Tese de Doutorado

Identidades de Ward-Takahashi em teorias quirais

Ana Paula Cardoso Rodrigues de Lima

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Rio de Janeiro, abril de 2016

Dedico este trabalho ao meu querido pai Sylvio Luiz (in memoriam).

Agradecimentos

Nesta jornada, em busca do conhecimento, eu nada seria sem o afeto e compreensão da família. Aos amados pais, Sylvio Luiz e Therezinha, à querida irmã Mariza e à minha pequenina sobrinha Angélica agradeço o convívio de plena dedicação, paciência e alegria que sempre me proporcionaram, principalmente, nos dias difíceis da caminhada, alimentando-me de calma e coragem.

Ao estimado orientador Sebastião Alves Dias ofereço total mérito pelo meu desenvolvimento na execução deste trabalho, sempre a capacitar-me com a sua sabedoria, e apoio na doação de generosidade em momentos íngremes, como no falecimento de meu pai, mostrando que logo à frente, o caminho voltaria a ser plano.

Jamais esquecerei os incentivos dos professores José Helayel Neto e Renato Doria, quando, no início do doutorado, motivaram-me para o alcance desta conquista. E, a cada professor que participou, agradeço a valiosa contribuição no desempenho de minha tese.

Também agradeço aos colegas de doutorado que, no convívio agradável, vivenciaram as fases de estudo, suavizando os degraus do meu caminhar.

À instituição acadêmica CBPF, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, sua coor-

denação e demais funcionários, o meu reconhecimento pelo excelente aprendizado oferecido, tornando possível a obtenção de um grau de imensa importância em minha vida.

Resumo

Deduzimos as identidades de Ward-Takahashi para a Eletrodinâmica Quântica quiral em d dimensões. Mostramos que essas identidades são modificadas em relação a suas análogas, no caso vetorial. No entanto, a principal consequência delas continua sendo a mesma: existe uma relação entre a função de vértice (com o momentum do fóton nulo) e a derivada da autoenergia fermiônica. Tal relação sugere que as constantes de renormalização de função de onda fermiônica e de carga devem se relacionar de modo similar, caso seja possível, no futuro, definir um procedimento consistente de cálculo perturbativo.

Abstract

We derive the Ward-Takahashi identities for chiral Quantum Electrodynamics in d dimensions. We show that they are modified with respect to their vectorial counterparts. However, their main implication is the same: the existence of a relation between the vertex function (with zero photon momentum) and the derivative of the fermion self energy. Such relation suggests that the fermion wave function and charge renormalization constants must relate to each other in a similar fashion, if it would be possible, in the future, to define a consistent perturbative approach.

Conteúdo

Dedicatória i

Agradecimentos ii

Resumo iv

Abstract v

Conteúdo vi

Introdução **1**

1 O cancelamento da anomalia de calibre **5**

1.1 Definições preliminares e conservação da corrente de calibre 6

1.2 A anomalia de calibre e as funções de correlação 10

2 O exemplo da QED2 quiral **13**

2.1 O modelo e sua solução 14

2.2 Inserção da anomalia de calibre em funções de correlação 20

3 Identidades WT para o caso anômalo **28**

3.1 Equação master para as identidades WT 28

3.2 Identidades WT e renormalização no caso vetorial 33

3.3 Identidades WT e renormalização no caso quiral 37

3.4 Aplicação à QED2 quiral 45

Conclusão **46**

Apêndice: Γ e as funções I1P **50**

Bibliografia **55**

Introdução

No cenário atual, a renormalizabilidade se tornou um critério fundamental para modelos baseados em teorias quânticas de campos que buscam descrever as interações fundamentais. A renormalização é um procedimento geral para o cancelamento de infinitos que aparecem na obtenção das quantidades físicas [1, 2, 3]. Podemos citar o exemplo pioneiro da Eletrodinâmica Quântica (QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*) onde muito cedo foi percebido que os infinitos que apareciam no cálculo teórico para explicar o deslocamento Lamb, por exemplo, podiam ser cancelados para fornecer resultados finitos e de acordo com os dados experimentais [4]. Os métodos matemáticos envolvidos no processo de renormalização da QED redefinem os parâmetros físicos, como a carga e a massa, usando os seu valores iniciais (considerados infinitos) para absorver as divergências do modelo, deixando parâmetros e quantidades físicas finitos ao final.

Desde a década de 1970, as interações fundamentais entre as partículas elementares são descritas em termos de teorias quânticas de campo que exibem um tipo de simetria interna conhecido como *simetria de calibre*. No caso do Modelo Padrão, o grupo de simetria relevante é $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ e a invariância determina a forma pela qual ocorrem as interações fortes e eletrofracas [5]. Este modelo tem que envolver, por considerações experimentais, bósons vetoriais massivos, cuja presença promove a violação da simetria de calibre, o que coloca a renormalizabilidade da teoria em questão. Para resolver esse problema, o mecanismo de Higgs foi idealizado [6]. A consistência da proposta foi espetacularmente confirmada em 2012, com a descoberta do bóson de Higgs [7].

O modelo padrão também contém férmions de Weyl em sua fase simétrica, dispostos em dubletes de $SU(2)$ e singletes de $U(1)$. Após a quebra espontânea de simetria de calibre, de $SU(2) \times U(1)$ para $U(1)$, as partes esquerda e direita dos férmions se combinam em férmions de Dirac, reproduzindo os léptons e quarks conhecidos[1]. A presença de férmions quirais, no cenário de uma teoria de calibre, faz com que apareçam violações quânticas dessa simetria, chamadas de *anomalias de calibre*. Com o comprometimento da simetria de calibre quântica, ocorre a quebra de identidades fundamentais para a prova da renormalizabilidade de uma teoria de calibre [8]. As identidades de Ward-Takahashi, para o caso abeliano e as identidades de Slavnov-Taylor, no caso não abeliano, permitem relacionar as constantes de renormalização e cancelar as divergências, ajudando a provar a renormalizabilidade da teoria. As anomalias de calibre costumam ser acusadas de introduzir termos que violam essas identidades, comprometendo o processo de renormalização. Por essa razão, costuma-se escolher cuidadosamente as representações do grupo de calibre em que são colocados os léptons e os quarks, de modo que as anomalias produzidas por um setor cancelem aquelas produzidas pelo outro [9]. Na ausência de tal mecanismo de cancelamento, as teorias de calibre anômalas são consideradas inconsistentes, atualmente.

No entanto, vários desenvolvimentos teóricos levantaram evidências de que a discussão

[1] Os neutrinos ainda não têm uma descrição definitiva pois, após a descoberta de que eles são partículas com massa, há dúvidas sobre se eles são férmions de Dirac ou de Majorana

sobre a consistência de teorias de calibre anômalas ainda está aberta. Em 2 dimensões, a eletrodinâmica (QED2) quiral, formulada por Jackiw e Rajaraman [10], mostrou que a teoria resultante era unitária e consistente, mesmo com a presença da anomalia de calibre. Outros estudos [11, 12, 13] indicaram que estava em ação um mecanismo de restauração da simetria de calibre, quebrada em estágios intermediários da quantização. Resultados recentes [14] indicaram que a anomalia de calibre se cancela na teoria completamente quantizada (ou seja, na situação em que o campo de calibre também é quântico).

Este trabalho pretende aprofundar a análise das teorias de calibre anômalas, considerando o caso abeliano. A análise será centrada num dos pontos fundamentais para a renormalizabilidade das teorias de calibre: as identidades de Ward-Takahashi (WT). Assim, à luz dos resultados obtidos em [14], analisamos as modificações das identidades e suas consequências. No caso vetorial (não anômalo), as identidades WT implicam na igualdade das constantes de renormalização de carga e de função de onda fermiônica, o que é fundamental para a prova da renormalizabilidade da QED. Pretendemos seguir o mesmo caminho, analisando cuidadosamente as modificações introduzidas pela anomalia de calibre.

Organizamos nossa discussão da seguinte forma: no Capítulo 1 revemos os resultados recentes relativos à anomalia de calibre e seu cancelamento. Em seguida, no capítulo 2, revisamos a aplicação do cancelamento de anomalias ao caso da QED2 quiral, onde cálculos exatos são feitos, que confirmam plenamente os resultados mais gerais. No Capítulo 3, deduzimos a equação master e as identidades WT para o caso anômalo, mostrando que a equação que relaciona a função de vértice com a derivada da autoenergia fermiônica é modificada, sob o efeito da presença da anomalia de calibre. Ainda neste capítulo, verificamos nossos resultados no contexto da QED2 quiral. Finalmente, no último capítulo, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 1

O cancelamento da anomalia de calibre

Neste capítulo, faremos uma breve revisão dos resultados contidos em [14], a partir dos quais vamos estruturar nosso estudo posterior. Vamos recordar que, numa teoria envolvendo acoplamento mínimo de um férmion quiral com campos de calibre (abelianos ou não), métodos funcionais indicam a conservação da corrente de calibre quântica (cuja contraparte clássica deveria ser conservada devido ao teorema de Noether), com a consequente anulação do valor esperado no vácuo da anomalia de calibre. De maneira similarmente simples, mostra-se também que a inserção do operador associado à anomalia de calibre em funções de correlação invariantes de calibre fornece um resultado nulo.

1.1 Definições preliminares e conservação da corrente de calibre

Consideramos uma teoria de calibre em d dimensões descrita pela ação

$$\begin{aligned} S[\psi,\bar{\psi},A_\mu] &= S_G[A_\mu] + S_F[\psi,\bar{\psi},A_\mu] \\ &= \int dx \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}D\psi \right), \end{aligned} \tag{1.1}$$

com dx indicando a integração sobre um espaço de Minkowski d-dimensional[1]. O operador D é denominado *operador de Dirac* da teoria, e é dado por

$$D = i\gamma^\mu \left(\partial_\mu \mathbf{1} - ieA_\mu P_+\right) \equiv i\gamma^\mu D_\mu. \tag{1.2}$$

Os campos ψ são férmions de Dirac carregando a representação fundamental de $SU\left(N\right)$. A presença de P_+ no operador de Dirac implica

$$\bar{\psi}D\psi = \bar{\psi}_L \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu\right)\psi_L + \bar{\psi}_R \left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right)\psi_R, \tag{1.3}$$

onde $\psi_L \equiv P_+\psi$ e $\bar{\psi}_L = \bar{\psi}P_-$, com $P_\pm = \left(1 \pm \gamma_{d+1}\right)/2$. Os operadores de projeção $P_\pm$ satisfazem

$$P_\pm P_\pm = P_\pm, \quad P_\pm P_\mp = 0, \quad P_+ + P_- = 1 \tag{1.4}$$

[1] Para evitar questões relativas à definição de γ_{d+1}, vamos considerar a dimensão d como sendo par. Assim, tomando

$$\gamma_{d+1} \equiv i\gamma^0\gamma^1 ... \gamma^d,$$

podemos sempre garantir consistentemente que

$$\{\gamma_{d+1}, \gamma^\mu\} = 0.$$

Além disso, γ_{d+1} é hermitiana e $\left(\gamma_{d+1}\right)^2 = 1$.

Portanto, a teoria descrita por S descreve férmions esquerdos ψ_L interagindo minimamente com o campo de calibre e férmions direitos livres. O campo A_μ toma valores na álgebra de Lie de $SU(N)$, de modo que

$$
\begin{aligned}
A_\mu &= A_\mu^a T_a, \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie\left[A_\mu, A_\nu\right],
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

e os geradores T_a satisfazem

$$
[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \qquad \mathrm{tr}\,(T_a T_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{1.6}
$$

Perante as seguintes transformações dos campos, chamadas *transformações de calibre*,

$$
\begin{aligned}
A_\mu^g &= gA_\mu g^{-1} + \frac{i}{e} g\partial_\mu g^{-1} \\
\psi^g &= e^{-i\theta P_+}\psi = \left(P_- + gP_+\right)\psi, \\
\bar{\psi}^g &= \bar{\psi}e^{i\theta P_-} = \bar{\psi}\left(P_+ + P_- g^{-1}\right),
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

com

$$
g = e^{-i\theta}, \quad \theta = \theta^a T_a, \tag{1.8}
$$

a ação é invariante

$$
S[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu^g] = S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]. \tag{1.9}
$$

Na obtenção da forma linear em $P_\pm$ das transformações de calibre, observamos que, se α for uma função arbitrária, sem índices espinoriais, teremos as identidades:

$$
\begin{aligned}
\exp\left(P_\pm \alpha\right) &= 1 + P_\pm \alpha + \frac{1}{2!}\left(P_\pm \alpha\right)^2 + ... \\
&= P_\mp + P_\pm \left(1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha^2 + ...\right) \\
&= P_\mp + P_\pm \exp\left(\alpha\right).
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

A teoria quântica é definida pelo *funcional gerador*

$$Z\left[j_a^\mu,\eta,\bar{\eta}\right]=\int d\psi d\bar{\psi}dA_\mu \exp\left(iS\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]+i\int dx\left[\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+j_a^\mu A_\mu^a\right]\right). \tag{1.11}$$

A presença dos projetores nos termos de fonte garante que apenas as componentes esquerdas participarão do cálculo das quantidades físicas, evitando o trabalho de separar a contribuição (trivial) das componentes direitas. Para analisar a conservação quântica da corrente de Noether, zeramos as fontes externas e fazemos uma mudança de variáveis $A_\mu \longrightarrow A_\mu^g$:

$$\begin{aligned} Z\left[0,0,0\right] &= \int d\psi d\bar{\psi}dA_\mu \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi}dA_\mu^g \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu^g]\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Na equação acima, fizemos apenas uma reindexação $A_\mu \to A_\mu^g$. Usamos agora a conhecida invariância de calibre da medida funcional bosônica[2]

$$dA_\mu^g = dA_\mu. \tag{1.13}$$

Consideramos, agora, o caso particular de uma transformação infinitesimal, caracterizada por $g = 1 - i\theta^a\left(x\right)T_a$, com θ^a infinitesimal, e lembramos que

$$A_\mu^g = A_\mu - \frac{1}{e}\mathcal{D}_\mu\theta, \tag{1.14}$$

com

$$\mathcal{D}_\mu\theta = T_a\left(\partial_\mu\delta_b^a - ef_{abc}A_\mu^c\right)\theta^b \equiv T_a\left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b\theta^b. \tag{1.15}$$

[2]Lembramos, no entanto, que a medida fermiônica não é invariante perante a transformação

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi^g, \\ \bar{\psi} &\longrightarrow \bar{\psi}^g. \end{aligned}$$

Essa é a origem da anomalia de calibre.

Obtemos assim:

$$
\begin{aligned}
Z\,[0,0,0] &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu^g]\right) \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int dx\, \theta^a(x)\, (\mathcal{D}_\mu)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+ T_b \psi\right)\right) \\
&= Z\,[0,0,0] \\
&+ \int dx\, \theta^a(x) \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left[(\mathcal{D}_\mu)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+ T_b \psi\right)\right] \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right). \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Isso quer dizer que

$$
\begin{aligned}
&\int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu \left[(\mathcal{D}_\mu)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+ T_b \psi\right)\right] \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) \\
&= \langle 0|\, (\mathcal{D}_\mu)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+ T_b \psi\right) |0\rangle \\
&= 0, \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

ou seja, *se todos os campos forem quânticos*, a corrente de calibre $J_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu P_+ T_a \psi$ se conserva, o que indica que o valor esperado da anomalia de calibre deve se anular (isso será visto explicitamente mais adiante). É preciso dizer que o resultado acima não está em contradição com a existência e interpretação topológica da anomalia de calibre (por exemplo, veja [15, 16]). Se não estivéssemos fazendo a integração funcional sobre os campos de calibre (ou seja, se eles fossem campos externos), não poderíamos fazer a mudança de variáveis inicial e dar continuidade ao argumento acima. Nesse caso, a mudança de variáveis aconteceria sobre os férmions, o que traria um jacobiano associado à não invariância da medida funcional fermiônica e a mesma derivada covariante da corrente de calibre seria acompanhada da anomalia de calibre. Contudo, quando integramos sobre os campos de calibre (ou seja, quando eles são considerados como graus de liberdade do sistema fechado), o argumento singelo acima mostra que a anomalia deve ter o seu valor esperado no vácuo anulado.

1.2 A anomalia de calibre e as funções de correlação

O fato do valor esperado da anomalia no vácuo ser nulo, mostrado na seção anterior, não implica automaticamente a anulação do operador associado. Para analisar se isso acontece, vamos observar o comportamento da inserção da anomalia de calibre em funções de correlação arbitrárias. Consideraremos uma classe particular de funções de correlação, envolvendo operadores invariantes de calibre:

$$O\left(\psi^{g}, \bar{\psi}^{g}, A_{\mu}^{g}\right) = O\left(\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}\right). \tag{1.18}$$

Uma outra maneira de expressar a propriedade acima é

$$O\left(\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}^{g}\right) = O\left(\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_{\mu}\right). \tag{1.19}$$

Vamos introduzir fontes para esses operadores, definindo o funcional

$$Z_{O}\left[\lambda_{i}\right] = \int d\psi d\bar{\psi} dA_{\mu} \exp\left(iS\left[\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}\right] + i\int dx \lambda_{i} O_{i}\left(\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}\right)\right). \tag{1.20}$$

As funções de correlação desses operadores são definidas como

$$\langle 0| T\left(O_{i_1}\left(x_1\right) ... O_{i_n}\left(x_n\right)\right) |0\rangle = (-i)^n \left.\frac{\delta^n Z_O\left[\lambda_i\right]}{\delta\lambda_{i_1}\left(x_1\right) ... \delta\lambda_{i_n}\left(x_n\right)}\right|_{\lambda=0}. \tag{1.21}$$

Mais uma vez, fazemos a mudança de variáveis para A_{μ}^{g}:

$$\begin{aligned} Z_{O}\left[\lambda_{i}\right] &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_{\mu}^{g} \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}^{g}] + i\int dx \lambda_{i} O_{i}\left(\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}^{g}\right)\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_{\mu} \exp\left(iS[\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_{\mu}] + i\int dx \lambda_{i} O_{i}\left(\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_{\mu}\right)\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_{\mu} \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}] + i\int dx \lambda_{i} O_{i}\left(\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}\right) - i\alpha_{1}\left(A_{\mu}, g^{-1}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Na expressão acima, o termo que chamamos de α_1 expressa a não invariância de calibre da medida fermiônica. Para ver isso, vamos definir a *ação efetiva*, $W[A_\mu]$, como o resultado obtido pela integração apenas dos férmions (mantendo o campo de calibre externo):

$$e^{iW[A_\mu]} \equiv \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right). \tag{1.23}$$

Com isso, é claro que

$$\begin{aligned}
e^{iW\left[A_\mu^g\right]} &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu^g]\right) \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iS[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu]\right) \\
&= J\left[A_\mu, g^{-1}\right] \int d\psi^{g^{-1}} d\bar{\psi}^{g^{-1}} \exp\left(iS[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu]\right) \\
&= J\left[A_\mu, g^{-1}\right] e^{iW[A_\mu]} \\
\Longrightarrow \quad & J\left[A_\mu, g^{-1}\right] = e^{i\left(W\left[A_\mu^g\right]-W[A_\mu]\right)} \equiv e^{i\alpha_1[A_\mu,g^{-1}]}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Isso nos mostra que o jacobiano da transformação está diretamente relacionado à não invariância de calibre da ação efetiva $W[A_\mu]$. O termo α_1 é chamado de *termo de Wess-Zumino*. Considerando uma transformação de calibre infinitesimal, é claro que

$$\alpha_1(A_\mu,\delta\theta) = \int dx\, \delta\theta^a \mathcal{A}_a(A_\mu) + ..., \tag{1.25}$$

com $\mathcal{A}_a(A_\mu)$ sendo o operador que representa a anomalia de calibre, como é bem sabido [17]. Chegamos assim a

$$\begin{aligned}
& Z_O[\lambda_i] = Z_O[\lambda_i] \\
& - i\int dx\, \delta\theta^a \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}_a(A_\mu) \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int dx \lambda_i O_i\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)\right)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\Rightarrow \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}_a(A_\mu) \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int dx \lambda_i O_i\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)\right) = 0. \tag{1.27}$$

Fazendo $\lambda_i = 0$, obtemos

$$\langle 0| \mathcal{A}_a(A_\mu) |0\rangle = 0, \tag{1.28}$$

como já foi antecipado. Tomando derivadas funcionais arbitrárias com relação aos λ_i e colocando-os como zero ao final, ficamos com

$$\langle 0| T \left(\mathcal{A}_a(A_\mu) O_{i_1}(x_1) ... O_{i_n}(x_n)\right) |0\rangle = 0. \tag{1.29}$$

Portanto, a anomalia de calibre tem inserção nula em funções de correlação de operadores invariantes de calibre arbitrários. Se algo similar pudesse ser provado também para operadores não invariantes de calibre, chegaríamos à conclusão de que $\mathcal{A}_a(A_\mu) = 0$, o que seria potencialmente perigoso, no sentido de indicar a trivialidade da teoria. A análise desse caso, no entanto, não é trivial e não há, no momento, indicações de que isso seja verdade. Nos capítulos seguintes veremos que a equação acima, para funções de correlação de operadores invariantes de calibre, terá profundas consequências para a invariância de calibre quântica da teoria completa.

Capítulo 2

O exemplo da QED2 quiral

Pretendemos, agora, exemplificar os resultados sugeridos pela abordagem funcional do capítulo anterior com a aplicação ao exemplo da Eletrodinâmica Quântica quiral em 2 dimensões (QED2 quiral). Aqui, devido à possibilidade de calcular exatamente os efeitos dinâmicos dos férmions, mostra-se que é possível obter, sem aproximações, qualquer função de correlação desejada. Assim, a QED2 quiral se mostra o cenário ideal para testar as previsões gerais sugeridas através da integração funcional. Os resultados desse capítulo foram obtidos originalmente na dissertação de Mestrado de Daniel Ribeiro de Pontes [18].

2.1 O modelo e sua solução

A Eletrodinâmica quiral em $(1+1)$ dimensões é definida pela ação[1]:

$$S\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] = \int d^2x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}D\left[A_\mu\right]\psi\right), \tag{2.1}$$

onde os férmions agora carregam uma representação de $U(1)$. A simetria de calibre da ação é expressa pelas seguintes transformações

$$\begin{aligned} A_\mu^g &= A_\mu + \frac{i}{e}g\partial_\mu g^{-1} \\ \psi^g &= e^{-i\theta P_+}\psi = \left(P_- + gP_+\right)\psi, \\ \bar{\psi}^g &= \bar{\psi}e^{i\theta P_-} = \bar{\psi}\left(P_+ + P_- g^{-1}\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

com $g = \exp\left(-i\theta\left(x\right)\right)$ e $\theta\left(x\right)$ sendo uma função escalar de x. A teoria quântica, mais uma vez, é definida através do funcional gerador

$$Z\left[J_\mu,\eta,\bar{\eta}\right] = \frac{1}{N}\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int d^2x(\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu)\right), \tag{2.3}$$

onde $N = N_{A_\mu}N_\psi$ é um fator de normalização que implementa $Z\left[0,0,0\right] = 1$. Funções de correlação obtidas a partir do funcional gerador acima, envolvem tanto férmions esquerdos

[1]Nossas convenções para $(1+1)$ dimensões são:

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 \equiv \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com $\eta^{00} = -\eta^{11} = 1$. Algumas identidades 2-dimensionais importantes são:

$$[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = -2\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_3, \quad \gamma_\mu\gamma_3 = \varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu P_+) = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}$$

onde $\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{01} = 1$. Também definimos, para qualquer vetor v_μ, $\tilde{v}_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu}v^\nu$.

quanto direitos:

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)} Z\left[J_\mu, \eta, \bar{\eta}\right] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(y\right)}\right)_{J_\mu=\eta=\bar{\eta}=0} \\
=\;& \left\langle 0\middle|T\left(\psi\left(x\right)\bar{\psi}\left(y\right)\right)\right\rangle \\
=\;& \left\langle 0\middle|T\left(\psi_L\left(x\right)\bar{\psi}_L\left(y\right)\right)\right\rangle + \left\langle 0\middle|T\left(\psi_R\left(x\right)\bar{\psi}_R\left(y\right)\right)\right\rangle . \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Para separar apenas a parte associada aos férmions esquerdos, podemos multiplicar por P_+ à esquerda e por P_- à direita.

Fazendo a translação

$$\psi \to \psi' = \psi - \int d^2y G\left(A_\mu; x, y\right)\eta(y), \qquad (2.5)$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} - \int d^2y \bar{\eta}\left(y\right) G\left(A_\mu; y, x\right) \qquad (2.6)$$

com $G\left(A_\mu; x, y\right)$ sendo o propagador fermiônico completo na presença de A_μ arbitrário,

$$D\left[A_\mu\right] G(A_\mu; x, y) = G(A_\mu; x, y) D\left[A_\mu\right] = \delta^2(x-y), \qquad (2.7)$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(i \int d^2x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi} D\left[A_\mu\right]\psi + J^\mu A_\mu\right)\right) \\
\times \exp\left(-i \int d^2x d^2y\, \bar{\eta}\left(x\right) G(A_\mu; x, y)\eta\left(y\right)\right). \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

A integral acima é quadrática nos campos fermiônicos. A parte fermiônica corresponde, formalmente, a

$$\frac{1}{N_\psi} \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(i \int d^2x\, \bar{\psi} D\left[A_\mu\right]\psi\right) = \frac{1}{N_\psi} \det iD\left[A_\mu\right] \equiv \exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right). \qquad (2.9)$$

Uma boa escolha para N_ψ, que remove as singularidades inerentes ao cálculo do determinante é

$$N_\psi = \det iD\left[0\right] = \det i\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right), \qquad (2.10)$$

o que nos dá

$$\exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) = \frac{\det iD\left[A_\mu\right]}{\det i\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right)} = \frac{\det D\left[A_\mu\right]}{\det\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right)}. \tag{2.11}$$

Assim, Z assume a forma

$$\begin{aligned} Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = \frac{1}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\bigg(i\int d^2x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu\right) + iW\left[A_\mu\right] \\ -i\int d^2x d^2y\,\bar{\eta}\left(x\right)G(A_\mu;x,y)\eta\left(y\right)\bigg). \end{aligned} \tag{2.12}$$

As manipulações acima poderiam ter sido feitas em qualquer número de dimensões. Contudo, em 2 dimensões, somos capazes de calcular exatamente tanto $G(A_\mu;x,y)$ quanto $W\left[A_\mu\right]$. Em particular, $W\left[A_\mu\right]$ será um funcional quadrático de A_μ. Isso nos permitirá escrever

$$\int d^2x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + W\left[A_\mu\right] = \int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right), \tag{2.13}$$

com $\Omega^{\mu\nu}$ sendo um operador inversivel e independente de A_μ,

$$\begin{aligned} Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = \frac{1}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\bigg(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu + J^\mu A_\mu\right) \\ -i\int d^2x d^2y\,\bar{\eta}\left(x\right)G(A_\mu;x,y)\eta\left(y\right)\bigg). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Com isso, fazendo a mudança de variáveis

$$A_\mu(x) \to A'_\mu\left(x\right) = A_\mu(x) - \int d^2y(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x,y)J^\nu(y), \tag{2.15}$$

chegamos a uma expressão fechada para Z:

$$\begin{aligned} Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] &= \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x d^2y J_\mu\left(x\right)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x-y\right)J_\nu\left(y\right)\right) \\ &\times \frac{1}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right)\right) \\ &\times \exp\left(-i\int d^2x d^2y\,\bar{\eta}\left(x\right)G\left(A_\mu - (\Omega^{-1})_{\mu\nu}J^\nu;x,y\right)\eta\left(y\right)\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

que indica que temos que escolher o fator N_{A_μ} como

$$N_{A_\mu} = \int dA_\mu \exp\left(i \int d^2x \left(\frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu\right)\right), \tag{2.17}$$

de modo que $Z[0,0,0] = 1$.

A fórmula acima para Z é uma solução completa para a teoria se for possível obter $G(A_\mu; x, y)$ e se $W[A_\mu]$ puder ser calculada e for quadrática. Este é o caso para a QED2 quiral [10, 19]. Ambas as quantidades foram calculadas extensivamente na literatura (veja, por exemplo, [20]). Elas são dadas por:

$$G(A_\mu; x, y) = \exp\left[ieP_+ \int d^2z S_\mu(z; x, y) A^\mu(z)\right] G_F(x-y), \tag{2.18}$$

com

$$\begin{aligned} S_\mu(z; x, y) &= \left[D_F(x-z) - D_F(y-z)\right](\partial^z_\mu + \tilde{\partial}^z_\mu), \\ D_F(x-y) &= -\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon}, \\ G_F(x-y) &= -\frac{\gamma^\mu (x-y)_\mu}{2\pi (x-y)^2}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{aligned} iW[A] &= i\frac{e^2}{8\pi} \int d^2x A^\mu \left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_\mu + \tilde{\partial}_\mu\right) \frac{1}{\Box} (\partial_\nu + \tilde{\partial}_\nu)\right) A^\nu \\ &= \ln \frac{\det D}{\det i\gamma^\mu \partial_\mu}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Na fórmula acima para W notamos o aparecimento do parâmetro a, que não estava presente na ação original. Ele foi introduzido originalmente por Jackiw e Rajaraman [10] e está relacionado com ambiguidades de regularização. Conforme antecipado, W é um funcional quadrático de A_μ, que nos permite definir $\Omega^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
& \int d^2x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + W\left[A_\mu\right] \\
= \quad & \int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \left(\Box\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu + \frac{e^2}{2\pi}\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial^\mu + \tilde{\partial}^\mu\right)\frac{1}{\Box}(\partial^\nu + \tilde{\partial}^\nu)\right)\right) A_\nu \\
\equiv \quad & \int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Dada a expressão para $\Omega^{\mu\nu}$, podemos obter sua inversa sem problemas:

$$\left(\Omega^{-1}\right)_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(k)e^{ik(x-y)}, \qquad (2.22)$$

com

$$\begin{aligned}
\left(\Omega^{-1}\right)_{\mu\nu}(k) = & \frac{1}{\lambda\,(a-1)\left(k^2 - \lambda\frac{a^2}{a-1}\right)} \\
\times & \left(\left(k^2 - \lambda a\right)\eta_{\mu\nu} + \tilde{k}_\mu\tilde{k}_\nu - \lambda\frac{\left(k_\mu + \tilde{k}_\mu\right)(k_\nu + \tilde{k}_\nu)}{k^2}\right), \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

e

$$\lambda = \frac{e^2}{2\pi}.$$

Como já vimos, a anomalia de calibre está relacionada à não invariância de calibre de $W\left[A_\mu\right]$. Podemos agora calcular explicitamente o funcional de Wess-Zumino,

$$\alpha_1[A_\mu, g^{-1}] = W[A_\mu^g] - W[A_\mu]. \qquad (2.24)$$

onde, dado que $g = \exp\left(-i\theta\right)$,

$$A_\mu^g = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \qquad (2.25)$$

Usando a expressão explícita de $W\left[A_\mu\right]$, obtemos

$$\alpha_1[A_\mu, g^{-1}] = \int d^2x \left(\frac{a-1}{8\pi}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta - \frac{e}{4\pi}A^\mu\left(\left(a-1\right)\partial_\mu\theta - \tilde{\partial}_\mu\theta\right)\right). \qquad (2.26)$$

O jacobiano de uma transformação de calibre (vista como uma mudança de variáveis) em Z é

$$J\left[A_\mu, g^{-1}\right] = \exp\left(i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]\right). \tag{2.27}$$

Isso nos dá imediatamente a forma concreta da anomalia de calibre [19]:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &\equiv \left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g^{-1}]}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0} \\ &= \frac{e}{4\pi}\left((a-1)\,\partial_\mu - \tilde{\partial}_\mu\right)A^\mu(x) \equiv h_\mu A^\mu(x),\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde definimos h_μ como

$$h_\mu = \frac{e}{4\pi}\left((a-1)\,\partial_\mu - \tilde{\partial}_\mu\right). \tag{2.29}$$

A anomalia de calibre aparece, como é sabido, na violação da conservação covariante da corrente de calibre sob um campo *externo* A_μ:

$$\left\langle 0\left|\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+\psi\right)\right|0\right\rangle_{A_\mu} = \mathcal{A}(x). \tag{2.30}$$

Contudo, o que acontece se o campo A_μ também é quântico? É fácil ver que a equação acima deve envolver um valor esperado extra

$$\left\langle 0\left|\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+\psi\right)\right|0\right\rangle = \langle 0|\mathcal{A}(x)|0\rangle. \tag{2.31}$$

Esse valor esperado pode ser calculado, a partir dos nossos resultados anteriores, como

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathcal{A}(x)|0\rangle &= \frac{1}{N_{A_\mu}}h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)Z\left[J_\mu, 0, 0\right]\Big|_{J^\mu=0} \\ &= \frac{1}{N_{A_\mu}}h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu + J^\mu A_\mu\right)\right)\Bigg|_{J_\mu=0} \\ &= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x d^2y J_\mu(x)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(x-y)\,J_\nu(y)\right)\Bigg|_{J_\mu=0} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.32}$$

Dessa forma, se a teoria for completamente quantizada, a corrente de calibre é conservada, o que é uma indicação de restauração da simetria de calibre. Em duas dimensões essa anulação não surpreende, pois a anomalia de calibre é linear no campo A_μ e o valor esperado de um campo vetorial tem que ser nulo, em função da invariância de Poincaré. No entanto, precisamos checar se isso acontece para uma função de correlação arbitrária com inserção da anomalia de calibre. Se isso se der, $\mathcal{A}$ deverá ser o operador zero, mesmo em 2 dimensões. Investigamos essa questão na próxima seção.

2.2 Inserção da anomalia de calibre em funções de correlação

Vamos aproveitar a solubilidade exata da QED2 quiral e calcular várias funções de correlação com uma inserção do operador associado à anomalia de calibre. Começamos com operadores bosônicos, calculando a inserção da anomalia de calibre na função de Green fotônica de 1 ponto:

$$
\begin{aligned}
K^\nu(x,y) &= \langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)A^\nu(y)]|\,0\rangle = \langle 0\,|T[h_\mu\,(x)\,A^\mu(x)A^\nu(y)]|\,0\rangle \\
&= h_\mu\,(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x)\delta J_\nu\,(y)}\right)Z[J_\mu,0,0]\Bigg|_{J_\mu=0} \\
&= h_\mu\,(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x)\delta J_\nu\,(y)}\right) \\
&\times\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x'd^2y'J_\alpha\,(x')\,(\Omega^{-1})^{\alpha\beta}\,(x'-y')\,J_\beta\,(y')\right)\Bigg|_{J_\mu=0} \\
&= ih_\mu\,(x)\,(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y).
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Usando a expressão explícita para $(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&ih_{\mu}\left(x\right)(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) = \frac{i\lambda}{e}\left((a-1)\,\partial_{\mu}-\tilde{\partial}_{\mu}\right)(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) \\
&= -\frac{\lambda}{e}\int\frac{d^{2}k}{\left(2\pi\right)^{2}}\left((a-1)\,k_{\mu}-\tilde{k}_{\mu}\right)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(k)\,e^{ik(x-y)} \\
&= -\frac{1}{e}\int\frac{d^{2}k}{\left(2\pi\right)^{2}}k^{\nu}e^{ik(x-y)} \\
&= \frac{i}{e}\partial^{\nu}\delta^{2}\left(x-y\right).
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

O resultado acima pode ser generalizado para uma inserção da anomalia de calibre numa função de Green bosônica de n pontos,

$$
K^{\mu_1\cdots\mu_n}(x,x_1,...,x_n) = \langle 0\left|T[\mathcal{A}(x)A^{\mu_1}(x_1)A^{\mu_2}(x_2)...A^{\mu_n}(x_n)]\right|0\rangle\,. \tag{2.35}
$$

Se n for par, teremos um número ímpar de derivadas funcionais agindo numa exponencial quadrática, o que dá um resultado nulo quando zeramos as fontes:

$$
K^{\mu_1\cdots\mu_n}(x,x_1...x_n) = 0, \quad n \text{ par}. \tag{2.36}
$$

Se n for ímpar, teremos um resultado não nulo para a função de correlação. Considere, por exemplo, $n = 3$:

$$\begin{aligned}
&K^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x, x_1, x_2, x_3) \\
&= \langle 0 \,| T[\mathcal{A}(x) A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) A^{\mu_3}(x_3)] |\, 0 \rangle \\
&= \langle 0 \,| T[h_\mu\,(x)\, A^{\mu}(x) A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) A^{\mu_3}(x_3)] |\, 0 \rangle \\
&= h_\mu\,(x) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu\mu_1}(x - x_1) \right) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_2\mu_3}(x_2 - x_3) \right) \\
&+ h_\mu\,(x) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu\mu_2}(x - x_2) \right) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_3}(x_1 - x_3) \right) \\
&+ h_\mu\,(x) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu\mu_3}(x - x_3) \right) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_2}(x_1 - x_2) \right) \\
&= \frac{i}{e} \partial^{\mu_1} \delta^2\,(x - x_1) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_2\mu_3}(x_2 - x_3) \right) \\
&+ \frac{i}{e} \partial^{\mu_2} \delta^2\,(x - x_2) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_3}(x_1 - x_3) \right) \\
&+ \frac{i}{e} \partial^{\mu_3} \delta^2\,(x - x_1) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_2}(x_1 - x_2) \right). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Esse resultado pode ser facilmente generalizado para n ímpar arbitrário.

Vamos agora calcular a inserção da anomalia de calibre em uma função de correlação de operadores invariantes de calibre. Começamos por

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu}(x, y) &= \langle 0 \,| T[\mathcal{A}(x) F^{\mu\nu}(y)] |\, 0 \rangle \\
&= h_\rho\,(x) \left(\left(\frac{1}{i} \right) \frac{\delta}{\delta J_\rho(x)} \left(\partial_y^\mu \left(\frac{1}{i} \right) \frac{\delta}{\delta J_v(y)} - \partial_y^\nu \left(\frac{1}{i} \right) \frac{\delta}{\delta J_\mu(y)} \right) \right) \\
&\times \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^2x' d^2y' J_\alpha\,(x')\,(\Omega^{-1})^{\alpha\beta}\,(x' - y')\, J_\beta\,(y') \right) \Bigg|_{J_\mu = 0} \\
&= i h_\rho\,(x)\, \partial_y^\mu (\Omega^{-1})^{\rho\nu}\,(x - y) - i h_\rho\,(x)\, \partial_y^\nu (\Omega^{-1})^{\rho\mu}\,(x - y). \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Os termos individuais dão:

$$\begin{aligned}
ih_\rho\left(x\right)\partial_y^\mu(\Omega^{-1})^{\rho\nu}(x-y) &= \frac{i\lambda}{e}\left(\left(a-1\right)\partial_\rho^x-\tilde{\partial}_\rho^x\right)\partial_y^\mu(\Omega^{-1})^{\rho\nu}(x-y)\\
&= \frac{i\lambda}{e}\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\left(\left(a-1\right)k_\rho-\tilde{k}_\rho\right)k^\mu\left(\Omega^{-1}\right)^{\rho\nu}\left(k\right)e^{ik(x-y)}\\
&= \frac{i}{e}\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}k^\mu k^\nu e^{ik(x-y)}\\
&= -\frac{i}{e}\partial^\mu\partial^\nu\delta^2\left(x-y\right); \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

$$ih_\rho\left(x\right)\partial_y^\nu(\Omega^{-1})^{\rho\mu}(x-y) = -\frac{i}{e}\partial^\nu\partial^\mu\delta^2\left(x-y\right). \qquad (2.40)$$

Assim,

$$K^{\mu\nu}(x,y)=0.$$

Numa função de correlação geral, envolvendo um produto de n termos como o acima, essa anulação vai se repetir para cada pareamento entre $\mathcal{A}(x)$ e $F^{\mu_k\nu_k}(x_k)$, dando um resultado nulo para o valor esperado:

$$K^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(x,y)=\langle 0\left|T[\mathcal{A}(x)F^{\mu_1\nu_1}(x_1)...F^{\mu_n\nu_n}(x_n)]\right|0\rangle=0. \qquad (2.41)$$

Consideremos, agora, funções de correlação fermiônicas. É conveniente calcular, primeiramente,

$$K(x,\bar{x})=\left\langle 0\left|T\left(\psi(x)\bar{\psi}(\bar{x})\right)\right|0\right\rangle. \qquad (2.42)$$

Usando a expressão para $Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]$ dada por (2.16), obtemos:

$$
\begin{aligned}
K(x,\bar{x}) &= \left\langle 0 \left| T\left(\psi(x)\bar{\psi}(\bar{x})\right)\right| 0\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}\right) Z[0,\eta,\bar{\eta}] \left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(\bar{x})}\right)\Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= \frac{1}{N_{A_\mu}}\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right. \\
&\left.-i\int d^2x'd^2\bar{x}'\,\bar{\eta}\left(x'\right)G(A_\mu;x',\bar{x}')\eta\left(\bar{x}\right)\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(\bar{x})}\right) \\
&= \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu G\left(A_\mu;x,\bar{x}\right)\exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right).
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Inserindo a expressão explícita para $G\left(A_\mu;x,\bar{x}\right)$, eq. (2.18), chegamos a

$$
\begin{aligned}
K(x,\bar{x}) = \frac{i}{N_{A_\mu}}&\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right) \\
&\times \exp\left(ieP_+\int d^2x' S^\mu(x';x,\bar{x})A_\mu\left(x'\right)\right)G_F(x-\bar{x}).
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Daí, usando as identidades dadas pela equação (1.10),

$$
\begin{aligned}
&K(x,\bar{x}) = iP_- G_F(x-\bar{x}) \\
&+\frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu + eS^\mu(x';x,\bar{x})A_\mu\left(x'\right)\right)P_+G_F(x-\bar{x}) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{2}e^2P_+\int d^2x'd^2x'' S_\mu(x';x,\bar{x})\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x'-x''\right)S_\nu(x'';x,\bar{x})\right)iG_F(x-\bar{x}).
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Usando as expressões explícitas para S_μ e Ω^{-1} dadas anteriormente:

$$
\begin{aligned}
&\int d^2x'd^2x'' S_\mu(x';x,\bar{x})\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x'-x''\right)S_\nu(x'';x,\bar{x}) \\
&= -\frac{1}{\lambda\left(a-1\right)}\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{\left(2-e^{ik(x-\bar{x})}-e^{-ik(x-\bar{x})}\right)}{k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}}.
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Esse termo vai a zero quando $x\to\bar{x}$, o que implica serem as singularidades na diagonal de $K(x,\bar{x})$ exatamente as mesmas que as do propagador livre, $G_F(x-\bar{x})$.

Podemos, então, inserir a anomalia de calibre na função de correlação fermiônica considerada acima:

$$
\begin{aligned}
K(x, x_1, \bar{x}_1) &= \left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(\bar{x}_1) \right| 0 \right\rangle \\
&= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu(x)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x_1)}\right) Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \eta(\bar{x}_1)}\right)\Bigg|_{J_\mu=\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu(x)}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x' d^2y' J_{\mu'}(x')\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu'\nu'}(x'-y') J_{\nu'}(y')\right) \\
&\times \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x' \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu\right) G(A_\mu - (\Omega^{-1})_{\mu\nu} J^\nu; x_1, \bar{x}_1)\Bigg|_{J_\mu=0}.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Observando que

$$
\begin{aligned}
& G(A_\mu - (\Omega^{-1})_{\mu\nu} J^\nu; x_1, \bar{x}_1) \\
&= \exp\left[-ieP_+ \int d^2z d^2y S^\mu(z; x_1, \bar{x}_1)(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(z, y) J^\nu(y)\right] \\
&\times G\left(A_\mu; x_1, \bar{x}_1\right),
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

vemos que a dependencia em A_μ está inteiramente contida em $G\left(A_\mu; x_1, \bar{x}_1\right)$, e isso significa que, fatorizando o termo exponencial independente de A_μ, ficamos com uma integral remanescente que se reduz àquela considerada no cálculo de $K(\bar{x}, x)$. Obtemos assim,

$$
K(x, x_1, \bar{x}_1) = e\left(\int d^2z\, h_\mu(x)\, S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(z, x)\right) P_+ K(x_1, \bar{x}_1). \tag{2.49}
$$

Outras funções de correlação como

$$
\left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x)\psi_L(x_1)\bar{\psi}_L(\bar{x}_1)...\psi_L(x_n)\bar{\psi}_L(\bar{x}_n) \right| 0 \right\rangle \tag{2.50}
$$

envolverão produtos de fatores como o que foi calculado acima. Vamos considerar em mais detalhe o termo antes de $P_+K(x_1,\bar{x}_1)$ em (2.49):

$$\begin{aligned}
&\int d^2z\, h_\mu\,(x)\, S_\alpha(z;x_1,\bar{x}_1)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(z,x)\\
&= -\frac{\lambda}{e}\int d^2z \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{e^{ip(x_1-z)}}{p^2+i\varepsilon}\\
&\times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left((a-1)\,k_\mu - \tilde{k}_\mu\right)(k_\alpha+\tilde{k}_\alpha)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(k)e^{ik(x_1-x)}\\
&-(x_1 \longleftrightarrow \bar{x}_1)\\
&= -\frac{1}{e}\left(\delta\left(x_1-x\right)-\delta\left(\bar{x}_1-x\right)\right)\\
&\Longrightarrow K(x,x_1,\bar{x}_1) = \left(\delta\left(\bar{x}_1-x\right)-\delta\left(x_1-x\right)\right)P_+K(x_1,\bar{x}_1).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Portanto, a estrutura de singularidades de $K(x,x_1,\bar{x}_1)$, quando $x_1\to\bar{x}_1$, é a mesma que aquela de $K(x_1,\bar{x}_1)$. Neste limite, a função de Green

$$K(x_1,\bar{x}_1) = \left\langle 0\left|T[\psi(x_1)\bar{\psi}(\bar{x}_1)\right|0\right\rangle$$

exige uma renormalização extra (renormalização de operador composto [3]), com regularização e subtração de divergências. Contudo, o termo $\delta\left(x_1-x\right)-\delta\left(\bar{x}_1-x\right)$ não é divergente, nem necessita de regularização. Quando $x_1\to\bar{x}_1$ ele simplesmente vai a zero, o que nos diz que, independente de qualquer renormalização a ser feita sobre $K(x_1,x_1)$,

$$K(x,x_1,x_1) = \left\langle 0\left|T[\mathcal{A}(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_1)\right|0\right\rangle = 0. \tag{2.52}$$

Observamos que $\psi(x_1)\bar{\psi}(x_1)$ não é um operador invariante de calibre, pois

$$\begin{aligned}
\psi'(x)\bar{\psi}'(x) &= \psi'_L(x)\bar{\psi}'_L(x) + \psi'_R(x)\bar{\psi}'_R(x) \\
&\quad + \psi'_L(x)\bar{\psi}'_R(x) + \psi'_R(x)\bar{\psi}'_L(x) \\
&= \psi_L(x)\bar{\psi}_L(x) + \psi_R(x)\bar{\psi}_R(x) \\
&\quad + e^{-i\theta}\psi_L(x)\bar{\psi}_R(x) + e^{i\theta}\psi_R(x)\bar{\psi}_L(x) \\
&\neq \psi(x)\bar{\psi}(x),
\end{aligned} \tag{2.53}$$

onde usamos o equivalente das transformações de calibre (2.2) para ψ_L e ψ_R:

$$\begin{aligned}
\psi'_L(x) &= e^{-i\theta(x)}\psi_L(x), \quad \bar{\psi}'_L(x) = e^{i\theta(x)}\psi_R(x), \\
\psi'_R(x) &= \psi_R(x), \quad \bar{\psi}'_R(x) = \psi_R(x).
\end{aligned}$$

No entanto, como o campo de calibre só se acopla com ψ_L, e ψ_R só se acopla com $\bar{\psi}_R$, a anomalia só vai se acoplar com a primeira parte (invariante de calibre) de $\psi(x)\bar{\psi}(x)$:

$$\left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_1) \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x)\psi_L(x_1)\bar{\psi}_L(x_1) \right| 0 \right\rangle. \tag{2.54}$$

Logo, no contexto da QED2 quiral, confirmamos que a inserção da anomalia de calibre em funções de correlação envolvendo operadores invariantes de calibre nos dá resultado nulo, em completa concordância com os resultados obtidos em [14]. De maneira oposta, tal inserção não se anula, quando feita em funções de correlação envolvendo operadores não invariantes de calibre. Isso nos diz que a anomalia de calibre não pode ser o operador zero e distancia a teoria da trivialidade.

Capítulo 3

Identidades WT para o caso anômalo

Neste capítulo, vamos obter as identidades de Ward-Takahashi (WT) para teorias quirais abelianas, d-dimensionais, nas quais, como já vimos, temos a ocorrência das anomalias de calibre. Inicialmente, vamos derivar a equação master que gera as identidades e, em seguida, vamos considerar um caso particular importante e suas consequências potenciais para a renormalizabilidade da teoria. Como exemplo, verificamos também que as identidades são satisfeitas para o caso da QED2 quiral. Este capítulo engloba os resultados originais produzidos nesta tese e publicados em [21].

3.1 Equação master para as identidades WT

Como apontamos acima,vamos particularizar nossa análise para o caso abeliano, embora voltemos a considerar a teoria em d dimensões. Principiamos com uma mudança de variáveis no funcional gerador, que é uma transformação de calibre infinitesimal:

$$
\begin{aligned}
A_\mu^\theta &= A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \\
\psi^\theta &= (1 - i\theta P_+)\psi, \\
\overline{\psi}^\theta &= \overline{\psi}(1 + i\theta P_-).
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

O funcional gerador se torna

$$
\begin{aligned}
& Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = \frac{1}{N}\int dA_\mu^\theta d\psi^\theta d\bar{\psi}^\theta \exp\left(iS\left[\psi^\theta,\bar{\psi}^\theta,A_\mu^\theta\right]\right) \\
& \times \exp\left(i\int dx\left(\bar{\psi}^\theta\eta + \bar{\eta}\psi^\theta + J^\mu A_\mu^\theta\right)\right) \\
& = \frac{1}{N}\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int dx(\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu)\right) \\
& \times \left(1 + i\int dx\,\theta\left(x\right)\mathcal{A}\left(A_\mu\right)\right)\left(1 + i\int dx\,\theta\left(x\right)\left(i\bar{\psi}P_-\eta - i\bar{\eta}P_+\psi + \frac{1}{e}\partial_\mu J^\mu\right)\right) \\
& = \left(1 + \frac{i}{e}\int dx\,\theta\left(x\right)\left(e\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu\left(x\right)}\right) + \partial_\mu J^\mu\right.\right. \\
& \left.\left. + ie\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}\right)P_-\eta - ie\bar{\eta}P_+\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\right)\right)\right)Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}].
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

A consequência é a *equação master para as identidades WT anômalas*[1]:

$$
\begin{aligned}
& \left(ie\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}\right)P_-\eta - ie\bar{\eta}P_+\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\right) + e\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu\left(x\right)}\right) + \partial_\mu J^\mu\right) \\
\times \quad & Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

[1]Ressaltamos, aqui, que não há índices espinoriais livres em expressões como

$$
\bar{\eta}P_+\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\right)Z\left[J_\mu,\eta,\bar{\eta}\right],
$$

ou seja, escrevendo os índices espinoriais explicitamente

$$
\bar{\eta}_\alpha\left(P_+\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\right)_\beta Z\left[J_\mu,\eta,\bar{\eta}\right].
$$

A anomalia de calibre é, em geral, um operador composto (um polinômio em A_μ e suas derivadas). Assim, o procedimento usual consiste em introduzir uma fonte separada $\lambda(x)$ para esse operador, o que nos leva a definir um novo funcional

$$\begin{aligned} Z_\lambda[J_\mu, \eta, \bar{\eta}, \lambda] \;&\equiv\; \frac{1}{N}\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right) \\ &\times \exp\left(i\int d^2x(\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu + \lambda\mathcal{A})\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Em termos dessa nova fonte, podemos escrever

$$e\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right) Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = e\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\lambda(x)}\right) Z_\lambda[J_\mu, \eta, \bar{\eta}, \lambda]\bigg|_{\lambda=0}, \tag{3.5}$$

dando uma outra forma para a equação master para Z_λ:

$$\left(e\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(x)}P_-\eta - e\bar{\eta}P_+\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)} - ie\frac{\delta}{\delta\lambda(x)} + \partial_\mu J^\mu\right) Z_\lambda[J_\mu, \eta, \bar{\eta}, \lambda]\bigg|_{\lambda=0} = 0. \tag{3.6}$$

Prosseguindo, definimos o funcional gerador das funções de Green conexas, W_λ, como

$$Z_\lambda[J_\mu, \eta, \bar{\eta}, \lambda] \equiv e^{iW_\lambda[J_\mu, \eta, \bar{\eta}, \lambda]}, \tag{3.7}$$

e obtemos uma equação master para W_λ:

$$\left(ie\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(x)}P_-\eta - ie\bar{\eta}P_+\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)} + e\frac{\delta}{\delta\lambda(x)}\right) W_\lambda[J_\mu, \eta, \bar{\eta}, \lambda]\bigg|_{\lambda=0} + \partial_\mu J^\mu = 0. \tag{3.8}$$

A partir desse ponto, costuma-se obter diretamente o funcional gerador das funções de Green irredutíveis a uma partícula (I1P). Vamos, no entanto, usar a equação acima para obter uma relação entre funções de Green conexas específicas. Para isso, vamos derivar funcionalmente à esquerda com respeito a $\bar{\eta}(x_1)$ e à direita com respeito a $\eta(y_1)$, tomando as fontes como nulas após isso, para obter

$$\begin{aligned} &\left(ie\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)}W_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(x)}P_-\right)\delta(x-y_1) - ie\delta(x-x_1)\left(P_+\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}W_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\right)\right. \\ &\left.+e\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda(x)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\right)\right)\Bigg|_{\substack{\eta=\bar{\eta}\\ J^\mu=\lambda=0}} = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definindo

$$G_c^{(2)}(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{i}\right) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)} W_\lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\Bigg|_{\lambda=\eta=\bar{\eta}=J^\mu=0}$$

$$= \left\langle 0 \right| T\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle, \tag{3.10}$$

$$G_c^{(1,2)}(x, x_1, y_1) \equiv \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda(x)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\Bigg|_{\lambda=\eta=\bar{\eta}=J^\mu=0}$$

$$= \left\langle 0 \right| T\left(\mathcal{A}(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle - \left\langle 0 \right|\mathcal{A}(x)\left|0\right\rangle \left\langle 0 \right| T\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle$$

$$= \left\langle 0 \right| T\left(\mathcal{A}(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle, \tag{3.11}$$

onde usamos o resultado obtido no primeiro capítulo, $\langle 0|\mathcal{A}(x)|0\rangle = 0$. Notamos, então, que obtivemos a identidade

$$G_c^{(2)}(x_1, x) P_- \delta(x - y_1) - P_+ G_c^{(2)}(x, y_1)\delta(x - x_1)$$

$$= G_c^{(1,2)}(x, x_1, y_1). \tag{3.12}$$

Voltaremos à relação (3.12) quando considerarmos as identidades WT para funções I1P.

Continuando, vamos expressar o conteúdo da equação master para W_λ em termos do funcional gerador das funções de Green irredutíveis a uma partícula (1PI). Isso nos permitirá considerar mais eficientemente a renormalização, quando isso se tornar necessário. Para isso, definimos os *campos clássicos*

$$\psi_c(x) \equiv \frac{\overrightarrow{\delta} W_\lambda}{\delta\bar{\eta}(x)}, \quad \bar{\psi}_c(x) \equiv W_\lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(x)},$$

$$A_{\mu,c}(x) \equiv \frac{\delta W_\lambda}{\delta J^\mu(x)}, \tag{3.13}$$

e notamos que eles são, em princípio, funcionais dependentes de J^μ, η, $\bar{\eta}$ e λ. Os campos clássicos serão usados para efetuar uma transformação de Legendre funcional:

$$\Gamma_\lambda\left[\psi_c, \bar{\psi}_c, A_{\mu,c}, \lambda\right] = W_\lambda[J_\mu, \eta, \bar{\eta}, \lambda] - \int dx\left(\bar{\eta}\psi_c + \bar{\psi}_c\eta + J^\mu A_{\mu,c}\right). \tag{3.14}$$

A ideia é que J^μ, η e $\bar{\eta}$ possam ser escritos como funcionais de $A_{\mu,c}$, ψ_c, $\bar{\psi}_c$ e substituídos na equação acima, para produzir a dependência funcional explicitada para Γ_λ. As novas variáveis são consideradas independentes após a transformação. Observamos agora que (vide apêndice A):

$$
\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)}\Gamma_\lambda &= -\eta\left(x\right), \\
\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)} &= -\bar{\eta}\left(x\right), \\
\frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}\left(x\right)}\Gamma_\lambda &= -J^\mu\left(x\right), \\
\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda\left(x\right)} &= \frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda\left(x\right)}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Com os ingredientes acima, podemos expressar a equação master em termos de Γ_λ:

$$
\begin{aligned}
&\left(ie\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)}P_+\psi_c\left(x\right) - ie\bar{\psi}_c\left(x\right)P_-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)} - \partial_\mu\frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}\left(x\right)} + e\frac{\delta}{\delta\lambda\left(x\right)}\right) \\
\times \quad &\Gamma_\lambda\left[\psi_c,\bar{\psi}_c,A_{\mu,c},\lambda\right]\Big|_{\lambda=0} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

A forma acima da equação master, em termos do funcional Γ_λ, será o ponto de partida para a análise que faremos das consequências das identidades WT para a renormalização da teoria. No entanto, antes de passar a essa análise, vamos revisar brevemente a situação no caso usual, de acoplamento vetorial, onde não há anomalia de calibre. Isso nos dará uma ideia da importância das consequências advindas das identidades WT.

3.2 Identidades WT e renormalização no caso vetorial

A discussão, nesta seção, seguirá a exposição em [22]. A equação master, para o caso vetorial (não anômalo), onde o acoplamento é

$$\bar{\psi} D\psi = \bar{\psi} i\gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}\right)\psi$$

pode ser facilmente obtida seguindo o procedimento detalhado na seção anterior. Ela é dada por

$$\left(ie\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)}\psi_c\left(x\right) - ie\bar{\psi}_c\left(x\right)\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)} - \partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}\left(x\right)}\right)\Gamma\left[\psi_c, \bar{\psi}_c, A_{\mu,c}, \lambda\right] = \frac{1}{\alpha}\Box\partial_{\mu}A_c^{\mu}, \tag{3.17}$$

onde o termo extra provém da presença de um termo de fixação de calibre na ação (lembremos que, no caso vetorial, não temos anomalia de calibre, o que requer que quantizemos a teoria utilizando o método de Faddeev-Popov [23]). Tomando uma derivada funcional em relação a $\psi_c\left(y_1\right)$ à direita e outra em relação a $\bar{\psi}_c\left(x_1\right)$ à esquerda e zerando os campos clássicos ao final, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(ie\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x_1\right)}\Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)}\delta\left(x-y_1\right) - ie\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)}\Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y_1\right)}\delta\left(x-x_1\right)\right)\Bigg|_{\psi_c=\bar{\psi}_c=A_{\mu,c}=0} \\
= \; &\left(\partial_{\mu}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x_1\right)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu,c}\left(x\right)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)}\right)\Bigg|_{\psi_c=\bar{\psi}_c=A_{\mu,c}=0}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}\left(x_1, y_1\right) &\equiv \left.\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x_1\right)}\Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y_1\right)}\right|_{\psi_c=\bar{\psi}_c=A_{\mu,c}=0}, \\
\Gamma^{(3)}_{\mu}\left(x, x_1, y_1\right) &\equiv \left.\frac{\delta}{\delta A_c^{\mu}\left(x\right)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x_1\right)}\Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y_1\right)}\right|_{\psi_c=\bar{\psi}_c=A_{\mu,c}=0},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

vemos que

$$ie\Gamma^{(2)}\left(x_1,x\right)\delta\left(x-y_1\right)-ie\Gamma^{(2)}\left(x,y_1\right)\delta\left(x-x_1\right)=\partial_x^\mu\Gamma_\mu^{(3)}\left(x,x_1,y_1\right). \tag{3.20}$$

Essa á apenas uma de uma série de relações entre funções de Green 1PI, que podem ser obtidas por derivações funcionais sucessivas da equação master. No entanto, ela possui uma importância especial. Para entender isso, fazemos a transformada de Fourier da equação acima, multiplicando-a por $\exp\left(i\left(\bar{p}_1x_1-p_1y_1-qx\right)\right)$, integrando sobre x, x_1 e y_1 e definindo

$$\begin{aligned}
&\int dx_1dy_1dx\exp\left(i\left(\bar{p}_1x_1-p_1y_1-qx\right)\right)\Gamma^{(2)}\left(x_1,x\right)\delta\left(x-y_1\right)\\
=&\int dx_1dy_1\exp\left(i\left(\bar{p}_1x_1-\left(p_1+q\right)y_1\right)\right)\Gamma^{(2)}\left(x_1,y_1\right)\\
\equiv&\left(2\pi\right)^d\delta\left(\bar{p}_1-p_1-q\right)\Gamma^{(2)}\left(-\bar{p}_1,p_1+q\right),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&\int dx_1dy_1dx\exp\left(i\left(\bar{p}_1x_1-p_1y_1-qx\right)\right)\Gamma^{(2)}\left(x,y_1\right)\delta\left(x-x_1\right)\\
=&\int dx_1dy_1\exp\left(i\left(\left(\bar{p}_1-q\right)x_1-p_1y_1\right)\right)\Gamma^{(2)}\left(x_1,y_1\right)\\
\equiv&\left(2\pi\right)^d\delta\left(\bar{p}_1-p_1-q\right)\Gamma^{(2)}\left(-\bar{p}_1+q,p_1\right),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
&\int dx_1dy_1dx\exp\left(i\left(\bar{p}_1x_1-p_1y_1-qx\right)\right)\left(\partial_x^\mu\Gamma_\mu^{(3)}\left(x,x_1,y_1\right)\right)\\
=&\,iq^\mu\int dx_1dy_1dx\exp\left(i\left(\bar{p}_1x_1-p_1y_1-qx\right)\right)\left(\Gamma_\mu^{(3)}\left(x,x_1,y_1\right)\right)\\
\equiv&\left(2\pi\right)^d ieq^\mu\delta\left(\bar{p}_1-p_1-q\right)\Gamma_\mu^{(3)}\left(q,-\bar{p}_1,p_1\right),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

com o que, substituindo $\bar{p}_1$ por p_1+q, reindexando $p_1\to p$ e definindo $\Gamma^{(2)}\left(-p,p\right)\equiv\Gamma^{(2)}\left(p\right)$, obtemos

$$\Gamma^{(2)}\left(p+q\right)-\Gamma^{(2)}\left(p\right)=q^\mu\Gamma_\mu^{(3)}\left(q,-\left(p+q\right),p\right). \tag{3.24}$$

No limite $q^\mu \to 0$, conseguimos a expressão mais interessante para nós:

$$\Gamma^{(3)}_\mu (0, -p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Gamma^{(2)} (p) \, . \tag{3.25}$$

As funções de Green que comparecem na identidade acima possuem divergências que são renormalizadas com redefinições de campos e constante de acoplamento. Vamos considerar a renormalização da QED vetorial a 1 laço, em 4 dimensões, examinando a inclusão de contratermos na lagrangiana, que a deixam na forma

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{4} F_0^{\mu\nu} F_{\mu\nu,0} + \bar{\psi}_0 i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_0 + e_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{\mu,0} - \frac{1}{2\alpha} \left(\partial_\mu A_0^\mu \right)^2 , \tag{3.26}$$

onde os campos e carga com subíndice 0 (chamados “nus”) são expressos, em termos de quantidades “vestidas”, como:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{Z_2} \psi, & (3.27) \\ A_0^\mu &= \sqrt{Z_3} A^\mu, & (3.28) \\ e_0 &= \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} e, & (3.29) \end{aligned}$$

com Z_1, Z_2 e Z_3 escolhidos de modo a tornar as funções de Green da teoria finitas, em qualquer ordem perturbativa.

Observamos que, quando expressamos o termo cinético dos férmions e o termo de interação em termos das quantidades vestidas, ficamos com

$$\begin{aligned} & \overline{\psi}_0 i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i e_0 A_{\mu,0} \right) \psi_0 = Z_2 \overline{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + Z_1 e \overline{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \\ = \;& Z_2 i \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{Z_1}{Z_2} e A_\mu \right) \psi. & (3.30) \end{aligned}$$

Notamos que, a menos que $Z_1 = Z_2$, a invariância de calibre terá sido quebrada pelo processo de renormalização.

É conveniente fazer as seguintes redefinições

$$\Gamma^{(2)}(p) \equiv \gamma^\mu p_\mu - \Sigma(p), \tag{3.31}$$

$$\Gamma^{(3)}_\mu(q, -(p+q), p) \equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu(q, -(p+q), p), \tag{3.32}$$

com as as funções $\Sigma(p)$ sendo a auto-energia do férmion e Λ_μ sendo a correção do vértice. Essas duas quantidades são a soma dos gráficos 1PI, com os propagadores externos amputados e, portanto, constituem o coração das quantidades físicas a serem calculadas. Em termos delas, expressamos as identidades WT como

$$\Lambda_\mu(0, -p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p).$$

Escrevendo as expressões ditadas pelas regras de Feynman, podemos calcular as funções de Green em questão até um laço, com o que obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p^\mu} &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\lambda \frac{1}{\gamma^\alpha (p-k)_\alpha} \gamma_\mu \frac{1}{\gamma^\beta (p-k)_\beta} \gamma_\lambda \frac{1}{k^2} \\ &= -\Lambda_\mu(0, -p, p). \end{aligned} \tag{3.33}$$

No entanto, tais expressões são divergentes. As redefinições mencionadas acima implicam

$$\Sigma(p) \longrightarrow Z_2 \Sigma_R(p), \tag{3.34}$$

$$\Lambda_\mu(0, -p, p) \longrightarrow Z_1 \Lambda_{\mu,R}(0, -p, p), \tag{3.35}$$

de modo que as identidades WT, para serem satisfeitas, requerem

$$Z_1 = Z_2. \tag{3.36}$$

Mostramos essa igualdade até um laço, mas as identidades WT implicam que ela deve ser válida exatamente. De fato, ela é crucial para a prova da renormalizabilidade da QED vetorial em todas as ordens [22]. Isso imediatamente nos diz que o processo de renormalização preserva a simetria de calibre, pois

$$\begin{aligned} & \overline{\psi}_0 i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ie_0 A_{\mu,0}\right)\psi_0 = Z_2 i\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{Z_1}{Z_2}eA_\mu\right)\psi \\ = \quad & Z_2 i\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\psi. \end{aligned} \tag{3.37}$$

A carga renormalizada, então, passa a ser:

$$e = \sqrt{Z_3}e_0. \tag{3.38}$$

3.3 Identidades WT e renormalização no caso quiral

Com os resultados da última seção em mente, retomamos a equação master para a QED quiral e fazemos, como antes, uma derivada funcional em relação a $\psi_c(y_1)$ à direita e outra em relação a $\bar{\psi}_c(x_1)$ à esquerda, zerando os campos clássicos ao final, para obter

$$\begin{aligned} & \left(\partial_\mu \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x_1)}\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta A_{\mu,c}(x)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y_1)} - e\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x_1)}\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda(x)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y_1)}\right)\Bigg|_{\psi_c=\bar{\psi}_c=A_{\mu,c}=0} \\ = \quad & \left(ie\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x_1)}\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(x)}P_+\delta(x-y_1)\right. \\ & \left. -ieP_-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y_1)}\delta(x-x_1)\right)\Bigg|_{\psi_c=\bar{\psi}_c=A_{\mu,c}=0}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \partial_x^\mu\Gamma_\mu^{(3)}(x,x_1,y_1) - e\Gamma^{(1,2)}(x,x_1,y_1) \\ = \quad & ie\Gamma^{(2)}(x_1,x)P_+\delta(x-y_1) - ieP_-\Gamma^{(2)}(x,y_1)\delta(x-x_1), \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde definimos a função de vértice usual, $\Gamma_{\mu}^{(3)}$:

$$\Gamma_{\mu}^{(3)}\left(x,x_1,y_1\right)\equiv\left.\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x_1\right)}\frac{\delta\Gamma_{\lambda}}{\delta A_c^{\mu}\left(x\right)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y_1\right)}\right|_{\substack{\psi_c=\bar{\psi}_c=0\\ A_{\mu,c}=\lambda=0}}$$

$$=\left\langle 0\right|T\left(A_{\mu}\left(x\right)\psi\left(y_1\right)\bar{\psi}\left(x_1\right)\right)\left|0\right\rangle_{1\mathrm{PI}}, \tag{3.41}$$

a inserção da anomalia de calibre no propagador fermiônico, $\Gamma^{(1,2)}$:

$$\Gamma^{(1,2)}\left(x,x_1,y_1\right)\equiv\left.\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x_1\right)}\frac{\delta\Gamma_{\lambda}}{\delta\lambda\left(x\right)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y_1\right)}\right|_{\substack{\psi_c=\bar{\psi}_c=0\\ A_{\mu,c}=\lambda=0}},$$

e a inversa do propagador fermiônico, $\Gamma^{(2)}$

$$\Gamma^{(2)}\left(x_1,y_1\right)\equiv\left.\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x_1\right)}\Gamma_{\lambda}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y_1\right)}\right|_{\substack{\psi_c=\bar{\psi}_c=0\\ A_{\mu,c}=\lambda=0}}$$

$$=\left(\left\langle 0\right|T\left(\psi\left(y_1\right)\bar{\psi}\left(x_1\right)\right)\left|0\right\rangle\right)^{-1}. \tag{3.42}$$

Retornamos, agora, à equação (3.12), multiplicando-a à direita por $\Gamma^{(2)}\left(u,x_1\right)$, à esquerda por $\Gamma^{(2)}\left(y_1,v\right)$, integrando-a sobre x_1 and y_1 e usando repetidamente que

$$\int dz\Gamma^{(2)}\left(x,z\right)G_c^{(2)}\left(z,y\right)=\int dzG_c^{(2)}\left(x,z\right)\Gamma^{(2)}\left(z,y\right)=i\delta\left(x-y\right). \tag{3.43}$$

Obtemos, assim,

$$\begin{aligned}&\int dx_1dy_1\Gamma^{(2)}\left(u,x_1\right)G_c^{(1,2)}\left(x,x_1,y_1\right)\Gamma^{(2)}\left(y_1,v\right)\\ &\equiv-\Gamma^{(1,2)}\left(x,u,v\right)\\ &=\int dx_1dy_1\Gamma^{(2)}\left(u,x_1\right)G_c^{(2)}\left(x_1,x\right)P_-\delta\left(x-y_1\right)\Gamma^{(2)}\left(y_1,v\right)\\ &-\int dx_1dy_1\delta\left(x-x_1\right)\Gamma^{(2)}\left(u,x_1\right)P_+G_c^{(2)}\left(x,y_1\right)\Gamma^{(2)}\left(y_1,v\right)\\ &=i\delta\left(u-x\right)P_-\Gamma^{(2)}\left(x,v\right)-i\delta\left(x-v\right)\Gamma^{(2)}\left(u,x\right)P_+\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma^{(1,2)}(x, x_1, y_1) = i\delta(x - y_1) P_- \Gamma^{(2)}(x_1, x)$$
$$-i\delta(x_1 - x) \Gamma^{(2)}(x, y_1) P_+. \tag{3.44}$$

Com a ajuda de (3.44), vemos que podemos eliminar $\Gamma^{(1,2)}$ de (3.40), obtendo

$$\begin{aligned} & ie\delta(x - y_1) \Gamma^{(2)}(x_1, x) P_+ - ie\delta(x - x_1) P_- \Gamma^{(2)}(x, y_1) \\ = \;& \partial_x^\mu \Gamma_\mu^{(3)}(x, x_1, y_1) - e\left(i\delta(x - y_1) P_- \Gamma^{(2)}(x_1, x) - i\delta(x_1 - x) \Gamma^{(2)}(x, y_1) P_+\right), \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_x^\mu \Gamma_\mu^{(3)}(x, x_1, y_1) = ie\delta(x - y_1)\left(\Gamma^{(2)}(x_1, x) P_+ + P_- \Gamma^{(2)}(x_1, x)\right)$$
$$-ie\delta(x_1 - x)\left(P_- \Gamma^{(2)}(x, y_1) + \Gamma^{(2)}(x, y_1) P_+\right). \tag{3.45}$$

Multiplicando por P_- à esquerda e por P_+ à direita, obtemos

$$\begin{aligned} & P_- \left(\frac{1}{2} \partial_x^\mu \Gamma_\mu^{(3)}(x, x_1, y_1)\right) P_+ \\ = \;& P_- \left(ie\delta(x - y_1) \Gamma^{(2)}(x_1, x) - ie\delta(x_1 - x) \Gamma^{(2)}(x, y_1)\right) P_+. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Para entender a multiplicação pelos projetores feita acima, devemos nos lembrar que carregamos, em todas as funções de Green, os férmions direitos, que são não interagentes e, portanto, irrelevantes para a discussão da Física do problema. A multiplicação pelos projetores, no nível do propagador, serve para deixar apenas os graus de liberdade interagentes. Por exemplo:

$$P_+ \left\langle 0 \middle| T\left(\psi(x_1) \bar{\psi}(x_1)\right) \middle| 0 \right\rangle P_- = \left\langle 0 \middle| T\left(\psi_L(x_1) \bar{\psi}_L(x_1)\right) \middle| 0 \right\rangle. \tag{3.47}$$

Como $\Gamma^{(2)}$ é o inverso do propagador, a sua parte dinâmica deverá envolver a multiplicação à direita por P_+ e à esquerda por P_-.

A identidade (3.46) representa um desvio do que se obtém no nível de árvore (diagramas sem laços), o que pode ser visto explicitamente considerando a aproximação

$$\Gamma_0\left[\psi_c, \bar{\psi}_c, A_{\mu,c}\right] = S\left[\psi_c, \bar{\psi}_c, A_{\mu,c}\right] + \mathrm{O}(\hbar). \tag{3.48}$$

Lembrando que S é dado por

$$S = \int dz \left(\bar{\psi} \left(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \mathbf{1} + e\gamma^{\mu} A_{\mu} P_{+} \right) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(3)}_{\mu,0}\left(x, x_1, y_1\right) \equiv & \left. \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}_c\left(x_1\right)} \frac{\delta S}{\delta A^{\mu}_c\left(x\right)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi_c\left(y_1\right)} \right|_{\substack{\psi_c = \bar{\psi}_c = 0 \\ A_{\mu,c} = 0}} \\
= & \int dz \left(e\gamma_{\mu} P_{+} \delta\left(z - x_1\right) \delta\left(z - x\right) \delta\left(z - y_1\right) \right) \\
= & \; e\gamma_{\mu} P_{+} \delta\left(x - x_1\right) \delta\left(x - y_1\right) \\
\Longrightarrow & \; \partial^{\mu}_{x} \Gamma^{(3)}_{\mu,0} = e\gamma_{\mu} P_{+} \partial^{\mu}_{x} \left(\delta\left(x - x_1\right) \delta\left(x - y_1\right) \right),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{0}\left(x_1, y_1\right) \equiv & \left. \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}_c\left(x_1\right)} S \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi_c\left(y_1\right)} \right|_{\substack{\psi_c = \bar{\psi}_c = 0 \\ A_{\mu,c} = 0}} \\
= & \int dz \left(i\gamma_{\mu} \delta\left(z - x_1\right) \partial^{\mu}_{z} \delta\left(z - y_1\right) \right) \\
= & \; i\gamma_{\mu} \partial^{\mu}_{x_1} \delta\left(x_1 - y_1\right).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Com isso, a primeira linha da equação (3.45) nos dá[2]

$$
\begin{aligned}
& ie\delta\left(x-y_1\right)\Gamma_0^{(2)}\left(x_1,x\right)P_+ - ie\delta\left(x-x_1\right)P_-\Gamma_0^{(2)}\left(x,y_1\right) \\
= & -e\left(\gamma_\mu P_+\delta\left(x-y_1\right)\partial_{x_1}^\mu\delta\left(x_1-x\right) - P_-\gamma_\mu\delta\left(x-x_1\right)\partial_x^\mu\delta\left(x-y_1\right)\right) \\
= & \; e\gamma_\mu P_+\left(\delta\left(x-y_1\right)\partial_x^\mu\delta\left(x-x_1\right)+\delta\left(x-x_1\right)\partial_x^\mu\delta\left(x-y_1\right)\right) \\
= & \; e\gamma_\mu P_+\partial_x^\mu\left(\delta\left(x-x_1\right)\delta\left(x-y_1\right)\right) \\
= & \; \partial_x^\mu\Gamma_{\mu,0}^{(3)}. \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

Multiplicando por P_- à esquerda e por P_+ à direita, como fizemos antes, chegamos a

$$
\begin{aligned}
& P_-\left(\partial_x^\mu\Gamma_\mu^{(3)}\left(x,x_1,y_1\right)\right)P_+ \\
= & \; P_-\left(ie\delta\left(x-y_1\right)\Gamma^{(2)}\left(x_1,x\right)-ie\delta\left(x_1-x\right)\Gamma^{(2)}\left(x,y_1\right)\right)P_+ \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

o que confirma a alteração nas identidades WT não anômalas (introdução do fator 1/2), feita pela anomalia de calibre.

Vamos agora considerar a equação (3.46) no espaço de momentum. Para isto, intro-

[2]Na dedução a seguir, usamos

$$
\partial_{x_1}^\mu\delta\left(x_1-x\right)=-\partial_x^\mu\delta\left(x-x_1\right),
$$

o que pode ser verificado integrando em x_1 com uma função de x_1:

$$
\begin{aligned}
& \int dx_1 f\left(x_1\right)\partial_{x_1}^\mu\delta\left(x_1-x\right)=-\partial_x^\mu f\left(x\right) \\
= & \int dx_1 f\left(x_1\right)\left(-\partial_x^\mu\delta\left(x-x_1\right)\right) \\
= & -\partial_x^\mu\int dx_1 f\left(x_1\right)\delta\left(x-x_1\right)=-\partial_x^\mu f\left(x\right).
\end{aligned}
$$

O mesmo pode ser verificado integrando em x com uma função de x.

duzimos as transformadas de Fourier das funções de Green relevantes:

$$\int dx dx_1 dy_1 e^{i(p'x_1 - py_1 - qx)} \Gamma^{(3)}_\mu (x, x_1, y_1)$$
$$\equiv ie (2\pi)^4 \delta (p' - p - q) \Gamma^{(3)}_\mu (p', q, p), \tag{3.53}$$

$$\int dx_1 dy_1 e^{i(p'x_1 - py_1)} \Gamma^{(2)} (x_1, y_1)$$
$$\equiv i (2\pi)^4 \delta (p' - p) \Gamma^{(2)} (p', p), \tag{3.54}$$

Assim, multiplicamos (3.46) por $\exp i (p'x_1 - py_1 - qx)$ e integramos sobre x, x_1 and y_1, obtendo

$$e (2\pi)^4 \delta (p' - p - q) P_- \left(-\frac{1}{2} q^\mu \Gamma^{(3)}_\mu (p', q, p) \right) P_+$$
$$= -e (2\pi)^4 \delta (p' - p - q) P_- \left(\Gamma^{(2)} (p', p + q) - \Gamma^{(2)} (p' - q, p) \right) P_+ \tag{3.55}$$

ou

$$\frac{1}{2} q^\mu P_- \Gamma^{(3)}_\mu (p + q, q, p) P_+ = P_- \left(\Gamma^{(2)} (p + q) - \Gamma^{(2)} (p) \right) P_+, \tag{3.56}$$

onde empregamos a notação usual $\Gamma^{(2)} (p) \equiv \Gamma^{(2)} (p, p)$. Tomando agora o limite em que $q^\mu \to 0$, chegamos à equação análoga à do caso vetorial:

$$\frac{1}{2} P_- \Gamma^{(3)}_\mu (p, 0, p) P_+ = P_- \frac{\partial \Gamma^{(2)} (p)}{\partial p^\mu} P_+. \tag{3.57}$$

Se pudéssemos conduzir a renormalização no caso quiral de forma análoga à do caso vetorial, poderíamos concluir que

$$Z_1 = \frac{1}{2} Z_2. \tag{3.58}$$

A equação acima ainda seria uma relação entre as constantes de renormalização de vértice e de função de onda fermiônica, mas não é claro se ela seria suficiente para garantir a renormalizabilidade da teoria em todas as ordens perturbativas. O cuidado aqui deve ser dobrado, pois não é claro que sequer exista uma abordagem perturbativa para o caso quiral, conforme iremos comentar mais adiante, no capítulo de Conclusão.

Uma checagem de consistência de nossos cálculos envolveria a análise de singularidades da identidade WT antes de usarmos a relação (3.44). Para deixar mais claro o que queremos dizer, vamos considerar a equação (3.40) diretamente no espaço de momenta, definindo a transformada de Fourier da inserção da anomalia no propagador fermiônico como

$$\begin{aligned} & \int dx_1 dy_1 dx \exp\left(i\left(\bar{p}_1 x_1 - p_1 y_1 - qx\right)\right)\left(\Gamma^{(1,2)}\left(x, x_1, y_1\right)\right) \\ \equiv \quad & (2\pi)^d \delta\left(\bar{p}_1 - p_1 - q\right) \Gamma^{(1,2)}\left(q, -\bar{p}_1, p_1\right), \end{aligned} \tag{3.59}$$

o que nos dá

$$q^\mu P_- \Gamma^{(3)}_\mu \left(p+q, q, p\right) P_+ = P_- \left(\Gamma^{(2)}\left(p+q\right) - \Gamma^{(2)}\left(p\right) + \Gamma^{(1,2)}\left(p+q, q, p\right)\right) P_+. \tag{3.60}$$

Assim, o limite $q^\mu \to 0$ nos daria

$$P_- \Gamma^{(3)}_\mu \left(p, 0, p\right) P_+ = P_- \frac{\partial \Gamma^{(2)}\left(p\right)}{\partial p^\mu} P_+ + \lim_{q^\mu \to 0} P_- \frac{\Gamma^{(1,2)}\left(p+q, q, p\right)}{q^\mu} P_+, \tag{3.61}$$

onde o segundo termo no lado direito poderia ser singular. Vamos analizá-lo mais de perto. Neste limite, $\Gamma^{(1,2)}$ pode ser escrito como

$$\Gamma^{(1,2)}\left(p+q, q, p\right) = \Gamma^{(1,2)}\left(p, 0, p\right) + q^\mu \left.\frac{\partial}{\partial q^\mu} \Gamma^{(1,2)}\left(p+q, q, p\right)\right|_{q^\mu = 0} + \mathrm{O}\left(q^2\right). \tag{3.62}$$

Os dois primeiros termos da expansão são os únicos que contribuem para o limite. O segundo não dá origem a singularidades. Vamos checar o primeiro. Ele pode ser obtido como:

$$\begin{aligned}
&\lim_{q^\mu\to 0}\int dp'\,(2\pi)^4\,\delta\,(p'-p-q)\,\Gamma^{(1,2)}\,(p',q,p)\\
&=(2\pi)^4\int dp'\delta\,(p'-p)\,\Gamma^{(1,2)}\,(p',0,p)\\
&=(2\pi)^4\,\Gamma^{(1,2)}\,(p,0,p)\\
&=\int dp'dxdx_1dy_1e^{i(p'x_1-py_1)}\,\Gamma^{(1,2)}\,(x,x_1,y_1)\,.
\end{aligned}\tag{3.63}$$

Como a função tem suporte apenas sobre $p=p'$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^4\,\Gamma^{(1,2)}\,(p,0,p)\\
&=\int dp'dxdx_1dy_1e^{ip'(x_1-y_1)}\,\Gamma^{(1,2)}\,(x,x_1,y_1)\\
&=(2\pi)^4\int dxdx_1dy_1\delta\,(x_1-y_1)\;\Gamma^{(1,2)}\,(x,x_1,y_1)\\
&=(2\pi)^4\int dxdx_1\,\Gamma^{(1,2)}\,(x,x_1,x_1)\,.
\end{aligned}\tag{3.64}$$

Mas sabemos que

$$\Gamma^{(1,2)}\,(x,x_1,x_1)=\left\langle 0|T\left(\mathcal{A}\,(x)\,\psi\,(x_1)\,\bar{\psi}\,(x_1)\right)|0\right\rangle_{1\mathrm{PI}}\,,\tag{3.65}$$

que representa a inserção da anomalia de calibre na função de Green de um operador invariante de calibre $(\psi\,(x_1)\,\bar{\psi}\,(x_1))$. Os argumentos consolidados no primeiro capítulo então nos dizem que

$$\Gamma^{(1,2)}\,(p,0,p)=0.\tag{3.66}$$

Isso significa que o limite $q^\mu\longrightarrow 0$ é não singular. Mais uma vez, vemos o papel crucial representado pelo mecanismo de cancelamento da anomalia, neste caso, para nos prover uma identidade WT não singular.

Vamos inspecionar também o segundo termo. Como antes, ele pode ser obtido por integração sobre p':

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \int dp' \left(2\pi\right)^4 \delta\left(p' - p - q\right) \Gamma^{(1,2)}\left(p', q, p\right) \\
&= \left(2\pi\right)^4 \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \Gamma^{(1,2)}\left(p + q, q, p\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \int dp' dx dx_1 dy_1 e^{i\left(p' x_1 - p y_1 - q x\right)} \Gamma^{(1,2)}\left(x, x_1, y_1\right) \\
&= -i \int dp' dx dx_1 dy_1 e^{i\left(p' x_1 - p y_1 - q x\right)} x_{\mu} \Gamma^{(1,2)}\left(x, x_1, y_1\right). \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Tomando o limite $q^{\mu} \longrightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
&\left.\left(2\pi\right)^4 \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \Gamma^{(1,2)}\left(p + q, q, p\right)\right|_{q^{\mu}=0} \\
&= -i \int dp' dx dx_1 dy_1 e^{i\left(p' x_1 - p y_1\right)} x_{\mu} \Gamma^{(1,2)}\left(x, x_1, y_1\right). \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Contudo, não podemos argumentar, de modo análogo ao caso anterior, que o suporte do termo acima seja apenas sobre $p = p'$. Este seria o caso se $x_{\mu}\Gamma^{(1,2)}\left(x, x_1, y_1\right)$ fosse invariante sob translações, mas ele obviamente não é. Portanto, não aparece uma $\delta\left(x_1 - y_1\right)$ e há contribuições para $\Gamma^{(1,2)}\left(x, x_1, y_1\right)$ com $x_1 \neq y_1$, que não tem motivo para serem nulas. Este termo sobrevive e é o que vai contribuir para o aparecimento do fator $1/2$ em frente de $\Gamma^{(3)}_{\mu}$.

3.4 Aplicação à QED2 quiral

Uma das equações cruciais obtidas neste trabalho é a equação (3.12) (que liga $G^{(2)}$ a $G^{(1,2)}$). Nesta seção, vamos mostrar que ela é satisfeita exatamente no caso particular da

QED2 quiral.

$$G_c^{(2)}\left(x_1,x\right)P_-\delta\left(x-y_1\right)-P_+G_c^{(2)}\left(x,y_1\right)\delta\left(x-x_1\right)=G_c^{(1,2)}\left(x,x_1,y_1\right).$$

As expressões para $G_c^{(2)}(x,y)$ e $G_c^{(1,2)}\left(x,x_1,y_1\right)$ foram calculadas no capítulo 2:

$$\begin{aligned}
&G_c^{(2)}(x,y)=\exp\left(\frac{i}{2}e^2P_+\frac{1}{\lambda\left(a-1\right)}\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{\left(2-e^{ik(x-y)}-e^{-ik(x-y)}\right)}{k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}}\right)\\
&\times iG_F(x-y),\\
&G_F(x-y)=-\frac{\gamma^\mu(x-y)_\mu}{2\pi(x-y)^2},\\
&G_c^{(1,2)}(x,x_1,y_1)=\left(\delta\left(y_1-x\right)-\delta\left(x_1-x\right)\right)P_+G_c^{(2)}(x_1,y_1).
\end{aligned}$$

Das expressões explícitas exibidas acima, vemos imediatamente que a equação (3.12) é satisfeita.

Conclusão

Anomalias na simetria de calibre costumam ser consideradas golpes mortais na consistência de um modelo. Nesta tese, mostramos que esta é uma questão aberta, sobre a qual muitos estudos ainda devem ser feitos. Há evidências de que a anomalia de calibre não sobrevive ao regime completamente quântico e de que a anulação de inserções em funções de correlação invariantes de calibre indique um papel ainda por esclarecer na definição do espaço de estados físicos da teoria. O que falta para uma afirmação mais categórica dessas propriedades é um avanço nas questões da renormalizabilidade e unitaridade de teorias de calibre anômalas. Os argumentos, embora não perturbativos, necessitam de uma conexão mais forte com a formulação operatorial, cujo acesso principal se dá precisamente por métodos perturbativos. Como alento, podemos citar os resultados obtidos em 2 dimensões, revisados nos capítulos 2 e 3, que confirmam detalhadamente as previsões gerais obtidas no capítulo 1.

Procurando avançar na questão da renormalização de uma teoria com anomalia na simetria de calibre, estudamos as identidades de Ward-Takahashi, satisfeitas por teorias abelianas. Procuramos tratar cuidadosamente a presença da anomalia de calibre, mostrando que ela produz um termo a mais em relação às identidades convencionais, para o caso vetorial, não anômalo. Baseados nos resultados não perturbativos que indicam a anulação de inserção da anomalia em funções de correlação invariantes de calibre, pudemos mostrar que a principal consequência das identidades WT é modificada. Se a teoria puder ser renormalizada de maneira convencional, as identidades WT irão implicar na introdução de um fator 1/2 na relação entre a constante de renormalização de função de onda fermiônica e a de renormalização de carga. Se isso é suficiente para assegurar a renormalizabilidade da teoria ou não, só saberemos se os esforços na investigação dessa possibilidade forem redobrados.

No entanto, há obstáculos sérios no caminho. Numa teoria de calibre convencional, sem anomalia, é necessário implementar o procedimento de Faddeev-Popov que, no contexto da integração funcional, resolve o problema de definir, sem redundâncias, a integração funcional sobre configurações de campos de calibre não equivalentes fisicamente. Como bônus, resolve-se o problema da singularidade do operador $\Delta^{\mu\nu}$, definido abaixo:

$$\int dx \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = \int dx \left(\frac{1}{2}A_\mu \left(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\right) A_\nu\right) \equiv \int dx \left(\frac{1}{2}A_\mu \Delta^{\mu\nu} A_\nu\right). \quad (3.69)$$

Esse operador precisa ser invertido de modo que haja um propagador bosônico livre, o que possibilita a definição da abordagem perturbativa. Mas ele possui modos zero, o que mostra a sua singularidade. O procedimento de Faddeev-Popov adiciona um termo à ação bosônica que resolve esse problema, levando $\Delta^{\mu\nu}$ num operador não singular:

$$\Delta^{\mu\nu} \to \bar{\Delta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\Box - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu, \quad (3.70)$$

com α sendo um parâmetro arbitrário, que pode ser escolhido de acordo com a conveniência dos cálculos perturbativos posteriores (o resultado físico é independente de α). No entanto, numa teoria onde haja anomalia na simetria de calibre, não é necessário o procedimento de Faddeev-Popov, pois todas as configurações de campo A_μ, mesmo as que são relacionadas por uma transformação de calibre, dão contribuições diferentes para a integral funcional (devido à não invariância de calibre da ação efetiva, obtida após a integração sobre os férmions) [12]. Em duas dimensões o problema é resolvido pela expressão explícita da ação efetiva, que fornece os termos necessários para inverter o operador $\Omega^{\mu\nu}$, substituto de $\bar{\Delta}^{\mu\nu}$ nesse caso, conforme pode ser visto na equação (2.21). No entanto, não há como inferir a contribuição quadrática à ação efetiva numa teoria definida em dimensão superior a 2. Isso inviabiliza a definição perturbativa de uma teoria de calibre anômala.

Uma opção seria insistir no método de Faddeev-Popov, mesmo sem necessidade, e conseguir o termo requerido para definir o propagador bosônico da teoria [12, 13]. No entanto, essa técnica implica no aparecimento de campos adicionais, os campos de Wess-Zumino, de dimensão canônica nula, que introduzem problemas formidáveis à análise da renormalizabilidade da teoria, cujo estudo ainda não se mostrou viável.

Uma proposta a ser investigada é a de introduzir um termo de fixação de calibre arbitrariamente, considerando:

$$Z\left[J_\mu,\eta,\bar{\eta}\right] = \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi}\exp\left(iS\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] + \text{ fontes } + \frac{i\alpha}{2}\int dx\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\right)\Bigg|_{\alpha=0}, \tag{3.71}$$

onde, diferentemente do caso não anômalo, α deve ter um valor fixado ao final como zero. O operador cinético que aparece agora é

$$\bar{\Delta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\Box - (1-\alpha)\,\partial^\mu\partial^\nu, \tag{3.72}$$

e sua inversa nos dá o propagador

$$D^{\alpha}_{\mu\nu}\left(k\right) = -\frac{1}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}\right). \tag{3.73}$$

Tal propagador é singular no limite em que α vai para zero, mas isso é esperado. Uma possibilidade seria usá-lo, com $\alpha \neq 0$, para definir a expansão perturbativa e depois procurar remover as divergências em $\alpha = 0$ junto com as divergências ultravioletas que precisarão ser renormalizadas da teoria, fazendo $\alpha = 0$ apenas quando tivermos expressões que não sejam singulares em α. Tal programa é, no entanto, extenso e fica como perspectiva de continuidade deste trabalho no futuro.

Apêndice: Γ e as funções I1P

Neste apêndice, pretendemos apresentar diversas deduções referentes ao funcional gerador das funções de Green I1P, usualmente não presentes em livros texto e que podem apresentar sutilezas não esperadas. Principiamos com as equações referentes às derivadas funcionais de Γ, apresentadas no capítulo 3. Aqui observamos que as correntes fermiônicas e bosônica devem ser considerados funcionais de ψ_c, $\bar{\psi}_c$ e A^{μ}_c. Além disso, devemos tomar cuidado com a regra da cadeia em derivadas funcionais fermiônicas, como ilustramos abaixo:

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}\Gamma_\lambda = \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}W_\lambda - \eta(x) - \int dx' \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}\bar{\eta}(x')\right)\psi_c(x')\right.$$
$$\left. - \int dx' \left(-\bar{\psi}_c(x')\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}\eta(x')\right) + \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}J^\mu(x')\right)A_{\mu,c}(x')\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int dx' \left(-W_\lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x'\right)} \frac{\overrightarrow{\delta}\,\eta\left(x'\right)}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)} + \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)}\bar{\eta}\left(x'\right)\right)\frac{\overrightarrow{\delta}\,W_\lambda}{\delta\bar{\eta}\left(x'\right)}\right)\right. \\
&\quad + \int dx' \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)} J^\mu\left(x'\right)\right)\frac{\delta W_\lambda}{\delta J^\mu\left(x'\right)} - \eta\left(x\right) \\
&\quad - \int dx' \left(\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)}\bar{\eta}\left(x'\right)\right)\psi_c\left(x'\right) - \bar{\psi}_c\left(x'\right)\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)}\eta\left(x'\right)\right)\right) \\
&\quad \left. - \int dx' \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)} J^\mu\left(x'\right)\right) A_{\mu,c}\left(x'\right)\right) \\
&= -\eta\left(x\right). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

De maneira análoga mostramos também que

$$
\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)}\Gamma_\lambda = -\bar{\eta}\left(x\right); \quad \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta A_c^\mu\left(x\right)}\Gamma_\lambda = -J_\mu\left(x\right). \qquad (2)
$$

Temos também a fonte associada à anomalia de calibre, $\lambda\left(x\right)$. Consideramos que os campos ψ_c, $\bar{\psi}_c$ e A_c^μ também devem depender de λ, reduzindo-se aos campos convencionais no limite em que $\lambda \to 0$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda\left(x\right)} &= \left.\frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda\left(x\right)}\right|_{\text{fontes constantes}} \\
&\quad - \int dx' \left(-\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x'\right)}\frac{\delta\eta\left(x'\right)}{\delta\lambda\left(x\right)} + \frac{\delta\bar{\eta}\left(x'\right)}{\delta\lambda\left(x\right)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x'\right)} + \frac{\delta J_\mu\left(x'\right)}{\delta\lambda\left(x\right)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu\left(x'\right)}\right) \qquad (3) \\
&\quad \times \left(W_\lambda - \int dx' \left(\bar{\psi}_c\eta + \bar{\eta}\psi_c + J_\mu A_c^\mu\right)\right)_{\text{campos constantes}} \\
&= \left.\frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda\left(x\right)}\right|_{\text{fontes constantes}}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Com isso, vemos que

$$
\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda\left(x\right)} = \frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda\left(x\right)}. \qquad (5)
$$

Em seguida, vamos considerar a obtenção da equação que define $\Gamma^{(2)}$ como inversa de

$G_c^{(2)}$. Para isso, partimos de

$$\begin{aligned}
&\delta\left(x-y\right)=\psi_c\left(x\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}=\int dz\left(\left(\psi_c\left(x\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(z\right)}\right)\left(\eta\left(z\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\right.\\
&\left.-\left(\bar{\eta}\left(z\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\left(\psi_c\left(x\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(z\right)}\right)+\left(\frac{\delta}{\delta J^\mu\left(z\right)}\psi_c\left(x\right)\right)\left(J^\mu\left(z\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\right)\\
=\;&-\int dz\left(\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}W_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(z\right)}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(z\right)}\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\right.\\
&+\text{termos com derivadas fermiônicas não pareadas.}
\end{aligned}\tag{6}$$

Fazendo os campos e λ iguais a zero, obtemos:

$$\int dz\; G_c^{(2)}(x,z)\Gamma^{(2)}(z,y)=i\delta\left(x-y\right).\tag{7}$$

Podemos mostrar também, de forma análoga, que

$$\int dz\;\Gamma^{(2)}(x,z)G_c^{(2)}(z,y)=i\delta\left(x-y\right)\tag{8}$$

Continuamos procurando a equação que define $\Gamma^{(1,2)}$ em termos de $G_c^{(1,2)}$. Partimos novamente de

$$\begin{aligned}
&\psi_c\left(x\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}=\delta\left(x-y\right)\\
=\;&\int dz\left(\left(\frac{\delta\psi_c\left(x\right)}{\delta J^\mu\left(z\right)}\right)\left(J^\mu\left(z\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\right.\\
&\left.+\left(\psi_c\left(x\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(z\right)}\right)\left(\eta\left(z\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)-\left(\bar{\eta}\left(z\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(z\right)}\psi_c\left(x\right)\right)\right)\\
=\;&\int dz\left(-\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\frac{\delta}{\delta J^\mu\left(z\right)}W_\lambda\right)\left(\frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}}\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\right.\\
&-\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}W_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(z\right)}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(z\right)}\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\\
&\left.+\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(z\right)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}W_\lambda\right)\left(\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(z\right)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(y\right)}\right)\right).
\end{aligned}\tag{9}$$

Tomamos, então, mais uma derivada funcional em relação a λ, zerando as fontes

$$\begin{aligned}
0 &= \int dz \left(\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)} \frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda(w)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(z)} \right) \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(z)} \Gamma_\lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)} W_\lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(z)} \right) \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(z)} \frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda(w)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y)} \right) \right)_{\substack{\eta=\bar{\eta}=J^\mu=\lambda \\ =\psi_c^\lambda=\bar{\psi}_c^\lambda=A_c^\mu=0}} \\
&\Longrightarrow \int dz \left(-G_c^{(1,2)}(w,x,z)\,\Gamma^{(2)}(z,y) + \left(iG_c^{(2)}(x,z) \right) \Gamma^{(1,2)}(w,z,y) \right) = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Multiplicando por $\Gamma^{(2)}(u,x)$ à esquerda e integrando sobre x, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int dxdz \left(-\Gamma^{(2)}(u,x)\,G_c^{(1,2)}(w,x,z)\,\Gamma^{(2)}(z,y) \right. \\
&\quad \left. + i\underbrace{\Gamma^{(2)}(u,x)\,G_c^{(2)}(x,z)}_{i\delta(u-z)}\,\Gamma^{(1,2)}(w,z,y) \right) \\
&\Longrightarrow \Gamma^{(1,2)}(w,u,y) = -\int dxdz \left(\Gamma^{(2)}(u,x)\,G_c^{(1,2)}(w,x,z)\,\Gamma^{(2)}(z,y) \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Finalmente, vamos expressar $\Gamma_\mu^{(3)}$ em termos de $G_{\mu,c}^{(3)} = \left\langle 0 \left| T[A_\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(\bar{x}_1) \right| 0 \right\rangle_c$. Para isso, vamos retomar a equação (9), tomando agora uma derivada funcional adicional em relação a $J^\nu(w)$ e zerando as fontes ao final:

$$\begin{aligned}
&\int dz \left(\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)} \frac{\delta W_\lambda}{\delta J^\nu(w)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(z)} \right) \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c^\lambda(z)} \Gamma_\lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c^\lambda(y)} \right) + \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)} W_\lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(z)} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int du \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c^\lambda(z)} \frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta A_{\alpha,c}^\lambda(u)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c^\lambda(y)} \right) \frac{\delta A_{\alpha,c}^\lambda(u)}{\delta J^\nu(w)} \right) \right) \Bigg|_{\substack{\eta=\bar{\eta}=J^\mu=\lambda \\ =\psi_c^\lambda=\bar{\psi}_c^\lambda=A_c^\mu=0}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Lembrando que

$$\left. \frac{\delta A_{\alpha,c}^\lambda(u)}{\delta J^\nu(w)} \right|_{J^\nu=0} = \left. \frac{\delta^2 W_\lambda}{\delta J^\alpha(u)\,\delta J^\nu(w)} \right|_{J^\nu=0} = iG_{\alpha\nu}^{(2)}(u,w), \tag{13}$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
&\int dz \left(-G_\nu^{(3)}(w,x,z)\,\Gamma^{(2)}(z,y) + \int du \left(iG^{(2)}(x,z)\,\Gamma^{\alpha(3)}(u,z,y)\,iG_{\alpha\nu}^{(2)}(u,w) \right) \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Multiplicando por $\Gamma^{(2)}(v,x)$ à esquerda, integrando sobre x, multiplicando por $\Gamma^{\nu\beta(2)}(w,t)$ à direita e integrando sobre w, temos

$$\begin{aligned}
&\int dxdzdw \Big(-\Gamma^{(2)}(v,x)\, G^{(3)}_{\nu}(w,x,z)\, \Gamma^{\nu\beta(2)}(w,t)\, \Gamma^{(2)}(z,y) \\
&-\int du \underbrace{\Gamma^{(2)}(v,x)\, G^{(2)}(x,z)}_{i\delta(v-z)} \Gamma^{\alpha(3)}(u,z,y) \underbrace{G^{(2)}_{\alpha\nu}(u,w)\, \Gamma^{\nu\beta(2)}(w,t)}_{i\delta^{\beta}_{\alpha}\delta(u-t)}\Bigg) \\
=\;& 0. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma^{(3)}_{\mu}(x,x_1,y_1) = \int dudzdw \left(\Gamma^{(2)}(x_1,u)\, G^{\nu(3)}(w,u,z)\, \Gamma^{(2)}_{\nu\mu}(w,x)\, \Gamma^{(2)}(z,y_1)\right). \qquad (16)$$

Bibliografia

[1] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, MacGraw Hill, 1980.

[2] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 2ª edição, Oxford University Press, 1993.

[3] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1986.

[4] H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72** (1947), 339.

[5] T.-P. Cheng e L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford at Clarendon Press, 2006.

[6] F. Englert e R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 321; P. W. Higgs, *Phys. Lett.* 12 (1964), 132, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 508, *Phys. Rev.* **145** (1966), 1156; G. S. Guralnik, C. R. Hagen e T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 585; T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967), 1554.

[7] ATLAS Collaboration, *Physics Letters B* **716** (2012), 1.

[8] Reinhold A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 1996.

[9] M. Lüsher, *Chiral gauge theories revisited,* arXiv:hep-th/0102028v2, 2001.

[10] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 1219.

[11] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett. B* **167** (1986), 225.

[12] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett. B* **183** (1987), 311.

[13] O. Babelon, F. Shaposnik e C. Viallet, *Phys. Lett. B* **177** (1986), 385.

[14] G. L. Santiago Lima, R. Chaves e S. A. Dias, *Ann. Phys.* **327** (2012), 1435.

[15] L. Alvarez-Gaumé e E. Witten, *Nucl. Phys. B* **234** (1984), 269.

[16] L. Alvarez-Gaumé L. e P. Ginsparg, *Ann. of Phys.* **161** (1985), 423.

[17] K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, The International Series of Monographs on Physics, Oxford University Press, 2004.

[18] Daniel Ribeiro de Pontes, *Comportamento operatorial da anomalia de calibre no modelo de Jackiw-Rajaraman*, dissertação de Mestrado, CBPF, agosto de 2014.

[19] C. A. Linhares, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev. D* **35** (1987), 2501.

[20] S. A. Dias e C. A. Linhares, *Phys. Rev. D* **45** (1992), 2162.

[21] A. P. C. R. de Lima e S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **31** (2016), 1650062.

[22] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory,* Cambridge University Press, 1996.

[23] L. D. Faddeev e A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction To Quantum Theory*, 2ª edição, Westview Press, 1993.