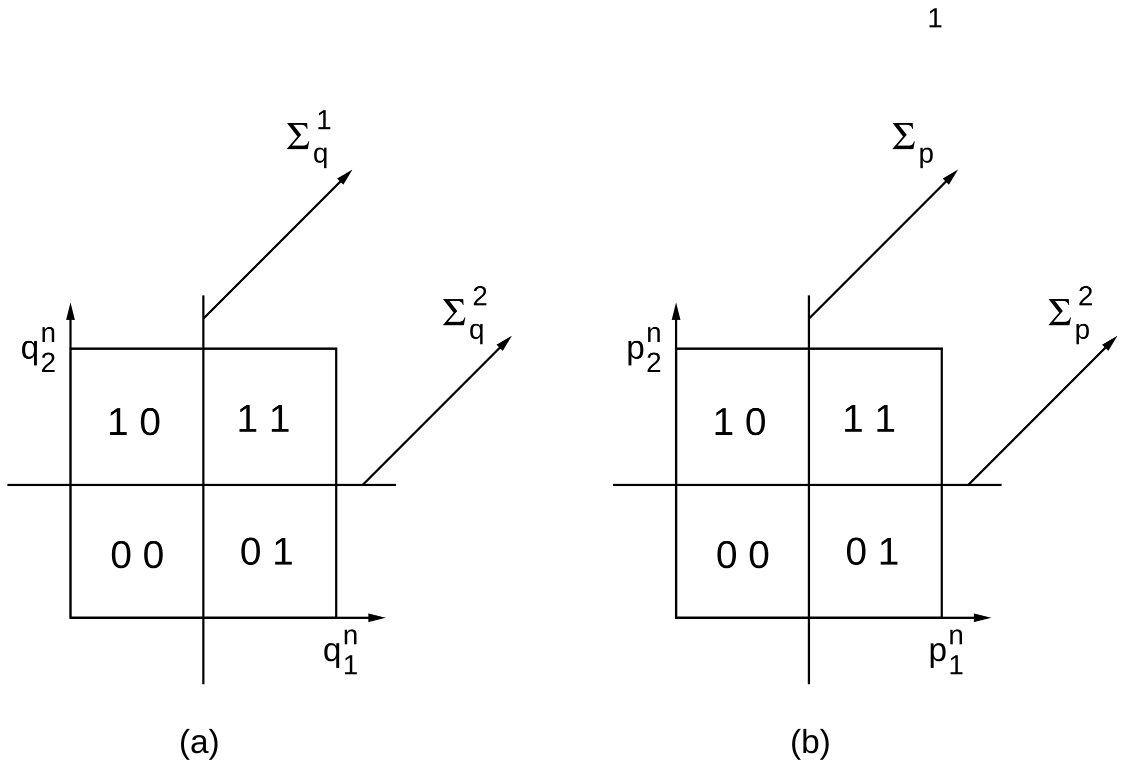


Figura 2.6: Projeções das partições $\Sigma_p$ e $\Sigma_q$ de $M_4$.

Deve-se notar que cada uma das regiões em que o domínio $M_4$ é dividido pelas partições $\Sigma_q$ e $\Sigma_p$, e associado a um par ordenado de números binários, forma um paralelepípedo quadridimensional, com as arestas destes paralelepípedos sendo mais longas em um sentido, (para $\Sigma_q$ no sentido positivo de $p_1$ e $p_2$, e para $\Sigma_p$ no sentido positivo de $q_1$ e $q_2$), e achatadas em outro, (para $\Sigma_q$ no sentido positivo de $q_1$ e $q_2$, e para $\Sigma_p$ no sentido positivo de $p_1$ e $p_2$).

Como será visto na próxima seção, a construção das partições $\Sigma_q$ e $\Sigma_p$ de $M_4$ tem seu análogo na representação gráfica usual da dinâmica do $B2D$. A partição $\Sigma_q$ terá uma importância especial pelo fato da dinâmica simbólica dos mapas $B4D$ e $B4G$, e dos outros dois mapas que serão definidos no próximo capítulo, será construida a partir de como as órbitas desses mapas visitam as regiões em que essa partição divide o dominío $M_4$.

### 2.3.6 Representação Geométrica

Para vermos a analogia entre a representação gráfica do $B2D$ e as partições $\Sigma_q$ e $\Sigma_p$, definidas na seção anterior, devemos comparar as figs. 2.1 e 2.6.

No diagrama à esquerda da fig.2.1, vemos uma partição do quadrado de lado unitário no espaço de fase 2-D equivalente à projeção de $\Sigma_q$ no plano $(q_1, q_2.)$, fig.2.6.a. Esta partição é definida pela linha vertical que divide $M_2$ nas regiões $M_q^0 = \{q \leq \frac{1}{2}\}$ e $M_q^1 = \{q > \frac{1}{2}\}$, que são associadas aos números 0 e 1. Esses digítos binários desempenham o mesmo papel dos pares ordenados de dígitos binários associados a cada uma das quatro regiões em que $\Sigma_q$ divide $M_4$.

Da mesma forma, o diagrama à direita da fig.2.1 tem seu correspondente na fig.2.6.b, que mostra a projeção de $\Sigma_p$ no plano $(p_1, p_2.)$. A linha horizontal divide $M_2$ em duas regiões $M_p^0 = \{p \leq \frac{1}{2}\}$ e $M_p^1 = \{p < \frac{1}{2}\}$ identificadas pelos números 0 e 1. Esses dígitos binários são equivalentes aos pares ordenados associados a cada uma das quatro regiões em que $\Sigma_p$ divide $M_4$.

Podemos decompor $B2D$ em isomorfismos que mapeiam uma partição de $M_2$ em outra, seguindo o esquema:

$$\begin{aligned} B2D :& M_q^0 \longrightarrow M_p^0 \\ B2D :& M_q^1 \longrightarrow M_p^1 \end{aligned} . \tag{2.40}$$

Assim como podemos decompor o mapa modificado $\overline{B2D}$ segundo o esquema:

$$\begin{aligned} \overline{B2D} :& M_q^0 \longrightarrow M_p^1 \\ \overline{B2D} :& M_q^1 \longrightarrow M_p^0 \end{aligned} . \tag{2.41}$$

De maneira análoga, decompomos o $B4D$ e o $B4G$ em isomorfismos entre cada uma das quatro regiões em que $\Sigma_q$ divide $M_4$ e cada uma das quatro regiões que $\Sigma_p$ divide $M_4$.

No caso do $B4D$, seguimos o esquema de isomorfismos:

$$\begin{array}{l} B4D : M_q^{00} \longrightarrow M_p^{00} \\ B4D : M_q^{01} \longrightarrow M_p^{01} \\ B4D : M_q^{10} \longrightarrow M_p^{10} \\ B4D : M_q^{11} \longrightarrow M_p^{11} \end{array} . \tag{2.42}$$

E para o $B4G$, o esquema de isomorfismos apresenta uma inversão de dígitos, isto é:

$$\begin{array}{l} B4G : M_q^{00} \longrightarrow M_p^{00} \\ B4G : M_q^{01} \longrightarrow M_p^{01} \\ B4G : M_q^{10} \longrightarrow M_p^{11} \\ B4G : M_q^{11} \longrightarrow M_p^{10} \end{array} , \tag{2.43}$$

onde fica evidente uma analogia entre a atuação de uma porta lógiac CNOT e a forma como o $B4G$ as regiões definidas pela partição $\Sigma_q$ naquelas definidas pela partição $\Sigma_p$.

Notamos que, do ponto de vista geométrico, esses esquemas, tanto para o $B2D$ como para o $B4D$ e o $B4G$, são uma indicação de como é feito o empilhamento dos subespaços em que são divididos $M_2$ e $M_4$, após sofrerem as operações de contração e expansão.

Os esquemas acima mostram como as regiões de $M_4$, definidas por $\Sigma_q$, são mapeadas nas regiões de $M_4$ definidas por $\Sigma_p$. Eles permitem também construir representações gráficas da dinâmica do $B4D$ e do $B4G$, figs. 2.7 e 2.8. Nestas representações, cada região da projeção de $\Sigma_q$ sobre $M_q$ é conectada à sua correspondente através de setas na projeção de $\Sigma_p$ sobre $M_p$.

Esse tipo de representação gráfica também será usada no próximo capítulo para descrever a dinâmica dos mapas loxodrômico e reempilhado.

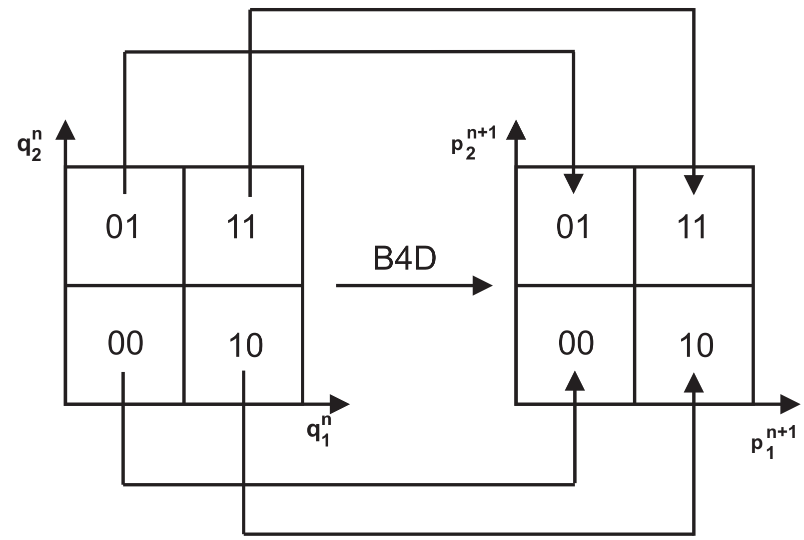


Figura 2.7: Representação gráfica da dinâmica do mapa direto em temos das partições $\Sigma_p$ e $\Sigma_q$.

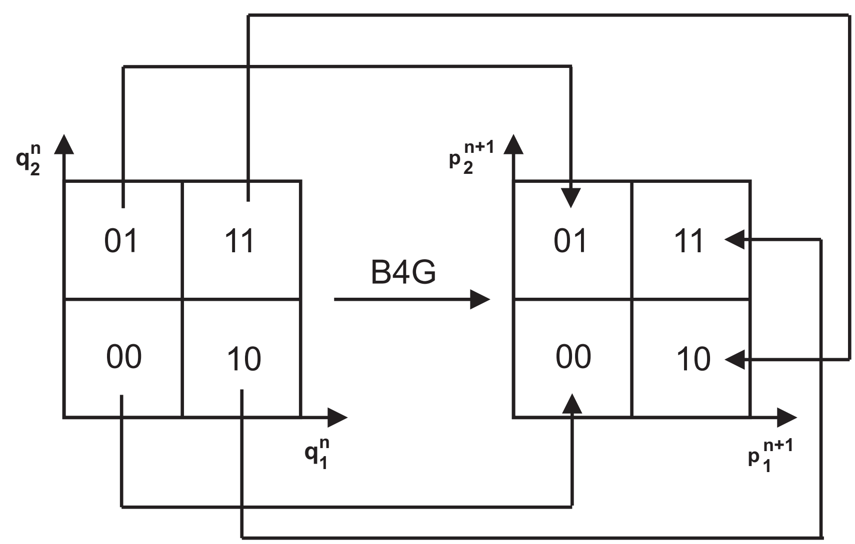


Figura 2.8: Representação gráfica da dinâmica do mapa porta em temos das partições $\Sigma_p$ e $\Sigma_q$ .

# 3 Mapas Loxodrômico e Reempilhado

## 3.1 Introdução

Neste capítulo, serão definidas mais duas extensões do mapa do padeiro para o espaço de fase 4-D. Uma característica comum que diferencia os mapas loxôdromico e reempilhado daqueles definidos no capítulo anterior é o tipo de interação entre os pares de coordenadas $(p_1^n, q_1^n)$ e $(p_2^n, q_2^n)$.

No mapa reempilhado ($B4E$), são preservadas as características locais da dinâmica do $B4D$, diferenciando-se deste apenas pelo conjunto de isomorfismos que o definem. O outro mapa, denominado mapa loxodrômico ($B4L$), será definido do modo a preservar os fatores de compressão e expansão presentes na dinâmica do mapa direto, ao mesmo tempo que sua matriz de monodrômina apresente autovalores complexos.

## 3.2 Mapa Reempilhado

As definições do $B4D$ e do $B4G$ enfocaram a atuação individual dos mapas $B2D$ e $\overline{B2D}$ sobre os pares de coordenadas $(p_1^n, q_1^n)$ e $(p_2^n, q_2^n)$, a partir disso, foram obtidos os conjuntos de equações que definem a dinâmica desses mapas no domínio $M_4$. Posteriormente, foram obtidas, a partir dessas equações, os esquemas de isomorfismos que mostram como cada uma das regiões definidas por $\Sigma_q$ é mapeada em cada uma das regiões definidas por $\Sigma_p$.

Para a construção do mapa B4E, utilizamos o caminho inverso. Supondo um mapa que mantém inalteradas as propriedades locais do $B4D$, modificamos o esquema de isomorfismos que determina este mapa e, a partir deste novo esquema, obtemos o conjunto de equações que definem sua dinâmica no $M_4$.

No domínio $M_2$ , as partições definidas para estudo dos mapas $B2D$ e $\overline{B2D}$, permitem apenas dois esquemas de isomorfismos, é aquele que corresponde ao $B2D$ e outro o que corresponde ao $\overline{B2D}$. Uma vez que cada uma das partições $\Sigma_q$ e $\Sigma_p$ dividem o $M_4$ em quatro regiões diferentes, poderíamos, em princípio, obter vinte e quatro variações do esquema de isomorfismo do $B4D$, número esse que será menor se descontar-mos os possíveis esquemas de empilhamento equivalentes.

A escolha particular do esquema de isomorfismos, utilizada para a definição do $B4E$, teve como motivação a tentativa de obter uma variação do $B4D$ que fosse o mais simples possível e que, ao mesmo tempo, quebrasse a simetria de permutação de coordenadas presente no $B4D$, como veremos adiante.

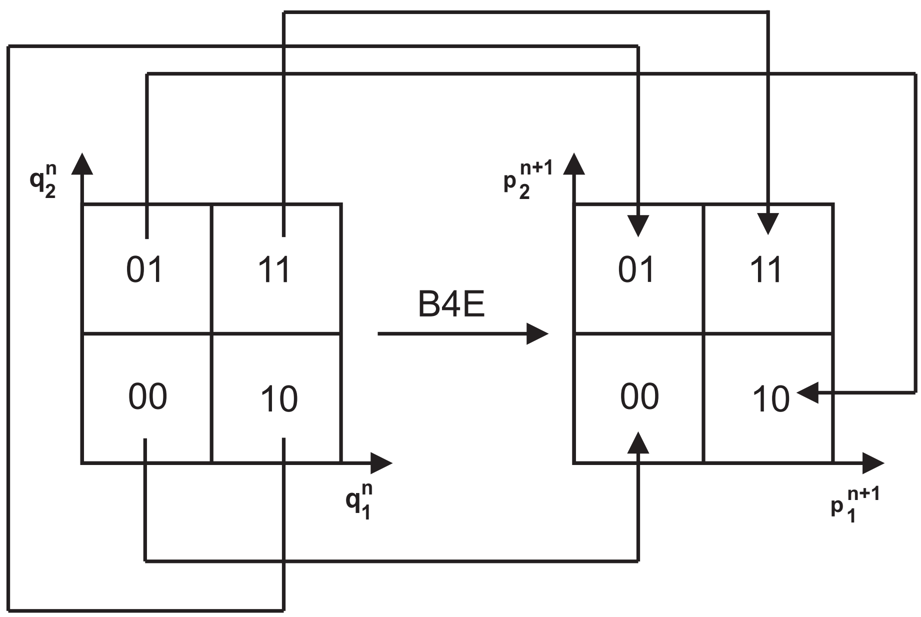


Figura 3.1: Representação gráfica da dinâmica do $B4E$

No $B4D$ temos um esquema de isomorfismos onde cada uma das regiões $M_q^{i,j}$ é mapeada na região $M_p^{i,j}$ identificada pelo mesmo par de índices. Para definir o $B4E$, utilizamos um esquema onde cada uma das regiões $M_q^{i,j}$ é mapeada na região

$M_p^{j,i}$ identificada por um par de índices com valores invertidos, isto é:

$$\begin{cases} B4E : M_q^{00} \to M_p^{00} \\ B4E : M_q^{01} \to M_p^{10} \\ B4E : M_q^{10} \to M_p^{01} \\ B4E : M_q^{11} \to M_p^{11} \end{cases}, \tag{3.1}$$

representada graficamente na fig. 3.1, onde a troca de índices corresponde a a uma porta lógica **SWAP**.

Vemos, a partir desse esquema que o efeito do $B4E$ sobre as regiões $M_q^{00}$ e $M_q^{11}$ é o mesmo que o do $B4D$, alterando-se apenas a forma como atua nas regiões $M_q^{01}$ e $M_q^{01}$. As equações que determinam a dinâmica desse mapa em termos das coordenadas de posição e momento serão determinadas mais adiante nesse capítulo.

As implicações dessas alterações ficarão evidentes quando, após fazermos a quantização desse mapa, analisarmos os espectros de auto-ângulos de seu propagador.

## 3.3 Mapa Loxodrômico

Os três mapas definidos até aqui têm em comum sua parte linear que é caracterizada pela matriz **B**. Para obter um mapa em que essa característica é alterada, construímos o mapa loxodrômico (B4L), um isomorfismo $B4L : M_4 \to M_4$ definido pela composição de uma transformação $SL : M_4 \to M_4$ com o mapa $B4D$, isto é:

$$B4L\left(\mathbf{X}^n\right) = SL \circ B4D\left(\mathbf{X}^n\right). \tag{3.2}$$

A transformação $SL\left(\mathbf{X}^n\right)$ é a composição de duas transformações atuando sobre um ponto $\mathbf{X}^n$ de $M_4$. Uma dessas transformações mantém fixas as coordenadas $(p_1, p_2)$, de modo que sua atuação sobre os pontos da projeção $M_q$ seja equivalente a uma rotação em torno de seu ponto central, $\mathbf{X}_{\mathbf{q}}^0 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$

no sentido anti-horário. De maneira análoga, a segunda transformação mantém fixas as coordenadas $(q_1, q_2)$, de modo que sua atuação sobre os pontos da projeção $M_p$ seja equivalente a uma rotação em torno de seu ponto central, $\mathbf{X_p^0} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, no sentido anti-horário, por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$. A representação geométrica destas duas tranformações que compõem $SL$ são mostradas individualmente nas figs. 3.2.

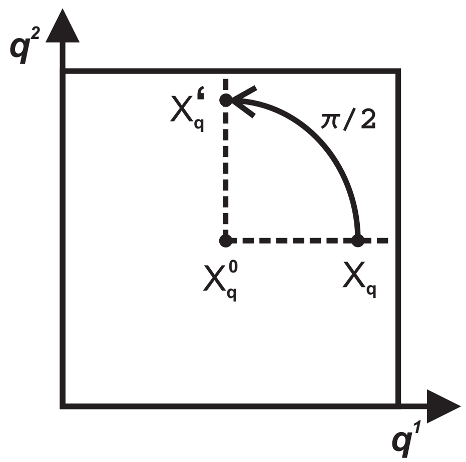


Figura 3.2: Rotações que compõem a transformação $SL$

Como no capítulo anterior, utilizamos as projeções das partições $\Sigma_q$ e $\Sigma_p$ para obter o esquema de isomorfismos que descreve o $B4L$ e também para representar graficamente a dinâmica deste mapa.

Uma vez que o $B4L$ foi definido como a composição de $B4D$ com a transformação $SL$, é necessário determinar o efeito desta última sobre o esquema de isomorfismos dado pela eq. 2.42 que representa a dinâmica do $B4D$. Decompondo $SL$

em isomorfismos entre cada uma das quatro regiões $M_p^{i,i}$, temos o esquema:

$$\begin{cases} SL : M_p^{00} \to M_p^{10} \\ SL : M_p^{10} \to M_p^{11} \\ SL : M_p^{11} \to M_p^{10} \\ SL : M_p^{01} \to M_p^{00} \end{cases}, \tag{3.3}$$

como mostra a fig. 3.3.

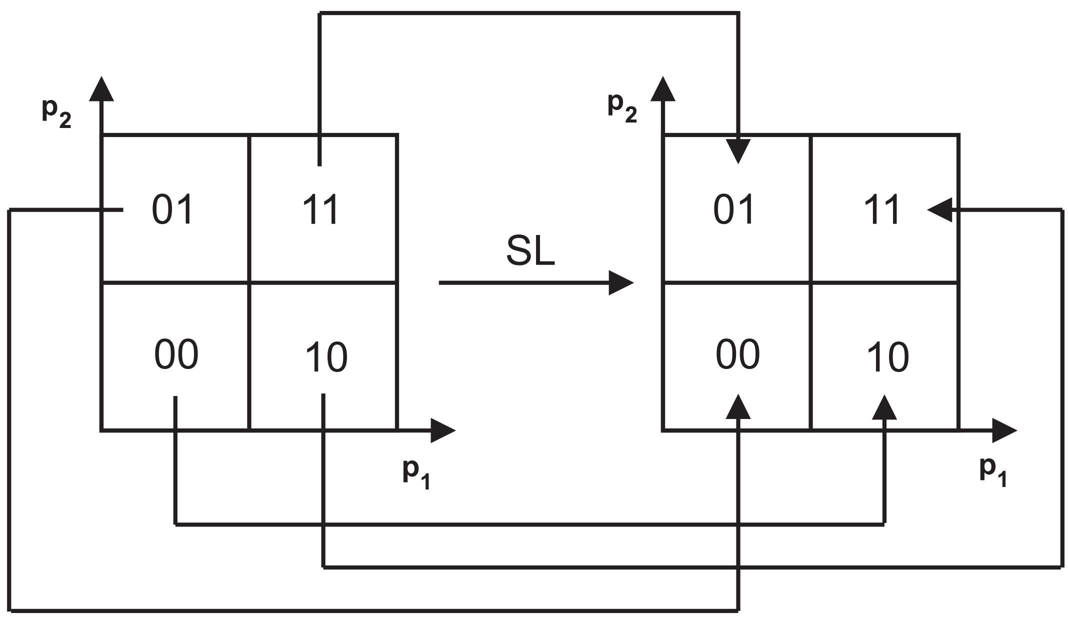


Figura 3.3: Representação gráfica da transformação $SL : M_4 \to M_4$.

Compondo o esquema acima com o esquema de isomorfismos da eq. 2.42 obtemos,

$$\begin{cases} B4L : M_q^{00} \to M_p^{10} \\ B4L : M_q^{01} \to M_p^{00} \\ B4L : M_q^{10} \to M_p^{11} \\ B4L : M_q^{11} \to M_p^{01} \end{cases}. \tag{3.4}$$

Isto permite uma representação gráfica do $B4L$ análoga àquela utilizada para representar os outros mapas, onde uma região $M_q^{i,j}$ da projeção de $\Sigma_q$ sobre $M_p$ é conectada por uma seta a uma região $M_p^{i,j}$ da projeção de $\Sigma_p$ sobre $M_p$, fig. 3.4.

Podemos adquirir agora uma intuição geométrica do significado da composição da transformação $SL$ com o $B4D$. Após dividir $M_4$ em quatro regiões, que sofrem um processo de expansão e contração formando quatro paralelepípedos, o $B4D$ faz um empilhamento sobre $M_4$, seguindo o esquema descrito pela eq. 2.42. A composição com a transformação $SL$ submete esses paralelepípedos a uma rotação, definindo um novo processo de empilhamento em $M_4$ o que resulta no esquema de quatro isomorfismos descrito acima.

Uma vez que essas transformações comutam, a ordem em que as transformações $SL$ e $B4D$ aparecem na definição de $B4L$ pode ser trocada, propriedade cuja importância será evidenciada quando tratarmos das simetrias dos mapas $B4D$ e $B4L$.

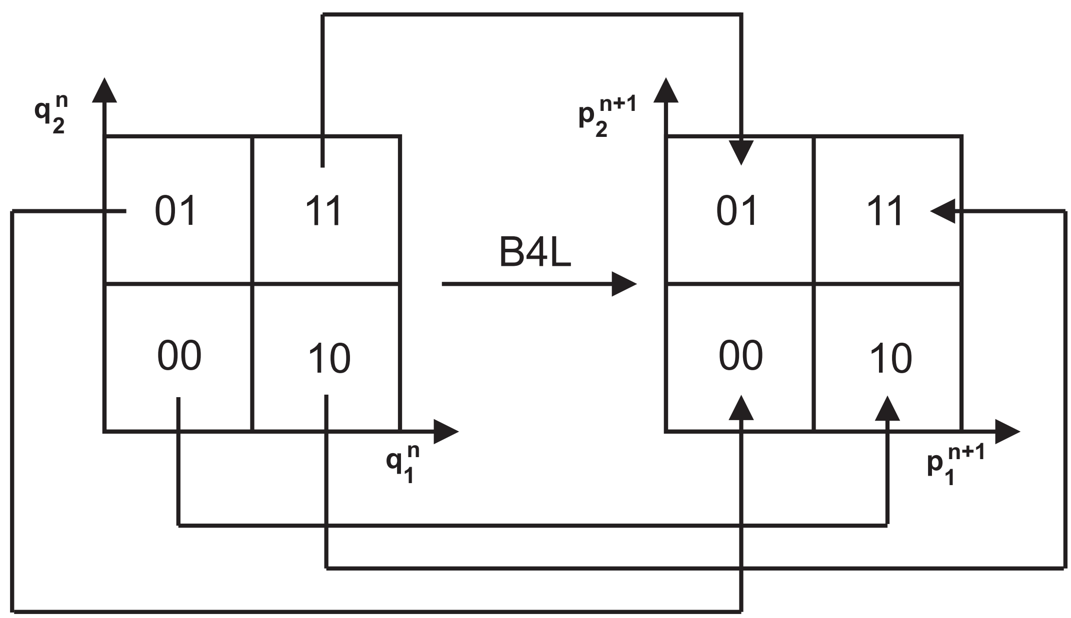


Figura 3.4: Representação gráfica do Mapa Loxodrômico.

## 3.4 Notações Matriciais e Equações Dinâmicas

Na definição acima do mapa $B4E$, foi imposta a condição de que este mapa tenha a mesma parte linear, ou seja, as mesmas característicais locais do $B4D$. Isto é, podemos escrever:

$$B4E\left(\mathbf{X}^n\right) = B4E^{LN}\left(\mathbf{X}^n\right) + B4E^{NL}\left(\mathbf{X}^n\right), \tag{3.5}$$

onde

$$B4E^{LN}\left(\mathbf{X}^n\right) = B4G^{LN}\left(\mathbf{X}^n\right) = B4D^{LN}\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{B}\mathbf{X}^n, \tag{3.6}$$

com a matriz $\mathbf{B}$ sendo dada pela equação 2.20. Assim a notação matricial do mapa $B4E$ toma a forma:

$$B4E\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{B}\mathbf{X}^n + \mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right), \tag{3.7}$$

onde $\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right)$ é um vetor que determina a parte não-linear do mapa.

Para determinar $\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right)$, lembramos que, nos mapas vistos até aqui, o que determina o esquema de isomorfismos são os termos aditivos nas equações que envolvem as coordenadas de momentos. Esses termos são combinações lineares dos primeiros digítos binários das coordenadas de posição $\varepsilon_{1,1}^n$ e $\varepsilon_{1,2}^n$, ou seja:

$$\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha_1\left(\varepsilon_{1,1}^n, \varepsilon_{1,2}^n\right) \\ \frac{1}{2}\alpha_2\left(\varepsilon_{1,1}^n, \varepsilon_{1,2}^n\right) \\ -\varepsilon_{1,1}^n \\ -\varepsilon_{1,2}^n \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Podemos determinar que uma forma simples para as combinações $\alpha_1\left(\varepsilon_{1,1}^n, \varepsilon_{1,2}^n\right)$ e $\alpha_2\left(\varepsilon_{1,1}^n, \varepsilon_{1,2}^n\right)$, que dão origem ao esquema de isomorfismos que define o $B4E$, são apenas aquelas que fazem a inversão de $\varepsilon_{1,1}^n$ por $\varepsilon_{1,2}^n$ nas equações que definem o $B4D$.

Isto é,

$$\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon^n_{1,2} \\ \frac{1}{2}\varepsilon^n_{1,1} \\ -\varepsilon^n_{1,1} \\ -\varepsilon^n_{1,2} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Uma vez que podemos verificar que as eqs. acima impõem que as regiôes $M_q^{00}$ e $M_q^{11}$ serão mapaedas sobre si mesmas, e a região $M_q^{01}$ será mapeada sobre a região $M_q^{10}$ e $M_q^{10}$ será mapeada sobre $M_q^{01}$.

Assim escrevemos de forma explícita o conjunto de equações que definem a dinâmica do $B4E$:

$$\begin{cases} p_1^{n+1} = \frac{1}{2}p_1^n + \frac{1}{2}\varepsilon^n_{1,2} \\ p_2^{n+1} = \frac{1}{2}p_2^n + \frac{1}{2}\varepsilon^n_{1,1} \\ q_1^{n+1} = 2q_1^n - \varepsilon^n_{1,1} \\ q_2^{n+1} = 2q_2^n - \varepsilon^n_{1,2} \end{cases}. \tag{3.10}$$

Para obter a representação matricial do $B4L$, analisamos primeiramente a transformação $SL$, uma vez que esse mapa foi definido como a combinação do $B4D$ com essa transformação. Cada uma das duas rotações em torno do centro de $M_q$ e $M_p$ que compõem $SL$, representadas graficamente graficamente na fig. 3.3, é equivalente a uma combinação de uma rotação em torno da origem seguida de uma translaçõ, em notação matricial:

$$\begin{cases} S_q\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{S_q}\mathbf{X}^n + \mathbf{T_q} \\ S_p\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{S_p}\mathbf{X}^n + \mathbf{T_p} \end{cases}, \tag{3.11}$$

com

$$\mathbf{S_q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S_p} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

e

$$\mathbf{T_q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T_p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

onde as matrizes $\mathbf{S_q}$ e $\mathbf{S_p}$ são representações de dois elementos do grupo $SO\,(4)$[27], que corresponde as rotações por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ entorno da origem dos planos $(q_1, q_2)$ e $(p_1, p_2)$, e dos vetores $\mathbf{T_q}$ e $\mathbf{T_p}$, que representam translações paralelas aos eixos $\mathbf{q_1}$ e $\mathbf{p_1}$, isto é, $T_p\,(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{T_p}$ e $T_q\,(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{T_q}$.

A particularidade desses elementos do $SO\,(4)$[28], assim como dessas translações, é a indiferença do resultado quanto à ordem em que são executadas sobre um ponto do domínio $M_4$, o que pode ser expressa pelas relações de comutação:

$$\begin{cases} \mathbf{S_q S_p} = \mathbf{S_p S_q} \\ \mathbf{T_q} + \mathbf{T_p} = \mathbf{T_p} + \mathbf{T_q} \end{cases}. \tag{3.14}$$

Essa particularidade faz com que tenhamos

$$S_L\,(\mathbf{X}^n) = S_p \circ S_q\,(\mathbf{X}^n) = S_p \circ S_q\,(\mathbf{X}^n) \tag{3.15}$$

que, junto com as eqs. 2.14, permite escrever,

$$\begin{aligned} S_L\,(\mathbf{X}^n) &= \mathbf{S_p}\,(\mathbf{S_q X}^n + \mathbf{T_q}) + \mathbf{T_p} \\ &= \mathbf{S_p S_q X}^n + \mathbf{S_p T_q} + \mathbf{T_p}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Definindo

$$\mathbf{S_L} = \mathbf{S_p}\mathbf{S_q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

e

$$\mathbf{T_1} = \mathbf{S_p}\mathbf{T_q} + \mathbf{T_p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

podemos obter explicitamente a forma matricial da transformação $S_L$:

$$S_L\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{S_L}\mathbf{X}^n + \mathbf{T_1}. \tag{3.19}$$

A equação acima mostra que, assim como as rotações que a compõem, a transformação $SL$ pode ser entendida como a composição de duas transformações,

$$SL\left(\mathbf{X}^n\right) = T_1 \circ S_L\left(\mathbf{X}^n\right), \tag{3.20}$$

onde $S_L\left(\mathbf{X}^n\right)$ é uma rotação em torno da origem representada pela matriz $\mathbf{S_L}$ e $T_1\left(\mathbf{X}^n\right)$ é uma translação representada pelo vetor $\mathbf{T_1}$. Essa propriedade terá importância especial quando da construção do propagador quântico do $B4L$.

Partindo da definição do mapa loxodrômico e utilizando-se a notação matricial da tranformação $SL$ e do $B4D$, temos:

$$B4L\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{S_L}\left(\mathbf{B}\mathbf{X}^n + \mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right)\right) + \mathbf{T_1}. \tag{3.21}$$

Definindo-se a matriz

$$\mathbf{B_{4L}} = \mathbf{S_L B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

e o vetor

$$\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{S_L R_D}\left(\mathbf{X}^n\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\epsilon_{1,2} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{1,1} \\ \epsilon_{1,2} \\ -\epsilon_{1,1} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

obtemos a forma matricial de $B4L$:

$$B4L(\mathbf{X}^n) = \mathbf{B_{4L}}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{T_1}. \tag{3.24}$$

Podemos assim escrever o conjunto de equações que determinam a dinâmica do $B4L$ na forma:

$$\begin{cases} p_1^{n+1} = 1 - \frac{1}{2}p_2^n - \frac{1}{2}\epsilon_{1,2} \\ p_2^{n+1} = \frac{1}{2}p_1^n + \frac{1}{2}\epsilon_{1,1} \\ q_1^{n+1} = 1 - 2q_2^n + \epsilon_{1,2} \\ q_2^{n+1} = 2q_1^n - \epsilon_{1,1}. \end{cases} . \tag{3.25}$$

## 3.5 Propriedades Locais e Interação entre Coordenadas

Da expressão matricial que define a dinâmica do $B4E$, vemos que a dinâmica local deste mapa, assim como a dos mapas $B4D$ e $B4G$, é determinada pela matriz $\mathbf{B}$, sendo que a diferença entre estes três mapas está contida na parte não-linear.

A forma diagonal da matriz $\mathbf{B}$ e a repetição dos elementos $\frac{1}{2}$ e 2, faz com que os fatores de compressão e expansão, a que são submetidos os pontos uma região do domínio $M_4$, sejam os mesmos que os do mapa $B2D$. Isto é visto se tomarmos os pontos de uma vizinhança suficientemente pequena em torno de um ponto de $M_q$ ou $M_p$ e analisarmos sua dinâmica.

Para o $B4L$, as características locais de sua dinâmica são determinadas pela matriz $\mathbf{B_{4L}}$, com o conjunto de autovalores dessa matriz sendo os imaginários puros $\pm\frac{1}{2}i$ e $\pm 2i$. Este conjunto de autovalores classifica a dinâmica local do $B4L$, seguindo a nomenclatura de Arnold [29], como loxodrômica. Denominação esta derivada da náutica [30], onde loxodrôma designa uma linha conectando dois pontos sobre a superfície terrestre cruza todos os meridianos a um ângulo constante. Essa linha, que numa a projeção cil´ndrica de Mercator do globo terrestre aparece como uma linha reta, se aproxima de um polo em espiral de forma semelhante ao comportamento da órbita de um sistema de equaç oes diferenciais cuja matriz de monodrômia tem autovalores complexos.

Desse conjunto de autovalores de $\mathbf{B_{4L}}$, podemos inferir a particularidade da transformação de $SL$ utilizada para definir o $B4L$. Se procurarmos por uma extensão do mapa do padeiro usual que mantenha os fatores de compressão e expanção inalterados individualmente em relação aos planos $(p_1, q_1)$ e $(p_2, q_2)$, e, cujo comportamento local seja determinado por uma matriz com autovalores imaginários puros não degenerados, a escolha da matriz $\mathbf{B_{4L}}$ é uma das duas únicas possíveis. Isto implica que os autovalores imaginários puros de uma matriz ortogonal $4 \times 4$, diferente de $\mathbf{B_{4L}}$, obrigatoriamente teriam módulos diferentes de 2 e $1/2$. Assim, outra escolha para a transformação $SL$ alteraria uma das características geométricas principais do $B4D$, que são seus fatores de compressão e expansão. Isso justifica a escolha de um elemento particular do grupo $SO\,(4)$, a transformação $SL$ para, junto com o $B4D$, compor o $B4L$.

Do ponto de vista da interação entre pares de coordenadas $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, nos mapas $B4G$, $B4E$ e $B4L$, ao contrário do que acontece no $B4D$ , temos que os dois pares de coordenadas interagem entre si. Isto pode ser visto comparando-se as duas primeiras componentes dos vetores $\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^n\right)$, $\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right)$ e $\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right)$, com as componetes de $\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right)$.

No vetor $\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right)$, as duas primeiras componentes envolvem, respectivamente, os dígitos binários $\epsilon_{1,1}$ e $\epsilon_{1,2}$, e como consequência disso esse mapa atua de forma independente sobre os pares de coordenadas $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$.

Para o $\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^n\right)$ a primeira componente depende apenas de $\epsilon_{1,1}$, enquanto a segunda componente depende de uma combinação de $\epsilon_{1,2}$ e $\epsilon_{1,2}$, refletindo a definição desse mapa em que a atuação sobre o par de coordenadas $\mathbf{x_1}$ independe do valor do par $\mathbf{x_2}$, enquanto a atuação sobre o par $\mathbf{x_2}$ depende do valor de $\mathbf{x_1}$. Finalmente, para os vetores $\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right)$ e $\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right)$, verificamos que a primeira e a segunda componente dependem, respectivamente, de $\epsilon_{1,2}$ e $\epsilon_{1,1}$. Pode-se notar também que no caso do mapa $B4L$, mesmo sua parte linear caracteriza uma interação devido a troca entre as coordenadas $p_1$ e $p_2$, e a troca entre $q_1$ e $q_2$.

# 4 Dinâmica Clássica dos Mapas no $M_4$

## 4.1 Introdução

Nos capítulos 2 e 3, foram dadas as definições da construção de quatro mapas atuando no domínio $M_4$, foi realizada uma análise do significado geométrico e foram obtidas as equações que descrevem as suas dinâmicas.

Neste capítulo, faremos um estudo comparativo de alguns aspectos da dinâmica clássica desses quatro mapas e a introdução de suas dinâmicas simbólicas. Esses resultados serão usados no capítulo seguinte na análise de outras propriedades dos mapas, como suas simetrias, a ação e a periodicidade de suas órbitas em $M_4$.

## 4.2 Dinâmica dos Mapas em $M_p$ e $M_q$

Seja uma seqüência ordenada de pontos $O\left(\mathbf{X}^0\right) \equiv \left(\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^3, \cdots\right)$ que pertencem a $M_4$ . Esta seqüência é chamada órbita do ponto $\mathbf{X}^0$ através de um mapa quando seus pontos são gerados por iterações sucessivas deste ponto através desse mapa.

Tomando como exemplo o mapa $B4D$, um conjunto de pontos ordenados é a órbita do ponto $\mathbf{X}^0_{\mathbf{D}}$ quando cada ponto desse conjunto puder ser obtido do anterior pela iteração desse mapa, isto é:

$$\mathbf{X}^N = \mathbf{B}\mathbf{X}^{N-1} + \mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right). \tag{4.1}$$

De forma similar, para os mapas $B4G$, $B4E$ e $B4L$, seqüências ordenadas de pontos pertencentes a $M_4$ descrevem órbitas desses mapas quando:

$$\mathbf{X}^N_{\mathbf{G}} = \mathbf{B}\mathbf{X}^{N-1} + \mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right), \tag{4.2}$$

$$\mathbf{X}^N_{\mathbf{E}} = \mathbf{B}\mathbf{X}^{N-1} + \mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right) \tag{4.3}$$

e

$$\mathbf{X}_{\mathbf{L}}^{N} = \mathbf{B_{4L}}\mathbf{X}^{N-1} + \mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right) + \mathbf{T_1}. \tag{4.4}$$

Substituindo-se $\mathbf{X}^{N-1}$, no primeiro termo à direita da eq. 4.1, por sua expressão em termos de seu antecessor na órbita temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{N} &= \mathbf{B}\{\mathbf{B}\mathbf{X}^{N-2} + \mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-2}\right)\} + \mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right) \\ &= \mathbf{B}^2\mathbf{X}^{N-2} + \mathbf{B}\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-2}\right) + \mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Fazendo-se o mesmo para os outros mapas, expressamos o ponto $N$ de suas órbitas em termos de seus dois predecessores como:

$$\mathbf{X}^{N} = \mathbf{B}^2\mathbf{X}^{N-2} + \mathbf{B}\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{N-2}\right) + \mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right), \tag{4.6}$$

$$\mathbf{X}^{N} = \mathbf{B}^2\mathbf{X}^{N-2} + \mathbf{B}\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^{N-2}\right) + \mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right), \tag{4.7}$$

$$\mathbf{X}^{N} = \mathbf{B}_{\mathbf{L}}^2\mathbf{X}^{N-2} + \mathbf{B_L}\{\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^{N-2}\right) + \mathbf{T_1}\} + \mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^{N-1}\right) + \mathbf{T_1}. \tag{4.8}$$

Aplicando-se esse processo recursivo $L$ vezes, chega-se a:

$$\mathbf{X}^{N} = \mathbf{B}^{L}\mathbf{X}^{N-L} + \sum_{n=1}^{L}\mathbf{B}^{n-1}\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right), \tag{4.9}$$

$$\mathbf{X}^{N} = \mathbf{B}^{L}\mathbf{X}^{N-L} + \sum_{n=1}^{L}\mathbf{B}^{n-1}\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right), \tag{4.10}$$

$$\mathbf{X}^{N} = \mathbf{B}^{L}\mathbf{X}^{N-L} + \sum_{n=1}^{L}\mathbf{B}^{n-1}\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) \tag{4.11}$$

e

$$\mathbf{X}^N = \mathbf{B}_\mathbf{L}^L \mathbf{X}^{N-L} + \sum_{n=1}^{L} \mathbf{B}_\mathbf{L}^{n-1} \{ \mathbf{R}_\mathbf{L}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) + \mathbf{T}_\mathbf{1} \}. \tag{4.12}$$

As somatórias à direita das quatro equações acima envolvem as partes não lineares do mapas aplicadas a cada um dos $l$ pontos anteriores da órbita. Para fazermos o desenvolvimento dessas somatórias, primeiro definimos os vetores

$$\mathbf{E_1}^{N-n} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1,1}^{N-n} \\ \epsilon_{1,2}^{N-n} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

que têm componentes iguais aos primeiros dígitos binários das coordenadas de posição do ponto $N-n$ de uma órbita.

Com essa definição, podemos reescrever as eqs 2.23, 2.4, 3.11 e 3.25 , que fornecem as partes não lineares dos mapas em termos dos primeiros dígitos binários das coordenadas de posição, como:

$$\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon_{1,1}^{N-n} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{1,2}^{N-n} \\ -\epsilon_{1,1}^{N-n} \\ -\epsilon_{1,2}^{N-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \\ -\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

para o $B4D$, e

$$\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon_{1,1}^{N-n} \\ \frac{1}{2}\{\epsilon_{1,1}^{N-n}\overline{\epsilon}_{1,2}^{N-n} + \epsilon_{1,2}^{N-n}\overline{\epsilon}_{1,1}^{N-n}\} \\ -\epsilon_{1,1}^{N-n} \\ -\epsilon_{1,2}^{N-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right) \\ -\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

para o $B4G$, onde a primeira componente de $\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right)$ é dada em termos da combinação de dígitos binários $\Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right) = \left(\epsilon_{1,1}^{N-n}, \epsilon_{1,1}^{N-n}\overline{\epsilon}_{1,2}^{N-n} + \epsilon_{1,2}^{N-n}\overline{\epsilon}_{1,1}^{N-n}\right)$, com

$\Lambda_G^2\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right) = \Lambda_G\left(\Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right)\right) = \mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}$ e a segunda componente em termos do vetor definido pela eq. 4.13. De forma análoga temos

$$\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon_{1,2}^{N-n} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{1,1}^{N-n} \\ -\epsilon_{1,1}^{N-n} \\ -\epsilon_{1,2}^{N-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Lambda_E\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right) \\ -\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

para o $B4E$, onde onde a primeira componente de $\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right)$ é dada em termos da permutação de dígitos binários $\Lambda_E\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right) = \left(\epsilon_{1,2}^{N-n}, \epsilon_{1,1}^{N-n}\right)$. No caso do mapa $B4L$, lembrando que $\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right)$ é uma composição de $\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right)$ e da transformação $SL$, temos:

$$\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \mathbf{S_L}\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{s}\mathbf{E}_1^{N-n} \\ -\mathbf{s}\mathbf{E}_1^{N-n} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

onde a matriz

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

é um dos blocos que definem a matriz $\mathbf{S_L}$.

Dado que a matriz $\mathbf{B}$ que caracteriza a dinâmica local dos mapas $B4D$, $B4G$ e $B4E$ é diagonal, vemos que suas potências são dadas por:

$$\mathbf{B}^{n-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

E, usando-se a relação de comutação $\mathbf{B_L} = \mathbf{S_L}\mathbf{B}$, obtemos as potências de $\mathbf{S_L}$ na forma diagonal por blocos:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^{n-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\mathbf{s}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & (2\mathbf{s})^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Usando as eqs. 4.14 a 4.17, que fornecem as partes não lineares dos mapas em função dos vetores $\mathbf{E_1^{N-n}}$ e as potências de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B_L}$, podemos reescrever as somatórias à direita das eqs. 4.9 a 4.12 como:

$$\sum_{n=1}^{L} \mathbf{B}^{n-1}\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \sum_{n=1}^{L} \begin{pmatrix} 2^{-n}\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{N-n} \\ -2^{n-1}\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{N-n} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

$$\sum_{n=1}^{L} \mathbf{B}^{n-1}\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \sum_{n=1}^{L} \begin{pmatrix} 2^{-n}\Lambda_G\left(\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{N-n}\right) \\ -2^{n-1}\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{N-n} \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\sum_{n=1}^{L} \mathbf{B}^{n-1}\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) = \sum_{n=1}^{L} \begin{pmatrix} 2^{-n}\Lambda_E\left(\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{N-n}\right) \\ -2^{n-1}\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{N-n} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

e

$$\sum_{n=1}^{L} \mathbf{B}_{\mathbf{L}}^{n-1}\left\{\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^{N-n}\right) + \mathbf{T}_1\right\} = \sum_{n=1}^{L} \begin{pmatrix} 2^{-n}\mathbf{s}^n\mathbf{E}_1^{N-n} + 2^{1-n}\mathbf{s}^{n-1}\mathbf{t}_1 \\ -2^{n-1}\mathbf{s}^n\mathbf{E}_1^{N-n} - 2^{n-1}\mathbf{s}^{n-1}\mathbf{t}_1 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

onde, na equação acima, usou-se o vetor $\mathbf{T_1}$ na forma

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1 \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

com $\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

As eqs. 4.21 a 4.24 permitem descrever o N-ésimo ponto das órbitas de um ponto do domínio $M_4$ através de um par de equações matriciais, envolvendo o ponto inicial da órbita e os vetores $\mathbf{E}_1^L, \mathbf{E}_1^{L+1}, \cdots, \mathbf{E}_1^{N-1}$ como:

$$B4D : \begin{cases} \mathbf{p}_\mathbf{D}^N = 2^{-L}\mathbf{p}_\mathbf{D}^{N-L} + \sum_{n=1}^{L} 2^{-n}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \\ \mathbf{q}_\mathbf{D}^N = 2^{L}\mathbf{q}_\mathbf{D}^{N-L} - \sum_{n=1}^{L} 2^{n-1}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \end{cases}, \tag{4.26}$$

$$B4G : \begin{cases} \mathbf{p}_\mathbf{G}^N = 2^{-L}\mathbf{p}_\mathbf{G}^{N-L} + \sum_{n=1}^{L} 2^{-n}\Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right) \\ \mathbf{q}_\mathbf{G}^N = 2^{L}\mathbf{q}_\mathbf{G}^{N-L} - \sum_{n=1}^{L} 2^{n-1}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \end{cases}, \tag{4.27}$$

$$B4E : \begin{cases} \mathbf{p}_\mathbf{E}^N = 2^{-L}\mathbf{p}_\mathbf{E}^{N-L} + \sum_{n=L}^{L} 2^{-n}\Lambda_E\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n}\right) \\ \mathbf{q}_\mathbf{E}^N = 2^{L}\mathbf{q}_\mathbf{E}^{N-L} - \sum_{n=1}^{L} 2^{n-1}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-n} \end{cases} \tag{4.28}$$

e

$$B4L : \begin{cases} \mathbf{p}_\mathbf{L}^N = (2\mathbf{s})^{-L}\,\mathbf{p}_\mathbf{L}^{N-L} + \sum_{n=1}^{L} 2^{-n}\mathbf{s}^n\mathbf{E}_\mathbf{1}{}^{N-n} + 2^{1-n}\mathbf{s}^{n-1}\mathbf{t}_\mathbf{1} \\ \mathbf{q}_\mathbf{L}^N = (2\mathbf{s})^{L}\,\mathbf{q}_\mathbf{L}{}^{N-L} - \sum_{n=1}^{L} 2^{n-1}\mathbf{s}^n\mathbf{E}_\mathbf{1}{}^{N-n} + 2^{n-1}\mathbf{s}^{n-1}\mathbf{t}_\mathbf{1} \end{cases}, \tag{4.29}$$

onde separou-se $\mathbf{X} \in M_4$ em dois vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ contendo, respectivamente, as coordenadas de momento e posição de forma que:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_1} \\ \mathbf{q_1 2} \end{matrix}. \tag{4.30}$$

Nesses grupos de equações, apenas no último par, que descreve o $B4L$, aparecem as matrizes $\mathbf{s}$ e os vetores $\mathbf{t_1}$. Isto pode ser entendido vendo-se que, na eq.4.29, eles representam operações de rotação, usadas na definição do mapa $B4L$ como uma composição do mapa $B4D$ e a transformação $SL$. Também devemos notar que esse par de equações reduz-se ao par de eqs. 4.26 ao fazermos $\mathbf{s} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{t}_1 = 0$, Isto é, na ausência da transformação $SL$ os mapas $B4D$ e $B4L$ coincidem.

Essas equações dependem dos vetores $\mathbf{E}_1^{N-L}, \mathbf{E}_1^{N-L+1}, \cdots, \mathbf{E}_1^{N-1}$. Portanto, fornecem as coordenadas de um ponto da órbita de um mapa a partir dos primeiros dígitos binários das coordenadas de posição dos $l$ pontos que o antecedem, o que limita sua utilização, uma vez que para determinarmos o ponto $N$ de uma órbita através dessas equações é necessário conhecer todos os pontos anteriores. Na próxima seção, quando forem analisadas as representações quaternárias dos mapas, serão obtidas expressões que determinam a relação entre os vetores da seqüência $\mathbf{E}_1^{N-L}, \mathbf{E}_1^{N-L+1}, \cdots, \mathbf{E}_1^{N-1}$ e as $L$ primeiras componentes quaternárias do ponto inicial de uma órbita. Isso faz com que essas expressões possam ser simplificadas, facilitando a análise da dinâmica dos mapas.

## 4.3 Representação Quaternária dos Mapas

### 4.3.1 Expansão Quaternária

Dado que os valores numéricos das componentes de um ponto $n$ da órbita de um mapa, $\mathbf{X^N} = (p_1^N, p_2^N, q_1^N, q_2^N)$, pertencem ao intervalo $[0, 1]$, podemos expandi-los em uma série de potências negativas de dois,

$$\begin{cases} p_1^N = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_{-k+1,1}^N \, (2)^{-k} \\ p_2^N = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_{-k+1,2}^N \, (2)^{-k} \end{cases} \tag{4.31}$$

e

$$\begin{cases} q_1^N = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_{k,1}^N \, (2)^{-k} \\ q_2^N = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_{k,2}^N \, (2)^{-k} \end{cases} , \tag{4.32}$$

onde $\epsilon_{k,1}^N$ $\epsilon_{k,2}^N$ podem assumir os valores 0 ou 1, com índices $k$ especificando a potência de dois que os multiplica nessa expressão. Fazendo a decomposição de $\mathbf{X^N} = (\mathbf{p^N}, \mathbf{q^N})$, podemos reescrever a expansão quaternária de $\mathbf{p^N}$ e $\mathbf{q^N}$ como:

$$\mathbf{p^N} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \epsilon_{-k+1,1}^N \\ \epsilon_{-k+1,2}^N \end{pmatrix} (2)^{-k} \tag{4.33}$$

e

$$\mathbf{q^N} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \epsilon_{k,1}^N \\ \epsilon_{k,2}^N \end{pmatrix} (2)^{-k} , \tag{4.34}$$

ou ,

$$\mathbf{p^N} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E_{-k+1}^N} \, (2)^{-k} \tag{4.35}$$

e

$$\mathbf{q^N} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E_k^N} \, (2)^{-k} , \tag{4.36}$$

onde define-se as componentes quaternárias de $\mathbf{p^N}$ e $\mathbf{q^N}$ através dos vetores

$$\mathbf{E_k^N} = \begin{pmatrix} \epsilon_{k,1}^N \\ \epsilon_{k,2}^N \end{pmatrix} , \tag{4.37}$$

que podem assumir quatro valores distintos, dado que cada uma de suas duas componentes pode assumir os valores inteiros 0 e 1.

Notamos que os vetores $\mathbf{E_1^N}$, definidos pela eq. 4.13 e usados para determinar a dinâmica de um ponto de $M_4$ através dos mapas, são um caso particular dos vetores $\mathbf{E_k^N}$, quando $k = 1$. Ou seja, $\mathbf{E_1^N}$ define apenas a primeira componente da expansão quaternária das coordenadas $\mathbf{q^N}$ de um ponto da órbita, enquanto $\mathbf{E_k^N}$ define as componentes quaternárias de $\mathbf{p^N}$ e $\mathbf{q^N}$ de qualquer ordem. As eqs. 4.35 e 4.36 são o análogo, para o espaço de fase 4-D, da expansão em dígitos binários dos pontos do domínio do $B2D$, eqs. 2.2 e 2.3.

Podemos mostrar que as primeiras componentes quaternárias de $\mathbf{p^N}$ e $\mathbf{q^N}$, respectivamente $\mathbf{E_0^N}$ e $\mathbf{E_1^N}$, indicam a qual das regiões $M_p^{i,j}$ e $M_q^{i,j}$, definidas pelas partições $\Sigma_q$ e $\Sigma_p$, pertencem as projeções de $\mathbf{X^N}$. Isto pode ser visto tomando-se como exemplo

$$\mathbf{E_0^N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{E_1^N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Do valor das componentes de $\mathbf{E_0^N}$ e $\mathbf{E_1^N}$ no exemplo acima, temos $p_1^N \leq \frac{1}{2}$, $p_2^N > \frac{1}{2}$, $q_1^N > \frac{1}{2}$, $q_2^N > \frac{1}{2}$, e assim, $\mathbf{p^N} \in M_p^{01}$ e $\mathbf{q^N} \in M_q^{11}$.

De maneira geral podemos fazer a associação:

$$\mathbf{p^N} \in M_p^{\mathbf{E_0^N}} \qquad \mathbf{q^N} \in M_q^{\mathbf{E_1^N}}, \tag{4.39}$$

onde as componentes de $\mathbf{E_0^N}$ e $\mathbf{E_1^N}$ tomam o lugar dos índices $i$ e $j$. Esta associação será importante para definirmos o significado geométrico da dinâmica simbólica dos mapas $B4D$ e $B4L$, que discutiremos adiante.

### 4.3.2 Dinâmica dos Mapas em Termos das Componentes Quaternárias

Para relacionarmos as componentes quaternárias de diferentes pontos de uma órbita, partimos das eqs. 4.26 a 4.29, com $L = 1$, que relacionam o ponto $N$ de uma órbita gerada pelos mapas com seu anterior, reduzindo-se a:

$$B4D : \begin{cases} \mathbf{p}^N = 2^{-1}\mathbf{p}^{N-1} + 2^{-1}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} \\ \mathbf{q}^N = 2\mathbf{q}^{N-1} - \mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} \end{cases}, \tag{4.40}$$

$$B4G : \begin{cases} \mathbf{p}^N = 2^{-1}\mathbf{p}^{N-1} + 2^{-1}\Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1}\right) \\ \mathbf{q}^N = 2\mathbf{q}^{N-1} - \mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} \end{cases}, \tag{4.41}$$

$$B4E : \begin{cases} \mathbf{p}^N = 2^{-1}\mathbf{p}^{N-1} + 2^{-1}\Lambda_E\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1}\right) \\ \mathbf{q}^N = 2\mathbf{q}^{N-1} - \mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} \end{cases} \tag{4.42}$$

e

$$B4L : \begin{cases} \mathbf{p}^N = 2^{-1}\mathbf{s}\mathbf{p}^{N-1} + 2^{-1}\mathbf{s}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} + \mathbf{t_1} \\ \mathbf{q}^N = 2\mathbf{s}\mathbf{q}^{N-1} - \mathbf{s}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} + \mathbf{t_1} \end{cases}. \tag{4.43}$$

Fazendo a expansão quaternária dos vetores $\left(\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N\right)$ e $\left(\mathbf{p}^{N-1}, \mathbf{q}^{N-1}\right)$ na eq. 4.40, temos a relação entre as componentes quaternárias de dois pontos sucessivos de uma órbita do mapa $B4D$:

$$B4D : \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{-k+1}}^N 2^{-k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{-k+1}}^{N-1} 2^{-(k+1)} + 2^{-1}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{-k+1}}^{N-1} 2^{-(k+1)} \\ \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_k^N 2^{-k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{k}^{N-1} 2^{-(k-1)} - \mathbf{E}_\mathbf{1}^{N-1} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{k}^{N-1} 2^{-(k-1)} \end{cases}. \tag{4.44}$$

Com as transformações de índices, $k+1 \to k$ à direita da primeira equação do par acima e a transformação $k-1 \to k$ à direita da segunda, obtemos:

$$B4D : \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{-\mathbf{k+1}} 2^{-k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N-1}_{-\mathbf{k+2}} 2^{-k} \\ \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} 2^{-k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}} 2^{-k} \end{cases} . \tag{4.45}$$

Comparando-se os termos nas duas equações acima, temos a relação entre as componentes quaternárias de dois pontos sucessivos de uma órbita gerada para esse mapa:

$$B4D \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}}, \tag{4.46}$$

para todo $k$ pertencente aos inteiros.

Para o mapa $B4G$, fazendo a expansão quaternária dos pares $\left(\mathbf{p}^{N}, \mathbf{q}^{N}\right)$ e $\left(\mathbf{p}^{N-1}, \mathbf{q}^{N-1}\right)$ na eq. 4.41, obtemos,

$$B4G : \begin{cases} 2^{-1}\mathbf{E}^{N}_{\mathbf{0}} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{-\mathbf{k+1}} 2^{-k} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \mathbf{E}^{N-1}_{-\mathbf{k+2}} 2^{-k} + 2^{-1}\Lambda_G\left(\mathbf{E}^{N-1}_{1}\right) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} 2^{-k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}} 2^{-k} \end{cases} , \tag{4.47}$$

o que leva à relação de recorrência entre as componentes quaternárias para esse mapa:

$$B4G \Rightarrow \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Lambda_G\left(\mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}}\right) & \text{para} \quad k=0 \\ \mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}} & \text{para} \quad k \neq 0 \end{cases} . \tag{4.48}$$

Devido à semelhança formal entre o pares de equações que descrevem os mapas $B4G$ e $B4E$, eqs. 4.41 e 4.42, temos para este último:

$$B4E \Rightarrow \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Lambda_E\left(\mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}}\right) & \text{para} \quad k=0 \\ \mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}} & \text{para} \quad k \neq 0 \end{cases} . \tag{4.49}$$

Para obter a relação entre as componentes quaternárias de dois pontos sucessivos de uma órbita gerada pelo $B4L$, fazemos a expansão dos vetores $\left(\mathbf{p}^{N}, \mathbf{q}^{N}\right)$ e

$\left(\mathbf{p}^{N-1}, \mathbf{q}^{N-1}\right)$, eq. 4.43 , e obtemos:

$$B4L : \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{-k+1} 2^{-k} = 2^{-1}\mathbf{s} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N-1}_{-k+1} 2^{-k} + 2^{-1}\mathbf{s}\mathbf{E_1}^{N-1} + 2^{-1}\mathbf{t_1} + 2^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\mathbf{t_1}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{k} 2^{-k} = 2\mathbf{s} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N-1}_{k} 2^{-k} - \mathbf{s}\mathbf{E_1}^{N-1} - \mathbf{t_1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\mathbf{t_1} \end{cases}, \tag{4.50}$$

onde usamos,

$$\begin{cases} \mathbf{t_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\mathbf{t_1} \\ \mathbf{t_1} = 2^{-1}\mathbf{t_1} + 2^{-1}\mathbf{t_1} \end{cases} . \tag{4.51}$$

Este par de equações pode ser simplificado para:

$$B4L : \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{-k+1}} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{s}\mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{-k+1}} + \mathbf{t_1}\right) 2^{-(k+1)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} 2^{-k} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\mathbf{s}\mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k}} + \mathbf{t_1}\right) 2^{-(k-1)} \end{cases} . \tag{4.52}$$

Fazendo-se a transformação de índices $k \longrightarrow k+1$ à direita da primeira equação do par acima, e a transformação $k \rightarrow k-1$ à direita da segunda equação, temos:

$$B4L : \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{-k+1}} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{s}\mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{-k+2}} + \mathbf{t_1}\right) 2^{-k} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{s}\mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}} + \mathbf{t_1}\right) 2^{-k} \end{cases} . \tag{4.53}$$

Comparando-se os termos das duas equações anteriores, temos para o $B4L$:

$$B4L \Rightarrow \mathbf{E}^{N}_{\mathbf{k}} = \mathbf{s}\mathbf{E}^{N-1}_{\mathbf{k+1}} + \mathbf{t_1}, \tag{4.54}$$

para todo $k$ pertencente aos inteiros.

As eqs. 4.46, 4.48, 4.49 e 4.54 fornecem as relações entre as componentes quaternárias do ponto $N$ da órbita direta dos mapas, isto é $N \geq$, e as componentes quaternárias de seu antecessor. Essas expressões, aplicadas repetidamente, permitem fazermos a relação entre as componentes quaternárias de um ponto de uma órbita e as de qualquer de seus antecessores.

Para o $B4D$, através da aplicação recursiva da eq. 4.46, temos que:

$$B4D \Rightarrow \mathbf{E_1}^{N-k} = \mathbf{E}^0_{\mathbf{k+N}}. \tag{4.55}$$

No caso do $B4G$ e do $B4E$, através da aplicação recursiva das eqs 4.48 e 4.49 pode-se mostrar que:

$$B4G \Rightarrow \mathbf{E_k}^N = \begin{cases} \Lambda_G\left(\mathbf{E}^0_{\mathbf{k+N}}\right) & \text{para} \quad -(N-1) \leq k \leq 0 \\ \mathbf{E}^0_{\mathbf{k+N}} & \text{para} \quad k > 0 \text{ ou } k \leq -(N-1) \end{cases}, , \tag{4.56}$$

$$B4E \Rightarrow \mathbf{E_k}^N = \begin{cases} \Lambda_E\left(\mathbf{E}^0_{\mathbf{k+N}}\right) & \text{para} \quad -(N-1) \leq k \leq 0 \\ \mathbf{E}^0_{\mathbf{k+N}} & \text{para} \quad k > 0 \text{ ou } k \leq -(N-1) \end{cases}. \tag{4.57}$$

E de forma semelhante para o $B4L$ :

$$B4L \Rightarrow \mathbf{E_k}^N = \mathbf{s}^N \mathbf{E}^0_{\mathbf{k+N}} + \mathbf{t_N}, \tag{4.58}$$

onde $\mathbf{t_N} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{s^i t_1}$.

Notamos que as expressões 4.55 e 4.58 diferenciam-se entre si por $N$ rotações aplicadas aos vetores $\mathbf{E_k}^N$. Esta possibilidade de se fazer a relação entre componentes quaternárias de pontos diferentes da órbita gerada por um mapa será utilizada na próxima seção, para a determinação da dinâmica simbólica dos mapas.

## 4.4 Dinâmica Simbólica

### 4.4.1 Representação Simbólica da Órbita de um Mapa

A descrição simbólica das órbitas direta $O\left(\mathbf{X}^0\right) \equiv \left(\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^1, \cdots, \mathbf{X}^N\right)$ ou reversa $O^{-1}\left(\mathbf{X}^0\right) \equiv \left(\mathbf{X}^{-1}, \mathbf{X}^{-2}, \cdots, \mathbf{X}^{-N}\right)$, de um ponto $\mathbf{X}^0 \in M$, onde $M$ é o domínio de um mapa $B$, é feita associando-se de maneira biunívoca a cada um dos pontos desta órbita um símbolo ou "letra".

Esses símbolos ou letras pertencem a um conjunto finito de símbolos ou "alfabeto" com $l$ letras, $A \equiv \{\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \alpha_{\mathbf{3}}, \cdots \alpha\}$, onde cada elemento identifica uma das regiões $M_i$ em que o domínio $M$ foi dividido por meio de uma partição $\Sigma$, denominada partição de Markov [31], de tal forma que $M \equiv \bigcup_{i=1}^{l} M_i$.

A associação de um dos símbolos do conjunto $A$ a um ponto $\mathbf{X}^N$ da órbita é feita indicando-se a qual das regiões $M_i$ esse ponto pertence. Dessa forma, se $\mathbf{X}^N$ pertence as região $\in M_i$, esse ponto da órbita será identificado pela letra $_{\mathbf{i}}$ correspondente à essa região. Podemos assim definir uma seqüência semi-infinita de $N$ letras ertencentes ao conjunto $A$,

$$\mathbf{S}_A^{\mathbf{N}} \equiv \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \cdots \alpha^N \tag{4.59}$$

onde o símbolo $\mathbf{s}^n$ indica que o ponto $n$ da rbita direta do mapa pertence a região de $M$ correspondente ao símbolo $\alpha^n$. De maneira semelhante , podemos definir a a sequência semi-imfinita,

$$\mathbf{S}_A^{-\mathbf{N}} \equiv \cdots \alpha^0, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \cdots, \alpha^{-N}, \tag{4.60}$$

onde os símbolos estão relacionados às regiões a que pertencem os ponto da órbita inversa do mapa. As seqüências assim definidas são uma representação temporal de como as órbitas direta e inversa de $\mathbf{X}^0$ visitam as regiões do domínio do mapa definidas pela partição de Markov.

Notamos que a escolha de uma partição deve ser feita de modo que exista uma relação biunívoca entre as seqüências de símbolos $\mathbf{S}_A^{\mathbf{N}}$ e $\mathbf{S}_A^{-\mathbf{N}}$ e as órbitas do mapa. Ou seja, esta condição de unicidade impõe restrições ao conjunto de partições passíveis de serem escolhidas para a representação simbólica da dinâmica de um mapa.

A órbita do ponto resultante da primeira iteração do mapa, isto é, o ponto $\mathbf{X}^1 = B(\mathbf{X}^0)$, será representado através deste procedimento pelas seqüências

$$\mathbf{S}_A^{\mathbf{N}} \equiv \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \cdots, \alpha^{N+1} \tag{4.61}$$

e

$$\mathbf{S}_A^{-\mathbf{N}} \equiv \cdots \alpha^1, \alpha^0, \alpha^{-1}, \cdots, \alpha^{-N}. \tag{4.62}$$

Essas seqüências são formadas a partir daquelas que representam a órbita de $\mathbf{X}^0$ por meio da transposição de um símbolo de $\mathbf{S}_A^{\mathbf{N}}$ para $\mathbf{S}_A^{-\mathbf{N}}$.

Isso permite representar a órbita simbólica do ponto $\mathbf{X}^0$, para um número arbitrário de iterações, pela seqüência infinita

$$\mathbf{S}_A \equiv \mathbf{S}^{\infty}{}_A \bullet \mathbf{S}_A^{-\infty} \equiv \cdots \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0 \bullet \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \cdots, \tag{4.63}$$

e descrever a dinâmica do mapa como um deslocamento à direita do ponto central desta seqüência infinita, isto é:

$$\cdots \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0 \bullet \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \cdots \overset{B}{\mapsto} \cdots \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1 \bullet \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \cdots. \tag{4.64}$$

Como exemplo, temos a descrição simbólica das órbitas do mapa $B2D$, onde a partição de Markov empregada é aquela que divide o domínio $M_2$ em duas regiões através da linha vertical $q = 1/2$. Neste caso, o conjunto de símbolos $A_2$ é composto pelos dígitos 0 e 1 que designam, respectivamente, as regiões $q \leq \ frac12)$ e $q > frac12)$ , como indicado na fig. 2.1. Para este mapa que a órbita simbólica associada à órbita de um ponto $\mathbf{X}^0 = (p^0, q^0)$ coincide com os primeiros termos da expansão binária das coordenadas de momento e posição de cada um dos pontos da órbita, que é representada por

$$\mathbf{S}_{A_2} \equiv \cdots, \epsilon_{\mathbf{0}}^{-2}, \epsilon_0^{-1}, \epsilon_0^0 \bullet \epsilon_0^1, \epsilon_0^2, \epsilon_0^3 \cdots. \tag{4.65}$$

### 4.4.2 Órbitas Simbólicas dos Mapas no Domínio $M_4$

No caso da descrição simbólica das órbitas dos pontos de $M_4$, geradas pelos mapas atuando no $M_4$, usamos como partição de Markov a partição $\Sigma_q$, definida na seção

2.3.5, que divide $M_4$ nas quatro regiões $M_q^{00}$, $M_q^{01}$, $M_q^{10}$ e $M_q^{11}$ descritas pelas eqs. 2.31 a 2.34. De forma alternativa a descrição simbólica das órbitas poderia ser feita escolhendo-se como partição de Markov a partição $\Sigma_p$, isto é, descrevendo-se como as órbitas de cada ponto de $M_4$ visitam as regiões definidas por $\Sigma_p$. O conjunto de símbolos ou alfabeto escolhido é o conjunto $A$, cujos elementos são os quatro vetores empregados como termos da expansão quaternária dos vetores, isto é, $A \equiv \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. A associação entre cada uma da regiões de $\Sigma_q$ e um dos vetores é feita pelo seguinte esquema:

$$\begin{array}{cc} M_q^{00} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & M_q^{01} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ M_q^{10} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & M_q^{11} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array} \tag{4.66}$$

Para fazermos a associação de um símbolo de $A$ ao ponto inicial $\mathbf{X}^0$ de uma órbita gerada por um mapa, recorremos à expansão quaternária do vetor das componentes de posição $\mathbf{q}^0$, eq. 4.36.

Isso é feito notando-se que o valor do vetor $\mathbf{E_1^0}$, presente no termo de ordem um dessa expansão, localiza o ponto $\mathbf{X}^0$ em uma das quatro regiões definidas pela partição $\Sigma_q$. Da mesma maneira, a componente $\mathbf{E_1^1}$ da expansão quaternária de $\mathbf{X}^1$ localiza a qual região de $A$ este ponto pertence. Assim, por meio da associação de cada ponto da órbita à componente de ordem um de sua expansão quaternária, chegamos à órbita simbólica deste ponto, descrita por:

$$\mathbf{S}_A \equiv \cdots \mathbf{E_1^{-3}}, \mathbf{E_1^{-2}} \mathbf{E_1^{-1}} \bullet, \mathbf{E_1^0}, \mathbf{E_1^1}, \mathbf{E_1^2}, \cdots. \tag{4.67}$$

A forma descrita acima, utilizada para associar uma seqüência $\mathbf{S}_A$ de símbolos ou letras pertencentes a $A$ à orbita de um ponto $\mathbf{X}^0$, é válida para as órbitas geradas por cada um dos quatro mapas aqui considerados. Assim, quando necessário, deve-se distinguir através de qual dos mapas uma órbita descrita simbolicamente por $\mathbf{S}_A$ foi gerada.

A primeira componente quaternária $\mathbf{E}_\mathbf{1}^N$ pode ser usada como símbolo para identificar a qual das regiões de $M_4$ pertence o N-esimo ponto da órbita de $\mathbf{X}^0$, o que torna valida a escolha da partição $\Sigma_q$ como uma partição de Markov para os mapas atuando em $M_4$. Assim, cada seqüência de símbolos $\mathbf{S}_A$ pode ser associada à órbita um ponto de $M_4$, embora essa associação seja feita de forma diferente para cada um dos mapas aqui estudados.

No caso do $B4D$, da eq. 4.46, relacionam-se os símbolos de $\mathbf{S}_A$ situados à direita do ponto central com a expansão quaternária de $\mathbf{q}^0$,

$$\mathbf{E}_\mathbf{1}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^0,\ \ \mathbf{E}_\mathbf{1}^1 = \mathbf{E}_\mathbf{2}^0,\ \ \mathbf{E}_\mathbf{1}^2 = \mathbf{E}_\mathbf{3}^0, \cdots, \mathbf{E}_\mathbf{N+1}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^N \cdots . \tag{4.68}$$

e relaciona-se os símbolos de $\mathbf{S}_A$ situados à esquerda do ponto central com as componentes de ordem negativa da expansão de $\mathbf{p}^0$,

$$\mathbf{E}_\mathbf{0}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^{-1},\ \ \mathbf{E}_\mathbf{-1}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^{-2},\ \ \mathbf{E}_\mathbf{-2}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^{-3}, \cdots, \mathbf{E}_\mathbf{-N+1}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^{-N} \cdots , \tag{4.69}$$

que leva a:

$$B4D : \begin{cases} \mathbf{p}^0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{1}^{-k}\,(2)^{-k} \\ \mathbf{q}^0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{1}^{k-1}\,(2)^{-k} \end{cases} . \tag{4.70}$$

Para o $B4G$ e para o $B4E$, pela eq. 4.48 e 4.49, chegamos a

$$\mathbf{E}_\mathbf{1}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^0,\ \ \mathbf{E}_\mathbf{1}^1 = \mathbf{E}_\mathbf{2}^0,\ \ \mathbf{E}_\mathbf{1}^2 = \mathbf{E}_\mathbf{3}^0, \cdots, \mathbf{E}_\mathbf{N+1}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^N \cdots , \tag{4.71}$$

para os símbolos de $\mathbf{S}_A$ situados à direita do ponto central e

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mathbf{0}^0 = \Lambda_G\left(\mathbf{E}_1^{-1}\right),\ \ \mathbf{E}_\mathbf{-1}^0 = \Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-2}\right),\ \ \mathbf{E}_\mathbf{-2}^0 = \Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-3}\right), \cdots, \mathbf{E}_\mathbf{-N+1}^0 = \Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-N}\right) \cdots , \\ \mathbf{E}_\mathbf{0}^0 = \Lambda_E\left(\mathbf{E}_1^{-1}\right),\ \ \mathbf{E}_\mathbf{-1}^0 = \Lambda_E\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-2}\right),\ \ \mathbf{E}_\mathbf{-2}^0 = \Lambda_E\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-3}\right), \cdots, \mathbf{E}_\mathbf{-N+1}^0 = \Lambda_G\left(\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-N}\right) \cdots . \end{aligned} \tag{4.72}$$

para os símbolos de $\mathbf{S}_A$ situados à esquerda do ponto central, que leva a:

$$B4G : \begin{cases} \mathbf{p}^0 = \sum_{k=1}^{N-1} \Lambda_G \left(\mathbf{E}_1^{-k}\right)(2)^{-k} + \sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{1}^{-k}(2)^{-k} \\ \mathbf{q}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{1}^{k-1}(2)^{-k} \end{cases} . \tag{4.73}$$

De forma semelhante, pela eq. 4.49, temos para o $B4E$:

$$B4E : \begin{cases} \mathbf{p}^0 = \sum_{k=1}^{N-1} \Lambda_E \left(\mathbf{E}_1^{-k}\right)(2)^{-k} + \sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{1}^{-k}(2)^{-k} \\ \mathbf{q}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{1}^{k-1}(2)^{-k} \end{cases} . \tag{4.74}$$

No caso do $B4L$, pela inversão da eq. 4.54, relacionam-se as componentes de ordem positiva da expansão de $\mathbf{q}^0$ com os símbolos de $\mathbf{S}_A$ situados à direita do ponto central, obtendo-se:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\mathbf{1}^0 = \mathbf{E}_\mathbf{1}^0, \;\; \mathbf{E}_\mathbf{2}^0 = \mathbf{s}^{-2}\mathbf{E}_\mathbf{1}^2 + \mathbf{t}_{-\mathbf{2}} \\ \mathbf{E}_\mathbf{3}^0 = \mathbf{s}^{-3}\mathbf{E}_\mathbf{1}^3 + \mathbf{t}_{-\mathbf{3}}, \cdots, \mathbf{E}_\mathbf{k}^0 = \mathbf{s}^{-k}\mathbf{E}_\mathbf{0}^k + \mathbf{t}_{-\mathbf{k}} \end{cases} , \tag{4.75}$$

e, através da eq. 4.54, relacionando-se as componentes de ordem negativa da expansão de $\mathbf{p}^0$ com os símbolos de $\mathbf{S}_A$ situados à esquerda do ponto central, obtemos:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{-\mathbf{1}}^0 = \mathbf{s}^\mathbf{2}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-2} + \mathbf{t}_\mathbf{2}, \quad \mathbf{E}_{-\mathbf{2}}^0 = \mathbf{s}^\mathbf{3}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-3} + \mathbf{t}_\mathbf{3} \\ \mathbf{E}_{-\mathbf{3}}^0 = \mathbf{s}^\mathbf{4}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-4} + \mathbf{t}_\mathbf{4}, \cdots, \mathbf{E}_{-\mathbf{k}+\mathbf{1}}^0 = \mathbf{s}^k\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-k} + \mathbf{t}_\mathbf{k} \end{cases} , \tag{4.76}$$

o que leva às expansões quaternárias:

$$B4L : \begin{cases} \mathbf{q}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{s}^{-k}\mathbf{E}_\mathbf{1}^k + \mathbf{t}_{-\mathbf{k}}\right)(2)^{-k} \\ \mathbf{p}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{s}^k\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-k} + \mathbf{t}_\mathbf{k}\right)(2)^{-k} \end{cases} . \tag{4.77}$$

Além da unicidade da associação entre a seqüência simbólica $\mathbf{S}_A$, que representa a órbita e um ponto $\mathbf{X}^0$, as eqs. 4.70, 4.73, 4.74 e 4.77 explicitam uma diferença importante entre a dinâmica simbólica dos mapas que atuam no $M_4$ e do $B2D$.

As equações 4.68 e 4.69 mostram que na representação simbólica de uma órbita gerada pelo mapa $B4D$, de forma semelhante à representação simbólica do mapa $B2D$, existe uma coincidência entre os símbolos da seqüência e os termos da expansão quaternária das coordenadas do ponto inicial da órbita. Ou seja, no mapa $B4D$, o valor de um dado símbolo da seqüência e o da componente quaternária correspondente de mesma ordem são os mesmos. Por outro lado, na representação simbólica de uma órbita gerada pelos mapas $B4G$ e $B4E$, essa coincidência é apenas parcial. Isso porque os valores dos $N$ primeiros símbolos à esquerda do ponto central de $\mathbf{S}_A$ não coincidem com os termos correspondentes da expansão quaternária de $\mathbf{p}^0$.

As eqs. 4.75 e 4.76 mostram que para o mapa $B4L$, essa coincidência acontece apenas esporadicamente, uma vez que um símbolo da seqüência $\mathbf{S}_A$ relaciona-se com a componente quaternária correspondente através de operações de rotação que têm periodicidade quatro, isto é, existe uma coincideência nos símbolos cujas posições nas seqüências semi-infinitas são multiplos de quatro. Uma não-coincidência do mesmo tipo já foi observada na dinâmica simbólica de outro mapa [22]. Para os mapas $B4G$ e $B4E$ as eqs. 4.71 e 4.72 mostram que essa coinciência ocorre apenas para os símbolos da seqüência semi-infinita que representam os pontos da órbita direta de um ponto do domínio $M_4$. uma vez que a seqüência semi-infinita que representa a órbita inversa essa coincidência não existe.

A existência de uma relação biunívoca entre uma seqüência de símbolos pertencentes ao alfabeto $A$ e as órbitas dos mapas $B4D$, $B4E$, $B4G$ e $B4L$, permite afirmar a existência de uma relação biunívoca entre as órbitas de um par qualquer destes mapas. Isso implica, por exemplo, como será visto no próximo capítulo, na igualdade entre o número de órbitas periódicas dos quatro mapas aqui estudados. Em todos esses mapas, que são exemplos de sistemas dinâmicos clássicos maximamente caóticos, apesar da duplicação da dimensionalidade em relação ao mapa $B2D$, é possível ter o controle completo de sua dinâmica através da descrição simbólica.

# 5 Ação, Órbitas Periódicas e Simetrias

## 5.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos mais alguns aspectos dinâmicos dos mapas que atuam no domínio $M_4$. Utilizaremos os resultados obtidos no capítulo anterior para expressar a ação associada às órbitas de cada um dos mapas, em termos das seqüências simbólicas que as representam. Na seção 3, calcularemos as expressões que fornecem as órbitas periódicas e analisaremos como o número destas cresce com seu comprimento. Na seção 4 analisaremos as simetrias clássicas presentes nos mapas.

## 5.2 Funções $\eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$, $\eta_G\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$, $\eta_E\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$ e $\eta_L\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$

Na seção 4.3, obtivemos as componentes quaternárias das projeções sobre $M_q$ e $M_p$ dos pontos de órbitas geradas pelos mapas que atuam em $M_4$, em termos das componentes quaternárias de um ponto inicial dessa órbita. Agora, usaremos estes resultados para definir as funções $\eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$, $\eta_G\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$ $\eta_E\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$ e $\eta_L\left(\mathbf{S}_A^{\mathbf{n-1}}\right)$, onde $\mathbf{S}_A^{n-1}$ é uma seqüência finita de símbolos associada aos $n-1$ primeiros pontos da órbita de um ponto $\mathbf{X}^0$. Estas funções tornarão possível, mais adiante, a determinação da ação dessas órbitas e a análise da estrutura das órbitas periódicas desses mapas.

Para obtermos um ponto $\mathbf{X}^n = (\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n)$, pertencente a uma órbita gerada pelo mapa $B4D$ a partir do ponto inicial $\mathbf{X}^0 = (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0)$, fazemos a expansão quaternária

$$\mathbf{q}^n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^n (2)^{-k} \tag{5.1}$$

e usamos a eq. 4.44 para obtermos as componentes de $\mathbf{q}^n$, em termos das componentes de $\mathbf{q}^0$. Com isso, chegamos a:

$$\mathbf{q}^n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^0_{\mathbf{k+n}} \left(2\right)^{-k}. \tag{5.2}$$

Através da transformação de índices $k^{'} \to k+n$, a expressão acima pode ser reescrita e separada tomando a forma:

$$\mathbf{q}^n = \left(2\right)^n \left( \sum_{k'=1}^{\infty} \mathbf{E}^0_{k'} \left(2\right)^{-k'} \right) - \sum_{k'=1}^{n} \mathbf{E}^0_{k'} \left(2\right)^{n-k'}. \tag{5.3}$$

É fácil verificar que a primeira somatória da equação acima coincide com a expansão quaternária de $\mathbf{q}^0$ e, usando-se novamente a eq. 4.44 para obtermos a expresão $\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{k'-1} = \mathbf{E}^0_{k'}$, chegamos a:

$$\mathbf{q}^n = \left(2\right)^n \mathbf{q}^0 - \sum_{k'=1}^{n} \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{k'-1} \left(2\right)^{n-k'}. \tag{5.4}$$

Cada termo da somatória à direita da equação acima contém a primeira componente quaternária de cada um dos pontos da órbita, o que permite associar ao conjunto dessas componentes uma seqüência finita de símbolos que caracterizam os $n-1$ primeiros pontos da órbita simbólica de $\mathbf{X}^0$,

$$\mathbf{S}_A^{n-1} \equiv \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0, \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^1, \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^2, \cdots, \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{n-1}. \tag{5.5}$$

Assim, temos,

$$\mathbf{q}^n = \left(2\right)^n \mathbf{q}^0 - \eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right), \tag{5.6}$$

com a função $\eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$ sendo definida por:

$$\eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right) = \sum_{k'=1}^{n} \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{k'-1} (2)^{n-k'}. \tag{5.7}$$

Usando um procedimento similar, obtemos a projeção de $\mathbf{X}^n$ sobre $M_p$. Da expansão quaternária de $\mathbf{p}^n$ e da eq. 4.45, temos,

$$\mathbf{p}^n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^0_{-k+n+1} \left(2\right)^{-k} \tag{5.8}$$

que, com o auxílio da transformação de índices $k' \to k - n$, pode ser separada na forma,

$$\mathbf{p}^n = (2)^{-n}\left(\sum_{k'=1}^{\infty}\mathbf{E}^0_{-k'+1}\,(2)^{-k'} + \sum_{k'=-n+1}^{0}\mathbf{E}^0_{-k'+1}\,(2)^{-k'}\right). \tag{5.9}$$

Identificando-se a primeira somatória com a expansão quaternária de $\mathbf{p}^0$, tendo-se $\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{-k'} = \mathbf{E}^0_{-k'+1}$, e, fazendo-se a transformação $k" \to -k'+1$, chegamos a :

$$\mathbf{p}^n = 2^{-n}\mathbf{p}^0 + 2^{-n}\sum_{k"=1}^{n}\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{k"-1}\,(2)^{k"-1}. \tag{5.10}$$

Como na eq. 5.4 , a somatória à direita depende apenas da seqüência finita dos $n$ primeiros símbolos que caracterizam a órbita simbólica de $\mathbf{X}^0$, com a diferença que, aqui, a ordem dos símbolos é tomada em ordem reversa com relação às potências de dois. Isto é, dada a seqüência reversa em relação a $\mathbf{S}_A^{n-1}$,

$$\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1} \equiv \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{n-1}, \cdots, \mathbf{E}_1^2, \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^1, \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0, \tag{5.11}$$

e da eq. 5.10, temos:

$$\mathbf{p}^n = (2)^{-n}\,\mathbf{p}^0 + 2^{-n}\eta_D\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right). \tag{5.12}$$

Nos casos das órbitas geradas pelos mapas $B4G$, de forma semelhante ao que foi feito acima para o $B4D$, obtemos os pontos $\mathbf{X}^n = (\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n)$ a partir de expansões quaternárias de suas projecões sobre $M_q$ e $M_p$. Usando o conjunto de eqs. 4.47, obtemos para este mapa o seguinte conjunto de equações:

$$B4G : \begin{cases} \mathbf{p}^n = \sum\limits_{k=1}^{n}\Lambda_G\left(\mathbf{E}^0_{\mathbf{n-k+1}}\right)(2)^{-k} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\mathbf{E}^0_{\mathbf{n-k+1}}(2)^{-k} \\ \mathbf{q}^n = 2^n\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}^0_{\mathbf{k}} - \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}^0_{\mathbf{k}}\,(2)^{n-k} \end{cases}. \tag{5.13}$$

Com transformações de índices semelhantes às utilizadas no caso do $B4D$, essas equações tomam a forma:

$$B4G:\begin{cases}\mathbf{p}^n=2^{-n}\left\{\mathbf{p}^0+\sum\limits_{k=1}^{n}\Lambda_G\left(\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{n-k}\right)(2)^{n-k}\right\}\\ \mathbf{q}^n=2^n\mathbf{q}^0-\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{k-1}(2)^{n-k}\end{cases}. \tag{5.14}$$

Devido à semelhança formal entre as equações que descrevem a dinâmica dos mapas $B4G$ e $B4E$, obtemos para este último:

$$B4E:\begin{cases}\mathbf{p}^n=2^{-n}\left\{\mathbf{p}^0+\sum\limits_{k=1}^{n}\Lambda_E\left(\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{n-k}\right)(2)^{n-k}\right\}\\ \mathbf{q}^n=2^n\mathbf{q}^0-\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}_{\mathbf{1}}^{k-1}(2)^{n-k}\end{cases}. \tag{5.15}$$

Podemos assim colocar a dinâmica desses mapas na forma:

$$B4G:\begin{cases}\mathbf{p}^n=2^{-n}\mathbf{p}^0+2^{-n}\eta_G\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\\ \mathbf{q}^n=2^n\mathbf{q}^0-\eta_G\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)\end{cases} \tag{5.16}$$

e

$$B4E:\begin{cases}\mathbf{p}^n=2^{-n}\mathbf{p}^0+2^{-n}\eta_E\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\\ \mathbf{q}^n=2^n\mathbf{q}^0-\eta_E\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)\end{cases}, \tag{5.17}$$

onde definimos as funções $\eta_G\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$ e $\eta_E\left(\mathbf{S}_A^{\mathbf{n-1}}\right)$ da seqüência de símbolos $\mathbf{S}_A^{n-1}$ como:

$$\begin{aligned}\eta_G\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)&=\sum_{k'=1}^{n}\Lambda_G^{k'-1}\left(\mathbf{E}_1^{k'-1}\right)(2)^{n-k'}\\ \eta_E\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)&=\sum_{k'=1}^{n}\Lambda_E^{k'-1}\left(\mathbf{E}_1^{k'-1}\right)(2)^{n-k'}\end{aligned}. \tag{5.18}$$

Para tratarmos do $B4L$, introduzimos uma função $\eta_L\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$, análoga às definidas acima e fazemos as expansões quaternárias de $\mathbf{q}^n$ e $\mathbf{p}^n$ que, junto com a eq. 4.53, leva a:

$$B4L:\begin{cases}\mathbf{p}^n=\mathbf{s}^n\sum\limits_{k=-n+1}^{\infty}\mathbf{E}_{-k+1+n}^0(2)^{-k-n}+\mathbf{t_n}\\ \mathbf{q}^n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\mathbf{s}^n\mathbf{E}_{k+n}^0+\mathbf{t_n}\right)(2)^{-k}\end{cases}. \tag{5.19}$$

Usando $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{t_n}(2)^{-k} = \mathbf{t_n}$ e transformações de índices, as somatórias das equações acima podem ser decompostas como:

$$B4L:\begin{cases}\mathbf{p}^n = 2^{-n}\mathbf{s}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}^0_{-k+1}(2)^{-k} + \sum_{k=-n+1}^{0}\mathbf{E}^0_{-k+1}(2)^{-k}\right)\\ \mathbf{q}^n = (2\mathbf{s})^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}^0_{\mathbf{k}}(2)^{-k} - \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}^0_{\mathbf{k}}(2)^{-k}\right) + \mathbf{t_n}\end{cases}. \tag{5.20}$$

Podemos ver quer as somatórias dessas equações, são expressas em termos das $n$ primeiras componentes quaternárias de $\mathbf{q}^0$ e $\mathbf{p}^0$. Estas componentes podem ser transformadas nas primeiras componentes dos $n$ primeiros pontos da órbita, levando a:

$$B4L:\begin{cases}\mathbf{p}^n = 2^{-n}\mathbf{s}^n\left\{\mathbf{p}^0 + \mathbf{t_n} + \mathbf{s}^n\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{s}^{k-1}\mathbf{E}_1^{-k+1} + \mathbf{t_{k-1}}\right)(2)^k\right.\\ \mathbf{q}^n = (2\mathbf{s})^n\,\mathbf{q}^0 + \mathbf{t_n} - \mathbf{s}^n\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{s}^{-(k-1)}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{k-1} + \mathbf{t_{-k+1}}\right)(2)^{n-k}\end{cases}, \tag{5.21}$$

o que permite escrever:

$$B4L:\begin{cases}\mathbf{p}^n = 2^{-n}\mathbf{s}^n\mathbf{p}^0 + \mathbf{t_n} + 2^{-n}\overline{\eta}_L\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\\ \mathbf{q}^n = (2\mathbf{s})^n\,\mathbf{q}^0 + \mathbf{t_n} - \eta_L\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)\end{cases}, \tag{5.22}$$

onde $\eta_L\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$ e $\overline{\eta}_L\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)$ são definidas a partir da seqüência finita $\mathbf{S}_A^{n-1}$ e sua reversa $\overline{\mathbf{S}}_A^{\mathbf{n-1}}$ como:

$$B4L:\begin{cases}\eta_L\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right) = \mathbf{s}^n\sum_{k'=1}^{n}\left(\mathbf{s}^{-(k'-1)}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{k'-1} + \mathbf{t_{-k'+1}}\right)(2)^{n-k'}\\ \overline{\eta}_L\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right) = \mathbf{s}^n\sum_{k''=1}^{n}\left(\mathbf{s}^{\mathbf{k''-1}}\mathbf{E}_\mathbf{1}^{-\mathbf{k''+1}} + \mathbf{t_{k''-1}}\right)(2)^{k''-1}\end{cases}. \tag{5.23}$$

Notamos assim a similaridade formal entre as equações que definem a dinâmica das projeções de um ponto sobre $M_q$ e $M_p$ e aquelas que definem a dinâmica do $B2D$, para um número arbitrário de iterações[32], quando temos:

$$B4L:\begin{cases}p^n = 2^{-n} + \sum_{k=1}^{n}\epsilon_1^{k-1}2^{n-k}\\ q^n = 2^n + \sum_{k=1}^{n}\epsilon_1^{k-1}2^{-n}\end{cases} \tag{5.24}$$

## 5.3 Função Geratriz e Ação

A dinâmica de mapas conservativos está geralmente associada a uma seção de Poincaré da superfície de energia de um sistema hamiltoniano, o que torna possível a extensão de conceitos como a ação de uma órbita para sistemas dinâmicos a tempo discreto [33].

Embora não sendo a realização de um sistema hamiltoniano, funç oes geratrizes de transformaç oes canônicas de segunda ordem [34] podem ser definidas para o mapa $B2D$[32]. De forma semelhante para o mapa $B4D$ temos as funções:

$$\mathbf{q}^n = \frac{\partial F_D\left(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^0\right)}{\partial \mathbf{p}^n} \tag{5.25}$$

e

$$\mathbf{p}^0 = \frac{\partial F_D\left(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^0\right)}{\partial \mathbf{q}^0}. \tag{5.26}$$

Isso permite ver a função geratriz para o n-esima ponto da órbita deste mapa, $F_D\left(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^0\right)$, como a diferencial exata entre dois pontos das órbitas em $M_4$ geradas pelo $B4D$:

$$dF_D = \frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{p}^n} \cdot d\mathbf{p}^n + \frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q}^0. \tag{5.27}$$

Invertendo-se a equação que fornece a componente de momento de um ponto da órbita como função do ponto inicial, obtemos

$$\mathbf{p}^0 = 2^n \mathbf{p}^n - \eta_D\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right). \tag{5.28}$$

Assim, junto com a equação para a componente de momento de um ponto da órbita temos,

$$dF_D = \left\{2^n \mathbf{q}^0 - \eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)\right\} \cdot d\mathbf{p}^n + \left\{2^n \mathbf{p}^n - \eta_D\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\right\} \cdot d\mathbf{q}^0, \tag{5.29}$$

que, integrada, fornece a função geratriz ou ação de uma órbita gerada pelo mapa $B4D$:

$$F_D\left(\mathbf{p}^n,\mathbf{q}^0\right)=2^{n+1}\mathbf{q}^0\cdot\mathbf{p}^n-\eta_D\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\cdot\mathbf{q}^0-\eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)\cdot\mathbf{p}^n. \tag{5.30}$$

Dada a similaridade formal entre as equações que definem os mapas $B4D$ e $B4G$ com aquelas que definem o mapa $B4E$, é fácil obter a ação para as órbitas geradas pelos dois últimos mapas como:

$$\begin{cases} F_G\left(\mathbf{p}^n,\mathbf{q}^0\right)=2^{n+1}\mathbf{q}^0\cdot\mathbf{p}^n-\eta_G\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\cdot\mathbf{q}^0-\eta_G\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)\cdot\mathbf{p}^n \\ F_E\left(\mathbf{p}^n,\mathbf{q}^0\right)=2^{n+1}\mathbf{q}^0\cdot\mathbf{p}^n-\eta_E\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\cdot\mathbf{q}^0-\eta_E\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)\cdot\mathbf{p}^n. \end{cases}. \tag{5.31}$$

Para o $B4L$ temos,

$$\mathbf{p}^0=2^n\mathbf{s}^{-n}\mathbf{p}^n-\mathbf{s}^{-n}\overline{\eta}_L\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)+2^n\mathbf{t}_{-\mathbf{n}} \tag{5.32}$$

e

$$dF_L=\left\{2^n\mathbf{s}^n\mathbf{q}^0+\mathbf{t}_\mathbf{n}-\eta_L\left(\mathbf{S}^{n-1}\right)\right\}\cdot d\mathbf{p}^n+\left\{2^n\mathbf{s}^{-n}\mathbf{p}^n+2^n\mathbf{t}_{-\mathbf{n}}-\mathbf{s}^{-n}\overline{\eta}_L\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\right\}\cdot d\mathbf{q}^0, \tag{5.33}$$

que levam a:

$$F_L=\left[2^n\left(\mathbf{s}^n-\mathbf{s}^{-n}\right)\mathbf{q}^0\right]\cdot\mathbf{p}^n-\mathbf{s}^{-n}\overline{\eta}_L\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)\cdot\mathbf{q}^0-\eta_L\left(\mathbf{S}_A^{\mathbf{n-1}}\right)\cdot\mathbf{p}^n+2^n\mathbf{t}_{-\mathbf{n}}\cdot\mathbf{q}^0+\mathbf{t}_\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}^n, \tag{5.34}$$

onde usamos $(\mathbf{s}^{-n}\mathbf{p}^n)\cdot\mathbf{q}^0=-(\mathbf{s}^{-n}\mathbf{q}^0)\cdot\mathbf{p}^n$.

Aqui podemos verificar que a ação de uma órbita gerada pelo $B4L$, associada a uma seqüência finita $\mathbf{S}_A^{n-1}$, reduz-se àquela gerada pelo $B4D$ quando fazemos $SL(\mathbf{X})=\mathbf{1}$, isto é, na ausência de rotação. Observa-se então que a ação de uma órbita gerada pelo $B4D$ nada mais é que a extensão direta para um espaço de fase 4-D da obtida para o mapa $B2D$ [35] .

## 5.4 Órbitas Periódicas

Na análise de um sistema dinâmico caótico, uma das características mais relevantes a ser levada em conta détse a estrutura de suas órbitas periódicas [36].

No caso do $B4D$, o ponto $\mathbf{X}^*_{\mathbf{D}} = (\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ faz parte de uma órbita de período ou comprimento $n$ quando satisfaz à equação:

$$\mathbf{X}^* = B4D^n\left(\mathbf{X}^*\right). \tag{5.35}$$

Para esse mapa, as órbitas periódicas podem ser obtidas explicitamente com as eqs. 5.6 e 5.12, fornecendo,

$$B4D : \begin{cases} \mathbf{p}* = 2^{-n}\mathbf{p}^* + 2^{-n}\eta_D\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right) \\ \mathbf{q}^* = 2^n\mathbf{q}^* - \eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right) \end{cases}, \tag{5.36}$$

onde as seq*üências* $\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)$ e $\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}$ são referentes a expansão quaternária dos das coordenadasz do reference que resolvidas, levam a:

$$B4D : \begin{cases} \mathbf{p}^* = \eta_D\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right)(2^n-1)^{-1} \\ \mathbf{q}^* = \eta_D\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right)(2^n-1)^{-1} \end{cases}. \tag{5.37}$$

De forma semelhante, pelos pares de eqs. 5.16 e 5.17, obtemos para os mapas $B4G$ e $B4E$ as expressões de suas órbitas periódicas:

.

E, para o $B4L$, do par de eqs. 5.22:

$$B4L : \begin{cases} \mathbf{p}^* = \left\{\overline{\eta}_L\left(\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}\right) + 2^n\mathbf{t_n}\right\}\left\{2^n\mathbf{1} - \mathbf{s}^n\right\}^{-1} \\ \mathbf{q}^* = \left\{\eta_L\left(\mathbf{S}_A^{n-1}\right) - \mathbf{t}_n\right\}\left\{2^n\mathbf{s}^n - \mathbf{1}\right\}^{-1} \end{cases}, \tag{5.38}$$

onde, para definir a matriz $\{2^n\mathbf{s}^n - \mathbf{1}\}$, usou-se $\mathbf{1}$ como a mariz unidade de uma coluna e duas linhas.

Nos quatro pares de equações acima, as coordenadas de pontos pertencentes a órbitas de período $n$, são obtidas usando-se as funções definidas na seção anterior em termos de seqüências finitas de símbolos $\mathbf{S}_A^{n-1}$ e suas reversas $\overline{\mathbf{S}}_A^{n-1}$. Assim, a uma seqüência finita qualquer podemos associar uma órbita periódica para cada um dos mapas.

Dado que a seqüência finita de menor comprimento é aquela com apenas um símbolo, isto é $\mathbf{S}_A^{\,n-1} \equiv \mathbf{E}_1^0$, existem quatro órbitas de período um para cada um dos mapas. Por exemplo, para o $B4D$ é fácil calcularmos as coordenadas dos elementos do conjunto de pontos fixos de período um:

$$\begin{cases} (0,0,0,0) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (0,0) \\ (1,0,1,0) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (1,0) \\ (1,1,1,1) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (1,1) \\ (0,1,0,1) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (0,1) \end{cases}. \tag{5.39}$$

Aqui notamos a existência de uma similaridade entre os quatro pontos fixos do $B4D$ e os dois pontos fixos do $B2D$. Em ambos os casos, estes pontos estão localizados em metade dos vértices contidos nos domínios dos mapas. O domínio $M_4$ tem oito vértices, enquanto no $M_2$, o domínio de $B2D$, tem quatro vértices, com os dois pontos fixos situados na origem e no vértice superior direito.

Usando-se a eq.5.38 com $n = 1$, obtemos os pontos de $M_4$ que têm órbitas de periíodo um para o $B4L4$:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(4,2,2,1) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (0,0) \\ \frac{1}{5}(3,4,3,1) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (1,0) \\ \frac{1}{5}(3,1,3,4) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (1,1) \\ \frac{1}{5}(2,1,2,2) & \text{para} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{1}}^0 = (0,1) \end{cases}. \tag{5.40}$$

Mostrando que, ao contrário do $B2D$ e do $B4D$, os pontos fixos do $B4L$ não estão situados nos vértices ou arestas do domínio $M_4$, tendo como componentes números racionais não-inteiros.

O número de órbitas periódicas como função do comprimento $n$, para os quatro mapas atuando no $M_4$, é dado por:

$$N_O^4\left(n\right) = 2^{2n}. \tag{5.41}$$

Para o $B2D$, o número de órbitas periódicas como função do comprimento $n$ é dado por:

$$N_O^2\left(n\right) = 2^n. \tag{5.42}$$

Dividindo-se as duas equações acima, obtemos:

$$\frac{N_O^4\left(n\right) N_O^2\left(n\right)}{=} 2^n. \tag{5.43}$$

Isso demonstra que a proliferação de órbitas periódicas com relação ao comprimento, que tem um caráter exponencial no $B2D$, torna-se ainda mais acentuada quando passamos ao espaço de fase 4-D com os quatro mapas aqui estudados. Note-se que a própria relação entre o crescimento do número de órbitas periódicas dos mapas atuando no $M_4$ com o $B2D$, expressa pela equação acima, adquire um caráter exponencial.

## 5.5 Simetrias Clássicas

O conceito de simetria está presente em uma ampla gama das atividades humanas, estendendo-se da arte à biologia [37]. Num contexto matemático mais restrito, a idéia de simetria está associada à invariância de um objeto matemático através de uma transformação. Na mecânica clássica, um dos mais importantes desdobramentos desse conceito é o teorema de Noether [38], que relaciona uma constante de movimento a cada simetria contínua presente em um sistema hamiltoniano.

No âmbito dos sistemas dinâmicos a tempo discreto, dizemos que um sistema possui uma simetria clássica quando existe uma transformação do domínio do mapa sobre si mesmo que mantém sua dinâmica invariante. Isto é, seja $B$ um mapa qualquer atuando sobre um domínio $M$, existe uma simetria $\mathcal{O}$ quando o comutador desse mapa com a transformação $\mathcal{O} : M \to M$ anula-se, ou seja:

$$[B, \mathcal{O}]\left(\mathbf{X}^n\right) = B \circ \mathcal{O}\left(\mathbf{X}^n\right) - \mathcal{O} \circ B\left(\mathbf{X}^n\right) = 0. \tag{5.44}$$

No caso do $B2D$, duas simetrias clássicas foram notadas por Balazs e Voros [39, 40] e suas implicações na sua quantização foram estudadas por Saraceno [41].

A primeira dessas simetrias é a composição de uma transformação que faz a troca das coordenadas $p$ e $q$ e uma inversão temporal do mapa,

$$\tau\left(\mathbf{X}\right) = \mathcal{J} \circ \mathcal{T}\left(\mathbf{X}\right), \tag{5.45}$$

onde

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

e

$$\mathcal{T}\left(\mathbf{X}\right) = B2D^{-1}\left(\mathbf{X}\right), \tag{5.47}$$

de modo que

$$\tau \circ B2D\left(\mathbf{X}\right) = B2D \circ \tau\left(\mathbf{X}\right). \tag{5.48}$$

A interpretação geométrica dessa simetria é que, para cada órbita do mapa sobre $M_2$, existe uma outra que é a inversão temporal desta refletida pela diagonal que vai da origem até o vértice superior direito de $M_2$. Deve-se notar que, uma vez que esta simetria envolve a reversão temporal, seu operador quântico anti-linear.

A segunda simetria $\mathcal{R} : M_2 \to M_2$ é definida por:

$$\begin{cases} p' = 1 - p \\ q' = 1 - q \end{cases} . \tag{5.49}$$

Geometricamente, a ação dessa transformação de simetria sobre um ponto pertencente a $M_2$ é representada por duas reflexões. Uma quando fazemos $p' = 1 - p$, que é a reflexão do ponto em relação a um eixo paralelo ao eixo coordenado de um $\widehat{p}$ que intercepta o eixo $\widehat{q}$ em $q = \frac{1}{2}$. E outra, quando fazemos $q' = 1 - q$, que é a reflexão do ponto em relação a um eixo paralelo ao eixo coordenado $\widehat{q}$ e que intercepta o eixo $\widehat{p}$ em $p = \frac{1}{2}$. Devesse notar também o caráter especial da transformação $\mathcal{T}$ uma vez que sua contrapartida quântica ser um operador anti-linear. A presença simetria $\tau$ é no $B2D$ relacionada ao tipo de estaística seguida pelo espectro do mapa [35] e, de forma similar , sua extensão para o espaço de fase 4-D estará relacionada ao tipo de estatística seguida pelos mapas atuando nesse espço.

Nas próximas subseções, veremos a extensão para o espaço de fase 4-D das transformações $\tau$ e $\mathcal{R}$ e, como conseqüência do aumento da dimensionalidade, será definida a transformação de permutação $\mathcal{P}$. Também será analisado para quais dos mapas atuando no domínio $M_4$ essas transformações se constituem em simetrias.

### 5.5.1 Transformações $\mathcal{P}$, $\tau^4$ e $\mathcal{D}^4$

Em um sistema dinâmico no espaço de fase 4-D, uma possibilidade de transformação de simetria, que é vedada no espaço de fase 2-D, torna-se cogitável. Esta transformação é a permutação da coordenada $p_1$ com a coordenada $p_2$ e a permutação da coordenada $q_1$ com a coordenada $q_2$, que pode ser expressa da forma matricial como:

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}\mathbf{X}, \tag{5.50}$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.51}$$

As duas simetrias presentes no mapa $B2D$ podem ser generalizadas, para o domínio $M_4$, fazendo-se com que as transformações $\mathcal{J}$ e $\mathcal{R}$ atuem separadamente em cada um dos pares de canônicos $(p_2, q_2)$ e $(p_1, q_1)$. As transformações individuais $\mathcal{J}_1 : M_4 \rightarrow M_4$, $\mathcal{J}_2 : M_4 \rightarrow M_4$ são dadas por:

$$\mathcal{J}_1 \equiv (p_1, p_2, q_1, q_2) = (q_1, p_2, p_1, q_2) \tag{5.52}$$

e

$$\mathcal{J}_2 \equiv (p_1, p_2, q_1, q_2) = (p_1, q_2, q_1, p_2)\,, \tag{5.53}$$

o que leva à definição:

$$\mathcal{J}^4\left(\mathbf{X}\right) = \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_2\left(\mathbf{X}\right) = (q_1, q_2, p_1, p_2)\,, \tag{5.54}$$

ou, na forma matricial:

$$\mathcal{J}^4\left(\mathbf{X}\right) = \mathbf{J}^4\mathbf{X}, \tag{5.55}$$

onde

$$\mathbf{J}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.56}$$

Compondo-se essa transformação com a inversão temporal $\mathcal{T}$, obtemos a extensão da transformação $\tau$ para o espaço de fase de quatro dimensões,

$$\tau^4 = \mathcal{J}^4 \circ \mathcal{T}. \tag{5.57}$$

De maneira semelhante, temos as transformações parciais $\mathcal{R}_1 : M_4 \to M_4$, $\mathcal{R}_2 : M_4 \to M_4$ definidas como:

$$\mathcal{R}_1 \equiv \begin{cases} p_1' = 1 - p_1 \\ q_1' = 1 - q_1 \end{cases} \tag{5.58}$$

e

$$\mathcal{R}_2 \equiv \begin{cases} p_2' = 1 - p_2 \\ q_2' = 1 - q_2 \end{cases}, \tag{5.59}$$

que podem ser colocadas na forma matricial :

$$\begin{array}{l} \mathcal{R}_1\left(\mathbf{X}\right) = -\mathbf{R_1}\mathbf{X} + \mathbf{I_1} \\ \mathcal{R}_2\left(\mathbf{X}\right) = -\mathbf{R_2}\mathbf{X} + \mathbf{I_2} \end{array}, \tag{5.60}$$

onde

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.61}$$

e $\mathbf{I_1} = (1, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{I_2} = (0, 1, 0, 1)$. Assim podemos definir a extensão para o espaço de fase 4-D, da transformação de simetria $\mathcal{D}^4$, como a composição:

$$\mathcal{D}^4\left(\mathbf{X}\right) = R_1 \circ R_2\left(\mathbf{X}\right), \tag{5.62}$$

que pode ser colocada na forma matricial como:

$$\mathcal{D}^4\left(\mathbf{X}\right) = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{X} + \mathbf{R_1}\mathbf{I_2} + \mathbf{I_1} = -\mathbf{X} + \mathbf{I}, \tag{5.63}$$

onde $\mathbf{I} = (1, 1, 1, 1)$.

### 5.5.2 Presença de Simetrias nos Mapas Atuando em $M_4$

Para verificarmos se as transformações $P$, $\tau^4$ e $\mathcal{D}^4$ são operações de simetria dos mapas atuando no domínio $M_4$, aplicamos as definições e verificamos a relação de comutação destas com cada um dos quatro mapas.

Da forma matricial da transformação $\mathcal{P}$, e da comutação da matriz $\mathbf{P}$, com as matrizes $\mathbf{B}$, (definida pela eq. 2.20) e $\mathbf{B_{4L}}$ (definida pela eq. 3.22), as relações de comutação desta transformação com os mapas que atuam no $M_4$ reduzem-se às relações de comutação da parte não-linear destes mapas com $\mathcal{P}$. Isto é:

$$[B4D, \mathcal{P}]\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_D}\left(\mathbf{P}\mathbf{X}^n\right) - \mathbf{P}\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right), \tag{5.64}$$

$$[B4G, \mathcal{P}]\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_G}\left(\mathbf{P}\mathbf{X}^n\right) - \mathbf{P}\mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^n\right), \tag{5.65}$$

$$[B4E, \mathcal{P}]\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_E}\left(\mathbf{P}\mathbf{X}^n\right) - \mathbf{P}\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right) \tag{5.66}$$

e

$$B4L, \mathcal{P}]\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_L}\left(\mathbf{P}\mathbf{X}^n\right) - \mathbf{P}\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{T_1} - \mathbf{P}\mathbf{T_1}. \tag{5.67}$$

Para os mapas $B4D$ e $B4E$, dada a estrutura de $\mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right)$ e $\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right)$, explicitadas, nas eqs. 2.23 e 3.9, podemos ver que o comutador desses mapas com a transformação $P$ é nula. No mapa $B4G$, definido pela eq. 2.14, podemos verificar que o termo $\{\epsilon^n_{1,1}\overline{\epsilon}^n_{1,2} + \epsilon^n_{1,2}\overline{\epsilon}^n_{1,1}\}$ é invariante pela troca de índices, o que leva a

$$[B4G, \mathcal{P}]\left(\mathbf{X}^n\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left\{\epsilon^n_{1,2} - \epsilon^n_{1,1}\overline{\epsilon}^n_{1,2} - \epsilon^n_{1,2}\overline{\epsilon}^n_{1,1}\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{\epsilon^n_{1,1}\overline{\epsilon}^n_{1,2} + \epsilon^n_{1,2}\overline{\epsilon}^n_{1,1} - \epsilon^n_{1,1}\right\} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,2} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,1} \end{pmatrix}. \tag{5.68}$$

Pode-se verificar que a única combinação dos dígitos binários $\epsilon_{1,1}^n$ e $\epsilon_{1,2}^n$ que anula o comutador acima quando $\epsilon_{1,1}^n = \epsilon_{1,1}^n = 0$. Isto significa que, através de $B4G$, apenas a órbita do ponto $\mathbf{X}^n = (0,0)$ é simétrica em relação à transformação $\mathcal{P}$, com as órbitas de todos os outros pontos de $M_4$ sendo assimétricas em relação a $\mathcal{P}$.

Para o $B4L$, temos:

$$[B4L, \mathcal{P}]\,(\mathbf{X}^n) = \begin{pmatrix} 1+\epsilon_{1,1}^n \\ -1-\epsilon_{1,2}^n \\ 1-2\epsilon_{1,1}^n \\ -1+2\epsilon_{1,2}^n \end{pmatrix}, \tag{5.69}$$

fazendo com que nenhuma combinação dos dígitos binários $\epsilon_{1,1}^n$ e $\epsilon_{1,2}^n$ anule o comutador. Assim, nenhum ponto do domínio $M_4$ tem órbita simétrica em relação à transformação $\mathcal{P}$ através do mapa $B4L$.

Para verificar a relação de comutação entre a transformação $\tau^4$ e o mapa $B4D$, colocamos a inversão temporal deste na forma

$$\mathcal{T} \circ B4D\left(\mathbf{X}^n\right) = B4D^{-1}\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{B^{-1}}\mathbf{X}^n + \mathbf{R_D^{-1}}\left(\mathbf{X}^n\right), \tag{5.70}$$

onde

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{R_D^{-1}}(\mathbf{X}^n) = \begin{pmatrix} -\epsilon_{0,1}^n \\ -\epsilon_{0,2}^n \\ \frac{1}{2}\epsilon_{0,2}^n \\ \frac{1}{2}\epsilon_{0,2}^n \end{pmatrix}. \tag{5.71}$$

Do caráter linear de $\mathcal{J}^4$ observa-se que

$$\mathcal{J}^4\left(\mathbf{B}\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{B}\mathcal{J}^4\left(\mathbf{X}^n\right). \tag{5.72}$$

Assim,

$$B4D \circ \tau^4 \left(\mathbf{X}^n\right) - \tau^4 \circ B4D \left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_D^{-1}} \left(\mathcal{J}^4 \left(\mathbf{X}^n\right)\right) - \mathcal{J}^4 \left(\mathbf{R_D} \left(\mathbf{X}^n\right)\right) \quad , \tag{5.73}$$

onde

$$\mathbf{R_D^{-1}} \left(\mathcal{J}^4 \left(\mathbf{X}^n\right)\right) = \mathcal{J}^4 \begin{pmatrix} -\epsilon^n_{0,1} \\ -\left(\epsilon^n_{0,2}\right. \\ \frac{1}{2}\left(\epsilon^n_{0,1}\right. \\ \frac{1}{2}\left(\epsilon^n_{0,2}\right. \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{J}^4 \left(\mathbf{R_D} \left(\mathbf{X}^n\right)\right) = \begin{pmatrix} -\epsilon^n_{1,2} \\ -\epsilon^n_{1,1} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{1,2} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{1,1} \end{pmatrix} . \tag{5.74}$$

Como, tomando-se a aç de $\mathcal{J}^4$ sobre as componentes $\epsilon^n_{0,1}$ e $\epsilon^n_{0,2}$ temos, $\mathcal{J}^4\left(\epsilon^n_{0,1}\right) = \epsilon^n_{1,1}$ e $\mathcal{J}^4\left(\epsilon^n_{0,2}\right) = \epsilon^n_{1,2}$, que leva a:

$$\left[B4D^{-1}, \tau^4\right] \left(\mathbf{X}^n\right) = 0, \tag{5.75}$$

isto é, a transformação $\tau^4$ é uma simetria do mapa $B4D$.

Para os mapas $B4G$ e $B4E$, temos de forma semelhante:

$$\begin{cases} \mathcal{T} \circ B4G(\mathbf{X}^n) = \mathbf{B^{-1}}\mathbf{X}^n + \mathbf{R_G^{-1}}(\mathbf{X}^n) \\ \mathcal{T} \circ B4E(\mathbf{X}^n) = \mathbf{B^{-1}}\mathbf{X}^n + \mathbf{R_E^{-1}}(\mathbf{X}^n) \end{cases} . \tag{5.76}$$

onde, via inversão das eqs 3.24 e 3.11,

$$\mathbf{R_G^{-1}}(\mathbf{X}^n) = \begin{pmatrix} -\epsilon^n_{0,1} \\ -\{\epsilon^n_{0,1}\overline{\epsilon}^n_{0,2} + \epsilon^n_{0,2}\overline{\epsilon}^n_{0,1}\} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{0,1} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{0,2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R_E^{-1}}(\mathbf{X}^n) = \begin{pmatrix} -\epsilon^n_{0,2} \\ -\epsilon^n_{0,1} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{0,1} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{0,2} \end{pmatrix}, \tag{5.77}$$

fazendo as relações de comutação com a transformação $\tau^4$ assumirem a forma:

$$\begin{cases} [\tau^4, B4G] \left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_G^{-1}} \left(\mathcal{J}^4 \left(\mathbf{X}^n\right)\right) - \mathcal{J}^4 \left(\mathbf{R_G} \left(\mathbf{X}^n\right)\right) \\ [\tau^4, B4E] \left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_E^{-1}} \left(\mathcal{J}^4 \left(\mathbf{X}^n\right)\right) - \mathcal{J}^4 \left(\mathbf{R_G} \left(\mathbf{X}^n\right)\right) \end{cases} . \tag{5.78}$$

Calculando:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{-1}}\big(\mathcal{J}^4(\mathbf{X}^n)\big) = \left(\mathcal{J}^4 \begin{pmatrix} -\big(\epsilon^n_{0,1} \\ -\big(\{\epsilon^n_{0,1}\overline{\epsilon}^n_{0,2} + \epsilon^n_{0,2}\overline{\epsilon}^n_{0,1}\} \\ \frac{1}{2}\big(\epsilon^n_{0,1} \\ \frac{1}{2}\big(\epsilon^n_{0,2} \end{pmatrix}\right), \tag{5.79}$$

$$\mathcal{J}^4(\mathbf{R}_{\mathbf{G}}(\mathbf{X}^n)) = \begin{pmatrix} -\{\epsilon^n_{1,1}\overline{\epsilon}^n_{1,2} + \epsilon^n_{1,2}\overline{\epsilon}^n_{1,1}\} \\ -\epsilon^n_{1,1} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{1,2} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{1,1} \end{pmatrix}, \tag{5.80}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{-1}}\big(\mathcal{J}^4(\mathbf{X}^n)\big) = \left(\left(\mathcal{J}^4 \begin{pmatrix} -\epsilon^n_{0,2} \\ -\epsilon^n_{0,1} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{0,1} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{0,2} \end{pmatrix}\right)\right), \tag{5.81}$$

e

$$\mathcal{J}^4(\mathbf{R}_{\mathbf{E}}(\mathbf{X}^n)) = \begin{pmatrix} -\epsilon^n_{1,1} \\ -\epsilon^n_{1,2} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{1,2} \\ \frac{1}{2}\epsilon^n_{1,1} \end{pmatrix}, \tag{5.82}$$

chegamos a:

$$\begin{cases} [B4G, \tau^4](\mathbf{X}^n) = 0 \\ [B4E, \tau^4](\mathbf{X}^n) = 0 \end{cases}, \tag{5.83}$$

ou seja, a transformação $\tau^4$ tambem é uma simetria em relação aos mapas $B4G$ e $B4E$.

No caso do mapa $B4L$, temos:

$$\mathcal{T} \circ B4L\left(\mathbf{X}^n\right) = B4L^{-1}\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{B_L^{-1}}\mathbf{X}^n + \mathbf{R_L^{-1}}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{T}_{-1}, \tag{5.84}$$

onde

$$\mathbf{B_L^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R_L^{-1}}(\mathbf{X}^n) = \begin{pmatrix} -\epsilon_{0,1}^n \\ -\epsilon_{0,2}^n \\ \frac{1}{2}\epsilon_{0,2}^n \\ \frac{1}{2}\epsilon_{0,2}^n \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.85}$$

o que leva a:

$$\left[B4L, \tau^4\right]\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_L}^{-1}\left(\mathcal{J}^4\left(\mathbf{X}^n\right)\right) - \mathcal{J}^4\left(\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right)\right) \ . \tag{5.86}$$

Como,

$$\mathbf{R_L^{-1}}\left(\mathcal{J}^4\left(\mathbf{X}^n\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{J}^4\left(\epsilon_{0,2}^n\right) \\ \frac{1}{2}\mathcal{J}^4\left(\epsilon_{0,1}^n\right) \\ -\mathcal{J}^4\left(\epsilon_{0,1}^n\right) \\ -\mathcal{J}^4\left(\epsilon_{0,2}^n\right) \end{pmatrix} \quad \mathcal{J}^4\left(\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right)\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\epsilon_{0,2}^n \\ \frac{1}{2}\epsilon_{0,1}^n \\ \epsilon_{0,2}^n \\ -\epsilon_{0,1}^n \end{pmatrix}, \tag{5.87}$$

temos:

$$\left[B4L, \mathcal{J}^4\right]\left(\mathbf{X}^n\right) \neq 0. \tag{5.88}$$

.

No caso da transformação $\mathcal{D}^4\left(\mathbf{X}^n\right)$, sua representação matricial permite colocar as relações de comutação com os mapas que atuam no $M_4$ na forma:

$$\left[B4D, \mathcal{D}^4\right]\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_D}\left(-\mathbf{X}^n + \mathbf{I}\right) + \mathbf{R_D}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{BI} - \mathbf{I}, \tag{5.89}$$

$$\left[B4G, \mathcal{D}^4\right]\left(\mathbf{X}^n\right) = \mathbf{R_G}\left(-\mathbf{X}^n + \mathbf{I}\right) + \mathbf{R_G}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{BI} - \mathbf{I}, \tag{5.90}$$

$$\left[B4E, \mathcal{D}^4\right](\mathbf{X}^n) = \mathbf{R_E}\left(-\mathbf{X}^n + \mathbf{I}\right) + \mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{BI} - \mathbf{I} \tag{5.91}$$

e

$$\left[B4L, \mathcal{D}^4\right](\mathbf{X}^n) = \mathbf{R_L}\left(-\mathbf{X}^n + \mathbf{I}\right) + \mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right) + \mathbf{B_L I} - \mathbf{I} + 2\mathbf{T_1}. \tag{5.92}$$

No caso do $B4D$, podemos calcular,

$$\mathbf{R_D}(-\mathbf{X}^n + \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^n_{1,1} \\ \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^n_{1,2} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,1} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,2} \end{pmatrix} = -\mathbf{R_D}(\mathbf{X}^n) - \mathbf{BI} + \mathbf{I}, \tag{5.93}$$

o que leva a:

$$\left[B4D, \mathcal{D}^4\right](\mathbf{X}^n) = 0. \tag{5.94}$$

Para o mapa $B4G$,

$$\mathbf{R_G}(-\mathbf{X}^n + I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^n_{1,1} \\ \frac{1}{2}\left\{\epsilon^n_{1,1}\overline{\epsilon}^n_{1,2} + \epsilon^n_{1,2}\overline{\epsilon}^n_{1,1}\right\} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,1} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,2} \end{pmatrix} \tag{5.95}$$

ou

$$\mathbf{R_G}(-\mathbf{X}^n + I) = -\mathbf{R_G}(\mathbf{X}^n) - \mathbf{BI} + \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left\{1 + \epsilon^n_{1,1}\overline{\epsilon}^n_{1,2} + \epsilon^n_{1,2}\overline{\epsilon}^n_{1,1}\right\} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.96}$$

o que permite escrever:

$$[B4G, \mathcal{D}^4](\mathbf{X}^n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{5.97}$$

fazendo com que nenhuma órbita de um ponto pertencente a $M_4$ através do mapa $B4G$, seja simétrica em relação a transformação $\mathcal{D}^4$.

De forma análoga ao que acontece no caso do $B4D$, temos para os mapas $B4E$ e $B4L$:

$$\mathbf{R_E}(-\mathbf{X}^n + I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^n_{1,2} \\ \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^n_{1,1} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,1} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,2} \end{pmatrix} = -\mathbf{R_E}\left(\mathbf{X}^n\right) - \mathbf{BI} + \mathbf{I} \tag{5.98}$$

e

$$\mathbf{R_L}(-\mathbf{X}^n + I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\overline{\epsilon}^n_{1,2} \\ \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^n_{1,1} \\ \overline{\epsilon}^n_{1,2} \\ -\overline{\epsilon}^n_{1,1} \end{pmatrix} = -\mathbf{R_L}\left(\mathbf{X}^n\right) - \mathbf{BI} + 2\mathbf{T}_1 \quad , \tag{5.99}$$

o que leva a:

$$[B4E, \mathcal{D}^4](\mathbf{X}^n) = 0 \tag{5.100}$$

e

$$[B4L, \mathcal{D}^4](\mathbf{X}^n) = 0. \tag{5.101}$$

### 5.5.3 Quebra de Simetrias

Vimos acima que o $B4D$ é simétrico em relação a transformações $\tau^4$ e $\mathcal{D}^4$, que são extensões para o domínio $M_4$ das simetrias $\tau$ e $\mathcal{R}$ presente no $B2D$. Observamos também, para este mapa, o aparecimento de uma nova transformação de simetria, $\mathcal{P}$, ausente no $B2D$.

Dessas três transformações, apenas a transformação $\tau^4$ é uma simetria em relação ao mapa $B4G$, sendo que existe apenas um ponto do domínio $M_4$ que tem uma órbita simétrica em relação à transformação $\mathcal{P}$, não sendo portanto este simétrico em relação a esta transformação.

O $B4E$ comporta-se em relação às transformações $\mathcal{P}$, $\tau^4$ e $\mathcal{D}^4$ da mesma forma que o mapa $B4D$, sendo simétrico em relação a essas três transformações.

O $B4L$ continua simétrico apenas em relação às transformações $\tau^4$ e $\mathcal{D}^4$. Isto é devido ao fato da transformação $SL$, que junto com o $B4D$ compõe o $B4L$, não ser simétrica em relação à transformação $\mathcal{P}$. Em outras palavras, a transformação $SL$ provoca uma quebra da simetria $\mathcal{P}$ presente no $B4D$.

É interessante notar que o mapa $B4L$ pode ser construído a partir da composição do mapa $B4D$ com as transformações $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}_1$ [42], uma vez que

$$SL\,(\mathbf{X}^n) = \mathcal{P} \circ \mathcal{R}_1\,(\mathbf{X}^n) = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{P}\,(\mathbf{X}^n)\,, \tag{5.102}$$

e portanto, $B4L\,(\mathbf{X}^n) = \mathcal{P} \circ \mathcal{R}_1 \circ B4D\,(\mathbf{X}^n)$.

Como veremos nos próximos capítulos, essas simetrias terão interesse ao construirmos os propagadores das versões quânticas dos mapas atuando em $M_4$, em especial, ao analisarmos seus autoângulos.

# 6 Quantização dos Mapas Atuando no $M_4$

## 6.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, foram definidos quatro mapas atuando no domínio $M_4$ e as características de suas dinâmica clássicas foram estudadas. Neste capítulo, construiremos os propagadores quânticos associados a cada um desses mapas. Na próxima seção recordaremos a construção, do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, que foi utilizado por Saraceno [41], para descrever a dinâmica quântica do mapa $B2D$. Com base neste mapa, definiremos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_4$ a que pertencem os vetores que descrevem os estados quânticos dos mapas que atuam no domínio $M_4$. Na seção 3, construiremos os propagadores quânticos desses quatro mapas na representação mista, pressupondo uma analogia geométrica entre a dinâmica clássica de um ponto no domínio $M_4$ e a dinâmica quântica do vetor de estado correspondente no espaço $\mathcal{H}_4$. Na seção 4, serão obtidos, de forma explícita, os elementos de matriz do propagador dos mapas $B4D$, $B4G$ e $B4E$. Por último, na seção 5, determinaremos o propagador do mapa $B4L$.

## 6.2 Espaços de Hilbert Associados aos Domínios $M_2$ e $M_4$

O espaço de Hilbert, que descreve os estados quânticos de um sistema cujo análogo clássico evolui em um domínio compacto do espaço de fase, é gerado por bases discretas tanto na representação de momento como na de posição. No caso particular do mapa $B2D$, seus vetores de estado estão contidos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$. O $\mathcal{H}_2$ nas representações de posição e momento é gerado, respectivamente, pelas bases discretas $\{|n\rangle\}$ e $\{|k\rangle\}$, compostas de $N$ autovetores dos operadores de posição $\widehat{q}$ e momento $\widehat{p}$.

Usando um sistema de unidades em que $N = 2\pi\hbar$ e condições periódicas onde

$$\begin{cases} |n+N\rangle = |n\rangle \\ |k+N\rangle = |k\rangle \end{cases}, \tag{6.1}$$

Balazs e Voros [40] quantizaram o mapa $B2D$ de forma que

$$\begin{cases} \widehat{q}\,|n\rangle = \frac{n}{N}\,|n\rangle \\ \widehat{p}\,|k\rangle = \frac{k}{N}\,|k\rangle \end{cases}, \tag{6.2}$$

o que leva a transformação entre as bases de posição e momento ser dada por

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \,|n\rangle\,. \tag{6.3}$$

Impondo condições anti-periódicas às bases que geram o espaço $\mathcal{H}_2$, isto é,

$$\begin{cases} |n+N\rangle = -\,|n\rangle \\ |k+N\rangle = -\,|k\rangle \end{cases}, \tag{6.4}$$

para que as simetrias clássicas presentes no $B2D$ do fossem mantidas no seu propagador quântico, Saraceno [41] quantizou o mapa $B2D$ de forma que

$$\begin{cases} \widehat{q}\,|n\rangle = \frac{n+\frac{1}{2}}{N}\,|n\rangle \\ \widehat{p}\,|k\rangle = \frac{k+\frac{1}{2}}{N}\,|k\rangle \end{cases}, \tag{6.5}$$

levando a transformação entre as bases de posição e momento ser dada por

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)} \,|n\rangle\,. \tag{6.6}$$

No caso da quantização feita por Balazs e Voros, os coeficientes da transformação de base são os elementos da matriz de Fourier discreta com dimensão $N$,

$$\langle k|\, n\rangle = \mathbf{F}^N_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi i}{N} nk}, \tag{6.7}$$

e no caso da quantização feita por Saraceno, os coeficientes dessa transformação são os elementos da matriz de Fourier semi-inteira,

$$\langle k|\ n\rangle = \mathbf{G}^N_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-\frac{2\pi i}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}. \tag{6.8}$$

Um vetor de estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ é escrito

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \Psi_n\,|n\rangle\,, \tag{6.9}$$

na representação de posição e

$$\left|\widetilde{\Psi}\right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{\Psi}_k\,|k\rangle\,, \tag{6.10}$$

na representação de momento, com funções de onda sendo expressas pelos vetores:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_{N-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \widetilde{\Psi}_0 \\ \widetilde{\Psi}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\Psi}_{N_1} \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

onde os elementos destes vetores estão relacionados à amplitude de probabilidade de encontrarmos o sistema em um dos autoestados de $\widehat{q}$ ou $\widehat{p}$. Dessa forma, para um vetor $|\Psi\rangle$, a transformação de sua função de onda $\Psi$, na representação de posição para a função de onda $\widetilde{\Psi}$, na representaçao de momento, é dada na forma matricial por

$$\widetilde{\Psi} = \mathbf{F}^N\Psi, \tag{6.12}$$

impondo-se condições periódicas e

$$\widetilde{\Psi} = \mathbf{G}^N\Psi, \tag{6.13}$$

com condições anti-periódicas.

Para os mapas que atuam no domínio $M_4$, o primeiro passo para sua quantização é definir o espaço de Hilbert ao qual pertencem os vetores que descrevem os estados quânticos desses mapas. Uma vez que o domínio $M_4$ no espaço de fase 4-D é compacto e formado pelo produto direto dos subespaços $M_2^1$ e $M_2^2$, podemos fazer as associações

$$\begin{cases} M_2^1 \rightarrow \mathcal{H}_2^1 \\ M_2^2 \rightarrow \mathcal{H}_2^2 \end{cases}, \tag{6.14}$$

onde $\mathcal{H}_2^1$ e $\mathcal{H}_2^2$ são duas réplicas do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, geradas na representação de posição pelas bases $\{|n_1\rangle\}$ e $\{|n_2\rangle\}$ de autovetores, respectivamente dos operadores $\widehat{q}_1$ e $\widehat{q}_2$. Na representação de momento, $\mathcal{H}_2^1$ e $\mathcal{H}_2^2$ são gerados pelas bases $\{|k_1\rangle\}$ e $\{|k_2\rangle\}$ de autovetores, respectivamente dos operadores $\widehat{k}_1$ e $\widehat{k}_2$. Essas associações permitem definir o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_4$ associado ao domínio $M_4$ como o produto direto de $\mathcal{H}_2^1$ e $\mathcal{H}_2^2$, isto é:

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_2^1 \otimes \mathcal{H}_2^2. \tag{6.15}$$

Esse espaço é gerado na representação de posição pela base $\{|n_1, n_2\rangle\}$, de dimensão $N^2$, formada pelo produto direto dos vetores de $\{|n_1\rangle\}$ e $\{|n_2\rangle\}$, onde

$$|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle\, |n_2\rangle \tag{6.16}$$

é um autovetor simultaneamente dos operadores $\widehat{q}_1$ e $\widehat{q}_2$. De maneira análoga, $\mathcal{H}_4$ é gerado, na representação de momento, pela base $\{|k_1, k_2\rangle\}$, formada pelo produto direto das bases $\{|k_1\rangle\}$ e $\{|k_2\rangle\}$, com

$$|k_1, k_2\rangle = |k_1\rangle\, |k_2\rangle \tag{6.17}$$

sendo autovetor simultaneamente dos operadores $\widehat{p}_1$ e $\widehat{p}_2$.

As relações de fechamento para essas bases,

$$\sum_{n_1,n_2=0}^{N-1} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| = \sum_{k_1,k_2=0}^{N-1} |k_1, k_2\rangle \langle k_1, k_2| = \widehat{1}, \tag{6.18}$$

permitem escrever os vetores da base de autoestados de $p_1$ e $p_2$ como:

$$|k_1, k_2\rangle = \sum_{n_1,n_2=0}^{N-1} \langle n_1, n_2 \,|k_1, k_2\rangle \,|n_1, n_2\rangle \,. \tag{6.19}$$

A presença da simetria clássica $R^4$ nos mapas clássicos que atuam no domínio $M_4$ faz com que, daqui por diante, utilizemos sempre as bases $\{|k_1, k_2\rangle\}$ e $\{|n_1, n_2\rangle\}$ sujeitas a condições duplamente antiperiódicas, isto é:

$$\begin{aligned} |n_1 + N, n_2\rangle &= |n_1, n_2 + N\rangle = - |n_1, n_2\rangle \\ |k_1 + N, k_2\rangle &= |k_1, k_2 + N\rangle = - |k_1, k_2\rangle \,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Assim, a eq. 6.20, junto com a eq. 6.9, permite determinar os elementos de $\{|k_1, k_2\rangle\}$ em termos dos elementos de $\{|n_1, n_2\rangle\}$ como

$$|k_1, k_2\rangle = \sum_{n_1,n_2=0}^{N-1} \mathbf{G}^N_{k_1,n_1} \mathbf{G}^N_{k_2,n_2} \,|n_1, n_2\rangle \,, \tag{6.21}$$

que leva à definição da matriz

$$\mathbf{G^{N\times N}} = \mathbf{G^N} \otimes \mathbf{G^N}, \tag{6.22}$$

com elementos

$$\mathbf{G}^{N\times N}_{k_1,n_1,k_2,n_2} = \mathbf{G}^N_{k_1,n_1} \mathbf{G}^N_{k_2,n_2} = \frac{1}{N} e^{\frac{2\pi i}{N}\left\{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(k_1+\frac{1}{2}\right)+\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\left(k_2+\frac{1}{2}\right)\right\}}, \tag{6.23}$$

correspondentes a uma transformação de Fourier semi-inteira em duas dimensões.

De maneira análoga ao que ocorre com os vetores de estado pertencentes a $\mathcal{H}_2$, um vetor de estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_4$ é escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1,n_2=0}^{N-1} \Psi_{n_1,n_2} \,|n_1, n_2\rangle \tag{6.24}$$

na base de autovalores dos operadores de posição, e

$$\left|\widetilde{\Psi}\right\rangle = \sum_{k_1,k_2=0}^{N-1} \widetilde{\Psi}_{k_1,k_2} \left|k_1, k_2\right\rangle \tag{6.25}$$

na base de autovalores dos operadores de momento, com funções de onda expressas pelos vetores:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{0,0} \\ \Psi_{0,1} \\ \vdots \\ \Psi_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \widetilde{\Psi}_{0,0} \\ \widetilde{\Psi}_{0,1} \\ \vdots \\ \widetilde{\Psi}_{N-1,N-1} \end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

A transformação da função de onda $\Psi$, na representação de posição, para a função de onda $\widetilde{\Psi}$, na representaçao de momento, é dada por:

$$\widetilde{\Psi} = \mathbf{G}^{NXN}\Psi. \tag{6.27}$$

## 6.3 Propagadores Quânticos na Representação Mista

Um vetor $\left|\Psi^L\right\rangle$, pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, que descreve o estado quântico do mapa $B2D$ em um determinado instante $L$, tem sua evolução temporal dada por

$$\left|\Psi^{L+1}\right\rangle = \widehat{\mathbf{U}}_{B2D} \left|\Psi^L\right\rangle, \tag{6.28}$$

onde o operador unitário $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ é o propagador a tempo discreto do mapa quântico $B2D$, sendo a equação acima a análoga quântica da eq. 2.1.

De forma semelhante, os mapas que atuam classicamente no domínio $M_4$ têm a dinâmica quântica determinada por:

$$\begin{aligned} \left|\Psi^{L+1}\right\rangle &= \widehat{\mathbf{U}}_{B4D} \left|\Psi^L\right\rangle, \\ \left|\Psi^{L+1}\right\rangle &= \widehat{\mathbf{U}}_{B4G} \left|\Psi^L\right\rangle, \\ \left|\Psi^{L+1}\right\rangle &= \widehat{\mathbf{U}}_{B4E} \left|\Psi^L\right\rangle, \\ \left|\Psi^{L+1}\right\rangle &= \widehat{\mathbf{U}}_{B4L} \left|\Psi^L\right\rangle, \end{aligned} \tag{6.29}$$

onde $\left|\Psi^L\right\rangle$ é um vetor de estado pertencente a Hilbert $\mathcal{H}_4$, e $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4G}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}$ e $\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}$ os propagadores quânticos correspondentes.

No resto desta seção, seguindo o procedimento utilizado por Balazs e Voros, para o mapa $B2D$, e impondo as condições anti-periódicas utilizadas por Saraceno, obtemos as representações mistas dos propagadores $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4G}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}$ e $\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}$.

### 6.3.1 Representação Mista do $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$

Usando a relação de fechamento para a base $\{|n\rangle\}$, colocamos $\left|\Psi^{L+1}\right\rangle$ na representação de momento, através da eq. 6.28, como

$$\left\langle k \right| \left. \Psi^{L+1} \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle k \right| \widehat{\mathbf{U}}_{B2D} \left| n \right\rangle \left\langle n \right| \left. \Psi^{L} \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}(k,n)\Psi_n \tag{6.30}$$

ou, na forma abreviada

$$\widetilde{\Psi}^{L+1} = \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}\Psi^{L}, \tag{6.31}$$

onde a matriz $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}$ é o operador evolução do mapa $B2D$ em sua representação mista. Nesta representação, este operador relaciona a função de onda na representação de coordenadas em um tempo $L$ com a função de onda na representação de momento em um tempo consecutivo $L+1$.

Na fig.2.1, que representa graficamente a dinâmica do $B2D$, é introduzida uma partição do domínio do mapa $B2D$ que, antes da iteração, divide $M_2$ em duas faixas verticais, e, depois da iteração divide $M_2$ em duas faixas horizontais, sendo estas faixas indicadas pelos dígitos 0 e 1. No processo de quantização desse mapa, Balazs e Voros introduziram uma decomposição do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$ como a descrita acima para o domínio $M_2$. Nesta decomposição, um vetor de estado pertencente a $\mathcal{H}_2$ é expresso com uma soma de duas componentes ortogonais entre si, identificadas por um índice que assume os valores 0 e 1, ou seja:

$$\left|\Psi^L\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|\Psi^L\right\rangle^0 + \left|\Psi^L\right\rangle^1\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{1}\left|\Psi^L\right\rangle^i \tag{6.32}$$

e

$$\left|\Psi^{L+1}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^0 + \left|\Psi^{L+1}\right\rangle^1\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{1}\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^i, \tag{6.33}$$

com

$$^i\!\left\langle\Psi^L\right.\left|\Psi^L\right\rangle^j = \delta_{i,j} \tag{6.34}$$

e

$$^i\!\left\langle\Psi^{L+1}\right.\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^j = \delta_{i,j}, \tag{6.35}$$

onde onde o quadrado do módulo das componentes 0 e 1 é probabilidade de encontrarmos, respectivamente, $q < 1/2$ e $q \geq 1/2$.

Na representação de posição, a decomposição de $\left|\Psi^L\right\rangle$, como indicada na eq. 6.36, é feita com suas componentes construídas de forma que:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left\langle n\left|\Psi^L\right.\right\rangle^0 = 0 & \text{para } n \geq N/2, \\ \left\langle n\left|\Psi^L\right.\right\rangle^1 = 0 & \text{para } n < N/2 \end{array}\right. . \tag{6.36}$$

De maneira análoga, a decomposição de $\left|\Psi^{L+1}\right\rangle$ na representação de momento, como indicada na eq. 6.37, tem suas componentes construídas da forma:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left\langle k\left|\Psi^{L+1}\right.\right\rangle^0 = 0 & \text{para } k \geq N/2, \\ \left\langle k\left|\Psi^{L+1}\right.\right\rangle^1 = 0 & \text{para } k < N/2 \end{array}\right. . \tag{6.37}$$

Nas decomposições acima, o índice $i$ foi introduzido para identificar as componentes como pertencentes a subespaços de $\mathcal{H}_2$.

Os dois subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{i}}$ e os dois subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}$ são definidos, respectivamente, de forma:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^0 \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^1 \\ \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^0 \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^1 \end{cases}. \tag{6.38}$$

Tomando $N$ par, pois como sera visto a seguir, o propagador do mapa deve mapear o autoestado $\left|\frac{N}{2}-1\right\rangle$ no auto estado $|N-1\rangle$, para que o fator de expansão do mapa clássico seja mantido por seu propagador, os subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{i}}$ são gerados por dois conjuntos de $N/2$ vetores , pertencentes à base $\{|n\rangle\}$ e agrupados da seguinte forma:

$$\begin{matrix} \begin{cases} |n\rangle^0 = |n\rangle \quad \text{para} \quad n < N/2 \\ |n\rangle^0 = 0 \quad \text{para} \quad n \geq N/2 \end{cases} \\ \begin{cases} |n\rangle^1 = |n\rangle \quad \text{para} \quad n \geq N/2 \\ |n\rangle^1 = 0 \quad \text{para} \quad n < N/2 \end{cases} \end{matrix}. \tag{6.39}$$

De maneira análoga, os subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}$ são gerados por dois conjuntos de $N/2$ vetores , pertencentes à base $\{|k\rangle\}$ e agrupados da seguinte forma:

$$\begin{matrix} \begin{cases} |k\rangle^0 = |k\rangle \quad \text{para} \quad k < N/2 \\ |k\rangle^0 = 0 \quad \text{para} \quad kgeqN/2 \end{cases} \\ \begin{cases} |k\rangle^1 = |k\rangle \quad \text{para} \quad k \geq N/2 \\ |k\rangle^1 = 0 \quad \text{para} \quad k < N/2 \end{cases} \end{matrix}. \tag{6.40}$$

Esta separação dos vetores pertencentes às bases $\{|n\rangle\}$ e $\{|k\rangle\}$ em dois conjuntos, permite reescrevermos as relações de fechamento como:

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle^i \, {}^i\langle n| = 1, \tag{6.41}$$

e

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle^i \, {}^i\langle k| = 1, \tag{6.42}$$

onde as somatórias sobre os pares de índices $n$ e $k$ são executadas respeitando-se os intervalos descritos nos dois conjuntos de equações acima.

Essa analogia geométrica entre vetores de estado pertencentes ao espaço $\mathcal{H}_2$, e pontos do espaço de fase, pertencentes ao domínio $M_2$, leva à utilização do princípio de que o propagador quântico do $B2D$, na representação mista, deva manter a mesma estrutura do mapa clássico. Isto é, o propagador na representação mista pode ser decomposto em duas aplicações entre cada um dos subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{i}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}$ de $\mathcal{H}_2$ segundo o esquema:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^0 \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^0 \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^1 \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^1 \end{cases}, \tag{6.43}$$

sendo este esquema o análogo quântico do esquema de isomorfismos descrito pelas eqs. 2.41 que determinam a dinâmica clássica do $B2D$. Dessa forma, a representação mista do propagador quântico $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}$ assume a forma diagonal por blocos:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\Psi}_D^{L+1} \quad {}^{(0)} \\ \widetilde{\Psi}_D^{L+1} \quad {}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(0,0)} & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(1,1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_D^{L} \quad {}^{(0)} \\ \Psi_D^{L} \quad {}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{6.44}$$

onde os índices superiores mostram quais subespaços são relacionados.

Para determinarmos os elementos dos blocos que compõem a matriz $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}$, atemo-nos ao efeito do operador $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ sobre um vetor de estado pertencente a um dos conjuntos $\left\{|n\rangle^j\right\}$ que geram o subespaço $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{j}}$. Uma vez que $|n\rangle^j$ representa um autoestado do operadore $\widehat{q}$, o resultado da atuação de $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ sobre $|n\rangle^j$, quando este vetor não é nulo, deverá também ser um autoestado dos operadores $\widehat{q}$ com autovalores dobrados, isto é,

$$\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}\,|n\rangle^i = \begin{cases} |2n\rangle^i \quad \text{para } |2n\rangle^i \neq 0 \\ 0 \quad \text{para } |2n\rangle^i = 0 \end{cases} \tag{6.45}$$

Ou seja, a ação do propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ sobre um autoestado do operador $\widehat{q}$ resulta em outro auto estado desse oprerador com autovalor que é o dobro do autovalor original, isto para que o propagador quântico $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ mantenha a característica geométrica da iteração de um ponto pertencente a $M_2$ através do mapa clássico, que é causar uma expansão das coordenadas $q$ por um fator dois.

Fazendo-se o produto direto da equação acima por um dos vetores ${}^{i}\langle k|$ do subespaço $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}$, obtemos os elementos de matriz dos blocos $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,j)}$ do propagador na representação mista:

$$\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,j)}(k,n) = {}^{i}\!\langle k|\, \widehat{\mathbf{U}}_{B2D}\, |n\rangle^{j} = {}^{i}\!\langle k|\, |n\rangle^{j}\,, \tag{6.46}$$

ou seja, onde o produto ${}^{i}\!\langle k|\,|n\rangle^{j}$ obedece às restrições impostas pelos índices $i$ e $j$ aos valores de $n$ e $k$. Dos dois coeficientes de transformação da base $\{|n\rangle\}$ na base $\{|k\rangle\}$, temos esses elementos de matriz dados de forma explícita por:

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,j)}(k,n) = \mathbf{G}_{k,n}^{\frac{N}{2}}\delta_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{4\pi i}{N}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}}\delta_{i,j}, \tag{6.47}$$

o que permite colocar a matriz $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}$ na forma:

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}}} & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}}} \end{pmatrix}. \tag{6.48}$$

### 6.3.2 Representação Mista dos Operadores $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4G}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}$ e $\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}$

Para obter os propagadores na representação mista dos quatro mapas que atuam classicamente no domínio $M_4$, o primeiro passo é separar o espaço $\mathcal{H}_4$ em um conjunto de subespaços análogos às regiões $M_q^{ij}$ e $M_p^{ij}$, introduzidas na seção 2.3. De maneira semelhante ao que foi feito para o $B2D$, fazemos a decomposição dos vetores de estado $\left|\Psi^{L}\right\rangle$ e $\left|\Psi^{L+1}\right\rangle$, que descrevem o estado dos mapas atuando em $\mathcal{H}_4$, em quatro componentes ortogonais entre si, na forma:

$$\left|\Psi^L\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\left|\Psi^L\right\rangle^{00} + \left|\Psi^L\right\rangle^{01} + \left|\Psi^L\right\rangle^{10} + \left|\Psi^L\right\rangle^{11}\right\} = \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{i,j=0}\left|\Psi^L\right\rangle^{ij} \tag{6.49}$$

e

$$\left|\Psi^{L+1}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{00} + \left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{01} + \left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{10} + \left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{11}\right\} = \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{i,j=0}\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{ij}, \tag{6.50}$$

obedecendo às relações de ortogonalidade:

$$^{ij}\left\langle\Psi^L\right.\left|\Psi^L\right\rangle^{kl} = \delta_{i,k}\delta_{j,l} \tag{6.51}$$

e

$$^{ij}\left\langle\Psi^{L+1}\right.\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{kl} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}. \tag{6.52}$$

A decomposição de $\left|\Psi^L\right\rangle$, na representação de posição, tem as suas componentes agrupadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{lllll} \langle n_2, n_1\left|\Psi^L\right\rangle^{00} \neq 0 & \text{para} & n_1, n_2 < N/2 & & \\ \langle n_2, n_1\left|\Psi^L\right\rangle^{01} \neq 0 & \text{para} & n_1 < N/2 & \text{e} & n_2 \geq N/2 \\ \langle n_2, n_1\left|\Psi^L\right\rangle^{10} \neq 0 & \text{para} & n_1 \geq N/2 & \text{e} & n_2 < N/2 \\ \langle n_2, n_1\left|\Psi^L\right\rangle^{11} \neq 0 & \text{para} & n_1, n_2 \geq N/2 & & \end{array} \tag{6.53}$$

Da mesma forma, a decomposição de $\left|\Psi^{L+1}\right\rangle$ na representação de momento, tem suas componentes agrupadas na forma:

$$\left\{\begin{array}{lllll} \langle k_2, k_1\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{00} \neq 0 & \text{para} & k_1, k_2 < N/2 & & \\ \langle k_2, k_1\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{01} \neq 0 & \text{para} & k_1 < N/2 & \text{e} & k_2 \geq N/2 \\ \langle k_2, k_1\left|\Psi^{L+f1}\right\rangle^{10} \neq 0 & \text{para} & k_1 \geq N/2 & \text{e} & k_2 < N/2 \\ \langle k_2, k_1\left|\Psi^{L+1}\right\rangle^{11} \neq 0 & \text{para} & k_1, k_2 \geq N/2 & & \end{array}\right. . \tag{6.54}$$

Assim, os subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{ij}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ij}}$, com $i,j=0,1$, podem ser definidos de maneira que:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{00} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{01} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{10} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{11} \\ \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{00} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{01} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{10} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{11} \end{cases}, \tag{6.55}$$

Sendo cada um dos subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{ij}}$ formados por quatro conjuntos de $N^4/4$ vetores $|n_1,n_2\rangle^{ij}$, pertencentes à base $\{|n_1,n_2\rangle\}$ e agrupados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|n_1,n_2\rangle^{00} &= \begin{cases} |n_1,n_2\rangle \quad \text{para} \quad n_1,n_2 < N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad n_1,n_2 \end{cases} \\
|n_1,n_2\rangle^{01} &= \begin{cases} |n_1,n_2\rangle \quad \text{para} \quad n_1 < N/2 \quad \text{e} \quad n_2 \geq N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad n_1,n_2 \end{cases} \\
|n_1,n_2\rangle^{10} &= \begin{cases} |n_1,n_2\rangle \quad \text{para} \quad n_1 \geq N/2 \quad \text{e} \quad n_2 < N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad n_1,n_2 \end{cases} \\
|n_1,n_2\rangle^{11} &= \begin{cases} |n_1,n_2\rangle \quad \text{para} \quad n_1,n_2 \geq N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad n_1,n_2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.56}$$

De maneira semelhante, os subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ij}}$ são formados por quatro conjuntos de $N^4/4$ vetores $|k_1,k_2\rangle^{ij}$, pertencentes à base $\{|k_1,k_2\rangle\}$ e agrupados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|k_1,k_2\rangle^{00} &= \begin{cases} |k_1,k_2\rangle \quad \text{para} \quad k_1,k_2 < N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad k_1,k_2 \end{cases} \\
|k_1,k_2\rangle^{01} &= \begin{cases} |k_1,k_2\rangle \quad \text{para} \quad k_1 < N/2 \quad \text{e} \quad k_2 \geq N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad k_1,k_2 \end{cases} \\
|k_1,k_2\rangle^{10} &= \begin{cases} |k_1,k_2\rangle \quad \text{para} \quad k_1 \geq N/2 \quad \text{e} \quad k_2 < N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad k_1,k_2 \end{cases} \\
|k_1,k_2\rangle^{11} &= \begin{cases} |k_1,k_2\rangle \quad \text{para} \quad k_1,k_2 \geq N/2 \\ 0 \quad \text{para todos outros} \quad k_1,k_2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Esta separação em conjuntos indexados dos vetores pertencentes às bases $\{|n_1, n_2\rangle\}$ e $\{|k_1, k_2\rangle\}$ permite reescrevermos as relações de fechamento como:

$$\sum_{i,j=0}^{1} \sum_{n_1,n_2=0}^{N-1} |n_1, n_2\rangle^{ij} \; {}^{ij}\langle n_1, n_2| = 1 \tag{6.58}$$

e

$$\sum_{i,j=0}^{1} \sum_{k_1,k_2=0}^{N-1} |k_1, k_2\rangle^{ij} \; {}^{ij}\langle k_1, k_2| = 0. \tag{6.59}$$

A maneira como foram definidos acima os subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{ij}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{ij}$ permite-nos notar com facilidade a existência de uma analogia geométrica entre estes subespaços e as regiões $M_q^{ij}$ e $M_p^{ij}$ do espaço de fase, introduzidas na seção 2.3. Esta analogia geométrica é mais evidente quando percebemos que uma função de onda $\Psi^L$, com componentes pertencentes a um subespaço $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{ij}}$, fornecerá valores esperados para as coordenadas de posição, $\langle q_1\rangle$ e $\langle q_2\rangle$, que estão contidos na região clássica $M_q^{ij}$. Da mesma maneira, uma função de onda arbitrária $\widetilde{\Psi}^L$, com componentes pertencentes a um subespaço $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ij}}$, fornecerá valores médios das coordenadas de momento, $\langle p_1\rangle$ e $\langle p_2\rangle$, que estão contidos na região clássica $M_p^{ij}$.

Utilizando o mesmo princípio empregado no caso do mapa $B2D$, definimos os operadores $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}$ $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}$ $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4E}$ de forma a manter as mesmas estruturas dos conjuntos de isomorfismos entre cada um dos subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{ij}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ij}}$ que caracterizam os mapas clássicos, isto é:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{00} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{00} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{01} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{01} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{10} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{10} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{11} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{11} \end{cases} , \tag{6.60}$$

para o $B4D$,

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{00} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{00} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{01} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{01} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{10} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{11} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{11} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{10} \end{cases}, \tag{6.61}$$

para o $B4G$ e,

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{00} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{00} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{01} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{10} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{10} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{01} \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E} : \mathcal{H}_{\mathrm{q}}^{11} \to \mathcal{H}_{\mathrm{p}}^{11} \end{cases}, \tag{6.62}$$

para o $B4E$. O que leva os propagadores quânticos desses três mapas a assumir, respectivamente, as formas matriciais de blocos:

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(00,00)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(01,01)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(10,10)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(11,11)} \end{pmatrix}, \tag{6.63}$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{B4G} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(00,00)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(01,01)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(10,11)} \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(11,10)} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.64}$$

e

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{B4E} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}^{(00,00)}_{B4E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{U}}^{(01,10)}_{B4E} & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{U}}^{(10,01)}_{B4E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{U}}^{(11,11)}_{B4E} \end{pmatrix}. \tag{6.65}$$

A posição dos blocos das matrizes $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}$ e $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4E}$ esta relacionada as matrizes das portas lógicas quânticas CNOT e SWAP, respectivamente, sendo iguais a estas quando $N = 1$ a menos de um fator de fase.

Para estes três mapas, a determinação dos elementos dos blocos que compõem seus propagadores na representação mista, segue o mesmo princípio utilizado na determinação de $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}$. Como a atuação clássica destes mapas sobre as coordenadas de posição $q_1$ e $q_2$, é multiplicá-las por um fator dois, temos que seu efeito sobre os vetores $\left\{|n_1, n_2\rangle^{ij}\right\}$ será:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|n_1, n_2\rangle^{ij} &= \begin{cases} |2n_1, 2n_2\rangle \ \text{ para}\, |n_1, n_2\rangle^{ij} \neq 0 \\ 0 \text{ para}\, |n_1, n_2\rangle^{ij} = 0 \end{cases} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{B4G}\,|n_1, n_2\rangle^{ij} &= \begin{cases} |2n_1, 2n_2\rangle \ \text{ para}\, |n_1, n_2\rangle^{ij} \neq 0 \\ 0 \text{ para}\, |n_1, n_2\rangle^{ij} = 0 \end{cases} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|n_1, n_2\rangle^{ij} &= \begin{cases} |2n_1, 2n_2\rangle \ \text{ para}\, |n_1, n_2\rangle^{ij} \neq 0 \\ 0 \text{ para}\, |n_1, n_2\rangle^{ij} = 0 \end{cases} \end{aligned}, \tag{6.66}$$

o que leva os elementos dos blocos a serem dados por:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}^{(ij,lm)}_{B4D}(k_1, k_2, n_1, n_2) = {}^{ij}\langle k_2, k_1|\, \widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\, |n_1, n_2\rangle^{lm} \\ \widetilde{\mathbf{U}}^{(ij,lm)}_{B4G}(k_1, k_2, n_1, n_2) = {}^{ij}\langle k_2, k_1|\, \widehat{\mathbf{U}}_{B4G}\, |n_1, n_2\rangle^{lm} \\ \widetilde{\mathbf{U}}^{(ij,lm)}_{B4E}(k_1, k_2, n_1, n_2) = {}^{ij}\langle k_2, k_1|\, \widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\, |n_1, n_2\rangle^{lm} \end{cases} \tag{6.67}$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(ij,lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2)\\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(ij,lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2)\\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E}^{(ij,lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2)\end{array}\right\} = \frac{2N}{e}^{-\frac{4\pi i}{N}\left\{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(k_1+\frac{1}{2}\right)+\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\left(k_2+\frac{1}{2}\right)\right\}} \quad , \tag{6.68}$$

com os índices $k_1, k_2, n_1$ e $n_2$ variando conforme as restrições impostas os índices $i, j$, $l$ e $m$, que são determinadas pelos conjuntos de eqs. 6.60 e 6.61.

Da equação acima podemos verificar que, para esses três mapas, cada elemento de matriz dos propagadores na representação mista pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(ij,lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2) &= \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,l)}(k_1,n_1)\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(j,m)}(k_1,n_1),\\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(ij,kl)}(k_1,k_2,n_1,n_2) &= \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,l)}(k_1,n_1)\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(j,m)}(k_1,n_1)e\\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E}^{(ij,kl)}(k_1,k_2,n_1,n_2) &= \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,l)}(k_1,n_1)\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(j,m)}(k_1,n_1),\end{aligned} \tag{6.69}$$

onde $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2E}^{(ij)}(k_1,n_1)$ são os elementos na representação mista do propagador para o mapa $B2D$, atuando separadamente nos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_2^1$ e $\mathcal{H}_2^1$.

## 6.4 Propagadores Quânticos na Representação de Posição

### 6.4.1 Operador $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$

Usando a relação de fechamento para a base $\{|k\rangle\}$ podemos escrever os elementos de matriz $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$, na representação de coordenadas, como o produto de matrizes:

$$\mathbf{U}_{B2D}(n',n) = \langle n'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}\,|n\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\langle n'\,|k\rangle\,\langle k|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}\,|n\rangle\,, \tag{6.70}$$

onde a matriz à direita é idêntica àquela do propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ na representação mista, e a matriz à esquerda é idêntica à matriz de transformação da base $\{|k\rangle\}$ para a base $\{|n\rangle\}$. A estrutura diagonal de $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}$, definida na seção anterior, torna conveniente fazermos a decomposição de $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ na representação de coordenadas em quatro blocos, isto é:

$$\mathbf{U}^{(i,j)}_{B2D}(n',n) = \sum_{l=0,1}\sum_{k} \langle n' \,|k\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}^{(l,j)}_{B2D}(k,n), \tag{6.71}$$

com os índices $i$ e $j$ definidos por:

$$\begin{array}{lllllll} i=0 & \text{para} & 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1 & \text{e} & i=1 & \text{para} & \frac{N}{2} \leq n \leq N \\ j=0 & \text{para} & 0 \leq n' \leq \frac{N}{2}-1 & \text{e} & j=1 & \text{para} & \frac{N}{2} \leq n' \leq N \end{array}, \tag{6.72}$$

onde o índice $l$ indica não apenas a posição dos blocos de $\widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}$, que contribuem para um determinado bloco de $\mathbf{U}_{B2D}$, mas também os intervalos em que é feita a soma sobre $k$, segundo o esquema:

$$0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad \text{para} \quad l=0 \quad \text{e} \quad \frac{N}{2} \leq k \leq N \quad \text{para} \quad l=1. \tag{6.73}$$

Assim, uma vez que $\widetilde{\mathbf{U}}^{(0,1)}_{B2D} = \widetilde{\mathbf{U}}^{(0,1)}_{B2D} = 0$ temos,

$$\mathbf{U}^{(i,j)}_{B2D}(n',n) = \sum_{k} \langle n' \,|k\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}^{(j,j)}_{B2D}(k,n). \tag{6.74}$$

Usando os elementos $\widetilde{\mathbf{U}}^{(i,j)}_{B2D}(k,n)$, dados pela eq. 6.51, e os coeficientes de transformação de bases, chegamos à forma explícita para os elementos desses blocos:

$$\mathbf{U}^{(i,j)}_{B2D}(n',n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k} \exp\left\{ \frac{2\pi i}{N}\left(n' + \frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{4\pi i}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right) \right\}. \tag{6.75}$$

Fazendo-se $j = 0$ e a transformação de índices $k' = k - \frac{N}{2}$ quando $j = 1$, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^{(0,j)}_{B2D}(n',n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left\{ \frac{2\pi i}{N}\left(n' - 2n - \frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right) \right\} \\ \mathbf{U}^{(1,j)}_{B2D}(n',n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left\{ \frac{2\pi i}{N}\left(n' - 2n - \frac{1}{2}\right)\left(k'+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right) \right\} \end{array} \right. , \tag{6.76}$$

que, comparadas, levam a:

$$\mathbf{U}_{B2D}^{(i,1)}(n', n) = -\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,0)}(n', n). \tag{6.77}$$

Executando-se as somatórias do conjunto de equações 6.77 de forma explícita por Saraceno [41]:

$$\mathbf{U}_{B2D}^{(0,j)}(n', n) = \frac{\left(i - e^{\pi i n'}\right)}{2\sqrt{N} sen\left\{\frac{\pi}{N}\left(n' - 2n - \frac{1}{2}\right)\right\}}. \tag{6.78}$$

A forma analítica para os elementos que compôem as matrizes / $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,j)}$, é dada pelas duas equações acima, embora exata, não é conveniente para propósitos computacionais, sendo preferível expressá-la em termos de matrizes de Fourier semi-inteiras. Notamos também que as funções $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,j)}(n', n)$ têm um valor máximo quando $n' = 2n$, fato que reflete o comportamento clássico do sistema.

### 6.4.2 Operadores $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4G}$ e $\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}$

De forma similar ao que foi feito acima para o propagador do $B2D$, devido à estrutura dos operadores $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}$, $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}$ e $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4E}$, os propagadores desses três mapas, na representação de posição, são colocados na forma de blocos:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{B4D}^{(ij,lm)}(n_1', n_2', n_1, n_2) = \sum\limits_{l',m'=0,1} \sum\limits_{k_1,k_2} \langle n_1', n_2' \,|k_1, k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(l',m',lm)}(k_1, k_2, n_1, n_2) \\ \mathbf{U}_{B4G}^{(ij,lm)}(n_1', n_2', n_1, n_2) = \sum\limits_{l',m'=0,1} \sum\limits_{k_1,k_2} \langle n_1', n_2' \,|k_1, k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(l',m',lm)}(k_1, k_2, n_1, n_2) \\ \mathbf{U}_{B4E}^{(ij,lm)}(n_1', n_2', n_1, n_2) = \sum\limits_{l',m'=0,1} \sum\limits_{k_1,k_2} \langle n_1', n_2' \,|k_1, k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E}^{(l',m',lm)}(k_1, k_2, n_1, n_2) \end{cases}, \tag{6.79}$$

onde os limites entre os quais as somatórias sobre os $k_1$ e $k_2$ são executadas, dependem do valor dos índices $i$ e $j$ ser 0 ou 1.

Como as matrizes dos propagadores desses mapas na representação mista são tais que:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(l'm',lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2)=0 \quad \text{para} \quad l'\neq l \quad \text{ou} \quad m'\neq m, \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(l'm',lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2)=0 \quad \text{para} \quad l'\neq l \quad \text{ou} \begin{cases} m'=m & \text{para} \quad l=0 \\ m'\neq m & \text{para} \quad l=1 \end{cases}, \\ \widetilde{\mathbf{U}}_{B4E}^{(l'm',lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2)=0 \quad \text{para} \quad l'\neq m \quad \text{ou} \quad m'\neq l, \end{cases} \tag{6.80}$$

apenas um bloco da representação mista contribui para cada bloco das representações de posição. Disto, dos elementos do propagador do mapa $B2D$ na representação mista e do conjunto de eqs. 6.73, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{B4D}^{(ij,lm)}(n_1',n_2',n_1,n_2) &= \sum_{k_1,k_2} \langle n_1',n_2' \,|k_1,k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(lm,lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2) \\ &= \sum_{k_1} \langle n_1' \,|k_1\rangle \, \mathbf{U}_{B2D}^{(l,m)}(k_1,n_1) \sum_{k_2} \langle n_2' \,|k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(l,m)}(k_2,n_2) \\ &= \delta_{l,m} \widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,l)}(n_1',n_1) \mathbf{U}_{B2D}^{(j,l)}(n_2',n_2), \end{aligned} \tag{6.81}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{B4G}^{(ij,lm)}(n_1',n_2',n_1,n_2) &= \sum_{k_1,k_2} \langle n_1',n_2' \,|k_1,k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(lm',lm)}(k_1,k_2,n_1,n_2) \\ &= \sum_{k_1} \langle n_1' \,|k_1\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(l,m')}(k_1,n_1) \sum_{k_2} \langle n_2' \,|k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(l,m)}(k_2,n_2) \\ &= \delta_{l,m'} \delta_{l,m} \widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,l)}(n_1,n_1) \widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(j,l)}(n_2,n_2), \end{aligned} \tag{6.82}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{B4G}^{(ij,lm)}(n_1',n_2',n_1,n_2) &= \sum_{k_1,k_2} \langle n_2',n_1' \,|k_1,k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4G}^{(lm,ml)}(k_1,k_2,n_1,n_2) \\ &= \sum_{k_1} \langle n_1' \,|k_1\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(l,m)}(k_1,n_1) \sum_{k_2} \langle n_2' \,|k_2\rangle \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(m,l)}(k_2,n_2), \\ & \delta_{l,m} \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,m)}(n_1',n_1), \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(j,l)}(n_2',n_2). \end{aligned} \tag{6.83}$$

Assim, vemos que os blocos que compõem os propagadores dos mapas $B4D$, $B4G$ e $B4E$, na representação de coordenadas, podem ser obtidos através de combinações dos blocos que compõem o propagador do mapa $B2D$, na mesma representação.

## 6.5 Propagador do Mapa $B4L$

O mapa clássico $B4L$ foi definido a partir da composição de duas transformações clássicas. Este fato leva ao uso de um processo de obtenção de seu propagador na representação de coordenadas ligeiramente diferente daquele empregado até aqui. Dado que $B4L = SL \circ B4D$, o propagador desse mapa assumirá a forma:

$$\mathbf{U}_{B4L} = \widehat{\mathbf{U}}_{SL} \widehat{\mathbf{U}}_{B4D}, \tag{6.84}$$

onde $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$ é o propagador do mapa $B4D$ e $\mathbf{U}_{SL}$ o propagador quântico associado à transformação clássica $SL$. Da equação acima, podemos escrever os elementos de matriz do propagador quântico do mapa $B4L$, na representação de coordenadas, como o produto de matrizes:

$$\mathbf{U}_{B4L}(n_2', n_1', n_1, n_2) = \sum_{k_1, k_2 = 0}^{N-1} \langle n_2', n_1' | \, \widehat{\mathbf{U}}_{SL} \, | k_1, k_2 \rangle \langle k_2, k_1 | \, \widehat{\mathbf{U}}_{B4D} \, | n_1, n_2 \rangle \, , \tag{6.85}$$

onde podemos reconhecer em $\langle k_2, k_1 | \, \widehat{\mathbf{U}}_{B4D} \, | n_1, n_2 \rangle = \widehat{\mathbf{U}}_{B4D}(k_1 k_2, n_1 n_2)$ os elementos de matriz do propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$ na representação mista.

Na equação acima, notamos que os índices referentes aos autoestados de posição e momento aparecem em lados diferentes dos elementos de matriz dos operadores $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$ e $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$, embora ambos estejam em uma representação mista. Isto ocorre porque, no caso do propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$, a matriz atua em um vetor de estado na representação de posição, resultando em um vetor na representação de momento, enquanto no caso do propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$, a matriz atua em um vetor na representação de momento, resultando em um vetor na representação de posição.

### 6.5.1 Operador $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$

No capítulo 3, foi mostrado como a transformação clássica $SL : M_4 \to M_4$ é o resultado de duas operações geométricas não comutáveis efetuadas sobre um ponto pertencente ao domínio $M_4$. Dessa forma, o operador $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$ será dado pela composição,

$$\widehat{\mathbf{U}}_{SL} = \widehat{\mathbf{T}}_1 \widehat{\mathbf{S}}_L, \tag{6.86}$$

onde $\widehat{\mathbf{S}}_L$ e $\widehat{\mathbf{T}}_1$ são operadores quânticos associados respectivamente às operações geométricas de rotação e translação de um ponto pertencente a $M_4$. Da equação acima podemos obter a matriz da representação mista de $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$, como

$$\langle n_2, n_1 | \widehat{\mathbf{U}}_{SL} | k_1, k_2 \rangle = \sum_{n_2', n_1'=0}^{N-1} \langle n_2, n_1 | \widehat{\mathbf{T}}_1 | n_1', n_2' \rangle \langle n_2', n_1' | \widehat{\mathbf{S}}_L | k_1, k_2 \rangle , \tag{6.87}$$

onde a relação de fechamento para a base $\{|n_1', n_2'\rangle\}$ foi intercalada entre $\widehat{\mathbf{T}}_1$ e $\widehat{\mathbf{S}}_L$ com o propósito de tirar proveito das analogias geométricas entre esses operadores e a atuação da matriz $\mathbf{S}_L$ e do vetor $\mathbf{T}_1$ sobre um ponto do conjunto $M_q$.

Para determinarmos a atuação do operador $\widehat{\mathbf{S}}_L$ sobre os vetores que compõem a base $\{|n_1, n_2\rangle\}$, lembramos que o efeito da matriz clássica $\mathbf{S}_L$ sobre um ponto de $\mathbf{q} = (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2})$ do plano $M_q$ consiste em intercambiar as coordenadas $q_1$ e $q_2$, trocando o sinal de $q_2$. Com o intuito de que estes aspectos geométricos da transformação clássica sejam preservados pelo operador quântico $\widehat{\mathbf{S}}_L$, impomos que o vetor resultante da atuação deste último sobre um vetor arbitrário da base de autoestados dos operadores de posição, isto é,

$$|\alpha\rangle = \widehat{\mathbf{S}}_L |n_1, n_2\rangle , \tag{6.88}$$

seja também ele um autoestado dos operadores $\widehat{\mathbf{q}}_1$ e $\widehat{\mathbf{q}}_2$, tal que:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{q}}_1 |\alpha\rangle = -q_{n_2} |\alpha\rangle \\ \widehat{\mathbf{q}}_2 |\alpha\rangle = q_{n_1} |\alpha\rangle \end{cases} . \tag{6.89}$$

Das duas equações acima, e da condição anti-periódica da base $\{|n_1, n_2\rangle\}$, é trivial determinarmos o vetor de estado $|\alpha\rangle$, ou seja:

$$\widehat{\mathbf{S}}_L |n_1, n_2\rangle = - |N - n_2, n_1, \rangle . \tag{6.90}$$

Na transformação clássica $SL$, a operação geométrica sobre um ponto do domínio $M_4$, representada pela adição do vetor $\mathbf{T_1}$, tem seu análogo quântico na atuação do operador $\widehat{\mathbf{T}}_1$ sobre um vetor da base $\{|n_1, n_2\rangle\}$.

Uma vez que a translação clássica $\mathbf{T}_1$ é a composição das translações $T_p$ e $T_q$ que atuam nas coordenadas $p_1$ e $q_1$, eq. 3.13, temos

$$\widehat{\mathbf{T}}_1 = \widehat{\mathbf{T}}_q \widehat{\mathbf{T}}_p, \tag{6.91}$$

onde os operadores $\widehat{\mathbf{T}}_q$ e $\widehat{\mathbf{T}}_p$ são casos particulares que comutam de operadores de translação atuando em autoestados de posição e momento [43], e são dados por

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{T}}_q = e^{2\pi \widehat{p}_1} \\ \widehat{\mathbf{T}}_p = e^{2\pi \widehat{q}_1} \end{cases} , \tag{6.92}$$

de forma que

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{T}}_q |n_1, n_2\rangle = |n_1 + N, n_2\rangle = - |n_1, n_2\rangle \\ \widehat{\mathbf{T}}_p |k_1, k_2\rangle = |k_1 + N, k_2\rangle = - |k_1, k_2\rangle \end{cases} , \tag{6.93}$$

dado que as transformações clássicas correspondentes aos operadores $\widehat{\mathbf{T}}_q$ e $\widehat{\mathbf{T}}_p$, são translações por uma unidade de comprimento, respectivamente, ao longo dos eixos $\widehat{q}$ e $\widehat{p}$. Como pode-se mostrar que $\widehat{\mathbf{T}}_p |n_1, n_2\rangle = - |n_1, n_2\rangle$ chega-se a:

$$\widehat{\mathbf{T}}_1 |n_1, n_2\rangle = -\widehat{\mathbf{T}}_p |n_1 + N, n_2\rangle = - |n_1, n_2\rangle . \tag{6.94}$$

Isto é, o operador $\widehat{\mathbf{T}}_1$ não tem efeito sobre os autoestados $|n_1, n_2\rangle$.

Da composição dos operadores $\widehat{\mathbf{S}}_L$ e $\widehat{\mathbf{T}}_1$, e da condição anti-periódica dos vetores da base $\{|n_1, n_2\rangle\}$, obtemos

$$\widehat{\mathbf{U}}_{\mathbf{SL}} |n_1, n_2\rangle = \widehat{\mathbf{T}}_1 \widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{L}} |n_1, n_2\rangle = -\widehat{\mathbf{T}}_1 |N - n_2, n_1\rangle = |N - n_2, n_1\rangle . \tag{6.95}$$

A equação acima mostra que o resultado líquido da aplicação sucessiva dos operadores $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{L}}$ e $\widehat{\mathbf{T}}_1$ sobre um vetor $|n_1, n_2\rangle$ é o intercâmbio dos índices $n_1$ e $n_2$.

O caráter hermitiano do operador $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$ leva a:

$$\langle n_2, n_1| \widehat{\mathbf{U}}_{SL} = - \langle n_1, N - n_2| , \tag{6.96}$$

o que permite determinar com facilidade os elementos de matriz de $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$ na representação mista como:

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{SL}(n_1, n_2, k_1, k_2) = \langle n_2, n_1| \widehat{\mathbf{U}}_{SL} |k_1, k_2\rangle = \langle n_1, N - n_2 |k_1, k_2\rangle . \tag{6.97}$$

Estes últimos são colocados em termos de elementos de matriz de Fourier semi-inteiras e são dados por:

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{SL}(n_1, n_2, k_1, k_2) = \frac{1}{N} \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}\left[\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\left(k_2 + \frac{1}{2}\right) + \left(N - n_2 + \frac{1}{2}\right)\left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} . \tag{6.98}$$

Observamos a partir das duas últimas equações que os elementos da matriz $\widetilde{\mathbf{U}}_{SL}$ são uma forma modificada do complexo conjugado dos elementos da matriz de transformação da base $\{|n_1, n_2\rangle\}$ na base $\{|k_1, k_2\rangle\}$ , eq. 6.23, onde ocorre uma permutação dos índices $n_1$ e $n_2$, e a substituição de $n_2$ por $N - n_2$, ou seja:

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{SL}(n_1, n_2, k_1, k_2) = G^{\dagger}_{n_1, k_2} G^{\dagger}_{N - n_2, k_1} . \tag{6.99}$$

### 6.5.2 Operador $\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}$ na Representação de Posição

Com a determinação feita acima, eq. 6.85, dos elementos de matriz para o operador $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$ na representação mista, podemos interpretar a eq. 6.85, que determina os elementos de matriz do propagador quântico do mapa $B4L$ na representação de posição, como uma forma modificada da equação que fornece os elementos de matriz do mapa $B4D$ na representação de posição.

Assim, a representação de posição do propagador em ambos os mapas, pode ser construída a partir da multiplicação da matriz $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}$ por uma outra matriz. No caso do mapa $B4D$, os elementos dessa matriz são dados por $\langle n_2', n_1' \,| k_1, k_2\rangle$, enquanto no caso do mapa $B4L$ os elementos são dados por $\langle n_1', N - n_2' \,| k_1, k_2\rangle$.

De maneira semelhante àquela empregada para os outros mapas, para obtermos os elementos de matriz do operador $\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}$, na representação de posição, fazemos sua decomposição em blocos:

$$\mathbf{U}_{B4L}^{(ij,lm)}(n_1', n_2', n_1, n_2) = \sum_{l',m'} \sum_{k_1,k_2} \langle n_2', n_1' | \, \widehat{\mathbf{U}}_{SL} \, | k_1, k_2\rangle \langle k_2, k_1 | \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(l'm',lm)} \, | n_1, n_2\rangle \tag{6.100}$$

ou, usando a equação 6.98:

$$\mathbf{U}_{B4L}^{(ij,lm)}(n_1', n_2', n_1, n_2) = \sum_{l',m'} \sum_{k_1,k_2} \langle n_1', N - n_2' | \, k_1, k_2\rangle \langle k_2, k_1 | \, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(l'm',lm)} \, | n_1, n_2\rangle \, . \tag{6.101}$$

Da mesma maneira que nos outros mapas, os pares de índices $i$, $j$, $l$ e $m$, além de determinarem a posição de um bloco da matriz $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}$, delimitam o intervalo em que são feitas as somatórias sobre $k_1$ e $k_2$. Assim, da estrutura de blocos diagonal de $\widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}$, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{B4L}^{(ij,lm)}(n_1', n_2', n_1, n_2) &= \sum_{k_1,k_2} \langle n_1', N - n_2' |\, k_1, k_2 \rangle \langle k_2, k_1 |\, \widetilde{\mathbf{U}}_{B4D}^{(lm,lm)} \,| n_1, n_2 \rangle \\ &= \sum_{k_1} \langle n_1' |\, k_2 \rangle\, \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(l,m)}(k_2, n_2) \sum_{k_2} \langle N - n_2' |\, k_1 \rangle\, \widetilde{\mathbf{U}}_{B2D}^{(l,m)}(k_1, n_1) \\ &= \delta_{l,m} \widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(i,l)}(n_1', n_2) \widehat{\mathbf{U}}_{B2D}^{(j,l)}(N - n_2', n_1). \quad (6.102)\end{aligned}$$

Comparando-se agora os elementos das matrizes $\mathbf{U}_{B4D}^{(ij,lm)}$ com os elementos das matrizes $\mathbf{U}_{B4L}^{(ij,lm)}$, vemos que a diferença entre as matrizes dos propagadores quânticos do $B4D$ e $B4L$ na representação de posição, ocorre apenas na forma de ordenamento das colunas e linhas, expressa pela permutação dos índices $n_1$ e $n_2$. Sendo esta diferença introduzida pela atuação do operador $\widehat{\mathbf{U}}_{SL}$ que, em sua representação mista, é uma forma modificada da matriz de Fourier semi-inteira $\mathbf{G}^{\dagger N\times N}$.

# 7 Características Espectrais dos Propagadores

## 7.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados e analisados alguns resultados numéricos sobre o tipo de estatística de primeiros vizinhos obedecidas pelos espectros de autoângulos dos propagadores dos quatro mapas que atuam no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_4$, e, por último a influência das simetrias presentes em cada mapa sobre esta estatística. Também será feita a construção dos autovetores dos propagadores $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{B4D}}$ e $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{B4L}}$, partindo das transformações de simetria presentes na definição da dinâmica clássica desses dois mapas, permitindo que seja analizado o surgimento dadegenerescência do espectro de autoângulos no mapa direto e o seu desaparecimento no espectro do mapa loxodrômico.

## 7.2 Simetrias e Autovetores do $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{B4D}}$ e $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{B4L}}$

Como foi visto no capítulo 5, a dinâmica clássica do mapa $B4D$ é invariante por um conjunto de sete transformações. Estas operações de simetria são: as transformações $R_1$ e $R_2$ que atuam separadamente em cada um dos pares de coordenadas, a composição destas duas, a transformação de permutação de índices $P$ e as composições $R_1P$ e $R_2P$. Isto faz com que o propagador desse mapa comute com cada um dos operadores correspondentes a essas transformações de simetria.

Para obter os autoestados do propagador desse mapa com paridade definida em relação a cada um de seus operadores de simetria, o primeiro passo é lembrarmos que as relações de comutação das transformações de simetria clássicas são preservadas pelos operadores quânticos correspondentes. Para obter operadores que façm a redução do propagador do mapa $B4D$, simultaneamente em relação a todas as simetrias identificadas nesse, contruímos a tabela abaixo que fornece, juntamente com o operador identidade $\hat{\mathbf{I}}$, o resultado de todas as composições possíveis entre operadores de simetria do propagador do $B4D$:

| | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{P}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{P}}$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ |
| $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{P}}$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ |
| $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ |
| $\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\hat{\mathbf{I}}$ |

. (7.1)

Usando-se esta tabela, faz-se uma associação unívoca entre estes operadores de cada uma das operações de simetria atuando sobre um quadrado no plano:

| | | |
|---|---|---|
| $\hat{\mathbf{R}}_1\hat{\mathbf{P}}$ | $\longleftrightarrow$ | $C_4^1$ |
| $\hat{\mathbf{D}}^4$ | $\longleftrightarrow$ | $C_4^2$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_2\hat{\mathbf{P}}$ | $\longleftrightarrow$ | $C_4^3$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_1$ | $\longleftrightarrow$ | $\sigma_v$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_2$ | $\longleftrightarrow$ | $\sigma_h$ |
| $\hat{\mathbf{D}}^4\hat{\mathbf{P}}$ | $\longleftrightarrow$ | $\sigma_p$ |
| $\hat{\mathbf{P}}$ | $\longleftrightarrow$ | $\sigma_s$ |

, (7.2)

onde $C_4^1$, $C_4^2$ e $C_4^3$ são operações de rotação em torno da origem, respectivamente, por $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ de volta, $\sigma_v$ e $\sigma_h$ são reflexões em relação aos eixos $x$ e $y$, e $\sigma_p$ e $\sigma_s$ são operações de reflexão em relação às diagonais principal e secundária.

Essa associação mostra que existe um isomorfismo entre os operadores de simetria do propagador do mapa direto e o grupo $C_{4v}$, formado pelas operações de simetria sobre um quadrado no plano.

Para esse grupo, pode-se mostrar a existência de quatro representações irredutíveis de dimensão um e uma representação de duas dimensões do grupo $C_{4v}$[44]. A tabela abaixo contém os caracteres de cada elemento do $C_{4v}$ nas representações irredutíveis de uma dimensão $A_1$, $A_2$, $B_1$, e $B_2$, e na representação irredutível de dimensão dois $E$:

| | $I$ | $C_4^1$ | $C_4^2$ | $C_4^3$ | $\sigma_h$ | $\sigma_v$ | $\sigma_p$ | $\sigma_s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $A_2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| $B_1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $B_2$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 |
| $E$ | 2 | 0 | $-2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

. (7.3)

Relacionado a cada uma das representações de $ondeocaráterdecadaelementodogrupo$C$_4$ em uma representação é multiplicado pelo operador de simetria correspondente e por uma constante de normalização.

Os autoestados do mapa direto são construídos por combinações lineares dos produtos

$$\left|\epsilon_{n'}^{\pm}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{\pm}\right\rangle, \tag{7.4}$$

onde $|\epsilon_n^{\pm}\rangle$ são autoestados do propagador do mapa do padeiro comum $\hat{\mathbf{B}}$ com paridade definida em relação ao operador de simetria $\hat{\mathbf{R}}$, isto é,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{B}}\,|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\pm}\rangle = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\epsilon_{\mathbf{n}}^{\pm}}\,|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\pm}\rangle \\ \hat{\mathbf{R}}\,|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\pm}\rangle = \pm\,|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\pm}\rangle \end{cases}, \tag{7.5}$$

levando os autovalores do mapa direto a serem a soma de dois autovalores do $B2D$, $\epsilon_{n'}^{\pm} + \epsilon_{n}^{\pm}$. Aplicando os operadores definidos acima para todas as combinações de produtos $\left|\epsilon_{n'}^{\pm}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{\pm}\right\rangle$, obtemos:

$$\begin{cases} \mathbf{\hat{A}_1}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{+}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{+}\right\rangle + \left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{+}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{A}_1}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{\mathbf{i}}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\mathbf{j}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i=j=-1 \text{ e } i\neq j \end{cases}, \tag{7.6}$$

$$\begin{cases} \mathbf{\hat{A}_2}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{-}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{-}\right\rangle - \left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{-}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{A}_2}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{\mathbf{i}}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\mathbf{j}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i=j=1 \text{ e } i\neq j \end{cases}, \tag{7.7}$$

$$\begin{cases} \mathbf{\hat{B}_1}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{+}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{+}\right\rangle - \left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{+}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{B}_1}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{\mathbf{i}}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\mathbf{j}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i=j=-1 \text{ e } i\neq j \end{cases}, \tag{7.8}$$

$$\begin{cases} \mathbf{\hat{B}_2}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{-}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{-}\right\rangle + \left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{-}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{B}_2}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{\mathbf{i}}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{\mathbf{j}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i=j=1 \text{ e } i\neq j \end{cases}, \tag{7.9}$$

e

$$\mathbf{\hat{E}}\left|\epsilon_{\mathbf{n'}}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{\mathbf{n}}^{+}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para todos } i \text{ e } j. \tag{7.10}$$

As equações acima envolvendo os operadores $\mathbf{\hat{A}_1}$, $\mathbf{\hat{A}_2}$, $\mathbf{\hat{B}_1}$ e $\mathbf{\hat{B}_2}$ fornecem quatro conjuntos de autoestados do propagador do mapa direto com paridade definida em relação a todos os operadores de simetria deste mapa. Assim, temos três pares de conjuntos de autoestados do propagador do mapa direto com paridade definida em relação a todos os seus operadores de simetria, obtidos primeiramente por Vallejos[42],:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{+}\right\rangle + \left|\epsilon_{n}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{+}\right\rangle - \left|\epsilon_{n}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\right) \end{cases}, \tag{7.11}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon_{n'}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle + \left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{n'}^{-}\right\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon_{n'}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle - \left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{n'}^{-}\right\rangle\right) \end{cases}, \tag{7.12}$$

e

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle+\left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle-\left|\epsilon_{n}^{-}\right\rangle\left|\epsilon_{n'}^{+}\right\rangle\right) \end{cases} \tag{7.13}$$

No caso do $B4L$, sua dinâmica clássica é definida como a composição entre uma transformação de rotação no domínio $M_4$ e o mapa direto. Ou seja,

$$B4L(p_1, p_2, q_1, q_2) = S_L \circ B4D(p_1, p_2, q_1, q_2), \tag{7.14}$$

onde a transformação $S_L$ pode ser colocada na forma da composição da transformação $R_1$ e $P$, ou seja,

$$S_L(p_1, p_2, q_1, q_2) = R_1 \circ P \circ (p_1, p_2, q_1, q_2). \tag{7.15}$$

Isso faz com que exista uma quebra de simetria do mapa $B4L$ em relação ao mapa $B4D$, isto é, o número de operações de simetria que comutam com o propagador do $B4L$ é diminuído em relação àqueles que comutam com o propagador do $B4D$. Dos sete operadores de simetria que comutam com o mapa direto sobram apenas o operador $\hat{\mathbf{D^4}}$ e as combinações $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{P}}$ e $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{P}}$, que comutam com o propagador do mapa loxodrômico, levando à tabela de multiplicação abaixo:

| | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D^4}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{P}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D^4}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{P}}$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D^4}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ |
| $\hat{\mathbf{D^4}}$ | $\hat{\mathbf{D^4}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{P}}$ |
| $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{I}}$ | $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{P}}$ | $\hat{\mathbf{D^4}}$ |

. (7.16)

Analogamente ao que foi feito para o conjunto de operações de simetria do propagador do mapa direto, fazemos a associação entre as operações de simetria do

B4L e as operações $C_4^1$ $C_4^2$ e $C_4^3$,

$$\begin{array}{|lcr|}\hline \mathbf{\hat{R}_1\hat{P}} & \longleftrightarrow & C_4^1 \\ \hline \mathbf{\hat{D}^4} & \longleftrightarrow & C_4^2 \\ \hline \mathbf{\hat{R}_2\hat{P}} & \longleftrightarrow & C_4^3 \\ \hline \end{array} \quad . \tag{7.17}$$

Assim, da mesma maneira que existe um isomorfismo entre o conjunto de operações de simetria do mapa direto e o grupo $C_{4v}$, esta tabela mostra que existe um isomorfismo entre o conjunto de operações de simetria do $B4L$ e o grupo $C_4$.

Para esse grupo existem quatro representações irredutíveis de uma dimensão, obedecendo a seguinte tabela de caracteres[44]:

| | $I$ | $C_4^1$ | $C_4^2$ | $C_4^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $B$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $E_1$ | 1 | $i$ | $-1$ | $-i$ |
| $E_2$ | 1 | $-i$ | $-1$ | $i$ |

(7.18)

Partindo dessa tabela de caracteres do $C_4$, construímos o conjunto de operadores de simetrização:

$$\begin{cases} \mathbf{\hat{A}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{2}}}\left(\mathbf{\hat{I}} + \mathbf{\hat{R}_1\hat{P}} + \mathbf{\hat{D}}^{\mathbf{4}} + \mathbf{\hat{R}_2\hat{P}}\right) \\ \mathbf{\hat{B}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{2}}}\left(\mathbf{\hat{I}} - \mathbf{\hat{R}_1\hat{P}} + \mathbf{\hat{D}}^{\mathbf{4}} - \mathbf{\hat{R}_2\hat{P}}\right) \\ \mathbf{\hat{E}_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{2}}}\left(\mathbf{\hat{I}} + \mathbf{i\hat{R}_1\hat{P}} - \mathbf{\hat{D}}^{\mathbf{4}} - \mathbf{i\hat{R}_2\hat{P}}\right) \\ \mathbf{\hat{E}_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{2}}}\left(\mathbf{\hat{I}} - \mathbf{i\hat{R}_1\hat{P}} - \mathbf{\hat{D}}^{\mathbf{4}} + \mathbf{i\hat{R}_2\hat{P}}\right) \end{cases} . \tag{7.19}$$

Aplicando-se cada um dos operadores acima a todos os produtos dos autoestados do mapa do padeiro comum temos:

$$\begin{cases} \mathbf{\hat{A}}\left|\epsilon^+_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^+_{\mathbf{n}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{2}}}\left(\left|\epsilon^+_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^+_{\mathbf{n}}\right\rangle + \left|\epsilon^+_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^+_{\mathbf{n'}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{A}}\left|\epsilon^-_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^-_{\mathbf{n}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{2}}}\left(\left|\epsilon^-_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^-_{\mathbf{n}}\right\rangle - \left|\epsilon^-_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^-_{\mathbf{n'}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{A}}\left|\epsilon^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{\mathbf{j}}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i \neq j \end{cases} , \tag{7.20}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{\hat{B}}\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n}}\right\rangle - \left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{B}}\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle + \left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{B}}\left|\epsilon^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{\mathbf{j}}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i \neq j \end{array}\right. , \tag{7.21}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{\hat{E}_1}\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle - \mathbf{i}\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{E}_1}\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle + \mathbf{i}\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{E}}\left|\epsilon^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{\mathbf{j}}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i = j \end{array}\right. . \tag{7.22}$$

e

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{\hat{E}_2}\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle + \mathbf{i}\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{E}_2}\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle - \mathbf{i}\left|\epsilon^{+}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{\mathbf{n}}\right\rangle\right) \\ \mathbf{\hat{E}_2}\left|\epsilon^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n'}}\right\rangle\left|\epsilon^{\mathbf{j}}_{\mathbf{n}}\right\rangle = \mathbf{0} \text{ para } i = j \end{array}\right. . \tag{7.23}$$

As equações acima envolvendo os operadores $\mathbf{\hat{A}}$, $\mathbf{\hat{B}}$, $\mathbf{\hat{E}_1}$ e $\mathbf{\hat{E}_2}$ fornecem seis conjuntos de autoestados do propagador do $B4L$ com paridade definida em relação a todos os operadores de simetria deste mapa. Assim temos três pares de conjuntos de autoestados do propagador do mapa loxodrômico[42], com paridade definida em relação a cada um dos operadores de simetria do propagador desse mapa:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{n}\right\rangle + \left|\epsilon^{+}_{n}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{n}\right\rangle - \left|\epsilon^{+}_{n}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\right) \end{array}\right. , \tag{7.24}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon^{-}_{n'}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle + \left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{n'}\right\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon^{-}_{n'}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle - \left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{n'}\right\rangle\right) \end{array}\right. \tag{7.25}$$

e

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle + i\left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle - i\left|\epsilon^{-}_{n}\right\rangle\left|\epsilon^{+}_{n'}\right\rangle\right) \end{array}\right. . \tag{7.26}$$

Os conjuntos de equações 7.11 a 7.12 e 7.24 a 7.26, mostram como são formados os autoestados dos mapas $B4D$ e $B4L$ a partir de combinações lineares de produtos de autoestados do propagador do $B2D$. Na seção 7.5 isto será usado para analizar a presença de degenerescência no espectro do mapa $B4D$, seu desaparecimento no mapa $B4L$, assim como as conseqüências para o tipo de distribuição estatística seguida pelos espectros de autoângulos desses mapas.

## 7.3 Espectros de Autoângulos e Degenerescência

Uma das principais características analisadas em sistemas quânticos é o conjunto de autovalores ou o espectro do seu operador hamiltoniano. Nos sistemas aqui estudados, a ausência de um operador hamiltoniano desloca essa análise para o espectro de autovalores dos operadores de propagação a tempo discreto.

O caráter unitário desses operadores confina o conjunto de autovalores ao círculo unitário do plano complexo. Como exemplo disso, temos o conjunto de autovalores do propagador do mapa $B2D$ dados pela equação:

$$\widehat{\mathbf{U}}_{B2D} \left| \epsilon_n \right\rangle = e^{i\epsilon_n} \left| \epsilon_n \right\rangle , \tag{7.27}$$

com $n = 0, 1 \cdots N - 1$, o que leva à definição do conjunto $\epsilon_{B2D} \equiv \{\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots \epsilon_{N-1}\}$ como o espectro de autoângulos desse mapa, onde os autovetores $|\epsilon_n\rangle$ são indexados aqui sem levar em conta a existência de simetrias do propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$.

De forma semelhante, podemos definir os espectros contendo os autoângulos relativos aos propagadores quânticos dos mapas atuando no domínio clássico $M_4$. Tomando como exemplo o propagador do mapa $B4D$, temos

$$\widehat{\mathbf{U}}_{B4D} \left| \epsilon_{n',n} \right\rangle = e^{i\epsilon_{n',n}} \left| \epsilon_{n',n} \right\rangle , \tag{7.28}$$

onde $n', n = 0, 1 \cdots N - 1$, com o espectro de autoângulos deste mapa definido pelo conjunto $\epsilon_{B4D} \equiv \{\epsilon_{n',n}\}$, sendo os dois índices $n'$ e $n$ usados como forma de ressaltar a construção do propagador desse mapa como o produto direto de dois propagadores do mapa $B2D$. Da mesma maneira obtém-se os conjuntos $\epsilon_{B4G}$, $\epsilon_{B4E}$ e $\epsilon_{B4L}$, que representam os espectros de autoângulos dos mapas $B4G$, $B4E$ e $B4L$. Deve-se notar que esses espectros podem ser obtidos de forma exata até o limite de precisão numérica das rotinas empregadas em sua diagonalização. O que representa uma vantagem do mapa do padeiro quântico, assim como de suas generalizações, em relação a outros sistemas onde aparece a necessidade do truncamento das matrizes que os representam.

Exemplos desses espectros, obtidos a partir da diagonalização numérica[45] do propagador do mapa $B2D$ na representação de posição, são apresentados na figura 7.1. Nesta figura, que reproduz os resultados obtidos por Saraceno [41], espectros do propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$, atuando em espaços de Hilbert de dimensão 32, 62 e 128, são representados por bandas horizontais de comprimento $2\pi$, com os autoângulos indicados por linhas verticais.

As dificuldades na determinação teórica e análise individual dos níveis de energia de um sistema quântico, cujo análogo clássico tem um número de graus de liberdade muito grande, leva à idéia de uma abordagem estatística das características dos espectros de energia desses sistemas. Na quantização de mapas conservativos, essa abordagem desloca-se para a análise das características estatísticas do espectro de autoângulos dos propagadores.

Nesse contexto, uma característica importante a ser estudada para cada mapa é o tipo de distribuição estatística seguida pelos espaçamentos de primeiros vizinhos dos espectros de autoângulos. Isto é feito partindo-se do espectro ordenado de um mapa, isto é, $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{N-1}\}$, onde $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n+1}$, e definindo-se o conjunto de espaçamentos desse espectro $\{s_1, s_2 \cdots s_{d-1}\}$, onde $s_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$. A partir desse conjunto, construímos um histograma, onde $H(s,l)$ é igual à fração de elementos do conjunto de espaçamentos, situados no intervalo entre $s$ e $s + 2\pi/l$. Tomando-se o

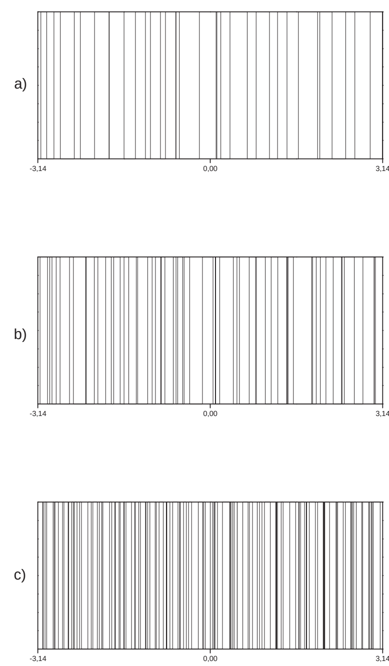


Figura 7.1: Espectros do Propagador $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$ para: a) $N = 32$ b) $N = 64$ c) $N = 128$

limite

$$P(s) = \lim_{d,l \to \infty} H_d(s,l), \tag{7.29}$$

isto é, usando-se um espectro com o maior número de autoângulos possíveis, teremos uma curva que se aproxima da distribuição de probabilidade contínua de encontramos um par de autoângulos vizinhos com espaçamento situado entre $s$ e $s + ds$.

Na figura 7.2, apresentamos exemplos de histogramas obtidos a partir de espectros de autoângulos do mapa $B2D$ quando o espaço de Hilbert tem dimensões iguais a 900, 1296 e 1600. E, na figura 7.3, são apresentados os histogramas obtidos a partir de espectros dos propagadores dos mapas $B4D$, $B4G$, $B4E$ e $B4L$, atuando em um espaço com dimensão 1600.

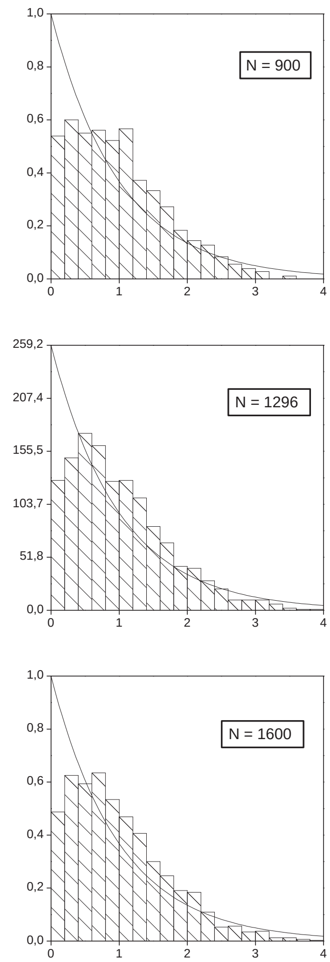


Figura 7.2: Histogramas para os Espectros Completos do $\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}$

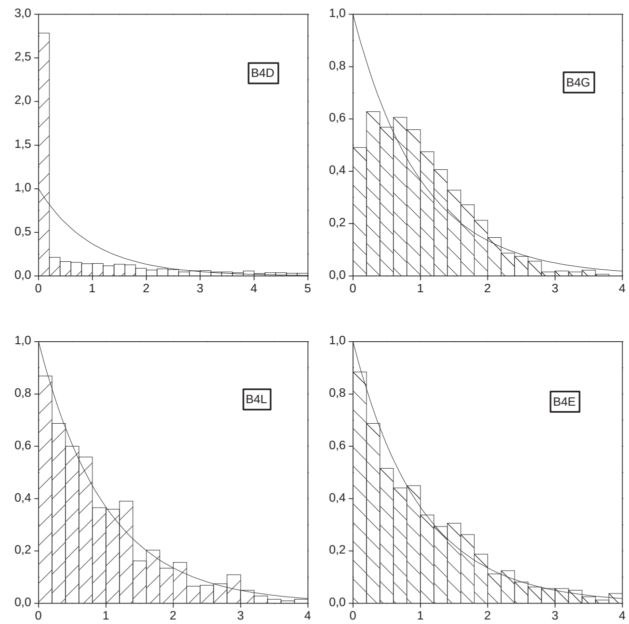


Figura 7.3: Histogramas dos Operadores $\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4G}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}$ e $\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}$ para N=1600

Nessas duas figuras, todos os histogramas, exceto aquele que representa o do espectro do $B4D$, ajustam-se melhor uma distribuição do tipo Poisson. Também notamos que o ajustamento dos histogramas a essa distribuição não sofre uma melhora significativa com o aumento do número de autoângulos nos histogramas.

Na figura 7.3, a principal diferença entre o histograma construído a partir do espectro do mapa $B4D$ e os outros é o aparecimento do acúmulo de metade dos espaçamentos de níveis nas próximidades de zero, provocando uma distorção desse diagrama em relação aos outros, o que é uma evidência numérica da existência de uma degenerescência do espectro deste mapa. O motivo para o aparecimento dessa distorção em um espectro com degenerescência dois, é que , em qualquer processo de diagonalização, dois autoângulos poderão ser iguais apenas até o limite da precisão numérica desse processo e assim, na construção do histograma a partir de um espectro duplamente degenerado, metade dos espaçamentos serão muito pequenos, o que provocará um acúmulo na primeira pilha à esquerda do histograma. Na mesma figura, o ajustamento dos histogramas relativos aos outros mapas a uma distribuição do tipo Poisson, indica a existência de espectros dos autoângulos não degenerados para estes mapa, isto porque apesar de existir um acumulo de espaçamentos próximos de zero, o número de espaçamentos nessa situação é relativamente pequeno, e não existe mudança abrupta no tamanho das pilas dos histogramas que se afastam da origem. Essa passagem de um espectro degenerado, no caso do $B4D$, para um não degenerado, no caso do $B4L$, pode ser analisada tomando-se como ponto de partida os conjuntos de equações que, na seção anterior definem os autoestados desses dois mapas.

Nos seis conjuntos de combinações lineares de produtos de autoestados do mapa comum, que fornecem os autoestados do propagador do $B4D$, eqs. 7.11 a 7.13, cada produto $|\epsilon^i_{n'}\rangle\,|\epsilon^j_n\rangle$ está presente em dois conjuntos com paridades opostas em relação ao operador $\hat{\mathbf{P}}$. Como foi visto, o propagador desse mapa é dado pelo produto direto do propagador de dois mapas comuns atuando separadamente, e a presença de um determinado produto $|\epsilon^i_{n'}\rangle\,|\epsilon^j_n\rangle$ determina que o autoângulo da combinação linear correspondente é dado por $\epsilon^i_{n'} + \epsilon^j_n$. Isto é, cada autoângulo do propagador do mapa direto é a soma de dois autoângulos do propagador do mapa do padeiro em duas dimensões, fazendo com que o espectro desse mapa seja duplamente degenerado.

Uma vez que os seis conjuntos de autoestados do mapa loxodrômicos, eqs. 7.24 a 7.26, também são combinações lineares de produtos de autoestados do mapa comum, cada elemento de um desses conjuntos também é um autoestado do mapa direto. Pode-se verificar que, nesses três pares de equações, cada par é um autovalor do mapa direto com o mesmo autoângulo. Isto faz com que seja possível obter o espectro do mapa loxodrômico a partir do espectro do mapa comum[42]. Partindo de que o propagador do mapa loxodrômico pode ser colocado na forma

$$\widehat{\mathbf{U}}_{B4L} = \widehat{\mathbf{U}}_{SL}\widehat{\mathbf{U}}_{B4D} = \widehat{\mathbf{R}}_1\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}, \tag{7.30}$$

pode-se observar que os autovalores de cada conjunto de um par autoângulos terá um autovalor diferente do outro conjunto do par. Em relação ao propagador do mapa loxodrômico, um autovetor dado pelo primeiro conjunto da eq. 7.24 terá autoângulos dados pela soma $\left(\epsilon_{n'}^{+} + \epsilon_{n}^{+}\right)$, enquanto os autovetores dados pelo segundo conjunto desta equação terão autoângulos $-\left(\epsilon_{n'}^{+} + \epsilon_{n}^{+}\right)$. Assim, usando-se o mesmo raciocínio para os outros dois pares de equações, temos que dois autoângulos distintos do mapa $B4L$ podem ser obtidos a partir de um par de autoângulos degenerados do espectro do mapa $B4D$ somente pela adição de um termo que pode ser igual a $\pm\pi$ ou $\pm\frac{\pi}{2}$ .

## 7.4 Estatísticas de Níveis

### 7.4.1 Espectros reduzidos

Em trabalho sobre a emissão de radiação por núcleos pesados Wigner propôs que o conjunto de autovalores dos operadores hamiltonianos desses sistemas teriam as caraterísticas estatísticas de ensembles de matrizes com elementos aleatórios sujeitos a certas restrições[46]. Sistemas onde o hamiltoniano apresenta simetria de reversão temporal tem as propriedades estatísticas de seus espectros de energia descritas através de um ensemble GOE - Gaussian Ortogonal Ensemble - de matrizes reais simétricas. Estes têm elementos aleatórios sujeitos a uma distribuição do tipo gaussiana e que são invariantes por transformações ortogonais. Sistemas que não apresentam essa simetria têm suas propriedades descritas por um ensemble GUE - Gaussian Unitary Ensemble - de matrizes hermitianas complexas, com elementos aleatórios sujeitos a uma distribuição do tipo gaussiana, invariantes por transformações unitárias. Para sistemas cuja dinâmica não é descrita por operadores hamiltonianos, como os mapas aqui estudados, esse tipo de análise se desloca para os ensembles circulares de Dyson[47], de matrizes aletórias unitárias CUE - Circular Unitary Ensemble - ou para o ensemble COE - Circular Ortogonal Ensemble.

Uma hipótese formulada por Bohigas, Giannoni e Schmit[10, 48], conhecida como hipótese Bohigas, estabelece a ligação entre o tipo de estatística obedecida por um espectro e a caoticidade do sistema clássico correspondente. Segundo esta hipótese, os sistemas que têm comportamento clássico caótico, na ausência de características especiais, apresentarão o fenômeno da repulsão de níveis. Isto é, tomando-se aleatoriamente dois níveis de energia vizinhos, a probabilidade de que a distância entre eles seja muito pequena tende a zero . Também segundo essa mesma hipótese, essa repulsão desaparecerá quando o sistema clássico correspondente for integrável, fazendo com que a distribuição de primeiros vizinhos torne-se poissoniana.

Na presença de uma simetria, o conjunto de autovalores do propagador é separado em classes distintas, cada uma correspondendo a um autovalor desse operador[27]. Como os operadores de simetria presentes nos propagadores dos mapas aqui são unitários, tendo portanto dois autovalores, o conjunto de autoângulos do propagador é a união de dois subconjuntos ou espectros reduzidos, cada um dos quais contendo autoângulos correspondentes a autovetores de paridade definida em relação ao operador de simetria. Desse modo, o espectro completo pode ser visto como uma mistura dos espectros reduzidos.

Essa mistura de espectros reduzidos faz com que, ao montar-se um histograma de separação de autoângulos para o espectro completo, obtenha-se sempre uma curva que tenderá a uma distribuição do tipo Poisson, mesmo que os espectros reduzidos individualmente obedeçam a uma outra distribuição. Isto porque um espectro completo não degenerado é a superposição de dois espectros reduzidos distintos, para um par de autoângulos vizinhos do espectro completo existe a possibilidade de que cada um dos autoângulos desse par pertença a um espectro reduzido diferente, tornando possível o aparecimento de espaçmentos muito próximos de zero.

Um operador de simetria unitŕio $\widehat{\mathbf{O}}$ tem como autovalores possíveis $\mp 1$. Assim, a apresenç de um operador de simetria unitário permite que seja feita a dessimetrização ou separação dos espectros completos em dois espectros reduzidos. Este tipo de mistura de espectros, e a conseqüente necessidade da obtenção dos espectros reduzidos para o estudo da estatística seguida por eles, também ocorre em certos sistemas hamiltonianos, como por exemplo no estádio de Buminovich [14], no qual as simetrias de reflexão presentes devem ser levadas em conta quando fazemos a análise estatística de seu espectro.

Para o propagador de um mapa qualquer atuando no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, $\widehat{\mathbf{U}}$, a obtenção numérica desses espectros reduzidos pode ser feita diagonalizando-se os propagadores reduzidos ou dessimetrizados $\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}$ em relação a um operador de unitário simetria $\widehat{\mathbf{O}}$ na representação de posição, isto é, determinando-se os autovalores de cada uma das matrizes

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}(\widehat{\mathbf{O}})\,(n',n) = \langle n'|\,\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}\,|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle n'|\,\widehat{\mathbf{U}}\left(1 \pm \widehat{\mathbf{O}}\right)|n\rangle\,, \tag{7.31}$$

uma vez que um autoestado de $\widehat{\mathbf{U}^{+}}$ tem paridade positiva em relação a $\widehat{\mathbf{O}}$ e um autoestado de $\widehat{\mathbf{U}^{-}}$ paridade negativa em relaçâo a $\widehat{\mathbf{O}}$. ou no caso de $\widehat{\mathbf{O}}$ corresponder a uma simetria de um propagador unitário $\widehat{\mathbf{U}}$ atuando no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_4$,

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}(\widehat{\mathbf{O}})\,(n_1'n_2', n_1n_2) = \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{O}}^{\pm}\,|n_1,n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}\left(1 \pm \widehat{\mathbf{O}}\right)|n_1,n_2\rangle\,. \tag{7.32}$$

Quando um mapa clássico é simétrico simultaneamente em relação a duas transformações $O_1$ e $O_2$, o processo de redução de seu espectro pode ser feito de forma individual ou simultânea para cada uma delas. Neste último caso, teremos quatro espectros reduzidos, obtidos a partir da diagonalização de um dos quatro operadores, que têm seus elementos dados por

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\pm\pm}(\widehat{\mathbf{O}}_1, \widehat{\mathbf{O}}_2)\,(n', n) = \langle n'|\,\widehat{\mathbf{O}}^{\pm\pm}\,|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\,\langle n'|\,\widehat{\mathbf{U}}\left(1 \pm \widehat{\mathbf{O}}_1\right)\left(1 \pm \widehat{\mathbf{O}}_2\right)|n\rangle\,, \tag{7.33}$$

quando os operadores $\widehat{\mathbf{O}}_1$ e $\widehat{\mathbf{O}}_2$ são simetrias atuando no espaço $_2$ e,

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\pm\pm}(\widehat{\mathbf{O}}_1, \widehat{\mathbf{O}}_2)\,(n_1'n_2', n_1n_2) = \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}\,|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\,\langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}\left(1 \pm \widehat{\mathbf{O}}_1\right)\left(1 \pm \widehat{\mathbf{O}}_2\right)|n_1, n_2\rangle\,, \tag{7.34}$$

quando correspondem a simetrias atuando no espaço $\mathcal{H}_4$.

Uma observação que deve ser feita é que, a cada passo desse processo de reduções sucessivas de um espectro, o número de níveis disponíveis para a construção dos histogramas diminuem, grosso modo, pela metade. Assim, na eventualidade da presença de diversas transformações de simetria em um mapa, seria necessário trabalhar com matrizes de dimensões maiores para obter espectros reduzidos com número suficiente de autoângulos para indicar, de forma confiável, o tipo de estatística seguida pelo sistema.

### 7.4.2 Propagadores Reduzidos

Para obtermos os espectros reduzidos dos propagadores determinados no capítulo anterior, temos de determinar a atuação sobre os autoestados de posição do operador $\widehat{\mathbf{R}}$, correspondente à simetria clássica $R$, presente no mapa $B2D$, e dos operadores $\widehat{\mathbf{D}}^4$ e $\widehat{\mathbf{P}}$, correspondentes às simetrias clássicas $D^4$ e $P$, presentes nos mapas clássicos atuando no domínio $M_4$.

Analisando o conjunto de equações que definem a transformação clássica $R$, vemos que sua atuação sobre o par de coordenadas $(p, q)$, que definem um ponto no domínio $M_2$, resulta no complemento do valor de cada uma das coordenadas em relação a unidade. Dessa maneira, a atuação do operador $\widehat{\mathbf{R}}$ sobre um vetor da base de autoestados $|n\rangle$ de posição $\widehat{\mathbf{q}}$ deverá resultar em um autoestado de $\widehat{\mathbf{q}}$ com um autovalor complementar de $n$ em relação a $N$, que é o autovalor máximo do operador $\widehat{\mathbf{q}}$, isto é:

$$\widehat{\mathbf{R}}\,|n\rangle = |N-n\rangle\,. \tag{7.35}$$

Com a equação acima, podemos também definir os operadores $\widehat{\mathbf{R}}_1$ e $\widehat{\mathbf{R}}_2$ , que atuam respectivamente sobre os índices 1 e 2 dos autoestados $|n_1, n_2\rangle$ de $\widehat{\mathbf{q}}_1$ e $\widehat{\mathbf{q}}_2$, os quais geram o espaço $\mathcal{H}_4$, ou seja:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{R}}_1\,|n_1\rangle = |N-n_1\rangle \\ \widehat{\mathbf{R}}_2\,|n_2\rangle = |N-n_2\rangle \end{cases} . \tag{7.36}$$

Uma vez que a transformação de simetria $D^4$ é equivalente à aplicação sucessiva da transformação $R$ sobre cada uma dos pares de coordenadas canônicas $(q_1, p_1)$ e $(q_2, p_2)$, temos que o operador correspondente a essa simetria é dado por:

$$\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}}\,|n_1, n_2\rangle = \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}\,|n_1, n_2\rangle = |N-n_1, N-n_2\rangle\,. \tag{7.37}$$

Para a simetria clássica $P$, existente apenas nos mapas atuando no domínio $M_4$, a permutação que provoca entre as coordenadas $q_1$ e $q_2$ leva a um operador $\widehat{\mathbf{P}}$ que permuta os indíces 1 e 2 em um autoestado $|n_1, n_2\rangle$, ou seja:

$$\widehat{\mathbf{P}}\,|n_1, n_2\rangle = |n_2, n_1\rangle\,. \tag{7.38}$$

Com a definição acima da atuação dos operadores $\widehat{\mathbf{R}}$, $\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}}$ e $\widehat{\mathbf{P}}$, podemos determinar os elementos dos propagadores reduzidos que atuam sobre os espaços $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_4$.

Para o mapa $B2D$ , temos os propagadores reduzidos em relação a $\widehat{\mathbf{R}}$ em termos de somas dos elementos do progagador completo como:

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B2D}(n', n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle n'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}(1 \pm \widehat{\mathbf{R}})\,|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle n'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}\,|n\rangle \pm \langle n'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B2D}\,|N-n\rangle\right\}. \tag{7.39}$$

Como foi visto no capítulo cinco, as transformações de simetrias clássicas $R_1$, $D^4$ e $P$ não estão presentes simultaneamente em todos os mapas atuando sobre o domínio $M_4$.

Os mapas clássicos $B4D$ e $B4E$ são simétricos em relação às transformações $D^4$ e $P$. Por conseguinte, os propagadores reduzidos desses mapas individualmente em relação aos operadores $\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}}$ e $\widehat{\mathbf{P}}$, são dados pelas matrizes

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4D}(\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|n_1, n_2\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|N-n_1, N-n_2\rangle\right\} \\ \widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4E}(\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|n_1, n_2\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|N-n_1, N-n_2\rangle\right\} \end{array}\right. , \tag{7.40}$$

e

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4D}(\widehat{\mathbf{P}})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|n_1, n_2\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|n_2, n_1\rangle\right\} \\ \widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4E}(\widehat{\mathbf{P}})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|n_1, n_2\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|n_2, n_1\rangle\right\} \end{array}\right. , \tag{7.41}$$

na representação de posição, com seus propagadores reduzidos simultaneamente em relação a $\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}}$ e $\widehat{\mathbf{P}}^{\mathbf{4}}$, dados por:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}}^{\pm\pm}_{B4D}(\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}}, \widehat{\mathbf{P}})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{4}}\Big\{&\langle n_1', n_2'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|n_1, n_2\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|N-n_1, N-n_2\rangle \\ &\pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|n_2, n_1\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4D}\,|N-n_2, N-n_1\rangle\Big\}, \end{aligned} \tag{7.42}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}}^{\pm\pm}_{B4E}(\widehat{\mathbf{D}}^{\mathbf{4}}, \widehat{\mathbf{P}})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{4}}\Big\{&\langle n_1', n_2'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|n_1, n_2\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|N-n_1, N-n_2\rangle \\ &\pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|n_2, n_1\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4E}\,|N-n_2, N-n_1\rangle\Big\}. \end{aligned} \tag{7.43}$$

No caso do propagador dos mapas $B4G$ e $B4L$, que são simétricos respectivamente apenas em relação aos operadores $\widehat{\mathbf{R}}_\mathbf{1}$ e $\widehat{\mathbf{D}}_\mathbf{4}$, temos:

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4G}(\widehat{\mathbf{R}}_\mathbf{1})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle n_1', n_2'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4G}\,|n_2, n_1\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4G}\,|N-n_1, n\rangle\right\} \tag{7.44}$$

e

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4L}(\widehat{\mathbf{D}}^\mathbf{4})(n_1'n_2', n_1n_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle n_1', n_2'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}\,|n_1, n_2\rangle \pm \langle n_2', n_1'|\,\widehat{\mathbf{U}}_{B4L}\,|N-n_1, N-n_2\rangle\right\}. \tag{7.45}$$

## 7.5 Exemplos Numéricos de Espectros Reduzidos

Nesta seção, são apresentados alguns exemplos de histogramas de espaçamento de primeiros vizinhos, obtidos numericamente através da diagonalização dos propagadores reduzidos dos mapas atuando no espaço $\mathcal{H}_4$.

A figura 7.4 mostra três pares de gráficos que contêm histogramas de espaçamento de primeiros vizinhos, construídos a partir de espectros reduzidos do propagador do mapa $B2D$ em relação à transformação de simetria $R$ [41].

Os três pares correspondem, respectivamente, a propagadores reduzidos que atuam em espaços de Hilbert com dimensão de 900, 1296 e 1600. Em cada par, o histograma à direita é relativo ao espectro reduzido com paridade positiva em relação a $\widehat{\mathbf{R}}$, e o da esquerda relativo ao espectro com paridade negativa.

As figuras 7.5 e 7.6 tratam dos espectros reduzidos dos propagadores reduzidos dos mapas $B4D$ e $B4E$. Em cada uma dessas figuras são apresentados três pares de gráficos relativos a espectros reduzidos de operadores atuando em espaços de Hilbert de dimensão igual a 1600.

Como os mapas $B4D$ e $B4E$ são simétricos em relação às tranformações $D^4$ e $P$, nessas figuras, o primeiro par de gráficos é relativos aos espectros reduzidos em relação ao operador $\widehat{\mathbf{D}}^4$, o segundo par relativos aos espectros reduzidos em relação operador $\widehat{\mathbf{P}}$ e o terceiro par relativo aos espectros reduzidos em relação a ambos operadores. Em cada par, o histograma da esquerda foi construído a partir de um espectro reduzido com paridade positiva e o da direita a partir de um espectro reduzido com paridade negativa. Na fig.7.5 vemos que a degenerescência do espcctro do mapa $B4D$ é eliminada apenas quando esta mapa é dissimetrizado em relação a $P$, ou a $P$ em combinação com $D^4$, casos em os histogramas correspondentes ajustam-se melhor a uma distribuição do tipo Poisson.

As figuras 7.7 e 7.8 são relativas a espectros reduzidos dos propagadores $B4G$ e $B4L$. Em cada uma delas são mostrados três pares de gráficos relativos a propagadores atuando em espaços de Hilbert de dimensão iguais a 900, 1296 e 1600.

Na figura 7.7, todos os gráficos foram construídos a partir dos espectros reduzidos do propagador do mapa $B4G$ em relação ao operador $\widehat{\mathbf{R}}_1$, onde vemos que o histograma aproxima-se de uma distribuição COE indicada pela linha contínua. Na figura 7.8, todos os gráficos foram construídos a partir do espectro reduzido do propagador do mapa $B4L$ em relação $\widehat{\mathbf{D^4}}$ e que mostram que o espectro desse mapa obedece a uma distribuição do tipo Poisson.

Como foi visto na seção 7.3, os autovalores dos mapas $B4D4$ e $B4L$ são dados, respectivamente, pelo produto de dois autoangulos distintos do do mapa $B2D$, e pelo produto de dois autoangulos distintos do do mapa $B2D$ multiplicado por um fator de fase $\pm 1$ ou $\pm i$. Isso faz com que os espectros desses mapas nas figuras 7.5 e 7.8, mesmo dissimetrizados, obedeçam a uma estatística do tipo Poisson, uma vez que a obitençõ de seus autovalores por meio de produtos dos autovalores do mapa $B2D$ pode resultar em pares de autoangulos muito próximos um do outro. É possível conjecturar que o aparecimento da repulsão de autoangulos para esses mapas poderia surgir da dessimetrização dos mesmos em relação a uma simetria não identifiada até aqui.

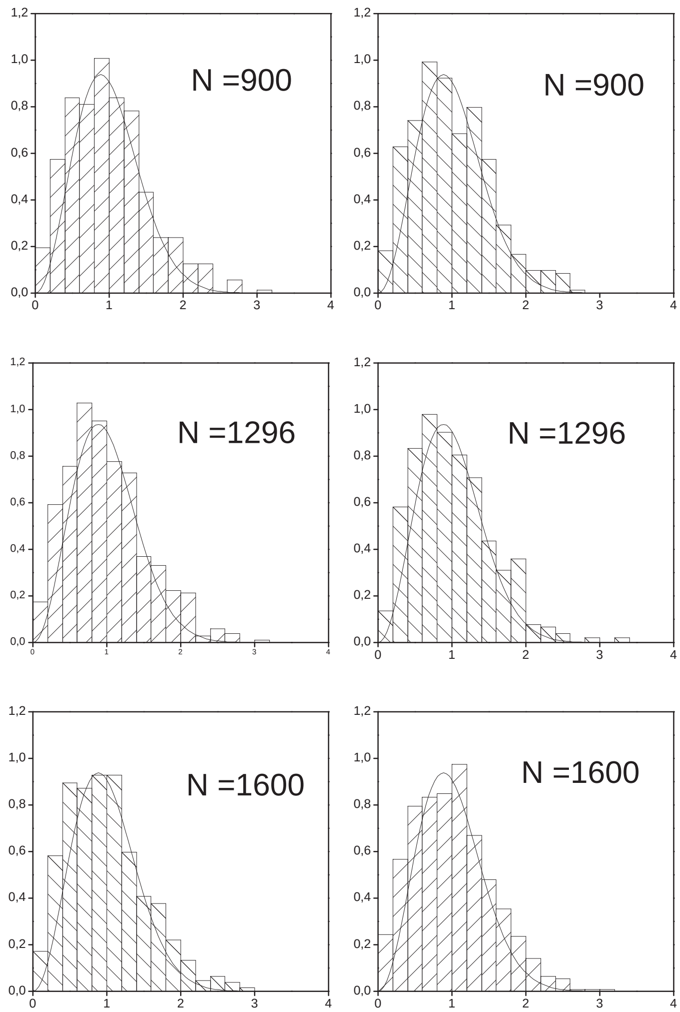


Figura 7.4: Histogramas para os Espectros dos Propagadores Reduzidos $\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B2D}$, onde as curvas de ajuste representam uma distribuição do tipo COE.

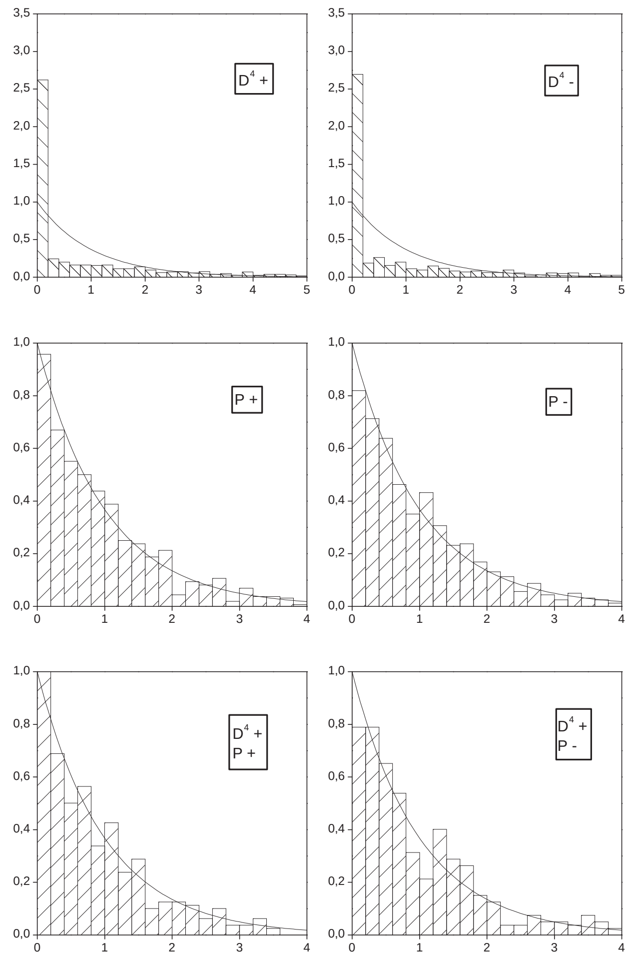


Figura 7.5: Histogramas para os Espectros dos Propagadores Reduzidos do $B4D$ em relação as simetrias $\widehat{\mathbf{D^4}}$, $\widehat{\mathbf{P}}$ e suas combinações, onde as curvas de ajuste representam uma distribuição do tipo Poisson.

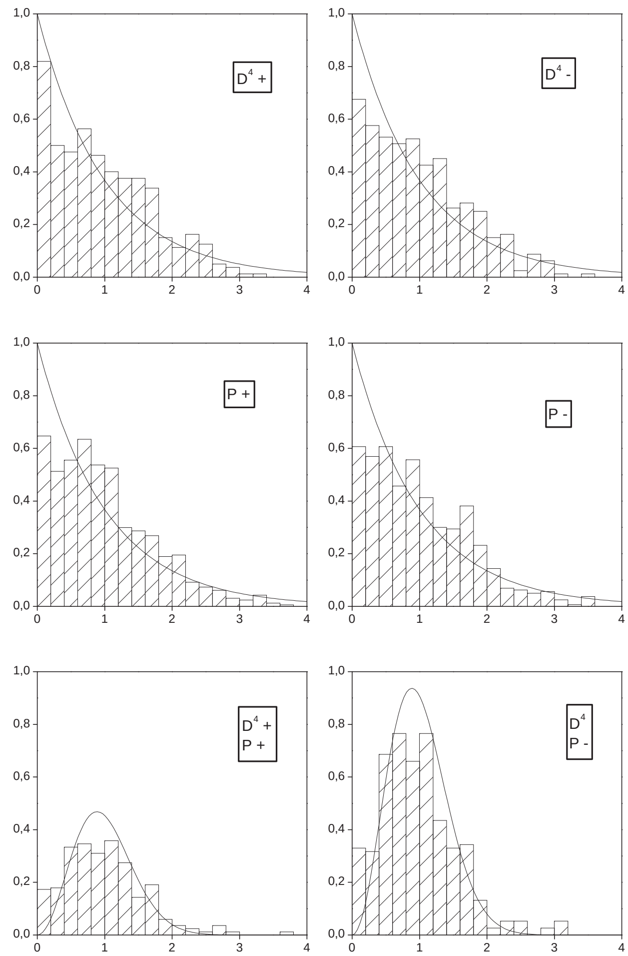


Figura 7.6: Histogramas para os Espectros dos Propagadores Reduzidos $\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4E}$, onde as curvas de ajuste nos quatro primeiros histogramas representam uma distribuição do tipo Poisson e uma distribuição do tipo COE nos dois últimos.

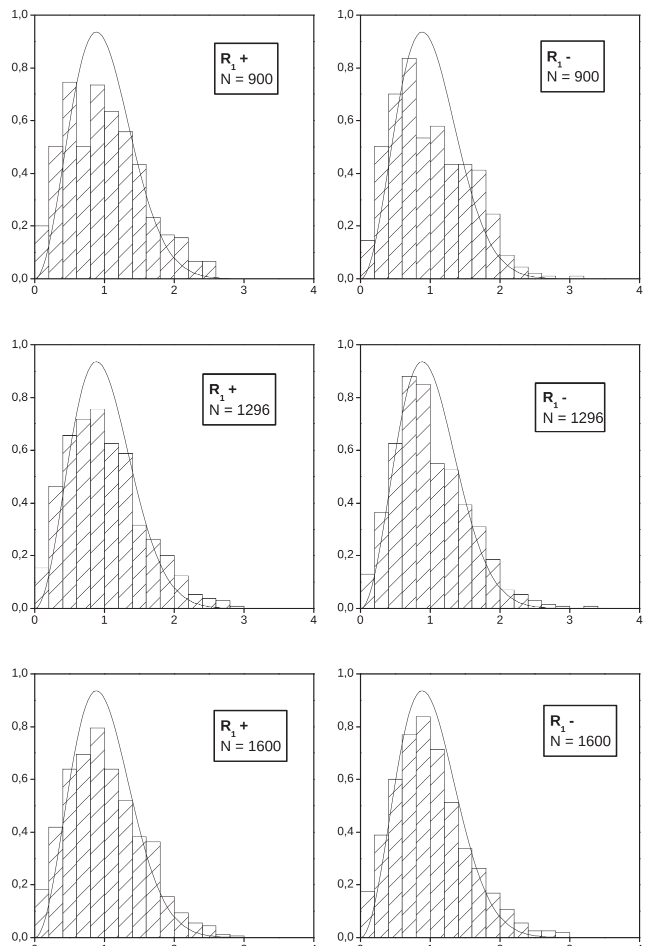


Figura 7.7: Histogramas para os Espectros dos Propagadores Reduzidos do $B4G$, onde as curvas de ajuste representam uma distribuição do tipo COE.

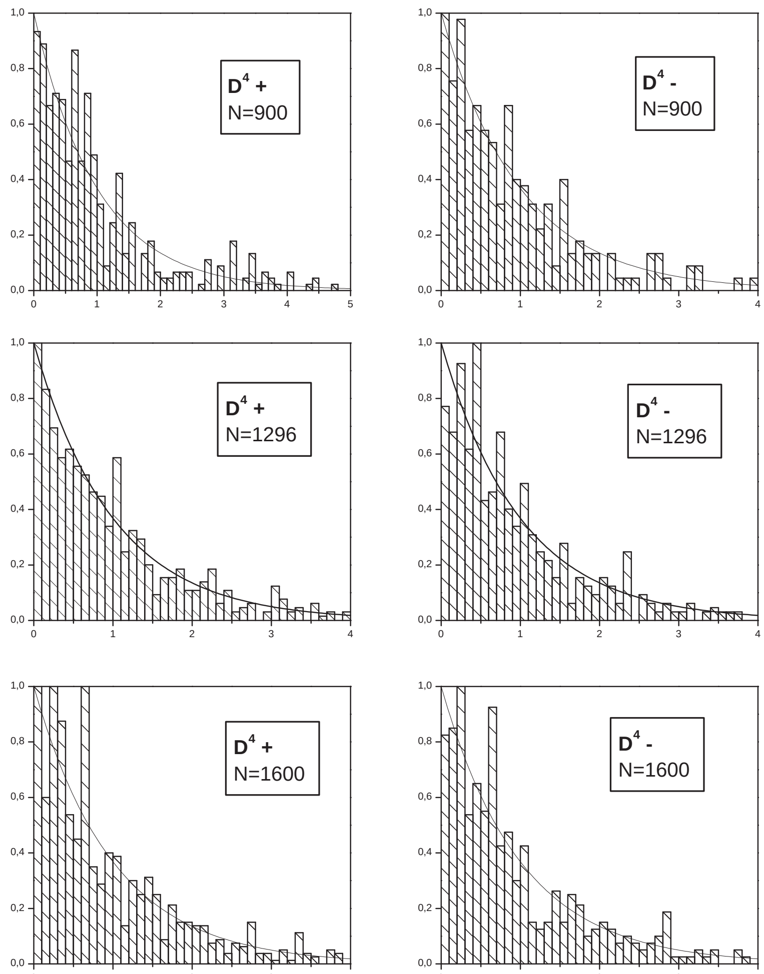


Figura 7.8: Histogramas para os Espectros dos Propagadores Reduzidos $\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}_{B4L}$, onde as curvas de ajuste representam uma distribuição do tipo Poisson.

# 8 Conclusões e Perspectivas

O propósito central deste trabalho foi a verificação dos efeitos do aumento da dimensionalidade no comportamento clássico e quântico de mapas conservativos. Partindo do mapa do padeiro atuando no espaço de fase de duas dimensões, foram definidos quatro mapas conservativos que atuam no espaço de fase de quatro dimensões .

Das quatro generalizações do mapa $B2D$ para o domínio $M_4$, pertencentes ao espaço de fase quadridimensional, a mais simples é a do mapa $B4D$, que foi definida através da atuação independente de dois mapas $B2D$ sobre cada um dos pares de coordenadas canônicas que definem esse espaço.

Tomando-se o mapa $B2D$ como ponto de partida, utilizou-se dois métodos para a definição da dinâmica dos outros mapas atuando no domínio $M_4$. No primeiro método, definiu-se uma nova transformação conservativa de $M_4$ sobre si mesmo que, composta com $B4D$, resulta em um novo mapa. No segundo, obteve-se novos mapas através da alteração do esquema utilizado pelo $B4D$ para organizar quatro subconjuntos de uma partição do domínio $M_4$, após estes sofrerem transformações de compressão e expansão, isto é , fazendo-se uma alteração do esquema de empilhamento que define o mapa.

O primeiro método foi utilizado na definição da dinâmica do mapa $B4L$. Isto foi feito compondo-se o mapa $B4D$ com a transformação de rotação $SL$, tendo o propósito de obter um mapa cujo comportamento local fosse descrito por uma matriz de monodromia com autovalores complexos.

As definições dos mapas $B4G$ e $B4E$ utilizaram o segundo método que, em princípio, permite a definição de 23 novos mapas a partir do $B4D$. Escolheu-se dois esquemas de empilhamento que procuram simular a atuação de portas lógicas de dois bits atuando sobre os primeiros dígitos binários das coordenadas $q_1$ e $q_2$. Para o $B4G$, a reorganização escolhida foi aquela que coincide com a tabela verdade de uma porta lógica $CNOT$, com o primeiro dígito binário de $q_1$ associado ao bit alvo, e o primeiro dígito binário de $q_2$ associado ao bit de controle. Como outro exemplo da aplicação deste método, definiu-se o mapa $B4E$ usando-se como esquema de reorganização a tabela verdade de uma porta lógica $SAWP$. Esta identificação entre mapas atuando no espaz c co de fase 4-D e portas lógicas, também poderia ser útil para simplificar a anĺise da dinâmica simbólica deste mapas.

Uma característica desses mapas que emerge de sua dimensionalidade, é a necessidade do uso de um alfabeto de quatro símbolos para a descrição simbólica das órbitas de pontos de $M_4$, onde cada símbolo identifica uma das quatro regiões definidas por uma partição de $M_4$. Usando este alfabeto, um ponto no domínio $M_4$ é descrito por duas seqüências semi-infinitas destes símbolos, onde uma seqüência está relacionada à expansão quaternária das coordenadas de posição, e outra à expansão de suas coordenadas de momento.

De forma similar ao que acontece no mapa $B2D$, a iteração de um ponto de $M_4$ pelo $B4D$ é representada como um deslocamento de símbolos entre essas duas seqüências semi-infinitas. As seqüências que representam o ponto resultante da iteração são obtidas das seqüências originais eliminando-se o primeiro símbolo da seqüência que descreve as coordenadas de posição, e colocando-o como o primeiro símbolo da seqüência que representa as coordenadas de momento. Nos outros mapas, a representação simbólica das órbitas acontece de forma similar, mas além da eliminação do primeiro símbolo da seqüência semi-infinita que representa as coordenadas de momento, este símbolo, que é deslocado para a seqüência que representa as coordenadas de momento, sofre uma transformação.

Esses deslocamentos e transformações que caracterizam a dinâmica simbólica desses mapas, abrem a perspectiva de se analisar a dinâmica de um ponto do $M_4$ como um processo computacional executado sobre uma seqüência de pares de bits. Qualquer seqüência de pares de bits, onde o último símbolo não nulo está na posição $L$, pode ser identificada com uma série de pontos do domínio $M_4$. Com esta identificação, cada iteração do mapa corresponde à ação de uma porta lógica sobre um dos pares de bits da seqüência, que será registrada pelo primeiro símbolo da seqüência que representa a expansão quaternária das componentes $p_1$ e $p_2$.

Uma vez que atuação do $B4G$ e o $B4E$ sobre os primeiros digítos binários de $q_1$ e $q-2$ pode ser identificada com as portas lógicas $CNOT$ e $SWAP$, existe a possibilidade do comportamento de outras portas lógicas ser descritas pela composição desses mapas, ou por mapas definidos a partir de esquemas de empilhamento diferentes. ou por mapas.

Outro ponto a ser ressaltado foi o surgimento, nos mapas atuando no espaço $M_4$, de transformações de simetria que não estavam presentes na dinâmica do mapa $B2D$. No mapa $B2D$ foi observada a existência de uma simetria temporal $T$ e uma simetria espacial $R$. Para o espaço de fase de quatro dimensões a transformação de simetria $R$ foi generalizada de forma direta, com sua aplicação independente sobre cada um dos pares de coordenadas canônicas que definem um ponto no domínio $M_4$. Devido ao aumento de dimensionalidade nos mapas atuando no $M_4$, surge a possibilidade de transformações de simetria que envolvem a interação entre as variáveis canônicas. Exemplo disso é a transformação $P$, que faz a troca entre os índices das variáveis canônicas e as combinações desta última com a simetria $R$, atuando individualmente sobre cada um dos pares de coordenadas canônicas. A definição da dinâmica do $B4D$ não provoca a interação entre os diferentes pares de coordenadas canônicas e este mapa tem as transformações $T^4$, $R^4$ e $P$ como operações de simetria. Uma vez que os outros mapas atuando no $M_4$ foram definidos a partir do $B4D$, aparece a possibilidade dessas simetrias serem ou não quebradas em cada um desses mapas. Dos três mapas, o único que preserva todas as simetrias é o $B4E$. Para o $B4L$ a simetria $P$ é quebrada, com este mapa permanecendo invariante apenas em relação à transformação $R$. No menos simétrico destes mapas, o $B4G$, além da quebra da simetria $P$, ocorre uma quebra quase total da simetria $R^4$, existindo apenas um ponto do domínio $M_4$ que tem órbita invariante em relação a $R^4$.

A quantização dos mapas atuando no domínio $M_4$ foi feita seguindo-se o mesmo método empregado por Balazs e Voros, e posteriormente por Saraceno, na quantização do $B2D$. Partindo-se da definição de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, que descreve os estados deste sistema, eles construíram o propagador do mapa a partir das propriedades geométricas de sua dinâmica clássica.

Para obter os propagadores dos mapas $B4D$, $B4E$, $B4L$ e $B4L$ definiu-se o espaço em que atuam, $\mathcal{H}_4$, como o produto direto de dois espaços $\mathcal{H}_2$, cada um dos quais associado a um par de cooordenadas canônicas. Uma vez que a dinâmica clássica do mapa $B4D$ reflete a dinâmica do $B2D$ sobre cada um dos pares de coordenadas canônicas, o propagador do $B4D$, na representação de momento, é o produto direto de dois operadores na representação mista do $B2D$, atuando de forma independente sobre os autoestados de $q_1$ e $q_2$.

Nos mapas $B4E$ e $B4G$, a construção do propagador na representação mista foi feita modificando-se o propagador do $B4D$ nesta representação. Essas modificações reproduzem as características dos esquemas de empilhamento dos elementos da partição do domínio $M_4$ que os respectivos mapas clássicos utilizam. O propagador do mapa $B4L$ na representação de posição foi obtido compondo-se o propagador do $B4D$ com o operador quântico correspondente à tranformação $SL$ atuando no espaço $\mathcal{H}_4$ .

Através da diagonalização numérica desses propagadores, foram construídos histogramas relativos às estatísticas de primeiros vizinhos para os espaçamentos de autoângulos, com o objetivo de determinar qual tipo de estatística é obedecida pelo espectro de cada um dos mapas. Para isso, foram diagonalizados propagadores desses mapas atuando em espaços de Hilbert de dimensões diferentes, de modo que não fosse possível notar influência apreciável sobre a estatística sugerida pelos histogramas. Observou-se por esses histogramas que, quando não levamos em consideração a presença de simetrias, isto é, quando são construídos histogramas utilizando-se os espectros completos, esses quatro mapas obedecem a uma distribuição do tipo Poisson.

Para entender o papel desempenhado pelas simetrias nos espectros desses mapas, foram construídos os operadores unitários que atuam no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_4$ correspondentes a cada uma das simetrias clássicas presentes nos mapas. Estes operadores separam o espectro de um propagador com o qual comutam em classes de simetria ou espectros reduzidos, nos quais cada autovetor tem paridade definida em relação ao operador.

Uma característica particular dos espectros de autoângulo do $B4D$ em relação aos outros propagadores é o aparecimento de degenerescências de grau dois em seus espectros de autoângulos, o que é devido à sua definição como o produto direto de dois propagadores do mapa $B2D$. Os espectros de autoângulo reduzidos em relação às simetrias $R$ e $P$ seguem uma distribuição do tipo Poisson.

Para o mapa $B4L$, os resultados numéricos mostram espectros de autoângulos não degenerados com estatísticas de primeiros vizinhos que seguem uma distribuição do tipo Poisson. O desaparecimento da degenerescência de níveis neste mapa é conseqüência da composição do operador $S_L$ sobre o propagador do $B4D$. Como foi visto, o fato de os autoestados deste mapa, da mesma forma que os do $B4D$, serem dados por conbinações lineares de produtos de autoestados do mapa $B2D$, permite obter seu espectro a partir do espectro de autoângulos do mapa direto pela adição, a cada um de seus elementos, de um termo $\pm\frac{\pi}{2}$ ou $\pm\pi$, e faz com que seus espectros completos, assim como os reduzidos em relação à $R$, obedeçam a distribuições do tipo Poisson.

Conforme a hipótese de Bohigas, os espectros dos mapas $B4E$ e $B4G$ têm um comportamento semelhante ao dos mapas $B2D$, com espectros reduzidos obedecendo a uma distribuição do tipo COE, enquanto seus espectros completos apresentam uma distribuição do tipo Poisson.

As perspectivas para a continuação deste trabalho apontam tanto na definição de novos mapas atuando no espaço de fase de quatro dimensões, quanto na investigação de outras características dos mapas aqui construídos. Novos mapas podem ser definidos por novos esquemas de empilhamento, alterando-se a dinâmica global do $B4D$, como feito no caso do $B4G$, através da composição do mapa $B4D$ com uma transformação conservativa, levando a sistemas com dinâmicas locais diferentes, como feito com o $B4L$, ou através da inposição de interações mais complexas entre os dosi pares de coordenadas canônicas. Também poderia ser estudado o processo de aparecimento e quebra de simetrias messes mapas, assim como sua utilização como modelos na compreensão do papel desempenhado pela existência de transformações de simetria na dinâmica de sistemas clássicos ou quânticos atuando em espaços de quatro dimensões.

Sistemas caóticos com vários graus de liberdade também podem ser modelados seria através da alteração da forma que o mapa $B2D$ faz a partição do espaço de fase, por exemplo, alterando-se o número de regiões em que o mapa divide o domínio $M_2$ para 4 e aumentando-se o fator de compressão de $\frac{12}{\,}$ para $\frac{14}{\,}$. O tipo de generalização tratada aqui também poderia ser estendido a outros mapas em duas dimensões tanto clássicos como quânticos. Embora aumento da dimensionalidade sempre acarrete considerável aumento do esforço computacional, a simplicidade dos mapas do padeiro generalizados sempre os tornará eficientes em comparação a qualquer outro modelo caótico da mesma dimensão.

Um aspecto que poderia ser abordado, é a quantização semi-clássica desses mapas pela construção de seus propagadores nesse regime, e as características daí surgidas. Uma motivação seria identificação desses mapas com portas lógicas, de forma que haveria uma base para o estudo de sistemas computacionais na transição entre regime clássico e quântico.

# Bibliografia

[1] H. Poincaré. *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*. Paris: Gauthier-Villars, 1892.

[2] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1958.

[3] A. Einstein. *Verh. Detsch. Phys. Ges.*, **23**, 390 (1917).

[4] V. I . Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1979.

[5] I. C. Percival. *Les Houches Session LII, Chaos and Quantum Physics Les Houches Lectures 1989*, ed. M. J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn Justin. Amsterdam: North Holland, 1991.

[6] P. N. V. Tu. *Dynamical System: An Introduction Whith Applications to Economics and Biology*. Heildelberg: Springer-Verlag, 1994.

[7] A. Medio. *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[8] M. V. Berry. *Ann. Phys.*, **131** , 163 (1981).

[9] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, J. Ford. *Quantum Chaos Between Order and Disorder*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[10] A. M. Ozorio de Almeida. *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[11] V. I. Arnold, A. Avez. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. New York: Benjamin, 1968.

[12] S. C. Creagh. *Chaos*, **5**, 477, (1995).

[13] M. Saraceno. *Ann. Phys.* **199**, 37, (1990). *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 747 (1967).

[14] M. C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics.* New York: Spring-Verlag, 1991.

[15] M. A. Nielsen, I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[16] R. Schack. *Phys. Rev. A*, **57**, 1634 (1998).

[17] R. Schack, C. M. Caves. *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.*, **10**, 305 (2000).

[18] A. J. Scott, C. M. Caves. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, 9553 (2003).

[19] R. O. Vallejos, P. R. del Santoro, A. M. Ozorio de Almeida. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 5163 (2006).

[20] R. F. Abreu , R. O. Vallejos. *Phys. Rev. A*, **75**, 62335 (2007).

[21] P. R. del Santoro, R. O. Vallejos, A. M. Ozorio de Almeida. *Braz. J. of Phys.*, **37**, 440 (2007).

[22] M. Saraceno, R. O. Vallejos. *Chaos* **6**, 193, (1996)

[23] M. van Vessen Jr. *Dois Mapas do Padeiro Acoplados e Suas Possveis Quantizações.* Tese de Doutorado: Departamento de Física da Universidade Federal do do Paraná, 2006.

[24] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Melo Park: Benjamim, 1986.

[25] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[26] N. Fiedler-Ferrara, C.P. Cintra do Prado. *Caos uma Introdução*. São Paulo: Edgard B*ücher*, 1994.*J.D.Farmer*, *E.Ott*, *J.A.Yorke.PhysicaD***7**, 153, (1983).

[27] H. Tinkham. *Group Theory and Quantum Mechanics*. New York: Mc-Graw Hill, 1964.

[28] W. Tung. *Group Theory in Physics*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1985.

[29] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equation*. Cambridge: MIT Press, 1973.

[30] A. Houaiss. *Pequeno Dicionário Enciclopédico Koogan-Larousse*. Rio de Janeiro: Larousse do Brasil, 1980.

[31] A. J. Lichetenberg, M. A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*. NewYork: Sprieng-Verlag, 1983.

[32] A. M. Ozorio de Almeida, M. Saraceno. *Ann. Phys.*, **211**, 1 (1991).

[33] L. E. Reichel. *The Transition to Chaos in Conservative Systems: Quantum Manifestations*. New York: Spring-Verlag, 1992.

[34] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1990.

[35] M. Saraceno, A. Voros. *Physica D* , **79** , 206, (1994).

[36] I. Percival, D. Richards. *Introduction to Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[37] A. V. Shubnikov *et. al.*. *Symmetry in Science and Art*. New York: Plenum Press, 1974.

[38] E C. G. Sudarshan, N. Mukunda. *Classical Dynamycs: A Modern Perspective.* New York: John Willey  Sons, 1974.

[39] N. L. Balazs, A. Voros. *Europhys. Lett.* **4**, 1089, (1987).

[40] N. L. Balazs e A. Voros. *Ann. Phys.*, **190**, 1, (1989).

[41] M. Saraceno. *Ann. Phys.*. **199**, 37, (1990).

[42] R. O. Vallejos. *Comunicação Particular.* Rio de Janeiro, 2006.

[43] A. M. Ozorio de Almeida. *Phys. Reports*, **295**, 265, (1998).

[44] J. C. Slater. *Quantum Theory of Molecules and Solids.* New York: McGraw-Hill, 1963.

[45] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing.* Cambridge: Cambridge University Press. (1992).

[46] M. L. Mehta. *Random Matrices.* New York: Academic Press, 1991.

[47] F. J. Dyson. *J. Math. Phys.*, **3**, 140 (1962).

[48] M. J. Giannomi, A. Voros, J. Zinn-Justin. *Chaos et Physique Quantique/Chaos and Quantum Physics* Paris: Elsevier Science Publishers, 1991.