Tese de Doutorado

Explorando Novos Caminhos da Estrutura de Yang-Mills para A Gravitação Quântica

Víctor José Vásquez Otoya

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Julho de 2007

Agradecimentos

- Minha gratidão a José Helayel e Rodrigo Sobreiro, pela amizade e prestativa orientação.
- Ao J. Boldo, L. Machado, A. Accioly, H. Cuesta e I. Soares pelas valiosas discussões.
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro.
- A José Helayel, Sebastião Alves Dias e Alexander Smith pelos ensinamentos, não só acadêmicos, mas também de vida.
- Agradeço a todos meus amigos, em especial à Virginia Torres, Rodrigo Sobreiro, Miguel Tafur, Gabriela Peixoto e Arturo Fiorentini pelos bons momentos e pelo apoio que me ofereceram durante estes anos.
- À Cristiana, Rosângela, Myriam e Ricardo pela ajuda prestada durante este período.
- Finalmente, quero agradecer aos meus Pais, Víctor Vásquez Sevilla e America Otoya, minhas irmãs Kelly e Margarita, e minha sobrinha Claudia: sem eles nao teria sido possível esta nova etapa de minha vida.

Resumo

Uma nova classe de teorias para a gravitação quântica é sugerida em conexão com formulações mais fundamentais, como as teorias de cordas, das quais provêm modelos gravitacionais com pequenos desvios da simetria de Lorentz e modelos com torção dinâmica. Nesta tese, estudamos essencialmente o espectro de excitações que aparecem nestas categorias de modelos. Além disto, baseando-se na construção de Yang-Mills, concebe-se uma nova formulação para a gravidade, na qual a interação gravitacional pode ser descrita por uma ação efetiva advinda de uma Yang-Mills para o grupo $SO(4)$. Finalmente, um outro tipo de teoria de gravidade, conhecida como Gravidade Métrica Afim, é estudada e para esta mostra-se que os graus de liberdade introduzidos pela não-metricidade desacoplam-se da geometria do espaço-tempo.

Abstract

A new class of quantum gravity theories is suggested that brings about more fundamental scenarios, such as string theories, from which the Lorentz-symmetry breaking models and dynamical torsion gravities may be derived. In this work, we basically deal with the analysis of the excitation spectrum present in this category of models. Also, based on the Yang-Mills construction, a new proposal for a gravity theory is presented, for which gravity is to be understood as an effective model built up from an Euclidean Yang-Mils theory for the $SO(4)$ group. Finally, another kind of extension of a gravitational model, known as Metric Affine Gravity, is studied whose most remarkable property is that the degrees of freedom introduced by the non-metricity decouple of the geometry.

Sumário

Introdução

A compreensão da gravitação consistente no setor quântico tem sido um dos problemas mais importantes da física moderna [1]. O sucesso das teorias de calibre para descrever as interações fundemantais sugere que a gravitação deveria ser descrita de esta forma. A primeira tentativa de unificar a gravitação com as outras interações fundamentais foram as teorías de Kaluza-Klein [2, 3, 4] nas quais propõe-se que a dinâmica de todas as interações vem contida em um tensor métrico que mora em um espaço-tempo de dimensões maiores que quatro onde a impossibilidade observacional das dimensões extras viria a ser controlada por algum mecanismo de compactificação. Por outro lado, em uma outra visão de grande unificação nascerão os modelos supersimetricos [5, 6, 7], o sucesso dos mesmos foi devido ao cancelamento de divergencias [8, 9] e diferentemente dos modelos de Kaluza-Klein não apresentam problema da hierarquia devido ao controle sob as constantes de acoplamento[4]. O problema da gravitação parecia estar resolvido com o surgimento da supergravidade (supersimetria local) a qual traz consigo de forma natural uma partícula de spin-2 (graviton) com seu respectivo parceiro supersimétrico spin-3/2(gravitino) [10, 11], mas mostro-se que esta teoria so é finita a um loop [12]. A tentativa de ter uma teoria finita estendendo a supersimetria tambem foi falha devido a que a a supersimetria extendida maxima poderia ser $N = 8$ [13], mas esta não é renormalizável e se demonstrou que só é finita a três loops [14, 15], e não a todas as ordens, como ocorre com as teorias de super-Yang-Mills. Surgiu tambem a ideia de unificar as teorias de Kaluza-Klein con Supergravidade, mostrando-se que uma teoria $d = 4$, $N = 8$ poderia vir de uma teoria $N = 1$ em $d = 11$ [16], mas o problema da não renormalizabilidade continua alem de que o mecanismo de redução gera um spectro de partículas incompativel com o modelo da grande unificação $SU(5)$[17].

O aparecimento das teorias de supercordas [18, 19, 20] trouxe consigo uma nova visão para as teorias de supergravidade, mas desta vez a supergravidade deixaria de ser uma teoria fundamental passando a ser uma teoria efetiva, a cosistencia da teoria dita que o espaço-tempo deve possuir $10D$ [21].

Com tudo isto as teorias de cordas delucidam novos aspéctos nas teorias da gravitação a certa escala de energias, como gravitação com termos topológicos, violação da invariancia de Lorentz, torção dinâmica, etc, que são extensões naturais possíveis advindas dos limites de baixas energias de estas teorias.

Isto implica que a nossa percepção da gravitação em certa escala devería sentir os efeitos quânticos advindos de tais teorias fundamentais; estas modificações se veram refletidas nas relações de dispersão; assim é fundamental conhecer o caráter das excitações físicas nas diferentes extensões das teorias de gravitação. O estudo de tais excitações será o objetivo dos nossos dois primeiros capítulos.

Por outro lado, se consideramos as teorias de gravitação como teorias fundamentais, observamos que o algoritmo de quantização, no qual tomamos uma ação clássica e estabelecemos as regras de quântização não produz uma teoria quântica consitente. Ademais, tomando como ponto de partida a ação de Einstein-Hilbert, mostra-se que a teoria não é renormalizável, como fica evidente através da constante de acoplamento com dimensão de massa negativa [22]. Assim a nossa proposta é construir um modelo no qual a ação de Einstein-Hilbert seja entendida como um modelo efetivo advindo de um modelo mais fundamental e à luz das interações fundamentais esta deverá seguir construção de Yang-Mills [23]; que será o motivo de estudo no nosso terceiro capítulo.

Por último, existe uma classe de teorias as quais propoem que aspéctos quânticos da gravitação poderiam ser entedidos a a partir de uma extensão para a conexão de Levi-Civita, desde que a conexão e a métrica são conceitos independentes desde o ponto de vista geométrico. Estas teorias são chamadas de MAG(Metric Affine Gravity) as quais propõem o relaxamento da condição de que a conexão seja compativel com a métrica elevando o caráter de esta condição a campo quântico (não metricidade) [24]. Assim no último capítulo desta tese queremos estudar alguns aspectos de estas teorias, mostrando que os graus de liberdade advindos da não metricidade podem ser absorvidos e desacoplados do setor geométrico.

As idéias desta tese estão organizadas segundo a distribuição de capítulos que segue:

No Capítulo 1, consideramos a identificação do espectro de excitações de uma ação de gravitação com termo topológico de violação da simetria de Lorentz [25]. A contribuição original deste estudo é a obtenção de um conjunto completo de operadores de spin em presença da quebra da simetria relativística e a sua aplicação ao estudo das excitações gravitacionais num fundo anisotrópico, que pode ter origem em perturbações em anisotropias da radiação cósmica de fundo. faremos o cálculo explícito do propagador advindo da gravitação modificada pelo termo de quebra de Lorentz topológico.

No Capítulo 2, apresentamos uma contribuição ao estudo da gravitação planar [26] e confrontamos os resultados das contribuições das excitações da torção e das excitações da conexão de spin ao espectro de modelos gravitacionais planares, adotando como cenário a gravitação descrita pela ação de Einstein-Hilbert acrescida de um termo gravitacional topológico, o análogo gravitacional da ação de Chern-Simons. Este estudo levou-nos também a ter que encontrar um conjunto completo de operadores de spin estendidos, de tal forma a levarem em conta contribuições da parte topológica da ação [27].

No terceiro capítulo estudaremos uma nova proposta para a gravitação quântica [28], a qual consiste na contrução de uma teoria de Yang-Mills do grupo $SO(d)$ no espaço Euclideano, tal modelo é renormalizavel a todas as ordens em teoria de prturbações para $d = 2, 34$, com campo de calibre de spin-1, o qual, com ajuda da representação espaço-tempo, é mapeado num espaço-tempo curvo com conexão linear, neste papeamento surge um tensor métrico efetivo, e o papel de campo de calibre vem desempenhado pela conexão linear. Como resultado deste mapeamento se obtem uma lagrangiana quadrâtica do tensor de curvatura; para gerar o termo de Einstein-Hilbert propõe-se um mecanismo de quebra de simetria onde os graus de liberdade de spin-2 aparecem.

No quarto capítulo estudamos a posibilidade de absorver os graus de liberdade advindos de teorias com não-metricidade usando as propiedades do grupo de $GL(d,R)$, junto com o método do background field [29, 30]. Mostrando que teorias de gravitação livres com não metricidade dinâmica podem ser mapeadas no caso mais geral em teorias do tipo Einstein-Cartan com campos de materia extras advindos do setor não Lorenziano do grupo $GL(d,R)$ [31].

Finalmente, no Capítulo 5, expomos nossas conclusões, discussões e futuras perspectivas nessas linhas de pesquisa.

Capítulo 1

Gravitação com Quebra da Simetria de Lorentz

A possibilidade de estender o Modelo Padrão é muito ampla; qualquer extensão do Modelo Padrão deverá sutentar-se em teorias mais fundamentais. Por outro lado, teorias mais fundamentais que tentam incluir a gravitação como interação fundamental, sejan as Supercordas, Loop Quantum Gravity, sugerem que, para descrever a gravidade a nível quântico, simetrias fundamentais deveram ser violadas; tal é o caso das simetrias-CPT e Lorentz. É possivel mostrar que basta quebrar a simetria de Lorentz para quebrar CPT. Assim, o Modelo Padrão Estendido deverá incluir contribuções advindas de tais quebras.

Nesta linha, duas propostas para quebrar a simetria de Lorentz têm sido feitas: a primeira é a quebra espontânea da simetria de Lorentz através de um campo vetorial de fundo num potencial do tipo Higgs; a segunda por um campo de fundo mas desta vez introduzido através de um termo topológico do tipo Chern-Simons, sendo este último o ponto de partida de nosso estudo.

A linha de investigação ao estudo das teorias de campos com violação da simetria de Lorentz vem sendo discutida exaustivamente na literatura e excelentes trabalhos de revisão e avaliação da área podem ser encontrados em [32, 25, 33, 34] Neste capítulo, propomo-nos a estudar os modos de excitação de spin-2, em teorias com quebra da simtria de Lorentz, para isto deveremos realizar a analise partindo da seguinte ação para a gravidade topologicamente massiva em quatro dimensões:

$$S = \int d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{\kappa^2} \left(-\mathcal{R} + \widetilde{\Lambda} + \frac{\sigma}{2} R^2 + \frac{\xi}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) + \mathcal{L}_{cs} \right], \tag{1.1}$$

onde

$$\mathcal{L}_{cs} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\mu \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\rho} (\partial_\nu \Gamma_{\rho\kappa}{}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\alpha}{}^{\sigma} \Gamma_{\kappa\rho}{}^{\alpha}) \tag{1.2}$$

é o termo topológico de Chern-Simons, enquanto $\widetilde{\Lambda} = \kappa^2 \Lambda$, Λ sendo a constante cosmológica. As quantidades σ e κ, são constantes de acoplamento de dimensão m^{-2}. A ideia de definir a constante cosmológica desta forma é so para poder fatorar κ^{-2}, o que simplifica a forma de escrever nossas futuras expressões para os propagadores que serão calculadas na proxima Seção. Ainda, o tensor de Ricci é definido como $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\lambda\mu\nu}{}^{\lambda}$. Ademais, no espaço-tempo Riemanniano, os coeficentes da conexão afim são expressos em termos dos símbolos de Christoffel ($\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$), completamente determinados pela métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right) \tag{1.3}$$

A fim de se ler o propagador, conseqüentemente, o espectro de partículas da teoria, linearizaremos a parte do Lagrangeano dependente da métrica usando a aproximação de campo fraco:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \tag{1.4}$$

onde adotamos a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = (+; -, -, -)$ e κ é a constante de acoplamento gravitacional. $\kappa h_{\mu\nu}$ representa uma pequena pertubação sobre o espaço-tempo de Minkowski. Como conseqüencia a ação é invariante perante transformações gerais de coordenadas,

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x), \tag{1.5}$$

onde ξ_μ é o parâmetro de calibre. Logo, é necesario fixar o calibre para tirar o caráter singular do operador de onda da Lagrangeana [35]. Assim, usaremos o calibre de De Donder,

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\alpha} F_\mu F^\mu, \tag{1.6}$$

onde

$$F_\mu = \partial_\nu \left(h^\nu{}_\mu - \frac{1}{2} \delta^\nu{}_\mu h \right), \tag{1.7}$$

com $h \equiv h_\mu{}^\mu$. Neste caso, a ação é a soma dos termos de Einstein-Hilbert, Chern-Simons e fixação de calibre. Assim, fazendo uso da aproximação de campo fraco para a métrica, os termos bilineares podem ser escritos como abaixo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}h\Box h+h\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu}-h^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\nu}\right)\\
&+\frac{\sigma}{2}\left(h\Box^{2}h-2h\Box\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{v}\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}h^{\kappa\lambda}\right)\\
&+\frac{\xi}{8}\left(h^{\mu\nu}\Box^{2}h_{\mu\nu}+h\Box^{2}h-2h\Box\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu}+2h^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{v}\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}h^{\kappa\lambda}\right)\\
&+\frac{\Lambda\kappa^{2}}{4}\left(-h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}+\frac{1}{2}h^{2}\right)\\
&+\frac{1}{2\alpha}\left[-h^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\nu}+h^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h-\frac{1}{4}h\Box h\right]\\
&-\frac{\kappa^{2}}{4}\left[\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_{\mu}\left(h_{\lambda}{}^{\rho}\Box\partial_{\nu}h_{\rho\kappa}-h_{\lambda}{}^{\rho}\partial_{\nu}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}h^{\sigma}{}_{\kappa}\right)\right]. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Os parâmetros σ, ξ e o vetor de fundo, v^{μ}, deverão ser escolhidos adequadamente, de forma tal a eliminar os possiveis ghosts ou tachyons do espectro. No entanto, esta discussão será adiada para depois de termos achado o propagador para o campo h. A estrutura de pólos do propagador e seus correpondentes resíduos indicarão se existem modos não-físicos induzidos pelos termos de derivada superior e os termos de violação da simetria de Lorentz.

1.1 Os Operadores de Spin e os Propagadores

Reescreveremos o Lagrangeano linearizado (1.8) de forma mais conveniente, ou seja

$$
\mathcal{L}=\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu\kappa\lambda}h_{\kappa\lambda}, \qquad (1.9)
$$

onde $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ é o operador de onda. O propagador é dado por

$$
\langle 0|\,T\left[h_{\mu\nu}(x)\,h_{\kappa\lambda}(y)\right]|0\rangle=i\left(\mathcal{O}^{-1}\right)_{\mu\nu\kappa\lambda}\delta^{4}(x-y)\,. \qquad (1.10)
$$

Com o objetivo de inverter o operador de onda, faremos uso da extensão do formalismo de projetores de spin introduzido em [36], onde agora necesitarmos somar outros novos operadores advindos do termo de Chern-Simons. Os operadores para tensores simétricos de rank-2 são dados por:

$$\begin{aligned}
P^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda}+\theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa}\right)-\frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \\
P^{(1)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda}+\theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa}+\theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda}+\theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa}\right), \\
P^{(0-s)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \qquad P^{(0-w)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}=\omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \\
P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \qquad P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}=\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Assim, o operador de onda poderá ser expandido em termos do operdores de projeção de spin, o que nos leva a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \left(\frac{\xi\Box^2}{4}-\frac{\Box}{2}-\frac{\widetilde{\Lambda}}{2}\right)P^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}-\left(\frac{\Box}{2\alpha}+\frac{\widetilde{\Lambda}}{2}\right)P^{(1)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \\
&+\left[(3\sigma+\xi)\Box^2+\frac{(4\alpha-3)\Box}{4\alpha}+\frac{\widetilde{\Lambda}}{4}\right]P^{(0-s)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \\
&+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\Box}{\alpha}+\widetilde{\Lambda}\right)\left(P^{(0-s\omega)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}+P^{(0-\omega s)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\Box}{\alpha}+\widetilde{\Lambda}\right)P^{(0-\omega)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}+\frac{\kappa^2\Box}{4}S_{\mu\nu,\kappa\lambda}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Usando agora a álgebra de operadores de spin, será possível calular o propagador. Os outros operadores que vêm dos termos nao-lineares são:

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\kappa}S_{\nu\lambda}+\theta_{\mu\lambda}S_{\nu\kappa}+\theta_{\nu\kappa}S_{\mu\lambda}+\theta_{\nu\lambda}S_{\mu\kappa}\right), \\
\Pi^{(1-a)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\kappa}\Sigma_{\nu\lambda}+\theta_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\kappa}+\theta_{\nu\kappa}\Sigma_{\mu\lambda}+\theta_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\kappa}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(1-b)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\kappa}\Sigma_{\lambda\nu} + \theta_{\mu\lambda}\Sigma_{\kappa\nu} + \theta_{\nu\kappa}\Sigma_{\lambda\mu} + \theta_{\nu\lambda}\Sigma_{\kappa\mu}\right), \\
\Pi^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{\mu\kappa}\Lambda_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\Lambda_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\Lambda_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda}\Lambda_{\mu\kappa}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(SL)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(S_{\mu\kappa}\Lambda_{\nu\lambda} + S_{\mu\lambda}\Lambda_{\nu\kappa} + S_{\nu\kappa}\Lambda_{\mu\lambda} + S_{\nu\lambda}\Lambda_{\mu\kappa}\right), \\
\Pi^{(S\Sigma-a)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(S_{\mu\kappa}\Sigma_{\nu\lambda} + S_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\kappa} + S_{\nu\kappa}\Sigma_{\mu\lambda} + S_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\kappa}\right), \\
\Pi^{(S\Sigma-b)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(S_{\mu\kappa}\Sigma_{\lambda\nu} + S_{\mu\lambda}\Sigma_{\kappa\nu} + S_{\nu\kappa}\Sigma_{\lambda\mu} + S_{\nu\lambda}\Sigma_{\kappa\mu}\right), \\
\Pi^{(S\omega)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(S_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + S_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + S_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} + S_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(\theta\Sigma-a)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\Sigma_{\kappa\lambda}, \quad \Pi^{(\theta\Sigma-b)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\Sigma_{\lambda\kappa}, \\
\Pi^{(\Sigma\theta)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\Sigma_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda} + \Sigma_{\nu\mu}\theta_{\kappa\lambda}\right), \\
\Pi^{(\theta L)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda}, \quad \Pi^{(L\theta)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \\
\Pi^{(L)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \Lambda_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(\omega L-a)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \omega_{\mu\lambda}\Lambda_{\nu\kappa} + \omega_{\nu\lambda}\Lambda_{\mu\kappa}, \quad \Pi^{(\omega L-b)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \omega_{\mu\kappa}\Lambda_{\nu\lambda} + \omega_{\nu\kappa}\Lambda_{\mu\lambda}, \\
\Pi^{(\omega L)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \omega_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda}, \quad \Pi^{(L\omega)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \Lambda_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(\omega\Sigma-a)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \omega_{\mu\nu}\Sigma_{\kappa\lambda}, \quad \Pi^{(\omega\Sigma-b)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \omega_{\mu\nu}\Sigma_{\lambda\kappa} \\
\Pi^{(\Sigma\omega)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \Sigma_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} + \Sigma_{\nu\mu}\omega_{\kappa\lambda},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(L\Sigma-a)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \Lambda_{\mu\nu}\Sigma_{\kappa\lambda}, \quad \Pi^{(L\Sigma-b)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \Lambda_{\mu\nu}\Sigma_{\lambda\kappa} \\
\Pi^{(\Sigma L)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \Sigma_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda} + \Sigma_{\nu\mu}\Lambda_{\kappa\lambda},
\end{aligned}
$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ and $\omega_{\mu\nu}$ são os operadores transverso e longitudinal respeitivamente, considerando que $\Sigma_{\mu\nu} = v_\mu\partial_\nu$, $\Lambda_{\mu\nu} = v_\mu v_\nu$ e $S_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}v^\kappa\partial^\lambda$.

Os projetores de spin acima formam um álgebra fechada. Para os operadores de Barnes-Rivers usuais temos:

$$\begin{aligned} P^{i-a}P^{j-b} &= \delta^{ij}\delta^{ab}P^{j-b}, \\ P^{i-ab}P^{j-cd} &= \delta^{ij}\delta^{bc}P^{j-a}, \\ P^{i-a}P^{j-bc} &= \delta^{ij}\delta^{ab}P^{j-ac}, \\ P^{i-ab}P^{j-c} &= \delta^{ij}\delta^{bc}P^{j-ac}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

que satisfazem às identidades tensoriais a seguir:

$$\left(P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}\right)_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}\right). \tag{1.14}$$

Explicitamos abaixo so uma parte da tabela multiplicativa para os operadores de spin (envolvendo os produtos dos usuais operadores de Barnes-Rivers pelos novos operadores de spin encontrados), devido a que a algebra completa consta de cerca de 900 termos. Assim,

$$\begin{aligned} P^{(2)}P^{(2)} &= P^{(2)} \\ P^{(2)}S &= S \\ P^{(2)}\Pi^{(1-a)} &= \Pi^{(1-a)} - (v.\partial)P^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)}) + \frac{2(v.\partial)}{\sqrt{3}}P^{(0-s\omega)} \\ P^{(2)}\Pi^{(2)} &= \Pi^{(2)} - \frac{\lambda}{\Box}\Pi^{(1-b)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Pi^{(\theta L)} + \frac{(v.\partial)}{\sqrt{3}\Box}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)}\Pi^{(\theta\Sigma-b)}) \\ P^{(2)}\Pi^{(L\theta)} &= \Pi^{(L\theta)} - \frac{(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\Sigma\theta)} + \frac{(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-\omega s)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})P^{(0-s)} \\ P^{(2)}\Pi^{(L)} &= \Pi^{(L)} - \frac{(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\Sigma L)} + \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\omega L)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})\Pi^{(\theta L)} \\ P^{(2)}\Pi^{(L\omega)} &= \Pi^{(L\omega)} - \frac{(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\Sigma\omega)} + \frac{(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-\omega)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})P^{(0-s\omega)} \\ P^{(2)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \Pi^{(L\Sigma-a)} - (v.\partial)\Pi^{(\omega L-a)} + \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})\Pi^{(\theta\Sigma-a)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P^{(2)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \Pi^{(L\Sigma-b)} - (v.\partial)\Pi^{(\omega L-b)} + \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})\Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(1)}P^{(1)} &= P^{(1)} \\
P^{(1)}\Pi^{(1-a)} &= (v.\partial)P^{(1)} \\
P^{(1)}\Pi^{(1-b)} &= \Pi^{(1-b)} \\
P^{(1)}\Pi^{(2)} &= \frac{(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(1-b)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\Sigma\theta)} &= \Pi^{(\Sigma\theta)} - 2(v.\partial)P^{(0-\omega s)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\Sigma\theta)} - \frac{2(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-\omega s)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L)} &= \frac{(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\Sigma L)} - \frac{2(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\omega L-b)} &= \Pi^{(\omega L-b)} - \frac{2(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\omega L-a)} &= \Pi^{(\omega L-a)} - \frac{2(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\Sigma\omega)} - \frac{2(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-\omega)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\Sigma\omega)} &= \Pi^{(\Sigma\omega)} - 2\lambda P^{(0-\omega)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\Sigma L)} &= \Pi^{(\Sigma L)} - 2\lambda\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= (v.\partial)\Pi^{(\omega L-b)} - \frac{2(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-s)}P^{(0-s)} &= P^{(0-s)} \\
P^{(0-s)}P^{(0-s\omega)} &= P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(1-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)}) - \frac{2(v.\partial)}{\sqrt{3}}P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(1-b)} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Pi^{(\theta L)} - \frac{(v.\partial)}{\sqrt{3}\Box}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)}) \\
P^{(0-s)}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(\theta\Sigma-b)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\Box})P^{(0-s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{(0-s)}\Pi^{(L)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\Box})\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\Box})P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\Box})\Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\Box})\Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}P^{(0-\omega)} &= P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega)}P^{(0-\omega s)} &= P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\Sigma\theta)} &= 2(v.\partial)P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega L-b)} &= \frac{2(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega L-a)} &= \frac{2(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega L)} &= \Pi^{(\omega L)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\Sigma\omega)} &= 2(v.\partial)P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\Sigma L)} &= 2(v.\partial)\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s\omega)}P^{(0-\omega)} &= P^{(0-s\omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{(0-s\omega)}P^{(0-\omega s)} &= P^{(0-s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma\theta)} &= 2(v.\partial)P^{(0-s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(L)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega L-b)} &= \frac{2(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega L-a)} &= \frac{2(v.\partial)}{\Box}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega L)} &= \Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{2(v.\partial)^2}{\Box}P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma\omega)} &= \frac{2(v.\partial)}{\Box}P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma-a)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma-b)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\Box}\Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma L)} &= 2(v.\partial)\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-\omega s)}P^{(0-s)} &= P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega s)}P^{(0-s\omega)} &= P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(1-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\Pi^{(\omega\Sigma-a)}+\Pi^{(\omega\Sigma-b)}) - \frac{2(v.\partial)}{\sqrt{3}}P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(2)} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Pi^{(\omega L)} - \frac{(v.\partial)}{\sqrt{3}\Box}(\Pi^{(\omega\Sigma-a)}+\Pi^{(\omega\Sigma-b)}) \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(\theta\Sigma-b)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(\theta L)} &= \Pi^{(\omega L)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\Box})\Pi^{(\omega\Sigma-b)}
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

$$
\begin{aligned}
SP^{(2)} &= S \\
SS &= 4[v^2\Box - (v.\partial)^2]P^{(2)} - 2[v^2\Box - (v.\partial)^2]P^{(0-s)} - 3(v.\partial)^2P^{(1)} + \\
&\quad -3\Box\Pi^{(2)} + 3(v.\partial)(\Pi^{(1-a)} + \Pi^{(1-b)}) + 2\sqrt{3}(v.\partial)^2(P^{(0-s\omega)} + P^{(0-\omega s)}) \\
&\quad -2\sqrt{3}(v.\partial)(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)} + \Pi^{(\Sigma\theta)}) + 2\sqrt{3}\Box(\Pi^{(\theta L)} + \Pi^{(L\theta)}).
\end{aligned} \tag{1.16}
$$

Com a álgebra de operadores dada anteriormente, o propagador para $h_{\mu\nu}$ no espaço dos momenta assume a forma:

$$
\begin{aligned}
\langle hh \rangle &= \frac{i}{D}\Bigg\{4D_1P^{(2)} + 2\frac{N_1}{D_1\left(p^2 - \widetilde{\Lambda}\alpha\right)}P^{(1)} - \frac{N_2}{D_1D_2}P^{(0-s)} + \frac{N_3D}{D_2\left(p^2 - \widetilde{\Lambda}\alpha\right)}P^{(0-\omega)} \\
&\quad +\sqrt{3}\frac{N_4}{D_1D_2}(P^{(0-s\omega)} + P^{(0-\omega s)}) + 4\kappa^2p^2S + 12i\frac{\kappa^4\lambda p^4}{D_1}\left(\Pi^{(1-a)} + \Pi^{(1-b)}\right) \\
&\quad +12\frac{\kappa^4p^6}{D_1}\Pi^{(2)} - 8\sqrt{3}i\frac{\kappa^4\lambda p^4}{D_1}\left(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)} + \Pi^{(\Sigma\theta)}\right) \\
&\quad - 8\sqrt{3}\frac{\kappa^4p^6}{D_1}\left(\Pi^{(\theta L)} + \Pi^{(L\theta)}\right)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

onde $\lambda = -iv^\mu p_\mu$. Ressaltamos que os índices no campo $h_{\mu\nu}$ e nos operadores de projeção foram suprimidos. Também definimos:

$$\begin{aligned} D_1 &= \xi p^4 + 2p^2 - 2\widetilde{\Lambda}; \\ D &= \xi^2 p^8 + 4\left(\xi + \kappa^4 v^2\right) p^6 + 4\left(1 - \widetilde{\Lambda}\xi - \kappa^4\lambda^2\right) p^4 - 8\widetilde{\Lambda} p^2 + 4\widetilde{\Lambda}^2; \\ D_2 &= \left(\xi + 3\sigma\right) p^4 - p^2 + \widetilde{\Lambda}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \alpha\xi^3 p^{12} + 2\alpha\xi\left(2\kappa^4 v^2 + 3\xi\right) p^{10} + 2\alpha\left(4\kappa^4 v^2 - 2\kappa^4\xi\lambda^2 - 3\widetilde{\Lambda}\xi^2 + 6\xi\right) p^8 \\ &+2\left[4\alpha\left(1 - \kappa^4\lambda^2 - \Lambda\kappa^6 v^2 - 3\widetilde{\Lambda}\xi\right) + 3\kappa^4\lambda^2\right] p^6 + 2\alpha\widetilde{\Lambda}\left(6\widetilde{\Lambda}\xi + \kappa^4\lambda^2 - 12\right) p^4 \\ &+24\alpha\widetilde{\Lambda}^2 p^2 - 8\alpha\widetilde{\Lambda}^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \xi^3 p^{12} + 6\left(2\kappa^4\xi v^2 + \xi^2 + 4\kappa^4 v^2\sigma\right) p^{10} + 6\left(2\xi - 4\kappa^4\lambda^2\sigma - 2\kappa^4\xi\lambda^2 - \widetilde{\Lambda}\xi^2\right) p^8 \\ &+8\left[1 - 3\widetilde{\Lambda}\xi\right] p^6 + 12\widetilde{\Lambda}\left(\Lambda\kappa^2\xi - 2\right) p^4 \\ &+24\widetilde{\Lambda}^2 p^2 - 8\widetilde{\Lambda}^3; \end{aligned}$$

$$N_3 = 4\alpha\left(\xi + 3\sigma\right) p^4 + \left(3 - 4\alpha\right) p^2 + \alpha\widetilde{\Lambda};$$

$$\begin{aligned} N_4 &= \xi^3 p^{12} + 2\left(2\kappa^4\xi v^2 + 3\xi^2\right) p^{10} + 2\left(6\xi - 12\kappa^4\lambda^2\sigma - 6\kappa^4\xi\lambda^2 - 3\Lambda\kappa^2\xi^2 + 4\kappa^4 v^2\right) p^8 \\ &+8\left[1 - \kappa^4\widetilde{\Lambda} v^2 - 3\kappa^2\Lambda\xi\right] p^6 + 12\widetilde{\Lambda}\left(\widetilde{\Lambda}\xi - 2\right) p^4 \\ &+24\widetilde{\Lambda}^2 p^2 - 8\widetilde{\Lambda}^3, \end{aligned}$$

onde $\lambda = -iv^\mu p_\mu$.

Agora consideremos alguns casos específicos. Trataremos primeiramente do caso de Einstein-Hilbert com o termo do Chern-Simons. Em seguida faremos a análise da inclusão da constante cosmológica na ação de Einstein-Hilbert com o termo de Chern-Simons no intuito de estudarmos a competição entre a massa gerada pelo termo de Chern-Simons e a constante cosmológica.

1.2 Ação de Einstein-Hilbert e o termo do Chern-Simons

Para começar, consideremos o caso para o termo de Einstein-Hilbert com o termo do Chern-Simons. Obtêm-se assim os siguentes propagadores:

$$\begin{aligned}\langle hh\rangle \;=\; & \frac{i}{p^2D}\left\{2P^{(2)}+2\left[\frac{3}{4}\kappa^4\lambda^2+\alpha D\right]P^{(1)}-P^{(0-s)}+(4\alpha-3)\,DP^{(0-\omega)}\right.\\ & -\sqrt{3}\left(p^2\kappa^4v^2+1\right)\left(P^{(0-s\omega)}+P^{(0-\omega s)}\right)+\kappa^2S+3i\kappa^4\lambda\left(\Pi^{(1-a)}+\Pi^{(1-b)}\right)\\ & +\frac{3\kappa^4p^2}{2}\Pi^{(2)}-\sqrt{3}i\kappa^4\lambda\left(\Pi^{(\theta\Sigma-a)}+\Pi^{(\theta\Sigma-b)}+\Pi^{(\Sigma\theta)}\right)\\ & \left.-\sqrt{3}\kappa^4p^2\left(\Pi^{(\theta L)}+\Pi^{(L\theta)}\right)\right\};\end{aligned}\tag{1.18}$$

onde $D(p)=\kappa^4v^2p^2-\kappa^4(p\cdot v)^2+1$.

A relação de dispersão que define a estrutura de pólos do propagador apresenta um interessante fatoração. Este resultado assegura a existencia de um pólo simples em $p^2=0$, qualquer que seja o quadrivetor de fundo, v^μ. No caso de Maxwell ou Yang-Mills com quebra da simetria de Lorentz realizada tambem por um termo de Chern-Simons, excitações de massa nula ocorrem apenas sob certas condições sobre o quadrivetor de fundo, como discutido no trabalho citado na ref.[37]. Esta marcante diferença entre o caso de Yang-Mills e o caso gravitacional deve-se ao fato de que o termo com quebra de Lorentz para as simetrias internas introduz apenas uma derivada do campo, enquanto que no caso gravitacional este mesmo termo introduz três derivadas sobre o campo gravitacional. Desta forma, compreende-se que se pode sempre fatorar uma potência do tipo p^2 na ação quadrática do campo de gravitação, o que inevitavelmente conduz ao pólo simples em $p^2 = 0$. O mesmo não ocorre no caso de Yang-Mills.

1.3 Incluindo a constante cosmológica

Em teorias com quebra espontânea da simetria de calibre em presença do termo de quebra de simetria de Lorentz, estudamos o efeito competitivo advindo do mecanismo de Higgs e a massa induzida advinda do termo de quebra de simetria de Lorentz[38]. No caso particular da gravitação, ao invés de uma quebra espontânea da simetria de calibre, outra forma de gerar massa que compita com o parâmetro de masa do termo de quebra da simetría de Lorentz poderia ser a travez da constante cosmológica. Esta situação abre as portas para outra possível pesquisa: a discusão do espectro de excitação do propagador do graviton na presença da constante cosmológica e o vetor de fundo que viola a simetria de calibre.

Partindo de uma teoria com termo de Einstein-Hilbert, constante cosmológica e termos de Chern-Simons, temos

$$\begin{aligned} D_1 &= 2p^2 - 2\Lambda\kappa^2; \\ D &= 4\kappa^4 v^2 p^6 + 4\left(1 - \kappa^4\lambda^2\right) p^4 - 8\Lambda\kappa^2 p^2 + 4\Lambda^2\kappa^4; \\ D_2 &= -p^2 + \Lambda\kappa^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 = \; & 8\alpha\kappa^4 v^2 p^8 \\ & +2\left[4\alpha\left(1 - \kappa^4\lambda^2 - \Lambda\kappa^6 v^2\right) + 3\kappa^4\lambda^2\right] p^6 + 2\alpha\kappa^2\Lambda\left(\kappa^4\lambda^2 - 12\right) p^4 \\ & +24\alpha\kappa^4\Lambda^2 p^2 - 8\alpha\kappa^6\Lambda^3; \end{aligned}$$

$$N_2 = 8p^6 - 24\kappa^2\Lambda p^4 + 24\kappa^4\Lambda^2 p^2 - 8\kappa^6\Lambda^3;$$

$$N_3 = (3 - 4\alpha)\, p^2 + \alpha\kappa^2\Lambda;$$

$$N_4 = 8\kappa^4 v^2 p^8 + 8\left[1 - \kappa^6\Lambda v^2\right] p^6 - 24\kappa^2\Lambda p^4 + 24\kappa^4\Lambda^2 p^2 - 8\kappa^6\Lambda^3;$$

Observa-se que a constante cosmológica suprime a excitação de massa nula associada ao pólo em $p^2 = 0$.

Contrariamente ao caso de Yang-Mills com quebra espontânea de simetria, a introdução de massa pela constante cosmológica não oferece modo de o termo que realiza a violação da simetria de Lorentz competir com o parámetro de massa. De fato, na expressão acima dada para D, para qualquer v^μ, o termo $\Lambda^2 k^2$ assegura a existência de pólos massivos. Entretanto, a característica de v^μ ser tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço é decisiva para o análise da natureza dos pólos.

Por exemplo táquions estarão sempre presentes se v^2 for tipo-espaço ou se v^2 for tipo-luz com $k^4\lambda^2 > 1$.

Finalizando, comprendemos que as flutuações gravitacionais associadas ao vetor de fundo, v^μ, aparecerão sempre moduladas pelo momento, ao passo que a constante cosmológica induz flutuações sem qualquer vinculação ao momento; daí, segue que a introdução da constante cosmológica suprime qualquer gráviton de massa nula.

Capítulo 2

Gravitação com Torção em $(2+1)D$

Teorias com quebra da simetria de Lorentz podem ser entendidas como uma soma de teorias de Chern-Simons em $(2+1)D$, atraves de uma folheação do espaço-tempo. Por outro lado teorias a baixas dimensionalidades têm sua motivação propria já que descrevem sistemas a temperatura finita. Com o trabalho de Witten, onde se mostra que a gravitação em $(2+1)D$ deverá ser topológica, teorias de gravitação em $3D$ assumiram relevancia especial.

Como concluímos no capítulo anterior, a questão da torção nas teorias de Chern-Simons merece ser tratada com especial atenção. Como a torção se acopla a materia, decidimos realizar o nosso estudo levando em conta a dinâmica da torção.

2.1 Generalidades

Um espaço de Riemann-Cartan é definido como uma variedade onde a derivada covariante da métrica é dada por:

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta}(x) = 0, \tag{2.1}$$

onde esta equação define a chamada conexão compativel com a métrica, $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$; isto permite a presença da torção, dada pela parte antisimétrica da conexão afim. Assim, temos:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \left\{ {}^{\gamma}_{\alpha\beta} \right\} + K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}, \tag{2.2}$$

onde $\left\{ {}^{\gamma}_{\alpha\beta} \right\}$ são os simbolos de Christoffel, os quais são completamente determinados pela métrica,

$$\left\{ {}^{\gamma}_{\alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \tag{2.3}$$

e

$$K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \frac{1}{2} (\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \mathcal{T}^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \mathcal{T}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\alpha}) \tag{2.4}$$

é o tensor de contorsão, que é antisimétrico nos dois últimos indices.

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 2\Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\gamma}. \tag{2.5}$$

Com o objetivo de estudar propiedades locais, introduzimos os campos de dreinbein, $e_\alpha{}^{\mathsf{a}}(x)$, que são entendidos como campos que tomam valores na álgebra de Lie correspondente ao grupo de simetrias do espaço de Minkowski, $\eta_{\mathsf{ab}} = diag(1, -1, -1)$ ou seja, no nosso caso, $SO(1, 2)$.

A introdução do espaço tangente (Minkowski) permite que os objetos geométricos definidos na variedade sintam as transformações locais. Com o objetivo de preservar a invariância sob transformações de Lorentz locais, introduzimos a conexão de spin $\omega_{\gamma \mathsf{b}}{}^{\mathsf{c}}$. A derivada covariante da dreinbein lê-se:

$$\nabla_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = D_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} - \Gamma_{\gamma\alpha}{}^{\lambda} e_\lambda{}^{\mathsf{a}} = 0, \tag{2.6}$$

onde $D_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = \partial_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} + \omega_{\gamma \mathsf{i}}{}^{\mathsf{a}} e_\alpha{}^{\mathsf{i}}$ é a derivada covariante de Lorentz.

Encontramos da eq.(2.6) que a conexão afim pode ser escrita como:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = e_{\mathsf{j}}{}^{\gamma} D_\alpha e_\beta{}^{\mathsf{j}}, \tag{2.7}$$

e o tensor de torção, eq.(2.5), lé-se

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 2\Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\gamma} = e_{\mathsf{j}}{}^{\gamma}(\partial_\alpha e_\beta{}^{\mathsf{j}} - \partial_\beta e_\alpha{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\alpha \mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} e_\beta{}^{\mathsf{i}} - \omega_{\beta \mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} e_\alpha{}^{\mathsf{i}}). \tag{2.8}$$

O tensor e o escalar de curvatura vem dados em termos da conexão afim pelas expressões:

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\nu} - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}{}^{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}{}^{\nu}\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\nu}\Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}{}^{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}{}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\mu}\Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho} \tag{2.10}$$

e

$$\mathcal{R} = g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\beta}. \tag{2.11}$$

Em termos da conexão de spin,

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu} = e_{\beta}{}^{\mathsf{i}} e_{\mathsf{j}}{}^{\nu} (\partial_{\mu}\omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} - \partial_{\alpha}\omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\mu\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}} - \omega_{\alpha\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}}), \tag{2.12}$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = e_{\beta}{}^{\mathsf{i}} e_{\mathsf{j}}{}^{\mu} (\partial_{\mu}\omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} - \partial_{\alpha}\omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\mu\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}} - \omega_{\alpha\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}}) \tag{2.13}$$

e

$$\mathcal{R} = \eta^{\mathsf{ai}} e_{\mathsf{a}}{}^{\alpha} e_{\mathsf{j}}{}^{\mu} (\partial_{\mu}\omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} - \partial_{\alpha}\omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{j}} + \omega_{\mu\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\alpha\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}} - \omega_{\alpha\mathsf{k}}{}^{\mathsf{j}}\omega_{\mu\mathsf{i}}{}^{\mathsf{k}}). \tag{2.14}$$

2.2 Um problema relacionado com as excitações de Spin-2

Começamos pela ação da gravidade topológicamente massiva tridimensional:

$$\mathcal{S} = \int d^3x \; e \left(\mathsf{a}_1\mathcal{R} + \mathsf{a}_2\mathcal{R}^2 + \mathsf{a}_3\mathcal{R}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^{\alpha\beta} + \mathsf{a}_4\mathcal{L}_{CS}\right), \tag{2.15}$$

onde

$$\mathcal{L}_{CS} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\delta}{}^{\lambda}\left(\partial_{\alpha}\Gamma_{\lambda\beta}{}^{\delta} + \frac{2}{3}\Gamma_{\alpha\rho}{}^{\delta}\Gamma_{\beta\lambda}{}^{\rho}\right), \tag{2.16}$$

é o termo topológico de Chern-Simons e

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta\gamma}}{e} \tag{2.17}$$

é o tensor completamente antisimétrico em (1+2)-D, com densidade de Levi-Civita $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ no espaço plano e $e = \sqrt{g}$ where $g = \det(g_{\alpha\beta}) = \eta e^2$. a_1, a_2, a_3 e a_4 são coeficentes livres.

Como em três dimensões, o tensor de Riemann, $\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu}$, tem o mesmo número de componente independentes que o tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$, termos cuadráticos em $\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu}$ não são necessarios na ação.

Em [43], a conexão afim é escrita como na eq.(2.2), e decomposta nas suas componentes irredutíveis de $SO(1,2)$: um escalar advindo da parte totalmente antisimétrica, um tri-vetor advindo do traço e um tensor simetrico de rank-2 e traço nulo. Com este procedimento, obtem-se um espectro de partículas onde só as as excitações massivas de spin-2 asociadas com o campo gravitacional linearizado, $h^{\alpha\beta}$, e com a parte simétrica do campo de torsão tem uma dinâmica que preserva a unitariedade da teoria, para certos valores dos parâmetros da ação.

2.3 Operadores de Spin

A contribução deste trabalho consiste em reconsiderar a ação (2.15) mas adoptando o formalismo de primeira ordem, eliminando a torção como excitação fundamental e escolhendo a dreinbein e a conexão de spin como campos quânticos fundamentais.

Agora, fazendo uso das equações (2.7),(2.13) e (2.14), na aproximação de campo fraco,

$$e_{\alpha}{}^{\mathsf{a}} = \delta_{\alpha}{}^{\mathsf{a}} + \frac{k}{2} h_{\alpha}{}^{\mathsf{a}} \, (\Rightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + k h_{\alpha\beta}) \,, \tag{2.18}$$

e a decomposição da conexão de spin,

$$\omega_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{bc}} = \epsilon^{\mathsf{bcd}} Y_{\mathsf{ad}}, \tag{2.19}$$

que, por sua vez, pode ser decomposto em ,

$$Y_{\mathsf{ab}} = y_{\mathsf{ab}} + \mathcal{Y}_{\mathsf{ab}} \ , \ y_{\mathsf{ab}} = Y_{(\mathsf{ab})} \ \ e \ \ \mathcal{Y}_{\mathsf{ab}} = Y_{[\mathsf{ab}]} \tag{2.20}$$

e

$$\mathcal{Y}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}} y^{\mathsf{c}} \Rightarrow y_{\mathsf{a}} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathsf{abc}}\mathcal{Y}^{\mathsf{bc}}, \tag{2.21}$$

podemos escrever a ação (2.15), na qual temos adicionado os termos de fixação de calibre,

$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \lambda F_{\mathsf{a}} F^{\mathsf{a}} \ , \ F_{\mathsf{a}} = \partial_{\mathsf{b}} \left(h^{\mathsf{b}}_{\mathsf{a}} - \frac{1}{2}\delta^{\mathsf{b}}_{\mathsf{a}} h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{c}} \right), \tag{2.22}$$

na forma linearizada

$$\mathcal{S} = \int d^3x \frac{1}{2}\Phi^T M \Phi \ , \ \Phi = \begin{pmatrix} y^{\mathsf{cd}} \\ y^{\mathsf{c}} \\ h^{\mathsf{cd}} \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

O operador de onda, M, sendo expresso numa extensão do formalismo dos operadores de projeção de spin introduzidos em [36],[52]. Cinco operadores adicionais surgem de y^{a} e do termo de Chern-Simons. Os seis operadores para o tensor simétrico de rank-2 em 3D são dados como segue abaixo:

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\theta_{\mathsf{bd}} + \theta_{\mathsf{ad}}\theta_{\mathsf{bc}}) - \frac{1}{2}\theta_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}},$$

$$\mathsf{P}^{(1-m)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}(\theta_{\mathsf{ac}}\omega_{\mathsf{bd}} + \theta_{\mathsf{ad}}\omega_{\mathsf{bc}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}} + \theta_{\mathsf{bc}}\omega_{\mathsf{ad}}),$$

$$\mathsf{P}^{(0-s)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}\theta_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}}, \tag{2.24}$$

$$\mathsf{P}^{(0-w)}_{\mathsf{ab,cd}} = \omega_{\mathsf{ab}}\omega_{\mathsf{cd}},$$

$$\mathsf{P}^{(0-sw)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mathsf{ab}}\omega_{\mathsf{cd}}$$

e

$$\mathsf{P}^{(0-ws)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mathsf{ab}}\theta_{\mathsf{cd}},$$

onde θ_{ab} e ω_{ab} são os operadores transverso e longitudinal para os vetores.

Os outros cinco operadores são:

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\theta_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\theta_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\theta_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}},$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}} = (\epsilon_{\mathsf{ace}}\omega_{\mathsf{bd}} + \epsilon_{\mathsf{ade}}\omega_{\mathsf{bc}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}} + \epsilon_{\mathsf{bce}}\omega_{\mathsf{ad}})\partial^{\mathsf{e}},$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}}\partial^{\mathsf{c}}, \tag{2.25}$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} = \eta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} + \eta_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{b}}$$

e

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}} = \mathsf{A}_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} + \mathsf{A}_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{b}}.$$

Lembramos que os operadores de Barnes-Rivers usuais obedecem a álgebra:

$$\mathsf{P}^{(i-a)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-b)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{ab}\mathsf{P}^{(j-b)}_{\mathsf{ab,cd}},$$

$$\mathsf{P}^{(i-ab)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-cd)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{bc}\mathsf{P}^{(j-a)}_{\mathsf{ab,cd}}, \tag{2.26}$$

$$\mathsf{P}^{(i-a)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-bc)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{ab}\mathsf{P}^{(j-ac)}_{\mathsf{ab,cd}},$$

$$\mathsf{P}^{(i-ab)}_{\mathsf{ab,kl}}\mathsf{P}^{(j-c)\ \mathsf{kl}}{}_{\mathsf{,cd}} = \delta^{ij}\delta^{bc}\mathsf{P}^{(j-ac)}_{\mathsf{ab,cd}}$$

e satisfazem à identidade tensorial,

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mathsf{ac}}\eta_{\mathsf{bd}} + \eta_{\mathsf{ad}}\eta_{\mathsf{bc}}\right). \tag{2.27}$$

O novo conjunto de operadores,$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}$, $\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}$, A_{ab}, e $\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}}$, geram um novo operador, $\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}}$, dado em (2.25). Estes cinco operadores têm sua propria algebra, que reproduzimos abaixo:

$$\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = -16\Box\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}},$$

$$\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = -4\Box\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}},$$

$$\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{S}^{(2a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(2)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}},$$

$$\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{R}^{(1a)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,ef}}\mathsf{P}^{(1m)\mathsf{ef}}{}_{\mathsf{,cd}} = \mathsf{R}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}, \tag{2.28}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{ae}}\mathsf{A}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{b}} = -\Box\theta_{\mathsf{ab}},$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{B}_{\mathsf{c,}}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box(\theta_{\mathsf{ac}} + 2\omega_{\mathsf{ac}}),$$

$$\mathsf{B}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{B}^{\mathsf{e}}{}_{\mathsf{,cd}} = 2\Box(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,ef}}\mathsf{D}_{\mathsf{c},}{}^{\mathsf{ef}} = 2\Box^2\theta_{\mathsf{ac}}$$

e

$$\mathsf{D}_{\mathsf{e,ab}}\mathsf{D}^{\mathsf{e}}{}_{,\mathsf{cd}} = 2\Box^2\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}}.$$

Assim, o operador de onda toma a forma:

$$M = \begin{pmatrix} yy_{\mathsf{ab,cd}} & yy_{\mathsf{ab,c}} & yh_{\mathsf{ab,cd}} \\ yy_{\mathsf{a,cd}} & yy_{\mathsf{a,c}} & yh_{\mathsf{a,cd}} \\ hy_{\mathsf{ab,cd}} & hy_{\mathsf{ab,c}} & hh_{\mathsf{ab,cd}} \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

onde

$$\begin{aligned} yy_{\mathsf{ab,cd}} &= (2\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + (2\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3\Box - 2\xi\Box)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - (2\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \\ &\quad -4\xi\Box\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\sqrt{2}\mathsf{a}_1(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \tfrac{\mathsf{a}_4}{2}(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}), \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$yy_{\mathsf{ab,c}} = \mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}},$$

$$yh_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$yy_{\mathsf{a,cd}} = -\mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}},$$

$$yy_{\mathsf{a,c}} = -(4\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3\Box + 4\xi\Box)\theta_{\mathsf{a,c}} - (4\mathsf{a}_1 + 32\mathsf{a}_2\Box + 12\mathsf{a}_3\Box)\omega_{\mathsf{a,c}} + 2\mathsf{a}_4\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \tag{2.31}$$

$$yh_{\mathsf{a,cd}} = -\frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}},$$

$$hy_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$hy_{\mathsf{ab,c}} = \frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}$$

e

$$hh_{\mathsf{ab,cd}} = -\lambda\Box\left(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2}\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})\right).$$

Com o objetivo de calcular o propagador ,

$$\langle 0|\, T[F(x)F(y)]\, |0\rangle = iM^{-1}\delta^{(3)}(x-y), \tag{2.32}$$

precisamos calcular o inverso do operador de onda, M^{-1}, mas aqui chegamos a um problema: o elemento de matriz $hh_{\mathsf{ab,cd}}$ não contém $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$, e não podemos achar a inversa deste termo fundamental (para calcular a inversa necesitamos fechar a relação dada na eq.(2.27), o que não acontece).

Vemos, assim, que uma teoria com operador de onda inversível, perde esta propiedade quando é decomposta em termos de um campo de calibre e as componentes da torção, i.e. quando não tomamos a torção como campo fundamental, senão trabalhamos com um campo de calibre asociado a uma transformação de Lorentz local que incorpora a informação da torção (na teoria de Einstein-Cartan $\omega_{\mathsf{abc}} = \gamma_{\mathsf{abc}} - K_{\mathsf{abc}}$, onde γ_{abc} é "puramente Riemanniana", sem torção, e K_{abc} é o termo de Contorsão). O termo de spin-2 sumido do campo de gauge gravitacional é incorporado na "parte Riemanniana" da conexão de spin.

2.4 Introduzindo os termos de torção

Com o fim de obter uma teoria de calibre pura para a gravitação planar, e assim entender o papel da torção, estudaremos a seguinte ação:

$$\mathcal{S} = \int d^3x\, e(\mathsf{a}_1\mathcal{R} + \mathsf{a}_2\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} + \mathsf{a}_3\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} + \mathsf{a}_4\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\beta}\mathcal{T}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\gamma} + \mathsf{a}_5\mathcal{L}_{CS}), \quad (2.33)$$

onde introduzimos explicitamente os termos de torção, com $\mathcal{L}_{CS}$ sendo o termo de Chern-Simons usual dado em eq. (2.16). a_1, a_2, a_3 e a_4 são coeficentes livres, enquanto que a_5 é o parámetro de Chern-Simons . Ver referência [53] para estes termos de torção específicos. De agora em diante, todos os resultados serão referidos a ação (2.33).

Tomaremos as equações, (2.14), (2.8) e (2.7), mas com as deomposições (2.19), (2.20) e (2.21) com a seguinte expansão de campo fraco:

$$e_{\alpha}{}^{\mathsf{a}} = \delta_{\alpha}{}^{\mathsf{a}} + \frac{k}{2}H_{\alpha}{}^{\mathsf{a}}\left(\Rightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + kh_{\alpha\beta}, \quad h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(H_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha})\right). \quad (2.34)$$

Com a nova decomposição,

$$H_{\mathsf{ab}} = h_{\mathsf{ab}} + \mathcal{H}_{\mathsf{ab}}\ ,\ h_{\mathsf{ab}} = H_{(\mathsf{ab})}\ \ e\ \ \mathcal{H}_{\mathsf{ab}} = H_{[\mathsf{ab}]} \quad (2.35)$$

e

$$\mathcal{H}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}}h^{\mathsf{c}} \Rightarrow h_{\mathsf{a}} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathsf{abc}}\mathcal{H}^{\mathsf{bc}}. \quad (2.36)$$

Podemos reescrever a ação (2.33) introduzindo os termos de fixação de calibre

$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \lambda F_{\mathsf{a}}F^{\mathsf{a}}\ ,\ F_{\mathsf{a}} = k\partial^{\mathsf{b}}\left(H_{\mathsf{ba}} - \frac{1}{2}\eta_{\mathsf{ba}}H_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{c}}\right), \quad (2.37)$$

na forma linearizada:

$$\mathcal{S}=\int d^3x\frac{1}{2}\Phi^T M\Phi \ , \ \Phi=\begin{pmatrix} h^{\mathsf{cd}} \\ h^{\mathsf{c}} \\ y^{\mathsf{cd}} \\ y^{\mathsf{c}} \end{pmatrix} . \tag{2.38}$$

Como anteriormente, expresamos o operador de onda, M, em termos do formalismo de operadores de projeção de spin estendido. Assim, devemos somar a nossa lista de operadores, dois novos operadores:

$$\theta_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} \qquad \text{and} \qquad \omega_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}}, \tag{2.39}$$

que junto com os anteriores fecham a algebra.

Assim o operador de onda toma a forma:

$$M=\begin{pmatrix} hh_{\mathsf{ab,cd}} & hh_{\mathsf{ab,c}} & hy_{\mathsf{ab,cd}} & hy_{\mathsf{ab,c}} \\ hh_{\mathsf{a,cd}} & hh_{\mathsf{a,c}} & hy_{\mathsf{a,cd}} & hy_{\mathsf{a,c}} \\ yh_{\mathsf{ab,cd}} & yh_{\mathsf{ab,c}} & yy_{\mathsf{ab,cd}} & yy_{\mathsf{ab,c}} \\ yh_{\mathsf{a,cd}} & yh_{\mathsf{a,c}} & yy_{\mathsf{a,cd}} & yy_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

onde

$$\begin{aligned} hh_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}+\frac{k^2}{4}\Box(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_4-4\lambda)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \\ &\quad +\frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-2\mathsf{a}_4-2\lambda)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}-(\frac{k^2}{2}\Box\lambda)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \\ &\quad -(\frac{\sqrt{2}}{2}k^2\Box\lambda)(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})-\frac{\mathsf{k}^2}{2}\mathsf{a}_5(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}+\mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}), \\ hh_{\mathsf{ab,c}} &= -(\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}}+\frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3-2\mathsf{a}_2-\mathsf{a}_4+4\lambda)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
hy_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{k}{2}(\Box \mathsf{a}_6 - 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{k}{2}(\Box \mathsf{a}_6 + 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&\quad -(k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k}{4}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}), \\
hy_{\mathsf{ab,c}} &= \frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}}, \\
hh_{\mathsf{a,cd}} &= (\frac{k^2}{2}\mathsf{a}_5)\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}} + \frac{k^2}{4}(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4 + 4\lambda)\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}}, \\
hh_{\mathsf{a,c}} &= \frac{k^2}{2}\Box(\mathsf{a}_3 - 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_4 - 4\lambda)\theta_{\mathsf{a,c}} - (k^2\Box)(2\mathsf{a}_2 + \mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}} - (k^2\mathsf{a}_5)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \\
hy_{\mathsf{a,cd}} &= -\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}, \\
hy_{\mathsf{a,c}} &= (2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \\
yh_{\mathsf{ab,cd}} &= \frac{k}{2}(\Box \mathsf{a}_6 - 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - (k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{k}{2}(\Box \mathsf{a}_6 + 2\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&\quad -(k\mathsf{a}_5)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{k}{4}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}), \\
yh_{\mathsf{ab,c}} &= \frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2)\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} - k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_3)(\theta_{\mathsf{ab}} + \omega_{\mathsf{ab}})\partial_{\mathsf{c}}, \\
yy_{\mathsf{ab,cd}} &= 2(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_3)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2(\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_2 - \mathsf{a}_3 - \Box\xi)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&\quad +2(6\mathsf{a}_2 + 5\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + 4(2\mathsf{a}_2 + \mathsf{a}_3 - \Box\xi)\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
&\quad +2\sqrt{2}(2\mathsf{a}_2 + 3\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) + (\frac{\mathsf{a}_6}{2})(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}), \\
yy_{\mathsf{ab,c}} &= \mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + 2\xi\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}, \\
yh_{\mathsf{a,cd}} &= -\frac{k}{2}(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}, \\
yh_{\mathsf{a,c}} &= (2k\mathsf{a}_5)\theta_{\mathsf{a,c}} + k(2\mathsf{a}_5 - \Box\mathsf{a}_6)\omega_{\mathsf{a,c}} + k(\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_2 - 2\mathsf{a}_4)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \\
yy_{\mathsf{a,cd}} &= -\mathsf{a}_6\mathsf{B}_{\mathsf{a,cd}} + 2\xi\mathsf{D}_{\mathsf{a,cd}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
yy_{\mathsf{a,c}} &= 4(2\mathsf{a}_2 + 2\mathsf{a}_4 - \mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3 - \Box\xi)\theta_{\mathsf{a,c}} + 4(2\mathsf{a}_2 + 2\mathsf{a}_4 - \mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3)\omega_{\mathsf{a,c}} \\
&\quad +(2\mathsf{a}_6)\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}.
\end{aligned}
$$

Assim com o nosso operador de onda definido a traves dos operdaores de spin e com ajuda da algebra de os mesmos, podemos proseguir a achar a inversa.

2.5 Propagadores e Modos de Excitação

Com o objetivo de calcular os propagadores, eq. (2.32), usaremos o procedimento simples, mas longo, em termos do qual decompomos a matriz M em quatro setores,

$$M = \begin{pmatrix} hh & hy \\ yh & yy \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Assim a matriz inversa M^{-1} pode ser escrita como:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} HH & HY \\ YH & YY \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

onde as sub-matrizes são dadas por:

$$\begin{aligned} HH &= [hh - hy(yy)^{-1}yh]^{-1}. \\ HY &= -(hh)^{-1}hyYY. \\ YH &= -(yy)^{-1}yhHH. \\ YY &= [yy - yh(hh)^{-1}hy]^{-1}. \end{aligned}$$

Uma vez calculados os propagadores, devermos chekar a unitariedade a nível de árvore da teoria. Para isto, devermos analizar os residuos da amplitude de transição corrente-corrente no espaço dos momenta, dado pelo propagador saturado depois de uma tranformação de Fourier. As fontes que saturam os propagadores podem ser expandidas em termos de uma base completa de operadores no espaço de momentos como segue:

$$
\begin{aligned}
Sources_{\mu\nu} &= \acute{c}_1 p_\mu p_\nu + \acute{c}_2 p_\mu q_\nu + \acute{c}_3 p_\mu \varepsilon_\nu + \acute{c}_4 q_\mu p_\nu + \acute{c}_5 q_\mu q_\nu \\
&\quad + \acute{c}_6 q_\mu \varepsilon_\nu + \acute{c}_7 \varepsilon_\mu p_\nu + \acute{c}_8 \varepsilon_\mu q_\nu + \acute{c}_9 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu,
\end{aligned}
$$

onde $p_\mu = (p_0, -\overrightarrow{p})$, $q_\mu = (p_0, \overrightarrow{p})$ e $\varepsilon_\mu = (0, -\overrightarrow{\varepsilon})$ são vetores linearmente independentes que satisfazem as condições:

$$
\begin{aligned}
p_\mu p^\mu &= q_\mu q^\mu = m^2. \\
p_\mu q^\mu &= p_0^2 + \overrightarrow{p}^2 \neq 0. \\
p_\mu \varepsilon^\mu &= q_\mu \varepsilon^\mu = 0. \\
\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu &= -1.
\end{aligned}
$$

estas condições e os requerimentos de simetría da teoria dividem as fontes, $S_{\mu\nu}$, em uma parte simétrica e uma outra antisimétrica:

$$
\begin{aligned}
S_{S\mu\nu} &= S_{(\mu\nu)} = c_1 p_\mu p_\nu + c_2(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) + c_3(p_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu p_\nu) \\
&\quad + c_4 q_\mu q_\nu + c_5(q_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu q_\nu) + c_6 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_{S\mu\nu} = S_{[\mu\nu]} &= d_1(p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu) + d_2(p_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu p_\nu) \\
&\quad + d_3(q_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu q_\nu),
\end{aligned}
$$

onde $c_1 = \acute{c_1}$, $c_2 = \frac{\acute{c_2}+\acute{c_4}}{2}$, $c_3 = \frac{\acute{c_3}+\acute{c_7}}{2}$, $c_4 = \acute{c_5}$, $c_5 = \frac{\acute{c_6}+\acute{c_8}}{2}$, $c_6 = \acute{c_9}$ $d_1 = \frac{\acute{c_2}-\acute{c_4}}{2}$, $d_2 = \frac{\acute{c_3}-\acute{c_7}}{2}$, and $d_3 = \frac{\acute{c_6}-\acute{c_8}}{2}$.

A amplitude de transição corrente-corrente é escrita como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \tau^* & \rho^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HH & HY \\ YH & YY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \rho \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\mathcal{A} &= \tau^* HH \tau + \tau^* HY \rho + \rho^* YH \tau + \rho^* YY \rho,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde τ é a fonte dos campos h e ρ é a fonte dos campos y. $\mathcal{A}$ pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \; & t^{\mathsf{ab}^*} HH_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{ab}^*} HH_{\mathsf{ab,c}} t^{\mathsf{c}} + t^{\mathsf{a}^*} HH_{\mathsf{a,cd}} t^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{a}^*} HH_{\mathsf{a,c}} t^{\mathsf{c}} \\
& + t^{\mathsf{ab}^*} HY_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{ab}^*} HY_{\mathsf{ab,c}} r^{\mathsf{c}} + t^{\mathsf{a}^*} HY_{\mathsf{a,cd}} r^{\mathsf{cd}} + t^{\mathsf{a}^*} HY_{\mathsf{a,c}} r^{\mathsf{c}} \\
& + r^{\mathsf{ab}^*} YH_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{ab}^*} YH_{\mathsf{ab,c}} t^{\mathsf{c}} + r^{\mathsf{a}^*} YH_{\mathsf{a,cd}} t^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{a}^*} YH_{\mathsf{a,c}} t^{\mathsf{c}} \\
& + r^{\mathsf{ab}^*} YY_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{ab}^*} YY_{\mathsf{ab,c}} r^{\mathsf{c}} + r^{\mathsf{a}^*} YY_{\mathsf{a,cd}} r^{\mathsf{cd}} + r^{\mathsf{a}^*} YY_{\mathsf{a,c}} r^{\mathsf{c}},
\end{aligned}$$

onde $t^{\mathsf{cd}} = \tau^{(\mathsf{cd})}$, $t^{\mathsf{c}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mathsf{cde}} T_{\mathsf{de}}$ with $T_{\mathsf{de}} = \tau_{[\mathsf{de}]}$ and $r^{\mathsf{cd}} = \rho^{(\mathsf{cd})}$, $r^{\mathsf{c}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mathsf{cde}} R_{\mathsf{de}}$ com $R_{\mathsf{de}} = \rho_{[\mathsf{de}]}$.

Devido aos vínculos das fontes, $p_{\mathsf{c}} t^{\mathsf{cd}} = 0$, $p_{\mathsf{c}} T^{\mathsf{cd}} = 0$, $p_{\mathsf{c}} r^{\mathsf{cd}} = 0$ e $p_{\mathsf{c}} R^{\mathsf{cd}} = 0$, so os projetores $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$, $\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$, $\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}}$, $\theta_{\mathsf{ab}} \partial_{\mathsf{c}}$and $\omega_{\mathsf{a,c}}$,dão uma contribução não trivial para a amplitude. Para um pólo sem massa, ou para um pólo massivo num sitema em repouso (onde $p_\mu = (m, 0)$, $q_\mu = (m, 0)$ and $\varepsilon_\mu = (0, -\overrightarrow{\varepsilon}))$, so os projetores $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ e $\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$ sobrevivem e contribuem.

Com as restrições acima, a amplitude lê-se:

$$\mathcal{A} = < H2H2_{(2)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + < H2H2_{(0s)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}}$$

$$
\begin{aligned}
+ \qquad & < H2Y2_{(2)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + < H2Y2_{(0s)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} \\
+ \qquad & < Y2H2_{(2)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + < Y2H2_{(0s)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} \\
+ \qquad & < Y2Y2_{(2)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + < Y2Y2_{(0s)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}},
\end{aligned}
$$

onde $< H2H2_{(2)} >$ é o campo gravitacional simétrico de rank-2 ($H2$ in $H2H2_{(2)}$) associado ao operador $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ ($_{(2)}$ in $H2H2_{(2)}$). Os outros coeficentes tem significado análogo. Escrevendo explicitamente as fontes, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \; = \; & \frac{1}{2}(< H2H2_{(2)} > + < H2H2_{(0s)} >) \left|c_{6t}\right|^2 \\
& + \frac{1}{2}(< H2Y2_{(2)} > + < H2Y2_{(0s)} >) c^*_{6t} c_{6r} \\
& + \frac{1}{2}(< Y2H2_{(2)} > + < Y2H2_{(0s)} >) c^*_{6r} c_{6t} \\
& + \frac{1}{2}(< Y2Y2_{(2)} > + < Y2Y2_{(0s)} >) \left|c_{6r}\right|^2
\end{aligned}
$$

onde t e r no c significa a fonte associada a um termo em particular.

Devemos, substituir os resultados obtidos pelo procedimento descrito em (2.43) em (2.44). Antes de colocar explicitamente os resultados devemos fazer alguns comentários:

1. Com tudo o conjunto de parâmetros da ação, a_1, a_2, a_3, a_4 and a_5 mais λ e ξ, diferente de zero (usando computação algébrica) não é possivel chegar num resultado, devido à extensão das expressões.

2. Considerando o termo de Chern-Simons, a_5,obtemos a seguinte expressão no denominador do propagador:

   - Com $\mathsf{a}_1 = 0$, temos termos proporcionais a p^{22}.

- A potência mais baixa, p^6, aparece quando $\mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_2 = \mathsf{a}_4 = \xi = 0$, somente a_3 e a_5 são consideradas.
- Com $\mathsf{a}_3 = 0$, não temos um caso inversível.

3. Sem o termo de Chern-Simons, $\mathsf{a}_5 = 0$, obtemos, em todos os casos inversíveis, uma potência p^2. Podemos justificar isto assinalando que Chern-Simons contribui apresenta um termo quadratico na conexão de spin com uma derivada spaço-tempo, mentras que o escalar de curvatura apresenta um termo que mistura H com ω. Zerando a_5 , desaparecem os termos $\omega - \omega$ com derivada, reduzindo assim as potencias de momentum.

Consideremos em (2.44) so os casos com $\mathsf{a}_5 = 0$.

O cáso inversível mais simples acontece só considerando $\mathsf{a}_3 \neq 0$ na ação. Neste caso, o propagador lê-se:

$$
\begin{aligned}
H2H2_{(2)} &= \frac{2}{3k^2p^2\mathsf{a}_3}i. \\
H2H2_{(0s)} &= -\frac{2}{k^2p^2\mathsf{a}_3}i. \\
H2Y2_{(2)} &= H2Y2_{(0s)} = Y2H2_{(2)} = Y2H2_{(0s)} = 0. \\
Y2Y2_{(2)} &= \frac{1}{6\mathsf{a}_3}i. \\
Y2Y2_{(0s)} &= 0
\end{aligned}
$$

e a amplitude saturada é dada por,

$$
\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{3k^2p^2\mathsf{a}_3} \left| c_6 \right|^2_{tt} + \frac{1}{12\mathsf{a}_3} \left| c_6 \right|^2_{rr} \right) i. \tag{2.44}
$$

Observemos nesta expressão que o pólo não massivo vem de o block h e tem contribuções dos setores de spin-0 e spin-2.

Logo, calculando a parte imaginaria do residuo da amplitude no pólo não-massivo, obtemos:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to 0}[p^2\mathcal{A}]\right) = -\frac{2\,|c_6|^2_{tt}}{3k^2\mathsf{a}_3}. \tag{2.45}$$

Da imposição de se ter um residuo positivo definido no pólo, devermos ter $\mathsf{a}_3 < 0$.

Consideremos agora a adição do termo de escalar de curvatura a_1; temos:

$$\begin{aligned}
H2H2_{(2)} &= \frac{2(\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)}{k^2p^2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)}i \\
H2H2_{(0s)} &= -\frac{2(\mathsf{a}_3 + \mathsf{a}_1)}{k^2p^2(\mathsf{a}_3^2 - \mathsf{a}_1^2 + \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)}i \\
H2Y2_{(2)} &= H2Y2_{(0s)} = Y2H2_{(2)} = Y2H2_{(0s)} = 0 \\
Y2Y2_{(2)} &= \frac{\mathsf{a}_3}{2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)}i \\
Y2Y2_{(0s)} &= 0
\end{aligned}$$

e a amplitude assume a forma:

$$\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{k^2p^2} \times \frac{\mathsf{a}_3^3}{3\mathsf{a}_3^4 - 5\mathsf{a}_3^2\mathsf{a}_1^2 + 4\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1^3 - \mathsf{a}_1^4}\,|c_6|^2_{tt} + \frac{\mathsf{a}_3}{2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)}\,|c_6|^2_{rr}\right) i. \tag{2.46}$$

Podemos ver que a estrutura da amplitude não muda, com o pólo tendo contribuções dos mesmos setores de spin. As relações entre os parâmetros são:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to 0}[p^2\mathcal{A}]\right) = -\frac{2}{k^2}\frac{\mathsf{a}_3^3}{3\mathsf{a}_3^4 - 5\mathsf{a}_3^2\mathsf{a}_1^2 + 4\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1^3 - \mathsf{a}_1^4}\,|c_6|^2_{tt}. \tag{2.47}$$

O denominador em (2.47) pode ser escrito como:

$$(\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_1^2)(3\mathsf{a}_3^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_1^2). \tag{2.48}$$

O binômio $3\mathsf{a}_3^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_1^2$ tem raízes complexas e é maior que zero.

O requerimento de ter o residuo positivo definido nos pólos implica (com $\mathsf{a}_3 < 0$) $\mathsf{a}_1^2 - \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3^2 < 0$. E o termo escalar deve obedecer $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 \approx 1.618\mathsf{a}_3 < \mathsf{a}_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 \approx -0.618\mathsf{a}_3$.

O caso onde todos os parâmetros (com excepção de a_5) são diferentes de zero geram somente novas correções algébricas na amplitude, sem mudar sua estrutura. As relacões entre os parâmetros são muito complicadas, devido ao grande número de parâmetros envolvidos, o que nos obriga a considerar diferentes hipóteses.

2.6 Comentarios

Ao longo dos cálculos feitos neste capítulo, a ação mais completa (2.33) mais o termos $\mathsf{a}_6\epsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\mathsf{a}}e_\lambda{}^{\mathsf{b}}\eta_{\mathsf{ab}} = \mathsf{a}_6\epsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\alpha}e_\alpha{}^{\mathsf{a}}e_\lambda{}^{\mathsf{b}}\eta_{\mathsf{ab}} = \mathsf{a}_6\epsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}$ apresenta um problema: os propagadores não podem ser obtidos na sua generalidade i.e. com todos os seis coeficentes diferentes de cero. Não entanto, encontramos que podremos ter suceso se zeramos alguns dos coeficentes; com a dificuldade que obten-se potencias muito altas de momenta. Esta situação amelhora quando prescindimos do termo de Chern-Simons, apresentando pólos com potencia de momento ao quadrado. No caso dos coeficentes dos termos que contém a torção, (a_2 and a_3), vemos que o coeficente, (a_3), é fundamental enquanto o outro não. Com isto vemos que os pólos físicos são não-massivos.

A condição de unitariedade sugere que $\mathsf{a}_3 < 0$ isto implica que el parâmetro correspondente ao termo de escalar de curvatura $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 < \mathsf{a}_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3$.

Capítulo 3

Modelo de Yang-Mills para a gravitação

A teoria de cordas propõe que a gravitação deva ser vista como uma teoria efetiva obtida a partir das cordas. Esta proposta nos leva a repensar o velho algoritmo de quantizar as teorias clássicas, onde o papel fundamental, no caso da gravitação, vem dado pelo Lagrangeano de Einstein-Hilbert, o qual carrega propiedades quânticas indesejadas, tal como a não-renormalizabilidade devido a que a constante de acoplamenteo possui dimensão positiva de massa. Por outro lado, se queremos dar o caráter de interação fundamental à gravitação, esta deverá ser descrita como uma teoria de Yang-Mills. Assim, motivados por este fatos, propomos a construção de uma teoria de Yang-Mills para o grupo $SO(d)$, partindo de uma ação renormalizavel onde a ação de Einstein-Hilbert será entendida como um modelo efetivo gerada a partir da quebra da simetria de cor que carrega toda teoria de Yang-Mills.

3.1 Generalidades

Consideremos o fibrado principal

$$\mathcal{P} \cong \{SO(d), \mathbb{R}^d; \mathcal{A}\} \tag{3.1}$$

onde o grupo das matrizes ortogonais, $SO(d)$, é o grupo de estrutura do fibrado. O número de geradores λ^a deste grupo é $D = d(d-1)/2$ onde $a = 1, ..., D$, com algebra de Lie:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f^{abc}\lambda^c \tag{3.2}$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo. Assim, os elementos do grupo são dados por $u = e^{\omega_a \lambda_a}$. O espaço total do fibrado principal é escolhido como sendo $\mathbb{R}^d$ que guarda uma simetria $O(d)$. $\mathcal{A}$ é o espaço das conexões que tomão valores na algebra do grupo de estrutura.

$$A_i = A_i^a \lambda^a. \tag{3.3}$$

Os homomorfismos do fibrado principal são caraterizados pela transformação de calibre

$$A_i \longrightarrow A_i + u^\dagger D_i u, \tag{3.4}$$

onde a derivada covariante é:

$$D_i \cdot = \partial_i \cdot + [A_i, \cdot]. \tag{3.5}$$

Variações infinitesimais de calibre vem dadas por

$$\delta A_i = D_i \omega. \tag{3.6}$$

A ação invariante de calibre é

$$S_{YM} = \frac{1}{4\kappa^2}\mathrm{Tr}\int d^dxF^{ij}F_{ij}, \tag{3.7}$$

onde o tensor intensidade de campo vem dado por

$$F_{ij} = F^a_{ij}\lambda^a = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j], \tag{3.8}$$

e κ é a constante de acoplamento.

Para quantizar a teoria, é preciso fixar o calibre; por simplicidade, escolhemos o calibre de Landau $\partial^i A_i = 0$. Com este propósito, somamos à ação localmente invariante o termo de fixação de calibre

$$S = S_{\mathrm{YM}} + S_{\mathrm{gf}} \tag{3.9}$$

onde

$$S_{\mathrm{gf}} = \mathrm{Tr}\int d^d(b\partial^i A_i + \bar{c}\partial^i D_i c) \tag{3.10}$$

os campos $c = c^a\lambda^a$ e $\bar{c} = \bar{c}^a\lambda^a$ são os ghost e anti-ghost de Faddeev-Popov respectivamente, enquanto que $b = b^a\lambda^a$ são os campos de Lautrup-Nakanishi que fazem o papel de multiplicadores de Lagrange correspondentes à condição de Landau. Em $d = 4$, esta ação é renormalizavel, o que significa que é consistente no nivel quântico.

Depois da fixação de calibre, uma simetria não-Abeliana $SO(d)$ global sobrevive, a chamada invariância de cor. Esta invariância é caracterizada pelo aspecto não-observacional dos índices de grupo. Em termos das identidades de Ward, a invariância de cor pode ser descrita por:

$$\int d^dx\left(\left[A_i, \frac{\delta S}{\delta A_i}\right] + \left[c, \frac{\delta S}{\delta c}\right] + \left[\bar{c}, \frac{\delta S}{\delta \bar{c}}\right] + \left[b, \frac{\delta S}{\delta b}\right]\right) = 0 \tag{3.11}$$

3.2 Representação espaço-tempo

A menos que se diga o contrário, não consideraremos o termo de fixação de calibre, no restante desta tese. Assim, nossa ação é invariante de calibre, e a invariância de cor é descrita por

$$\int d^dx \left[A_i, \frac{\delta S_{\mathrm{YM}}}{\delta A_i}\right] = 0 \tag{3.12}$$

Primeiramente, exploremos o fato de que o grupo $SO(d)$, no espaço Euclideano, pode tomar emprestada a estrutura de espaço-tempo para fixar a representação de grupo. Para isto, observemos que a dimensão do espaço total $\mathbb{R}^d$ coincide com o casimir d do grupo $SO(d)$, o que significa que os geradores podem ser epresentados como o conjunto de $(d\times d)$ matrizes. Ademais, a dimensão, D, do grupo, coincide com o número de elementos independentes de uma matriz antisimétrica $(d \times d)$. Estas propiedades nos permitem uma unica representação do grupo de calibre, onde os geradores estão idexados por indices espaço-tempo

$$\begin{aligned} \lambda^a &\longmapsto \lambda^{ij}, \\ f^{abc} &\longmapsto f^{ijklmn} \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda^{ij} &= -\lambda^{ji} \\ f^{ijklmn} &= -\frac{1}{2}\left[\left(\delta^{il}\delta^{mj} - \delta^{jl}\delta^{mi}\right)\delta^{kn} + \left(\delta^{jk}\delta^{im} - \delta^{ik}\delta^{mj}\right)\delta^{ln}\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

Assim

$$\begin{aligned} A_i^a\lambda^a &= A_{ij}{}^k\lambda^j{}_k \\ F_{ij}^a &= F_{ijk}{}^l\lambda^k{}_l \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nesta representação, a ação (3.7) lé-se

$$S_{YM} = \frac{1}{4\kappa^2} \int d^d x F_{ijk}{}^l F^{ijk}{}_l, \tag{3.16}$$

onde

$$F_{ijk}{}^l = \partial_i A_{jk}{}^l - \partial_j A_{ik}{}^l + A_{im}{}^l A_{jk}{}^m - A_{jm}{}^l A_{ik}{}^m \tag{3.17}$$

Assim, estamos tratando com uma teoria de calibre num espaço-tempo Euclideano com uma representação onde os indice de cor estão representados por indices espaço-tempo. Como a invariancia de cor desempenha um papel fundamental na nossa teoria, apresentamos as identidades de Ward na representação espaço-tempo:

$$\int d^d x \left(A_{ki}{}^n \delta_{mj} - A_{jk}{}^n \delta_{mi} \right) \frac{\delta S_{\mathrm{YM}}}{\delta A_{km}{}^n} \tag{3.18}$$

3.3 Pseudo-vielbein e o espaço-tempo curvo

Olhando a expressão (3.17) para a intensidade de campo, podemos reconhecer uma grande similaridade com o tensor de Riemman-Cristoffel de um espaço-tempo curvo. Contudo, podermos pensar em absorver o campo de calibre como uma estrutura do espaço-tempo e terminando numa teoria geométrica efetiva, equivalente a uma teoria de calibre. De fato, podemos realizar o mapeamento de o espaço Euclideano no espaço-tempo curvo,

$$\{x_i\} \longmapsto \{x_\mu, x^\mu\} \tag{3.19}$$

introduzindo as pseudo-vielbein e suas inversas:

$$\begin{aligned} e^i_\mu &= \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu} \\ \bar{e}^\mu_i &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^i &= e^i_\mu \mathrm{d}x^\mu, \\ \mathrm{d}x^\mu &= \bar{e}^\mu_i \mathrm{d}x^i. \end{aligned} \tag{3.21}$$

O nome *pseudo-vielbein* é usado devido ao fato que e não são as vielbein do formalismo de Einstein-Cartan. A diferença radical reside no fato de que estas não definem um sistema de referência que viaja tangencialmente no espaço curvo. Aqui as p-vielbein é uma identificação ponto a ponto que não possuem uma relação geometrica direta.

O requerimento da preservação da métrica nos dois espaços implica na existencia de um tensor métrico $\{g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}\}$, de fato as seguentes relações se cumprem:

$$\begin{aligned} e^i_\mu e_{i\nu} &= g_{\mu\nu}, \\ \bar{e}^\mu_i \bar{e}^j_\mu &= \delta^j_i, \\ e^\mu_i \bar{e}^j_\mu &= \delta^j_i, \\ e^\mu_i \bar{e}^i_\nu &= \delta^\mu_\nu, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde as duas primeras relações tem a ver com a invariancia da métrica dos dois espaços. Neste sentido a p-vielbein é equivalente a vielbein usual, o que justifica o nome. Não entanto, e, é essencialmente um mapeamento.

Assim, o mapeamento para a derivada ordinária e o campo de calibre fica dado como segue:

$$\begin{aligned} \partial_i &= \bar{e}^\mu_i \partial_\mu, \\ {A_{ij}}^k &= \bar{e}^\mu_i \bar{e}^\nu_j e^k_\alpha {\Gamma_{\mu\nu}}^\alpha - \bar{e}^\mu_i e^k_\nu \partial_\mu \bar{e}^\nu_j. \end{aligned} \tag{3.23}$$

A quantidade Γ é identificada como a conexão do espaço curvo.

Agora, retornemos às propiedades geométricas das p-bein. No formalismo de EC, as vielbein conectam o espaço curvo com o espaço tangente. Esta associação implica que no espaço plano as derivadas parciais não-commutam, enquanto que no espaço curvo comutam. No nosso formalismo o espaço plano original, não é o espaço tangente do espaço curvo. estes espaços são essencialmente independentes, modulo o mapeamento através de e_i^μ. Assim a derivada parcial commuta no espaço Euclideano assim como no espaço curvo,

$$\begin{aligned} [\partial_i, \partial_j] &= 0, \\ [\partial_\mu, \partial_\nu] &= 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Estas relações de conmutação implicam que os coeficientes de não-holonomicidade são nulos para ambos espaços. Consequentemente as p-vielbein exatamente como uma matriz de tranformação de coordenadas.

3.4 Ação para o espaço tempo curvo

O problema a encarar neste ponto é o de gerar uma ação escalar no espaço curvo, o qual significa que F no espaço curvo deve ser um tensor. substituindo (3.23) em (3.17) e usando as relações (3.24), encontramos:

$$F_{ijk}{}^{l} = \bar{e}_i^\mu \bar{e}_j^\nu \bar{e}_k^\alpha e_\beta^l R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}, \tag{3.25}$$

onde $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ é um tensor de rank cuatro da forma:

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}{}^{\beta} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\beta} + \Gamma_{\mu\gamma}{}^{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}{}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}{}^{\beta}\Gamma_{\mu\alpha}{}^{\gamma}, \tag{3.26}$$

identificado como o tensor de Riemann-Christoffel. Na ação (3.16), esta transformação resulta em:

$$S^e_{\mathrm{YM}} = \frac{1}{4k^2}\int d^dxeR_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}R^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta}, \tag{3.27}$$

onde $e = \det e^i_\mu = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ advindo da transformação (3.21). A ação (3.27) apresenta invariancia de cor baixo o grupo $SO(d)$ caraterizada pela siguente identidade funcional:

$$\int d^dx(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha}\delta_{\beta\gamma} - \Gamma_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\delta_{\beta\nu})\frac{\delta S_{\mathrm{YM}}}{\delta\Gamma_{\mu\beta}{}^{\alpha}} \tag{3.28}$$

Além disso, é claro que a ação (3.27) apresenta uma simetria $GL(d,\mathbb{R})$, não no setor de calibre mas no espaço-tempo curvo. Isto significa que começamos com uma teoria de calibre renormalizável, devido à possibilidade da representação espaço-tempo, a teoria clássica é mapeada num espaço curvo com conexão linear. O campo de calibre torna-se a conexão linear e um tensor métrico efetivo surge das p-vielbein.

3.5 Equações de campo

A ação (3.27) descreve a dinâmica do espaço-tempo curvo, sendo Γ o campo fundamental. A forma explícita do Γ, que da conta da geometría que estamos tratando, é desconhecida. Assim, a nivel clássico, as equações de campo para a conexão são:

$$-\mathcal{D}_\mu R^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} - 2\left[\frac{d}{2}Q_\mu + Q_{\mu\kappa}{}^{\kappa}\right]R^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} + T_{\mu\kappa}{}^{\nu}R^{\mu\kappa\alpha}{}_{\beta} = 0 \tag{3.29}$$

onde

$$Q_\mu = \frac{1}{d}g^{\alpha\beta}\mathcal{D}_\mu g_{\alpha\beta}, \tag{3.30}$$

é o convector de Weyl, e

$$T_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\alpha}\right) \tag{3.31}$$

é o tensor de Torção. A derivada covariante $\mathcal{D}$ é a derivada covariante usual de um espaço tempo curvo geral com conexão linear Γ, que é diferente da derivada covariante (3.5).

Evidentemente a p-vielbein constitui um campo e terá sua propia equação de campo, não entanto é importante levar em conta que o campo fundamental é a conexão a qual tem propiedades quânticas bem definidas. A p-vielbein é um campo clássico. A equação clássica para a conexão é o limite clásico usual das principais contribuções da integral de caminho. Por outro lado as equações classica para as vielbein são interpretadas como o principio mínimo relacionado a energia de estabilidade do vacuo. É claro que existem muitas soluções para o e. Porem, atravez das equações de campo, escolhemos a p-vielbein que mantem a energia do vacuo estavel. Assim variando a ação respeito do tensor métrico (ou respeito as vielbeins), obtemos

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^{\sigma\rho\alpha\beta}R_{\sigma\rho\alpha\beta} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma} - R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\mu}R^{\alpha\beta\gamma\nu} = 0. \tag{3.32}$$

Contraindo esta ultima equação com $g_{\mu\nu}$ encontramos

$$\frac{(d-4)}{2}R^{\sigma\rho\alpha\beta}R_{\sigma\rho\alpha\beta} = 0 \tag{3.33}$$

Chamemos a atenção que a geometria envolivida vem determinada pelas equações (3.29) e (3.32). A solução de estas equações daram conta das propiedades geométricas do espaço-tempo curvo. *O espaço tempo curvo é simplesmente um espaço com conexão linear*, o qual generaliza muitas geometrias como por exemplo a geometria de Riemann e a geometria de Einstein-Cartan. Desde este ponto de vista estamos tratando com uma geometria do tipo affim no formalismo de Palatini. A diferença e que a ação (3.27) não descreve a gravidade. Na siguente seção discutiremos a posibilidade de que este formalismo descreva gravitação.

Obsevese que para $d \neq 4$ em (3.33) obtem-se $R^{\sigma\rho\alpha\beta} = 0$, que é tambem solução das equações (3.29) e (3.32). Em outras palavras o caso $d \neq 4$ é trivial no caso de que materia não seja considerada.

Para o caso $d = 4$ a equação (3.33) é satisfeita para qualquer curvatura não nula. Neste caso soluções não trivias de (3.29) são esperadas e espâço-tempos curvos se aparecem. Este fenômeno ocurre devido ao carater não linear da ação (3.27). Físicamente este caráter está asociado a auto-interação de Γ.

3.6 Discussão intermediaria

Desejamos relacionar a teoria descrita acima com a gravidade atraves do siguente ponto de vista:

Gravedade quântica seria descrita pela ação (3.7) no espaço-tempo Euclideano, que é unitaria e renormalizavel. Com esta hipotese o campo de calibre (3.3)é interpretado como o graviton. Assim, a energias muito altas a gravedade sería simplesmente uma teoria de calibre quantica renormalizavel no espaço-tempo Euclideano, onde um campo de calibre de spin-1 desempenha o papel fundamental do graviton.

Por outro lado, nas baixas energias, a teoria pode ser descrita por um espaço-tempo deformado onde o campo de calibre pode ser visto como uma *conexão linear. Neste regime um tensor métrico efetivo surge devido a presença das p-vielbein. Assim, a ação (3.27) pode ser entendida como um tipo da teoria efetiva da gravedade. Neste sentido, gravedade clásica nao é mais uma teoria fundamental. A deformação do espaço-tempo acontece devido aos efeitos quanticos da teoria de calibre assim tambem surge o principio de covariancia geral.*

Observemos que esta forma de tratar a gravedade é esencialmente diferente ao formalismo de Einstein-Cartan. No formalismo EC existe uma assumption inicial da existencia de um espaço curvo como espaço fundamental. O espaço tangente plano é usado para definir a conexão de spin que permite a introdução de campos fermiônicos com ajuda das vielbein. Nao entanto, o formalismo falha na renormalizabilidade desde que o termo de EH é tomado como ação fundamental para a gravitação. Na nossa prescripção a teoria fundamental é uma teoria quântica de campos de calibre euclidea de spin-1 a qual, em certo limite, é equivalente a um spaço-tempo curvo dinâmico onde não se faz referença ao espaço tangente nem a conexão de spin. Logo, o espaço curvo é consequencia direta da dinâmica da teoria de calibre e não o contrario. Alem do mais, o espaço plano original não é o espaço tangente ao espaço curvo, como é evidente de (3.24).

Esta ideia nos apresenta tres problemas a ser encarados. O primeiro é: onde está o termo de EH $\propto R \equiv R^{\mu\nu}{}_{\nu\mu}$ que asegura a a relação de uma teoria com a gravitação?. É facil ver que esta questão toca diretamente na simetria de cor da ação (3.27). De fato o termo de EH requer a contração de indices de grupo com indices de espaço-tempo, o qual quebra invariância de cor.

O segundo ponto concerne ao spin das excitações físicas. Ao nivel quântico as excitações física carregan spin-1, como qualquer teoria com conexào vetorial. Curiosamente na representação espaço-tempo, excitações de spin-2 tambem se apresentam, devido a edintificação dos indices de grupo com os indices espaço-tempo. nao entanto, devido a simetria de cor, estas são excitações não físicas, as quais nunca seriam observadas. Assim a questão das excitações de spin-2 físicas persiste: A invariância de cor prohibiría a existecia de exitaciones de spin-2 no setor físico da teoria?

Finalmente, a equivalencia entre as ações (3.7) e (3.27), por agora, devido a invariancia de cor, parece ser somente um ponto de vista, i.e., é so uma outra forma de olhear para a natureza. Isto acontece porque a invariancia de cor prohibe o carater observacional dos indices de cor. Por exemplo, em $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ os dois últimos indices esão relacionado a invariância de cor. Logo, se desejamos medir, diretamente, a curvatura do espaço-tempo, esto nunca sería possivel, desde que os dois ultimos índices são não-observavel. Assim, a terceira questão sería: Qual é o efeito físico que empurra a teoria na ação(3.27),caraterizando o regime de baixas energias de (3.7) em termos de um espaço tempo curvo observavel?

Todas estas questões estão fortemente relacionadas a invariância de simetria de cor na ação (3.27). Assim, um mecanismo de quebra de cor parece ser necesario se queremos descrever gravitação com este programa. Com este propósito, na seguente seção, proveermos um esquema de um possivel mecanismo de quebra da simetria de cor. Mostraremos que este mecanismo pode gerara as excitações de spin-2 físicas assim como o termo de EH. Ademais, o mesmo mecanismo dictará o vacuo da teoria, permitendo a motivação física para os mapeios (3.21) e (3.23).

Gostaríamos de chamar atenção para o fato de a validade de nossos resultados residirem apenas em $2 \leq d \leq 4$, como é requerido pela condição de renormalizabilidade da teoria.

3.7 Quebra da simetria de cor e gravedade

Para començar esta seção esqueceremos por enquanto a teoria dinámica do espaço-tempo equivalente e voltemos para a teoria euclidea(3.1).

Consideremos, novamente, a ação (3.16). Suponhamos a existencia de um background field o qual gera uma intesidade de campo dada por

$$F_{ijk}{}^{l}(\Upsilon) = m^2 \left(\delta_i^l \delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_j^l\right) \tag{3.34}$$

onde m tem dimensão de massa. É evidente que a intensidade de campo renormaliza de acordo com a renormalização do campo de calibre e da constante de acoplamento. Assim uma intensidade de campo para um campo de background requerirá que m renormalize não trivialmente de acordo a a renormalização do campo de calibre e da constante de acoplamento. De fato, de acordo com ([28]), o fator de renormalização de m^2 não é independente e está dado por:

$$Z_{m^2} = Z_A Z_\kappa^2 \tag{3.35}$$

A condição (3.34) implica que Υ é solução das equações clássicas de campo se requerirmos a siguente condição:

$$\Upsilon_i{}^{li}\delta_{jk} - \Upsilon_{ik}{}^{i}\delta^l_j + \Upsilon^l{}_{kj} - \Upsilon_k{}^l{}_j = 0 \tag{3.36}$$

Não é dificil ver que tal equação (3.34) sugere que Υ é uma configuração singular. Para isto, escrivimos Υ como um campo de calibre puro que é so um equivalente a configuração de vacuo $\Upsilon' = 0$,

$$\Upsilon_{ik}{}^l = \partial_i \theta^l_k \tag{3.37}$$

Logo, considerando a aproximação linear da equação (3.34), encontramos

$$(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\theta^l_k = m^2\left(\delta^l_i\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta^l_j\right) \tag{3.38}$$

Esta equação estabelece a natureza de Υ desde que θ é claramente singular.

De (3.34) vemos que Υ quebra explicitamente a invariância de cor desde que este mistura os indices de cor e -os de espaço-tempo. Como consequencia este tornará os indices de cor em indices de espaço-tempo observaveis. Por outro lado, podemos debatir sobre as consequancias físicas do background no sentido que o tensor intensidade de campo, na forma (3.34), é uma solução exclusiva da representação espaço-tempo. Quer dizer que este efeito pode ser descrito exclusivamente na representação spaço-tempo. Para responder esta questão, podermos olhear para a corrente de Noether para a simetría de cor global,

$$j_{pij}(A) = \frac{\delta S_{\mathrm{YM}}}{\delta\partial_p A_{km}{}^n}\delta_{(ij)}A_{km}{}^n \tag{3.39}$$

onde de (3.18)

$$\delta_{(ij)}A_{km}{}^n = \delta_{mj}A_{ki}{}^n - \delta_{mi}A_{kj}{}^n \tag{3.40}$$

Assim

$$j_{pij}(A) = A_{ki}{}^{n} F_{pkj}{}^{n} - A_{kj}{}^{n} F_{pki}{}^{n} \tag{3.41}$$

Para o background temos

$$j_{pij}(\Upsilon) = m^2 \left(\Upsilon_{ki}{}^{k} \delta_{jp} - \Upsilon_{kj}{}^{k} \delta_{ip} + \Upsilon_{ijp} - \Upsilon_{jip} \right). \tag{3.42}$$

Usando a condição (3.36)

$$j_{pij}(\Upsilon) = 0 \tag{3.43}$$

Assim a configuração de background descansa no setor não físico da teoria. Esto significa que os estados de Goldstone, associados a quebra da simetría de cor, devem desacoplar do espetro físico da teoria.

Obviamente, considerando o termo de fixação de calibre, (1.6), nossa conclussão permanece igual desde que a diferencia é so um termo de BRST exato

$$j_{p}{}^{ij}(\Upsilon) = s\left[\mathcal{F}(\Upsilon, A, c, \bar{c}, b)\right] \tag{3.44}$$

onde $\mathcal{F}$ é um funcional dos campos e do background. Em (3.44) a variação BRST do background é definida por

$$s\Upsilon^{a}_{k} = f^{abc} \Upsilon^{b}_{k} c^{c}, \tag{3.45}$$

ou na representação espaço-tempo

$$s\Upsilon_{ki}{}^{j} = \Upsilon_{ki}{}^{m} c^{j}{}_{m} - \Upsilon_{km}{}^{j} c^{m}_{i} \tag{3.46}$$

Para os outros campos as transformações BRST estão dadas em [28]

3.8 A ação efetiva para o background

Agora, escrivimos os campos de calibre como perturbações entorno do background

$$A_{ij}{}^{k} \longmapsto \Upsilon_{ij}{}^{k} + A_{ij}{}^{k} \tag{3.47}$$

Assim

$$F_{ijk}{}^{l}(A) \mapsto F_{ijk}{}^{l}(A) + m^2\left(\delta_{ik}\delta_j^l - \delta_i^l\delta_{jk}\right) + \Upsilon_{i\ k}^{\ m}A_{jm}{}^{l} - \Upsilon_{im}{}^{l}A_{j\ k}^{\ m} - \Upsilon_{j\ k}^{\ m}A_{im}{}^{l} + \Upsilon_{jm}{}^{l}A_{i\ k}^{\ m}. \tag{3.48}$$

Para evitar termos dependentes do background em (3.48) y, consequentemente, na ação resultante escrevemos Υ como

$$\Upsilon_{ij}{}^{k} = \mathcal{F}_{ij}{}^{k} - D_{ijm}{}^{kl}h_l^m, \tag{3.49}$$

de forma tal que Υ é fixado para manter a relação (3.34) porem $\mathcal{F}$ e h são arbitrarios e a derivada covariante é tomada respecto ao background, $D = D(\Upsilon)$. Assim, podemos nos livrar dos termos dependentes de Υ em (3.48), tomando o limite suave das funções arbitrárias $\mathcal{F} \leftrightarrow D.h$ enquanto que $F(\Upsilon)$ permanece fixo e Υ pequeno. Assim, tomamos o limite quando $\Upsilon \to 0$ mantendo o carater singular de Υ. Este trick poderia ser interpretado como segue: Um backgronud fixo quebra a invariância de calibre do método de campos de background. No entanto, com o objetivo de controlar esta quebra mantendo alguma liberdade de calibre no background, os campos $\mathcal{F}$ e h são introduzidos em (3.49). Como consequência disto, as funções $\mathcal{F}$ e h permitem que Υ varíe atraves dos campos clásicos gerados por (3.34). Logo, fazendo Υ tão pequeno como seja possivel, a expressão (3.48) lê-se

$$F_{ijk}{}^{l}(A) \mapsto F_{ijk}{}^{l}(A) + m^2\left(\delta_{ik}\delta_j^l - \delta_i^l\delta_{jk}\right) \tag{3.50}$$

e a ação (3.16) lé-se

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{4\kappa^2} \int d^d x \left[F_{ijk}{}^{l} F^{ijk}{}_{l} - 4m^2 F + 2d(d-1)m^4 \right] . \tag{3.51}$$

Temos introduzido um novo parâmetro, m, como um novo parâmetro livre. Não entanto este parâmetro não está presente na ação inicial. Assim, deve existir uma condição para fixar este parâmetro para un valor físico consistente. Para realizar esto, m, deverá ser fixado de manera autoconsistente, requerendo que a energia do vacuo dependa mínimamente de m

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m^2} = 0 \tag{3.52}$$

onde a ação quântica vem definada por

$$e^{-\mathcal{W}} = \int DADbD\bar{c}Dc e^{-S_{\text{eff}} - S_{\text{gf}}} \tag{3.53}$$

a equação do gap, (3.52), lé-se

$$\langle F \rangle = d(d-1)m^2 \tag{3.54}$$

onde $\langle F \rangle$ é o valor esperado do F relativo ao funcional (3.53). A equação do gap (3.52) fixa o valor do m para o valor m_* físico que estabiliza o vacuo. Uma vez determinado m_*, a existencia do background torna-se completamente caraterizada por m_* e pela presença do termo de quebra da simetria de cor, F, na ação. Assim, depois do calculo de m_*^2

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{4\kappa^2} \int d^d x \left[F_{ijk}{}^{l} F^{ijk}{}_{l} - 4m_*^2 F + 2d(d-1)m_*^4 \right] . \tag{3.55}$$

A teoria é logo descrita pela ação (3.55). Notese que em (3.55) os valores de κ e m_* supoe-se fixados pela cálculos pertubativos usuais.

Notese tembem que devido a quebra da simetria de cor, os indices de grupo transforman-se em indices de espaço-tempo observaveis. Assim $A_{ij}{}^{k}$ describiria excitações físicas tanto de spin-1 como de spin-2.

3.9 Gravitação

Como agora temos uma teoria efetiva, onde é definido consistentemente um tipo de vacuo, podermos efetuar o mapping (3.21) e (3.23),

$$S^e_{\text{eff}} = \frac{1}{4\kappa^2}\int d^dx\; e\left[R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4m_*^2 R + 2d(d-1)m_*^4\right]. \tag{3.56}$$

onde $R = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}$.

A ação (3.56) é invariante baixo $GL(d,\mathbb{R})$ no setor spaço-tempo, e, devido a presença do termo de E-H podermos associar este com a gravitação. Neste sentido o parametro de masa está asociado tanto à constante de Newton, G, como à constante cosmológica, Λ, atraves de

$$\begin{aligned} G &= \frac{\kappa^2}{16\pi m_*^2}, \\ \Lambda &= \frac{d(d-1)}{2}m_*^2 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Assim,

$$S^e_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^dx\; e\left[\frac{d(d-1)}{8\Lambda}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - R + \Lambda\right]. \tag{3.58}$$

que é uma extensão da ação de E-H na formulação de Palatini.

As equações de campo para a coneão referida a ação (3.58)

$$\begin{aligned} &- \mathcal{D}_\mu R^{\mu\nu\alpha}{}_\beta - 2\left[\frac{d}{2}Q_\mu + T_{\mu\kappa}{}^\kappa\right]R^{\mu\nu\alpha}{}_\beta + T_{\mu\kappa}{}^\nu R^{\mu\kappa\alpha}{}_\beta \\ &+ \frac{2\Lambda}{d(d-1)}\left[Q_\beta{}^{\nu\alpha} - \delta^\nu_\beta\bar{Q}^\alpha + 2T^\alpha{}_\beta{}^\nu + U^{\mu\nu\alpha}{}_\beta\left(\frac{d}{4}Q_\mu + T_{\mu\kappa}{}^\kappa\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

onde

$$U_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} \tag{3.60}$$

novamente Q_μ é o convector de Weyl (3.30), que pode ser obtido atraves do tensor de não-metricidade $Q_{\mu\nu\alpha}$, defindo como

$$Q_{\mu\nu\alpha} = \mathcal{D}_\mu g_{\nu\alpha} \tag{3.61}$$

a quantidade $\bar{Q}_\mu$ é tambem construido a aprtir do tensor de não metricidade

$$\bar{Q}_\mu = Q_{\nu\mu}{}^{\nu} \tag{3.62}$$

Finalmete $T_{\mu\nu\alpha}$ é o tensor de torção (3.31).

A variação respeito do tensor métrico resulta

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^{\sigma\rho\alpha\beta}R_{\sigma\rho\alpha\beta} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma} - R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\mu}R^{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{8\Lambda}{d(d-1)}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R-\Lambda) - R^{\mu\nu}\right] = 0. \tag{3.63}$$

contraindo com $g_{\mu\nu}$ achamos a equação para o traço

$$\frac{(d-4)}{4}R^{\sigma\rho\alpha\beta}R_{\sigma\rho\alpha\beta} + \frac{2\Lambda}{d(d-1)}(2-d)R + \frac{2\Lambda^2}{(d-1)} = 0 \tag{3.64}$$

Concentremonos no caso $d = 4$, as equações de campo ficam

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}_\mu R^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} - 2\left[2Q_\mu + T_{\mu\kappa}{}^{\kappa}\right]R^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} + T_{\mu\kappa}{}^{\nu}R^{\mu\kappa\alpha}{}_{\beta} & \\ +\frac{\Lambda}{6}\left[Q_{\beta}{}^{\nu\alpha} - \delta^{\nu}_{\beta}\bar{Q}^{\alpha} + 2T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu} + U^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta}(Q_\mu + T_{\mu\kappa}{}^{\kappa})\right] &= 0 \\ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^{\sigma\rho\alpha\beta}R_{\sigma\rho\alpha\beta} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma} - R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\mu}R^{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{8\Lambda}{d(d-1)}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R-\Lambda) - R^{\mu\nu}\right] &= 0 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Enquanto que a equação do traço

$$R = 2\Lambda \tag{3.66}$$

Na teoria de gravitação usual com constante cosmológica, isto é, a ação (3.58) sem termos de curvatura ao cuadrado, se obtem tambem a equação (3.66) e a solução é o espaço-tempo $dS4$ onde a curvatura es dada por

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\Lambda}{6} U_{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{3.67}$$

Vale a pena resaltar que esta expressão é solução exata de (3.65). Para ver isto devemos usar o fato de que $dS4$ é um espaço-tempo Riemanniano, isto é $Q = 0$ e $T = 0$.

Soluções di tipo $AdS4$ também podem ser obtidas, se escolhemos valores negativos para m_*^2.

Capítulo 4

Gravidade Métrica Afím

O reconhecido artigo de T. W. B. Kibble [54] onde se descreve a gravitação como uma teoria de calibre, com grupo de simetria local $ISO(1, d-1) \cong SO(1, d-1) \ltimes \mathbb{R}^d$, deu origem a uma ampla série de trabalhos nesta área. No caso particular, a generalização de esta teoria para o grupo afim $A(d, \mathbb{R}) \cong GL(d, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^d$ gerou uma nova classe de teorias, conhecidas como teorias de Gravitação Metrica-Affim (MA) [55]. o trabalho do Kibble [54] colocou a gravitação em uma geometria de Riemann-Cartan (RCG), onde a torção, T, é admitida e matéria espinorial pode ser acoplada à gravidade. Os campos de calibre são as vielbein, e, associadas às translações locais, e a conexão de spin, ω, associada ao grupo $SO(1, d-1)$, que está diretamente relacionado com a conexão afim, Γ. O segundo caso [55], descreve uma geometria métrica afím (MAG) onde não so a torção é considerada, senão tambem a não-metricidade, Q.

4.1 Generalidades

Para descrever a MAG, variedade d-dimensional $\mathcal{M}$ caraterizada por um tensor tensor métrico, g, e uma conexão affim, Γ, independentes um do outro. Este é o chamado formalismo MA. A geometria asociada com a invariância sob difeomorfismos $A(d,\mathbb{R})$. Definimos a derivada covariante, ∇, pela atuação sobre o campo vetorial v de acordo com

$$\begin{aligned} \nabla_\mu v^\nu &= \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\nu} v^\alpha \, , \\ \nabla_\mu v_\nu &= \partial_\mu v_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} v_\alpha \, , \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde os índices gregos indicam as coordenadas na variedade $\mathcal{M}$. A curvatura e a torção são identificadas como

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\alpha = -R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} v_\beta - T_{\mu\nu}{}^{\beta} \nabla_\beta v_\alpha \, , \tag{4.2}$$

onde R é a curvatura de Riemann-Christoffel curvature e T o tensor de torção

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}(\Gamma) &= \partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\alpha}{}^{\beta} - \Gamma_{[\mu\alpha}{}^{\gamma} \Gamma_{\nu]\gamma}{}^{\beta} \, , \\ T_{\mu\nu}{}^{\alpha} &= \Gamma_{[\mu\nu]}{}^{\alpha} \, . \end{aligned} \tag{4.3}$$

O efeito da independencia entre g e Γ é a geometria não-metrica caraterizada por uma não-metricidade não-trivial, Q,

$$Q_{\mu\nu\alpha} = \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \, . \tag{4.4}$$

Podemos estudar a MAG através das isometrias do grupo afim no espaço tangente, $\mathcal{T}$, que se constitui no conhecido formalismo de EC. Os campos de de calibre asociados com as translações no $\mathcal{T}$ e as rotações $GL(d,\mathbb{R})$ são, respeitivamente, as vielbein, e, e a conexão de spin, ω. As vielbein mapeiam quantidades $\mathcal{M}$ em quantidades $\mathcal{T}$, $v^a = e^a_\mu v^\mu$. A derivada covariante de calibre D atua sobre o espaço tangente de acordo com

$$
\begin{aligned}
D_\mu v^a &= \partial_\mu v^a + \omega_\mu{}^a{}_b v^b \ , \\
D_\mu v_a &= \partial_\mu v_a - \omega_{\mu a}{}^b v_b \ ,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

do qual podemos escrever

$$
[D_\mu, D_\nu] v^a = \Omega_{\mu\nu}{}^a{}_b v^b \ , \tag{4.6}
$$

onde Ω a a curvatura de spin

$$
\Omega_{\mu\nu}{}^a{}_b(\omega) = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^a{}_b - \omega_{[\mu}{}^a{}_c\omega_{\nu]}{}^c{}_b \ . \tag{4.7}
$$

Further,

$$
[D_a, D_b] v^c = \Omega_{ab}{}^c{}_d v^d - K_{ab}{}^d D_d v^c \ , \tag{4.8}
$$

onde K é a torção de spin

$$
K_{ab}{}^c = e^c_\mu D_{[a} e^\mu_{b]} \ . \tag{4.9}
$$

Also, a nonmetricidade aparece dada por

$$
Q_\mu{}^{ab} = D_\mu \eta^{ab} \ , \tag{4.10}
$$

onde η o tensor métrico plano de o $\mathcal{T}$.

Com o fim de caraterizar o MAG por uma única equação, adotamos trabalhar com a derivada covariante completa, $\mathcal{D}$, atuando em objetos mistos $\mathcal{M}$-$\mathcal{T}$. Aqui, por conveniência, tomamos a mesma como sendo dada por:

$$
\mathcal{D}_\mu e^a_\nu = D_\mu e^a_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha e^a_\alpha = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha e^a_\alpha + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu \ . \tag{4.11}
$$

É conveniente se observar que, que com esta definição, $Q_{\mu}{}^{ab} = D_{\mu}\eta^{ab} = \mathcal{D}_{\mu}\eta^{ab}$. Agora, definindo o tensor de desviação M como

$$M_{\mu}{}^{a}{}_{\nu} = \mathcal{D}_{\mu} e^{a}_{\nu} \ , \tag{4.12}$$

re-escrevemos a expressão (4.11) como um vínculo caraterizando o MAG

$$\partial_{\mu} e^{a}_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} e^{a}_{\alpha} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} e^{b}_{\nu} = M_{\mu}{}^{a}{}_{\nu} \ , \tag{4.13}$$

do qual podemos escrever as relações entre as conexões

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} = e^{\alpha}_{a} \partial_{\mu} e^{a}_{\nu} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} e^{\alpha}_{a} e^{b}_{\nu} - M_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} \ . \tag{4.14}$$

este vínculo fixa Γ como uma função de ω, e e M. Assim, Γ fica completamente determinado pelas propriedades da variedade tangente $\mathcal{T}$ e M. Devemos remark que a RCG é obtida de $M = 0$. Como consequencia podemos interpretar o tensor de desviação como uma medida de como o MAG difiere de a RCG.

Vamos desenvolver algumas propriedades algébricas úteis da variedade tangente. A decomposição do grupo afim é

$$A(d, \mathbb{R}) \cong GL(d, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{d} \cong S(1, d-1) \otimes ISO(1, d-1) \ . \tag{4.15}$$

O espaço das matrices simétricas $S(1, d-1)$ formalmente definido como o coset space,

$$S(1, d-1) \cong GL(d, \mathbb{R}) / SO(1, d-1) \ , \tag{4.16}$$

onde $S(1, d-1)$ é coleçào de todas a matrices simétricas (não formam um grupo). Este espaço possui $d(d+1)/2$ dimensões. O grupo de Poincaré, tambem com $d(d+1)/2$ dimensões, é decomposto

$$ISO(1, d-1) \cong SO(1, d-1) \ltimes \mathbb{R}^{d} \ , \tag{4.17}$$

onde $SO(1,d-1)$ é o grupo de matrices pseudo-orthogonais, O grupo de Lorentz, com dimensão $d(d-1)/2$, e o produto semi-direto com $\mathbb{R}^d$ carateriza a simetria trnslacional extra.

A decomposição do grupo afim pode ser usada para decompor a conexão de spin, que é valorada na álgebra. Para isto , expandimos esta nos geradores, T^{ab},do grupo $GL(d,\mathbb{R})$,

$$\omega_\mu = \omega_{\mu ab} T^{ab} \ . \tag{4.18}$$

Também, T^{ab} pode ser decomposta em geradores do setor simetrico $\Lambda^{ab} = \Lambda^{ba}$ e do grupo de Lorentz group $\Sigma^{ab} = -\Sigma^{ba}$. Assim,

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mu(ab)}\Lambda^{ab} + \omega_{\mu[ab]}\Sigma^{ab}\right) \ . \tag{4.19}$$

De (4.10) e (4.12), deducimos que

$$Q_{\mu ab} = \omega_{\mu(ab)} = M_{\mu(ab)} \ . \tag{4.20}$$

Assim,

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}\left(Q_{\mu ab}\Lambda^{ab} + \omega_{\mu[ab]}\Sigma^{ab}\right) \ , \tag{4.21}$$

onde Q, a nonmetricidade, é um genuino campo tensorial, não uma conexão. Esta propiedade está asociada com o fato que $S(1,d-1)$ não é um grupo, é um espaço simétrico asociado com o coset (4.16). Esta propiedade é de muita importancia no que segue.

4.2 Equivalencia entre as geometria de MA e RC

Agora proveeremos argumentos simples, em formas de statements, concernientes à relação entre a MAG e RCG. Sendo a conclusão final que a MAG e a RCG são essencialmente equivalentes.

Statement 1: *Não existe geometria do espaço tangente sem grupo de Lorentz.*
Proof: Da decomposiçào (4.21), e desde que Q é um tensor, vemos que o caráter de conexão da conexão de spin mora no setor de Lorentz. Assim, o Grupo de Lorentz é o grupo de estabilidade do grupo afim. Esta propiedade estabelece que o grupo de Lorentaz é o ingrediente escencial para definir a geometria na variedade tangente. Fisicamente significa que o grupo de Lorentz é o setor que estabelece uma teoria de calibre para a gravedade.

Statement 2: *Na derivada covariante completa da vielbein, a não-metricidade e q parte simétrica da conexão de spin cancelam mutuamente.*
Proof: Substituindo (4.20) em (4.13) achamos

$$\partial_\mu e^a_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha e^a_\alpha + \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}_\mu{}^a{}_b - \overline{M}_\mu{}^a{}_b\right) e^b_\nu = 0\ . \tag{4.22}$$

onde $\overline{\omega}/2$ é a parte antisimétrica da conexão de spin e $\overline{M}/2$ é a parte antisimétrica do tensor de desvio.

Statement 3: *A MAG e RCG são equivalentes.*
Proof: A afirmação anterior estabelece que a não-metricidade e a parte simétrica da conexão de spin desacoplam-se do vínculo do MAG (4.13). Isto significa que , no (4.22), temos so quantidades que tomam valores na álgebra de Lorentz, *i.e.*, $\overline{\omega}$ and $\overline{M}$. A quantidade $\widetilde{\omega} = (\overline{\omega} - \overline{M})/2$ comportam-se exatamente como uma conexão de spin do RC, desde que $\overline{M}$ seja um tensor.

Assim, definindo a conexão de spin RC, $\widetilde{\omega}$, de acordo com

$$\widetilde{\omega}_{\mu\ b}^{\ a} = \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}_{\mu\ b}^{\ a} - \overline{M}_{\mu\ b}^{\ a}\right) \ , \tag{4.23}$$

temos, de (4.13),

$$\widetilde{D}_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \alpha} e^a_\alpha + \widetilde{\omega}_{\mu\ b}^{\ a} e^b_\nu = 0 \ , \tag{4.24}$$

que é o bem conhecido vinculo da RCG. Assim, a expresão (4.13), que carateriza o MAG, e a expresão (4.24), que caracteriza o RCG, são equivalentes. O cancelamento dos graus de liberdade não métricos com o setor simétrico da conexão de spin e a redifinição da conexão de spin de acordo com (4.23) provée logo uma redução geometrica natural na variedade tangente

$$A(d,\mathbb{R}) \longmapsto ISO(1,d-1) \ . \tag{4.25}$$

Podemos interpretar este cancelamento entre a parte simétrica da conexão de spin e a não metricidade como uma evidencia do desacoplamento dos graus de liberdade não-métricos do MAG. Assim, temos estabelecido uma relação de equivalencia entre as dua geometria, a MA e a RC. Tambem,a redifinição (4.23) é totalmente compatível com o método do campo de backgroun [29], desde que $\overline{M}$ toma valores na álgebra de Lorentz. Este remark nos permite fazer um statement final.

Statement 4: *O tensor $\overline{M}$ é irrelevante para a geometria.*

Proof: Este statement pode ser provado olheando para expresão(4.22). Nesta expressão, a quantidade relevante da geometria é a conexão de spin, que toma valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz. O campo tensorial $\overline{M}$ é irrelevante para a geometria, desde que ele pode ser absorvido na conexão de spin. Assim, levar em conta $\overline{M}$, não sendo apenas questão de conveniência de formalismo. Absorvendo-o, estamos simplesmente mudando de tetrada, e, de tal forma a ajustá-las às curvas geodésicas. Além disto, em (4.22), desde que existam graus de liberdade não-métricos, podemos inferir que $Q = 0$, independentemente de $\overline{M}$.

Exploremos as consequências físicas desta transição geométrica(4.25) e da redefinição da conexão de spin (4.23). Iniciamos com o caso mais simples, onde a ação não tem dependência explícita da não-metricidade. Para isto, começamos com o formalismo MA. Neste caso, de (4.14), vemos que, o efeito do cancelamento dos graus de liberdade não métricos, junto com (4.23), na conexão afim gera a relação,

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \widetilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\alpha} \ . \tag{4.26}$$

Assim, aplicando (4.26) na curvatura e na torção, dados em (4.3), encontramos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}(\Gamma) &= R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}(\widetilde{\Gamma}) \ , \\ T_{\mu\nu}{}^{\alpha}(\Gamma) &= T_{\mu\nu}{}^{\alpha}(\widetilde{\Gamma}) \ . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Estas relações mostram que, se começarmos com uma teoria da gravidade com ação $S(R,T)$, logo a ação é invariante perante (4.23). Assim, podermos trabalhar tanto no geometria de MA ou na geometria de RC. Desde o ponto de vista do formalismo MA, ambas geometria são completamente equivalentes.

Podermos analizar o efeito anterior desde o formalismo EC. Neste caso, as relações (4.21) e (4.23) fornecem

$$\omega = \frac{1}{2}(Q + \overline{\omega}) = M + \widetilde{\omega} \tag{4.28}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mu\nu a}{}^{b}(\omega) &= \Omega_{\mu\nu a}{}^{b}(Q/2+\overline{\omega}/2) = \Omega_{\mu\nu a}{}^{b}(M+\widetilde{\omega})\ , \\
K_{\mu\nu}{}^{a}(\omega) &= K_{\mu\nu}{}^{a}(Q/2+\overline{\omega}/2) = K_{\mu\nu}{}^{a}(M+\widetilde{\omega})\ . \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Neste caso, as coisas não são tão fáceis como no formalismo MA. Das isometria da variedade tangente, a transição (4.25) custa a aparição explicita da não-metricidade. Entretanto, a interpretação de este efeito é facil: Existem duas posibilidades de trabalhar. A primeira é trabalhando no MAG é and lidar com as propiedades da geometria não-métrica. A segunda é trabalhando com uma geometria métrica, RCG, com um spin-3 dinâmico, Q, que não tem interpretação geométrica depois da transição (4.25). Neste caso, Q se comporta como um genuino campo de materia com spin-3.

Por outro lado, os formalismos de MA e EC se supõem equivalentes. Assim, desde que nao ha efeitos residuais da não-metricidade no formalismo MA (4.26-4.27) então, a não metricidade residual não deveria existir no formalismo EC. Este aparente paradoxo é resolvido se, no RCG fizermos $\Omega \equiv R$. entretanto, isto não é certo no MAG. como consequencia, o termo correto a ser considerado no MAG no formalismo de EC deveria ser $\Omega(\omega - Q/2)$. esta curvatura de spin é reducida a a curvatura de spin do RC pela transição (4.25), $\Omega(\omega - Q/2) \rightarrow \Omega(\widetilde{\omega})$. Alem disso, para reforçar o Statement4, podemos ver que, o paradoxo aparente está exclusivamente relacionado com a não-metricidade desde que $\overline{M}$ pode ser considerado meramente como uma conexão de spin background [29].

Permanece a discussão sobre o que acontece se a ação depende explícitamente da não-metricidade. Neste caso, uma dependencia geral sobre a não-metricidade nao poderá ser eliminada pelo shift (4.23). pelo contrario, os termos de não-metricidade sobrevivem na redefinition of the spin connection. Logo, em ambos MA ou EC approaches, a não metricidade aparece como um campo de materia de spin-3 acoplado a gemetria de RC. O unico caso em que a não metricidade é eliminado pelo shift (4.23), é quando este aparece como combinação $\omega - Q/2$. Isto é o que acontece no formalismo MA desde que $\Gamma = \Gamma(\omega - M)$.

Capítulo 5

Perspectivas Futuras

Nesta tese, foram apresentadas algumas contribuições ao estudo da gravitação. Dado que a formulação de Eintein-Hilbert é a descrição mais correta para os fenômenos gravitacionais a grandes escalas, é sensato conceber que esta poderia ser gerada como modelo efetivo de alguma teoria mais fundamental, como é o caso das cordas, branas ou a nossa proposta baseada em uma teoria de calibre. A grande contribução é que o nosso modelo é consistente em $d = 4$, a diferença das outras teorias que se baseiam na necessidade de dimensões extra para ser consistentes a nível quântico. É claro que, para ter consistência com a realidade física, devermos obter os valores dos parâmetros envolvidos no Lagrangeano. Como os capítulos desta Tese apresentam suas respectivas conclusões parciais, onde são discutidos os resultados das diferentes contribuições feitas, passamos, a seguir a apresentar alguns aspectos não cobertos em nossas discussões e que se prestam a serem trabalhados em colaborações futuras.

- O nosso estudo da gravitação com quebra da simetria de Lorentz pode motivar uma discussão a respeito da torção em presença do termo de quebra da simetria de Lorentz. Introduzindo-se as componentes da torção no termo do tipo Chern-Simons gravitacional, a quebra da simetria de Lorentz naturalmente acoplara modos de torçao às flutuações na métrica, o que gerará um espectro de excitações bastante complexo e poderá induzir uma nova escala de energia para a excitação dos modos de torção.

- É conhecido que a torção acopla-se com a matéria através do spin; o estudo da gravitação com torção dinâmica ainda está em aberto, no caso das teorias com derivadas superiores. É possivel que a torção o espectro de ghosts que surge em tal teoria, recuperando assim a unitariedade; também fica em aberto um estudo aprofundado dos efeitos de spin (correntes de spin, tranferencia de spin torque), que surgiriam a partir deste acoplamento.

- No caso da nossa proposta de teoria de calibre, fica em aberto o cálculo explícito das constantes de acoplamento (constante de Newton e constante cosmológica), que deverá ser feito usando os métodos pertubativos usuais da teoria de campos.

- No mesmo modelo, fica em aberto o acoplamento com a matéria, que deverá ser feito incorporando a nossa proposta ao Modelo-Padrão, com a finalidade de obter, como teoria efetiva, a carrespondente teoria de campos em espaço curvo.

- Outros possíveis mecanismos de quebra da simetria de cor poderiam ser propostos de forma a obter a gravitação de Eintein-Hilbet como teoria efetiva.

- Sendo o grupo de isometrias do espaço-tempo Euclideano $SO(d)$, a identificação entre os índices de grupo e índices de espaço-tempo pode ser feita com qualquer grupo que possua $d(d-1)/2$ geradores; assim, por exemplo, no caso da gravitação em 3D, esta identificaçõ poderia ser feita com o grupo $SU(2)$, o que abre uma nova possibilidade de construção de novos modelos de gravitação.

Referências Bibliográficas

[1] A. Strominger, arXiv:hep-th/9110011.

[2] T. Kaluza, “On the unification problem of physics,”

[3] O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926) [Surveys High Energ. Phys. **5**, 241 (1986)].

[4] A. Salam and J. A. Strathdee, Annals Phys. **141**, 316 (1982).

[5] D. V. Volkov and V. P. Akulov, Phys. Lett. B **46**, 109 (1973).

[6] Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman, JETP Lett. **13**, 323 (1971) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **13**, 452 (1971)].

[7] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).

[8] J. Iliopoulos and B. Zumino, Nucl. Phys. B **76**, 310 (1974).

[9] S. Ferrara and O. Piguet, Nucl. Phys. B **93**, 261 (1975).

[10] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, Phys. Rev. D **13**, 3214 (1976).

[11] S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. B **62**, 335 (1976).

[12] S. Deser, J. H. Kay and K. S. Stelle, Phys. Rev. Lett. **38**, 527 (1977).

[13] W. Nahm, Nucl. Phys. B **135**, 149 (1978).

[14] R. E. Kallosh, Phys. Lett. B **99**, 122 (1981).

[15] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, Front. Phys. **58**, 1 (1983) [arXiv:hep-th/0108200].

[16] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, Phys. Lett. B **76**, 409 (1978).

[17] E. Witten, Nucl. Phys. B **186**, 412 (1981).

[18] G. Veneziano, Nuovo Cim. A **57**, 190 (1968).

[19] A. Neveu and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B **31**, 86 (1971).

[20] P. Ramond, Phys. Rev. D **3**, 2415 (1971).

[21] A. Salam and E. Sezgin, "SUPERGRAVITIES IN DIVERSE DIMENSIONS. VOL. 1, 2," *Amsterdam, Netherlands: North-Holland (1989) 1499 p. Singapore, Singapore: World Scientific (1989) 1499 p*

[22] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Annales Poincare Phys. Theor. A **20**, 69 (1974).

[23] C. N. Yang and R. L. Mills, *Also in *Yang, C.N.: Selected Papers 1945-1980*, 171*

[24] F. W. Hehl, G. D. Kerlick and P. Von Der Heyde, Phys. Lett. B **63**, 446 (1976).

[25] R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003) [arXiv:gr-qc/0308071].

[26] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Annals Phys. **140**, 372 (1982)

[27] L. M. de Moraes, J. A. Helayel-Neto and V. J. Vasquez Otoya, arXiv:hep-th/0610305.

[28] R. F. Sobreiro and V. J. Vasquez Otoya, Class. Quant. Grav. **24**, 4937 (2007)

[29] G. 't Hooft, *In *Karpacz 1975, Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis No.368, Vol.1*, Wroclaw 1976, 345-369.*

[30] W. Dittrich and M. Reuter, "Selected Topics In Gauge Theories," Lect. Notes Phys. **244**, 1 (1986).

[31] R. F. Sobreiro and V. J. Vasquez Otoya, arXiv:0711.0020 [hep-th].

[32] R. Lehnert, arXiv:hep-ph/0611177.

[33] R. Bluhm, S. H. Fung and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **77**, 065020 (2008).

[34] H. Belich, " Quebra de Lorentz em Teorias de Gauge: "aplicações a Fenômenos Planares e Conseqüências da Supersimetria"(Tese de Doutorado).

[35] C. Itzykson and J. B. Zuber, "Quantum Field Theory," *New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics)*

[36] Rivers, R J 1964 *Nuovo Cimento* **34** 387

[37] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003).

[38] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. . Ferreira and J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **42**, 127 (2005)

[39] F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick, and J.M. Nester, Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 3641;

[40] De Sabbata and M. Gasperini, Phys. Lett. **A77** (1980) 300;

[41] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov, and I.L. Shapiro, Effective Action in Quantum Gravity, IOP Publishing-Bristol (1992).

[42] Arcos, H I and Pereira, J G 2004 *Int. J. Mod. Phys.* D **13** 2193

[43] Boldo, J L; de Moraes, L M; Helayël-Neto 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 813

[44] Hehl, F W; von der Heyde, P; Kerlick, G D andNester, J M 1976 *Rev. Mod. Phys.* **48** 3641

[45] Hehl, F W; McCrea, J D; Mielke, E W and Ne'eman, Y 1995 *Phys. Rep.* **258** 1

[46] Novello, M 1976 *Phys. Lett. A* **59** 105

[47] De Sabbata, V and Gasperini, M 1980 *Phys. Lett. A***77** 300

[48] Caroll, S M and Field, G B 1994 *Phys. Rev. D* **50** 3867

[49] Hammond, R T 1995 *Phys. Rev. D* **52** 6918

[50] Belyaev, A S and Shapiro, I L 1998 *Phys. Lett. B***425** 246

[51] de Sabbata, V and Gasperini, M 1985 *Introduction to Gravitation* (World Scientific)

Shapiro, I L 1994 *Mod. Phys. Lett. A* **9** 729

[52] van Nieuwenhuizen, P 1973 *Nucl. Phys. B* **60** 478

[53] Sezgin, E and van Nieuwenhuizen, P 1980 *Phys. Rev. D* **21** 3269

[54] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[55] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde, G. D. Kerlick and J. M. Nester, Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).

[56] P. Baekler, N. Boulanger and F. W. Hehl, Phys. Rev. D **74**, 125009 (2006) [arXiv:hep-th/0608122].