Tese de Doutorado

Discussão do Formalismo de Primeira-Ordem para a Gravitação Quântica Planar com Torção

Leonardo Machado de Moraes

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, fevereiro de 2007

Dedico está tese

ao espírito

humano, tão

carente de

lembranças que de

bom grado aceita

todos os pequenos

e sinceros gestos

dedicados a sua

existência.

Agradecimentos

Primeiramente e fundamentalmente gostaria de agradecer ao meu pai e à minha mãe que sempre me estimularam e apoiaram, não só nesse período, mas ao longo da vida, dando-me sempre condições de seguir o que eu tinha vontade de fazer e respeitando as minhas escolhas. A eles gostaria de expressar a minha mais profunda gratidão e amor.

Também quero agradecer aos meus irmãos e cunhadas, tios, tias, primos e primas; mesmo os que já "partiram", assim como os meus avós; pelo carinho que sempre tiveram por mim e pelas alegrias que me deram.

Fundamental também é agradecer à "minha" Nininha pelos cuidados, incentivos, apoio, carinho e amor irrestrito que me dedica sem condições a quase seis anos. Não fosse por ela certamente esta tese, simples que seja, não teria acontecido nunca, pois quando o desânimo e o desepero me atingiram devido a longos problemas de saúde, na familia e pessoal, e todos os prazos foram passando, só não "joguei tudo para o alto" devido a sua insistência e fé em minha pessoa. Por tudo isso, aconteça o que acontecer, não posso deixar de registrar o meu muito obrigado a você: Obrigado, meu amor.

Desejo também expressar minha profunda admiração, gratidão e respeito ao Prof. José Abdala Helayël-Neto, mais do que meu orientador, um exemplo a ser seguido. Pessoa humana inigualável, tendo não só grande saber científico, mas também extrema sensibilidade e paciência para compreender e ajudar as pessoas. Sem ele, igualmente seria impossível o término deste trabalho. Além de me orientar, transcendeu suas obrigações e lutou com afinco para garantir-me mais tempo. Nunca deixou de acreditar que eu seria capaz de terminar este trabalho e deu-me todas as condições necessárias para tal. Fica o meu muito obrigado.

Ao Prof. Sebastião Alvez Dias também não posso deixar de agradecer. Outra "figura" humana fantástica que muito me ajudou, interferindo positivamente em minha formação e também interferindo para que eu conseguisse terminar este trabalho. Além de cuidar de todos os problemas materiais e organizacionais que nos assolam o "Prof. Tião" também é sempre presente para tirar dúvidas, ouvir desabafos, dar conselhos e animar a "galera". Um grande abraço e muito obrigado por tudo e pelos anos de convivência.

Inevitável é também agradecer ao meu amigo Dr. Leonardo Assis, vulgo "Coronel Salam". Em muitas conversas pessoais ele me incentivou, deu dicas e conselhos de como proceder em situações onde parecia haver pouca esperança. Ele sempre via uma alternativa mais "positiva", e em geral estava com a razão (mas nem sempre). Pela amizade e apoio fica o meu muito obrigado.

Obrigado também a todos os meus amigos de conversas, reuniões, cafezinhos, festas, saidas e etc. Tanto do CBPF como "de fora". A eles também digo muito obrigado por toda a descontração proporcionada, bem como peço desculpas pelos inúmeros "furos" e recusas de saida e etc. Agora, de uma forma ou de outra, devo ficar um pouco mais disponível. A vocês um grande abraço.

Um obrigado especial vai para a Miriam, nossa grande "mãe" no CBPF, que nos apoia, ajuda, quebra uma porção de galhos de última hora, distribui puxões de orelha e mantém a ordem reinante, nunca deixando um problema sem solução. Espero poder passar a tomar os seus cafezinhos...

Agradeço também a todos os que anonimamente interviram ao meu favor, obrigado.

Gostaria também de agradecer ao Prof. João dos Anjos, coordenador da CFC, pela compreensão.

Por último, meu agradecimento ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, retomamos a discussão de métodos para a obtenção dos propagadores e para a identificação do espectro de excitações associados ao campo de gravitação em (1+2)-D em presença de torção, adotando, porém, o formalismo de primeira-ordem, sendo, assim, as excitações associadas aos campos de "vielbein" e à conexão de spin. Algumas peculiaridades são apontadas quando o termo de Chern-Simons é levado em consideração, junto com os possíveis termos bilineares na torção. Apresentamos um procedimento para derivar o conjunto completo de propagadores, baseado num conjunto de operadores do tipo operadores de spin, e discutimos sob que condições o pólo destas funções de 2-pontos, ao nível clássico correspondem às excitações físicas.

Abstract

In this work, we reassess the issue of working out the propagators and identifying the spectrum of excitations associated to the vielbein and spin connection of (1+2)-D gravity in the presence of torsion, by adopting the first-order formulation. A number of peculiarities is pointed out whenever the Chern-Simons term is taken into account along with the possible bilinear terms in the torsion tensor. We present a procedure to derive the full set of propagators, based on a set of spin-type operators, and we discuss under which conditions the pole of these tree-level 2-point functions correspond to physical excitations.

Sumário

Capítulo 1

Introdução e Contextualização

1.1 Gravitação e Relatividade Geral

A gravitação é certamente a mais antiga das interações elementares já conhecida pela espécie humana. Apesar de seu efeito básico ser muito bem conhecido por todos, a primeira teoria consistente a descrevê-la matematicamente foi elaborada somente no séc. XVII por Sir Isaac Newton, em sua famosa lei do inverso do quadrado da distância. A lei de Newton descreveu com sucesso os fenômenos da queda dos corpos e dos movimentos planetários. Durante muito tempo sua teoria foi inquestionável em termos experimentais. Com o aprimoramento dos aparelhos e métodos de medidas pequenas discrepâncias começaram a surgir como, por exemplo, a pequena, mas inexplicavél à época, diferença na precessão do periélio de Mercúrio.

Por volta da época da consolidação destes resultados, foi apresentada à comunidade científica a Teoria da Relatividade Geral (R. G.), de Albert Einstein, para a gravitação. Motivada por questões teóricas como a independência das leis físicas do observador e de seu estado dinâmico, a R. G. dava o valor correto para a precessão do periélio de Mercúrio, bem como previa fenômenos como o do desvio da luz por grandes massas, entre outros. Inúmeras previsões da R. G. foram verificadas experimentalmente. A teoria também deu início à investigação, e obteve contundente sucesso na descrição, de fenômenos gravitacionais em escala cosmológica.

Matematicamente formulada em "linguagem geométrica", ou seja, usando geometria diferencial, a R. G. de Einstein modela o fenômeno da gravitação como sendo devido à curvatura do espaço-tempo gerada por uma dada distribuição de energia. A equação que descreve esta dependência da curvatura com a energia, equação de Einstein, na R. G. fixa a métrica do espaço-tempo, que fornece a noção de distância entre dois pontos próximos e fisicamente pode ser pensada como uma espécie de potencial gravitacional. Uma vez conhecida a métrica encontra-se a conexão de Christoffel que aparece diretamente nas equações de movimento de partículas sujeitas a um campo gravitacional.

A equação de Einstein pode ser obtida por um princípio variacional, variando-se a ação de Einstein em relação à métrica do espaço-tempo. Subentendido nesse processo está a consideração de que os graus de liberdade dinâmicos da gravitação estão todos contidos na métrica. Declaração redundante esta em se tratando da R. G. de Einstein e da forma como a mesma foi construída [1],[2].

1.2 Graus de Liberdade Independentes e Torção

1.2.1 Graus de Liberdade

A conexão de Christoffel, obtida através da métrica e usada na R. G., é um caso particular de conexão afim. Geometricamente as conexões fornecem a noção de afinidade, ou seja, de propriedades que permanecem invariantes sob translações, ou transformações afins, tais como paralelismo. A noção de conexão, apesar de em certa instância poder ser dada pela métrica, não está logicamente associada às noções de medidas de comprimento, área, etc [3].

Eddington, em 1921, foi o primeiro a sugerir uma conexão não-simétrica [4],[5] desassociando de vez a conexão da noção métrica. Élie Cartan, entre 1922-25, desenvolveu toda uma nova abordagem para lidar com conexões, introduzindo a sua parte anti-simétrica na geometria diferencial [6],[7].

Entre 1929 e 1932 Cartan e Einstein trocaram uma série de cartas onde

Cartan insistia na separação dos conceitos de metricidade e paralelismo [3],[8], o que se reflete no princípio variacional da teoria física de gravitação, onde ao invés de variarmos a ação em relação a métrica devemos variá-la em relação a conexão afim, obtendo deste modo novos graus dinâmicos de liberdade. Uma teoria de gravitação neste molde é a teoria de Einstein-Cartan a ser discutida mais a frente.

1.2.2 Torção

Como mencionado acima, Cartan introduziu a parte anti-simétrica da conexão afim como um novo e independente objeto. Ele provou que esta parte da conexão tem as propriedades de um tensor e se transforma como tal, denominando-o de tensor de torção. Chegou inclusive a sugerir que o mesmo deveria estar associado a algum tipo de momentum angular intrínseco da matéria, mas não seguiu adiante.

Anos após a introdução do conceito de spin na Mecânica Quântica [9], que representa o momentum angular intrínseco da matéria, o trabalho de Cartan foi retomado [10],[11],[12]. Mostrou-se então que a torção do espaço-tempo poderia ser gerada pela distribuição da densidade de spin. Nesta visão a torção só poderia interagir por contato, através de interações do tipo spin-spin [13]. Estas interações contribuiriam para o tensor de energia-momentum e, por sua vez, o mesmo afetaria o campo gravitacional [14]-[17]. Poderiamos então notar a presença da torção pelo seu efeito no campo gravitacional. Entretanto os efeitos associados a torção, se existirem, são tão fracos que nenhuma evidência pôde ser achada com os recursos tecnológicos hoje conhecidos [18],[19].

Tendo em mente a idéia de uma teoria quântica da gravitação, onde correções de vários tipos e ordem ocorrem a ação, percebemos a limitação da noção de uma interação de contato para a torção. Vários tipos de generalizações são feitas de forma a permitimos um campo de torção dinâmico. Tais teorias, como em [2],[18],[19], permitem que férmions possam interagir à distância pelo efeito da torção.

Ao estudarmos a dinâmica de partículas fermiônicas na gravitação somos levados naturalmente a uma formulação local, de vierbeine[1] (ou tetradas), para descrever estes objetos, o que indica um outro aspecto das teorias gravitacionais.

Recentemente, no trabalho de [20], dentro da perspectiva de que uma componente fundamental da torção seja descrita pela intensidade de campo de uma 2-forma de calibre (o campo de Kalb-Ramond), calculamos e analisamos a força de Casimir deste campo, onde observamos que a energia de Casimir por unidade de área é atrativa e menor do que a do campo escalar de

[1] Termo que significa "quatro pernas"

Klein-Gordon, apesar de ambos estarem descrevendo uma particula de spin zero. O resultado a que se chegou pode ser aplicado para se compreender o papel da torção na mediação da interação gravitacional. Para uma revisão de vários aspectos de espaços-tempos com torção veja [21].

1.3 Teorias de Calibre e Gavitação

As teorias de calibre descrevem três das quatro forças conhecidas na natureza. Surgida primeiramente no eletromagnetismo, aperfeiçoada por C. N. Yang e R. Mills e levadas ao status atual por inúmeros pesquisadores, ilustres ou desconhecidos, elas permitem, baseadas na suposição de a natureza ser localmente invariante sob certo conjunto de transformações, fixar quase univocamente os tipos de acoplamento entre os campos de matéria e os campos mediadores de interações. Além disso, as únicas teorias físicas consistentes que se conhecem, ou seja, que são renormalizáveis e tem anomalias canceladas, são teorias de calibre.

Devido ao sucesso das teorias de calibre na modelagem das outras três interações fundamentais conhecidas e ao desejo de unificarmos todas elas numa única teoria que possa descrever tanto o "mundo clássico" como o "mundo quântico", buscou-se uma formulação da gravitação que fosse invariante de calibre, no sentido das outras interações. Um indício que isso poderia ser feito vem da percepção de que a derivada covariante, definida pela conexão afim, é localmente invariante sob difeomorfismos. Contudo, sob a ação de difeomorfismos os campos mudam tanto em componentes como em seus argumentos, o que não ocorre sob as transformações de calibre usuais, onde só as componentes do campo mudam. Deste modo a conexão afim não é uma conexão no sentido dos fibrados tangente, como acontece com as teorias de calibre usuais, onde a transformação atua só sob as funções e não sob seus argumentos, o que implica num movimento ao longo do fibrado num ponto fixo sobre a variedade base.

O problema da variação dos argumentos, entretanto, pode ser contornado usando a representação do espaço tangente, onde uma combinação correta de campos não altera os argumentos (coordenadas). O formalismo de primeira ordem, onde usamos vierbeine e a conexão de spin, é o mais indicado para isso. Deste modo, R. Utiyama, cerca de um ano após C. N. Yang e R. Mills introduzirem suas idéias, mostrou que a R. G. pode ser escrita como uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz [3],[22].

Apesar disso já ser um grande avanço os problemas continuam. Para sermos mais realísticos devemos usar o grupo padrão de simetria para a física de partículas que é o grupo de Poincaré, acrescentando assim às transformações de Lorentz as translações. Para isso devemos identificar a invariância de difeomorfismo com as translações locais de modo a levar o grupo de Lorentz ao grupo de Poincaré, do qual o grupo de Lorentz é um subgrupo. Contudo não se conseguiu provar para nenhuma ação gravitacional que a mesma seja invariante sob o grupo de translações locais, que é a representação da invariância de difeomorfismo no espaço tangente. Isto ocorre porque as constantes de estrutura das teorias de calibre são substituídas nas teorias gravitacionais por "funções de estrutura" que dependem dos campos métricos dinâmicos, fazendo que em cada ponto elas se alterem, o que implica no grupo de simetria não ser uniformemente definido através do espaço-tempo e consequentemente não podermos interpretar a gravitação em termos de fibrados tangentes.

Podemos também dizer que o problema está no fato de que apesar das vierbeine e da conexão de spin coincidirem com os geradores do grupo G, não existe uma 4-forma invariante de Poincaré que seja construída com a conexão da álgebra de Lie de G. Deste modo a afirmativa de que a gravitação é uma teoria de calibre para o grupo de translação fica prejudicada pelas profundas diferenças entre uma teoria de calibre com estrutura de fibrado tangente e outra com álgebra aberta, como é a gravitação. Modernamente tem se tentado usar grupos mais gerais que o de Poincaré que tenha Lorentz como subgrupo e que contenha simetrias análogas às translações em certas aproximações [3].

O problema descrito acima, contudo, não ocorre na teoria teleparalela da gravitação, onde o único campo "gravitacional"presente é o campo de torção. Na teoria teleparalela pode-se construir uma ação gravitacional que é invariante sob o grupo de translações locais.

1.4 Física Planar

1.4.1 Gravitação em (1+2)-D

No passado pouco interesse houve em se desenvolver teorias de gravitação em dimensões mais baixas; ao contrário do que ocorria em outras áreas da física, desde a Mecânica Quântica (onde modelos unidimensionais são usados para se introduzir conceitos de quantização de energia e tunelamento) até a Teoria de Campos (onde teorias bidimensionais são usadas para descrever efeitos como quebra espontânea de simetria e sólitons), passando pela Mecânica Estatística (onde o modelo de Ising bidimensional é um sistema completamente solúvel, apresentando transição de fase) e outras áreas. Isso talvez tenha se dado devido ao fato da teoria de Einstein não apresentar graus de liberdade dinâmicos nesses casos.

Entretanto, mais recentemente, o interesse em tais teorias vem se consolidando, principalmente após se notar que a falta de um verdadeiro conteúdo dinâmico não impossibilita o aparecimento de aplicações interessantes, como se mostra no caso das teorias de Yang-Mills em 2-D. Ao contrário, gravitação em 3-D contém características em comum com gravitação em 4-D, tais como efeitos topológicos globais não-triviais. Além do mais, mostrou-se que a dinâmica pode aparecer se acrescentarmos termos tipo Chern-Simons [23], ou de ordem superior na curvatura (tipo escalar de curvatura ao quadrado ou Ricci ao quadrado) [24]. Após a descoberta de que a gravitação de Einstein-Chern-Simons em 3-D é renormalizável [25],[26],[27] e que em 3-D a gravitação também é uma teoria de calibre completa, grande interesse surgiu nesses modelos, principalmente após a teoria de cordas abrir a possibilidade de muitas dimensões, onde termos de Chern-Simons podem ocorrer e muitos outros, com grande complexidade, fazendo com que a gravitação em 3-D seja um grande laboratório teórico para melhor se compreender certos aspectos difíceis das mesmas.

Além disso, a gravitação planar pode se revelar presente na natureza caso observe-se os objetos denominados de cordas-cósmicas, pois as seções perpendiculares ao seu eixo são descritas unicamente por modelos de gravitação planar. Se existirem tais objetos a gravitação planar será muito mais que um laboratóri teórico, será parte integrante do mundo.

1.4.2 Formalismo de Primeira Ordem e Torção.

O formalismo de primeira ordem, baseado nas vielbeine[2] e na conexão de spin, em uma teoria do tipo Einstein-Cartan, em princípio deveria reproduzir equivalentemente todos os resultados obtidos usando-se o formalismo tradicional da conexão afim, onde definimos a curvatura e a torção por meio dela. Na verdade existe um grande número de resultados que aparentemente confirmam isto. Ao nível clássico, esta equivalência é completa. Contudo, quando enveredamos para uma versão tipo teoria quântica de campo, diferenças podem aparecer e devemos adotar as vielbeine e a conexão de spin como os graus de liberdade independentes e fundamentais.

A possibilidade da gravitação ser formulada em termos de um formalismo de primeira ou de segunda ordem torna-se significante quando desejamos quantizar a gravidade. Em um trabalho anterior [24] preparamos o caminho para a quantização da gravitação em 3-D considerando a torção propriamente dita (através de suas componentes irredutíveis) como sendo o campo fundamental e independente. Procedendo desta forma o espectro de exitações pode ser lido e identificado o carater físico dos diversos polos dos propagadores.

No presente trabalho [28], e esta é sua principal motivação física, nós

[2] Termo que significa "muitas pernas"

adotamos os campos de "vielbein" e de conexão de spin como sendo os verdadeiros campos fundamentais que descrevem a propagação do campo gravitacional. O resultado relevante disto foi o fato de obtermos um espectro de excitações diferente, o que prova, no que diz respeito a quantização, que a torção não deve ser pensada como um campo fundamental. Este ponto de vista funcionando melhor como uma espécie de formulação efetiva de campo. Os graus de liberdade verdadeiros e fundamentais associados a gravidade sendo portando as "vielbein" e a conexão de spin. Em nosso presente trabalho, fazemos um esforço em descrever os modos de excitações que estes campos carregam. Este é o principal proposito físico de nosso esforço.

1.5 Organização da Tese

Para investigarmos isto começaremos com uma análise, usando o formalismo de primeira ordem, de um modelo tradicional de gravitação em (1+2)-D [24], onde estudamos a inclusão da torção numa teoria de Einstein-Chern-Simons com termos de derivadas de ordem superior, tudo no formalismo de conexão afim. Nesta análise, devido a problemas de inversibilibade que aparecem na teoria devido ao uso do formalismo local, somos forçados a mudar para uma ação mais simples, onde consideraremos somente o Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons com termos algébricos na torção.

Deste modo, organizamos o trabalho de acordo com as seguintes fases: no Capítulo 2, apresentamos uma revisão da teoria de Einstein-Cartan com o propósito básico de fixar a notação e mostrar as nossas convenções. Em seguida, no Capítulo 3, o modelo geral é apresentado e a decomposição da ação em termos dos operadores de spin é realizada, onde apontamos um sério problema relacionado a excitação no setor de spin-2. Isto nos motiva a introduzir e analisar um número de termos de torção na ação de Einstein-Chern-Simons, abandonando os termos de ordem superior anteriormente introduzidos. Isto é feito no Capítulo 4. No Capítulo 5, enfrentamos o desafio de computar os propagadores a "tree-level" e analizar seus polos com os correspondentes resíduos, de modo a localizar regiões fisicamente relevantes no espaço de parâmetros. Para terminar, apresentamos nossas Conclusões e Perspectivas Futuras com uma descrição crítica dos resultados principais e possíveis questões de pesquisa para projetos futuros.

Capítulo 2

Elementos da Teoria de Einstein-Cartan

2.1 Motivação

A Teoria de Einstein-Cartan é motivada principalmente por razões teóricas. Tenta-se com ela compatibilizar os princípios geométricos da Relatividade Geral com os parâmetros que descrevem o domínio microscópico da matéria, de forma a tentar estabelecer uma comparação direta entre a gravitação e as outras interações (forte, fraca e eletromagnética) da natureza. Essa tentativa de compatibilização surge através da percepção que as partículas elementares, descritas pelas leis da Relatividade Restrita e da Mecânica Quântica, são caracterizadas por sua massa e pelo seu spin, entre outras quântidades.

Deste modo, para descrever a dinâmica das partículas elementares precisamos, além do tensor de energia-momentum, conhecer o tensor de densidade de spin. Como na Relatividade Geral só o tensor de energia-momentum entra em cena, surge o desejo de extendê-la para que possa também descrever o tensor de densidade de spin.

Como a energia está geometricamente associada a curvatura do espaço-tempo, o spin deve ser associado a alguma outra propriedade geométrica do espaço-tempo de forma a se manter o espírito de uma teoria geométrica da gravidade. A torção do espaço-tempo, definida pela parte anti-simétrica da conexão afim,

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(x) = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(x) - \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\gamma}(x) = 2\Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\gamma}(x) \qquad (2.1)$$

tem essa propriedade e representa uma generalização natural da Relatividade Geral que pode dar uma descrição geométrica da matéria mesmo na sua aproximação microscópica.

Deste modo, a Teoria de Einstein-Cartan que introduz a torção, muda ligeiramente a geometria do espaço-tempo que passa a ser denominada de geometria de Riemann-Cartan.

2.2 Um Pouco de Geometria

Em uma variedade do tipo Riemann-Cartan a conexão afim é dada pela expressão:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \left\{ {}^{\gamma}_{\alpha\beta} \right\} + K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}, \tag{2.2}$$

onde $\left\{ {}^{\gamma}_{\alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda}(\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta})$, simétrico em α e β, é o símbolo (ou conexão) de Chritoffel, expresso em termos da métrica $g_{\alpha\beta}(x)$, e $K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \mathcal{T}\,{}^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \mathcal{T}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\alpha})$, anti-simétrico nos últimos dois índices, é o tensor de contorsão, expresso em termos da torção $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(x)$ (lembre-se que a torção é anti-simétrica nos seus dois primeiros índices).

Por meio desta conexão a derivada covariante de um vetor, $V^{\gamma}(x)$, é expressa por:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha V^{\gamma} &= \partial_\alpha V^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} V^{\beta}. \\ &= \partial_\alpha V^{\gamma} + \left\{ {}^{\gamma}_{\alpha\beta} \right\} V^{\beta} + K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} V^{\beta}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Esta variedade respeita a condição de metricidade e por isso,

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta}(x) = 0. \tag{2.4}$$

Com a introdução da conexão em (2.2) a curva que autoparalelamente transporta seu vetor tangente,

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\alpha^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\alpha}\frac{dx^\beta}{d\alpha} + K_{(\alpha\beta)}{}^\gamma \frac{dx^\alpha}{d\alpha}\frac{dx^\beta}{d\alpha} = 0$$
$$\frac{d^2x^\gamma}{d\alpha^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\alpha}\frac{dx^\beta}{d\alpha} + \mathcal{T}^{\ \gamma}{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\alpha}\frac{dx^\beta}{d\alpha} = 0, \tag{2.5}$$

difere da curva que extremiza o comprimento, ou seja, da curva geodésica, dada por:

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\alpha^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\alpha}\frac{dx^\beta}{d\alpha} = 0. \tag{2.6}$$

ambas só coincidirão se a torção for completamente anti-simétrica ou nula.

Dada a definição do tensor de curvatura (ou de Riemann),

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^\nu = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}{}^\nu + \Gamma_{\mu\rho}{}^\nu \Gamma_{\alpha\beta}{}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho}{}^\nu \Gamma_{\mu\beta}{}^\rho, \tag{2.7}$$

e sendo a conexão dada por (2.2), podemos reescrevê-lo como:

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^\nu = R_{\mu\alpha\beta}{}^\nu + \mathfrak{D}_\mu K_{\alpha\beta}{}^\nu - \mathfrak{D}_\alpha K_{\mu\beta}{}^\nu + K_{\mu\gamma}{}^\nu K_{\alpha\beta}{}^\gamma - K_{\alpha\gamma}{}^\nu K_{\mu\beta}{}^\gamma, \tag{2.8}$$

sendo $R_{\mu\alpha\beta}{}^\nu$ o tensor de curvatura puramente Riemanneano e

$$\mathfrak{D}_\mu K_{\alpha\beta}{}^\nu = \partial_\mu K_{\alpha\beta}{}^\nu - \left\{ {\gamma \atop \mu\alpha} \right\} K_{\gamma\beta}{}^\nu - \left\{ {\gamma \atop \mu\beta} \right\} K_{\alpha\gamma}{}^\nu + \left\{ {\nu \atop \mu\gamma} \right\} K_{\alpha\beta}{}^\gamma. \tag{2.9}$$

O tensor de Ricci e o escalar de curvatura — bem como várias outras relações, que podem ser vistas em [2],[29] — também são alterados pela presença da torção, assumindo a forma:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \mathfrak{D}_\mu K_{\alpha\beta}{}^\mu + \mathfrak{D}_\alpha t_\beta - t_\gamma K_{\alpha\beta}{}^\gamma - K_{\alpha\gamma}{}^\mu K_{\mu\beta}{}^\gamma \tag{2.10}$$

e

$$\mathcal{R} = R + 2\mathfrak{D}_\alpha t^\alpha - t_\alpha t^\alpha + \frac{1}{4}\mathcal{T}_{\gamma\alpha\mu}\mathcal{T}^{\ \gamma\alpha\mu} + \frac{1}{2}\mathcal{T}_{\gamma\mu\alpha}\mathcal{T}^{\ \gamma\alpha\mu}, \tag{2.11}$$

onde $t_\alpha = \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^\beta$ é o traço da torção. Cabe salientar que na presença de torção $\mathcal{R}_{\alpha\beta} \neq \mathcal{R}_{\beta\alpha}$.

2.3 Equações de Campo e Equações de Movimento

Na teoria de Einstein-Cartan as equações de campo podem ser obtidas por meio de um princípio variacional, semelhantemente a R. G., com a diferença de serem as derivadas covariantes dadas por (2.3) e a variação ser realizada não só em relação a métrica, mas também em relação ao tensor de contorsão. As equações de campo obtidas assim são equações que relacionam o tensor de energia momentum com a curvatura e a torção com o tensor de densidade de spin.

Já as equações de movimento de uma partícula, em geral, não coincidem com as equações das geodésicas, nem com as equações das curvas autoparalelas, pois no primeiro caso a trajetória das partículas-teste não seriam influenciadas pela torção, e no segundo todas as partículas seriam igualmente afetadas, de tal forma que mesmo partículas sem spin seguiriam trajetórias que se desviariam de uma geodésica.

Pode-se mostrar, seguindo-se o procedimento de Papapetrou,[30], usado na Relatividade Geral, que as equações de movimento para uma partícula têm a forma:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} + \left\{ {}^{\alpha}_{\mu\nu} \right\} p^\mu u^\nu + F^\alpha = 0 \ , \tag{2.12}$$

onde p^μ é o quadrimomentum da partícula, u^ν sua quadrivelocidade e F^α um termo de força que aparece da interação do spin da partícula com a geometria da variedade, sendo nulo se a partícula for escalar [2].

No caso de considerarmos partículas fermiônicas é necessário usar o formalismo das vierbeine (ou tetradas), além de se introduzir a conexão de spin, para se obter as equações de movimento. Elementos estes inerentes ao formalismo de primeira ordem.

Preparando o caminho então, vejamos como escrevemos os objetos geométricos definidos acima usando-se as vierbeine e a conexão de spin

2.4 Geometria em Termos da Vierbein e da Conexão de Spin

As vierbein realizam a ligação entre as coordenadas gerais da variedade com as coordenadas locais do espaço-tempo tangente. Representadas por $e_\alpha{}^{\mathsf{a}}(x)$, se relacionam com a métrica pela relação:

$$g_{\alpha\beta}(x) = e_\alpha{}^{\mathsf{a}}(x) e_\beta{}^{\mathsf{b}}(x) \eta_{\mathsf{ab}}, \tag{2.13}$$

onde η_{ab} é a métrica do espaço-tempo tangente. Realizando-se uma transformação local de Lorentz a variação da vierbein se transforma como um tensor se definirmos a derivada covariante,

$$D_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = \partial_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} + \omega_{\gamma\mathsf{i}}{}^{\mathsf{a}} e_\alpha{}^{\mathsf{i}}, \tag{2.14}$$

onde $\omega_{\gamma\mathsf{i}}{}^{\mathsf{a}}$ é a conexão de spin, relacionada com os geradores da transformação infinitesimal de Lorentz ω_{ab} por $\omega_{\mathsf{ab}} = \omega_{\mu\mathsf{ab}} dx^\mu$, sendo portando uma matrix 1-forma.

Em relação a uma transformação geral de coordenadas a derivada covariante fica:

$$\nabla_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = D_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} - \Gamma_{\gamma\alpha}{}^\lambda e_\lambda{}^{\mathsf{a}}, \tag{2.15}$$

que por definição é igual a zero, $\nabla_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = 0$. Esta definição garante que a metricidade é preservada, $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$, e estabelece a relação entre a conexão afim e a de spin:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = e_{\mathsf{j}}{}^{\gamma} D_\alpha e_\beta{}^{\mathsf{j}} = e_{\mathsf{j}}{}^{\gamma}\left(\partial_\alpha e_\beta{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} e_\beta{}^{\mathsf{i}}\right) = e_{\mathsf{j}}{}^{\gamma}\partial_\alpha e_\beta{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} e_\beta{}^{\mathsf{i}} e_{\mathsf{j}}{}^{\gamma} \tag{2.16}$$

Desta relação podemos facilmente escrever a torção e a curvatura do espaço-tempo em termos da conexão de spin, ficando:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 2\Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\gamma} = e_{\mathsf{j}}{}^{\gamma}(\partial_\alpha e_\beta{}^{\mathsf{j}} - \partial_\beta e_\alpha{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} e_\beta{}^{\mathsf{i}} - \omega_{\beta\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} e_\alpha{}^{\mathsf{i}}) \tag{2.17}$$

e

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu} = e_\beta{}^{\mathsf{i}} e_{\mathsf{j}}{}^{\nu}(\partial_\mu \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} - \partial_\alpha \omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\mu\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}} - \omega_{\alpha\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}}). \tag{2.18}$$

Lembrando que o tensor de Ricci e o escalar de curvatura são dados por:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}{}^{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}{}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\mu}\Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho} \tag{2.19}$$

e

$$\mathcal{R} = g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\beta}. \tag{2.20}$$

Temos:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = e_{\beta}{}^{\mathsf{i}} e_{\mathsf{j}}{}^{\mu} (\partial_{\mu} \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} - \partial_{\alpha} \omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\mu\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}} \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}} - \omega_{\alpha\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}} \omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}}) \tag{2.21}$$

$$\mathcal{R} = \eta^{\mathsf{ai}} e_{\mathsf{a}}{}^{\alpha} e_{\mathsf{j}}{}^{\mu} (\partial_{\mu} \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} - \partial_{\alpha} \omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\mu\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}} \omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}} - \omega_{\alpha\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}} \omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}}). \tag{2.22}$$

Para finalizar podemos salientar que a conexão de spin pode ser decomposta, usando-se combinações de (2.15), numa parte puramente Riemanniana, γ_{abc}, envolvendo somente produtos das vierbeine com suas derivadas, e numa parte dependente da contorsão, K_{abc}. Assim:

$$\omega_{\mathsf{abc}} = \gamma_{\mathsf{abc}} - K_{\mathsf{abc}}. \tag{2.23}$$

Capítulo 3

Um Problema Relacionado à Excitação de Spin-2

3.1 A Ação

Como ponto de partida à nossa análise consideraremos a ação:

$$\mathcal{S} = \int d^3x \; e \left(\mathsf{a}_1 \mathcal{R} + \mathsf{a}_2 \mathcal{R}^2 + \mathsf{a}_3 \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta} + \mathsf{a}_4 \mathcal{L}_{CS} \right) , \tag{3.1}$$

onde

$$\mathcal{L}_{CS} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Gamma_{\gamma\delta}{}^{\lambda} \left(\partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}{}^{\delta} + \frac{2}{3} \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\delta} \Gamma_{\beta\lambda}{}^{\rho} \right) , \tag{3.2}$$

é o termo topológico de Chern-Simons, sendo

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta\gamma}}{e}, \tag{3.3}$$

o tensor completamente anti-simétrico de uma variedade curva em (1+2)-D. $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ é a densidade tensorial de Levi-Civita para uma variedade plana com a mesma dimensão anterior e $e = \sqrt{g}$, onde $g = \det(g_{\alpha\beta}) = \eta e^2$. Para uma clara e detalhada discussão sobre teorias com o termo de Chern-Simons veja [3], [31]. Para teorias quadráticas de gravitação em (1+2)-D com o termo de Chern-Simons veja também [32], [33].

Termos quadráticos na curvatura são usualmente introduzidos em (1+3)-D para tentar controlar a renormalização da teoria. Deste modo retomamos esse tipo de discussão, agora em (1+2)-D, ao considerarmos a ação (3.1). Na mesma os coeficientes a_1, a_2, a_3 e a_4 são parâmetros livres a serem ajustados de forma a garantir o controle da unitaridade da teoria.

Como o tensor de Riemann, $\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu}$, tem o mesmo número de graus de liberdade que o tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$, em três dimensões, um termo quadrático em $\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu}$ não é necessário na ação.

Em [24], [29] nós estudamos a ação (3.1) usando a conexão afim definida em (2.2). Naquele estudo fizemos a decomposição do tensor de torção em suas componentes irredutíveis sob o grupo SO(1,2), a saber: um escalar, φ, vindo de sua parte completamente anti-simétrica, um trivetor, proveniente do traço, $t^{\mu} = \mathcal{T}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\alpha}$, e um tensor simétrico, $X^{\mu\nu}$, de ordem(rank)-2 e traço nulo. Com este procedimento encontramos um espectro de partículas onde somente excitações massivas de puro spin-2, associadas aos campo gravitacional linearizado, $h^{\mu\nu}$, e ao tensor $X^{\mu\nu}$, tinham dinâmica que preservava a unitaridade, para certo intervalo de valores dos parâmetros livres da ação. Em vista dos resultados obtidos e do mostrado em [34], [35], vemos que podemos construir uma teoria de gravidade (livre) em 3-D, sem partículas fantasmas uma vez que certas imposições são colocadas sobre os parâmetros do Lagrangeano. Assim, de nossa prévia discussão, obtemos o resultado da possibilidade de se construir um modelo de gravidade de derivadas superiores em 3-D com a unitaridade sob controle (para a teoria livre). Veja também [36].

Reconsideraremos agora a ação (3.1), mas contrário ao que foi feito anteriormente, proporemos a adoção do formalismo de primeira ordem, onde devemos abandonar a visão da torção como sendo um campo fundamental da natureza e elegendo os campos associados as "dreibein"[1], $e_{\alpha}{}^{\mathsf{a}}$, e a conexão de spin, $\omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{bc}}$, como sendo os campos quânticos fundamentais, o que revela a completa estrutura de gauge da gravidade.

[1] Termo que significa "três pernas"

3.1.1 Aproximações e Decomposições para a Ação

Iniciaremos nosso estudo observando que a expansão para campo gravitacional fraco em termo das "dreibein"deve ser escrita como:

$$e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = \delta_\alpha{}^{\mathsf{a}} + \frac{k}{2} H_\alpha{}^{\mathsf{a}} \left(\Rightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + k h_{\alpha\beta}, \quad h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(H_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}) \right), \quad (3.4)$$

onde o campo $H_{\alpha\beta}$ pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica, que na base local é expressa por:

$$H_{\mathsf{ab}} = h_{\mathsf{ab}} + \mathcal{H}_{\mathsf{ab}} \ , \ h_{\mathsf{ab}} = H_{(\mathsf{ab})} \ \ e \ \ \mathcal{H}_{\mathsf{ab}} = H_{[\mathsf{ab}]}. \quad (3.5)$$

A parte anti-simétrica ainda pode ser descrita por:

$$\mathcal{H}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}} h^{\mathsf{c}} \Rightarrow h_{\mathsf{a}} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathsf{abc}} \mathcal{H}^{\mathsf{bc}}. \quad (3.6)$$

Sendo $e = \sqrt{g}$ a expressão (3.4) permite-nos escrever:

$$e = 1 + \frac{k}{2} H, \quad (3.7)$$

onde $H = H_\alpha{}^\alpha = H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}} = tr(H_\alpha{}^{\mathsf{a}})$.

Contudo $h = h_\alpha^\alpha = tr(h_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} tr(H_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}) = tr(H_{\alpha\beta}) = H$ e podemos escrever (3.7) na forma:

$$e = 1 + \frac{k}{2}h. \tag{3.8}$$

Usando essa aproximação os termos da ação tomam a forma:

$$\mathcal{L}_1 = \mathsf{a}_1 e\mathcal{R} = \mathsf{a}_1 \left(\mathcal{R} + \frac{k}{2}h\mathcal{R}\right), \tag{3.9}$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathsf{a}_2 e\mathcal{R}^2 = \mathsf{a}_2 \left(\mathcal{R}^2 + \frac{k}{2}h\mathcal{R}^2\right), \tag{3.10}$$

$$\mathcal{L}_3 = \mathsf{a}_3 e\mathcal{R}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^{\alpha\beta} = \mathsf{a}_3 \left(\mathcal{R}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^{\alpha\beta} + \frac{k}{2}h\mathcal{R}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^{\alpha\beta}\right) \tag{3.11}$$

e

$$\mathcal{L}_4 = \mathsf{a}_4 e\mathcal{L}_{CS} = \mathsf{a}_4 \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\delta}{}^{\lambda}\left(\partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}{}^{\delta} + \frac{2}{3}\Gamma_{\alpha\rho}{}^{\delta}\Gamma_{\beta\lambda}{}^{\rho}\right). \tag{3.12}$$

Usando agora as definições (2.16), (2.21) e (2.22) que expressam a conexão afim, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura em termos das "dreibein" e da conexão de spin, conjuntamente com (3.4) e retendo somente os termos da ação que contribuem no máximo quadraticamente nos campos, podemos escrever, para cada termo:

$$\mathcal{L}_1 = \mathsf{a}_1 \left[2\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + \omega_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{bc}} - \omega_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ab}} + k(h\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} - h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ba}})\right], \tag{3.13}$$

e como $2\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}}$ é uma divergência total que pode ser retirada da ação, ficando,

$$\mathcal{L}_1 = \mathsf{a}_1 \left[\omega_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{bc}} - \omega_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ab}} + k(h\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} - h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ba}})\right], \quad (3.14)$$

$$\mathcal{L}_2 = 4\mathsf{a}_2\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{dc}}, \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L}_3 = \mathsf{a}_3 \left(\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{bc}}{}^{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{d}}\omega^{\mathsf{bcd}} - \partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{bc}}{}^{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{cd}} + \partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{d}}\omega^{\mathsf{bcd}} - \partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{cd}}\right) \quad (3.16)$$

e

$$\mathcal{L}_4 = \mathsf{a}_4 \left(\frac{k}{2}\epsilon^{\mathsf{abc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{e}}h^{\mathsf{d}}_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{cd}}{}^{\mathsf{e}} + \epsilon^{\mathsf{abc}}\omega_{\mathsf{cd}}{}^{\mathsf{e}}\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{eb}}{}^{\mathsf{d}}\right). \quad (3.17)$$

Cabe ressaltar aqui, como pode ser visto nos termos acima, que deliberadamente omitimos o campo gravitacional anti-simétrico, h_{a}, proveniente da decomposição (3.6). Adiantamos que a omissão desses três graus de liberdade nessa seção em nada alterará as nossas conclusões, pois não chegaremos a calcular propagadores nesta parte e o resultado que queremos frisar nessa seção independe desses graus estarem presentes ou não. Deste modo, por economia na escrita das fórmulas, simplificando sua aparência, descartamos esses termos. Na próxima seção eles serão devidamente levados em consideração.

3.1.2 Ação Quadrática

A ação (3.1) reescrita até segunda ordem nos campos fica então:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}= \int d^3x \Big\{ & \mathsf{a}_1 \left[\eta_{\mathsf{ce}} \left(\omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{ea}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{bc}} - \omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ea}}\omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{bc}}\right) + k(h\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} - h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ba}})\right] \\ & - 4\mathsf{a}_2\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{dc}} - \mathsf{a}_3\eta_{\mathsf{ce}}\eta^{\mathsf{bf}}(\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ea}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{d}}\omega_{\mathsf{f}}{}^{\mathsf{cd}} - \omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ea}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{f}}\omega_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{cd}} \\ & + \omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{ea}}\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{d}}\omega_{\mathsf{f}}{}^{\mathsf{cd}} - \omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{ea}}\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{f}}\omega_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{cd}}) + \mathsf{a}_4\eta_{\mathsf{df}}\eta_{\mathsf{bk}}\epsilon^{\mathsf{abc}}\left(\frac{k}{2}h^{\mathsf{dk}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{e}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{fe}} + \omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{fe}}\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{e}}{}^{\mathsf{kd}}\right)\Big\} .\end{aligned} \tag{3.18}$$

Em (1+2)-D a conexão de spin pode ser decomposta em:

$$\omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{bc}} = \epsilon^{\mathsf{bcd}}Y_{\mathsf{ad}}, \tag{3.19}$$

onde Y_{ab} pode ser expresso da seguinte maneira,

$$Y_{\mathsf{ab}} = y_{\mathsf{ab}} + \mathcal{Y}_{\mathsf{ab}} \ , \ y_{\mathsf{ab}} = Y_{(\mathsf{ab})} \ \ e \ \ \mathcal{Y}_{\mathsf{ab}} = Y_{[\mathsf{ab}]}. \tag{3.20}$$

A parte anti-simétrica ainda pode ser descrita por:

$$\mathcal{Y}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}}y^{\mathsf{c}} \Rightarrow y_{\mathsf{a}} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathsf{abc}}\mathcal{Y}^{\mathsf{bc}}. \tag{3.21}$$

Substituindo as expressões (3.19), (3.20) e (3.21) na ação (3.18), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}= \int d^3x \Big\{ & \mathsf{a}_1 \left\{\eta_{\mathsf{ce}}\epsilon^{\mathsf{eai}}\epsilon^{\mathsf{bcj}} \left[\left(y_{\mathsf{ai}}+\epsilon_{\mathsf{ail}}y^{\mathsf{l}}\right)\left(y_{\mathsf{bj}}+\epsilon_{\mathsf{bjk}}y^{\mathsf{k}}\right)-\left(y_{\mathsf{bi}}+\epsilon_{\mathsf{bil}}y^{\mathsf{l}}\right)\left(y_{\mathsf{aj}}+\epsilon_{\mathsf{ajk}}y^{\mathsf{k}}\right)\right]\right. \\
& \left. +k\epsilon^{\mathsf{bai}}\left[h\partial_{\mathsf{a}}\left(y_{\mathsf{bi}}+\epsilon_{\mathsf{bil}}y^{\mathsf{l}}\right)-h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\left(y_{\mathsf{bi}}+\epsilon_{\mathsf{bil}}y^{\mathsf{l}}\right)+h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{b}}\left(y_{\mathsf{ci}}+\epsilon_{\mathsf{cil}}y^{\mathsf{l}}\right)\right]\right\} \\
& -4\mathsf{a}_2\epsilon^{\mathsf{bai}}\epsilon^{\mathsf{dcj}}\left(y_{\mathsf{bi}}+\epsilon_{\mathsf{bil}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\left(y_{\mathsf{dj}}+\epsilon_{\mathsf{djk}}y^{\mathsf{k}}\right) \qquad (3.22) \\
& -\mathsf{a}_3\eta_{\mathsf{ce}}\eta^{\mathsf{bf}}\epsilon^{\mathsf{eai}}\epsilon^{\mathsf{cdj}}[\left(y_{\mathsf{bi}}+\epsilon_{\mathsf{bil}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{d}}\left(y_{\mathsf{fj}}+\epsilon_{\mathsf{fjk}}y^{\mathsf{k}}\right)-\left(y_{\mathsf{bi}}+\epsilon_{\mathsf{bil}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{f}}\left(y_{\mathsf{dj}}+\epsilon_{\mathsf{djk}}y^{\mathsf{k}}\right) \\
& +\left(y_{\mathsf{ai}}+\epsilon_{\mathsf{ail}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{d}}\left(y_{\mathsf{fj}}+\epsilon_{\mathsf{fjk}}y^{\mathsf{k}}\right)-\left(y_{\mathsf{ai}}+\epsilon_{\mathsf{ail}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{f}}\left(y_{\mathsf{dj}}+\epsilon_{\mathsf{djk}}y^{\mathsf{k}}\right)] \\
& +\mathsf{a}_4\eta_{\mathsf{df}}\eta_{\mathsf{bk}}\epsilon^{\mathsf{abc}}\epsilon^{\mathsf{fei}}\left[\frac{k}{2}h^{\mathsf{dk}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{e}}\left(y_{\mathsf{ci}}+\epsilon_{\mathsf{cil}}y^{\mathsf{l}}\right)+\epsilon^{\mathsf{kdj}}\left(y_{\mathsf{ci}}+\epsilon_{\mathsf{cil}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\left(y_{\mathsf{ej}}+\epsilon_{\mathsf{ejk}}y^{\mathsf{k}}\right)\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

3.2 Operadores de Spin

3.2.1 A Ação Simetrizada e em Termos dos Operadores

Procurando uma forma mais conveniente para expressar a ação (3.22), usaremos o formalismo de Barnes-Rivers de operadores de projeção de spin, introduzido em [37], [38]. Na verdade, usaremos uma extensão desse formalismo para (1+2)-D, como em [24], [29].

Para identificarmos esses operadores devemos primeiramente completamente simetrizar e anti-simetrizar a ação (3.22), escrevendo o Lagrangeano associado na forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varphi\mathcal{O}\varphi$, onde φ representa os campos da teoria e $\mathcal{O}$ os operadores que atuam nesses campos. Executando tal procedimento, o que envolve uma longa álgebra, podemos escrever a ação (3.22) na forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}= \int d^3x\frac{1}{2}\Bigg\{ & \mathsf{a}_1 \Big(y^{\mathsf{ab}}\left[2\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\sqrt{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})\right] y^{\mathsf{cd}} \\
& - y^{\mathsf{a}}\left[4(\theta_{\mathsf{a,c}} + \omega_{\mathsf{a,c}})\right] y^{\mathsf{c}} + \frac{k}{4}h^{\mathsf{ab}}\left[\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}\right] y^{\mathsf{cd}} + \frac{k}{4}y^{\mathsf{ab}}\left[\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}\right] h^{\mathsf{cd}} \\
& - \frac{k}{2}h^{\mathsf{ab}}\left[2(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}} - \mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}}\right] y^{\mathsf{c}} + \frac{k}{2}y^{\mathsf{a}}\left[2(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}} - \mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}}\right] h^{\mathsf{bc}}\Big) \\
& + \mathsf{a}_2(y^{\mathsf{a}}\left[32\Box\omega_{\mathsf{a,c}}\right] y^{\mathsf{c}}) + \mathsf{a}_3(y^{\mathsf{ab}}\left[-\Box(2\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}})\right] y^{\mathsf{cd}} \\
& + y^{\mathsf{a}}\left[-\Box(2\theta_{\mathsf{a,c}} + 12\omega_{\mathsf{a,c}})\right] y^{\mathsf{c}} - y^{\mathsf{ab}}[\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}]y^{\mathsf{c}} - y^{\mathsf{a}}[\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}}]y^{\mathsf{bc}}) \\
& + \mathsf{a}_4\left(y^{\mathsf{ab}}\left[\frac{1}{2}(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})\right] y^{\mathsf{cd}} + y^{\mathsf{a}}\left[\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}\right] y^{\mathsf{c}} + y^{\mathsf{ab}}[\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}}]y^{\mathsf{c}} - y^{\mathsf{a}}[\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}}]y^{\mathsf{bc}}\right. \\
& \left. + h^{\mathsf{ab}}\left[\frac{k\Box}{2}(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}})\right] y^{\mathsf{cd}} + y^{\mathsf{ab}}\left[\frac{k\Box}{2}(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}})\right] h^{\mathsf{cd}}\right)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\theta_{\mathsf{bd}} + \theta_{\mathsf{ad}}\theta_{\mathsf{bc}}) - \frac{1}{2}\theta_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}}, \\
\mathsf{P}^{(1-m)}_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\omega_{\mathsf{bd}} + \theta_{\mathsf{ad}}\omega_{\mathsf{bc}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}}), \\
\mathsf{P}^{(0-s)}_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{1}{2}\theta_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}}, \\
\mathsf{P}^{(0-w)}_{\mathsf{ab,cd}} &= \omega_{\mathsf{ab}}\omega_{\mathsf{cd}}, \\
\mathsf{P}^{(0-sw)}_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mathsf{ab}}\omega_{\mathsf{cd}}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

e

$$\mathsf{P}^{(0-ws)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}},$$

são os operadores usuais de Barnes-Rivers em (1+2)-D, sendo $\theta_{\mathsf{ab}} = \eta_{\mathsf{ab}} - \omega_{\mathsf{ab}}$ e $\omega_{\mathsf{ab}} = \frac{\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{b}}}{\Box}$, os projetores transverso e longitudinal, respectivamente, que atuam em campos vetoriais para separar suas componentes de spin-1 e spin-0. Supomos aqui que todos os operadores diferenciais que aparecem nos operadores de spin são devidamente substituidos por trivetores de momentum no espaço de Fourier. Além dos operadores usuais de Barnes-Rivers encontramos também:

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\theta_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\theta_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}},$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\omega_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\omega_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}}, \tag{3.25}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}}\partial^{\mathsf{c}}$$

e

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} = \eta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} + \eta_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{b}},$$

são quatro operadores que extendem a álgebra usual dos operadores de spin, já conhecidos de [24], [29], mas oriundos da torção e do termo de Chern-Simons e não dos efeitos de anti-simetrização das partes anti-simétricas dos campos como aqui. O operador:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}} = \mathsf{A}_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} + \mathsf{A}_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{b}}, \tag{3.26}$$

é um novo operador que aparece associado a essa ação, proveniente do acoplamento da parte simétrica do campo com sua parte anti-simétrica.

Neste trabalho estamos usando a notação de [38] para os operadores de spin, referindo-se ao tensor de energia-momentum no referencial de repouso, onde o superescrito (2) refere-se ao setor de spin-2 puro do campo, $(1-m)$ à parte relacionada ao vetor de momentum de spin-1, $(0-s)$ está relacionado ao escalar de "stress"de spin-0 e $(0-w)$ ao escalar de energia; $(0-sw)$ e $(0-ws)$ indicam os operadores que mapeiam espaços com o mesmo spin. Os outros dois superescritos, $(2a)$ e $(1a)$, indicam que esses operadores só apresentam relação de comutação com o operador de spin-2 e de spin-1, respectivamente.

3.2.2 Álgebra dos Operadores

Relembramos aqui que os operadores usuais de Barnes-Rivers obedecem a álgebra:

$$\mathsf{P}^{(i-a)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-b)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{ab}\mathsf{P}^{(j-b)}_{\mathsf{ab,cd}},$$

$$\mathsf{P}^{(i-ab)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-cd)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{bc}\mathsf{P}^{(j-a)}_{\mathsf{ab,cd}}, \tag{3.27}$$

$$\mathsf{P}^{(i-a)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-bc)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{ab}\mathsf{P}^{(j-ac)}_{\mathsf{ab,cd}}$$

e

$$\mathsf{P}^{(i-ab)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-c)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{bc}\mathsf{P}^{(j-ac)}_{\mathsf{ab,cd}},$$

bem como satisfazem a identidade tensorial,

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mathsf{ac}}\eta_{\mathsf{bd}} + \eta_{\mathsf{ad}}\eta_{\mathsf{bc}}\right). \tag{3.28}$$

Os outros cinco operadores, com sua própria tabela multiplicativa, têm, entre outros, os seguintes produtos:

$$\begin{gathered}
\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = -16\Box\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}, \\
\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = -4\Box\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}, \\
\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}, \\
\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{R}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}, \\
\mathsf{A}_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = -\Box\theta_{\mathsf{ab}}, \\
\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,}}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box(\theta_{\mathsf{ac}} + 2\omega_{\mathsf{ac}}), \\
\mathsf{B}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{,cd}} = 2\Box(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}),
\end{gathered} \tag{3.29}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{D}_{\mathsf{c,}}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box^2\theta_{\mathsf{ac}}$$

e

$$\mathsf{D}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\Box^2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}.$$

Para uma lista completa de todos os produtos veja o apêndice A.

3.2.3 Ação Quadrática (In)completa

Podemos reparar, na primeira linha da ação (3.23), que não existe um termo $\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}$ para satisfazer a identidade (3.28), o que por sua vez não nos permite inverter o operador associado. Defeito maior aparece no setor do campo h^{ab} como veremos. Sabemos que o primeiro problema pode ser contornado pela introdução de um termo de fixação de calibre, assim, introduzindo os Lagrangeanos de fixação:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{GF-LL} = \xi\left(\partial^\mu\omega_\mu{}^{\mathsf{ab}}\partial^\nu\omega_{\nu\mathsf{ab}}\right) \Longrightarrow \\
&\mathcal{L}_{GF-LL} = \frac{1}{2}(y^{\mathsf{ab}}\left[-2\xi\Box(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}})\right]y^{\mathsf{cd}} + y^{\mathsf{a}}\left[-4\Box\xi\theta_{\mathsf{a,c}}\right]y^{\mathsf{c}} \\
&\qquad + y^{\mathsf{ab}}[2\xi\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}]y^{\mathsf{c}} + y^{\mathsf{a}}[2\xi\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}}]y^{\mathsf{bc}})
\end{aligned} \tag{3.30}$$

e

$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \lambda F_{\mathsf{a}} F^{\mathsf{a}} \ , \ F_{\mathsf{a}} = \partial_{\mathsf{b}} \left(h^{\mathsf{b}}_{\mathsf{a}} - \frac{1}{2} \delta^{\mathsf{b}}_{\mathsf{a}} h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{c}} \right) \Longrightarrow \tag{3.31}$$

$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \frac{1}{2} h^{\mathsf{ab}} \left[-\lambda \Box (\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2} \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})) \right] h^{\mathsf{cd}}.$$

Obtemos a "ação completa":

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}= \int d^3x \frac{1}{2} \Bigg\{ & y^{\mathsf{ab}} \Big[(2\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_3 \Box) \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + (2\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3 \Box - 2\xi \Box) \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
& - (2\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3 \Box) \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} - 4\xi \Box \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\sqrt{2} \mathsf{a}_1 (\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) \\
& + \frac{\mathsf{a}_4}{2} (\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}) \Big] y^{\mathsf{cd}} + y^{\mathsf{a}} [(-4\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_3 \Box - 4\xi \Box) \theta_{\mathsf{a,c}} \\
& + (-4\mathsf{a}_1 - 32\mathsf{a}_2 \Box - 12\mathsf{a}_3 \Box) \omega_{\mathsf{a,c}} + 2\mathsf{a}_4 \mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}] y^{\mathsf{c}} \\
& + y^{\mathsf{ab}} [\mathsf{a}_4 \mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + (2\xi - \mathsf{a}_3) \mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}] y^{\mathsf{c}} \\
& - y^{\mathsf{a}} [\mathsf{a}_4 \mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - (2\xi - \mathsf{a}_3) \mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}}] y^{\mathsf{bc}} \\
& + h^{\mathsf{ab}} \left[-\lambda \Box \left(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2} \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) \right) \right] h^{\mathsf{cd}} \\
& + y^{\mathsf{ab}} \left[\frac{k\Box}{2} \mathsf{a}_4 (\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4} \mathsf{a}_1 (\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}) \right] h^{\mathsf{cd}} \\
& + h^{\mathsf{ab}} \left[\frac{k\Box}{2} \mathsf{a}_4 (\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4} \mathsf{a}_1 (\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}) \right] y^{\mathsf{cd}} \\
& - y^{\mathsf{a}} \left[\frac{k}{2} \mathsf{a}_1 \mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - k \mathsf{a}_1 (\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}}) \partial_{\mathsf{a}} \right] h^{\mathsf{bc}} \\
& + h^{\mathsf{ab}} \left[\frac{k}{2} \mathsf{a}_1 \mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - k \mathsf{a}_1 (\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}}) \partial_{\mathsf{a}} \right] y^{\mathsf{c}} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Mais convenientemente podemos escrever a ação (3.32) na forma:

$$\mathcal{S}=\int d^3x\frac{1}{2}\Phi^T M\Phi \ , \ \Phi = \begin{pmatrix} y^{\mathsf{cd}} \\ \\ y^{\mathsf{c}} \\ \\ h^{\mathsf{cd}} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

onde,

$$M = \begin{pmatrix} M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} & M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} \\ \\ M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{a,c}} & M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} \\ \\ M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} & M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

com,

$$\begin{aligned} M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} &= (2\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + (2\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3\Box - 2\xi\Box)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - (2\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \\ &- 4\xi\Box\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\sqrt{2}\mathsf{a}_1(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{\mathsf{a}_4}{2}(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}), \\ \\ M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} &= \mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}, \\ \\ M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}), \\ \\ M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} &= -\mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}}, \\ \\ M^{yy}_{\mathsf{a,c}} &= -(4\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3\Box + 4\xi\Box)\theta_{\mathsf{a,c}} - (4\mathsf{a}_1 + 32\mathsf{a}_2\Box + 12\mathsf{a}_3\Box)\omega_{\mathsf{a,c}} + 2\mathsf{a}_4\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \\ \\ M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} &= -\frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} = \frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}$$

e

$$M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} = -\lambda\Box\left(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2}\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})\right).$$

Podemos observar que a introdução do termo de fixação de calibre resolveu o problema no setor $\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}$ do campo y^{ab}. Contudo, observemos que o setor $M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}}$ sofre de um sério defeito. Não existe um setor puramente transverso associado ao campo gravitacional, em outras palavras, falta o operador $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ associado ao campo h^{ab}, o que não nos permite inverter a matriz (3.34) para encontrar os propagadores da teoria, dados genericamente por:

$$\langle 0|\, T[F(x)F(y)]\, |0\rangle = iM^{-1}\delta^{(3)}(x-y), \tag{3.36}$$

onde M^{-1} é a matriz inversa associada ao operado M da ação.

Neste ponto cabe a seguinte informação: o problema de invertibilidade que aparece aqui do operador de onda, M, é compreensível, e na verdade deve ser esperado, uma vez que adotando-se o formalismo de primeira ordem algumas componentes do campo gravitacional não são dinâmicas e portanto devem ser descritas em termos das componentes independentes por meio das equações clássicas de movimento, que atualmente desempenham o papel de vínculos de movimento. Isto é uma particularidade de campos auxiliares aparecendo em ações com simetria local. Este é, na verdade, o caso da gravidade.

Podemos ver, deste modo, que uma teoria completamente invertível quando decomposta em termos de um campo de calibre e das componentes do tensor de torção apresenta dificuldades quando adotamos uma versão onde a torção não é considerada como sendo um campo fundamental, sendo este papel dado ao campo de calibre de Lorentz associado a transformações locais, que incorpora a informação da torção em si (por exemplo, na teoria usual de Einstein-Cartan $\omega_{\mathsf{abc}} = \gamma_{\mathsf{abc}} - K_{\mathsf{abc}}$, onde γ_{abc} é a parte "puramente Riemanniana", sem torção, e K_{abc} é o termo de contorsão). O termo de spin-2 do campo de calibre gravitacional é incorporado na parte Riemanniana da conexão de spin no formalismo de primeira ordem.

Uma outra observação que cabe aqui diz respeito ao fato de: se estivermos apenas preocupados com o espectro de excitações associado ao modelo sobre consideração e sua unitaridade, poderiamos simplesmente decompor os campos em suas componentes irredutíveis e diagonalizar a parte bilinear na ação (isto iria separar as componentes físicas das de compensação de calibre), lendo então o espectro. Contudo, as componentes dos campos assim obtidas seriam não locais, uma vez que $\Box^{-1}$ aparece nos projetores que atuam nos campos para separar as suas componentes físicas. Como, além de desejarmos obter os propagadores para os campos locais, temos em mente realizarmos, mais tarde, computações pertubativas a um laço, somos levados a adotar a escolha dos campos completos e portanto somos obrigados a fixar um calibre na ação, de forma a dar propagação as componentes de compensação e inverter o operador de onda.

Dadas as dificuldades associadas a essa ação específica, e para tentar entender melhor o papel da torção no formalismo de primeira ordem, optamos por descartar a ação (3.1) e começarmos novamente, com uma ação sem termos quadráticos na curvatura e com os termos de torção expostos explicitamente. É o que faremos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Introduzindo Termos de Torção

4.1 A Nova Ação

Como mencionado no final do capítulo anterior, para tentar obter uma teoria simples de calibre para a gravitação planar e ainda entender o papel da torção, mudaremos nosso estudo para uma ação onde a torção é colocada explicitamente. Usando a expressão (2.17) escreveremos a torção em termos dos campos de calibre fundamentais.

Assim, nossa nova ação é expressa por:

$$\mathcal{S} = \int d^3x \, e(\mathsf{a}_1\mathcal{R}+\mathsf{a}_2\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma}+\mathsf{a}_3\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha}+\mathsf{a}_4\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\beta}\mathcal{T}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\gamma}+\mathsf{a}_5\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}+\mathsf{a}_6\mathcal{L}_{CS}), \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{L}_{CS}$ é o Lagrangeano de Chern-Simons dado em (3.2) e os coeficientes

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 são parâmetros livres a serem ajustados de forma a garantir o controle da unitaridade da teoria. Como pode ser visto em [34], a motivação para esta forma da ação em relação aos termos de torção, a_2, a_3 e a_4 é que estes são os termos quadráticos mais gerais na torção que podem ser introduzidos preservando a unitaridade da teoria. Para o termo $\mathsf{a}_5\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}$, veja a referência [3].

4.1.1 Expansão em Campo Fraco

Seguindo o procedimento anterior, consideraremos a expansão em campo gravitacional fraco (3.4),

$$e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = \delta_\alpha{}^{\mathsf{a}} + \frac{k}{2}H_\alpha{}^{\mathsf{a}}. \tag{4.2}$$

Lembrando que podemos escrever e como em (3.7),

$$e = 1 + \frac{k}{2}H, \tag{4.3}$$

onde manteremos o H para frizar que nesta parte estaremos considerando os três graus de liberdade provenientes de sua parte anti-simétrica, temos que os termos da ação tomam a forma:

$$\mathcal{L}_1 = \mathsf{a}_1 e\mathcal{R} = \mathsf{a}_1 \left(\mathcal{R} + \frac{k}{2} H\mathcal{R}\right),$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathsf{a}_2 e\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} = \mathsf{a}_2\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} + o(f^3),$$

$$\mathcal{L}_3 = \mathsf{a}_3 e\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} = \mathsf{a}_3\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} + o(f^3), \tag{4.4}$$

$$\mathcal{L}_4 = \mathsf{a}_4 e\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\beta}\mathcal{T}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\gamma} = \mathsf{a}_4\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\beta}\mathcal{T}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\gamma} + o(f^3),$$

$$\mathcal{L}_5 = \mathsf{a}_5\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}$$

e

$$\mathcal{L}_6 = \mathsf{a}_6 e\mathcal{L}_{CS} = \mathsf{a}_6\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\delta}{}^{\lambda}\left(\partial_\alpha\Gamma_{\lambda\beta}{}^{\delta} + \frac{2}{3}\Gamma_{\alpha\rho}{}^{\delta}\Gamma_{\beta\lambda}{}^{\rho}\right).$$

Usando agora as definições (2.16), (2.17) e (2.22) que expressam a conexão afim, a torção e o escalar de curvatura em termos das "dreibein"e da conexão de spin, conjuntamente com (3.4) e retendo somente os termos da ação que contribuem no máximo quadraticamente nos campos, podemos escrever, para cada termo:

$$\mathcal{L}_1 = \mathsf{a}_1\left[2\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + \omega_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{bc}} - \omega_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ab}} + k(H\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ac}} - H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ac}})\right],$$

e sendo $2\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}}$ uma divergencia total,

$$\mathcal{L}_1 = \mathsf{a}_1\left[\omega_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{bc}} - \omega_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ab}} + k(H\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ac}} - H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ac}})\right],$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = \mathsf{a}_2[&-\frac{k^2}{2}(H_{\mathsf{bc}}\Box H^{\mathsf{bc}} - H_{\mathsf{bc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{b}}H^{\mathsf{ac}}) + 2k(\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{abc}} - \partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{bac}})\\ &+ 2(\omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{abc}} - \omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{bac}})],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 = \mathsf{a}_3[&\frac{k^2}{4}(H_{\mathsf{bc}}\Box H^{\mathsf{cb}} + H_{\mathsf{bc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{c}}H^{\mathsf{ba}} - 2H_{\mathsf{bc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{b}}H^{\mathsf{ca}})\\ &+ k(2\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{cab}} - \partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{bac}} + \partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{abc}})\\ &+ \omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{abc}} + \omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{cab}} - 2\omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{bac}}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = \mathsf{a}_4[&-\frac{k^2}{4}(H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{b}}\Box H_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}} + H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{c}}H^{\mathsf{ac}} - 2H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}H^{\mathsf{ac}})\\ &- k(\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ac}} - \partial_{\mathsf{a}}H^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{bc}}) + \omega_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{bc}}],\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5 = \mathsf{a}_5[\epsilon^{\mathsf{abc}}[&\frac{k}{2}(\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}} - \partial_{\mathsf{b}}H_{\mathsf{ac}}) - \frac{k^2}{2}(H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\partial_{\mathsf{d}}H_{\mathsf{bc}} - H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\partial_{\mathsf{b}}H_{\mathsf{dc}})\\ &- k(H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\omega_{\mathsf{dbc}}) + 2\omega_{\mathsf{abc}}],\end{aligned}$$

e sendo também $\epsilon^{\mathsf{abc}}\frac{k}{2}(\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}} - \partial_{\mathsf{b}}H_{\mathsf{ac}}) = \epsilon^{\mathsf{abc}}k\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}$ uma divergência total,

$$\mathcal{L}_5 = \mathsf{a}_5[2\epsilon^{\mathsf{abc}}\omega_{\mathsf{abc}} - \frac{k^2}{2}\epsilon^{\mathsf{abc}}(H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\partial_{\mathsf{d}}H_{\mathsf{bc}} - H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\partial_{\mathsf{b}}H_{\mathsf{dc}}) - k\epsilon^{\mathsf{abc}}H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\omega_{\mathsf{dbc}}]$$

e

$$\mathcal{L}_6 = \mathsf{a}_6[\frac{k}{2}\epsilon^{\mathsf{abc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{e}}H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{d}}\omega_{\mathsf{cd}}{}^{\mathsf{e}} + \epsilon^{\mathsf{abc}}\omega_{\mathsf{cd}}{}^{\mathsf{e}}\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{eb}}{}^{\mathsf{d}}].$$

Deste modo a ação (4.1) reescrita até segunda ordem nos campos fica:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}= \int d^3x\Big\{ & \mathsf{a}_1\left[\omega_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{bc}} - \omega_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ab}} + k(H\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ba}} + H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ac}} - H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{c}}\omega_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ac}})\right] \\ & + \mathsf{a}_2[-\frac{k^2}{2}(H_{\mathsf{bc}}\Box H^{\mathsf{bc}} - H_{\mathsf{bc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{b}}H^{\mathsf{ac}}) + 2k(\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{abc}} - \partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{bac}}) \\ & + 2(\omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{abc}} - \omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{bac}})] + \mathsf{a}_3[\frac{k^2}{4}(H_{\mathsf{bc}}\Box H^{\mathsf{cb}} + H_{\mathsf{bc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{c}}H^{\mathsf{ba}} \\ & - 2H_{\mathsf{bc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial^{\mathsf{b}}H^{\mathsf{ca}}) + k(2\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{cab}} - \partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{bac}} + \partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{bc}}\omega^{\mathsf{abc}}) + \omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{abc}} \\ & + \omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{cab}} - 2\omega_{\mathsf{abc}}\omega^{\mathsf{bac}}] + \mathsf{a}_4[-\frac{k^2}{4}(H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{b}}\Box H_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}} + H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{c}}H^{\mathsf{ac}} - 2H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}H^{\mathsf{ac}}) \\ & - k(\partial_{\mathsf{a}}H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{ac}} - \partial_{\mathsf{a}}H^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{b}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{bc}}) + \omega_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{bc}}] + \mathsf{a}_5[2\epsilon^{\mathsf{abc}}\omega_{\mathsf{abc}} - \frac{k^2}{2}\epsilon^{\mathsf{abc}}(H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\partial_{\mathsf{d}}H_{\mathsf{bc}} \\ & - H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\partial_{\mathsf{b}}H_{\mathsf{dc}}) - k\epsilon^{\mathsf{abc}}H_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}\omega_{\mathsf{dbc}}] + \mathsf{a}_6[\frac{k}{2}\epsilon^{\mathsf{abc}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{e}}H_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{d}}\omega_{\mathsf{cd}}{}^{\mathsf{e}} + \epsilon^{\mathsf{abc}}\omega_{\mathsf{cd}}{}^{\mathsf{e}}\partial_{\mathsf{a}}\omega_{\mathsf{eb}}{}^{\mathsf{d}}]\Big\}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.1.2 Decomposição em Campos Componentes

Usando agora as decomposições (3.5) e (3.6) que expressam o campo gravitacional, H_{ab}, em termos de h_{ab} e h_{a}, bem como (3.19) (3.20) e (3.21) que explicitam o campo de calibre da transformação de Lorentz local, $\omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{bc}}$, em termos de y_{ab} e y_{a}, podemos reescrever a ação (4.6) na forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}= & \int d^3x\{\mathsf{a}_1\{\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\left(y^{\mathsf{ab}}+\epsilon^{\mathsf{abk}}y_{\mathsf{k}}\right)-y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}y_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}+k[\epsilon^{\mathsf{ced}}h\partial_{\mathsf{e}}\left(y_{\mathsf{cd}}+\epsilon_{\mathsf{cdk}}y^{\mathsf{k}}\right) \\
& -\epsilon^{\mathsf{aed}}\left(h_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{c}}+\epsilon_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{c}}{}_{\mathsf{l}}h^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{e}}\left(y_{\mathsf{cd}}+\epsilon_{\mathsf{cdk}}y^{\mathsf{k}}\right)+\epsilon^{\mathsf{acd}}\left(h_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{e}}+\epsilon_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{l}}h^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{e}}\left(y_{\mathsf{cd}}+\epsilon_{\mathsf{cdk}}y^{\mathsf{k}}\right)]\} \\
& +\mathsf{a}_2\{-\frac{k^2}{2}[\left(h_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}h^{\mathsf{l}}\right)\Box\left(h^{\mathsf{ab}}+\epsilon^{\mathsf{abk}}h_{\mathsf{k}}\right)-\left(h_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}h^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{c}}\partial^{\mathsf{a}}\left(h^{\mathsf{cd}}+\epsilon^{\mathsf{cdk}}h_{\mathsf{k}}\right)] \\
& +2k[\epsilon^{\mathsf{bcd}}\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial^{\mathsf{a}}\left(h_{\mathsf{bc}}+\epsilon_{\mathsf{bck}}h^{\mathsf{k}}\right)-\epsilon^{\mathsf{edb}}\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{e}}\left(h^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{d}}+\epsilon^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{k}}h_{\mathsf{k}}\right)] \\
& +2[\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\left(y^{\mathsf{ab}}+\epsilon^{\mathsf{abk}}y_{\mathsf{k}}\right)-y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}y_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}]\} \\
& +\mathsf{a}_3\{\frac{k^2}{4}[\left(h_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}h^{\mathsf{l}}\right)\Box\left(h^{\mathsf{ba}}+\epsilon^{\mathsf{bak}}h_{\mathsf{k}}\right)+\left(h_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}h^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{d}}\partial^{\mathsf{b}}\left(h^{\mathsf{ad}}+\epsilon^{\mathsf{adk}}h_{\mathsf{k}}\right) \\
& -2\left(h_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}h^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{d}}\partial^{\mathsf{a}}\left(h^{\mathsf{bd}}+\epsilon^{\mathsf{bdk}}h_{\mathsf{k}}\right)]+k[2\epsilon^{\mathsf{ecb}}\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{e}}\left(h_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{a}}+\epsilon_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{k}}h^{\mathsf{k}}\right) \\
& -\epsilon^{\mathsf{edb}}\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{e}}\left(h^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{d}}+\epsilon^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{k}}h_{\mathsf{k}}\right)+\epsilon^{\mathsf{cdb}}\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial^{\mathsf{a}}\left(h_{\mathsf{cd}}+\epsilon_{\mathsf{cdk}}h^{\mathsf{k}}\right)] \\
& -\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\left(y^{\mathsf{ab}}+\epsilon^{\mathsf{abk}}y_{\mathsf{k}}\right)+3y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}y_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}\} \qquad (4.7) \\
& +\mathsf{a}_4\{-\frac{k^2}{4}[h_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}\Box h_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}+\left(h^{\mathsf{ab}}+\epsilon^{\mathsf{abl}}h_{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{d}}\left(h_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}+\epsilon_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{d}}{}_{\mathsf{k}}h^{\mathsf{k}}\right)-2h_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\partial_{\mathsf{d}}\left(h^{\mathsf{cd}}+\epsilon^{\mathsf{cdk}}h_{\mathsf{k}}\right)] \\
& -k[\epsilon^{\mathsf{eab}}\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{e}}h_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}-\epsilon^{\mathsf{cab}}\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{d}}\left(h_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{d}}+\epsilon_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{d}}{}_{\mathsf{k}}h^{\mathsf{k}}\right)] \\
& +\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\left(y^{\mathsf{ab}}+\epsilon^{\mathsf{abk}}y_{\mathsf{k}}\right)-\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\left(y^{\mathsf{ba}}+\epsilon^{\mathsf{bak}}y_{\mathsf{k}}\right)\} \\
& +\mathsf{a}_5\{4y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}-\frac{k^2}{2}[\epsilon_{\mathsf{acd}}\left(h^{\mathsf{ab}}+\epsilon^{\mathsf{abl}}h_{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{b}}\left(h^{\mathsf{cd}}+\epsilon^{\mathsf{cdk}}h_{\mathsf{k}}\right) \\
& -\epsilon^{\mathsf{aed}}\left(h_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}h^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{e}}\left(h^{\mathsf{b}}{}_{\mathsf{d}}+\epsilon^{\mathsf{b}}{}_{\mathsf{d}}{}^{\mathsf{k}}h_{\mathsf{k}}\right)] \\
& -k\left(h_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}h^{\mathsf{l}}\right)\left(y^{\mathsf{ba}}+\epsilon^{\mathsf{bak}}y_{\mathsf{k}}\right)\}+\mathsf{a}_6\{\frac{k}{2}[\left(y_{\mathsf{ab}}+\epsilon_{\mathsf{abl}}y^{\mathsf{l}}\right)\Box\left(h^{\mathsf{ba}}+\epsilon^{\mathsf{bak}}h_{\mathsf{k}}\right)
\end{aligned}
$$

$$- \left(y^{\mathsf{ab}} + \epsilon^{\mathsf{abl}} y_{\mathsf{l}}\right) \partial_{\mathsf{a}} \partial_{\mathsf{d}} \left(h_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{d}} + \epsilon_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{d}}{}_{\mathsf{k}} h^{\mathsf{k}}\right) - \left(y^{\mathsf{ab}} + \epsilon^{\mathsf{abl}} y_{\mathsf{l}}\right) \partial_{\mathsf{b}} \partial_{\mathsf{c}} \left(h^{\mathsf{c}}{}_{\mathsf{a}} + \epsilon^{\mathsf{c}}{}_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{k}} h_{\mathsf{k}}\right)$$

$$- y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}} \Box h_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}} + y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}} \partial_{\mathsf{c}} \partial_{\mathsf{d}} \left(h^{\mathsf{cd}} + \epsilon^{\mathsf{cdk}} h_{\mathsf{k}}\right) + \left(y^{\mathsf{ab}} + \epsilon^{\mathsf{abl}} y_{\mathsf{l}}\right) \partial_{\mathsf{a}} \partial_{\mathsf{b}} h_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}]$$

$$- [\epsilon^{\mathsf{aec}} \left(y_{\mathsf{ab}} + \epsilon_{\mathsf{abl}} y^{\mathsf{l}}\right) \partial_{\mathsf{e}} y_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{b}} - \epsilon^{\mathsf{aeb}} \left(y_{\mathsf{ab}} + \epsilon_{\mathsf{abl}} y^{\mathsf{l}}\right) \partial_{\mathsf{e}} y_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}]\}\}.$$

4.2 Projetores

4.2.1 A Ação em Termo dos Projetores

Novamente, para expressar a ação (4.7) numa forma mais conveniente, usaremos o formalismo de Barnes-Rivers de operadores de projeção de spin. Como dito anteriormente para identificarmos esses operadores devemos primeiramente completamente simetrizar e anti-simetrizar a ação (4.7), escrevendo o Lagrangeano associado na forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varphi\mathcal{O}\varphi$.

Deste modo, após longas expressões algébricas, nossa ação fica, em termos dos operadores de spin:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \int d^3x \frac{1}{2}\{ & h^{\mathsf{ab}}[\frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k^2}{4}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \\ & + \frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\mathsf{k}^2}{2}\mathsf{a}_5(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]h^{\mathsf{cd}} \\ & + h^{\mathsf{ab}}[-(\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + \frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}]h^{\mathsf{c}} \\ & + h^{\mathsf{a}}[(\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}} + \frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4)\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}}]h^{\mathsf{cd}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ h^{\mathsf{a}}[\frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4)\theta_{\mathsf{a,c}} - (k^2\Box)(2\mathsf{a}_2 + \mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}} - (k^2\mathsf{a}_5)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]h^{\mathsf{c}} \\
&+ y^{\mathsf{ab}}[2(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&+ 2(6\mathsf{a}_2 + 5\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + 4(2\mathsf{a}_2 + \mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&+ 2\sqrt{2}(2\mathsf{a}_2 + 3\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) + (\frac{\mathsf{a}_6}{2})(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]y^{\mathsf{cd}} \\
&+ y^{\mathsf{ab}}[\mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}}]y^{\mathsf{c}} + y^{\mathsf{a}}[-\mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}}]y^{\mathsf{cd}} \qquad (4.8) \\
&+ y^{\mathsf{a}}[4(2\mathsf{a}_2 + 2\mathsf{a}_4 - \mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3)\theta_{\mathsf{a,c}} + 4(2\mathsf{a}_2 + 2\mathsf{a}_4 - \mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}} + (2\mathsf{a}_6)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]y^{\mathsf{c}} \\
&+ 8\mathsf{a}_5 y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}} + h^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 - 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 + 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&- (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k}{4}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]y^{\mathsf{cd}} \\
&+ y^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 - 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 + 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&- (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k}{4}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]h^{\mathsf{cd}} \\
&+ h^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}}]y^{\mathsf{c}} \\
&+ y^{\mathsf{a}}[-\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}]h^{\mathsf{cd}} \\
&+ y^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}}]h^{\mathsf{c}} \\
&+ h^{\mathsf{a}}[-\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}]y^{\mathsf{cd}} \\
&+ h^{\mathsf{a}}[(2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]y^{\mathsf{c}} \\
&+ y^{\mathsf{a}}[(2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]h^{\mathsf{c}}\}.
\end{aligned}
$$

Devemos observar que está ação introduz dois novos operadores:

$$\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}}, \tag{4.9}$$

cuja álgebra pode ser vista no apêndice A.

4.2.2 Fixação de Calibre

Podemos observar das duas primeiras linhas da ação (4.8) que falta o termo $\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}$ no setor gravitacional, o que pode ser resolvido introduzindo-se o termo de fixação de calibre:

$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \lambda F_{\mathsf{a}}F^{\mathsf{a}}\ ,\ F_{\mathsf{a}} = k\partial^{\mathsf{b}}\left(H_{\mathsf{ba}} - \frac{1}{2}\eta_{\mathsf{ba}}H_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}\right) \Longrightarrow$$
$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \frac{1}{2}h^{\mathsf{ab}}\left[-k^2\lambda\Box(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2}\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}))\right]h^{\mathsf{cd}} \tag{4.10}$$
$$+ h^{\mathsf{a}}[-2k^2\lambda\Box\theta_{\mathsf{a,c}}]h^{\mathsf{c}} + h^{\mathsf{ab}}[k^2\lambda\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}]h^{\mathsf{c}} + h^{\mathsf{a}}[k^2\lambda\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}}]h^{\mathsf{cd}}.$$

Também notamos o fato das transformações locais não precisarem de um termo de fixação para essa ação.

4.2.3 A Ação Completa

Assim, nossa ação completa tem a forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}=&\int d^3x\frac{1}{2}\{h^{\mathsf{ab}}[\frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}+\frac{k^2}{4}\Box(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_4-4\lambda)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}\\
&+\frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_4-2\lambda)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}-(\frac{k^2}{2}\Box\lambda)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}-(\frac{\sqrt{2}}{2}k^2\Box\lambda)(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})\\
&-\frac{\mathsf{k}^2}{2}\mathsf{a}_5(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]h^{\mathsf{cd}}+h^{\mathsf{ab}}[-(\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}}+\frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_4+4\lambda)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}]h^{\mathsf{c}}\\
&+h^{\mathsf{a}}[(\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}}+\frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_4+4\lambda)\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}}]h^{\mathsf{cd}}\\
&+h^{\mathsf{a}}[\frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_4-4\lambda)\theta_{\mathsf{a,c}}-(k^2\Box)(2\mathsf{a}_2+\mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}}-(k^2\mathsf{a}_5)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]h^{\mathsf{c}}\\
&+y^{\mathsf{ab}}[2(\mathsf{a}_1+2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}+2(\mathsf{a}_1+2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_3-\Box\xi)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}+2(6\mathsf{a}_2+5\mathsf{a}_3-\mathsf{a}_1)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}\\
&+4(2\mathsf{a}_2+\mathsf{a}_3-\Box\xi)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}+2\sqrt{2}(2\mathsf{a}_2+3\mathsf{a}_3-\mathsf{a}_1)(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})+(\frac{\mathsf{a}_6}{2})(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]y^{\mathsf{cd}}\\
&+y^{\mathsf{ab}}[\mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}}+2\xi\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}]y^{\mathsf{c}}+y^{\mathsf{a}}[-\mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}}+2\xi\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}}]y^{\mathsf{cd}} \qquad (4.11)\\
&+y^{\mathsf{a}}[4(2\mathsf{a}_2+2\mathsf{a}_4-\mathsf{a}_1-\mathsf{a}_3-\Box\xi)\theta_{\mathsf{a,c}}+4(2\mathsf{a}_2+2\mathsf{a}_4-\mathsf{a}_1-\mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}}+(2\mathsf{a}_6)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]y^{\mathsf{c}}+8\mathsf{a}_5y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}\\
&+h^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6-2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}-(k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}-\frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6+2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}-(k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}\\
&+\frac{k}{4}(\mathsf{a}_1+2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]y^{\mathsf{cd}}\\
&+y^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6-2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}-(k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}-\frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6+2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}-(k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}\\
&+\frac{k}{4}(\mathsf{a}_1+2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})]h^{\mathsf{cd}}\\
&+h^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1-2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}}-k(\mathsf{a}_1-2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{ab}}+\omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}}]y^{\mathsf{c}}\\
&+y^{\mathsf{a}}[-\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1-2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}}+k(\mathsf{a}_1-2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{bc}}+\omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}]h^{\mathsf{cd}}
\end{aligned}
$$

$$+ y^{\mathsf{ab}}[\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}}]h^{\mathsf{c}}$$
$$+ h^{\mathsf{a}}[-\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}]y^{\mathsf{cd}}$$
$$+ h^{\mathsf{a}}[(2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]y^{\mathsf{c}}$$
$$+ y^{\mathsf{a}}[(2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]h^{\mathsf{c}}\}.$$

De modo muito mais comveniente a ação (4.11) deve ser escrita na forma:

$$\mathcal{S} = \int d^3x \frac{1}{2}\Phi^T M \Phi \ , \ \Phi = \begin{pmatrix} h^{\mathsf{cd}} \\ h^{\mathsf{c}} \\ y^{\mathsf{cd}} \\ y^{\mathsf{c}} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

onde o operador de onda M toma a forma,

$$M = \begin{pmatrix} M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{ab,c}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{hh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{a,c}} & M^{hy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{a,c}} \\ M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{ab,c}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{a,c}} & M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

sendo,

$$M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k^2}{4}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4 - 4\lambda)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}$$
$$+ \frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4 - 2\lambda)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} - (\frac{k^2}{2}\Box\lambda)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}$$
$$- (\frac{\sqrt{2}}{2}k^2\Box\lambda)(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) - \frac{\mathsf{k}^2}{2}\mathsf{a}_5(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{hh}_{\mathsf{ab,c}} = -(\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + \frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4 + 4\lambda)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}},$$

$$M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 - 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 + 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$$
$$- (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k}{4}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} = \frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}},$$

$$M^{hh}_{\mathsf{a,cd}} = (\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}} + \frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4 + 4\lambda)\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}},$$

$$M^{hh}_{\mathsf{a,c}} = \frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4 - 4\lambda)\theta_{\mathsf{a,c}} - (k^2\Box)(2\mathsf{a}_2 + \mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}} - (k^2\mathsf{a}_5)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}},$$

$$M^{hy}_{\mathsf{a,cd}} = -\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}},$$

$$M^{hy}_{\mathsf{a,c}} = (2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \qquad (4.14)$$

$$M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 - 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{k}{2}(\Box\mathsf{a}_6 + 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$$
$$- (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k}{4}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{yh}_{\mathsf{ab,c}} = \frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}},$$

$$M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} = 2(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}$$
$$+ 2(6\mathsf{a}_2 + 5\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + 4(2\mathsf{a}_2 + \mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}$$
$$+ 2\sqrt{2}(2\mathsf{a}_2 + 3\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) + (\frac{\mathsf{a}_6}{2})(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} = \mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}},$$

$$M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} = -\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}},$$

$$M^{yh}_{\mathsf{a,c}} = (2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}},$$

$$M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} = -\mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}}$$

e

$$M^{yy}_{\mathsf{a,c}} = 4(2\mathsf{a}_2 + 2\mathsf{a}_4 - \mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3)\theta_{\mathsf{a,c}} + 4(2\mathsf{a}_2 + 2\mathsf{a}_4 - \mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}}$$
$$+ (2\mathsf{a}_6)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}.$$

Onde o termo linear $8\mathsf{a}_5 y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}$ foi descartado, pois, como se sabe, termos lineares podem sempre ser eliminados por uma translação no campo:

$$\int (\alpha\phi^2 + \beta\phi) d^3x \overset{\phi \to \phi' + c}{\longrightarrow} \int (\alpha\phi'^2 + 2\alpha c\phi' + \alpha c^2 + \beta\phi' + \beta c) d^3x = \int \alpha\phi^2 d^3x, \tag{4.15}$$

escolhendo $c = -\frac{\beta}{2\alpha}$, abandonando o sinal $'$ e lembrando que termos constantes na ação podem ser descartados.

Por esta razão, $8\mathsf{a}_5 y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}$ não aparece na ação quadrática acima.

Uma vez que todos os operadores foram identificados e explicitados, passaremos agora ao problema de computar a matriz inversa, M^{-1}, para encontrar os propagadores dos graus de liberdade físicos.

Capítulo 5

Propagadores e Modos de Excitação

5.1 Propagadores

Para encontrarmos os propagadores e levantarmos o espectro físico dos mesmos devemos, como dito no final do capítulo anterior, computar a matriz inversa de M. Uma vez que os elementos da matriz são operadores tensoriais relacionados aos operadores do tipo de operadores de spin, não podemos usar os métodos usuais de inversão matricial. Devido a esta pequena tecnicidade apresentaremos, a seguir, o método usado para a inversão de matriz quando temos elementos que são operadores. Após descrevermos o procedimento usado iniciaremos a análise do espectro saturando os propagadores com as correntes conservadas que os saturam, obtendo assim a amplitude de transição e as condições de unitaridade sobre os graus de liberdade físicos.

5.1.1 Procedimento de Inversão Matricial

De modo a calcular os propagadores, eq.(3.36), nós usamos um procedimento direto, mas bastante longo e algebricamente pesado, onde primeiramente nós dividimos a matriz do operador de onda,

$$M = \begin{pmatrix} M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{ab,c}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{hh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{a,c}} & M^{hy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{a,c}} \\ M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{ab,c}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{a,c}} & M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

em quatro setores (sub-blocos) distintos:

$$M = \begin{pmatrix} M^{hh} & M^{hy} \\ M^{yh} & M^{yy} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

sendo,

$$M^{hh} = \begin{pmatrix} M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{hh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}, \quad M^{hy} = \begin{pmatrix} M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{hy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

$$M^{yh} = \begin{pmatrix} M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{ab,c}} \\ \\ M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix} \;\; \text{e} \;\; M^{yy} = \begin{pmatrix} M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} \\ \\ M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}.$$

Deste modo escrevemos a matriz inversa como sendo:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} M^{HH} & M^{HY} \\ \\ M^{YH} & M^{YY} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

onde,

$$M^{HH} = \begin{pmatrix} M^{HH}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{HH}_{\mathsf{ab,c}} \\ \\ M^{HH}_{\mathsf{a,cd}} & M^{HH}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}, \quad M^{HY} = \begin{pmatrix} M^{HY}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{HY}_{\mathsf{ab,c}} \\ \\ M^{HY}_{\mathsf{a,cd}} & M^{HY}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$
$$M^{YH} = \begin{pmatrix} M^{YH}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{YH}_{\mathsf{ab,c}} \\ \\ M^{YH}_{\mathsf{a,cd}} & M^{YH}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix} \;\; \text{e} \;\; M^{YY} = \begin{pmatrix} M^{YY}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{YY}_{\mathsf{ab,c}} \\ \\ M^{YY}_{\mathsf{a,cd}} & M^{YY}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}.$$

Os Elementos da matriz inversa podem ser encontrados pela relação deduzida da expressão $MM^{-1} = I$. Sendo:

$$\begin{aligned} M^{HH} &= [M^{hh} - M^{hy}(M^{yy})^{-1}M^{yh}]^{-1}. \\ M^{HY} &= -(M^{hh})^{-1}M^{hy}M^{YY}. \\ M^{YH} &= -(M^{yy})^{-1}M^{yh}M^{HH}. \\ M^{YY} &= [M^{yy} - M^{yh}(M^{hh})^{-1}M^{hy}]^{-1}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Os setores M^{hh} e M^{yy}, bem como as matrizes 2x2 corrigidas $M^{hh} - M^{hy}(M^{yy})^{-1}M^{yh}$ e $M^{yy} - M^{yh}(M^{hh})^{-1}M^{hy}$, são invertidas de forma análoga, genéricamente:

$$
\begin{aligned}
M^{FF}_{\mathsf{ab,cd}} &= [M^{ff}_{\mathsf{ab,cd}} - M^{f\varphi\mathsf{k}}_{\mathsf{ab,}}(M^{\varphi\varphi}_{\mathsf{k,m}})^{-1}M^{\phi f\mathsf{m}}{}_{\mathsf{,c}}]^{-1}. \\
M^{F\phi}_{\mathsf{ab,c}} &= -(M^{ff\mathsf{kl}}_{\mathsf{ab,}})^{-1}M^{f\varphi}_{\mathsf{kl,m}}M^{\phi\phi\mathsf{mn}}{}_{\mathsf{,c}}. \\
M^{\phi F}_{\mathsf{a,cd}} &= -(M^{\varphi\varphi\mathsf{k}}_{\mathsf{a,}})^{-1}M^{\varphi f}_{\mathsf{k,mn}}M^{FF\mathsf{mn}}{}_{\mathsf{,cd}}. \\
M^{\phi\phi}_{\mathsf{a,c}} &= [M^{\varphi\varphi}_{\mathsf{a,c}} - M^{\varphi f\mathsf{kl}}_{\mathsf{a,}}(M^{ff}_{\mathsf{kl,mn}})^{-1}M^{f\varphi\mathsf{mn}}{}_{\mathsf{,c}}]^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Onde, para invertermos $M^{\varphi\varphi}_{\mathsf{k,m}}$ e $M^{ff}_{\mathsf{kl,mn}}$, e as matrizes corrigidas, precisamos usar as identidades operatoriais:

$$
\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}} = \eta_{\mathsf{ab}} \tag{5.8}
$$

e

$$
\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mathsf{ac}}\eta_{\mathsf{bd}} + \eta_{\mathsf{ad}}\eta_{\mathsf{bc}}\right), \tag{5.9}
$$

bem como a álgebra dada no apêndice A. Pois dado um operador do tipo

$$
x_1\theta_{\mathsf{a,c}} + x_2\omega_{\mathsf{a,c}} + x_3\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \tag{5.10}
$$

o seu inverso deve obedecer a:

$$(I_1\theta_{\mathsf{a,c}} + I_2\omega_{\mathsf{a,c}} + I_3\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}})(x_1\theta_{\mathsf{a,c}} + x_2\omega_{\mathsf{a,c}} + x_3\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}) = \eta_{\mathsf{ab}}, \tag{5.11}$$

ou seja,

$$(I_1\theta_{\mathsf{a,c}} + I_2\omega_{\mathsf{a,c}} + I_3\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}})(x_1\theta_{\mathsf{a,c}} + x_2\omega_{\mathsf{a,c}} + x_3\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}) = \theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}}. \tag{5.12}$$

Esta expressão fornece um sistema de equações cuja solução é:

$$I_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + \Box x_3^2}, \qquad I_2 = \frac{1}{x_2} \ \text{ e } \ I_1 = -\frac{x_3}{x_1^2 + \Box x_3^2}. \tag{5.13}$$

Analogamente para os operadores P, teremos:

$$\begin{aligned}
&\Big(I_1\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + I_2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + I_3\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + I_4\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + I_5\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&+ I_6\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}} + I_7\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + I_8\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}\Big) \times \Big(x_1\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + x_2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + x_3\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&+ x_4\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + x_5\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + x_6\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}} + x_7\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + x_8\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}\Big) \\
&= \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Cuja solução dá:

$$I_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + 16\Box x_7^2}, \qquad I_2 = \frac{x_2}{x_2^2 + 4\Box x_8^2},$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \frac{x_4}{x_3x_4 - x_5x_6}, \qquad I_4 = \frac{x_3}{x_3x_4 - x_5x_6}, \\
I_5 &= -\frac{x_5}{x_3x_4 - x_5x_6}, \qquad I_6 = -\frac{x_6}{x_3x_4 - x_5x_6}, \\
I_7 &= -\frac{x_7}{x_1^2 + 16\Box x_7^2} \ \text{ e } \ I_8 = -\frac{x_8}{x_2^2 + 4\Box x_8^2}.
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

Usando esta rotina repetidas vezes, uma para cada matriz, encontramos todas as inversas elementares dos operadores básicos e assim podemos calcular M^{-1}.

5.1.2 Cálculo da Matriz Inversa e Propagadores

Devido ao tamanho da ação (4.11) e da rotina de inversão descrita acima, não é viável o cálculo manual dos termos da matriz inversa. Deste modo usamos um programa de computação algébrica, o Maple $8^{(\mathrm{TM})}$, para realizarmos estes cálculos. Mesmo assim as expressões resultantes foram enormes, de análise muito difícil. No caso mais geral possível o programa falhou de encontrar resultados, travando continuamente, mesmo rodando num computador com procesador Pentium $4^{(\mathrm{TM})}$ de 3,2MHz e com 1Gb de memória RAM.

Como quando contraimos os propagadores com as correntes saturadas somente os polos físicos sobrevivem, que no nosso caso, como veremos adiante, são bem poucos, optamos por não fazer listagens dos propagadores, apresentando somente aqueles realmente utilizados quando do levantamento do espectro de excitações, e só nesse momento. Contudo uma descrição detalhada dos casos computados será dada mais a frente.

5.2 Espectro de Excitações

5.2.1 Correntes Conservadas.

Uma vez encontrado os propagadores, nós devemos checar a unitaridade a "tree-level"da teoria. Para isso devemos analisar os resíduos da amplitude de transição de corrente no espaço dos momenta, dados pelos propagadores saturados após uma transformada de Fourier. As fontes (genericamente representadas por $S_{\mu\nu}$ aqui) que saturam os propagadores podem ser expandidos em termos de uma base completa no espaço dos momenta como segue:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \acute{c}_1 p_\mu p_\nu + \acute{c}_2 p_\mu q_\nu + \acute{c}_3 p_\mu \varepsilon_\nu + \acute{c}_4 q_\mu p_\nu + \acute{c}_5 q_\mu q_\nu \\ &+ \acute{c}_6 q_\mu \varepsilon_\nu + \acute{c}_7 \varepsilon_\mu p_\nu + \acute{c}_8 \varepsilon_\mu q_\nu + \acute{c}_9 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu, \end{aligned} \tag{5.16}$$

onde $p_\mu = (p_0, -\overrightarrow{p})$, $q_\mu = (p_0, \overrightarrow{p})$ e $\varepsilon_\mu = (0, -\overrightarrow{\varepsilon})$, são trivetores de momentum linearmente independentes que servem de base para o espaço e satisfazem as relações,

$$p_\mu p^\mu = q_\mu q^\mu = m^2.$$

$$p_\mu q^\mu = p_0^2 + \overrightarrow{p}^2 \neq 0. \tag{5.17}$$

$$p_\mu \varepsilon^\mu = q_\mu \varepsilon^\mu = 0.$$

$$\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -1.$$

Estas relações e os requerimentos de simetria da teoria dividem as fontes em uma parte simétrica, $S_{S\mu\nu}$, e em uma parte anti-simétrica, $A_{S\mu\nu}$:

$$S_{S\mu\nu} = S_{(\mu\nu)} = c_1 p_\mu p_\nu + c_2(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) + c_3(p_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu p_\nu) \tag{5.18}$$
$$+ c_4 q_\mu q_\nu + c_5(q_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu q_\nu) + c_6 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu$$

e

$$A_{S\mu\nu} = S_{[\mu\nu]} = d_1(p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu) + d_2(p_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu p_\nu) \tag{5.19}$$
$$+ d_3(q_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu q_\nu),$$

onde $c_1 = \acute{c_1}$, $c_2 = \frac{\acute{c_2}+\acute{c_4}}{2}$, $c_3 = \frac{\acute{c_3}+\acute{c_7}}{2}$, $c_4 = \acute{c_5}$, $c_5 = \frac{\acute{c_6}+\acute{c_8}}{2}$, $c_6 = \acute{c_9}$ $d_1 = \frac{\acute{c_2}-\acute{c_4}}{2}$, $d_2 = \frac{\acute{c_3}-\acute{c_7}}{2}$, and $d_3 = \frac{\acute{c_6}-\acute{c_8}}{2}$.

5.2.2 Amplitude de Transição

A amplitude de transição de corrente é dada por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tau^* & \rho^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{HH} & M^{HY} \\ M^{YH} & M^{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \rho \end{pmatrix} \Rightarrow \tag{5.20}$$

$$\mathcal{A} = \tau^* M^{HH} \tau + \tau^* M^{HY} \rho + \rho^* M^{YH} \tau + \rho^* M^{YY} \rho,$$

onde τ é a fonte de corrente para os campos h e ρ é a fonte de corrente para os campos y.

A amplitude de corrente, $\mathcal{A}$, feito o produto matricial acima, toma a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = {} & t^{\mathsf{ab}^*} M^{HH}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{ab}^*} M^{HH}_{\mathsf{ab,c}} t^{\mathsf{c}} + t^{\mathsf{a}^*} M^{HH}_{\mathsf{a,cd}} t^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{a}^*} M^{HH}_{\mathsf{a,c}} t^{\mathsf{c}} \\ & + t^{\mathsf{ab}^*} M^{HY}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{ab}^*} M^{HY}_{\mathsf{ab,c}} r^{\mathsf{c}} + t^{\mathsf{a}^*} M^{HY}_{\mathsf{a,cd}} r^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{a}^*} M^{HY}_{\mathsf{a,c}} r^{\mathsf{c}} \\ & + r^{\mathsf{ab}^*} M^{YH}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{ab}^*} M^{YH}_{\mathsf{ab,c}} t^{\mathsf{c}} + r^{\mathsf{a}^*} M^{YH}_{\mathsf{a,cd}} t^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{a}^*} M^{YH}_{\mathsf{a,c}} t^{\mathsf{c}} \\ & + r^{\mathsf{ab}^*} M^{YY}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{ab}^*} M^{YY}_{\mathsf{ab,c}} r^{\mathsf{c}} + r^{\mathsf{a}^*} M^{YY}_{\mathsf{a,cd}} r^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{a}^*} M^{YY}_{\mathsf{a,c}} r^{\mathsf{c}}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

onde $t^{\mathsf{cd}} = \tau^{(\mathsf{cd})}$ é a parte simétrica e $t^{\mathsf{c}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mathsf{cde}} T_{\mathsf{de}}$, com $T_{\mathsf{de}} = \tau_{[\mathsf{de}]}$, é a parte anti-simétrica da fonte associada aos campos h_{ab} e h_{a}, respectivamente. Analogamente $r^{\mathsf{cd}} = \rho^{(\mathsf{cd})}$ é a parte simétrica e $r^{\mathsf{c}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mathsf{cde}} R_{\mathsf{de}}$, com $R_{\mathsf{de}} = \rho_{[\mathsf{de}]}$, é a parte anti-simétrica da fonte associada aos campos y_{ab} e y_{a}.

Devido aos vínculos de simetria das fontes (elas são quantidades conservadas e de simetria bem definida), obtemos as relações:

$$p_{\mathsf{c}} t^{\mathsf{cd}} = 0, \quad p_{\mathsf{c}} T^{\mathsf{cd}} = 0, \quad p_{\mathsf{c}} r^{\mathsf{cd}} = 0 \ \text{ e } \ p_{\mathsf{c}} R^{\mathsf{cd}} = 0. \tag{5.22}$$

Estas relações fazem com que somente os operadores $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$, $\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$, $\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}$, $\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}}$ e $\omega_{\mathsf{a,c}}$, contidos nas expressões da matriz inversa que aparecem em (5.21) produzam contribuições diferentes de zero a amplitude de transição de corrente.

Considerando ainda que para partículas massivas em seu referencial de repouso, os vetores de momenta que formam a base tem a forma:

$$\begin{aligned} p_\mu &= (m, 0). \\ q_\mu &= (m, 0). \\ \varepsilon_\mu &= (0, -\overrightarrow{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Podemos, nos restringindo a esses referenciais, ver que somente os projetores $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ e $\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$ sobrevivem e contribuem para a amplitude. Temos de resaltar também que para partículas sem massa também é verdade que somente $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ e $\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$ sobrevivem e contribuem para a amplitude, sendo isso facilmente visto pela forma dos projetores.

Com as restrições acima temos que a amplitude apresenta a forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} =&< H2H2_{(2)} > t^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}t^{\mathsf{cd}} + < H2H2_{(0s)} > t^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}t^{\mathsf{cd}} \\
&+ < H2Y2_{(2)} > t^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}r^{\mathsf{cd}} + < H2Y2_{(0s)} > t^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}r^{\mathsf{cd}} \\
&+ < Y2H2_{(2)} > r^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}t^{\mathsf{cd}} + < Y2H2_{(0s)} > r^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}t^{\mathsf{cd}} \\
&+ < Y2Y2_{(2)} > r^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}r^{\mathsf{cd}} + < Y2Y2_{(0s)} > r^{\mathsf{ab}^*}\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}r^{\mathsf{cd}},
\end{aligned} \tag{5.24}$$

onde $< H2H2_{(2)} >$ é o propagador para o campo gravitacional simétrico de ordem(rank)-2 ($H2$ em $H2H2_{(2)}$) associado ao operador $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ ($_{(2)}$ em $H2H2_{(2)}$). Os outros coeficientes dos operadores tendo significado análogo.

Explicitamente escrevendo as fontes obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}(< H2H2_{(2)} > + < H2H2_{(0s)} >)\,|c_{6t}|^2 \\
&+\frac{1}{2}(< H2Y2_{(2)} > + < H2Y2_{(0s)} >)c^*_{6t}c_{6r} \\
&+\frac{1}{2}(< Y2H2_{(2)} > + < Y2H2_{(0s)} >)c^*_{6r}c_{6t} \\
&+\frac{1}{2}(< Y2Y2_{(2)} > + < Y2Y2_{(0s)} >)\,|c_{6r}|^2
\end{aligned} \tag{5.25}$$

onde t e r em c representam as fontes ao qual o coeficiente c está associado.

Devemos agora substituir explicitamenta os propagadores em (5.25) pelos seus valores calculados usando-se o procedimento descrito na seção anterior. Antes, contudo, de explicitamente substituirmos essas expressões, os seguintes comentários devem ser feitos:

1. Com todo o conjunto de parâmetros da ação, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 mais λ, diferentes de zero, nossas facilidades computacionais algébricas falharam em obter um resultado devido a extensão das expressões resultantes. O mesmo se deu para (i) a_5 ou a_6 igual a zero e para (ii) a_1 e a_6 iguais a zero. Com a_1 e a_5 iguais a zero conseguimos obter nosso primeiro resultado, como descrito abaixo.

2. Considerando o termo de Chern-Simons, a_6, nós obtivemos o seguinte comportamento no denominador para os propagadores em (5.25):

   - Com $\mathsf{a}_1 = 0$, encontramos termos proporcionais à p^{22}.
   - A potência mais baixa, p^6, ocorreu com $\mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_2 = \mathsf{a}_4 = 0$, ou seja, somente a_3 e a_6 foram considerados.
   - Com $\mathsf{a}_3 = 0$, a matriz não é invertível para nenhum caso. Ou seja, este termo é fundamental para a presente teoria.

3. Sem o termo de Chern-Simons, $\mathsf{a}_6 = 0$, nós obtivemos, em todos os casos invertíveis, uma potencia p^2 no denominador. Este não é um resultado trivial. Nós podemos justificâ-lo apontando para o fato de que o termo de Chern-Simons contribui com um termo quadrático na conexão de spin com uma derivada espaço-temporal, enquanto que o escalar de

curvatura contribui com um termo que mixa H com ω. Colocando a_6 igual a zero, nós suprimimos termos do tipo $\omega - \omega$ com uma derivada, e assim, inevitavelmente, nós reduzimos as potências do momentum aparecendo nos propagadores.

Portanto, visto o que foi dito acima, consideraremos em (5.25) somente os casos em que $\mathsf{a}_5 = \mathsf{a}_6 = 0$. De qualquer modo, nós temos um procedimento que funciona para todas as possibilidades no espaço de parâmetros (uma vez que colocamos $\mathsf{a}_5 = \mathsf{a}_6 = 0$). Simplesmente iremos reportar aqui os casos com a_3, e a_1 e a_3, diferentes de zero para termos uma ilustração de como o nosso procedimento geral funciona.

O caso mais simples invertível ocorre quando consideramos somente a_3 diferente de zero na ação. Neste caso os propagadores relevantes têm a forma:

$$
\begin{aligned}
H2H2_{(2)} &= \frac{2}{3k^2p^2\mathsf{a}_3}i. \\
H2H2_{(0s)} &= -\frac{2}{k^2p^2\mathsf{a}_3}i. \\
H2Y2_{(2)} &= H2Y2_{(0s)} = Y2H2_{(2)} = Y2H2_{(0s)} = 0. \\
Y2Y2_{(2)} &= \frac{1}{6\mathsf{a}_3}i. \\
Y2Y2_{(0s)} &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

E a amplitude saturada tem a aparência dada abaixo:

$$\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{3k^2 p^2 \mathsf{a}_3} \left| c_6 \right|^2_{tt} + \frac{1}{12\mathsf{a}_3} \left| c_6 \right|^2_{rr} \right) i. \tag{5.27}$$

Devemos notar nessa expressão que o polo não massivo tem por origem o setor gravitacional h e tem contribuições vinda dos setores de spin-0 e de spin-2.

Calculando a parte imaginária do resíduo da amplitude no polo não massivo obtemos:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2 \to 0} [p^2 \mathcal{A}] \right) = -\frac{2 \left| c_6 \right|^2_{tt}}{3k^2 \mathsf{a}_3}. \tag{5.28}$$

Do requerimento de ter um resíduo positivo-definido no polo para garantir a unitaridade a "tree-level"da teoria nós devemos ter $\mathsf{a}_3 < 0$.

Considerando agora a adição do termo do escalar de curvatura a_1, obtemos:

$$H2H2_{(2)} = \frac{2(\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)}{k^2 p^2 (3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3 \mathsf{a}_1)} i.$$

$$H2H2_{(0s)} = -\frac{2(\mathsf{a}_3 + \mathsf{a}_1)}{k^2 p^2 (\mathsf{a}_3^2 - \mathsf{a}_1^2 + \mathsf{a}_3 \mathsf{a}_1)} i.$$

$$H2Y2_{(2)} = H2Y2_{(0s)} = Y2H2_{(2)} = Y2H2_{(0s)} = 0. \tag{5.29}$$

$$Y2Y2_{(2)} = \frac{\mathsf{a}_3}{2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)} i.$$

$$Y2Y2_{(0s)} = 0.$$

E a amplitude assume a forma:

$$\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{k^2p^2} \times \frac{\mathsf{a}_3^3}{3\mathsf{a}_3^4 - 5\mathsf{a}_3^2\mathsf{a}_1^2 + 4\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1^3 - \mathsf{a}_1^4} \left|c_6\right|_{tt}^2 + \frac{\mathsf{a}_3}{2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)} \left|c_6\right|_{rr}^2 \right) i. \tag{5.30}$$

Podemos ver que a estrutura básica da amplitude não muda, com o polo tendo contribuições dos mesmos setores de spin e permanecendo não massivo. A relação entre os parâmetros agora fica:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2 \to 0} [p^2 \mathcal{A}] \right) = -\frac{2}{k^2} \frac{\mathsf{a}_3^3}{3\mathsf{a}_3^4 - 5\mathsf{a}_3^2\mathsf{a}_1^2 + 4\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1^3 - \mathsf{a}_1^4} \left|c_6\right|_{tt}^2. \tag{5.31}$$

O denominador da expressão acima pode ser escrito como:

$$(\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_1^2)(3\mathsf{a}_3^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_1^2). \tag{5.32}$$

O binómio $3\mathsf{a}_3^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_1^2$ tem raizes complexas e é sempre maior que zero. Deste modo o requerimento de ter um resíduo positivo-definido no polo implica em (com $\mathsf{a}_3 < 0$) $\mathsf{a}_1^2 - \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3^2 < 0$.

E o termo do escalar de curvatura deve satisfazer a:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 \approx 1.618\mathsf{a}_3 < \mathsf{a}_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 \approx -0.618\mathsf{a}_3. \tag{5.33}$$

O caso em que todos os parâmetros são diferente de zero (excluindo-se a_5 e a_6, é claro) contribui somente com novas correções algébricas para a amplitude, sem alterar a estrutura do polo que continua não massivo e com a mesma contribuição de spin. A relação entre os parâmetros torna-se muito emaranhada, devido ao considerável número de parâmetros envolvidos, de modo que varias hipóteses precisam ser feitas para definir os seus intervalos no espaço de parâmetros. Devido a isso, e a falta de qualquer novidade estrutural, não apresentaremos as expressões associadas.

Conclusões e Perspectivas Futuras

No decurso dos cálculos que apresentamos aqui, vimos que o termo da ação (4.1), $\mathsf{a}_5\epsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\mathsf{a}}e_\lambda{}^{\mathsf{b}}\eta_{\mathsf{ab}} = \mathsf{a}_5\epsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\alpha}e_\alpha{}^{\mathsf{a}}e_\lambda{}^{\mathsf{b}}\eta_{\mathsf{ab}} = \mathsf{a}_5\epsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}$, [3], nos leva a um problema devido aos limites dos recursos computacionais a nossa disposição para lidar com expressões algébricas, o que nos obriga a abandoná-lo para manter o maior conjunto de parâmetros livres possíveis. Assim, embora o nosso procedimento de introduzir operadores de spin funcione, os propagadores não puderam ser achados em sua maior generalidade (com todos os seis coeficientes a_i). Dos cinco parâmetros que restam, ainda permanecemos com o problema, mas uma vez que qualquer um deles, a excessão de a_3, é colocado igual a zero, somos capazes de achar os propagadores, mesmo com eles apresentando potências elevadas no momentum.

É interessante mencionar que, se considerarmos o termo linear na torção (com outros três termos zerados) concomitantemente com o termo de Chern-Simons, ou qualquer outra combinação envolvendo o termo de Chern-Simons, os propagadores apresentam uma rica estrutura de polos. A situação no entanto melhora quando descobrimos que abandonando o termo de Chern-Simons nós obtemos somente polos simples para os termos que contribuem para amplitude de transição. Nesse regime ficou transparente os diferentes papeis que os termos de torção associados a a_2 e a_3 desempenham na ação (4.1), sendo a_3 fundamental para se inverter a matriz e encontrar os propagadores.

Um comentário interessante é notar que, no trabalho anterior, [24], obtivemos somente polos físicos massivos, enquanto que neste trabalho obtivemos somente polos físicos não massivos, e que a condição de unitaridade para estes polos demanda que $\mathsf{a}_3 < 0$, o que implica, para o parâmetro que governa o escalar de curvatura o vínculo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 < \mathsf{a}_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3$. Da literatura, sabemos que para a teoria da gravitação planar sem torção $\mathsf{a}_1 > \mathsf{0}$. Do nosso trabalho anterior, obtivemos que $\mathsf{a}_1 < \mathsf{0}$, na presença de torção, se não quisermos que o modo massivo obtido não se torne uma excitação fantasma. Com o formalismo de primeira ordem adotado aqui o parâmetro está confinado ao intervalo acima, varrendo valores tanto positivos quanto negativos.

Para próximos trabalhos, podemos apresentar duas perspectivas: uma de execução mais imediata, e outra realizável mais a médio prazo. Imediatamente, podemos voltar à ação (3.22), derivada da ação (3.1), resolver as equações de campo clássicas e eliminar os campos auxiliares, para buscar uma estrita comparação com o trabalho anterior, e tentar entender melhor as reais diferenças numa mesma situação. Mais a médio prazo, a perspectiva está relacionada com outro trabalho em andamento, que trata do levantamento do espectro gravitacional quando da quebra da simetria de Lorentz na gravitação em (1+3)-D. Nossa intenção é introduzir termos de torção nesta teoria e, usando o procedimento do formalismo de primeira ordem estudar como a torção afeta e é afetada pela quebra da simetria de Lorentz. Estes termos estarão sob controle neste formalismo, mesmo com a torção não aparecendo como campo fundamental, através dos parâmetros que os regulam na ação, como foi o caso na segunda metade do presente trabalho.

A idéia de se adotar o formalismo de primeira ordem no caso da gravitação com torção, e em presença de termos com violação da simetria de Lorentz, deve ser de bastante interesse por poder revelar alguns aspectos não-triviais da relação entre as formulações de primeira e segunda ordem num cenário em que há violação da simetria de Lorentz.

Apêndice A

Operadores, Álgebra e Identidades Tensoriais

A.1 Operadores

$$\omega_{\mathsf{ab}} = \frac{\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{b}}}{\Box} \tag{A.1}$$

$$\theta_{\mathsf{ab}} = \eta_{\mathsf{ab}} - \omega_{\mathsf{ab}} \tag{A.2}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}}\partial^{\mathsf{c}} \tag{A.3}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} = \eta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} + \eta_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{b}} \tag{A.4}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}} = \mathsf{A}_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} + \mathsf{A}_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{b}} \tag{A.5}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\theta_{\mathsf{bd}} + \theta_{\mathsf{ad}}\theta_{\mathsf{bc}}) - \frac{1}{2}\theta_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}} \tag{A.6}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\omega_{\mathsf{bd}} + \theta_{\mathsf{ad}}\omega_{\mathsf{bc}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}}) \tag{A.7}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}\theta_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}} \tag{A.8}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} = \omega_{\mathsf{ab}}\omega_{\mathsf{cd}} \tag{A.9}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mathsf{ab}}\omega_{\mathsf{cd}} \tag{A.10}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}} \tag{A.11}$$

$$\mathsf{P}^{(1b)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\theta_{\mathsf{bd}} - \theta_{\mathsf{ad}}\theta_{\mathsf{bc}}) \tag{A.12}$$

$$\mathsf{P}^{(1e)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\omega_{\mathsf{bd}} - \theta_{\mathsf{ad}}\omega_{\mathsf{bc}} - \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}}) \tag{A.13}$$

$$\mathsf{P}^{(1me)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\omega_{\mathsf{bd}} - \theta_{\mathsf{ad}}\omega_{\mathsf{bc}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}} - \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}}) \tag{A.14}$$

$$\mathsf{P}^{(1em)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\omega_{\mathsf{bd}} + \theta_{\mathsf{ad}}\omega_{\mathsf{bc}} - \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}} - \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}}) \tag{A.15}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\theta_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\theta_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.16}$$

$$\mathsf{S}^{(2b)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\theta_{\mathsf{bd}} - \epsilon_{\mathsf{ade}}\theta_{\mathsf{bc}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.17}$$

$$\mathsf{S}^{(2c)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\theta_{\mathsf{bd}} - \epsilon_{\mathsf{ade}}\theta_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.18}$$

$$\mathsf{S}^{(2d)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\theta_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\theta_{\mathsf{bc}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.19}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\omega_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\omega_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.20}$$

$$\mathsf{R}^{(1b)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\omega_{\mathsf{bd}} - \epsilon_{\mathsf{ade}}\omega_{\mathsf{bc}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.21}$$

$$\mathsf{R}^{(1c)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\omega_{\mathsf{bd}} - \epsilon_{\mathsf{ade}}\omega_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.22}$$

$$\mathsf{R}^{(1d)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\omega_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\omega_{\mathsf{bc}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}} - \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}} \tag{A.23}$$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{ab,cd}} = \epsilon_{\mathsf{cda}}\partial_{\mathsf{b}} + \epsilon_{\mathsf{cdb}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.24}$$

A.2 Álgebra

Nesta seção, os números nos títulos das subseções indicam a estrutura de índice dos operadores, e como eles estão contraidos ao outro operador. Assim o título 2,1-1,2 indica que o operador da esquerda tem três índices, na forma $O_{\mathsf{ab,c}}$, e o operador da direita também apresenta três índices, só que na forma $O_{\mathsf{a,cd}}$, estando contraidos da maneira $O_{\mathsf{ab,}}{}^{\mathsf{k}}O_{\mathsf{k,cd}}$ (1-1), e dando origem a um operador $O_{\mathsf{ab,cd}}$ (2,2). Deste modo podemos facilmente localizar qualquer tipo de relação algébrica. Algumas relações envolvendo os operadores θ_{ac}, ω_{ac} e A_{ac} envolvem a contração de seus dois índices, devido a isso eles estão sob um título especial único 2. Um sinal de = significa que a expressão comuta.

A.2.1 1-1

$$\partial_{\mathsf{e}}\partial^{\mathsf{e}} = \Box \tag{A.25}$$

A.2.2 1,1-1=1-1,1

$$\theta_{\mathsf{ae}}\partial^{\mathsf{e}} = 0 \tag{A.26}$$

$$\omega_{\mathsf{ae}}\partial^{\mathsf{e}} = \partial_{\mathsf{a}} \tag{A.27}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ae}}\partial^{\mathsf{e}} = 0 \tag{A.28}$$

A.2.3 2,1-1=1-1,2

$$\mathsf{B}_{\mathsf{e,ab}}\partial^{\mathsf{e}} = 2\Box\omega_{\mathsf{ab}} \tag{A.29}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{e,ab}}\partial^{\mathsf{e}} = 0 \tag{A.30}$$

A.2.4 1,1-1,1 e 2-2

$$\theta_{\mathsf{ae}}\theta^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = \theta_{\mathsf{ab}} \tag{A.31}$$

$$\theta_{\mathsf{ae}}\theta^{\mathsf{ea}} = \theta_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}} = 2 \tag{A.32}$$

$$\omega_{\mathsf{ae}}\omega^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = \omega_{\mathsf{ab}} \tag{A.33}$$

$$\omega_{\mathsf{ae}}\omega^{\mathsf{ea}} = \omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}} = 1 \tag{A.34}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = -\Box\theta_{\mathsf{ab}} \tag{A.35}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{ea}} = \mathsf{A}_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}} = -2\Box \tag{A.36}$$

$$\theta_{\mathsf{ae}}\omega^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = 0 \tag{A.37}$$

$$\theta_{\mathsf{ae}}\omega^{\mathsf{ea}} = 0 \tag{A.38}$$

$$\theta_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = \mathsf{A}_{\mathsf{ab}} \tag{A.39}$$

$$\theta_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{ea}} = 0 \tag{A.40}$$

$$\omega_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = \mathsf{0} \tag{A.41}$$

$$\omega_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{ea}} = 0 \tag{A.42}$$

A.2.5 1,1-1,2=2,1-1,1 e 2-2,1=1,2-2

$$\theta_{\mathsf{ae}}\mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = \theta_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{d}} + \theta_{\mathsf{ad}}\partial_{\mathsf{c}} = \mathsf{B}_{\mathsf{a},\mathsf{cd}} - 2\omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.43}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\mathsf{B}_{\mathsf{a},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.44}$$

$$\theta_{\mathsf{ae}}\mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{D}_{\mathsf{a},\mathsf{cd}} \tag{A.45}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\mathsf{D}_{\mathsf{a},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.46}$$

$$\omega_{\mathsf{ae}}\mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.47}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\mathsf{B}_{\mathsf{a},}{}^{\mathsf{ef}} = 2\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.48}$$

$$\omega_{\mathsf{ae}}\mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.49}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\mathsf{D}_{\mathsf{a},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.50}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ae}}\mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}} \tag{A.51}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ef}}\mathsf{B}_{\mathsf{a},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.52}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ae}}\mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = -\Box(\theta_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{d}} + \theta_{\mathsf{ad}}\partial_{\mathsf{c}}) = -\Box(\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}} - 2\omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}}) \tag{A.53}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ef}}\mathsf{D}_{\mathsf{a},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.54}$$

A.2.6 2-2,2 e 2,2-2

$$\theta_{\mathsf{ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.55}$$

$$\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.56}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.57}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.58}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \theta_{\mathsf{cd}} \tag{A.59}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}} = \theta_{\mathsf{ab}} \tag{A.60}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.61}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \theta_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.62}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \sqrt{2}\omega_{\mathsf{cd}} \tag{A.63}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \theta_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.64}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.65}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \theta_{\mathsf{ef}} = \sqrt{2}\omega_{\mathsf{ab}} \tag{A.66}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}} \mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.67}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \theta_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.68}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}} \mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.69}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \theta_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.70}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.71}$$

$$\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.72}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.73}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.74}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.75}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.76}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \omega_{\mathsf{cd}} \tag{A.77}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = \omega_{\mathsf{ab}} \tag{A.78}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.79}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{\mathsf{ab}} \tag{A.80}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{\mathsf{cd}} \tag{A.81}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.82}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.83}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.84}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}} \mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.85}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \omega_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.86}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ef}} \mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.87}$$

$$\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},} \mathsf{A}_{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.88}$$

$$\mathsf{A_{ef}P^{(1m)ef}{}_{,cd}} = 0 \tag{A.89}$$

$$\mathsf{P^{(1m)ef}_{ab,}A_{ef}} = 0 \tag{A.90}$$

$$\mathsf{A_{ef}P^{(0s)ef}{}_{,cd}} = 0 \tag{A.91}$$

$$\mathsf{P^{(0s)ef}_{ab,}A_{ef}} = 0 \tag{A.92}$$

$$\mathsf{A_{ef}P^{(0w)ef}{}_{,cd}} = 0 \tag{A.93}$$

$$\mathsf{P^{(0w)ef}_{ab,}A_{ef}} = 0 \tag{A.94}$$

$$\mathsf{A_{ef}P^{(0sw)ef}{}_{,cd}} = 0 \tag{A.95}$$

$$\mathsf{P^{(0sw)ef}_{ab,}A_{ef}} = 0 \tag{A.96}$$

$$\mathsf{A_{ef}P^{(0ws)ef}{}_{,cd}} = 0 \tag{A.97}$$

$$\mathsf{P^{(0ws)ef}_{ab,}A_{ef}} = 0 \tag{A.98}$$

$$\mathsf{A_{ef}S^{(2a)ef}{}_{,cd}} = 0 \tag{A.99}$$

$$\mathsf{S^{(2a)ef}_{ab,}A_{ef}} = 0 \tag{A.100}$$

$$\mathsf{A_{ef}R^{(1a)ef}{}_{,cd}} = 0 \tag{A.101}$$

$$\mathsf{R^{(1a)ef}_{ab,}A_{ef}} = 0 \tag{A.102}$$

A.2.7 1,2-2,1 e 2,1-1,2

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,}}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box(\theta_{\mathsf{ac}} + 2\omega_{\mathsf{ac}}) \tag{A.103}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\Box(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}) \tag{A.104}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{D}_{\mathsf{c,}}{}^{\mathsf{ef}} = -2\Box\mathsf{A}_{\mathsf{ac}} \tag{A.105}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = \Box\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.106}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\ \theta^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.107}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{e,ab}}\ \theta_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = 2\sqrt{2}\Box\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.108}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\ \omega^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 2\Box\omega_{\mathsf{ac}} \tag{A.109}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{e,ab}}\ \omega_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = 2\Box\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.110}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,}}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box\mathsf{A}_{\mathsf{ac}} \tag{A.111}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = -\Box\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.112}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{D}_{\mathsf{c,}}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box^2\theta_{\mathsf{ac}} \tag{A.113}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\Box^2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.114}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\ \theta^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.115}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{e},\mathsf{ab}}\ \theta_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = 0 \tag{A.116}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a},\mathsf{ef}}\ \omega^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.117}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{e},\mathsf{ab}}\ \omega_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = 0 \tag{A.118}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{B}_{\mathsf{c},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.119}$$

$$\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\sqrt{2}\Box\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab},\mathsf{cd}} \tag{A.120}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{D}_{\mathsf{c},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.121}$$

$$\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.122}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \theta^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 2\Box\omega_{\mathsf{ac}} \tag{A.123}$$

$$\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \theta_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = 2\Box\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab},\mathsf{cd}} \tag{A.124}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \omega^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.125}$$

$$\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \omega_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = \sqrt{2}\Box\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab},\mathsf{cd}} \tag{A.126}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{B}_{\mathsf{c},}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box\omega_{\mathsf{ac}} \tag{A.127}$$

$$\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\Box\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab},\mathsf{cd}} \tag{A.128}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{D}_{\mathsf{c},}{}^{\mathsf{ef}} = 0 \tag{A.129}$$

$$\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.130}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \theta^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.131}$$

$$\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \theta_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = \sqrt{2}\Box \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.132}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \omega^{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = \Box\omega_{\mathsf{ac}} \tag{A.133}$$

$$\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{e}}\ \omega_{\mathsf{cd}}\partial^{\mathsf{e}} = \Box \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.134}$$

A.2.8 1,2-2,2 e 2,2-2,1

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.135}$$

$$\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.136}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = (\theta_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{d}} + \theta_{\mathsf{ad}}\partial_{\mathsf{c}}) = (\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}} - 2\omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}}) \tag{A.137}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = (\theta_{\mathsf{ca}}\partial_{\mathsf{b}} + \theta_{\mathsf{cb}}\partial_{\mathsf{a}}) = (\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - 2\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}}) \tag{A.138}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.139}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.140}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.141}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = 2\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \tag{A.142}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.143}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab,}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = \sqrt{2}\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \tag{A.144}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \sqrt{2}\theta_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.145}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab,}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.146}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.147}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab,}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.148}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 2\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}} \tag{A.149}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab,}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,ef}} = -2\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}} \tag{A.150}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.151}$$

$$\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab,}}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.152}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}} \tag{A.153}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab,}}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = \mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}} \tag{A.154}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.155}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab,}}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.156}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.157}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.158}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.159}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.160}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.161}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.162}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.163}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = 0 \tag{A.164}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = -2\Box(\theta_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{d}} + \theta_{\mathsf{ad}}\partial_{\mathsf{c}}) = -2\Box(\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}} - 2\omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}}) \tag{A.165}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\mathsf{D}_{\mathsf{c,ef}} = 2\Box(\theta_{\mathsf{ca}}\partial_{\mathsf{b}} + \theta_{\mathsf{cb}}\partial_{\mathsf{a}}) = 2\Box(\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - 2\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}}) \tag{A.166}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.167}$$

$$\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.168}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.169}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.170}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \theta_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.171}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = \theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \tag{A.172}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.173}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.174}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \sqrt{2}\omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.175}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.176}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.177}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = \sqrt{2}\omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \tag{A.178}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.179}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.180}$$

$$\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.181}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\theta_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.182}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.183}$$

$$\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.184}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.185}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.186}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.187}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.188}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \omega_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.189}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = \omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \tag{A.190}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.191}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \tag{A.192}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mathsf{cd}}\partial_{\mathsf{a}} \tag{A.193}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.194}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.195}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.196}$$

$$\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{a}}\ \mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.197}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}_{\mathsf{ab},}\omega_{\mathsf{ef}}\partial_{\mathsf{c}} = 0 \tag{A.198}$$

A.2.9 2,2-2,2

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.199}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.200}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.201}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.202}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.203}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.204}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.205}$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.206}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{0} \tag{A.207}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.208}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.209}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.210}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = 0 \tag{A.211}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.212}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.213}$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{R}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.214}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.215}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.216}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.217}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.218}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.219}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.220}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.221}$$

$$\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.222}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.223}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.224}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{0} \tag{A.225}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.226}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.227}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.228}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.229}$$

$$\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.230}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.231}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.232}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.233}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.234}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.235}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.236}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.237}$$

$$\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.238}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.239}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.240}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.241}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.242}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.243}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.244}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.245}$$

$$\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.246}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.247}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.248}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.249}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.250}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.251}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.252}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = -16\Box\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.253}$$

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.254}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.255}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.256}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0s)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.257}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0w)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.258}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0sw)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.259}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(0ws)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.260}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = 0 \tag{A.261}$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{,\mathsf{cd}} = -4\Box\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.262}$$

A.3 Identidades Tensoriais

$$\eta_{\mathsf{ab}} = \theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}} \tag{A.263}$$

$$\eta_{\mathsf{ac}}\eta_{\mathsf{bd}} + \eta_{\mathsf{ad}}\eta_{\mathsf{bc}} = 2(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}) \tag{A.264}$$

$$\eta_{\mathsf{ab}}\eta_{\mathsf{cd}} = 2\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \sqrt{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \tag{A.265}$$

$$\eta_{\mathsf{ac}}\eta_{\mathsf{bd}}+\eta_{\mathsf{ad}}\eta_{\mathsf{bc}}-\eta_{\mathsf{ab}}\eta_{\mathsf{cd}} = 2\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}+2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}-\sqrt{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) \tag{A.266}$$

$$\eta_{\mathsf{ac}}\eta_{\mathsf{bd}} + \eta_{\mathsf{ad}}\eta_{\mathsf{bc}} - 2\eta_{\mathsf{ab}}\eta_{\mathsf{cd}} = 2\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\sqrt{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) \tag{A.267}$$

$$\eta_{\mathsf{ac}}\eta_{\mathsf{bd}} - \eta_{\mathsf{ad}}\eta_{\mathsf{bc}} = 2(\mathsf{P}^{(1b)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(1e)}_{\mathsf{ab,cd}}) \tag{A.268}$$

Referências Bibliográficas

[1] Weinberg, S., Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons, New York (1972).

[2] De Sabbata, V. and Gasperini, M., Introduction to Gravitation, World Scientific, Singapore (1985).

[3] Zanelli, J., Cursos de Pós-Graduação - Anais da V Escola do CBPF, vol. II, CBPF, Rio de Janeiro (2005).

[4] Eddington, A. S., Proc. R. Soc. Lond. A 99 (1921), 104.

[5] Eddington, A. S., The Mathematical Theory of Relativity, 2nd ed, Cambridge University, Cambridge (1924).

[6] Cartan, É., C. R. Acad. Sci., Paris, 174 (1922), 593.

[7] Cartan, É., Ann. Ec. Norm. Sup. 40 (1923), 325; 41 (1924), 1; 42 (1925), 17.

[8] Debever, R.,Élie Cartan - Albert Einstein Lettres le Parallélisme Absolu, 1929 - 1932, Académie Royale de Belgique, Princeton Universite Press, Princeton (1979).

[9] Goudsmit, S. and Uhlenbeck, G. E., Naturwiss 13 (1925), 953; Nature 117 (1926), 264.

[10] Utiyama, R., Phys. Rev. 101 (1955), 1597.

Kibble, T. W. B., J. Math. Phys. 2 (1961), 222.

[11] Sciama, D. W., Recent Developments in General Relativity, Pergamon+DWN, Oxford, 415 (1962).

[12] Sciama, D. W., Rev Mod. Phys. 36 (1964), 463 e 1103.

[13] Hehl, F. W., Gen. Relat. Grav. J. 4 (1973), 333; 5 (1974), 491.

[14] Hehl, F. W., Rep. Math. Phys. 9 (1976), 55.

[15] Bull. Am. Phys. 19 (1974), 68.

[16] Hehl, F. W.; Heyde, P. and Kerlick, G. D., Rev. Mod. Phys. 48 (1976), 393.

[17] Baekler, P.; Mielke, E. W. and Hehl, F. W., Nuovo Cimento 107 B (1992), 91. [para (1+2)-D]

[18] Carroll, S. M. and Field, G. B., Phy. Rev. D 50 (1995), 3867.

[19] Hammond, R. J., Phys. Rev. D 52 (1995), 6918.

[20] Barone, F. A.; de Moraes, L. M. and Helayël-Neto,J. A., Phy. Rev. D 72 (2005), 105012-1.

[21] Shapiro, I. L., Phys. Rept. 357 (2001), 113

[22] Utiyama, R., Phys. Rev. 101 (1955), 1597.

[23] Deser, S.; Jackiw, R. and Templeton, A., Ann. Phys. 140 (1982), 372.

[24] Boldo,J. L.; de Moraes, L. M. and Helayël-Neto,J. A., Class. Quantum Grav. 17 (2000), 813

[25] Deser, S. and Yang, Z., Class. Quantum Grav. 7 (1990), 1603.

[26] Keszthelyi, B. and Kleppe, G., Phys. Lett. B 281 (1992), 33.

[27] Buchbinder, I. C.; Odintsou, S. P. and Shapiro, I. L., Effective Action in Quantum Gravity, Bristol, IOP Publishing (1992).

[28] de Moraes, L. M., Helayël-Neto,J. A. and Vásquez Otoya, Adv. Stud. Theor. Phys., a ser publicado (por volta de agosto de 2007).

[29] de Moraes, L. M., Tese de Mestrado: Efeitos da Torção no Espectro da "Gravitação Topologicamente Massiva", CBPF (2000).

[30] Papapetrou, A., Proc. R. Soc. Lond. A 209 (1951), 248.

[31] Zanelli, J., Proceedings of the Summer School Villa de Leyva, World Scientific (2005).

[32] Accioly, A.; Azevedo, A. and Mukai, H., J. Phys. A 34 (2001), 7213.

[33] Accioly, A., Phys. Rev. D 67 (2003), 127502.

[34] Sezgin, S. and van Nieuwenhuizen, P., Phys. Rev. D 21 (1980), 3269.

[35] Sezgin, S., Phys. Rev. D 24 (1981), 1677.

[36] Accioly, A., Nucl. Phys. Proc. Suppl. 127 (2004), 100.

[37] Rivers, R. J., Nuovo Cimento 34 (1964), 387.

[38] Van Nieuwenhuizen, P., Nucl. Phys. B 60 (1973), 478.