Contribuiçoẽs ao Estudo dos Estados Térmicos da Corda Bosônica no Formalismo de Dinâmica de Campos Térmicos

Edison Luiz da Graça

February 25, 2007

Tese de Doutorado

Contribuiçoẽs ao Estudo dos Estados Térmicos da Corda Bosônica no Formalismo de Dinâmica de Campos Térmicos

Edison Luiz da Graça

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Janeiro de 2007

Resumo

Determinamos a entropia local e a energia livre para cordas térmicas bosônicas abertas quantizadas no espaço-tempo Minkowski, com as mais gerais condições de contorno. Formulamos uma teoria a temperatura finita para as excitações térmicas da corda bosônica fechada no espaço-tempo anti-de Sitter, com abordagem da DCT. Escrevemos os estados e obtemos a entropia e a energia livre, com uma teoria perturbativa semiclássica quantizada até primeira ordem, no referencial de centro de massa.

Palavras chave: Teoria de Cordas e Temperatura Finita.

Área de conhecimento: Teoria Quântica de Campos.

Abstract

We determine the local entropy of the free energy of the quantized open bosonic string in Minkowski spacetime with the most general boundary conditions. We formulate a finite temperature theory of the thermal closed string excitations in anti-de Sitter spacetime within the TFD approach. We write down the thermal states and obtain the entropy and the free energy in the first order expansion of the semiclassical quantization in the center of mass reference frame.

Agradecimentos

Ao professor Ion Vasile Vancea, meu orientador, pelo coragem e perseverança que demonstrou nas horas difíceis e que através de uma convivência diária possibilitou escrever esta tese. Ao professor Sebastião Alves Dias, meu co-orientador, pela amizade e apoio. Ao professor José Abdalla Helayël-Neto pelas excelentes aulas e seminários e pela sua amizade sincera. Ao professor Aníbal Caride que nos recebeu no CBPF. A Patricia Vancea pelo acolhimento e carinho. A todos os conhecidos do CBPF, todos mesmo, que sempre amáveis, foram solícitos às nossas necessidades.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Os experimentos disponíveis atualmente não atingem a escala de energia necessária para testar a teoria de cordas, entretanto o interesse na teoria de cordas se deve a possibilidade de que a teoria é uma forte candidata a unificar as forças existentes na natureza. O estudo do espectro de cordas bosônicas, mostra que dependendo dos modos no qual a corda vibra, surgem partículas que podem ser associadas a fótons e aos grávitons, levando a pensar que a teoria é capaz de acomodar uma teoria quântica da gravidade.

Recentemente, há interesse na formulação das cordas e D-branas à temperatura finita por várias razões. A relação entre as cordas e a teoria de campos à temperatura finita representa por si mesma, um interessante problema que pode nos ajudar a melhor entender as propriedades físicas das cordas e D-branas. Algum progresso nesta direção pode ser feito no limite de baixas energias da teoria de cordas, onde as D-branas são soluções solitônicas da (super)gravidade. Neste limite, a termodinâmica das cordas e D-branas tem sido formulada utilizando as integrais de trajetória de teoria de campos à temperatura finita [1]-[9]. De outro lado podemos querer entender as propriedades estatísticas de alguns sistemas que podem ser descritos em termos de cordas, D-branas e anti-D-branas, como, por exemplo, o extremo, quasi-extremo e buracos negros de Schwarzschild.

No outro bem conhecido limite da teoria de cordas, o limite perturbativo, as informações geométricas relativas as D-branas são perdidas. Neste caso, as D-branas são apropriadamente descritas por uma superposição de estados coerentes no espaço de Fock do setor de cordas fechadas [10]-[16] que devem satisfazer um conjunto de condições de contorno de Dirichlet e Neummann a serem impostas nos pontos terminais da corda aberta. A interpretação intuitiva das D-branas como estados coerentes de contorno é mantida a temperatura finita se a abordagem DCT é aplicada. A razão para isso é que a dependência térmica é implementada através dos operadores térmicos que preservam a forma das relações a temperatura zero. Trabalhando com a DCT em vez do formalismo de integrais de trajetória a tempo real temos uma formulação conveniente do problema, é conhecido que ambos formalismos são equivalentes no equilíbrio térmico.

A DCT foi usada para discutir um gás ideal de cordas, construir uma teoria de campos de cordas bosônicas abertas a temperatura finita e provar sua renormalizabilidade [17]-[22]. Estes estudos foram motivados pela necessidade de entender a cosmologia de cordas e conjuntos de cordas em geral. Todavia quando aplicamos a DCT para as cordas e D-branas, devemos tomar algumas precauções [23]-[35]. As D-branas são definidas como estados no espaço de Fock das cordas em primeira quantização. A teoria de campos conformes que baseia a construção descreve o vácuo bosônico da teoria de cordas. Considerando temperatura finita, interpretamos a corda térmica como um modelo para as excitações térmicas do vácuo bosônico na teoria de cordas. Além disso, a DCT é aplicada na teoria conforme em duas dimensões. Assim, as D-branas podem ser interpretadas como estados térmicos coerentes de contorno no espaço de Fock das excitações térmicas [27]-[35] .Uma outra nota é que a entropia das cordas e D-branas é definida com o valor esperado do operador entropia no estado de vácuo térmico da corda. Até o presente não é conhecida uma teoria na qual as D-branas são escritas por estados do tipo vácuo ou estados criados a partir do vácuo. Assim, para calcularmos a entropia dos estados de D-branas temos que calcular o valor esperado do operador entropia da corda bosônica nos estados de contorno.

Usando a motivação acima apresentada vamos construir os estados térmicos da corda bosônica e desenvolver um cálculo para a entropia tanto para cordas abertas no espaço-tempo de Minkowski quanto para cordas fechadas no espaço-tempo anti-de Sitter (AdS). A corda bosônica no AdS representa o primeiro exemplo de quantização exata da teoria de cordas no espaço-tempo com curvatura. A diferença entre a dinâmica da corda nos espaços de Minkowski e AdS é que em geral AdS não é uma solução das equações de funções-β para o modelo-σ de corda. Portanto há uma grande classe de configurações de campos no AdS conformais e não-conformais nas quais as propriedades físicas das cordas quânticas são difíceis de estudar. Os fundos que são invariantes conformais são necessários para definir a consistência da teoria quântica de corda. Todavia muitos fundos interessantes do ponto de vista físico não satisfazem este requisito. Um método para analisar a dinâmica de cordas bosônicas no espaço-tempo com métrica arbitrária foi proposto nos trabalhos [36]-[40]. Foi mostrado que escolhendo as condições apropriadas de contorno para a corda bosônica a invariância de reparametrização da teoria de folha mundo pode ser escrita como uma transformação de coordenadas entre diferentes referenciais no espaço-tempo. Também, um calibre de cone de luz local pode ser escolhido em qualquer referencial. Neste calibre nos podemos localmente separar os graus de liberdade da corda em longitudinais, ou seja ao longo da trajetoria do centro de massa da corda, e transversais, e mostrar que os graus de liberdade longitudinais são funções somente dos transversais. Esse permite um esquema de aproximação para a quantização canônica em fundos invariantes conformais, esquema esse chamado de *quantização semiclássica*, no qual a métrica é tomada fixa enquanto a perturbação é feita em torno da trajetoria do centro de massa. Nos mesmos trabalhos o método da quantização semiclássica foi extendido até primeira ordém para fundos AdS não-conformais D-dimensionais.

No capítulo 2, desenvolvemos uma introdução a cordas bosônicas no espaço-tempo de Minkowski para cordas abertas e no espaço-tempo anti-de Sitter (AdS) o estudo para cordas fechadas. Apresentam-se também, para ambas situações as maneiras de proceder para a devida quantização. No capítulo 3 introduzimos o formalismo da dinâmica de campos térmicos (DCT). No quarto capítulo são apresentadas as contribuições mais relevantes desta tese, analisamos a corda bosônica aberta térmica no espaço-tempo de Minkowski, quantizada e calculamos a entropia local e a energia livre para as mais variadas condições de contorno impostas. Ainda neste capítulo consideramos a corda bosônica fechada quantizada no formalismo semiclássico no espaço AdS, escrevemos os estados físicos e calculamos a entropia local e a energia livre. Por último, discutimos a relação entre a Hamiltoniana no espaço de Hilbert total e o espaço de Hilbert físico. No último capítulo são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras. A tese foi baseada nos trabalhos do autor [48]-[51].

Capítulo 2

Corda Bosônica

Apresentam-se neste capítulo aspectos básicos da teoria de cordas bosônicas tanto no espaço-tempo de Minkowski quanto no espaço AdS. Serão discutidas a ação clássica de Polyakov e a sua quantização canônica no calibre de cone de luz no espaço de Minkowski [54, 55]. A quantização semiclássica da corda no espaço AdS é desenvolvida em [36]-[41].

2.1 Corda Bosônica Clássica no Espaço - Tempo de Minkowski

Uma superfície bidimensional, denominada folha mundo é descrita pela corda ao propagar-se no espaço-tempo. A folha mundo M pode ser parametrizada pelas coordenadas $(\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$, onde $\sigma^0 = \tau$ é um parâmetro tipo-tempo e o outro $\sigma^1 = \sigma \in [0, \pi]$ é um parâmetro tipo-espaço. Uma função dessas coordenadas, para descrever a evolução espaço-temporal da corda na folha mundo M, é dada por $x^a(\sigma^0, \sigma^1)$, onde $a = 0, 1, \ldots, D-1$ e sendo D a dimensão do espaço-tempo de Minkowski.

A ação de Polyakov, que descreve a corda, é dada por

$$S = -\frac{T_s}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b \eta_{ab}, \tag{2.1}$$

sendo $T_s = (2\pi\alpha')^{-1}$ e α' o parâmetro de Regge. $h_{\alpha\beta}$ e η_{ab} são tensores métricos de tipo-Minkowskiano, respctivamente, da folha mundo M e do espaço-tempo. $h_{\alpha\beta}$ por ser simétrico, possui três campos independentes, h é o seu determinante e $d^2\sigma = d\sigma^0 d\sigma^1$.

A ação (2.1) é invariante por transformações gerais de coordenadas na folha-mundo $\sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\alpha + \xi^\alpha$. As reparametrizações locais sob as quais esta ação é invariante são

$$
\begin{aligned}
\delta h^{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \xi^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi^\beta h^{\alpha\gamma}, \\
\delta x^a &= \xi^\alpha \partial_\alpha x^a, \\
\delta(\sqrt{-h}) &= \partial_\alpha(\xi^\alpha \sqrt{-h}),
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

A ação (2.1) apresenta invariância conforme ou de Weyl (por reescalamento conforme da métrica $h_{\alpha\beta}$):

$$\delta x^a = 0 \quad , \quad \delta h_{\alpha\beta} = \Lambda h_{\alpha\beta},$$

onde $\Lambda = \Lambda(\sigma^0, \sigma^1)$ é uma função infinitesimal arbitrária de σ^α. Existe uma simetria global no espaço-tempo de Minkowski, a ação é invariante de Poincaré para

$$\delta x^a = \omega^a_b x^b + a^b \quad , \quad \delta h_{\alpha\beta} = 0,$$

onde a^b é um vetor constante e $\omega_{ab} = \eta_{ac}\omega^c_b$ é um tensor anti-simétrico.

O tensor energia-momento é definido como

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T_s}\frac{1}{\sqrt{-h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}, \tag{2.3}$$

e sua forma explícita é

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma x^a \partial_\delta x_a + \partial_\alpha x^a \partial_\beta x_a. \tag{2.4}$$

São vínculos da teoria clássica:

$$\mathrm{Tr}(T_{\alpha\beta}) = 0 \ \text{ e } \ T_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.5}$$

que devem também ser satisfeitos pela teoria quântica.

Adotaremos um calibre conveniente, que servirá para diminuiremos os graus de liberdade das variáveis dinâmicas que aparecem explicitamente na ação. Escolhemos uma parametrização da folha mundo, tal que $h_{\alpha\beta} = e^{\Lambda}\eta_{\alpha\beta}$, onde $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica plana da folha mundo ($\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, +1)$). Denomina-se e^{Λ} de fator conforme, $\Lambda = \Lambda(\tau, \sigma)$. Substituindo este calibre conforme na ação

$$S = -\frac{T_s}{2}\int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^a \partial_\beta x_a, \tag{2.6}$$

resultando o tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^{'2}) = 0, \\ T_{10} &= T_{01} = \dot{x} \cdot x^{'} = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Explicitamente, neste calibre conforme temos o tensor energia-momento:

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{11} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + x'^2\right) = 0 \\ T_{10} &= T_{01} = \dot{x} \cdot x' = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tomando a variação da ação de Polyakov (2.6) com relação a x^a

$$\delta S = 0 = -T_s \int_{\partial M} d\tau \left(n^\sigma \partial_\sigma x^a\right) \delta x_a - T_s \int_M d^2\sigma \left(\partial^\alpha \partial_\alpha x^a\right) \delta x_a, \tag{2.9}$$

onde n^σ é um versor normal ao contorno ∂M. As duas parcelas da $\delta S = 0$ devem se anular separadamente. Da segunda parcela

$$\partial^\alpha \partial_\alpha x^a = 0, \tag{2.10}$$

são as equações de movimento da corda; sendo equações de Klein-Gordon em duas dimensões, sem o termo de massa. Da primeira parcela resultam as condições de contorno(c.c.). Para a corda fechada, as condições de contorno periódicas escolhidas são:

$$x^a(\tau, 0) = x^a(\tau, \pi). \tag{2.11}$$

Para a corda aberta

$$\left[\partial_\sigma x^a \delta x_a\right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0, \tag{2.12}$$

há várias possibilidades de condições de contorno. $\partial_\sigma x^a|_0^\pi = 0$ são c.c. tipo Neumann (N) e $\delta x^a|_{\partial M} = 0$ são c.c. tipo Dirichlet (D). As c.c. tipo N e D podem ser aplicadas independentemente às duas extremidades da corda aberta. As soluções das equações de movimento expandidas em série de Fourier com as c.c. NN, DD, DN e ND, respectivamente, são

$$
\begin{aligned}
x^a(\tau,\sigma) &= x^a + 2\alpha' p^a \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \cos n\sigma, && (2.13)\\
x^a(\tau,\sigma) &= \frac{c^a(\pi-\sigma) + d^a\sigma}{\pi} - \sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{\alpha_n^a}{n} e^{-in\tau} \sin n\sigma \right), && (2.14)\\
x^a(\tau,\sigma) &= c^a - \sqrt{2\alpha'} \sum_{r\in Z'} \left(\frac{\alpha_n^a}{n} e^{-in\tau} \sin n\sigma \right), && (2.15)\\
x^a(\tau,\sigma) &= d^a + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{r\in Z'} \left(\frac{\alpha_n^a}{n} e^{-in\tau} \cos n\sigma \right), && (2.16)
\end{aligned}
$$

onde x^a e p^a s ao coordenadas de posição e momenta canonicamente conjugados do centro de massa da corda, c^a e d^a são vetores constantes que descrevem respectivamente, as posições dos extremos finitos onde a corda é aberta e $Z' = Z + 1/2$. Somente a solução (2.13) é invariante de Poincaré, as demais soluções têm alguma extremidade fixa que associada a objeto físico extenso dá origem a chamada D-brana [55]. Vamos de agora em diante, somente considerar para cordas abertas as soluções NN, não trataremos de branas.

Para a corda fechada, as soluções das equações de movimento são invariantes de Poincaré e dadas por

$$
x^a(\tau,\sigma) = x^a + 2\alpha' p^a \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{2n} \left(\alpha_n^a e^{-2in(\tau-\sigma)} + \beta_n^a e^{-2in(\tau+\sigma)} \right). \qquad (2.17)
$$

Estas soluções para as cordas bosônicas são uma superposição linear de modos de oscilação movendo-se para a direita e para a esquerda da corda, com respectivamente, coeficiente de Fourier α_n^a e β_n^a. O fato de $x^a(\tau,\sigma)$ ser real impõe:

$$
\alpha_{-n}^a = (\alpha_n^a)^* \quad , \quad \beta_{-n}^a = (\beta_n^a)^*, \qquad (2.18)
$$

para $n > 0$.

Fixando τ a evolução do sistema pode ser descrita com os parenteses de Poisson para as variáveis dinâmicas do sistema clássico

$$\{x^a(\tau,\sigma), x^b(\tau,\sigma')\} = \{\dot{x}^a(\tau,\sigma), \dot{x}^b(\tau,\sigma')\} = 0 \tag{2.19}$$

$$\{p^a(\tau,\sigma), x^b(\tau,\sigma')\} = T_s\{\dot{x}^a(\tau,\sigma), \dot{x}^b(\tau,\sigma')\} = \eta_{ab}\delta(\sigma-\sigma') \tag{2.20}$$

Substituindo a solução para corda fechada na última relação

$$\{\alpha^a_m, \alpha^b_n\} = \{\beta^a_m, \beta^b_n\} = im\delta_{m+n,0}\eta^{ab} \quad , \quad \{\alpha^a_m, \beta^b_n\} = 0, \tag{2.21}$$

com as variáveis do centro de massa

$$\{p^a, x^b\} = \eta^{ab}. \tag{2.22}$$

É conveniente utilizar as componentes do tensor energia-momento nas coordenadas de cone de luz na folha mundo $x^{\pm} = \tau \pm \sigma$ e $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_s)$. Assim

$$\begin{aligned} T_{++} &= \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ x^a \partial_+ x_a, \\ T_{--} &= \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- x^a \partial_- x_a. \end{aligned} \tag{2.23}$$

As equações de vínculos (2.5) tomam a sequinte forma

$$T_{++} = T_{--} = 0, \tag{2.24}$$

valendo para as cordas abertas e cordas fechadas. As componentes de movimento para a direita e para a esquerda são, respectivamente

$$x^a_R(x^+, x^-) = \frac{1}{2}x^a + \frac{1}{2}l^2 p^a x^- \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha^a_n}{n}e^{-21nx^-}, \tag{2.25}$$

$$x^a_L(x^+, x^-) = \frac{1}{2}x^a + \frac{1}{2}l^2 p^a x^- \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha^a_n}{n}e^{-21nx^+}. \tag{2.26}$$

Para a corda fechada, as componentes de Fourier de T_{++} e T_{--} definidas em $\tau = 0$ são:

$$\bar{L}_m = \frac{T_s}{2}\int_0^\pi d\sigma e^{im\sigma} T_{++}, \tag{2.27}$$

$$L_m = \frac{T_s}{2}\int_0^\pi d\sigma e^{im\sigma} T_{--}, \tag{2.28}$$

Reescritos em modos de Fourier

$$\bar{L}_m = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^a_{m-n}\alpha_{an}, \tag{2.29}$$

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta^a_{m-n}\beta_{an}. \tag{2.30}$$

L_m e $\bar{L}_m$ são denominados de operadores de Virasoro.

Para a corda aberta temos um conjunto de osciladores de modos α^a_m e definimos as componentes de Fourier do tensor energia-momento como

$$L_m = T_s \int_0^{pi} d\sigma \left(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}\right) = \frac{T_s}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^a_{m-n}\alpha_{an}. \tag{2.31}$$

A Hamiltoniana para a corda aberta é $H = L_0$ e para a corda fechada $H = L_0 + \bar{L}_0$. Em termos de componentes de Fourier temos para a corda aberta:

$$H = \frac{T_s}{2}\int d^s \left(\dot{x}^2 + x'^2\right) = \sum_{n\neq 0} \alpha^a_{-n}\alpha_{an} + \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}p^a p_a, \tag{2.32}$$

onde $\alpha^a_0 = \sqrt{2\alpha'}p^a$. Para a corda fechada a Hamiltoniana toma a seguinte forma

$$H = \sum_{n\neq 0}(\alpha^a_{-n}\alpha_{an} + \beta^a_{-n}\beta_{an}) + \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}p^a p_a, \tag{2.33}$$

onde $\alpha^a_0 = \beta^a_0 = \frac{1}{2}lp^a$.

A partir das definições dos operadores de Virasoro e dos parênteses de Poisson dos modos de osciladores, escrevemos para corda aberta os parênteses de Poisson

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}, \tag{2.34}$$

para corda fechada

$$\begin{aligned} \{L_m, L_n\} &= i(m-n)L_{m+n} \quad , \quad \{\bar{L}_m, \bar{L}_n\} = i(m-n)\bar{L}_{m+n}, \\ \{L_m, \bar{L}_n\} &= 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Utilizando a condição de concha de massa $M = -p^a \cdot p_a$ e o vinculo $L_0 = 0$ para corda aberta, o quadrado da massa da corda M^2 é obtido em termos dos modos internos de oscilação

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^a_{-n}\alpha_{an}. \tag{2.36}$$

para corda fechada, os vínculos são $L_0 = \bar{L}_0 = 0$ e obtemos

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha^a_{-n} \alpha_{an} + \beta^a_{-n} \beta_{an} \right). \tag{2.37}$$

2.2 Quantização da Corda Bosônica no Cone de Luz

Na escolha de calibre conforme nem toda liberdade de calibre foi removida, ainda é possível reduzir o número de componentes não triviais de $x^a(\tau, \sigma)$ e que mantém somente os graus de liberdade fisicos relevantes [44]. Vamos definir as coordenadas de cone de luz para uma corda em D dimensões

$$x^{\pm}(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x^0(\tau, s) \pm x^{D-1}(\tau, \sigma) \right). \tag{2.38}$$

A invariância residual de calibre permite fazer a escolha

$$x^+ = x^+ + l^2 p^+ \tau, \tag{2.39}$$

onde x^+ e p^+ são constantes.

Combinando as reparametrizações e o reescalonamento local de Weyl podemos obter novo τ, que é soma de funções arbitrárias de $(\tau \pm \sigma)$. O novo τ definido, pode ser identificado com qualquer solução escolhida u da equação de onda

$$\partial^\alpha \partial_\alpha u = 0. \tag{2.40}$$

Como x^+ e $(ax^+ + b)$, para a e b constantes, satisfazem a equação de onda (linearidade), a escolha (2.39) é aceitável para novo τ.

Considerando a corda aberta, suas componentes $x^{\pm}(\tau, \sigma)$ satisfazem as mesmas soluções (2.13)-(2.16) com $a \to i = 1, 2, \ldots, D-1$. As relações de quantização no cone de luz a serem satisfeitas pelos campos de corda são:

$$[x^i(\tau, \sigma), P^j_\tau(\tau, \sigma')] = i\delta^{ij}\delta(\sigma - \sigma'), \tag{2.41}$$

$$[x^-, p^+] = -i, \tag{2.42}$$

$$[x^i(\tau,\sigma), x^j(\tau,\sigma')] = [P^i_\tau(\tau,\sigma), P^j_\sigma(\tau,\sigma')] = 0, \tag{2.43}$$

$$[x^-, x^i] = [x^-, P^j_\tau] = [p^+, x^i] = [p^+, P^i_\tau] = 0. \tag{2.44}$$

Das relações (2.41)-(2.44) segue que os operadores no espaço de Fock para osciladores quantizados devem satisfazer

$$[\alpha^i_n, \alpha^j_m] = n\delta^{ij}\delta_{n+m}. \tag{2.45}$$

$$\alpha^i_{-n} = (\alpha^i_n)^\dagger, \quad n > 0, \tag{2.46}$$

O operador de massa quântico pode ser escrito

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N-1), \tag{2.47}$$

onde

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^i_{-m}\alpha^i_m. \tag{2.48}$$

O Hamiltoniano no cone de luz para a corda aberta é

$$H_{ca} = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} :\alpha^i_m\alpha^i_{-m}: -1, \tag{2.49}$$

e os operadores de Virasoro quantizados

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} :\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n: . \tag{2.50}$$

A álgebra de Virasoro para o caso quântico não apresenta anomalias para $D = 26$. Neste caso a álgebra satisfaz

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}. \tag{2.51}$$

Em geral, a presença de anomalias na álgebra quântica de Virasoro não permite que o vínculo clássico $L_m = 0$, $\forall m$ possa ser implementado em estados quãnticos. Por causa das relações de comutação $[\alpha^a_m, \alpha^b_n] = m\delta_{m+n,0}\eta^{ab}$ que definem o espaço de Fock com os osciladores, conterem a métrica de Lorentz η^{ab}, existem no espaço de Fock estados com norma negativa (estados fantasma ou também chamados estados não-físicos). No formalismo de cone de luz são resolvidos os vínculos clássicos e o espaço de Fock contém apenas os estados físicos. O estado de vácuo com momento p é definido como

$$\alpha_n^i|0;p\rangle_\alpha = 0, \quad n > 0, \tag{2.52}$$

$$\hat{p}^i|0;p\rangle_\alpha = p^i|0;p\rangle_\alpha. \tag{2.53}$$

Como componentes de Fourier de $T_{ab} = 0$, a Hamiltoniana $H = L_0$ e L_m são as demais componentes para $m > 0$, na corda aberta. Para os demais estados físicos

$$L_m|\Psi_{phys}\rangle = 0 \quad , \quad m > 0. \tag{2.54}$$

O operador L_m tem a propriedade de hermiticidade

$$L_{-m} = L_m^\dagger \quad . \tag{2.55}$$

Considerando a corda fechada, temos duas álgebras para os osciladores quântizados

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = [\beta_n^i, \beta_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m} \quad , \quad [\alpha_n^i, \beta_m^j] = 0. \tag{2.56}$$

A Hamiltoniana da corda fechada é

$$H_{cf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(: \alpha_n^i \alpha_{-n}^i : + : \beta_n^i \beta_{-n}^i : -2 \right), \tag{2.57}$$

e o operador de massa é

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2), \tag{2.58}$$

onde

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \quad , \quad \bar{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{-n}^i \beta_n^i. \tag{2.59}$$

Os operadores de Virasoro para a corda fechada são

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n}^a \alpha_{an} : \quad , \quad m \neq 0, \tag{2.60}$$

$$\overline{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \beta_{m-n}^a \beta_{an} : \quad , \quad m \neq 0. \tag{2.61}$$

Os estados físicos devem satisfazer a condição de Virasoro

$$(L_m - \delta_m)|\Psi_{phys}\rangle = 0 \ , \quad m \geq 0, \tag{2.62}$$

$$(\overline{L}_m - \delta_m)|\Psi_{phys}\rangle = 0 \ , \quad m \geq 0. \tag{2.63}$$

Os operadores de Virasoro para a corda fechada tem a propriedade de hermiticidade

$$L_{-m} = L_m^\dagger \ , \quad \overline{L}_{-m} = \overline{L}_m^\dagger. \tag{2.64}$$

O vínculo clássico $L_0 = \overline{L}_0 = 0$ é implementado em (2.62) e (2.63) para $m = 0$

$$(L_0 - 1)|\Psi_{phys}\rangle = (\overline{L}_0 - 1)|\Psi_{phys}\rangle = 0. \tag{2.65}$$

e finalmente o vácuo na corda fechada satisfaz

$$\alpha_n^i|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta = \beta_n^i|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta = 0, \quad n > 0. \tag{2.66}$$

A obtenção dos demais estados físicos faz-se com a atuação sucessiva dos operadores de criação de osciladores da corda sobre o estado de vácuo.

2.3 Espaço-Tempo AdS com $D = 2 + 1$

O espaço AdS com $D = 2 + 1$ pode ser embebido no espaço com $D = 2 + 2$ e com a métrica [41, 42]

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2, \tag{2.67}$$

através da equação

$$-v^2 - u^2 + x^2 + y^2 = -l^2. \tag{2.68}$$

Podemos definir um sistema de coordenadas para a variedade inteira

$$u = l\cosh\mu \sin\lambda, \quad v = l\cosh\mu\cos\lambda, \tag{2.69}$$

onde $l\sinh\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $0 \leq \mu < \infty$, $0 \leq \lambda < 2\pi$. Usando as relações (2.69) e (2.67) podemos escrever a métrica da seguite forma

$$ds^2 = l^2\left(-\cosh^2\mu \ d\lambda^2 + \frac{dx^2 + dy^2}{l^2 + x^2 + y^2}\right). \tag{2.70}$$

Esta relação pode ser simplificada em coordenadas polares no plano (x, y)

$$x = l \sinh \mu \cos \theta, \quad y = l \sinh \mu \cos \theta, \tag{2.71}$$

para obter a seguinte métrica no espaço AdS

$$ds^2 = l^2 \left[-\cosh^2 \mu d\lambda^2 + d\mu^2 + \sinh^2 \mu d\theta^2 \right]. \tag{2.72}$$

O parámetro λ sendo um ângulo existem curvas fechadas no espaço AdS, por exemplo $\mu = \mu_0, \theta = \theta_0$. Por esta razão não vamos identificar λ com $\lambda + 2\pi$. Usando as notações $\lambda = t/l$ e $r = l \sinh \mu$ escrevemos (2.72) na seguinte forma

$$ds^2 = ((r/l)^2 + 1)dt^2 + ((r/l)^2 + 1)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2. \tag{2.73}$$

A métrica do espaço AdS é invariante por construção à ação do grupo $SO(2, 2)$. Os vetores de Killing são

$$J_{ab} = x_b \frac{\phi}{\phi x^a} - x_a \frac{\phi}{\phi x^b}, \tag{2.74}$$

onde $x^a = (v, u, x, y)$. A forma detalhada dos vetores (2.74) é

$$\begin{array}{rclcrcl} J_{01} & = & v\phi_u - u\phi_v & & J_{02} & = & x\phi_v + v\phi_x, \\ J_{03} & = & y\phi_v + v\phi_y & & J_{12} & = & x\phi_u + u\phi_x, \\ J_{13} & = & y\phi_u + u\phi_y & & J_{23} & = & y\phi_x - x\phi_y. \end{array} \tag{2.75}$$

O vetor J_{01} gera "translações temporais" enquanto o vetor J_{23} gera rotações no plano (x, y). A forma mais geral do vetor de Killing é

$$\mu \omega^{ab} J_{ab}, \qquad \omega^{ab} = -\omega^{ba}, \tag{2.76}$$

sendo este determinado pelo tensor antisimétrico do espaço $\mathbf{R}^4$.

Podemos definir as coordenadas de Poincaré através das seguintes relações

$$z = \frac{l}{u + x}, \quad \beta = \frac{y}{u + x}, \quad \gamma = \frac{-v}{u + x}. \tag{2.77}$$

Estas coordenadas cobrem apenas uma parte do espaço AdS, ou seja uma infinidade de regiões onde $u + x$ tem um sinal bem definido. Consequentemente, as coordenadas de Poincaré não são apropriadas para estudar as propriedades globais do AdS. Em função das (z, β, γ) o elemento de linha do espaço AdS tem a seguinte expressão

$$ds^2 = l^2 \left[\frac{dz^2 + d\beta^2 - d\gamma^2}{z^2} \right]. \tag{2.78}$$

Para $u + x > 0$ temos $z > 0$ enquanto para $u + x < 0$ temos $z < 0$. De forma semelhante podemos definir as coordenadas de Poincaré para cada região onde $u - x$ tem um sinal definido.

Os vetores de Killing definem subgrupos uniparamétricos de isometrias do espaço AdS

$$P \to e^{t\xi} P. \tag{2.79}$$

Os valores do t número inteiro múltiplo de 2π

$$P \to e^{t\xi} P, \qquad t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, ..., \tag{2.80}$$

definem um *subgrupo de identificações*. O espaço quosciente obtido através da identificação dos pontos de uma órbita dada do subgrupo de identificações tem a métrica de curvatura negativa induzida pela métrica do AdS. Consequentemente, o espaço quosciente é uma solução das equações de Einstein. A condição necessária para a ausência de curvas fechadas do tipo tempo é

$$\xi \cdot \xi > 0. \tag{2.81}$$

A relação (2.81) torna o vetor de Killing ξ um vetor do tipo espaço. Para buracos negros, esta condição é também suficiente. Existem vetores de Killing que satisfazem a relação (2.81) no espaço inteiro. Contudo, alguns dos vetores de Killing que determinam a estrutura dos buracos negros são do tipo nulo ou temporal em certas regiões do espaço AdS. Estas regiões devem ser recortadas do espaço para fazer as identificações possíveis. O espaço resultante, chamado de ads, é invariante às transformações (2.79) porque a norma dos vetores de Killing é constante ao longo de suas órbitas. O espaço ads é geodesicamente incompleto porque ele tem geodesicas que ligam $\xi \cdot \xi > 0$ ao $\xi \cdot \xi < 0$. As fronteiras da região $\xi \cdot \xi > 0$, ou seja a superfície

$\xi \cdot \xi = 0$, aparece como sendo uma singularidade na estrutura do espaço-tempo e produz curvas do tipo tempo fechadas. Devido a esse fato, a região com $\xi \cdot \xi = 0$ pode ser vista como uma singularidade do espaço quosciente. Consequentemente, as únicas geodesicas incompletas são as que atingem a singularidade, como no caso dos buracos negros em $D = 3 + 1$. A superfície $\xi \cdot \xi = 0$ é singular somente na estrutura causal [41].

A ação da gravitação no formalismo lagrangiano em unidades $G = \frac{1}{8}$ é

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} \left[R + 2l^{-2} \right] d^2xdt + B', \tag{2.82}$$

onde B' é um termo de superfície e o raio l é relacionado à constante cosmologica $-\Lambda = l^{-2}$. A variação da ação em relação a métrica $g_{ab}(x,t)$ conduz às equações de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab}(R + 2l^{-2}) = 0. \tag{2.83}$$

Em $D = 1 + 2$ o tensor de Riemann é completamente determinado pelas relações (2.83)

$$R_{abcd} = -l^{-2}(g_{ac}g_{bd} - g_{bc}g_{ad}). \tag{2.84}$$

A relação acima descreve um espaço simétrico de curvatura constante e negativa. Para obter a solução de buraco negro usamos o seguinte *ansatze* [41]

$$ds^2 = -a(r)dt^2 + \frac{dr^2}{a(r)} + r^2 d\phi^2, \tag{2.85}$$

onde $a(r)$ é uma função arbitrária de r. O tensor de Einstein $G_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab}$ é

$$G_{rr} = \frac{a_{,r}}{2ar}, \quad G_{tt} = -\frac{aa_{,r}}{2r}, \quad G_{\phi\phi} = \frac{r^2}{2} a_{,rr}, \tag{2.86}$$

as outras componentes sendo nulas. A única solução de vácuo é $a =$ constante e corresponde ao espaço plano em $D = 2 + 1$. Levando em consideração a constante cosmologica da ação (2.82)

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \text{diag}(1, 1, 1)\Lambda, \tag{2.87}$$

a solução é não trivial

$$a(r) = c - \Lambda r^2, \tag{2.88}$$

onde c é uma constante arbitrária. Se $c = 1$ obtemos duas soluções: $\Lambda > 0$ representa o espaço de Sitter, e $\Lambda < 0$ representa o espaço anti de Sitter. Se $c < 0$ obtemos a solução [41]

$$ds^2 = (1 - \frac{r^2}{l^2})dt^2 + (\frac{r^2}{l^2} - 1)^{-1}dr^2 + r^2 d\phi^2. \tag{2.89}$$

Esta solução particular com $\phi \cong \phi + 2\pi$ descreve um buraco negro de massa $M = 1$ e momento ângular $J = 0$. O horizonte está localizado no $r = l$ e asimptoticamente a solução tende ao espaço AdS com $\Lambda = -1/l^2$. Uma familia de soluções biparamétricas em (M, J) de buracos negros pode ser obtida identificando uma combinação linear de t e ϕ o que leva à solução [41]

$$ds^2 = (M - \frac{r^2}{l^2})dt^2 + (\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2})^{-1}dr^2 - Jdtd\phi + r^2 d\phi^2, \tag{2.90}$$

com dois horizontes para $Ml^2 > J^2$

$$r_\pm = \sqrt{\frac{Ml^2}{2} \pm \frac{l}{2}\sqrt{M^2l^2 - J^2}} \tag{2.91}$$

e o limite estático

$$r_{\text{erg}} = \sqrt{M}l, \tag{2.92}$$

que define uma ergoesfera como para os buracos negros de Kerr.

Concluiremos esta seção fazendo algumas observações sobre a relevância da solução (2.90) para a teoria de cordas [43]. A ação da corda em primeira ordem em α' é

$$S = \int d^3x\sqrt{-g}e^{-2\Phi}[\frac{4}{k} + R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12}H_{abc}H^{abc}], \tag{2.93}$$

onde Φ é o campo dilatônico e $H_{abc} = \partial_{[a}B_{bc]}$, sendo B o campo de Kalb-Ramond. A métrica (2.90) é uma solução das equações de movimento e da condição [43]:

$$B_{\phi t} = \frac{r^2}{l^2}, \quad \Phi = 0, \quad k = l^2. \tag{2.94}$$

Como foi mostrado em [43], a relação com o modelo-σ pode ser feita atraveés da dualização em coordenada cíclica ϕ. A solução dual é [43]

$$d\tilde{s}^2 = (M - \tfrac{J^2}{4r^2})dt^2 + (\tfrac{r^2}{l^2} - M + \tfrac{J^2}{4r^2})^{-1}dr^2 + \tfrac{2}{l}dtd\phi + \tfrac{d\phi^2}{r^2},$$

$$\tilde{B}_{\phi t} = \tfrac{-J}{2r^2}, \quad \tilde{\Phi} = -\log r. \tag{2.95}$$

Após a diagonalização da métrica obtemos

$$d\tilde{s}^2 = -(1 - \tfrac{\mathcal{M}}{\tilde{r}})d\tilde{t}^2 + (1 - \tfrac{\mathcal{Q}^2}{\mathcal{M}\tilde{r}})d\tilde{x}^2 + (1 - \tfrac{\mathcal{M}}{\tilde{r}})^{-1}(1 - \tfrac{\mathcal{Q}^2}{\mathcal{M}\tilde{r}})^{-1}\tfrac{l^2 d\tilde{r}^2}{4\tilde{r}^2},$$

$$\tilde{B}_{\tilde{x}\tilde{t}} = \tfrac{\mathcal{Q}}{r}, \quad \tilde{\Phi} = -\tfrac{1}{2}\log \tilde{r}l, \tag{2.96}$$

onde

$$t = \tfrac{l(\tilde{x}-\tilde{t})}{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}}, \quad \phi = \tfrac{r_+^2\tilde{t} - r_-^2\tilde{x}}{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}},$$

$$\mathcal{M} = \tfrac{r_+^2}{l}, \quad \mathcal{Q} = \tfrac{J}{2}, \quad r^2 = \tilde{r}l. \tag{2.97}$$

A métrica (2.96) representa a solução de corda negra em $D = 2 + 1$ [43] obtida através da fixação de calibre do modelo-σ com o grupo $SL(2, R) \times R$.

2.4 Corda Bosônica Clássica no Espaço-Tempo AdS

A ação da corda bosônica no espaço-tempo AdS é dada pelo funcional:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}g_{ab}(x)\partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b, \tag{2.98}$$

escrevendo o tensor energia-momento

$$T_{\alpha\beta} \equiv \frac{2}{\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = g_{ab}(x)\left(\partial_\alpha x^a \partial_\beta x^b - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\partial_\gamma x^a \partial^\gamma x^b\right), \tag{2.99}$$

onde usamos

$$\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial h^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{h}h_{\alpha\beta}. \tag{2.100}$$

Pelas equações de movimento de $h^{\alpha\beta}$ o tensor energia-momento $T_{\alpha\beta} = 0$. Com a fixação do calibre conforme

$$h_{\alpha\beta}(\sigma^0\sigma^1) = e^{\Lambda(\sigma^0,\sigma^1)}\eta_{\alpha\beta}, \tag{2.101}$$

variando a ação com relação a $x^a(\tau,\sigma)$ e impondo $\delta S = 0$, obtemos as equações de movimento e os vínculos [36]

$$\begin{aligned} \ddot{x}^a - x''^a + \Gamma^a_{bc}(x)\left(\dot{x}^b\dot{x}^c - x'^b x'^c\right) &= 0, & (2.102)\\ g_{ab}(x)\dot{x}^a x'^b = g_{ab}(x)\left(\dot{x}^a\dot{x}^b + x'^a x'^b\right) &= 0, & (2.103) \end{aligned}$$

O método de quantização semiclássica foi desenvolvido para estudar as excitações quânticas em configurações clássicas exatas (background). Devido a não-linearidade de (2.102)-(2.103), vamos expandir as coordenadas $x^a(\tau,\sigma)$ em torno de uma solução exata $\eta^a_0(\tau)$

$$x^a(\tau,\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \eta^a_n(t,\sigma), \qquad (2.104)$$

com a condição inicial $\eta^a_0(\tau,\sigma) = \eta^a_0(\tau)$ nas equações de movimento e vínculos

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}^a_0 + \Gamma^a_{bc}(\eta_0)\dot{\eta}^b_0\dot{\eta}^c_0 &= 0, & (2.105)\\ g_{ab}(\eta_0)\dot{\eta}^a_0\dot{\eta}^b_0 &= -m^2\alpha'^2. & (2.106) \end{aligned}$$

No espaço AdS D dimensional há $D-1$ polarizações de perturbações da corda em torno da solução $\eta^a_0(\tau)$. Consequentemente, $D-1$ vetores normais transversos n^a_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, D$ podem ser introduzidos

$$\begin{aligned} g_{ab}(\eta_0)n^a_\mu\dot{\eta}^b_0 &= 0, & (2.107)\\ g_{ab}(\eta_0)n^a_\mu n^b_\nu &= \delta_{\mu\nu}. & (2.108) \end{aligned}$$

A escolha do conjunto $\{n^a_\mu\}$ não é única, há um grupo de calibre local $SO(D-1)$ correspondente as rotações do conjunto. Esta simetria de calibre é fixada impondo que os vetores normais sejam covariantemente constante

$$\dot{\eta}^a_0\nabla_a n^b_\mu = 0. \qquad (2.109)$$

Neste calibre, as relações entre os vetores normais tomam uma forma mais simples. Em particular, os vetores deste conjunto satisfazem a sequinte relação de completeza

$$g^{ab} = -\frac{1}{m^2}\dot{\eta}^a_0\dot{\eta}^b_0 + n^a_\mu n^b_\nu\delta^{\mu\nu}. \qquad (2.110)$$

Considerando a primeira ordem $\eta_1^a(\tau,\sigma)$ e admitindo perturbações co-moventes

$$\eta_1^a(\tau,\sigma) = \delta x^\mu(\tau,\sigma) n_\mu^a. \tag{2.111}$$

As perturbações comoventes satisfazem as equações de movimento com buraco negro de momento angular zero e tem como solução geral uma corda bosônica fechada

$$\begin{aligned} \delta x^\mu(\tau,\sigma) &= \sum_{n\neq 0}\sqrt{\frac{2|n|\Omega_n}{\alpha'}}\left[\alpha_n^\mu e^{-in(\Omega_n\tau-\sigma)} + \beta_n^\mu e^{-in(\Omega_n\tau+\sigma)}\right] \\ &+ \sqrt{\frac{l}{2m}}\left[\alpha_0^\mu e^{-i\frac{m\alpha'}{l}\tau} + \beta_0^\mu e^{+i\frac{m\alpha'}{l}\tau}\right]. \end{aligned} \tag{2.112}$$

As frequências dos osciladores em unidades $\hbar = 1$ são

$$\omega_0 = m\alpha'/l \quad , \quad \omega_n = \omega_{-n} = |n|\Omega_n \tag{2.113}$$

onde $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. A frequência Ω_n é

$$\Omega_n = \sqrt{1 + \frac{m^2\alpha'^2}{n^2 l^2}}. \tag{2.114}$$

A solução (2.112) satisfaz a equação de movimento derivada da ação

$$S_2 = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma d\tau \sum_{\mu=1}^{D-1}\left(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \delta x^\mu \partial_\beta \delta x^\nu + \frac{m^2\alpha'^2}{l^2}\delta x^\mu \delta x_\mu\right). \tag{2.115}$$

2.5 Quantização da Corda Bosônica no Espaço-Tempo AdS

A quantização da corda bosônica fechada no espaço conforme AdS com $D = 2 + 1$ e buracos negros estáticos se faz de maneira semelhante a quantização realizada no espaço-tempo de Minkowski [41, 42]. Ainda considerando perturbações em primeira ordem, podemos extender os resultados para espaços AdS de dimensão arbitrária [36].

Os comutadores dos osciladores livres quânticos satisfazem as relações

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^{\dagger\nu}] = [\beta_m^\mu, \beta_n^{\dagger\nu}] = \delta^{\mu\nu}\delta_{mn} \quad , \quad [\alpha_m^\mu, \beta_n^\nu] = 0 \quad , \quad [\alpha_0^\mu, \alpha_0^{\dagger\nu}] = \delta^{\mu\nu}, \tag{2.116}$$

onde $\alpha^{\mu}_{-n} = \alpha^{\dagger\mu}_{n}$, $\alpha^{\mu}_{-n} = \alpha^{\dagger\mu}_{n}$, and $\beta^{\mu}_{0} = \alpha^{\dagger\mu}_{0}$. As componentes do tensor energia-momento conservadas são

$$T_{--} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n} L^{-}_{n} e^{-in(\sigma-\tau)}, \tag{2.117}$$

$$T_{++} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n} L^{+}_{n} e^{-in(\sigma+\tau)}. \tag{2.118}$$

onde $T_{++} = T_{--} = 0$. Escrevendo os operadores de Virasoro para o modo zero obtemos

$$\begin{aligned} L^{-}_{0} &= \pi\alpha' \sum_{n>0}\left[\frac{(\omega_n - n)^2}{2n\Omega_n}\beta^{\dagger}_{n}\cdot\beta^{\dagger}_{n} + \frac{(\omega_n + n)^2}{2n\Omega_n}\alpha^{\dagger}_{n}\cdot\alpha^{\dagger}_{n}\right] \\ &+ \frac{\pi m \alpha'^2}{2l}\alpha^{\dagger}_{0}\cdot\alpha_0 - \frac{\pi m^2\alpha'^2}{2}, \qquad (2.119) \\ L^{+}_{0} &= \pi\alpha' \sum_{n>0}\left[\frac{(\omega_n + n)^2}{2n\Omega_n}\beta^{\dagger}_{n}\cdot\beta^{\dagger}_{n} + \frac{(\omega_n - n)^2}{2n\Omega_n}\alpha^{\dagger}_{n}\cdot\alpha^{\dagger}_{n}\right] \\ &+ \frac{\pi m \alpha'^2}{2l}\alpha^{\dagger}_{0}\cdot\alpha_0 - \frac{\pi m^2\alpha'^2}{2}, \qquad (2.120) \end{aligned}$$

onde $\cdot$ representa a soma em $\mu = 1, 2, \ldots, D-1$.

São estados físicos os que satisfazem os vínculos dos operadores de Virasoro de modo zero

$$\left(L^{-}_{0} - 2\pi\alpha'\right)|\Psi_{phys}\rangle = 0 \quad , \quad \left(L^{+}_{0} - 2\pi\alpha'\right)|\Psi_{phys}\rangle = 0, \tag{2.121}$$

e das simetrias na folha mundo: $\sigma \to \sigma + \xi$ and $\tau \to \tau + \zeta$ geradas por $P = L^{+}_{0} - L^{-}_{0}$ e $H = L^{+}_{0} + L^{-}_{0}$, respectivamente. Em $D \neq 2+1$, estes operadores não são mais os geradores da simetria conforme. Contudo, em primeira ordem, eles geram os mesmos vínculos acima.

O operador Hamiltoniano total e o operador de momento linear são

$$\begin{aligned} H &= 2\pi\alpha' \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\Omega_n^2 + 1}{\Omega_n}\right)\left(N_n + \overline{N}_n\right) + \frac{\pi m\alpha'^2}{l}\alpha^{\dagger}_{0}\cdot\alpha_0 - \pi m^2\alpha'^2, \qquad (2.122) \\ P &= 4\pi\alpha' \sum_{n\geq 1}\left(N_n - \overline{N}_n\right). \qquad (2.123) \end{aligned}$$

onde

$$N_n = \frac{n}{2}\sum_{\mu=1}^{D-1}\alpha^{\dagger\mu}_{n}\alpha^{\mu}_{n} \quad , \quad \overline{N}_n = \frac{n}{2}\sum_{\mu=1}^{D-1}\beta^{\dagger\mu}_{n}\beta^{\mu}_{n}, \tag{2.124}$$

O momento linear para a corda fechada impõe como vínculos para os estados físicos em $D = 2 + 1$

$$4\pi\alpha' \sum_{n\geq 1} \left(N_n - \overline{N}_n\right) |\Psi_{phys}\rangle = 0. \tag{2.125}$$

No espaço AdS de dimensão arbitrária a unitariedade da teoria é obtida impondo restrições de spin sobre as representações da álgebra de Virasoro permitidas além dos vínculos de Virasoro porque estes não eliminam completamente os estados de norma negativa. As fórmulas obtidas acima para o buraco negro AdS em $D = 2 + 1$ não dependem da massa do buraco negro e também, essa configuração de fundo é assitoticamente AdS. Consequentemente, podemos generalizar para espaço AdS de dimensão arbitrária. É importante observar que L_n^+ e L_n^- não geram simetrias exatas no espaço AdS de dimensão arbitrária. Entretanto, o Hamiltoniano correspondente e a condição operatorial de níveis iguais (2.125) são obtidas quando da generalização da dimensão do espaço AdS em primeira ordem.

Ainda observamos que as excitações da corda no espaço AdS oscilam no tempo. Apesar de que possíveis instabilidades não se desenvolvem devido ao caráter não negativo da gravidade local.

Capítulo 3

Dinâmica de Campos Térmicos

Diversos formalismos introduzem a temperatura em teoria de campos. Os sistemas físicos encontrados na natureza, geralmente não estão completamente isolados; é necessária a descrição de sistemas com infinitos graus de liberdade à temperatura finita. Como alternativa ao método de Matsubara [45], Takahashi e Umezawa [46, 47] adotaram um postulado fundamental, construiram estados de vácuo térmico dependente da temperatura que se relacionam, via transformação de Bogoliubov. Foi possível construir todos estados térmicos, estabelecendo-se a DCT.

3.1 Postulado Fundamental da DCT

O formalismo desenvolvido por Umezawa e Takahashi [46, 47], inspirado em [45] é baseado no cálculo de médias estatísticas de uma variável dinâmica A com valor esperado deste operador num vácuo dependente da temperatura (vácuo térmico). Como postulado

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta_T) tr\ [e^{-\beta_T \mathcal{H}} A] = \langle 0(\beta_T)|A|0(\beta_T)\rangle, \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{H} = H - \mu N$, $Z(\beta_T) = tr\ [e^{-\beta_T \mathcal{H}}]$ e $\beta = \frac{1}{k_B T}$ sendo H a Hamiltoniana total, μ o potencial químico, N o número de partículas e k_B a constante de Boltzmann.

3.2 DCT no Formalismo Canônico

Considerada a média estatística

$$\langle 0(\beta_T)|A|0(\beta_T)\rangle = Z^{-1}(\beta_T)\sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\beta_T\omega_n}, \qquad (3.2)$$

a expanção do vácuo em termos de uma base $\{|n\rangle\}$ do espaço de Hilbert é dada pela expressão

$$|0(\beta_T)\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|0(\beta_T)\rangle = \sum_n f_n(\beta_T)|n\rangle, \qquad (3.3)$$

onde $f_n(\beta_T)$ são coeficientes a serem determinados. Da ortogonalidade entre os estados da base $\{|n\rangle\}$ e a normalização do estado $|0(\beta_T)\rangle$ resulta

$$f_n^*(\beta_T)f_m(\beta_T) = Z^{-1}(\beta_T)e^{-\beta_T\omega_n}\delta_{nm}. \qquad (3.4)$$

Observamos que a expressão (3.4) é correta somente se $\{f_n(\beta_T)\}$ são coeficientes vetoriais. O estado de vácuo térmico devera ser expandido por $\{|n\rangle\}$ e $\{f_n(\beta_T)\}$. Existe necessidade de dobrar os graus de liberdade do sistema e utilizar para isto um espaço auxiliar não físico $\tilde{\mathcal{H}}$, idêntico e ortogonal ao espaço físico inicial $\mathcal{H}$; para este espaço extendido $\hat{\mathcal{H}}$ por construção

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\otimes\tilde{\mathcal{H}}. \qquad (3.5)$$

Se $\{|n\rangle\}$ são autoestados do Hamiltoniano H e $\{|\tilde{n}\rangle\}$ autoestados da sua cópia $\tilde{H}$ obedecem as relações

$$H|n\rangle = \omega_n|n\rangle \quad , \quad \tilde{H}|\tilde{n}\rangle = \omega_n|\tilde{n}\rangle, \qquad (3.6)$$

onde $\langle n|m\rangle = \langle\tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \delta_{nm}$ e ω_n é a mesma frequência do sistema físico. Um vetor de estado do sistema total do $\hat{\mathcal{H}}$ é construido como

$$|n,\tilde{n}\rangle = |n\rangle\otimes|\tilde{n}\rangle, \qquad (3.7)$$

o que determina o seguinte coeficiente vetorial

$$f_n(\beta_T) = e^{-\beta\omega_n/2}Z^{-1/2}(\beta_T)|\tilde{n}\rangle. \qquad (3.8)$$

Finalmente, o estado de vácuo térmico é

$$|0(\beta_T)\rangle = \sum_n e^{-\beta_T \omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta_T)|n, \widetilde{n}\rangle. \tag{3.9}$$

Vamos representar o estado de vácuo à temperatura zero como $|0\rangle\rangle = |0, \tilde{0}\rangle$. Com a condição de que $|0\rangle = |0, \tilde{0}\rangle$ é normalizado $\langle 0|0\rangle = 1$ obtemos a função de partição

$$Z(\beta_T) = \sum_n e^{-\beta_T \omega_n} \langle n|n\rangle = tr\ [e^{-\beta \mathcal{H}}]. \tag{3.10}$$

O valor médio do operador A no estado de vácuo térmico, está de acordo com o postulado fundamental da DCT.

Considerando um sistema bosônico, os operadores A e $\tilde{A}$ que atuam nos espaços $\mathcal{H}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$, respectivamente, comutam entre si

$$[A, \tilde{A}] = 0. \tag{3.11}$$

A título de exemplo, consideramos o Hamiltoniano de um oscilador bosônico à temperatura zero

$$H = \omega a^\dagger a. \tag{3.12}$$

Tem-se as relações de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \text{e} \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{3.13}$$

Os estados no espaço de Fock correspondem a

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad , \quad a|0\rangle = 0. \tag{3.14}$$

Duplicando o sistema original, o Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}$ no espaço auxiliar é

$$\widetilde{H} = \omega \widetilde{a}^\dagger \widetilde{a}, \tag{3.15}$$

e as seguintes relações de comutação são satisfeitas

$$[\widetilde{a}, \widetilde{a}^\dagger] = 1 \quad \text{e} \quad [\widetilde{a}, \widetilde{a}] = [\widetilde{a}^\dagger, \widetilde{a}^\dagger] = 0. \tag{3.16}$$

e

$$[a, \widetilde{a}] = [a^\dagger, \widetilde{a}^\dagger] = [a, \widetilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \widetilde{a}] = 0. \tag{3.17}$$

O vácuo do sistema duplicado deve satisfazer

$$|0\rangle \otimes \widetilde{|0\rangle} = |0\rangle\rangle. \tag{3.18}$$

O estado de vácuo térmico para o sistema extendido é obtido via uma transformação unitária [46, 47]

$$|0(\beta_T)\rangle = e^{-iG(\theta)}|0\rangle\rangle, \tag{3.19}$$

cujo gerador é o operador de Bogoliubov

$$G(\theta) = G(\theta)^\dagger = -i\theta(\beta_T)(\widetilde{a}a - a^\dagger\widetilde{a}^\dagger), \tag{3.20}$$

Escolhendo o parâmetro $\theta(\beta_T) \in R$, $G_B = G_B^\dagger$ é hermitiano. Definindo

$$u(\beta_T) = (1 - e^{-\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} = \cosh\theta(\beta_T), \tag{3.21}$$

e

$$\upsilon(\beta_T) = (e^{\beta\omega} - 1)^{-\frac{1}{2}} = \sinh\theta(\beta_T), \tag{3.22}$$

onde f_B é a distribuição de Bose, o estado de vácuo térmico para o sistema total resulta

$$|0(\beta_T)\rangle = \frac{1}{\cosh\theta(\beta_T)} \exp\left[\tanh(\theta(\beta_T))\right]|0\rangle\rangle. \tag{3.23}$$

A transformação de Bogoliubov atuando sobre os operadores de aniquilação a e $\tilde{a}$ em $T = 0$ mapea em $a(\beta_T)$ e $\tilde{a}(\beta_T)$, respectivamente

$$a(\beta_T) = e^{-iG}ae^{iG}, \tag{3.24}$$

devido a unitariedade da transformação gerada pelo operador de Bogoliubov. A transformação (3.24) pode ser escrita como uma transformação linear

$$a = u(\beta_T)a(\beta_T) + \upsilon(\beta_T)\widetilde{a}^\dagger(\beta_T)\ ,\ a^\dagger = u(\beta_T)a^\dagger(\beta_T) + \upsilon(\beta_T)\widetilde{a}(\beta_T) \tag{3.25}$$

$$\widetilde{a} = u(\beta_T)\widetilde{a}(\beta_T) + \upsilon(\beta_T)a^\dagger(\beta_T)\ ,\ \widetilde{a}^\dagger = u(\beta_T)\widetilde{a}^\dagger(\beta_T) + \upsilon(\beta_T)a(\beta_T). \tag{3.26}$$

Como esperado para o vácuo térmico

$$\begin{aligned} a(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle!\rangle &= \tilde{a}(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle!\rangle = 0, \\ \langle\!\langle 0(\beta_T)|a(\beta_T)^\dagger &= \langle!\langle 0(\beta_T)|\tilde{a}(\beta_T)^\dagger = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Com uma sequência de atuações dos operadores $a(\beta_T)^\dagger$ e $\tilde{a}(\beta_T)^\dagger$, obtemos os estado térmicos de Fock

$$|0(\beta_T)\rangle\!\rangle, a(\beta_T)^\dagger|0(\beta_T)\rangle\!\rangle, \tilde{a}(\beta_T)^\dagger|0(\beta_T)\rangle\!\rangle, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}(a(\beta_T)^\dagger)^n(\tilde{a}(\beta_T)^\dagger)^m|0(\beta_T)\rangle\!\rangle. \tag{3.28}$$

As relações de comutação entre os operadores térmicos, i. e. operadores com dependência em β_T são as mesmas que as apresentadas no sistema extendido em $T = 0$. Explorando os comutadores de G com os operadores dos osciladores

$$[G, a] = -i\theta(\beta_T)\widetilde{a}^\dagger \ , \ [G, \widetilde{a}] = -i\theta(\beta_T)a^\dagger \ , \ [G, a^\dagger] = -i\theta(\beta_T)\widetilde{a} \ , \ [G, \widetilde{a}^\dagger] = -i\theta(\beta_T)a \tag{3.29}$$

onde, por simplicidade $\theta = \theta(\beta_T)$ é sempre dependente da temperatura. Resulta que o gerador da transformação G é conservado (canônico):

$$i\dot{G} = [G, H] = 0. \tag{3.30}$$

Observamos que qualquer estado de ocupação pode ser obtido.

3.3 Formalismo para Campos Livres e a Entropia

Considerando o sistema total, a Lagrangeana $\hat{L} = L - \tilde{L}$ leva a escrever a Hamiltoniana extendida como $\hat{H} = H - \tilde{H}$. A Hamiltoniana $\hat{H}$ é invariante por transformação de Bogoliubov. Considera-se o volume finito onde se quantizam os campos que expandidos em ondas planas dependem dos operadores $a_{\vec{k}}(\beta)$, $\widetilde{a}_{\vec{k}}(\beta)$ e os operadores til conjugados. A transformação de Bogoliubov é unitária $U = \exp(-iG)$ onde o gerador de Bogoliubov para o campo é

$$G = -i\sum_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}}(a^{\alpha}_{\vec{k}}\widetilde{a}^{\alpha}_{\vec{\kappa}} - \widetilde{a}_{\vec{\kappa}}a_{\vec{k}}), \tag{3.31}$$

e satisfaz a relação de comutação $[G, \hat{H}] = 0$. Os operadores de aniquilação dependentes de temperatura são obtidos dos operadores de aniquilação à temperatura zero da seguinte form

$$a_{\vec{k}}(\beta) = e^{-iG} a_{\vec{k}} e^{iG} = a_{\vec{k}} \cosh\theta_{\vec{k}}(\beta) - \widetilde{a}^{\alpha}_{\vec{k}} \sinh\theta_{\vec{k}}(\beta), \tag{3.32}$$

$$\widetilde{a}_{\vec{k}}(\beta) = e^{-iG} \widetilde{a}_{\vec{k}} e^{iG} = \widetilde{a}_{\vec{k}} \cosh\theta_{\vec{k}}(\beta) - a^{\alpha}_{\vec{k}} \sinh\theta_{\vec{k}}(\beta)\ . \tag{3.33}$$

Explorando a liberdade que a transformação de Bogoliubov oferece, podemos definir o vácuo térmico

$$|0(\beta)\rangle = U(\theta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG}|0\rangle\rangle. \tag{3.34}$$

que deve satisfazer as sequintes relações

$$a_{\vec{k}}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} a_{\vec{k}} e^{iG} e^{-iG}|0\rangle\rangle = e^{-iG} a_{\vec{k}}|0\rangle\rangle = 0, \tag{3.35}$$

$$\widetilde{a}_{\vec{k}}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} \widetilde{a}_{\vec{k}} e^{iG} e^{-iG}|0\rangle\rangle. = e^{-iG} \widetilde{a}_{\vec{k}}|0\rangle\rangle = 0. \tag{3.36}$$

Para o sistema de osciladores que compõem o campo podemos definir funções termodinâmicas. As grandezas entropia e energia livre de Helmholtz têm papel importante no formalismo DCT. O operador K definido como

$$K = -\sum_{\vec{k}} \left(a^{\dagger}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \ln \sinh^2\theta_{\vec{k}}(\beta_T) - a_{\vec{k}} a^{\dagger}_{\vec{k}} \ln \cosh^2\theta_{\vec{k}}(\beta_T) \right). \tag{3.37}$$

O operador $\tilde{K}$ é obtido por conjugação til do operador K. Pode-se mostrar que o operador $\hat{K} = K - \widetilde{K}$ satisfaz as relações

$$(K - \widetilde{K})|0(\beta)\rangle = 0 \quad , \quad [K - \widetilde{K}, G] = 0. \tag{3.38}$$

com G dado pela equação (3.31).

Para o caso bosônico, usando as relações de comutação reescrevemos o estado de vácuo térmico [46, 47]

$$|0(\beta_T)\rangle = e^{-K/2} \left\{ \exp \sum_{\vec{k}} a^{\dagger}_{\vec{k}} \widetilde{a}^{\dagger}_{\vec{k}} \right\} |0\rangle\rangle. \tag{3.39}$$

A entropia no sistema Grã-Canônico [56] é calculada como o valor esperado médio do operador K no vácuo térmico

$$S = k_B\langle K\rangle = k_B\langle 0(\beta_T)|K|0(\beta_T)\rangle. \tag{3.40}$$

Um cálculo simples leva a seguinte expressão para a entropia

$$S = k_B \sum_k \{(1+\langle n_k\rangle)\ln(1+\langle n_k\rangle) - \langle n_k\rangle \ln\langle n_k\rangle\} \tag{3.41}$$

onde n_k representa o número médio de ocupação do estado k.

Usando a formulação canônica do formalismo DCT, pretendemos obter os estados à temperatura finita para a corda bosônica com várias condições de contorno como descrito no capitulo anterior, assim como o operador entropia e a energia livre de Helmholtz calculada a partir da sua definição

$$F = -TS + \langle H\rangle - \mu\langle N\rangle. \tag{3.42}$$

3.4 Axiomas da DCT

Para quaisquer operadores A e $\tilde{A}$ por atuarem respectivamente no espaço $\mathcal{H}$ e em espaço auxiliar fictício $\tilde{\mathcal{H}}$ ortogonal a $\mathcal{H}$, temos que o comutador $[A, \tilde{A}] = 0$. Existem, além disso, um mapeamento entre o conjunto de operadores $\{A\}$ e $\{\tilde{A}\}$ que obedece as denominadas regras de conjugação til. A temperatura entra na teoria através de condições que relacionam a forma na qual A e $\tilde{A}$ atuam no vácuo térmico $|0(\beta_T)\rangle\rangle$. Esta é a condição de estado térmico,também denominada de *regra de substituição til*. Uma teoria DCT para a teoria quântica de campos (TQC), pode ser melhor construida a partir de axiomas básicos da DCT [46, 47, 57].

Vamos enunciar os axiomas, considerando dois conjuntos de operadores $\Im = \{A\}$ e $\widetilde{\Im} = \{\widetilde{A}\}$, então

Axioma 1 . A tempos iguais, variáveis dinâmicas pertencentes a diferentes sub-espaços ($A \in \Im$ e $\widetilde{B} \in \widetilde{\Im}$) são independentes, ou seja

$$[A, \widetilde{B}] = 0. \tag{3.43}$$

Axioma 2 . Existe um mapeamento um a um entre os espaços ortogonais denominado de *conjugação til*; para quais A e $B \in \Im$ e $\tilde{A}$ e $\tilde{B} \in \widetilde{\Im}$ e c_1, c_2 dois números complexos, valem as regras de conjugação til:

$$\widetilde{(AB)} = \widetilde{A}\widetilde{B}, \tag{3.44}$$

$$(c_1\widetilde{A + c_2}B) = c_1^*\widetilde{A} + c_2^*\widetilde{B}, \tag{3.45}$$

$$\widetilde{A^\dagger} = \widetilde{A}^\dagger. \tag{3.46}$$

Axioma 3 . O vácuo térmico é invariante sob as regras de conjugação til

$$|\widetilde{0(\beta_T)}\rangle = |0(\beta_T)\rangle. \tag{3.47}$$

Axioma 4 . Translação espaço-temporais são induzidas pelo operador energia-momento $P_\mu \in \Im$ da

$$A(x) = e^{iP_\mu x^\mu} A e^{-iP_\mu x^\mu}. \tag{3.48}$$

Axioma 5 . O vácuo térmico é definido pelas relações operatoriais chamadas de *condições de estado térmico*

$$A(t, \vec{x})|0(\beta_T)\rangle = \sigma\widetilde{A}^\dagger(t - i\beta/2, \vec{x})|0(\beta_T)\rangle, \tag{3.49}$$

$$\langle O(\beta_T)|A(t, \vec{x}) = \langle O(\beta_T)|\widetilde{A}^\dagger(t + i\beta/2), \vec{x})\sigma^*, \tag{3.50}$$

Se A é uma variável bosônica, escolhemos $\sigma = 1$.

Axioma 6 . A dupla conjugação til é definida como

$$\widetilde{\widetilde{A}} = \sigma A. \tag{3.51}$$

onde $\sigma = 1$ para bosons e $\sigma = -1$ para férmions.

A importância das regras de conjugação til é a de que todas as relações usuais da TQC, por exemplo relações de comutação, e equações de Heisenberg podem ser generalizadas para DCT. A condição de estado térmico, além de fundamental para definir o vácuo térmico, mostra que existe sempre uma combinação de operadores $A(x)$ e $A^\dagger(x)$ que aniquila o vácuo térmico. Esta caracteristica usualmente não existe em TQC. Podemos generalizar o Axioma 1. Sejam $A(x)$ e $\widetilde{B}(y)$ então eles comutam em todo espaço-tempo

$$[A(x), \widetilde{B}(y)] = 0. \tag{3.52}$$

Se realizarmos uma operação † e uma ˜ ou uma operação ˜ e uma †, pelo Axioma 2 verificamos que os coeficientes dos operadores permanecem inalterados. Podemos considerar um axioma suplementar a construção da Lagrangeana e Hamiltoniana extendidas

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \epsilon^{\alpha} H^{\alpha} = H - \widetilde{H}, \quad \hat{L} = \sum_{\alpha} \epsilon^{\alpha} L^{\alpha} = L - \widetilde{L}. \tag{3.53}$$

Decorre dos axiomas a seguinte propriedade do vácuo térmico

$$a(\beta_T, t)|0(\beta_T)\rangle = \widetilde{a}(\beta_T, t)|0(\beta_T)\rangle = \langle 0(\beta_T)|a^{\alpha}(\beta_T, t) = \langle 0(\beta_T)|\widetilde{a}^{\alpha}(\beta_T, t) = 0. \tag{3.54}$$

A relação entre a conjugação til e a conjugação hermitiana do operador $A(t)$ num instante t é

$$A(t)|0(\beta_T)\rangle = \widetilde{A}^{\dagger}(t - i\beta/2)|0(\beta_T)\rangle, \tag{3.55}$$

$$A^{\dagger}(t)|0(\beta_T)\rangle = \widetilde{A}(t - i\beta/2)|0(\beta_T)\rangle, \tag{3.56}$$

onde

$$a(\beta_T, t) = f^{1/2}(-i\partial_t)\left(A(t + i\beta/2) - \widetilde{A}^{\dagger}(t)\right), \tag{3.57}$$

$$\widetilde{a}(\beta_T, t) = f^{1/2}(-i\partial_t)^{*}\left(\widetilde{A}(t - i\beta/2) - A^{\dagger}(t)\right), \tag{3.58}$$

e

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \tag{3.59}$$

é a função de Bose-Einstein. A relação entre os operadores à temperatura nula e os operadores à temperatura finita pode ser derivada a partir dos axiomas do formalismo DCT

$$A = e^{iG(\beta_T)} a(\beta_T, t) e^{-iG(\beta_T)}, \tag{3.60}$$

e também, a relação entre o vácuo térmico e o vácuo duplicado à temperatura nula

$$|0(\beta_T)\rangle = e^{-iG(\beta_T)}|0, \widetilde{0}\rangle, \tag{3.61}$$

com o operador de Bogoliubov definido pela

$$G(\beta_T) = G^\dagger(\beta_T) = -\widetilde{G}(\beta_T). \tag{3.62}$$

Capítulo 4

Estados da Corda Bosônica Térmica no Formalismo DCT

Neste capítulo, construimos os estados de corda bosônica térmica aberta no espaço de Minkowski e calculamos a entropia desses estados [48]. Na sequência, construimos os estados de corda bosônica fechada térmica no espaço AdS em primeira aproximação; calculamos a entropia usando o formalismo DCT [49] e discutimos a relação entre a Hamiltoniana no espaço de Hilbert total e o espaço de Hilbert físico [50]. Estas contribuições e possibilidades abertas serão comentadas no final do capítulo.

4.1 Estados da Corda Aberta Térmica no Espaço-Tempo de Minkowski

Inicialmente para construir os estados da corda, escrevemos os operadores de criação e aniquilação dos osciladores da corda física obtidos no primeiro capítulo

$$A_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_n^\mu \quad ; \quad A_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{-n}^\mu \quad , \tag{4.1}$$

Cópias idênticas de operadores são escritas, para atuação no espaço aixíliar $\hat{H}$

$$\widetilde{A}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{\alpha}_n^\mu \quad ; \quad \widetilde{A}_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{\alpha}_{-n}^\mu \quad , \tag{4.2}$$

Os operadores satisfazem a álgebra

$$[A_n^\mu, A_m^{\nu\dagger}] = [\widetilde{A}_n^\mu, \widetilde{A}_m^{\nu\dagger}] = \delta_{n+m}\eta^{\mu\nu} \quad , \quad [A_n^\mu, \widetilde{A}_m^\nu] = [A_n^\mu, \widetilde{A}_m^{\nu\dagger}] = 0. \tag{4.3}$$

O espaço de Fock do sistema total é o produto tensorial dos espaços de Fock de cada corda. Considerando $T = 0$, o estado de vácuo dos osciladores da corda é

$$|0\rangle \quad = \quad |0\rangle\,|p\rangle\,, \tag{4.4}$$

onde para obtermos o estado fundamental de vácuo devemos considerar a parte de momento do centro de massa. Assim,

$$|0\rangle\!\rangle \otimes |p\rangle \otimes |\tilde{p}\rangle = |0,\tilde{0}\rangle|p,\tilde{p}\rangle \tag{4.5}$$

representa o vácuo fundamental em $T = 0$ e

$$A_n^\mu\,|0\rangle \quad = \quad 0 \quad , \quad \forall n, \tag{4.6}$$

$$\hat{p}^\mu\,|p\rangle \quad = \quad p^\mu\,|p\rangle\,. \tag{4.7}$$

Uma vez duplicado o número de graus de liberdade; faz-se uso dos operadores unitários de Bogoliubov G_n^μ, para obtermos a descrição térmica. Definimos

$$G_n^\mu \quad = \quad -\,i\theta_n(\beta_T)(A_n \cdot \tilde{A}_n - \tilde{A}_n^\dagger \cdot A_n^\dagger). \tag{4.8}$$

onde $\theta(\beta_T)$ é um parâmetro real que depende da estatística do n - ésimo modo $\cosh\theta_n(\beta_T) = (1 - e^{\beta_T M})^{-1}$. $A_n \cdot \tilde{A}_n$ representa o produto escalar $A_n^\mu \widetilde{A}_{\mu\, n}$ no espaço de Minkowski. Os operadores G_n^μ são hermitianos e $G_{|n|} = -G_{-n}$ para $n < 0$. Escolhido o calibre de cone de luz, onde $x^\circ \pm x^{25}$; $\mu = 1, \cdots, 24$; $D = 26$, sem anomalias, sem estados fantasmas $G_n = \sum_{\mu=1}^{24} G_n^\mu$.

As relaçoes de comutação entre operadores de Bogoliubov e os osciladores são:

$$[G_n, A_n^\mu] = -i\theta_n(\beta_T)\widetilde{A}_n^{\mu\dagger}, \quad [G_n, A_n^{\mu\dagger}] = -i\theta_n(\beta_T)\widetilde{A}_n^\mu, \tag{4.9}$$

$$[G_n, \widetilde{A}_n^{\mu}] = -i\theta_n(\beta_T)A_n^{\mu\dagger} \quad , \quad [G_n, \widetilde{A}_n^{\mu\dagger}] = -i\theta_n(\beta_T)A_n^{\mu}, \tag{4.10}$$

Vamos construir o estado de vácuo térmico e os operadores de aniquilação e criação térmicos para corda aberta

$$|0(\beta_T)\rangle\!\rangle_{osc} \;=\; \prod_{m>0} e^{-iG_m}\,|0\rangle\!\rangle\,, \tag{4.11}$$

onde $|0\rangle\!\rangle = |0\rangle\,|\tilde{0}\rangle$. O vácuo térmico do sistema total à temperatura finita contém contribuições do momento linear

$$|0(\beta_T)\rangle\!\rangle \;=\; |0(\beta_T)\rangle\!\rangle_{osc}\,|p\rangle\,|\tilde{p}\rangle\,. \tag{4.12}$$

Os operadores que aniquilam o vácuo térmico são

$$A_n^{\mu}(\beta_T) \;=\; e^{-iG_n}A_n^{\mu}e^{iG_n} \quad , \quad \tilde{A}_n^{\mu}(\beta_T) \;=\; e^{-iG_n}\tilde{A}_n^{\mu}e^{iG_n}. \tag{4.13}$$

e os operadores que criam estados a partir do vácuo térmico são conjugados hermitianos destes. Os estados do sistema a temperatura finita são obtidos atuando no vácuo térmico com os operadores térmicos de criação e destruição. Os estados obtidos pertencem a um espaço de Fock térmico. As coordenadas de momento e centro de massa da corda são invariantes por transformações de Bogoliubov, ou seja, todos os operadores dos osciladores comutam com os operadores $x, \tilde{x}, p, \tilde{p}$, podemos tratar a corda como um conjunto de osciladores bosônicos. Os operadores de entropia para a corda bosônica aberta, diretamente de suas definições são

$$K \;=\; \sum_{\mu=1}^{24}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{\mu\dagger}A_n^{\mu}\log\sinh^2\theta_n - A_n^{\mu}A_n^{\mu\dagger}\log\cosh^2\theta_n) \tag{4.14}$$

e o operador $\tilde{K}$ obtido através da conjugação til do K. O vácuo é invariante sob a operação til, todas as informações está contida em operadores sem til, assim os elementos de matriz que interessam são os do operador K. Foi útil escrever

$$K \;=\; \sum_{\mu=1}^{24} K^{\mu}, \tag{4.15}$$

A entropia da corda representa a soma das entropias de todos osciladores em todas as direções. Pretendemos encontrar a entropia da corda associada mais geral da equação de movimento. A entropia é função do campo $x(\tau,\sigma)$ que descreve a folha mundo e as condições de contorno nas equações de movimento informam qual é a dependência com os parâmetros da folha mundo. Vamos escolher a solução geral com as c.c. NN para calcularmos os elementos de matriz, inicialmente.

Os elementos de matriz $< X^{\mu}(\beta_T)\,|K|\,X^{\nu}(\beta_T) >$ podem ser separados em duas partes: a primeira que contém as coordenadas e momento do centro de massa e a parte que contém a informação dos osciladores, ou seja

$$\begin{aligned} \langle\!\langle X^{\mu}(\beta_T)\,|K^{\rho}|\,X^{\mu}(\beta_T)\rangle\!\rangle &= \text{termos do c. m.} \\ &- 2\alpha' \sum_{n,k,l>0} \frac{e^{i(l-n)\tau}}{\sqrt{ln}} \cos n\sigma \cos l\sigma \, [(T_1)^{\mu\rho\nu}_{nkl} + (T_2)^{\mu\rho\nu}_{nkl}]\,, \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde

$$\begin{aligned} (T_1)^{\mu\rho\nu}_{nkl} &= \langle\tilde{0}, 1^{\mu}_{n}| \prod_{m>0} e^{-iG_m} A^{\rho\dagger}_{k} A^{\rho}_{k} \log\sinh^2\theta_k \prod_{s>0} e^{iG_s} |1^{\nu}_{l}, \tilde{0}\rangle \langle\tilde{p}, p|\tilde{q}, q\rangle, \\ (T_2)^{\mu\rho\nu}_{nkl} &= -\,\langle\tilde{0}, 1^{\mu}_{n}| \prod_{m>0} e^{-iG_m} A^{\rho}_{k} A^{\rho\dagger}_{k} \log\cosh^2\theta_k \prod_{s>0} e^{iG_s} |1^{\nu}_{l}, \tilde{0}\rangle \langle\tilde{p}, p|\tilde{q}, q\rangle \end{aligned} \tag{4.17}$$

e

$$|1^{\mu}_{l}\rangle \;=\; A^{\mu\dagger}_{l}\,|0\rangle\,. \tag{4.18}$$

Aqui, consideramos a normalização usual dos estados de momento em um volume V_{24} no espaço transverso

$$\langle p|\,q\rangle \;=\; 2\pi\delta^{(24)}(p-q) \tag{4.19}$$

$$(2\pi)^{24}\delta^{(24)}(0) \;=\; V_{24}. \tag{4.20}$$

Resulta, após uma simples álgebra, a contribuição dos osciladores para o elemento de matriz

$$\begin{aligned} \langle\!\langle X^{\mu}(\beta_T)\,|K^{\rho}|\,X^{\mu}(\beta_T)\rangle\!\rangle &= \text{termos do c.m.} - 2\alpha'(2\pi)^{(48)}\delta^{\mu\nu}\delta^{(24)}(p-q)\delta^{(24)}(\tilde{p}-\tilde{q}) \times \\ &\sum_{n>0}\frac{1}{n}\cos^2 n\sigma[\log(\tanh\theta_n)^2\delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho}\sum_{k>0}\delta_{kk}]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Por sua vez os termos CM pode ser divido em duas partes: uma contendo somente operadores de posição e momento e outra com a contribuição dos osciladores. Usando a relação de completeza dos autoestados dos operadores de momento junto com os elementos de matriz

$$\langle x|\, p\rangle \;=\; (2\pi\hbar)^{-12} e^{ip\cdot x/\hbar}, \tag{4.22}$$

os termos contendo posição e momento do CM podem ser calculados. A contribuição devida aos osciladores é obtida expressando os osciladores em $T = 0$ em termos dos osciladores em $T \neq 0$ ou escrevendo o vácuo térmico em termos de vácuo a temperatura nula. Os dois modos de cálculo levam ao mesmo resultado. Usando as propriedades dos operadores de Bogoliubov mostra-se que as contribuições dos termos onde há mistura de operadores de centro de massa com parte dos osciladores são cancelados. Os termos diferentes de zero são todos proporcionais a $< 0(\beta_T) \left| K^P \right| 0(\beta_T) >$. A relação final para a entropia, levando em conta todas as contribuições é

$$\begin{aligned}
&\langle\!\langle X^\mu(\beta_T)\,|K^\rho|\, X^\mu(\beta_T)\rangle\!\rangle \;= \\
-\;& (2\pi\hbar)^{-24}\left[(2\pi\hbar)^{24}(2\alpha'\tau)^2 p^\mu p'^\nu \delta^{(24)}(p-p') + 2\alpha'\tau(I_2^\mu p'^\nu + I_2'^\nu p^\mu) + I_2^\mu I_2^\nu \prod_{j\neq\mu,\nu} I_1^j\right] \\
\times\;& \delta^{(24)}(\tilde{p}-\tilde{p}')\sum_{m=1}\left[\mathrm{n}_m^\rho \log \mathrm{n}_m^\rho + (1-\mathrm{n}_m^\rho)\log(1-\mathrm{n}_m^\rho)\right] - 2\alpha'(2\pi)^{(48)}\delta^{\mu\nu}\delta^{(24)}(p-p') \\
\times\;& \delta^{(24)}(\tilde{p}-\tilde{p}')\sum_{n>0}\frac{1}{n}\cos^2 n\sigma\left[\log(\tanh\theta_n)^2\delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho}\sum_{k>0}\delta_{kk}\right],
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde as integrais unidimensionais no domínio $x \in [x_0, x_1]$ são

$$\begin{aligned}
I_1 &= -i\hbar(p'-p)^{-1}\left[e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x_1} - e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x_0}\right] && (4.24)\\
I_2 &= -i\hbar(p'-p)^{-1}\left[-i\hbar I_1 + x_1 e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x_1} - x_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x_0}\right]. && (4.25)
\end{aligned}$$

e os estados de momento final e inicial são escolhidos por $|p>$ e $|p'>$, respectivamente. O número de excitações da corda no vácuo térmico é

$$\mathrm{n}_m^\rho \;=\; \left\langle\!\left\langle 0(\beta_T) \left| A_m^{\rho\dagger} A_m^\rho \right| 0(\beta_T) \right\rangle\!\right\rangle = \sinh^2\theta_m \tag{4.26}$$

Uma vez que as condições de contorno são imposta nas coordenadas da folha mundo, podemos de forma semelhante obter expressões para as entropias das cordas submetidas as demais *c.c* DD, DN e ND. Nestes casos não existem operadores associados com as coordenadas e momentos de centro de massa, mas vetores de posição constante associados as suas extremidades, não havendo contribuição destes termos para a entropia.

Os termos dos elementos de matriz diferentes de zero obtidos são

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}D \quad &: \quad \langle\!\langle X^\mu(\beta_T)\,|K^\rho|\,X^\mu(\beta_T)\rangle\!\rangle = 2\alpha'(2\pi)^{(48)}\delta^{\mu\nu}\delta^{(24)}(p-p')\delta^{(24)}(\tilde{p}-\tilde{p}') \\
&\times \quad \sum_{n>0}\frac{1}{n}\sin^2 n\sigma\left[\log(\tanh\theta_n)^2\delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho}\sum_{k>0}\delta_{kk}\right] \qquad (4.27)\\
\mathrm{D}N \quad &: \quad \langle\!\langle X^\mu(\beta_T)\,|K^\rho|\,X^\mu(\beta_T)\rangle\!\rangle = 2\alpha'(2\pi)^{(48)}\delta^{\mu\nu}\delta^{(24)}(p-p')\delta^{(24)}(\tilde{p}-\tilde{p}') \\
&\times \quad \sum_{r=\mathcal{Z}+1/2}\frac{1}{r}\sin^2 r\sigma\left[\log(\tanh\theta_r)^2\delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho}\sum_{k>0}\delta_{kk}\right] \qquad (4.28)\\
\mathrm{N}D \quad &: \quad \langle\!\langle X^\mu(\beta_T)\,|K^\rho|\,X^\mu(\beta_T)\rangle\!\rangle = 2\alpha'(2\pi)^{(48)}\delta^{\mu\nu}\delta^{(24)}(p-p')\delta^{(24)}(\tilde{p}-\tilde{p}') \\
&\times \quad \sum_{r=\mathcal{Z}+1/2}\frac{1}{r}\cos^2 r\sigma\left[\log(\tanh\theta_r)^2\delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho}\sum_{k>0}\delta_{kk}\right] \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

$(Z+\frac{1}{2})$, são números inteiros. As expressões obtidas dão a entropia como função da folha mundo. Esta entropia não pode ser pensada como a entropia do vácuo da corda bosônica que é dada como a soma em todas as condições espaço - temporais da entropia dos bosons escalares sem massa e não dependentes das c.c.

A contribuição para entropia dos estados da corda com condições de contorno DD, DN e ND pode ser calculada truncado as três relações anteriores após o primeiro termo de oscilador ou calculado o elemento de matriz K^ρ nos estados térmicos que descrevem campos de massa nula. Os campos de massa nula formam um multipleto $U(1)$, $A^j = \alpha^j_{-1} = |0\rangle$ onde $j = 1, \ldots, p$ e um conjunto de $(24-p)$ escalares $\phi^a = \alpha^a_{-1}\,|0\rangle$ onde $a = p+1, \ldots, 24$, dessa forma para os estados

$$\left|\Psi^\lambda(\beta_T)\right\rangle\!\rangle \;=\; \alpha^\lambda_{-1}(\beta_T)\,|0(\beta_T)\rangle\!\rangle \qquad (4.30)$$

multiplicados pelas funções dependentes de τ e σ convenientes, respeitadas as condições de contorno, calculamos os elementos de matriz de K^ρ. Obtemos como expressão da entropia $E = E_{\{A\}} + E_{\{\phi\}}$

$$E_{\{A\}} = 2\alpha' p(-\sin^2\sigma \sum_{n=1} \log\cosh^2\theta_n + 4\cos^2\sigma \sum_{r\in\mathcal{Z}+1/2} \log\cosh^2\theta_r), \tag{4.31}$$

$$E_{\{\phi\}} = 2\alpha'(24-p)(-\sin^2\sigma \sum_{n=1} \log\cosh^2\theta_n + 4\cos^2\sigma \sum_{r\in\mathcal{Z}+1/2} \log\cosh^2\theta_r) \tag{4.32}$$

.

Nas duas relações acima o primeiro termo representa a contribuição do setor DD e o segundo a contribuição dos setores DN e ND. Somente o termo de entropia com as c.c NN depende de $\hbar$. No limite semi-clássico $\hbar \to 0$ a contribuição devida unicamente aos momenta é irrelevante. O termo dominante é o mesmo que domina no limite de tensão infinita quando $\alpha' \to 0$. A entropia da corda devida as c.c. DD, DN e ND anula-se.

4.2 Estados da Corda Bosônica Térmica no Espaço AdS

Para obter em primeira ordem a corda bosônica térmica, vamos aplicar a DCT à corda quantizada semiclássica descrita na capítulo 1. Vamos discutir o ansatz da DCT e o vácuo témico $|0(\beta_T)\rangle\rangle$. No cálculo da função de partição $Z(\beta_T)$ há diferenças formais entre trabalhar na espaço de Hilbert total $\hat{\mathcal{H}}$ e nos subspaços físicos $\mathcal{H}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$. Da forma de $Z(\beta_T)$ em $\mathcal{H}$, concluimos que operador de Bogoliubov é conhecido e a termalização é viável. Por termalização, entendemos o processo de colocar o sistema em contato com seu reservatório térmico de calor, o sistema inicial a temperatura zero é levado a $T \neq 0$. A interação específica é descrita via operador de Bogoliubov que mistura o par de osciladores. O resultado desse procedimento é o aparecimento de dois novos graus de liberdade térmicos. Diremos que o sistema está dobrado quando expresso em termos dos osciladores físicos e os do reservatório correspondentes, considerando uma temperatura determinada. O ansatz fundamental da DCT é expresso pelo valor médio de um operador O qualquer.

$$\langle O \rangle = Z^{-1}(\beta_T) \mathrm{Tr} \left[e^{-\beta_T H} O \right] \equiv \langle\langle 0(\beta_T)|O|0(\beta_T)\rangle\rangle, \tag{4.33}$$

Na aplicação da DCT o ansatz será modificado, quando considerarmos uma teoria de cordas. O novo ansatz adotado é

$$\langle O \rangle = Z^{-1}(\beta_T) \mathrm{Tr} \left[\delta(P=0) e^{-\beta_T H} O \right] \equiv \langle\langle 0(\beta_T)|O|0(\beta_T)\rangle\rangle, \tag{4.34}$$

que também, respeita a invariância por reparametrizações na folha mundo. Primeiro as simetrias da corda são fixada e após o novo ansatz é imposto, somente os estados físicos contribuiem no cálculo do traço. Todo o conjunto de vínculos deve ser implementado antes da imposição desse novo ansatz. O vácuo térmico na DCT tem a forma

$$|0(\beta_T)\rangle\rangle = \sum_w \sum_{\overline{w}} f_{w,\overline{w}}(\beta_T)|w\rangle|\overline{w}\rangle, \tag{4.35}$$

onde neste caso w e $\overline{w}$ são multi-índices correspondentes aos modos α e aos modos auxiliares β do reservatório, respectivamente, introduzimos a notação para os auto-valores dso operadores número

$$N_n = n \sum_{\mu=1}^{D-1} k_n^\mu \quad , \quad \overline{N}_n = n \sum_{\mu=1}^{D-1} \overline{k}_n^\mu, \tag{4.36}$$

onde onde k_n^μ e $\bar{k}_n^\mu$ são auto-valores dos operadores número

$$N_n^\mu|\cdots k_n^\mu \cdots\rangle = n k_n^\mu|\cdots k_n^\mu \cdots\rangle, \quad , \quad \overline{N}_n^\mu|\cdots \overline{k}_n^\mu \cdots\rangle = n\overline{k}_n^\mu|\cdots \overline{k}_n^\mu \cdots\rangle, \tag{4.37}$$

respectivamente, para qualquer $\mu = 1, 2, \ldots, D-1$ e $n = 1, 2, \ldots,$ ou seja eles satisfazem as relações

$$\begin{aligned} f^*_{w',\overline{w}'}(\beta_T) f_{w,\overline{w}}(\beta_T) &= Z^{-1}(\beta_T)\delta(w',w)\delta(\overline{w}',\overline{w}) \frac{\exp\left(\beta_T \pi m^2 \alpha'^2\right)}{\left[1-\exp\left(-\frac{\beta_T \pi m \alpha'^2}{l}\right)\right]^{D-1}} \times \\ & \int_{-1/2}^{+1/2} ds \exp\left[2\pi\alpha' \sum_n \left(\overline{\lambda}_n(\beta_T,s)\overline{N}_n + \lambda_n(\beta_T,s)N_n\right)\right], \end{aligned} \tag{4.38}$$

onde $\delta(w, w')$ e $\delta(\overline{w}, \overline{w}')$ são notações abreviadas para o produto de funções delta, para cada par de índices no multi - índice correspondente e

$$\lambda_n(\beta_T, s) = -\beta_T\omega_n - \frac{is}{\alpha'} \quad , \quad \overline{\lambda}_n(\beta_T, s) = -\beta_T\omega_n + \frac{is}{\alpha'} \; . \tag{4.39}$$

O vínculo pode ser escrito usando a representação analítica da função delta

$$\delta(P = 0) \equiv \delta(\overline{N} - N) = \int_{-1/2}^{+1/2} ds\, e^{2\pi is\left(\overline{N} - N\right)}. \tag{4.40}$$

A relação de ortogonalidade (4.38) mostra que, como no caso do espaço - tempo de Minkowski, os coeficientes na expansão do vácuo térmico são vetores do espaço de Hilbert idênticos aos do espaço de Hilbert das cordas, ou seja, o espaço de Hilbert $\hat{\mathrm{H}}$ que tem os graus de liberdade do reservatório, também, como mostra a relação (*) na expansão de $|0(\beta_T)\ \rangle$ no espaço de Hilbert total $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \bigotimes \widetilde{\mathcal{H}}$, estes vetores são escritos com os funcionais de Columbeau [60], i é a raiz quadrada de função delta. Isto sugere que o vácuo térmico é realmente um estado do espaço físico total $\widehat{\mathcal{H}}_{físico}$ e $\widehat{\mathcal{H}}$ e não de todo espaço. Além disso, não fator com função delta se o traço de (4.33) é tomada sobre $\widehat{\mathcal{H}}_{físico}$ em vez de $\hat{\mathcal{H}}$ e, consequentemente, não há dependência do vácuo térmico com os vínculos. por simplicidade, vamos trabalhar no que depende do espaço físico. Então a relação (4.35) pode ser expressa

$$\begin{aligned} |0(\beta_T)\rangle\rangle \quad = \quad & Z^{-\frac{1}{2}}(\beta_T)\delta(w', w)\delta(\overline{w}', \overline{w}) \frac{\exp\left(\frac{\beta_T\pi m^2\alpha'^2}{2}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta_T\pi m\alpha'^2}{l}\right)\right]^{\frac{D-1}{2}}} \times \\ & \sum_{w}\sum_{\overline{w}} \exp\left[-\beta_T\pi\alpha' \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left(\overline{N}_n + N_n\right)\right] |w, \overline{w}\rangle \widetilde{|w, \overline{w}\rangle}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Aqui, os estados de multi-índice são $|w, \widetilde{w}\ \ \rangle \in \widetilde{\mathcal{H}}_{físico}$,respectivamente. A função de partição pode ser obtida impondo que o vácuo térmico é normalizado e tomando o traço do operador identidade no subespaço físico

$$Z(\beta_T) = \frac{\exp\left(\beta_T\pi m^2\alpha'^2\right)}{\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta_T\pi m\alpha'^2}{l}\right)\right]^{D-1}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta_T\pi\alpha' n\omega_n}\right)^{2(1-D)}. \tag{4.42}$$

Aqui, o fator 2 na exponencial vem das contribuições iguais dos osciladores com α e β, respectivamente.

As relações anteriores mostram que a decomposição do vácuo térmico em termos dos estados físicos é semelhante a do campo livre quântico no espaço - tempo de Minkowski. Todavia, há duas diferenças importantes. A primeira nas contribuições no modo zero e o quadrado da massa que aparece na exponencial. A segunda diferença, diz respeito a validade desse estado como estado de vácuo térmico de corda - é válido somente localmente no sistema de referência de centro de massa, e é, ao longo de geodésicas no espaço-tempo AdS.

O mapeamento da teoria em $T = 0$ para $T \neq 0$ é gerado pelo operador de Bogoliubov dependente da temperatura, correspondendo a todos os osciladores da sistema total

$$\mathcal{G} = G_0 + G + \overline{G}, \tag{4.43}$$

onde o operador de Bogoliubov para o modo zero é

$$G_0 = -i\theta_0(\beta_T) \sum_{\mu=1}^{D-1} \left(\tilde{\alpha}_0^{\mu} \alpha_0^{\mu} - \alpha_0^{\dagger\mu} \tilde{\alpha}_0^{\dagger\mu} \right), \tag{4.44}$$

e o parâmetro θ_0 é relacionado a função distribuição como

$$\cosh\theta_0(\beta_T) = \left(1 - e^{-\beta_T \omega_0}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.45}$$

A frequência do modo zero é

$$\omega_0 = \frac{\pi m \alpha'^2}{l}. \tag{4.46}$$

Os operadores de Bogoliubov G e $\overline{G}$ para os modos α e β, respectivamente, tem a forma

$$G_0 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n = -i \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\beta_T) \sum_{\mu=1}^{D-1} \left(\tilde{\alpha}_n^{\mu} \alpha_n^{\mu} - \alpha_n^{\dagger\mu} \tilde{\alpha}_n^{\dagger\mu} \right), \tag{4.47}$$

$$\overline{G}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = -i \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\theta}_n(\beta_T) \sum_{\mu=1}^{D-1} \left(\tilde{\beta}_n^{\mu} \beta_n^{\mu} - \beta_n^{\dagger\mu} \tilde{\beta}_n^{\dagger\mu} \right). \tag{4.48}$$

Os coeficientes $\theta_n(\beta_T) = \overline{\theta_n}(\beta_T)$ são iguais para todos $n = 1, 2, \ldots$ $\mu = 1, 2, \ldots, D-1$, uma vez que os osciladores são idênticos em ambos os setores e ao longo de todas direções transversais do espaço tangente. Suas relações com as distribuições bosônicas são

$$\cosh \theta_n(\beta_T) = \cosh \overline{\theta}_n(\beta_T) = \left(1 - e^{-\beta_T \omega_n}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.49}$$

onde

$$\omega_n = \overline{\omega}_n = \pi \alpha' n \left(\frac{\Omega_n^2 + 1}{\Omega_n}\right). \tag{4.50}$$

O vácuo térmico da corda bosônica é a imagem do vácuo total à temperatura zero

$$|0\rangle\rangle \equiv |0\rangle|\tilde{0}\rangle = |0\rangle\rangle_0 \otimes_n |0\rangle\rangle_n \otimes_n \overline{|0\rangle\rangle}_n, \tag{4.51}$$

sob a transformação unitária gerada pelo operador de Bogoliubov

$$|0(\beta_T)\rangle\rangle = e^{-i\mathcal{G}}|0\rangle\rangle. \tag{4.52}$$

Como $|0\rangle\rangle$ pertence ao espaço físico total, o operadore de Bogoliubov mapea $\widehat{\mathcal{H}}_{físico}$ no espaço de Hilbert térmico $\widehat{\mathcal{H}}$ (β_T). O vácuo total é aniquilado por todos os operadores de aniquilaçaõ e tem invariância translacional. O vácuo térmico pode ser definido da mesma forma se os operadores são construidos com a ação sobre o conjunto de todos operadores

$$\mathcal{O} \equiv \{O\} = \{\alpha_0^\mu, \alpha_0^{\dagger\mu}, \tilde{\alpha}_0^\mu, \tilde{\alpha}_0^\dagger; \alpha_n^\mu, \alpha_n^{\dagger\mu}, \tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\dagger; \beta_n^\mu, \beta_n^{\dagger\mu}, \tilde{\beta}_n^\mu, \tilde{\beta}_n^\dagger\}, \tag{4.53}$$

de transformações similares geradas pelo operador de Bogoliubov

$$\mathcal{O}(\beta_T) = e^{-i\mathcal{G}}\mathcal{O}e^{i\mathcal{G}} = \{e^{-i\mathcal{G}}Oe^{i\mathcal{G}}\}. \tag{4.54}$$

O espaço $\mathcal{H}_{(\beta_T)}$ tem a estrutura de um espaço de Fock. Os estados de vácuo térmico satisfazem as relações

$$\alpha_0^\mu(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle\rangle = \alpha_n^\mu(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle\rangle = \beta_n^\mu(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle\rangle = 0, \tag{4.55}$$

$$\tilde{\alpha}_0^\mu(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle\rangle = \tilde{\alpha}_n^\mu(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle\rangle = \tilde{\beta}_n^\mu(\beta_T)|0(\beta_T)\rangle\rangle = 0. \tag{4.56}$$

Como o operador de Bogoliubov mistura os modos de osciladores a temperatura zero de todos os setores, a temperatura finita osciladores sem til e com til não representam mais grau de liberdade da corda e do reservatório, respectivamente. Portanto, eles representam as oscilações térmicas do sistema aquecido que resulta da interação a temperatura zero da corda e seu reservatório. Um estado de corda térmica, deverá conter um número arbitrário de excitações de todos os setores e tem como forma geral

$$|\Psi^{\mu_1 \ldots \nu_1 \ldots \rho_1 \ldots \tau_1}_{m_1 \ldots \nu_1 \ldots p_1 \ldots q_1}(\beta_T)\rangle\rangle = \\ \left[\alpha^{\dagger\mu_1}_{m_1}(\beta_T)\right]^{k^{\mu_1}_{m_1}} \cdots \left[\beta^{\dagger\nu_1}_{n_1}(b_T)\right]^{\overline{k}^{\nu_1}_{n_1}} \cdots \left[\tilde{\alpha}^{\dagger\rho_1}_{p_1}(\beta_T)\right]^{s^{\rho_1}_{p_1}} \cdots \left[\tilde{\beta}^{\dagger\tau_1}_{q_1}(\beta_T)\right]^{\overline{s}^{\tau_1}_{q_1}} \cdots |0(\beta_T)\rangle\rangle. \tag{4.57}$$

O estado contém $k^{\mu_1}_{m_1}$ exitações térmicas do tipo α_{m_1} na direção μ_1, $\bar{k}^{\nu_1}_{n_1}$ excitações térmicas do tipo β_{n_1} na direção γ_1, etc.

As simetrias da corda térmica podem ser verificadas utilizando-se a álgebra conforme nos estados térmicos. Todavia, os operadores L_n e $\bar{L_n}$ não comutam com operadore de Bogoliubov a álgebra conforme é quebrada a temperatura finita. É natural perguntamos se há simetrias e vínculos que possam ser impostos sobre os estados da corda. A resposta a questão é obtida notando que a dinâmica da corda a temperatura finitas pose ser derivada da Lagrangeana

$$\mathcal{L}_2(\beta_T) = e^{-i\mathcal{G}}\hat{\mathcal{L}}_2 e^{i\mathcal{G}}, \tag{4.58}$$

onde $\hat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_2 - \tilde{\mathcal{L}}_2$ e $\mathcal{L}_2$ é a Lagrangeana correspondente a ação truncada dada pela relação (4.58) e $\tilde{L}_2$ é a parte do reservatório associado. Da Lagrangeana acima, a Hamiltomiana e momento na folha mundo em $D = 2 + 1$ são

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \quad , \quad \hat{P} = P - \tilde{P}, \tag{4.59}$$

e mostra que as relações de comutação são

$$\left[\hat{H}, \mathcal{G}\right] = \left[\hat{P}, \mathcal{G}\right] = 0. \tag{4.60}$$

Sendo $\widehat{H}$ a hamiltonia total da corda bosônica podemos interpretar $\widehat{P}$ como sendo o momento total. Finalmente, qual estado físico $|\Psi_{físico}\rangle\rangle = |\Psi_{físico}\rangle\ \widetilde{|\Psi_{físico}\rangle}$ pode ser mapeado no estado térmico

$$|\Psi_{fisico}(\beta_T)\rangle\rangle = e^{-i\mathcal{G}}|\Psi_{fisico}\rangle\rangle, \tag{4.61}$$

que é invariante por translação na folha mundo

$$\hat{P}|\Psi_{fisico}(\beta_T)\rangle\rangle = 0. \tag{4.62}$$

A relação acima juntamente com a invariância da Hamiltoniana são usadas para definir os estados térmicos. Observamos que na relação acima, os operadores estão a temperatura zero e o estado a temperatura finita.

Considerando os modos de oscilação da corda no espaço de Hilbert físico, a entropia pode ser localmente definida como o valor esperado do operador K no vácuo térmico da corda, como mostrado no capítulo anterior. O operador K é

$$\begin{aligned} K &= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{D-1}\left[\left(\alpha_n^{\mu\dagger}\alpha_n^{\mu} + \beta_n^{\mu\dagger}\beta_n^{\mu}\right)\log\sinh^2\theta_n(\beta_T) - \left(\alpha_n^{\mu}\alpha_n^{\mu\dagger} + \beta_n^{\mu}\beta_n^{\mu\dagger}\right)\log\cosh^2\theta_n(\beta_T)\right] \\ &- \sum_{\mu=1}^{D-1}\left[\alpha_0^{\mu\dagger}\alpha_0^{\mu}\log\sinh^2\theta_0(\beta_T) - \alpha_0^{\mu}\alpha_0^{\mu\dagger}\log\cosh^2\theta_0(\beta_T)\right]. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Usando o valor esperado do operador número no vácuo térmico

$$\langle\langle 0(\beta_T)|\alpha_n^{\mu\dagger}\alpha_n^{\mu}|0(\beta_T)\rangle\rangle = \langle\langle 0(\beta_T)|\beta_n^{\mu\dagger}\beta_n^{\mu}|0(\beta_T)\rangle\rangle = \sinh^2\theta_n(\beta_T), \tag{4.64}$$

para todos osciladores, podemos escrever a entropia

$$\begin{aligned} S &= 2(D-1)k_B\sum_{n=1}^{\infty}\left[\beta_T\pi\alpha' n\omega_n f(\pi\alpha' n\omega_n) + \log(1 + f(\pi\alpha' n\omega_n))\right] \\ &+ (D-1)k_B\left[\beta_T\frac{\pi m\alpha'^2}{l}f(\frac{\pi m\alpha'^2}{l}) + \log\left(1 + f(\frac{\pi m\alpha'^2}{l})\right)\right], \end{aligned} \tag{4.65}$$

onde

$$f(\omega_n) = \frac{1}{e^{\beta_T\omega_n} - 1}, \tag{4.66}$$

é a função distribuição por $n = 1, 2, \ldots$. Por definição a energia livre é dada por valor esperado do operador F no vácuo térmico, onde

$$F = -\frac{1}{k_B}K + H. \tag{4.67}$$

Com o uso dos cálculos acima e a forma explícita da Hamiltoniana local, obtemos a energia livre de Helmholtz

$$\begin{aligned}\langle\langle F\rangle\rangle &= (D-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left[4\pi\alpha' n\omega_n f(\pi\alpha' n\omega_n) + \frac{2\pi m\alpha'^2}{l} f(\frac{\pi m\alpha'^2}{l})\right] \\ &+ \frac{(D-1)}{\beta_T}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+f(\pi\alpha' n\omega_n)\right) + \log\left(1+f(\frac{\pi m\alpha'^2}{l})\right)\right] - \pi m^2\alpha'^2,\end{aligned} \tag{4.68}$$

onde os dois últimos termos representam a contribuição dos modos zero e a da massa da corda, respectivamente. Os dois últimos termos na entropia diferem a função S_0, com tensão da corda e a constante cosmológica. A temperatura constante e para

$$T_s^2 >> \frac{m\beta_T}{4\pi}\sqrt{-\Lambda}, \tag{4.69}$$

S_0 depende da temperatura como

$$S_0 \approx 1 + \log\left(1 + \frac{1}{\beta_T\omega_0}\right). \tag{4.70}$$

Assim, esta contribuição déve ser relevante a altas temperaturas

$$T >> \frac{m}{4\pi k_B}\sqrt{-\Lambda}. \tag{4.71}$$

Para valores, onde a tensão da corda T_s é

$$T_s^2 << \frac{m\beta_T}{4\pi}\sqrt{-\Lambda}, \tag{4.72}$$

os últimos termos na entropia dependem da temperatura como

$$S_0 \approx \log(2-\beta_T\omega_0) + \beta_T\omega_0 - (\beta_T\omega_0)^2. \tag{4.73}$$

Neste casa, há temperatura cútica Tc

$$T_c = \frac{8\pi k_B}{mT_s^2\sqrt{-\Lambda}}. \tag{4.74}$$

Para $T < T_c$ o modo zero da entropia não é bem definido. Este resultado pode ser interpretado como não validade do procedimento de quantização semiclássico no limite de tensão nula da teoria de cordas. Neste limite, a interação entre os osciladores da corda vai além da aproximação em primeira ordem da expansão pertubativa em $\in$. Os efeitos da corda são reduzidos no limite de tensão grande o suficiente, para que a corda se comporte mais como uma partícula. Considerações semelhantes podem ser tiradas da energia livre.

4.3 Vácuo Térmico no Espaço de Hilbert Total

Aplicando o postulado fundamental da DCT do capítulo 3, modificado para teoria de cordas como visto anteriormente, o valor esperado de um operador O no espaço de Hilbert total é

$$Z^{-1}(\beta_T)\mathrm{Tr}\left[\delta(P=0)e^{-\beta_T H}O\right] \equiv \langle\langle 0(\beta_T)|O|0(\beta_T)\rangle\rangle, \tag{4.75}$$

onde o estado do vácuo térmico no espaço de Hilbert total é

$$\begin{aligned} |0(\beta_T)\rangle\rangle &= \frac{Z^{-\frac{1}{2}}(\beta_T)\exp(\frac{\beta_T \pi m^2 \alpha'^2}{2})}{\left[1-\exp\left(-\beta_T \frac{\pi m \alpha'^2}{l}\right)\right]^{\frac{D-1}{2}}} \sum_w \sum_{\overline{w}} \left[\int_{-1/2}^{+1/2} ds \exp\left(i\pi n s \sum_{\mu=1}^{D-1}\left(k_n^\mu - \overline{k}_n^\mu\right)\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left(-\beta_T \pi\alpha' \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_n \sum_{\mu=1}^{D-1}\left(k_n^\mu + \overline{k}_n^\mu\right)\right)|w,\overline{w}\rangle\widetilde{|w,\overline{w}\rangle}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

A função de partição térmica tem forma explicita

$$Z(\beta_T) = \frac{\exp(\beta_T \pi m^2 \alpha'^2)}{\left[1-\exp\left(-\beta_T \frac{\pi m \alpha'^2}{l}\right)\right]^{D-1}} \int_{-1/2}^{+1/2} ds \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-e^{\pi\alpha' n \lambda_n(\beta_T,s)}\right)\left(1-e^{\pi\alpha' n \overline{\lambda}_n(\beta_T,s)}\right)\right]^{1-D}. \tag{4.77}$$

No espaço de Hilbert total a Hamiltoniana tem a forma

$$H' = 2\pi\alpha' \sum_{n\geq 1}\left[\left(\frac{\Omega_n^2+1}{\Omega_n}\right)\left(N_n+\overline{N}_n\right) + 2\pi i s\left(N_n - \overline{N}_n\right)\right] + \frac{\pi m \alpha'^2}{l}\alpha_0^\dagger\cdot\alpha_0 - \pi m^2\alpha'^2, \tag{4.78}$$

que difere da (2.122) por conter a condição de níveis iguais (level matching) dada na expressão (2.123). A Hamiltoniana (4.78) está de acordo com a interpretação do parâmetro s como multiplicador de Lagrange [25]. A presença dos vínculos na Hamiltoniana (4.78) se deve a expansão do vácuo térmico no espaço de Hilbert total enquanto a Hamiltoniana (2.122) de partida tem os estados escolhidos no espaço de Hilbert físico. Desenvolver o cálculo das grandezas físicas da corda bosônica em qualquer uma das representações deve ser equivalente sendo que trabalhar no espaço de Hilbert total implica manipular os funcionais de Columbeau [60].

A teoria de cordas bosônicas é conforme no espaço AdS $D = 2+1$ [41] onde a termalização no método DCT é exata. Entretanto, a álgebra de Virasoro não se realiza na representação de estados térmicos aparecendo uma quebra da simetria conforme. É interessante estudar a termalização da álgebra de Virasoro usando a representação de osciladores que possibilitam implementar de modo direto o formalismo DCT. O passo inicial para a construção da álgebra de Virasoro térmica foi dado utilizando técnicas algébricas de Wigner-Heisenberg na construção dos geradores da álgebra de Virasoro [51].

Capítulo 5

Conclusões

Calculamos a entropia e a energia livre para todas as soluções da corda térmica bosônica aberta , onde são levadas em consideração todas as condições de contorno possíveis [48].

Formulamos uma teoria a temperatura finita para excitações térmicas livres da corda bosônica fechada no espaço AdS.na abordagem de DCT. A métrica no espaço AdS é tratada exatamente quando a corda e o reservatório térmico são semi-classicamente quantizados em teoria de perturbação até primeira ordem com respeito ao parâmetro adimensional $\epsilon = \alpha' H^2$ onde H é a constante de Hubble. Com fundo de buraco negro no AdS conforme $D = 2+1$, a quantização é exata. O método pode ser extendido a espaço-tempo AdS arbitrário. A aproximação é tomada no sistema de referência de centro de massa, sendo justificada pelo fato de que em primeira ordem a dinâmica da corda é determinada somente pela interação entre os modos livres de oscilações da corda e a solução de fundo exata. A corda térmica bosônica fechada em primeira ordem é obtida por termalização do sistema em $T = 0$ efetuada pelos operadores de Bogoliubov da DCT. Determinamos os estados da corda térmica bosônica fechada e calculamos a entropia local e a energia livre nos sistema de referência de centro de massa. Discutimos também a relação entre a Hamiltoniana no espaço de Hilbert total e o espaço de Hilbert físico. A DCT tem-se mostrado profícua neste procedimento canônico e perturbativo em que submetemos as cordas.

O próximo passo no desenvolvimento de nosso trabalho indica caminhos na aplicação a cordas supersimétricas e também ao estudo das D-branas. Uma possível generalização do método apresentado nesta tese, com aplicações na teoria de cordas e supercordas, é a termalização no formalismo DCT das representações da álgebra de Virasoro usando técnicas algébricas de Wigner-Heisenberg para sistemas bosônicos [51].

Referências

[1] M. A. Vazquez-Mozo, Phys. Lett. B **388**, 494 (1996); J. L. F. Barbon, M. A. Vazquez-Mozo, Nucl. Phys. B **497**, 236 (1997).

[2] A. Bytsenko, S. Odintsov and L. Granada, Mod. Phys. Lett. A**11**, 2525(1996).

[3] J. Ambjorn, Yu. Makeenko, G. W. Semenoff and R. Szabo, Phys. Rev. D**60**, 106009(1999).

[4] G. Dvali, I. I. Kogan and M. Shifman, Phys. Rev. D**62**, 106001(2000).

[5] S. Abel, K. Freese and I. I. Kogan, JHEP **0101**, 039(2001).

[6] I. I. Kogan, A. Kovner and M. Schvellinger, JHEP **0107**, 019 (2001).

[7] S. A. Abel, J. L. F. Barbon, I. I. Kogan, E. Rabinovici, JHEP **9904**, 015(1999).

[8] J. L. F. Barbon, E. Rabinovici, JHEP **0106**, 029(2001).

[9] S. S. Gubser, S. Gukov, I. R. Klebanov, M. Rangamani and E. Witten, J. Math. Phys. **42**, 2749 (2001)

[10] M. B. Green and P. Wai, Nucl. Phys. B**431**, 131(1994).

[11] M. B. Green, Nucl. Phys. B**381**, 201(1992).

[12] M. B. Green and M. Gutperle, Nucl.Phys. B**476**, 484(1996).

[13] M. Li, Nucl. Phys. B **460**, 351(1996).

[14] C. Callan Jr. and I. Klebanov, Nucl. Phys. B**465**, 473(1996).

[15] P. Di Vecchia and A. Liccardo, *D-Branes in String Theory I*, hep-th/9912161; *D-Branes in String Theory II*, hep-th/9912275.

[16] P. Di Vecchia, M. Frau, A. Lerda and A. Liccardo, Nucl. Phys. B**565**, 397(2000).

[17] Y. Leblanc, Phys. Rev. D**38**, 3087(1988).

[18] Y. Leblanc, Phys. Rev. D**36**, 1780(1987); Phys. Rev. D**37**, 1547(1988); Phys. Rev. D**39**, 1139(1989); Phys. Rev. D**39**, 3731(1989).

[19] Y. Leblanc, M. Knecht and J. C. Wallet, Phys. Lett. B**237**, 357(1990).

[20] H. Fujisaki and K. Nakagawa, Prog. Theor. Phys. **82**, 236(1989); Prog. Theor. Phys. **82**, 1017(1989); Prog. Theor. Phys. **83**, 18(1990); Europhys. Lett. **20**, 677(1992); Europhys. Lett. **28**, 471(1994).

[21] H. Fujisaki, Il Nuovo Cimento, **108A**, 1079(1995).

[22] H. Fujisaki and K. Nakagawa, Europhys. Lett. **35**, 493(1996).

[23] D. L. Nedel, M. C. B. Abdalla and A. L. Gadelha, Phys. Lett. B **598**, 121 (2004).

[24] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, JHEP **0510**, 063 (2005).

[25] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, Phys. Lett. B **613**, 213 (2005).

[26] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, PoS(**WC2004**), 032 (2004).

[27] I. V. Vancea, Phys. Lett. B **487**, 175 (2000).

[28] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, Phys. Rev. D **64**, 086005 (2001).

[29] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, Phys. Rev. D **66**, 065005 (2002).

[30] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, *D-branes at finite temperature in TFD*, hep-th/0308114.

[31] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 2109 (2003).

[32] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127**, 92 (2004).

[33] I. V. Vancea, Phys. Rev. D **74**, 086002 (2006).

[34] I. V. Vancea, PoS(**IC2006**), 36(2006).

[35] I. V. Vancea, Phys. Rev. D **74**, 086002 (2006).

[36] H. J. de Vega and N. Sanchez, Phys. Lett. B **197**, 320 (1987).

[37] H. J. de Vega and N. Sanchez, Nucl. Phys. B **299**, 818 (1988).

[38] N. G. Sanchez, Phys. Lett. B **195**, 160 (1987).

[39] A. L. Larsen and N. Sanchez, Phys. Rev. D **50**, 7493 (1994).

[40] H. J. de Vega, A. L. Larsen and N. G. Sanchez, Phys. Rev. D **58**, 026001 (1998).

[41] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. D **48**, 1506 (1993).

[42] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. D **48**, 1506 (1993) [arXiv:gr-qc/9302012].

[43] G.T. Horowitz and D.L. Welch, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 328.

[44] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebi e C. B. Thorn, Nucl. Phys. **B56**, 109(1973).

[45] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).

[46] Y. Takahashi, H. Umezawa, Collective Phenom. **2**, 55 (1975).

[47] Y. Takahashi, H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. **B10**, 1755 (1996).

[48] M. C. B. Abdalla, E. L. Graca and I. V. Vancea, Phys. Lett. B **536**, 114 (2002).

[49] H. Belich, E. L. Graca, M. A. Santos and I. V. Vancea, J. High Energy Physics **02**(2007)037.

[50] E. L. Graca and I. V. Vancea, *Thermal string vacuum in black-hole AdS space-time*, hep-th/0505210, submetido para publicação.

[51] E. L. da Graca, H. L. Carrion and R. de Lima Rodrigues, Braz. J. Phys. **33**, 333 (2003).

[52] E. L. Graca, I. V. Vancea, *Estados Térmicos da Corda Aberta no Formalismo DCT*, apresentado no encontro *2nd International Conference on Fundamental Interactions, Domingos Martins, Espirito Santo, Brazil, 6-12 Jun 2004*(poster).

[53] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Ed. Addison-Wesley (1992).

[54] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Vol.1, Ed. Cambridge University Press (1987).

[55] J. Polchinski, *String Theory*, Vol. 1,Ed. Cambridge University Press (1998).

[56] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Ed. Springer-Verlag (1983).

[57] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics*, Ed. AIP New-York, (1993).

[58] J. F. Columbeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions* Ed. North Holland, (1985).

[59] W. Paniago de Souza, *Corda Bosônica à Temperatura Finita*, tese de mestrado IFT-UNESP (2002), hep-th/0208134.

[60] J. F. Columbeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions* North Holland, 1985.

[61] A. L. Gadelha, *Dp-Branas à Temperatura Finita*, tese de doutorado IFT-UNESP, (2002).