

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Tese de Doutorado

**Emissão de Radiação Gravitacional em
Fusões de Buracos Negros: Uma
Modelagem Teórica e Computacional no
Formalismo Característico**

Rafael Fernandes Aranha

Orientador: Prof. Dr. Ivano Damião Soares

Rio de Janeiro - Brasil

Abril de 2011

Agradecimentos

"...o campeonato eu dedico pra mim mesmo, fui eu que ganhei, ora...vou dedicar pra quem?"

Nelson Piquet

- ✠ Agradeço primeiramente aos meus pais Damião Aranha e Maria José Fernandes e aos meus irmãos Alexandre Fernandes e Ana Maria Aranha por todas as palavras de carinho e incentivo que me passaram, não somente durante esses cinco anos de doutoramento, mas durante toda a minha vida.
- ✠ Ao Prof. Dr. Ivano Damião Soares, mentor desta tese, pela sua imensa dedicação à minha formação, transferindo, dentro das minhas possibilidades de entendimento, todo o seu conhecimento, não só de ciência, como de honestidade e persistência.
- ✠ Ao Prof. Dr. Eduardo Valentino Tonini pela colaboração nos trabalhos desenvolvidos nesta tese e também pela sua contribuição na minha formação computacional.
- ✠ Ao Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira pela colaboração inicial nos trabalhos e por me introduzir aos métodos numéricos em Relatividade Geral.
- ✠ Aos pesquisadores do ICRA-CBPF, Prof. Dr. Mario Novello, Prof. Dr. Nelson Pinto-Neto, Prof. Dr. José Salim, Prof. Dr. Luiz Alberto, Prof. Dr. Sérgio Jofilly, Prof. Dr. Nami Svaiter, Prof. Dr. Felipe Tovar, Prof. Dr. Martin Makler pela contribuição à minha formação através de cursos e, principalmente, através do "Pequeno Seminário".
- ✠ Aos pesquisadores do CBPF, Prof. Dr. José Helayël, Prof. Dr. Evaldo Curado, Prof. Dr. Itzhak Roditi pelos cursos ministrados e que

também contribuíram para a minha formação e ao Prof. Dr. André Massafferri por me fazer assistir "...E o Vento Levou" durante a escrita da tese.

- ✠ Aos amigos também membros (e ex-membros) do ICRA-CBPF, Rafael Perez, Felipe Poulis, Rodrigo Maier, Maria Borba, Paulo Guilherme, Gabriel Menezes, Marcela Campista, Érico Goulart, Nilton Medeiros, Eduardo Rodrigues, Vicente Antunes, Aline Nogueira, Grasielle Santos, Eduardo Bittencourt, Josephine Rua, Azucena Paz, Habib Dumet, Gabriel Caminha, Carlos Brandt, Diego Pantoja, Mariana Lima, Sandro Vitenti, Stella Fernandes, Beatriz Siffert, Júnior Toniato, Florença Teppa e Maria Elidaiana.
- ✠ Aos amigos do CBPF, Andre Nicolai, Nuno Crokidakis, Eduardo Zambrano, Fernando Nicacio, Alexis Hernández, Rômulo Abreu, André Gavini, Bráulio Agostini, Thiago Caramês, Marília Carneiro, Bruno Dias e Ricardo Kullock.
- ✠ À Raquel Germer que sempre acreditou na minha capacidade e me incentivou durante grande parte do desenvolvimento da tese.
- ✠ Aos meus primos Julio Magalhães, Lucio Gomes, Maxwell Martins e Alex Martins por dividirem os melhores momentos da infância, onde se constrói aquilo que somos hoje.
- ✠ Aos amigos da "Turma do Hospital" que, apesar da distância espaço-temporal, permanecem na minha memória, Fabio da Silva, Ricardo Lago, Yves Carabajal, José Renato, Alan Costa, Caio Herculano, Nicholas Osório, Jefferson Osório, Públio Carreiro, Nathércio Carreiro, Daniel Martins e Daniel Vitorino
- ✠ Aos amigos do "Coquetel com Batucada", Diogo Buarque, Rodrigo Sudano, Nelson Prado, Gustavo Pinheiro, Soraia Pinheiro, Luciana Silva, Leandro Gomes, Carol Bagni, Mariana Duarte, Rafael Oliveira, Lycia Oliveira, Maria Gabriela, Maria Clara, Daniel Piras.
- ✠ Ao José Ricardo e à Elisabete de Souza da CFC pela solução dos problemas que eu mesmo causei.

- ✠ Aos secretários da TEO-CBPF e do ICRA-CBPF, Almério de Castro, Elisete Martins, Luciene Silva, Rosângela de Castro e Elizabeth Martins pela paciência ao longo dos dias.
- ✠ Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela disponibilidade financeira que me concede desde os tempos de Iniciação Científica.
- ✠ Por fim, agradeço ao ilustre Clube de Regatas Vasco da Gama por não ter vencido nenhuma competição ao longo desses 5 anos (num total de 8), não desviando a minha atenção dos deveres acadêmicos. Agora, ilustre clube, sintase liberado para vencer eternamente.

Resumo

O estudo teórico e computacional de colisões de buracos negros e a consequente emissão de radiação gravitacional no processo é um dos temas de pesquisa mais investigados pela comunidade científica atual. As consequências dessas investigações levaram ao desenvolvimento de uma série de tecnologias avançadas, tais como, computadores de alto processamento, técnicas de cálculo e de análise numérica, construção de detectores de ondas gravitacionais, criação e desenvolvimento de software livre, assim como a inserção de modelos teóricos que testem os limites desta área de pesquisa. O objetivo principal desta tese é estabelecer uma diferente via de análise do problema com a combinação de três fundamentações teóricas enquadradas na descrição característica do problema de valor inicial da Relatividade Geral; os formalismos de Newman-Penrose (NP), de Bondi-Sachs (BS) e de Robinson-Trautman (RT). Os espaços-tempos de Robinson-Trautman servem de base tanto para a construção de dados iniciais que representam uma colisão frontal de buracos negros quanto para a descrição da evolução dinâmica a partir destes. Toda a análise da dinâmica característica é feita a partir da integração numérica da equação mestra axial de Robinson-Trautman com a utilização de técnicas numéricas Espectrais e de Runge-Kutta. Os formalismos de Newman-Penrose e de Bondi-Sachs são responsáveis pela caracterização da zona de radiação gravitacional e pela descrição das leis de conservação de energia e de momento linear, respectivamente. Os dados iniciais para a dinâmica RT já possuem um único horizonte aparente global, descrevendo a colisão de buracos negros a partir da fase de fusão. A análise dos resultados obtidos numericamente se concentra principalmente nos padrões angulares e temporais das ondas gravitacionais, na eficiência da extração de massa-energia, na distribuição de momento linear do buraco negro remanescente da colisão, nas leis de conservação de energia e momento e nas velocidades de recuo do sistema geradas pelo impulso das ondas emitidas.

Abstract

The theoretical and computational study of collisions of black holes and the subsequent emission of gravitational radiation in the process is one of the most investigated topics of research by the scientific community today. The consequences of these investigations led to the development of a series of advanced technologies such as high performance computers, processing, techniques for computing and numerical analysis, construction of gravitational wave detectors, creation and development of free software, as well as the inclusion of models to test the limits of this area of research. The main objective of this thesis is to establish a different way of analyzing the problem with the combination of three theoretical frames on the description of the characteristic initial value problem of General Relativity; the Newman-Penrose (NP), Bondi-Sachs (BS) and Robinson-Trautman (RT) formalisms. The Robinson-Trautman spacetimes form the basis both for the construction of initial data representing a head-on collision of black holes and for describing the dynamic evolution from them. All analysis of the characteristic dynamics is made from the numerical integration of the axial Robinson-Trautman equation through the utilization of Spectral and Runge-Kutta numerical methods. The Newman-Penrose and Bondi-Sachs formalisms are responsible for the characterization of the gravitational radiation zone and the description of the conservation laws of energy and momentum respectively. The initial data for the RT dynamics already have a single global apparent horizon, describing the collision of black holes from the merger stage. The analysis of numerical results focuses mainly on the angular and temporal patterns of gravitational waves, in the extraction efficiency of mass-energy, the momentum distribution of the black hole remnant of the collision, the conservation laws of energy and momentum and the kick velocities generated by the impulse of the emitted waves.

Sumário

1	Introdução	4
1.1	Introdução Contextual	4
1.1.1	Caracterização e Análise do Problema	6
1.1.2	Desenvolvimento Histórico	8
1.1.3	Implicações Astrofísicas	12
1.1.4	Objetivo e Organização da Tese	17
1.2	Introdução Matemática	20
1.2.1	Formalismo de Tetradas	20
1.2.2	Formalismo de Newman-Penrose	27
1.2.3	Comportamento Assintótico do Campo Gravitacional nas Proximidades do Infinito Nulo	44
2	Emissão de Radiação Gravitacional no Formalismo Característico	55
2.1	O Trabalho Pioneiro de Bondi, van der Burg, Metzner e Sachs	55
2.1.1	Hipersuperfícies Características na Relatividade Geral	55
2.1.2	Coordenadas Radiativas de Bondi	56
2.1.3	A Métrica Radiativa de Bondi	58
2.1.4	O Problema de Valor Inicial Característico	59
2.1.5	Massa de Bondi e Conservação de Energia	62
2.1.6	Caracterização da Zona de Radiação	66
2.1.7	O Grupo de Bondi-Metzner-Sachs e a Conservação de Momento Linear	68
2.2	Ondas Esféricas no Vácuo: o Espaço-Tempo de Robinson-Trautman	76

2.2.1	Definição e Descrição no Formalismo Característico .	77
2.2.2	Soluções Estacionárias e Caracterização da Zona de Radiação Gravitacional	80
2.2.3	Transformação das Coordenadas de Bondi Para as Coordenadas de Robinson-Trautman: Conservação de Energia e Momento Linear	82
3	Emissão de Radiação Gravitacional Através da Fusão de Dois Buracos Negros de Schwarzschild	89
3.1	Construção dos Dados Iniciais Característicos	90
3.2	Evolução Numérica dos Dados Iniciais e Caracterização da Configuração Final	96
3.3	Padrões Angulares e Temporais da Emissão de Radiação Gravitacional	104
3.4	Análise dos Processos de Transferência de Energia	111
3.4.1	A Eficiência da Transferência de Energia Através da Emissão de Radiação Gravitacional	111
3.4.2	Aspectos Acerca da Conservação de Energia	118
3.5	Análise dos Processos de Transferência de Momento Linear	122
3.5.1	A Distribuição de Momento do Buraco Negro Remanescente e o Regime de Radiação Bremsstrahlung	122
3.5.2	Extração de Momento e Velocidades de Recuo na Emissão de Ondas Gravitacionais	130
3.5.3	A Busca pelo Movimento do Centro-de-Massa do Sistema em Fusão	141
4	Considerações Finais	148
4.1	Recapitulação da Tese	148
4.2	Desenvolvimentos Futuros	153
4.3	Colaborações	153
A	Descrição do Espaço-Tempo de Bondi no Formalismo de Newman-Penrose	155

B	Descrição do Espaço-Tempo de Robinson-Trautman no Formalismo de Newman-Penrose	165
C	Algoritmo de Runge-Kutta de Quarta Ordem para a Solução de (3.30)	170
	Referências Bibliográficas	172

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução Contextual

"This is not something made up like in a science fiction movie...rather, we have confidence that these results are the real deal, that we have the true gravitational wave fingerprint predicted by Einstein for the black hole merger."

Joan Centrella

Um dos grandes desafios da física do século XXI está na busca pelas ondas gravitacionais. Estas são previstas pela Relatividade Geral, a teoria padrão que descreve o campo gravitacional. Hoje em dia, a importância dessa área de pesquisa está na possibilidade de se combinar os modelos teóricos que descrevem a emissão e propagação de ondas gravitacionais com as observações astrofísicas que deverão ser obtidas por uma nova geração de detectores – interferômetros ópticos de larga escala – que rotineiramente observarão as ondas gravitacionais produzidas por sistemas massivos e de rápida evolução tais como espirais binárias de estrelas de nêutrons, de buracos negros e mistas entre estrelas de nêutrons e buracos negros, estes dois últimos ainda não observados. Parte da comunidade científica, mais ortodoxa, estava um tanto resistente a respeito da existência das ondas gravitacionais. Contudo, o Prêmio Nobel de 1993

foi concedido a Hulse e Taylor por suas observações experimentais e subsequentes interpretações da evolução da órbita do pulsar binário PSR 1913+16 [1, 2], com o decaimento da órbita binária sendo consistente com a energia e momento angular expelidos deste sistema em forma de ondas gravitacionais [3]. A observação desse novo fenômeno e dos estados de polarização dos sinais das ondas irá permitir uma verificação experimental direta das previsões ondulatórias da Relatividade Geral; mais importante porém, a detecção desses sinais deverá fornecer aos observadores informações novas e únicas a respeito de processos astrofísicos como, por exemplo, a demografia de buracos negros dentro e fora de galáxias. É por essa razão que existe o interesse mundial na detecção dessas ondas. O problema para o físico experimental se concentra no fato de que as magnitudes previstas para as amplitudes das deformações no espaço, na vizinhança da Terra, causadas pelas ondas gravitacionais, mesmo para os eventos astrofísicos mais violentos, são extremamente baixas, da ordem de 10^{-21} ou ainda mais baixas [5].

Uma série de detectores, tanto de interferometria a laser, como os localizados nos Estados Unidos (projeto LIGO, liderado pelo consórcio Caltech/MIT) [6], na Austrália (projeto AIGO) [7], na Itália (projeto VIRGO, uma junta comercial Itália/França) [8], na Alemanha (projeto GEO 600, uma colaboração Grã-Bretanha/Alemanha) [9] e no Japão (projeto TAMA 300) [10], quanto detectores de massa ressonante como, por exemplo, o projeto brasileiro Mario Schenberg [12], estão em fase de construção, aperfeiçoamento e/ou de testes para que, num futuro próximo, forneçam dados observacionais que tentem desvendar questões fundamentais sobre uma série de processos astrofísicos, assim como acerca da origem do universo.

Um ousado projeto de detector a ser lançado em órbita e administrado pela NASA, o LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [11], pretende observar fontes astrofísicas e cosmológicas de ondas gravitacionais de baixas frequências (0.03 mHz a 0.1 Hz, correspondendo a períodos de oscilação em torno de 10 horas a 10 segundos). Essa banda de frequência está dentro da faixa que corresponde à emissão proveniente de sistemas binários de buracos negros massivos [21] que se formam após fusões de

galáxias (esse ponto será discutido adiante). Devido a esse fato, a coalescência de buracos negros binários é esperada como sendo uma das fontes astrofísicas de radiação gravitacional com energia mais intensa e de maior probabilidade de detecção. Como a emissão de ondas gravitacionais retira energia e momento da fonte binária, suas órbitas diminuem e os buracos negros eventualmente se fundem em um único buraco negro, produzindo uma intensa quantidade de radiação.

Essas futuras observações apresentam uma chamada urgente à comunidade de teóricos relativistas para que estes forneçam imediatamente padrões sobre a radiação que é esperada dessas colisões. A conciliação dos dados teóricos com os observacionais é de extrema importância para uma construção sólida de argumentos que testem os diversos aspectos da teoria da Relatividade Geral, abrindo um novo campo da astronomia.

1.1.1 Caracterização e Análise do Problema

A colisão de buracos negros binários pode ser dividida basicamente em três estágios. Durante a fase de **espiral**, os buracos negros estão suficientemente separados para serem tratados como partículas pontuais. Neste estágio, o período orbital é muito mais curto do que a escala de tempo na qual os parâmetros orbitais variam e os buracos espiralam-se em órbitas quase circulares. Quando os buracos negros estão bem próximos um do outro (no caso em não podem ser mais considerados como partículas pontuais), eles entram na fase de **fusão**. Nesse regime dinâmico de campo forte, os buracos imergem-se, fundindo em um único e altamente distorcido buraco negro, envolto por um horizonte aparente global comum. Finalmente, chega-se ao estágio de **ringdown**, onde o buraco negro remanescente verte as distorções através da emissão de ondas gravitacionais, alcançando a fase estacionária de um buraco negro com ou sem rotação.

O conhecimento das formas de onda desses três estágios da coalescência de buracos negros é de extrema importância para o processo de detecção e de análise de dados assim como para as aplicações astrofísicas. A fase de espiral pode ser calculada analiticamente através de técnicas

de aproximação pós-newtonianas (PN) [13]. A forma de onda dessa fase de espiral é basicamente um pulso - uma senóide crescente, tanto em frequência quanto em amplitude. A fase de ringdown também pode ser calculada analiticamente por técnicas de teoria de perturbações de buracos negros, cujas formas de onda são senóides amortecidas com a presença dos chamados modos quase-normais (QNM) [103]. Contudo, a fase de fusão só pode ser entendida através de simulações numéricas das equações de Einstein que geram formas de onda que até recentemente eram desconhecidas. Tais simulações numéricas são construídas com base em duas decomposições distintas das equações de Einstein: a da **formulação característica de Bondi-Sachs (BS)** [90] e a do **formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) ou de Cauchy** [4]. A primeira formulação será o foco da presente tese e será discutida nos capítulos subsequentes. Já a segunda formulação é a mais utilizada na literatura e praticamente todos os resultados significativos de simulações de colisões de buracos negros são obtidos desta formulação.

A decomposição das equações de Einstein no formalismo ADM se caracteriza por um folheamento do espaço-tempo em hipersuperfícies 3-dimensionais do tipo espaço, cada uma rotulada pela coordenada temporal $t = \text{constante}$. Nessa decomposição, as dez componentes independentes da métrica $g_{\mu\nu}$ são dadas pela função lapso N que é responsável pela distância perpendicular entre duas hipersuperfícies vizinhas, pelo vetor deslocamento N^i , responsável pelo deslocamento de um ponto da hipersuperfície espacial t_0 , localizado na hipersuperfície subsequente $t_1 = t_0 + dt$ e da métrica 3-dimensional γ_{ij} , localizada nas hipersuperfícies $t = \text{constante}$. Com isso, a métrica do formalismo ADM pode ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = (N^2 - N^i N_i) dt^2 - 2N_i dt dx^i - \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1)$$

As equações de Einstein referentes à (1.1) são divididas em dois conjuntos: quatro equações de vínculo e seis equações de evolução. As equações de vínculo formam um conjunto de equações diferenciais parciais

ais elípticas independentes do tempo e que devem ser satisfeitas em cada hipersuperfície $t = \text{constante}$. Especificamente, os vínculos são resolvidos primeiro para que dados iniciais de buracos negros binários possam ser utilizados na simulação. Após esse passo, os dados iniciais são propagados para hipersuperfícies $t > t_0$, onde t_0 é a hipersuperfície onde os dados iniciais são obtidos como a solução dos vínculos.

Uma vez munido das condições iniciais, as equações de Einstein de evolução devem ser integradas numericamente com relação às várias variáveis de campo em uma rede de pontos discretos que representam o domínio do espaço-tempo de interesse. Existem duas técnicas gerais de lidar com as derivadas espaciais que aparecem nessas equações. O método de **diferenças finitas** [4] interpola a derivada em um dado ponto a partir dos pontos vizinhos de acordo com uma expansão de Taylor no espaçamento da rede. Já os **métodos espectrais** [95, 96], assumem a solução na forma de uma expansão numa base de funções ortogonais; uma vez que os coeficientes modais (espectrais) da expansão são obtidos numericamente, as derivadas da solução podem ser obtidas analiticamente. Em ambos os casos, a integração temporal pode ser lidada de distintas formas, sendo a mais comum o algoritmo de Runge-Kutta [4]. Assim como a formulação ADM, o método de diferenças finitas é o mais utilizado na literatura, apesar de os métodos espectrais estarem ganhando um destaque maior na comunidade [14]. Nesta tese, assim como o formalismo característico da Relatividade Geral, os métodos espectrais serão os métodos utilizados na evolução numérica do sistema de fusão de buracos negros.

1.1.2 Desenvolvimento Histórico

A primeira tentativa de se obter a evolução numérica das equações de Einstein, a partir do espaço-tempo de um sistema binário de buracos negros em colisão frontal, foi dada por Hahn e Lindquist em 1964 [15]. Isto se deu antes mesmo da introdução do termo "buraco negro" por Wheeler. Neste trabalho pioneiro, eles utilizaram os dados iniciais de Misner [108] e, após alguns testes, chegaram a conclusão de que os erros numéricos cresciam de forma demasiada, impossibilitando uma evolução

mais longa, com a obtenção das quantidades físicas envolvidas no processo. Dado o curto tempo de computação, não houve uma maior motivação para explorar o problema de emissão de radiação gravitacional. Em 1975, Smarr [16] e logo em seguida Eppley [17], simularam novamente a colisão frontal de dois buracos negros, agora com o objetivo principal de computar as formas de onda gravitacionais emitidas no processo. Apesar de utilizarem um espaço-tempo de simetria axial e terem realizado os cálculos numéricos aproximadamente uma década após o trabalho seminal de Hahn e Lindquist, a capacidade computacional da época ainda estava aquém de solucionar o problema da forma em que ele foi proposto, o que gerou resultados pouco acurados. Apesar disso, Smarr e Eppley foram capazes de obter algumas formas de onda da solução numérica.

Devido a esse empecilho computacional, nenhum trabalho de solução numérica das equações da Relatividade Geral foi desenvolvido até o início da década de 1990, onde o projeto para a construção do detector LIGO tornou-se mais sólida [18]. Os primeiros estudos, num trabalho de revisão do caso de colisões frontais de buracos negros [19], revelaram que, mesmo que o problema numérico em si pudesse ser melhor explorado analiticamente (por exemplo, com uma escolha apropriada de um sistema de coordenadas e/ou fornecendo dados iniciais astrofísicos mais relevantes), chegou-se a um consenso de que o maior obstáculo para a resolução do problema ainda era o de cunho computacional [20, 51]. No final dos anos 90, as primeiras técnicas numéricas tridimensionais na evolução de sistemas binários de buracos negros foram obtidas [44]. Essas técnicas, porém, proporcionavam a quebra dos códigos numéricos muito antes que uma porção significativa da órbita binária pudesse ser evoluída.

Neste contexto, o projeto Lazarus [45] surgiu como uma novidade para o problema de se obter as formas de onda de binárias de buracos negros, combinando curtas simulações numéricas com métodos de perturbação de buracos negros. Como as simulações só eram obtidas para um curto intervalo de tempo e a teoria de perturbação de buracos negros poderia aproximar a dinâmica final do buraco negro remanescente, o projeto Lazarus procurou aplicar relatividade numérica para evoluir a região de campo forte, a fase de fusão, provendo um modelo híbrido para uma

parte significativa do problema.

Simultaneamente às investigações do projeto Lazarus, outros progressos na simulação de fusões de buracos negros foram feitos, incluindo novas decomposições das equações de Einstein e novas formas de controlar a evolução das coordenadas numéricas. O mais famoso desses desenvolvimentos é o chamado sistema de Baugamarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) [48], que superou problemas de instabilidade associados à forma das equações padrão do formalismo ADM [49]. No sistema BSSN, o conjunto de equações de evolução é descrito com derivadas primeiras no tempo e derivadas segundas com relação às coordenadas espaciais e é extremamente hiperbólico [50]. Evoluções temporais estáveis foram efetuadas utilizando uma condição de coordenadas que evoluem a função lapso N drasticamente, evitando que a folheação quebre nas singularidades dos buracos negros [51]. Contudo, a estabilidade das simulações continuavam limitadas a um curto intervalo de tempo devido *a)* a uma falha do sistema de coordenadas, denominada de grid stretching (estiramento da malha), na qual as coordenadas tendem a cair dentro dos buracos negros; e *b)* a instabilidades relacionadas com o modo de lidar com os buracos negros numericamente. A eliminação do grid stretching requereu um desenvolvimento de técnicas apropriadas para um controle dinâmico das coordenadas espaciais e que são governadas pela evolução do vetor deslocamento N^i . As primeiras evoluções de longa duração de buracos negros distorcidos contavam com uma classe de esquemas de evolução do vetor deslocamento, conhecidos como condições de congelamento- Γ , as quais foram inspiradas na formulação BSSN. Com esse esquema, um simples buraco negro distorcido poderia ser evoluído indefinidamente e com uma significativa acurácia [52]. Estes estudos permitiram que uma determinação numérica completa das formas das ondas gravitacionais na fase de ringdown, quando o buraco negro distorcido atinge, fisicamente e numericamente, um estágio de estabilidade. Este método também deixou uma base para avanços futuros nas simulações de colisões de buracos negros [53].

Contudo, outro aspecto das condições de calibre das coordenadas espaciais deixou uma tarefa crítica para as simulações de colisões de bura-

cos negros. Como a Relatividade Geral permite sistemas de coordenadas arbitrários, muitos grupos adotaram condições de coordenadas que não permitiam que os buracos negros se movessem ao longo do domínio computacional. O uso dessas condições simplificou o problema de lidar com as singularidades dos buracos negros, que eram lidadas ou por **extirpar** os interiores (com os horizontes) do domínio computacional [54] ou por representar os buracos negros como uma **punctura** [55]. Apesar de que progressos foram feitos com relação à implementação do movimento das regiões extirpadas [56], é muito mais simples considerar que a região extirpada se mantivesse fixa na malha computacional [57]. De maneira similar, o tratamento das puncturas também propunha que os buracos negros ficassem fixos na malha computacional e a singularidade fosse tratada analiticamente de uma forma independente do tempo. Contudo, para configurações binárias nas quais os buracos negros se movem, o custo de mantê-los fixos no espaço de coordenadas foi pago por acrescentar torção e estirar os campos dinâmicos, que eventualmente levaram a erros computacionais elevados.

No início do ano de 2005, Pretorius [43] surpreendeu toda a comunidade de relatividade numérica ao anunciar a primeira simulação robusta e completa de fusão de buracos negros de massas iguais. Após completar aproximadamente uma órbita, os buracos negros mergulham e se fundem para formar um único, distorcido buraco negro que logo após entra no regime de ringdown. Pretorius foi o primeiro a obter as formas das ondas gravitacionais das fases de espiral e de fusão diretamente de simulações numéricas.

Pretorius [58] empregou diversas técnicas bem distintas daquelas implementadas nos tratamentos anteriores do problema de colisões de buracos negros. Ao invés de utilizar a formulação BSSN, ele aplicou o formalismo harmônico generalizado [59] diretamente, integrando a métrica com as equações de evolução com derivadas segundas tanto no tempo quanto nas coordenadas espaciais. Estas equações foram implementadas numericamente usando a técnica de **refinamento de malha adaptável** que permitiu uma alta resolução em torno dos buracos negros, mantendo um largo domínio computacional. Pretorius utilizou coordenadas espaciais

compactificadas para trazer o infinito espacial para o domínio computacional com uma escolha de calibre fortemente ligada ao seu formalismo de evolução. Segundo a referência [60], Pretorius acrescentou termos nas equações de evolução para especificamente reduzir quaisquer violações às equações de vínculo. Em suas simulações, os buracos negros foram extirpados e se moviam livremente ao longo do domínio computacional.

No final de 2005, contudo, um novo e robusto método baseado na formulação BSSN foi anunciado. O método de puncturas móveis foi descoberto simultaneamente e independentemente pelos grupos da Universidade do Texas em Brownsville (UTB) [46] e o NASA's Goddard Space Flight Center (GSFC) [47]. Nesta descrição, os buracos negros são representados como puncturas mas que não são vinculadas a permanecer fixas na malha de coordenadas. Ao invés disso, elas se movem livremente ao longo da malha por intermédio de novas condições de coordenadas.

Os grupos da UTB e do GSFC descobriram e aplicaram métodos similares ao mesmo problema: evoluir uma binária de buracos negros de massas iguais (e sem spin) a partir da órbita final da fase de espiral, passando pela fase de fusão e de ringdown, estudando as ondas gravitacionais emitidas em todo o processo. A primeira geração de formas de onda obtidas por Pretorius e pelos grupos da UTB e do GSFC mostrou a mesma explosão de radiação terminando em uma fase senoidal-amortecida de ringdown e que as formas de onda estavam qualitativamente de acordo com as obtidas pelo projeto Lazarus.

A descoberta do método de puncturas móveis foi o início do campo de pesquisa de evoluções de buracos negros binários. Pelo fato de que o método das puncturas era baseado em outros métodos já comumente usados pelos grupos de pesquisa, a maioria dos pesquisadores da área rapidamente alcançaram evoluções estáveis e acuradas utilizando seus códigos numéricos já existentes, adotando simplesmente novas condições de coordenadas [69].

1.1.3 Implicações Astrofísicas

Os diversos estudos de relatividade numérica citados anteriormente

revelaram diversos detalhes da física envolvida na colisão de buracos negros. Apesar de que ainda há muito a ser explorado, esse novo entendimento já contribui para o planejamento e interpretações das observações de buracos negros astrofísicos no aparato teórico da Relatividade Geral, cuja teoria é tomada como o modelo de entendimento para a interação gravitacional.

Formas de onda nas observações de ondas gravitacionais

A saída de um detector de ondas gravitacionais é basicamente uma corrente de dados que precisam ser relacionados com sinais reais. Esta identificação requer um padrão de formas de onda acurado que represente o melhor retrato da radiação proveniente de fontes esperadas, como das provenientes de colisões de buracos negros; estes padrões podem então ser comparados com a corrente de dados através de uma filtragem [61].

Antes do advento de simulações de fusões de buracos negros, as únicas formas de onda disponíveis para análise de dados observacionais eram baseados na aproximação pós-newtoniana. Estas formas de onda eram essencialmente pulsos da fase de espiral e não incluíam o campo forte da fase de fusão. As novas e ricas informações agora disponíveis através de simulações de relatividade numérica revolucionaram o quadro da análise de dados de diversas formas.

A disponibilidade das fases de fusão-ringdown pode crescer significativamente nos sinais de resposta do detector de ondas gravitacionais. Munido de uma forma de onda numérica da fase de fusão com longa duração e de acurácia aceitável, pode-se extendê-la para trás no tempo para cobrir a longa fase de espiral através de uma colagem com a forma de onda pós-newtoniana. Essa forma de onda híbrida foi primeiramente produzida pelo grupo do GSFC para o caso de colisões frontais de buracos negros de massas iguais, sem spin [62]. Usando este modelo híbrido, pode-se investigar os sinais de resposta com alcance completo das três fases, tanto para os atuais quanto para os futuros detectores de ondas gravitacionais.

Essas formas de onda híbridas geradas podem também ser utilizadas para aperfeiçoar as técnicas de análise de dados. Como as análises de dados de ondas gravitacionais anteriores não eram baseadas no conhecimento das formas de onda da fase de fusão, um primeiro passo natural é testar o quão satisfatórias serão essas técnicas para a detecção dos sinais de onda da fase de fusão previstas pelas simulações numéricas. Em 2009, o projeto NINJA (Numerical INjection Analysis) [63] usou uma injeção direta de uma faixa de longas e curtas formas de onda numéricas no simulador de análise de dados dos detectores LIGO e Virgo com este propósito. O resultado foi o teste-base mais realístico até os dias de hoje envolvendo métodos de análise de dados de detecção de ondas gravitacionais que incluem padrões de formas de onda da fase completa ou de fases parciais, assim como buscas de emissões de ondas ainda não modeladas teoricamente. Estudos mais aprofundados de algoritmos de detecção com formas de onda de relatividade numérica estão em pleno desenvolvimento.

Medição dos parâmetros de buracos negros

A porção das formas de onda da fase de fusão, apesar de possuir uma curta duração comparada às outras fases, pode conter novas e importantes informações não presentes na fase de espiral. Outro fato a ser notado é que alguns modos da radiação que não são significativos na fase de espiral podem se tornar proeminentes na fase de fusão e informações que esses modos carregam consigo passam a ser disponíveis aos observadores [64].

Assim que as ondas gravitacionais sejam detectadas, o maior interesse estará na identificação dos parâmetros físicos das fontes, como, por exemplo, a razão de massas dos buracos negros. Esses parâmetros estão impressos nos sinais de onda, juntamente com parâmetros extrínsecos, como a posição no céu e a distância do observador às fontes. Para fortes sinais de onda, esperados para sistemas binários de buracos negros massivos, esses parâmetros poderão ser obtidos com alta precisão. Apesar desses parâmetros estarem parcialmente desvinculados, considerando so-

mente os padrões da fase de espiral, as formas de onda da fase completa de fusão podem ajudar a quebrar ambiguidades, degenerescências e, com isso, retirar incertezas em diversos parâmetros físicos importantes. Uma boa localização da fonte no céu é especialmente importante para o desenvolvimento de uma astronomia de mensagens múltiplas.

Evolução da massa total do sistema

A distribuição de massa esperada de um sistema de buracos negros astrofísicos é outro tópico de considerável interesse. No entendimento comum, buracos negros crescem a partir de pequenas "sementes" que existiram em épocas distantes na história do universo, através de uma combinação de fusões e de acreção de gases [65]. Em geral, a maior parte do crescimento da configuração de massa é, acredita-se, devido à acreção com a fusão proporcionando um crescimento mais modesto.

Contudo, a radiação gravitacional emitida durante a coalescência de buracos negros carrega energia, reduzindo consideravelmente o percentual de massa global do sistema. A maior parte dessa perda acontece num curto intervalo de tempo, no estágio de fusão. Com essa rápida perda de massa, tipos de matéria ao redor do sistema binário, em discos de acreção, podem reagir subitamente, mudando o potencial gravitacional e produzindo uma mudança visível em seu perfil eletromagnético - uma possível contraparte eletromagnética ao jato de radiação gravitacional [66].

Velocidades de recuo na emissão de radiação gravitacional

Observações indicam que o centro de toda galáxia hospeda um buraco negro cuja massa está no intervalo de $10^6 - 10^9 M_{\odot}$ [22], com a massa dos buracos negros correlacionando bem com a massa do bojo galáctico. Um buraco negro cuja massa está dentro ou acima desse intervalo é chamado de **buraco negro supermassivo** (SMBH). Já existem evidências observacionais de que galáxias frequentemente colidem-se resultando na fusão das mesmas. E existem razões para se acreditar que, quando isso ocorre, a fricção entre os SMBHs, as estrelas e os gases da galáxia irregular, recém

fundida, fará com que os SMBHs colidam em um núcleo comum e emitam radiação gravitacional.

Por causa das massas de tais buracos negros serem bastante elevadas, os detectores de ondas gravitacionais poderão identificar essencialmente qualquer fusão que ocorra na sua banda de frequência em distantes partes do universo, mesmo em situações de elevados redshifts. Isso pode endereçar questões astrofísicas sobre a origem, crescimento e população de SMBHs. A descoberta recente de um candidato a binário de SMBH's [23] e a associação de lóbulos de rádio em forma de X (X-shaped radio lobes) com a fusão desses SMBHs binários [24] fizeram crescer o otimismo acerca do índice dessas fusões, assim como existe a sugestão de que um SMBH poderia ter sido expelido do centro de sua galáxia, um evento que somente poderia ter acontecido graças a uma fusão de dois SMBHs [25].

O recuo gravitacional de um sistema isolado, em resposta à emissão anisotrópica de radiação gravitacional, muitas vezes denominado na literatura de "recoil" ou "kick", é um fenômeno com consequências astrofísicas de alta importância [26]. Uma das mais intrigantes possibilidades é a de que um buraco negro massivo formado a partir das fases de espiral e de fusão de dois buracos negros progenitores poderia receber um "kick" suficiente para fazê-lo deslocar do centro da galáxia onde a fusão ocorreu ou até mesmo ejetá-lo inteiramente da galáxia. Isto poderia afetar diretamente a história do crescimento de buracos negros massivos [27].

A determinação da ejeção ou não do buraco negro de sua galáxia hospedeira é dada pela magnitude da velocidade de recuo. Possíveis evidências observacionais para tal recuo podem estar ligadas com a observação de galáxias fracas [28, 29], onde a falta de um núcleo denso é associada com o buraco negro central sendo ejetado após a fusão [26]. Existe também evidência de uma ejeção de um SMBH após a fusão de galáxias tanto por causa de um recuo quanto por uma espécie de estilingue devido a presença de três ou mais SMBHs em fusão [30]. O recuo gravitacional também tem mostrado possuir consequências importantes nos cenários hierárquicos de fusão e da estrutura observável do núcleo galáctico. Velocidades de recuo de poucas centenas de km/s poderiam ser maiores quando comparadas às velocidades de escape de galáxias anãs, clusters

globulares e halos de matéria escura [26, 31].

A fonte SDSS J092712.65+294344.0 foi proposta como sendo um buraco negro massivo em recuo [25]. Contudo, diferentes interpretações como um sistema binário de buracos negros [32, 33] ou um alinhamento com uma fonte mais distante no mesmo cluster [34] também foram propostas. De forma similar, as fontes SDSS J105041.35+345631.3 e SDSS J153636.22+044127.0 também foram apontadas como candidatas ao posto de SMBHs em recuo [35, 36]. A última evidência de SMBH com velocidade de recuo foi reportada a partir de uma peculiar fonte de raio-X, catalogada como CXOJ122518.6+144545 e proveniente da galáxia SDSS DR7 $z = 0.0447$ [37]. Essa fonte também é posta como sendo uma possível fonte de raios-X ultra-luminosa (ULX) ou também uma supernova azul do tipo *IIn*.

O cálculo de tais velocidades de recuo na Relatividade Geral foi levado em conta de diversas formas. As primeiras estimativas analíticas e semi-analíticas do recuo incluem um cálculo perturbativo (válido para pequenas razões de massa dos buracos negros) durante a fase final de fusão [38], um cálculo pós-newtoniano válido durante a fase de espiral juntamente com a fase de fusão [39], uma aplicação do formalismo de one-body efetivo [40], um cálculo de close-limit com condições iniciais do tipo Bowen-York [41] e, mais recentemente, um modelo pós-newtoniano incluindo também a fase de ringdown [42].

Seguindo recentes avanços no cálculo numérico de buracos negros binários [43, 46, 47], o problema de recuo gravitacional recebeu considerável atenção da comunidade de relatividade numérica. Estas computações levaram ao crescimento das estimativas acuradas de velocidades de recuo na fase de fusão ao longo de órbitas quase circulares de buracos negros sem spin [68, 67, 70, 72, 73] e com spin [74, 75, 78], de colisões frontais [79] e de órbitas hiperbólicas [80].

1.1.4 Objetivo e Organização da Tese

Dentro do contexto atual do problema de coalescência de buracos ne-

gros, ainda há muito o que ser explorado. Com isso, outras modelagens teóricas que venham a confirmar ou até mesmo confrontar os resultados já estabelecidos na literatura são de extrema importância no desenvolvimento desta área de pesquisa. Com este pensamento, esta tese aborda a colisão de buracos negros em uma formulação teórica distinta das utilizadas e descritas nas seções anteriores desta introdução contextual. Nesta tese, o método utilizado está relacionado com os espaços-tempos de Robinson-Trautman no vácuo e com simetria axial, os quais representam sistemas isolados na Relatividade Geral que emitem radiação gravitacional. A evolução do sistema de Robinson-Trautman se enquadra na formulação de valor inicial característico da Relatividade Geral, onde a propagação das informações do sistema se dá ao longo de congruências de geodésicas nulas, localmente tangentes ao cone de luz. Embora mais simples que o caso característico clássico de Bondi-Sachs, o sistema de Robinson-Trautman proporciona uma menor dificuldade na obtenção de dados iniciais que correspondem a uma colisão de dois buracos negros. Os dados iniciais construídos para o problema, via Robinson-Trautman, já possuem um único horizonte aparente, o que permite uma análise da coalescência de buracos negros apenas a partir da fase de fusão. Mesmo com essa limitação, o sistema de Robinson-Trautman reproduz fórmulas e resultados análogos aos obtidos na literatura, assim como produz resultados inéditos e significativos não encontrados anteriormente na literatura.

O conteúdo da tese basicamente se divide em quatro capítulos. O primeiro, cuja primeira parte já foi discutida acerca da contextualização do problema de colisões de buracos negros, a emissão de radiação gravitacional no processo e suas consequências astrofísicas. E uma segunda parte, a seguir, que introduz os conceitos matemáticos a serem utilizados na caracterização da radiação gravitacional no regime não-linear da Relatividade Geral, denominado na literatura de formalismo de tetradas de Newman-Penrose. Ainda neste capítulo será analisado o comportamento assintótico do campo gravitacional na vizinhança do infinito nulo a partir dos objetos de Newman-Penrose que representam as componentes do tensor de Weyl e que são identificados segundo a classificação de Petrov.

No segundo capítulo, são introduzidos os conceitos criados por Bondi e Sachs na análise de espaços-tempos assintoticamente planos e que culminam na definição do formalismo de valor inicial característico da Relatividade Geral. Estes conceitos englobam quantidades físicas fundamentais tais como a conservação de energia e momento linear na emissão de radiação gravitacional. Após a abordagem de Bondi-Sachs, introduz-se a base teórica dos espaços-tempos de Robinson-Trautman com a equação geral de evolução do sistema, a caracterização da zona de onda e a obtenção das leis de conservação de Bondi-Sachs para os espaços-tempos de Robinson-Trautman.

O terceiro capítulo e o mais importante dessa tese trata da emissão de radiação gravitacional através da fusão por colisão frontal de dois buracos negros de Schwarzschild. Primeiro os dados iniciais característicos são construídos e evoluídos numericamente através da equação axial de Robinson-Trautman, utilizando uma combinação de dois métodos espectrais, os métodos de Galerkin e de colocação. Após a integração numérica, as quantidades físicas fundamentais como, as formas de onda, a extração de energia e momento linear e as velocidades de recuo dividida a emissão de radiação gravitacional são obtidas e discutidas numa comparação com os resultados encontrados na literatura.

O quarto e último capítulo será reservado às considerações finais, com a recapitulação da tese e as perspectivas futuras de trabalho, como, por exemplo, o estudo da fusão por colisões não-frontais de buracos negros de Schwarzschild que exigem uma generalização para espaços-tempos de Robinson-Trautman não-axiais.

1.2 Introdução Matemática

"I had submitted a paper...(on what is now known as the Kerr–Newman metric) which came back with some excellent referee critical comments...a short time later, while talking with Penrose, I commented to him about this excellent referee report; telling him that it was such a well written report that only one person in the world could have done it, namely Ray Sachs. Penrose, rather sheepishly, replied 'maybe there was someone else who could have done it'."

Erza Newman

1.2.1 Formalismo de Tetradas

A maneira padrão de se tratar problemas na teoria da Relatividade Geral considera as equações de campo de Einstein numa base de coordenadas adaptada ao problema proposto. Muitas vezes porém, pode ser vantajoso proceder de uma maneira diferente escolhendo-se uma base de tetradas adequada que corresponde a quatro campos vetoriais linearmente independentes e ortogonais, projetando todas as quantidades relevantes nesta base e considerando as equações satisfeitas por elas. Este é o chamado **formalismo de tetradas**.

A representação das tetradas

Em cada ponto do espaço-tempo, pode-se construir uma base formada por quatro vetores covariantes,

$$e_{(a)}{}^\mu \quad (a = 1, 2, 3, 4; \mu = 0, 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

onde os índices entre parênteses distinguem os índices de tetrada (representados pelas primeiras letras do alfabeto latino) dos índices de espaço-tempo (representado por letras gregas). Definindo a inversa da matriz $[e_{(a)}{}^\mu]$ como $e^{(b)}{}_\mu$, tem-se que

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \delta_{(a)}^{(b)} \quad e_{(a)}^\mu e_{(a)\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.3)$$

Ainda como parte das definições, assume-se que

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)}, \quad (1.4)$$

onde $\eta_{(a)(b)}$ é uma matriz simétrica e constante.

Seja $\eta^{(a)(b)}$ a inversa da matriz $[\eta_{(a)(b)}]$; logo,

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(b)(c)} = \delta_{(c)}^{(a)}. \quad (1.5)$$

Como consequência das várias definições,

$$\eta_{(a)(b)} e_{(a)}^\mu = e_{(a)\mu}, \quad \eta^{(a)(b)} e_{(a)\mu} = e^{(b)\mu}; \quad (1.6)$$

e o resultado mais importante,

$$e_{(a)\mu} e^{(a)\nu} = g_{\mu\nu} \rightarrow \eta^{(a)(b)} e_{(a)\mu} e_{(b)\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Dado qualquer campo vetorial ou tensorial, é possível projetar sobre estes a base de tetradas para a obtenção de suas respectivas componentes de tetradas. Logo,

$$\left. \begin{aligned} A_{(a)} &= e_{(a)\mu} A^\mu = e_{(a)}^\mu A_\mu, \\ A^{(a)} &= \eta^{(a)(b)} A_{(b)} = e^{(a)\mu} A_\mu = e^{(a)\mu} A_\mu, \\ A^\mu &= e_{(a)}^\mu A^{(a)} = e^{(a)\mu} A_{(a)}; \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

e, de maneira geral,

$$\left. \begin{aligned} T_{(a)(b)} &= e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu T_{\mu\nu} = e_{(a)}^\mu T_{\mu(b)}, \\ T_{\mu\nu} &= e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu T_{(a)(b)} = e_{(a)}^\mu T_{\nu(a)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Através das equações (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6) é possível notar que (i) se pode passar livremente dos índices de coordenadas para os índices de tetradas e vice-versa; (ii) $\eta^{(a)(b)}$ e $\eta_{(a)(b)}$ são responsáveis por levantar e abaixar, respectivamente, os índices de tetradas, assim como o tensor métrico é responsável no caso dos índices de coordenadas; (iii) não existe ambiguidade em qualquer quantidade que possua ambos os tipos de índices; (iv) o resultado de se contrair um tensor é o mesmo, quer essa contração seja dada em relação aos índices de coordenadas ou de tetradas.

Derivada direcional e intrínseca e os coeficientes de rotação de Ricci

Os vetores contravariantes $\mathbf{e}_{(a)}$, considerados como vetores tangentes, definem as **derivadas direcionais**

$$\mathbf{e}_{(a)} = e_{(a)}^\mu \partial_\mu; \quad (1.10)$$

com isso,

$$\phi_{,(a)} = e_{(a)}^\mu \phi_{,\mu}, \quad (1.11)$$

onde ϕ representa qualquer campo escalar. De forma geral, define-se

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^\mu A_{(a),\mu}. \quad (1.12)$$

Usando o fato de que $A_{(a)}$ é um escalar e definindo

$$\gamma_{(c)(a)(b)} \equiv e_{(c)}^\nu e_{(a)\nu;\mu} e_{(b)}^\mu, \quad (1.13)$$

obtém-se

$$e_{(a)}{}^\mu A_{\mu;\nu} e_{(b)}{}^\nu = A_{(a),(b)} - \eta^{(d)(c)} \gamma_{(c)(a)(b)} A_{(d)}. \quad (1.14)$$

As quantidades $\gamma_{(c)(a)(b)}$ são denominadas de **coeficientes de rotação de Ricci** e fazem o mesmo papel na base de tetradas que a conexão $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ faz na base de coordenadas. A quantidade do lado direito de (1.14) é chamada de **derivada intrínseca** de $A_{(a)}$ na direção $e_{(b)}$, representada por $A_{(a)|(b)}$. Com isso,

$$A_{(a)|(b)} \equiv e_{(a)}{}^\mu A_{\mu;\nu} e_{(b)}{}^\nu \quad e \quad A_{(a)|(b)} = A_{(a),(b)} - \eta^{(d)(c)} \gamma_{(c)(a)(b)} A_{(d)}, \quad (1.15)$$

o que relaciona as derivadas intrínsecas e direcionais.

A noção de derivada intrínseca de campos vetoriais é estendida à campos tensoriais de forma direta. Logo, a derivada intrínseca do tensor de Riemann é dada por

$$R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} = R_{\mu\nu\alpha\beta;\delta} e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu e_{(c)}{}^\alpha e_{(d)}{}^\beta e_{(f)}{}^\delta. \quad (1.16)$$

Expandindo, tem-se que

$$R_{(a)(b)(c)(d),(f)} = \left[R_{\mu\nu\alpha\beta} e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu e_{(c)}{}^\alpha e_{(d)}{}^\beta \right]_{;\delta} e_{(f)}{}^\delta \quad (1.17)$$

e, substituindo as derivadas covariantes dos diferentes vetores de base pelos respectivos coeficientes de rotação de Ricci, obtém-se que

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} &= R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)} \left[\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} + \right. \\ &+ \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \\ &\left. + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)} \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Finalmente é importante observar que o cálculo dos coeficientes de rotação de Ricci não requer o cálculo das derivadas covariantes (e, consequentemente, da conexão), pois definindo

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = \left[e_{(b)\mu,\nu} - e_{(b)\nu,\mu} \right] e_{(a)}{}^\mu e_{(c)}{}^\nu, \quad (1.19)$$

observa-se que é permitida a substituição das derivadas ordinárias de $e_{(b)\mu}$ e $e_{(b)\nu}$ por suas respectivas derivadas covariantes devido à ausência de torção na teoria. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_{(a)(b)(c)} &= \left[e_{(b)\mu;\nu} - e_{(b)\nu;\mu} \right] e_{(a)}{}^\mu e_{(c)}{}^\nu \\ &= \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Em virtude dessa relação, tem-se

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} \left[\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)} \right] \quad (1.21)$$

e, como manifesto por (1.19), o cálculo dos coeficientes de rotação de Ricci só depende de derivadas ordinárias. Nota-se também que $\lambda_{(a)(b)(c)}$ são antissimétricos no primeiro e terceiro índices:

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = -\lambda_{(c)(b)(a)}. \quad (1.22)$$

Como o cálculo dos coeficientes $\lambda_{(a)(b)(c)}$ são, na prática, apenas uma parte intermediária do cálculo dos coeficientes de rotação de Ricci, estes objetos serão denominados de **pré-coeficientes de rotação de Ricci**.

As constantes de estrutura e as relações de comutação

O comutador entre as tetradas $\mathbf{e}_{(a)}$ também é um vetor. Com isso é possível expandí-lo em termos da mesma base de tetradas $\mathbf{e}_{(c)}$:

$$[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}] = C^{(c)}_{(a)(b)} \mathbf{e}_{(c)}. \quad (1.23)$$

Os coeficientes $C^{(c)}_{(a)(b)}$ na expressão acima são denominados de **constantes de estrutura**; estes são antissimétricos com relação aos índices (a) e (b) e existem 24 deles. Com a ajuda de um campo escalar f , é possível mostrar que as constantes de estrutura são escritos em termos dos coeficientes de rotação de Ricci:

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}] &= e_{(a)}^\mu [e_{(b)}^\nu f_{,\nu}]_{,\mu} - e_{(b)}^\mu [e_{(a)}^\nu f_{,\nu}]_{,\mu} \\ &= \left[e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu {}_{;\mu} - e_{(b)}^\mu e_{(a)}^\nu {}_{;\mu} \right] f_{,\nu} \\ &= \left[\gamma^{(c)}_{(b)(a)} - \gamma^{(c)}_{(a)(b)} \right] e_{(c)}^\nu f_{,\nu}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Em comparação com a equação (1.23), tem-se que

$$C^{(c)}_{(a)(b)} = \gamma^{(c)}_{(b)(a)} - \gamma^{(c)}_{(a)(b)}. \quad (1.25)$$

A equação (1.23) escrita explicitamente em termos dos coeficientes de rotação de Ricci produz as denominadas **relações de comutação**, em um total de 24 expressões.

As identidades de Ricci e de Bianchi

Projetando a identidade de Ricci,

$$e_{(a)\mu;\nu;\alpha} - e_{(a)\mu;\alpha;\nu} = R_{\beta\mu\nu\alpha} e_{(a)}^\beta, \quad (1.26)$$

na base de tetradas, é possível obter que

$$\begin{aligned}
R_{(a)(b)(c)(d)} &= R_{\mu\nu\alpha\beta} e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu e_{(c)}{}^\alpha e_{(d)}{}^\beta \\
&= \left\{ - \left[\gamma_{(a)(f)(g)} e^{(f)}{}_\nu e^{(g)}{}_\alpha \right]_{;\beta} + \right. \\
&\quad \left. + \left[\gamma_{(a)(f)(g)} e^{(f)}{}_\nu e^{(g)}{}_\beta \right]_{;\alpha} \right\} e_{(b)}{}^\nu e_{(c)}{}^\alpha e_{(d)}{}^\beta. \quad (1.27)
\end{aligned}$$

Expandindo as quantidades dentro dos colchetes e substituindo, mais uma vez, as derivadas covariantes dos vetores da base por seus coeficientes de rotação de Ricci, obtém-se

$$\begin{aligned}
R_{(a)(b)(c)(d)} &= -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} + \\
&\quad + \gamma_{(b)(a)(f)} \eta^{(f)(h)} [\gamma_{(c)(h)(d)} - \gamma_{(d)(h)(c)}] + \\
&\quad + \eta^{(f)(h)} [\gamma_{(f)(a)(c)} \gamma_{(b)(h)(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)} \gamma_{(b)(h)(c)}]. \quad (1.28)
\end{aligned}$$

E finalmente, a identidade de Bianchi, expressa em termos da derivada intrínseca e das componentes de tetradas, toma a forma

$$\begin{aligned}
R_{(a)(b)[(c)(d)|(f)]} &= \frac{1}{3!} \sum_{[(c)(d)(f)]} \left\{ R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)} \left[\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} + \right. \right. \\
&\quad + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \\
&\quad \left. \left. + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)} \right] \right\}, \quad (1.29)
\end{aligned}$$

onde o somatório representa a soma de todas as permutações possíveis entre os índices c, d, f .

As equações básicas do formalismo de tetradas são as 24 relações de comutação, as 36 identidades de Ricci e as 20 identidades de Bianchi linearmente independentes.

1.2.2 Formalismo de Newman-Penrose

O formalismo de Newman-Penrose é um formalismo de tetradas com uma escolha especial da base de vetores. A escolha tomada é a de uma tetrada de vetores nulos $\mathbf{e}_{(a)} = (\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$, dos quais \mathbf{l} e \mathbf{n} são reais e \mathbf{m} e $\bar{\mathbf{m}}$ são complexo-conjugados entre si. Este formalismo de tetradas nulas criado por Ezra Newman e Roger Penrose [98] provou ser muito útil na construção de soluções exatas da Relatividade Geral. Apesar do fato de que um considerável número de equações devem ser resolvidas, quando comparadas com o caso da base de coordenadas diretamente, este formalismo possui grandes vantagens. Todas as equações são de primeira ordem. Transformações de calibre sobre as tetradas podem ser usadas para simplificar as equações. Pode-se utilizar as propriedades invariantes do campo gravitacional sem a necessidade de introduzir uma base de coordenadas. Mas o principal e maior motivo do atual estudo do formalismo é a sua utilização na teoria de radiação gravitacional no formalismo característico, através do comportamento assintótico do campo gravitacional expresso nos tipos de Petrov associados ao tensor de Weyl [98].

A base nula e os coeficientes espinoriais

A escolha dos vetores de base nulos é dada pelas condições de ortogonalidade,

$$l^\mu m_\mu = l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (1.30)$$

além dos requerimentos de nulidade,

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0 \quad (1.31)$$

e das condições de normalização

$$l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = 1. \quad (1.32)$$

Com isso, a matriz fundamental representada por $\eta_{(a)(b)}$ é dada por

$$\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Os vetores de base, considerados como derivadas direcionais, são designados pela seguinte simbologia:

$$\mathbf{e}_{(1)} = D; \quad \mathbf{e}_{(2)} = \Delta; \quad \mathbf{e}_{(3)} = \delta; \quad \mathbf{e}_{(4)} = \bar{\delta}. \quad (1.34)$$

Os diversos coeficientes de rotação de Ricci, a partir de agora denominados de **coeficientes espinoriais**, também possuem sua respectiva simbologia:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \gamma_{(3)(1)(1)}; & \rho &= \gamma_{(3)(1)(4)}; & \epsilon &= \frac{1}{2} \left(\gamma_{(2)(1)(1)} + \gamma_{(3)(4)(1)} \right); \\ \sigma &= \gamma_{(3)(1)(3)}; & \mu &= \gamma_{(2)(4)(3)}; & \gamma &= \frac{1}{2} \left(\gamma_{(2)(1)(2)} + \gamma_{(3)(4)(2)} \right); \\ \lambda &= \gamma_{(2)(4)(4)}; & \tau &= \gamma_{(3)(1)(2)}; & \alpha &= \frac{1}{2} \left(\gamma_{(2)(1)(4)} + \gamma_{(3)(4)(4)} \right); \\ \nu &= \gamma_{(2)(4)(2)}; & \pi &= \gamma_{(2)(4)(1)}; & \beta &= \frac{1}{2} \left(\gamma_{(2)(1)(3)} + \gamma_{(3)(4)(3)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

O complexo conjugado de qualquer quantidade acima é obtido na troca do índice 3 pelo 4 e vice-versa, onde quer que eles apareçam.

As relações de comutação e as constantes de estrutura

A partir das relações (1.23) e (1.25), juntamente com a notação de (1.34) e (1.35), torna-se possível escrever as relações de comutação no formalismo de Newman-Penrose:

$$\Delta D - D\Delta = (\gamma + \bar{\gamma})D + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta - (\pi + \bar{\pi})\delta - (\tau + \bar{\tau})\bar{\delta}, \quad (1.36)$$

$$\delta D - D\delta = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D + \kappa\Delta - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\delta - \sigma\bar{\delta}, \quad (1.37)$$

$$\delta\Delta - \Delta\delta = -\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta + \bar{\lambda}\bar{\delta}, \quad (1.38)$$

$$\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta} = (\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta + (\alpha - \bar{\beta})\delta + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\delta}. \quad (1.39)$$

As equações anteriores tornam imediata a identificação das constantes de estrutura:

$$\left. \begin{array}{ll} C^{(1)}_{(2)(1)} = (\gamma + \bar{\gamma}); & C^{(1)}_{(3)(1)} = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}); \\ C^{(2)}_{(2)(1)} = (\epsilon + \bar{\epsilon}); & C^{(2)}_{(3)(1)} = \kappa; \\ C^{(3)}_{(2)(1)} = -(\pi + \bar{\tau}); & C^{(3)}_{(3)(1)} = -(\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon}); \\ C^{(4)}_{(2)(1)} = -(\tau + \bar{\pi}); & C^{(4)}_{(3)(1)} = -\sigma; \\ C^{(1)}_{(3)(2)} = -\bar{\nu}; & C^{(1)}_{(4)(3)} = (\bar{\mu} - \mu); \\ C^{(2)}_{(3)(2)} = (\tau - \bar{\alpha} - \beta); & C^{(2)}_{(4)(3)} = (\bar{\rho} - \rho); \\ C^{(3)}_{(3)(2)} = (\mu - \gamma + \bar{\gamma}); & C^{(3)}_{(4)(3)} = (\alpha - \bar{\beta}); \\ C^{(4)}_{(3)(2)} = \bar{\lambda}; & C^{(4)}_{(4)(3)} = (\beta - \bar{\alpha}). \end{array} \right\} \quad (1.40)$$

As identidades de Ricci

No formalismo de Newman-Penrose, as 10 componentes independentes do tensor de Weyl são representadas por cinco escalares complexos,

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_0 = -W_{(1)(3)(1)(3)} = -W_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu m^\nu l^\alpha m^\beta; \\ \Psi_1 = -W_{(1)(2)(1)(3)} = -W_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu n^\nu l^\alpha m^\beta; \\ \Psi_2 = -W_{(1)(3)(4)(2)} = -W_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu m^\nu \bar{m}^\alpha n^\beta; \\ \Psi_3 = -W_{(1)(2)(4)(2)} = -W_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu n^\nu \bar{m}^\alpha n^\beta; \\ \Psi_4 = -W_{(2)(4)(2)(4)} = -W_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu \bar{m}^\nu n^\alpha \bar{m}^\beta, \end{array} \right\} \quad (1.41)$$

assim como as 10 componentes independentes do tensor de Ricci, que são definidas em termos de 4 escalares reais e três complexos,

$$\left. \begin{aligned}
\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{(1)(1)}; & \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}R_{(2)(2)}; \\
\Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{(3)(3)}; & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}R_{(4)(4)}; \\
\Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{(1)(2)} + R_{(3)(4)}); & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}R_{(1)(3)}; \\
\Phi_{10} &= -\frac{1}{2}R_{(1)(4)}; & \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{(2)(3)}; \\
\Lambda = \frac{1}{24}R &= \frac{1}{12}(R_{(1)(2)} - R_{(3)(4)}); & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{(2)(4)}.
\end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Utilizando o fato de que a relação entre o tensor de Riemann e o tensor de Weyl, na base de tetradas, se mantém a mesma que na base de coordenadas,

$$\begin{aligned}
R_{(a)(b)(c)(d)} &= W_{(a)(b)(c)(d)} - \frac{1}{2}(\eta_{(a)(c)}R_{(b)(d)} - \eta_{(b)(c)}R_{(a)(d)} - \eta_{(a)(d)}R_{(b)(c)} + \\
&+ \eta_{(b)(d)}R_{(a)(c)}) + \frac{1}{6}(\eta_{(a)(c)}\eta_{(b)(d)} - \eta_{(a)(d)}\eta_{(b)(c)})R, \quad (1.43)
\end{aligned}$$

juntamente com a definição do tensor de Riemann (1.18), e com as notações dadas por (1.33), (1.34), (1.35), (1.41) e (1.42), obtêm-se as identidades de Ricci no formalismo de Newman-Penrose:

$$\begin{aligned}
D\rho - \bar{\delta}\kappa &= (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + \rho(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \\
&+ \Phi_{00}, \quad (1.44)
\end{aligned}$$

$$D\sigma - \delta\kappa = \sigma(\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon}) - \kappa(\tau + \bar{\alpha} - \bar{\pi} + 3\beta) + \Psi_0, \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned}
D\tau - \Delta\kappa &= \rho(\tau + \bar{\pi}) + \sigma(\pi + \bar{\tau}) + \tau(\epsilon - \bar{\epsilon}) - \kappa(3\gamma + \bar{\gamma}) + \\
&+ \Psi_1 + \Phi_{01}, \quad (1.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\alpha - \bar{\delta}\epsilon &= \alpha(\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon) + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + \\
&+ \pi(\epsilon + \rho) + \Phi_{10}, \quad (1.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\beta - \delta\epsilon &= \sigma(\alpha + \pi) + \beta(\bar{\rho} - \bar{\epsilon}) - \kappa(\mu + \gamma) - \epsilon(\bar{\alpha} - \bar{\pi}) + \\
&+ \Psi_1, \quad (1.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\gamma - \Delta\epsilon &= \alpha(\tau + \bar{\pi}) + \beta(\bar{\tau} + \pi) - \gamma(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \epsilon(\gamma + \bar{\gamma}) + \\
&+ \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11},
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
D\lambda - \bar{\delta}\pi &= (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi(\pi + \alpha - \beta) - \nu\bar{\kappa} - \lambda(3\epsilon - \bar{\epsilon}) + \\
&+ \Phi_{20},
\end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned}
D\mu - \delta\pi &= (\sigma\lambda + \bar{\rho}\mu) + \pi(\bar{\pi} - \bar{\alpha} + \beta) - \mu(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \nu\kappa + \Psi_2 + \\
&+ 2\Lambda,
\end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned}
D\nu - \Delta\pi &= \mu(\pi + \bar{\tau}) + \lambda(\bar{\pi} + \tau) + \pi(\gamma - \bar{\gamma}) - \nu(3\epsilon + \bar{\epsilon}) + \\
&+ \Psi_3 + \Phi_{21},
\end{aligned} \tag{1.52}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= -\lambda(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}) + \nu(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}) - \\
&- \Psi_4,
\end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}
\delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= \rho(\beta + \bar{\alpha}) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + \tau(\rho - \bar{\rho}) + \kappa(\mu - \bar{\mu}) - \\
&- \Psi_1 + \Phi_{01},
\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
\delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \\
&- \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11},
\end{aligned} \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}
\delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= \nu(\rho - \bar{\rho}) + \pi(\mu - \bar{\mu}) + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \\
&- \Psi_3 + \Phi_{21},
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
\delta\nu - \Delta\mu &= (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + \mu(\gamma + \bar{\gamma}) - \bar{\nu}\pi + \nu(\tau - 3\beta - \bar{\alpha}) + \\
&+ \Phi_{22},
\end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\begin{aligned}
\delta\gamma - \Delta\beta &= \gamma(\tau - \bar{\alpha} - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \\
&+ \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12},
\end{aligned} \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}\delta\tau - \Delta\sigma &= (\mu\sigma + \bar{\lambda}\rho) + \tau(\tau - \bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\gamma - \bar{\gamma}) - \kappa\bar{\nu} + \\ &+ \Phi_{02},\end{aligned}\tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}\Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= -(\sigma\lambda + \bar{\mu}\rho) + \tau(\bar{\beta} - \bar{\tau} - \alpha) + \rho(\gamma + \bar{\gamma}) - \kappa\nu - \\ &- \Psi_2 - 2\Lambda,\end{aligned}\tag{1.60}$$

$$\begin{aligned}\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= \nu(\rho + \epsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\gamma} - \bar{\mu}) + \gamma(\bar{\beta} - \bar{\tau}) - \\ &- \Psi_3.\end{aligned}\tag{1.61}$$

No caso do estudo dos espaços-tempos de Robinson-Trautman e de Bondi, no vácuo, que é o interesse dessa tese, todos os escalares de Ricci são nulos, resultando na simplificação das identidades descritas acima. É importante ressaltar que as equações de campo na base de coordenadas, $R_{\mu\nu} = 0$, não são obtidas diretamente das equações geradas pela nulidade de todos os Φ 's (ou, da mesma forma, pela equação $R_{(a)(b)} = 0$), mas por uma combinação linear entre elas. Isto se mostra claro ao se escrever a relação entre o tensor e os escalares de Ricci,

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= 4\left[(3\Lambda - \Phi_{11})l_{(\mu}n_{\nu)} - (3\Lambda + \Phi_{11})m_{(\mu}\bar{m}_{\nu)} + \Phi_{12}l_{(\mu}\bar{m}_{\nu)} + \right. \\ &+ \Phi_{21}l_{(\mu}m_{\nu)} - \frac{1}{2}\Phi_{22}l_{(\mu}l_{\nu)} - \frac{1}{2}\Phi_{00}n_{(\mu}n_{\nu)} + \Phi_{10}n_{(\mu}m_{\nu)} + \Phi_{01}n_{(\mu}\bar{m}_{\nu)} + \\ &\left. + \frac{1}{2}\Phi_{20}m_{(\mu}m_{\nu)} - \frac{1}{2}\Phi_{02}\bar{m}_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}\right].\end{aligned}\tag{1.62}$$

As identidades de Bianchi

As identidades de Bianchi, escritas no formalismo de Newman-Penrose, podem ser separadas em dois grupos de equações: o primeiro grupo, de oito equações complexas, dado pelas equações (1.29),

$$D\Psi_1 - \bar{\delta}\Psi_0 = 2(2\rho + \epsilon)\Psi_1 - (4\alpha - \pi)\Psi_0 - 3\kappa\Psi_2,\tag{1.63}$$

$$D\Psi_2 - \bar{\delta}\Psi_1 = -\lambda\Psi_0 + 3\rho\Psi_2 + 2(\pi - \alpha)\Psi_1 - 2\kappa\Psi_3, \quad (1.64)$$

$$\bar{\delta}\Psi_2 - D\Psi_3 = 2\lambda\Psi_1 - 3\pi\Psi_2 + 2(\epsilon - \rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4, \quad (1.65)$$

$$D\Psi_4 - \bar{\delta}\Psi_3 = -3\lambda\Psi_2 + 2(2\pi + \alpha)\Psi_3 - (4\epsilon - \rho)\Psi_4, \quad (1.66)$$

$$\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 = 3\sigma\Psi_2 + (4\gamma - \mu)\Psi_0 - (4\tau + 2\beta)\Psi_1, \quad (1.67)$$

$$\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 = -3\tau\Psi_2 + (2\gamma - 2\mu)\Psi_1 + \nu\Psi_0 + 2\sigma\Psi_3, \quad (1.68)$$

$$\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 = -3\mu\Psi_2 + (2\beta - 2\tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 + 2\nu\Psi_1, \quad (1.69)$$

$$\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 = 3\nu\Psi_2 - (2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4. \quad (1.70)$$

E um segundo grupo é formado por quatro equações, duas reais e uma complexa, que vêm das identidades de Bianchi contraídas, $(R_{(a)(b)} - \frac{1}{2}R\eta_{(a)(b)})|_{(c)}\eta^{(c)(b)} = 0$,

$$\begin{aligned} D(\Phi_{11} + 3\Lambda) &= \bar{\delta}\Phi_{01} + \delta\Phi_{10} + \Delta\Phi_{00} - \bar{\kappa}\Phi_{12} - \kappa\Phi_{21} - \\ &- (2\alpha + 2\bar{\tau} - \pi)\Phi_{01} - (2\bar{\alpha} + 2\tau - \bar{\pi})\Phi_{10} + \\ &+ 2(\rho + \bar{\rho})\Phi_{11} + \bar{\sigma}\Phi_{02} + \sigma\Phi_{20} - [\mu + \bar{\mu} - \\ &- 2(\gamma + \bar{\gamma})]\Phi_{00}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} D\Phi_{12} &= \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) - \Delta\Phi_{01} + \bar{\delta}\Phi_{02} + \bar{\nu}\Phi_{00} - \kappa\Phi_{22} - \\ &- (2\alpha - 2\bar{\beta} - \pi + \bar{\tau})\Phi_{02} + \sigma\Phi_{21} - \bar{\lambda}\Phi_{10} + \\ &+ (2\rho + \bar{\rho} - 2\bar{\epsilon})\Phi_{12} - 2(\tau - \bar{\pi})\Phi_{11} - (2\mu + \bar{\mu} - 2\gamma)\Phi_{01}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} D\Phi_{22} &= -\Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) + \delta\Phi_{21} + \bar{\delta}\Phi_{12} + \bar{\nu}\Phi_{10} + \nu\Phi_{01} - \\ &- (\tau - 2\beta - 2\pi)\Phi_{21} - \lambda\Phi_{02} - \bar{\lambda}\Phi_{20} - (2\mu + \bar{\mu})\Phi_{11} + \\ &+ (\rho + \bar{\rho} - 2\bar{\epsilon} - 2\epsilon)\Phi_{22} - (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\pi)\Phi_{12}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

No primeiro grupo, os termos de matéria foram retirados devido ao fato de que, nesta tese, serão apenas utilizados os espaços-tempos de Bondi e de Robinson-Trautman no vácuo. Este fato, faz com que as identidades de Bianchi contraídas sejam automaticamente satisfeitas e percam, aparentemente, sua importância. Porém, a análise delas torna-se importante no formalismo de valor inicial característico da Relatividade Geral, que será introduzido no próximo capítulo.

Rotações sobre a base de tetradas

Tendo escolhido uma base de tetradas específica, (neste caso, tetradas nulas) é possível submetê-la a uma transformação de Lorentz. Mas, como no formalismo de Newman-Penrose, todos os objetos são dados por escalares complexos, a representação do grupo de Lorentz a ser utilizada deve ser a sua representação espinorial, ou melhor, o grupo $SL(2, C)$ [106]. Nesta representação, os seis parâmetros do grupo de Lorentz estão concentrados, dois-a-dois, em três matrizes de rotação, cujas componentes são representadas por um único escalar complexo ($a(\bar{a})$, $b(\bar{b})$ e $c(\bar{c})$ para cada uma das matrizes). As respectivas rotações são classificadas da seguinte forma¹:

i) Rotações de classe *I*: Transformação sob rotações nulas em torno do vetor l^μ ;

$$\left. \begin{aligned} l'_\mu &= l_\mu; \\ n'_\mu &= n_\mu + a\bar{a}l_\mu + a\bar{m}_\mu + \bar{a}m_\mu; \\ m'_\mu &= m_\mu + \bar{a}l_\mu; \\ \bar{m}'_\mu &= \bar{m}_\mu + al_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Nesta classe, pelas definições (1.13) e (1.35), obtém-se a transformação dos coeficientes espinoriais,

¹Como serão estudados apenas espaços-tempos no vácuo, as rotações sobre os escalares de Ricci não serão apresentadas, mas podem ser vistas nas referências [103], [104], [105] e [106].

$$\begin{aligned}
\rho' &= \rho + a\kappa; \\
\alpha' &= \alpha + a(\rho + \epsilon) + a^2\kappa; \\
\lambda' &= \lambda + a(\pi + 2\alpha) + a^2(\rho + 2\epsilon) + a^3\kappa + \bar{\delta}a + aDa; \\
\kappa' &= \kappa; \\
\epsilon' &= \epsilon + a\kappa; \\
\pi' &= \pi + 2a\epsilon + a^2\kappa + Da; \\
\sigma' &= \sigma + \bar{a}\kappa; \\
\beta' &= \beta + a\sigma + \bar{a}\epsilon + a\bar{a}\kappa; \\
\mu' &= \mu + 2a\beta + \bar{a}\pi + a^2\sigma + 2a\bar{a}\epsilon + a^2\bar{a}\kappa + \delta a + \bar{a}Da; \\
\tau' &= \tau + a\sigma + \bar{a}\rho + a\bar{a}\kappa; \\
\gamma' &= \gamma + a(\tau + \beta) + \bar{a}\alpha + a^2\sigma + a\bar{a}(\rho + \epsilon) + a^2\bar{a}\kappa; \\
\nu' &= \nu + a(\mu + 2\gamma) + \bar{a}\lambda + a^2(2\beta + \tau) + a\bar{a}(2\alpha + \pi) + a^2\bar{a}(2\epsilon + \rho) + \\
&\quad + a^3\sigma + a^3\bar{a}\kappa + \Delta a + a\delta a + \bar{a}\bar{\delta}a + a\bar{a}Da, \tag{1.75}
\end{aligned}$$

assim como os escalares de Weyl, através de (1.41),

$$\begin{aligned}
\Psi'_0 &= \Psi_0; \\
\Psi'_1 &= \Psi_1 + a\Psi_0; \\
\Psi'_2 &= \Psi_2 + 2a\Psi_1 + a^2\Psi_0; \\
\Psi'_3 &= \Psi_3 + 3a\Psi_2 + 3a^2\Psi_1 + a^3\Psi_0; \\
\Psi'_4 &= \Psi_4 + 4a\Psi_3 + 6a^2\Psi_2 + 4a^3\Psi_1 + a^4\Psi_0. \tag{1.76}
\end{aligned}$$

ii) Rotações de classe II: Transformação sob rotações nulas em torno do vetor n^μ ;

$$\left. \begin{aligned} n'_\mu &= n_\mu; \\ l'_\mu &= l_\mu + b\bar{b}n_\mu + b\bar{m}_\mu + \bar{b}m_\mu; \\ m'_\mu &= m_\mu + bn_\mu; \\ \bar{m}'_\mu &= \bar{m}_\mu + \bar{b}n_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

De forma análoga à classe anterior, os coeficientes espinorias se transformam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu + b\nu; \\ \beta' &= \beta + b(\mu + \gamma) + b^2\nu; \\ \sigma' &= \sigma + b(\tau + 2\beta) + b^2(\mu + 2\gamma) + b^3\nu - \delta b - b\Delta b; \\ \nu' &= \nu; \\ \gamma' &= \gamma + b\nu; \\ \tau' &= \tau + 2b\gamma + b^2\nu - \Delta b; \\ \lambda' &= \lambda + \bar{b}\nu; \\ \alpha' &= \alpha + b\lambda + \bar{b}\gamma + b\bar{b}\nu; \\ \rho' &= \rho + 2b\alpha + \bar{b}\tau + b^2\lambda + 2b\bar{b}\gamma + b^2\bar{b}\nu - \bar{\delta}b - \bar{b}\Delta b; \\ \pi' &= \pi + b\lambda + \bar{b}\mu + b\bar{b}\nu; \\ \epsilon' &= \epsilon + b(\pi + \alpha) + \bar{b}\beta + b^2\lambda + b\bar{b}(\mu + \gamma) + b^2\bar{b}\nu; \\ \kappa' &= \kappa + b(\rho + 2\epsilon) + \bar{b}\sigma + b^2(2\alpha + \pi) + b\bar{b}(2\beta + \tau) + b^2\bar{b}(2\gamma + \mu) + \\ &\quad + b^3\lambda + b^3\bar{b}\nu - Db - b\bar{\delta}b - \bar{b}\delta b - b\bar{b}\Delta b. \end{aligned} \quad (1.78)$$

E, analogamente, os escalares de Weyl,

$$\begin{aligned} \Psi'_0 &= \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4; \\ \Psi'_1 &= \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4; \\ \Psi'_2 &= \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4; \\ \Psi'_3 &= \Psi_3 + b\Psi_4; \\ \Psi'_4 &= \Psi_4. \end{aligned} \quad (1.79)$$

iii) Rotações de classe III: Boost no plano (l^μ, n^μ) e rotação espacial no plano (m^μ, \bar{m}^μ) .

$$\left. \begin{aligned} l'_\mu &= c \bar{c} l_\mu; \\ n'_\mu &= c^{-1} \bar{c}^{-1} n_\mu; \\ m'_\mu &= c \bar{c}^{-1} m_\mu; \\ \bar{m}'_\mu &= c^{-1} \bar{c} \bar{m}_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

Com isso, os coeficientes espinoriais se transformam como

$$\begin{aligned} \mu' &= c^{-1} \bar{c}^{-1} \mu; \\ \beta' &= c \bar{c}^{-1} (\beta - c \delta c^{-1}); \\ \sigma' &= c^3 \bar{c}^{-1} \sigma; \\ \nu' &= c^{-3} \bar{c}^{-1} \nu; \\ \gamma' &= c^{-1} \bar{c}^{-1} (\gamma - c \Delta c^{-1}); \\ \tau' &= c \bar{c}^{-1} \tau; \\ \lambda' &= c^{-3} \bar{c} \lambda; \\ \alpha' &= c^{-1} \bar{c} (\alpha - c \bar{\delta} c^{-1}); \\ \rho' &= c \bar{c} \rho; \\ \pi' &= c^{-1} \bar{c} \pi; \\ \epsilon' &= c \bar{c} (\epsilon - c D c^{-1}); \\ \kappa' &= c^3 \bar{c} \kappa, \end{aligned} \quad (1.81)$$

assim como os escalares de Weyl,

$$\begin{aligned}
\Psi'_0 &= c^4\Psi_0; \\
\Psi'_1 &= c^2\Psi_1; \\
\Psi'_2 &= \Psi_2; \\
\Psi'_3 &= c^{-2}\Psi_3; \\
\Psi'_4 &= c^{-4}\Psi_4.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Os escalares ópticos

O significado físico dos coeficientes espinoriais que foram introduzidos nas subseções anteriores, no contexto do formalismo de Newman-Penrose, se torna claro quando é levada em consideração a propagação dos vetores de base \mathbf{l} e \mathbf{n} . A partir da equação (1.13), pode-se mostrar que

$$l_{\mu;\nu}l^\nu = (\epsilon + \bar{\epsilon})l_\mu - \kappa\bar{m}_\mu - \bar{\kappa}m_\mu. \tag{1.83}$$

Com isso, conclui-se que o campo vetorial dado por \mathbf{l} forma uma congruência de geodésicas nulas se e somente se $\kappa = 0$; e, além disso, as geodésicas são afinamente parametrizadas se e somente se $\epsilon + \bar{\epsilon} = 0$. Se $\kappa = 0$, o segundo requerimento, o de uma parametrização afim, pode ser tomada através de uma rotação de classe *III* ($\mathbf{l}' = c\bar{c}\mathbf{l}$).

A quantidade τ descreve o quanto a direção de \mathbf{l} varia na direção de \mathbf{n} , segundo a equação

$$l_{\mu;\nu}n^\nu = (\gamma + \bar{\gamma})l_\mu - \tau\bar{m}_\mu - \bar{\tau}m_\mu. \tag{1.84}$$

Da mesma forma que no caso anterior, pode-se eliminar $\gamma + \bar{\gamma}$ por uma transformação de classe *III*.

Mais propriedades a respeito da congruência de geodésicas nulas (e afinamente parametrizadas) podem ser obtidas através da definição dos coeficientes espinorias e de rotação de Ricci (equações (1.35) e (A12) respectivamente). Dessas definições obtém-se

$$l_{\mu;\nu} = (\gamma + \bar{\gamma})l_{\mu}l_{\nu} - (\bar{\alpha} + \beta)l_{\mu}\bar{m}_{\nu} - (\alpha + \bar{\beta})l_{\mu}m_{\nu} - \tau\bar{m}_{\mu}l_{\nu} + \sigma\bar{m}_{\mu}\bar{m}_{\nu} + \bar{\sigma}m_{\mu}m_{\nu} + \rho\bar{m}_{\mu}m_{\nu} + \bar{\rho}m_{\mu}\bar{m}_{\nu} - \bar{\tau}m_{\mu}l_{\nu}. \quad (1.85)$$

Daí,

$$l_{[\mu;\nu]} = -(\bar{\alpha} + \beta - \tau)l_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} - (\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})l_{[\mu}m_{\nu]} + (\rho - \bar{\rho})\bar{m}_{[\mu}m_{\nu]} \quad (1.86)$$

e

$$l_{[\mu;\nu]}l_{\alpha]} = (\rho - \bar{\rho})\bar{m}_{[\mu}m_{\nu]}l_{\alpha]}. \quad (1.87)$$

Das equações (1.85) e (1.86), encontra-se que

$$\frac{1}{2}l^{\mu}{}_{;\mu} = -\frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho}) \equiv \theta, \quad (1.88)$$

$$\frac{1}{2}l_{[\mu;\nu]}l^{\mu;\nu} = -\frac{1}{4}(\rho - \bar{\rho})^2 \equiv \omega^2 \quad (1.89)$$

e

$$\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} = \theta^2 + \sigma\bar{\sigma}. \quad (1.90)$$

As quantidades θ , ω e σ foram introduzidas na literatura por Sachs [90] e

são denominadas de **escalares óticos**. Definições alternativas para θ e ω são dadas por $\theta = -Re(\rho)$ e $\omega = Im(\rho)$.

O significado geométrico de ρ e σ vem a seguir. Primeiro é importante lembrar que o vetor \mathbf{l} é tangente aos raios nulos e que $\mathbf{m}(\bar{\mathbf{m}})$ é um vetor complexo ortogonal a \mathbf{l} . Em um determinado ponto P do raio nulo, \mathbf{m} e $\bar{\mathbf{m}}$ geram um plano. Considerando um círculo neste plano com seu centro em P , este pode ser **contraído** (ou **expandido**), **rotacionado** ou **deformado** (na forma de uma elipse). Estes efeitos são representados respectivamente por $-Re(\rho)$ ($+Re(\rho)$), $Im(\rho)$ e σ (Fig.1.2.2). $|\sigma|$ representa a magnitude da deformação e $\psi = \frac{1}{2} \arg \sigma$ sendo a sua orientação ($\sigma = |\sigma| \exp(2i\psi)$).

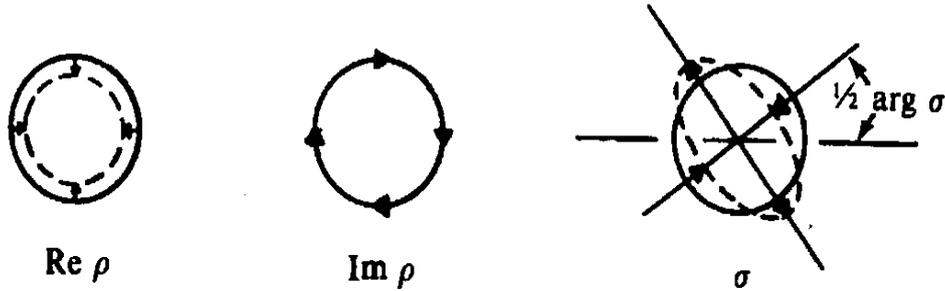


Figura 1.1: Interpretação geométrica dos escalares óticos em termos do efeito de propagação de um pequeno círculo perpendicular à congruência de geodésicas nulas.

As equações que governam a variação de ρ e σ , ao longo das geodésicas afinamente parametrizadas, são dadas pelas equações (1.44) e (1.45), nas quais toma-se $\kappa = \epsilon = 0$ ².

Com isso,

$$D\rho = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + \Phi_{00} \quad (1.91)$$

²A parte imaginária de ϵ é anulada ao se considerar que a base de tetradas seja paralelamente propagada ao longo da congruência de geodésicas nulas representada pelo vetor \mathbf{l} . Em outras palavras, $l_{\mu;\nu}l^\nu = n_{\mu;\nu}l^\nu = m_{\mu;\nu}l^\nu = 0$.

e

$$D\sigma = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi_0. \quad (1.92)$$

Separando ρ em suas partes real e imaginária (expansão e rotação), tem-se que

$$D\omega = \frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho})(\rho - \bar{\rho}) = -2\theta\omega, \quad (1.93)$$

$$D\sigma = -2\theta\sigma + \Psi_0 \quad (1.94)$$

e

$$D\theta = \omega^2 - \theta^2 - \sigma\bar{\sigma} - \Phi_{00}, \quad (1.95)$$

cujas formas são as mais usadas na literatura. Lembrando que $\Phi_{00} \equiv -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu$, a equação (1.95) fica na conhecida forma de Raychaudhuri, em sua versão nula.

Como observação final dessa seção, é importante apontar que os coeficientes espinoriais ν , μ , λ e π correspondem aos coeficientes κ , ρ , σ e τ , respectivamente, para uma congruência cujo campo vetorial tangente é caracterizado pelo vetor \mathbf{n} (no caso em que há uma troca entre os pares de vetores $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{n}$ e $\mathbf{m} \leftrightarrow \bar{\mathbf{m}}$). Os coeficientes α e β são relacionados com o coeficiente τ , no caso em que a congruência caracterizada por \mathbf{l} é **superfície ortogonal**. Neste caso, o vetor \mathbf{l} é equivalente ao gradiente de um campo escalar e , com isso, $\bar{\alpha} + \beta = \tau$ [98].

Classificação de Petrov

Pelo que foi visto até agora, com respeito à base de tetradas nulas escolhida, o tensor de Weyl é completamente especificado pelos cinco

escalares complexos Ψ_n , $n = 0, 1, 2, 3, 4$. A forma como estes escalares se anulam, dada a orientação das tetradas, é conhecida como **Classificação de Petrov** e cada uma das condições de nulidade destes escalares é chamada de **tipo de Petrov**.

Antes da análise dos tipos de Petrov, é importante obter a relação entre o tensor de Weyl na base de coordenadas e seus escalares complexos, de forma análoga ao que foi mostrado com o tensor de Ricci (eq. (1.62)):

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta^{(a)(e)}\eta^{(b)(f)}\eta^{(c)(g)}\eta^{(d)(h)} e_{(e)\alpha} e_{(f)\beta} e_{(g)\gamma} e_{(h)\delta} W_{(a)(b)(c)(d)}, \quad (1.96)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\gamma\delta} = & -(\Psi_2 + \bar{\Psi}_2)[\langle l_\alpha n_\beta l_\gamma n_\delta \rangle + \langle m_\alpha \bar{m}_\beta m_\gamma \bar{m}_\delta \rangle] + \\ & + (\Psi_2 - \bar{\Psi}_2)\langle l_\alpha n_\beta m_\gamma \bar{m}_\delta \rangle + \{-\Psi_0 \langle n_\alpha \bar{m}_\beta n_\gamma \bar{m}_\delta \rangle - \\ & - \Psi_4 \langle l_\alpha m_\beta l_\gamma m_\delta \rangle + \Psi_2 \langle l_\alpha m_\beta n_\gamma \bar{m}_\delta \rangle - \\ & - \Psi_1[\langle l_\alpha n_\beta n_\gamma \bar{m}_\delta \rangle + \langle n_\alpha \bar{m}_\beta \bar{m}_\gamma m_\delta \rangle] + \\ & + \Psi_3[\langle l_\alpha n_\beta l_\gamma m_\delta \rangle - \langle l_\alpha m_\beta m_\gamma \bar{m}_\delta \rangle] + c.c.\}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

onde cada um dos termos entre os brackets são definidos por

$$\begin{aligned} \langle l_\alpha n_\beta m_\gamma \bar{m}_\delta \rangle \equiv & l_\alpha n_\beta m_\gamma \bar{m}_\delta - l_\alpha n_\beta \bar{m}_\gamma m_\delta - n_\alpha l_\beta m_\gamma \bar{m}_\delta + \\ & + n_\alpha l_\beta \bar{m}_\gamma m_\delta + m_\alpha \bar{m}_\beta l_\gamma n_\delta - m_\alpha \bar{m}_\beta n_\gamma l_\delta - \\ & - \bar{m}_\alpha m_\beta l_\gamma n_\delta + \bar{m}_\alpha m_\beta n_\gamma l_\delta. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Através dessa forma explícita do tensor de Weyl, é possível derivar condições simples associadas às multiplicidades das direções principais nulas do tensor de Weyl (representadas pelos vetores \mathbf{l} e \mathbf{n}), acarretando, assim, na determinação dos vários tipos de Petrov:

i) Tipo de Petrov *I*: quatro direções principais nulas distintas; $\Psi_1 \neq 0$,

$$\Psi_0 = 0 \iff l_{[\sigma} W_{\alpha] \beta \gamma [\delta} l_{\tau]} l^{\beta} l^{\gamma} = 0; \quad (1.99)$$

ii) Tipo de Petrov *II*: uma direção principal nula de multiplicidade 2, outras distintas; $\Psi_2 \neq 0$,

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0 \iff W_{\alpha \beta \gamma [\delta} l_{\tau]} l^{\beta} l^{\gamma} = 0; \quad (1.100)$$

iii) Tipo de Petrov *D*: duas direções principais nulas distintas de multiplicidade 2; $\Psi_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_1 = 0 &\iff W_{\alpha \beta \gamma [\delta} l_{\tau]} l^{\beta} l^{\gamma} = 0, \\ \Psi_4 = \Psi_3 = 0 &\iff W_{\alpha \beta \gamma [\delta} n_{\tau]} n^{\beta} n^{\gamma} = 0; \end{aligned} \quad (1.101)$$

iv) Tipo de Petrov *III*: uma direção principal nula de multiplicidade 3, outra distinta; $\Psi_3 \neq 0$,

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0 \iff W_{\alpha \beta \gamma [\delta} l_{\tau]} l^{\gamma} = 0; \quad (1.102)$$

v) Tipo de Petrov *N*: uma direção principal nula de multiplicidade 4; $\Psi_4 \neq 0$,

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0 \iff W_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\delta = 0; \quad (1.103)$$

vi) Tipo de Petrov O: espaço-tempo conformalmente plano;

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0 \iff W_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \quad (1.104)$$

Se o espaço-tempo admite quatro direções principais nulas distintas, ele é denominado de **algebricamente geral**, caso contrário é dito **algebricamente especial**. Se os vetores l ou n estiverem alinhados com a as direções principais nulas, $\Psi_0 = 0$ ou $\Psi_4 = 0$, respectivamente. Se o vetor l estiver alinhado com a principal direção nula repetida de um espaço-tempo algebricamente especial, então $\Psi_0 = 0 = \Psi_1$. Se tanto l quanto n estiverem alinhados com as duas direções principais nulas repetidas de um espaço-tempo do tipo D , então a única componente do tensor de Weyl diferente de zero é Ψ_2 . A hierarquia dos tipos de Petrov, segundo a multiplicidade das direções principais nulas é representada pela Fig. 1.2.

1.2.3 Comportamento Assintótico do Campo Gravitacional nas Proximidades do Infinito Nulo

Além da classificação de Petrov, os escalares de Weyl possuem uma fundamentação física importante que está associada ao comportamento assintótico do campo gravitacional na vizinhança do infinito nulo. A obtenção de tal comportamento se dá através da análise das equações de Newman-Penrose para um sistema de coordenadas apropriado, as coordenadas de Robinson-Trautman.

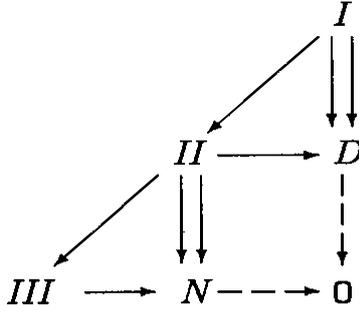


Figura 1.2: Hierarquia dos tipos de Petrov.

Simplificação das equações de Newman-Penrose

Primeiramente introduz-se uma família de hipersuperfícies nulas $u = \text{constante}$, isto é,

$$g^{\mu\nu} u_{,\mu} u_{,\nu} = 0. \quad (1.105)$$

Os vetores $l^\mu = g^{\mu\nu} u_{,\nu}$ são tangentes a família de geodésicas nulas que se encontram sobre a hipersuperfície $u = \text{constante}$ e que satisfazem,

$$l^\mu{}_{;\nu} l^\nu = 0. \quad (1.106)$$

Robinson e Trautman [88] mostraram que ao escolher como coordenadas $u = x^0$ e um parâmetro afim ao longo das geodésicas nulas, $r = x^1$, e mais duas coordenadas, x^2 e x^3 que rotulam as geodésicas em cada hipersuperfície $u = \text{constante}$, a métrica $g^{\mu\nu}$ toma a forma

$$\begin{aligned} g^{01} &= 1, \\ g^{11} &= 2(Q - w\bar{w}), \\ g^{1i} &= Z^i - (\bar{\zeta}^i w + \zeta^i \bar{w}), \\ g^{ij} &= -(\bar{\zeta}^i \zeta^j + \zeta^i \bar{\zeta}^j), \end{aligned} \quad (1.107)$$

onde $i, j = 2, 3$ e Q, w, Z^i e ζ^i são todos dependentes de u, r e x^i . A métrica (1.107) pode ser descrita pela seguinte base de tetradas

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta^\mu_1, \\ n^\mu &= \delta^\mu_0 + Q\delta^\mu_1 + Z^i\delta^\mu_i, \\ m^\mu &= w\delta^\mu_1 + \zeta^i\delta^\mu_i. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Considera-se também que os vetores n^μ e m^μ sejam paralelamente propagados ao longo de l^μ , como visto anteriormente;

$$\kappa = \pi = \epsilon = 0, \quad \rho = \bar{\rho}, \quad \tau = \bar{\alpha} + \beta. \quad (1.109)$$

Com essas simplificações, as relações de comutação (aplicadas a um escalar φ) ficam

$$(\Delta D - D\Delta)\varphi = (\gamma + \bar{\gamma})D\varphi - \bar{\tau}\delta\varphi - \tau\bar{\delta}\varphi, \quad (1.110)$$

$$(\delta D - D\delta)\varphi = (\bar{\alpha} + \beta)D\varphi - \rho\delta\varphi - \sigma\bar{\delta}\varphi, \quad (1.111)$$

$$(\delta\Delta - \Delta\delta)\varphi = -\bar{\nu}D\varphi + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta\varphi + \bar{\lambda}\bar{\delta}\varphi, \quad (1.112)$$

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\varphi = (\bar{\mu} - \mu)D\varphi + (\alpha - \bar{\beta})\delta\varphi + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\delta}\varphi, \quad (1.113)$$

assim como os operadores diferenciais de Newman-Penrose,

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial}{\partial r} \\ \Delta &= \frac{\partial}{\partial u} + Q\frac{\partial}{\partial r} + Z^i\frac{\partial}{\partial x^i} \\ \delta &= w\frac{\partial}{\partial r} + \zeta^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

De modo a relacionar as componentes de tetrada e os coeficientes espinoriais, substitui-se φ por u, r, x^i , respectivamente, nas quatro relações de comutação ($i = 2, 3$),

$$D\zeta^i = \rho\zeta^i + \sigma\bar{\zeta}^i, \quad (1.115)$$

$$Dw = \rho w + \sigma w - (\bar{\alpha} + \beta), \quad (1.116)$$

$$DZ^i = \bar{\tau}\zeta^i + \tau\bar{\zeta}^i, \quad (1.117)$$

$$DQ = \tau\bar{w} + \bar{\tau}w - (\bar{\gamma} + \gamma), \quad (1.118)$$

$$\delta Z^i - \Delta\zeta^i = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)\zeta^i + \bar{\lambda}\bar{\zeta}^i, \quad (1.119)$$

$$\delta\bar{\zeta}^i - \bar{\delta}\zeta^i = (\bar{\beta} - \alpha)\zeta^i + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\zeta}^i, \quad (1.120)$$

$$\delta\bar{w} - \bar{\delta}w = (\bar{\beta} - \alpha)w + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{w} + (\mu - \bar{\mu}), \quad (1.121)$$

$$\delta Q - \Delta w = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)w + \bar{\lambda}\bar{w} - \bar{v}, \quad (1.122)$$

que serão denominadas de **equações métricas**.

Por fim, as identidades de Ricci e de Bianchi também recebem suas simplificações,

$$D\rho = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma}, \quad (1.123)$$

$$D\sigma = 2\sigma\rho + \Psi_0, \quad (1.124)$$

$$D\tau = \rho\tau + \sigma\bar{\tau} + \Psi_1, \quad (1.125)$$

$$D\alpha = \alpha\rho + \beta\bar{\sigma}, \quad (1.126)$$

$$D\beta = \sigma\alpha + \beta\rho + \Psi_1, \quad (1.127)$$

$$D\gamma = \alpha\tau + \beta\bar{\tau} + \Psi_2, \quad (1.128)$$

$$D\lambda = \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu, \quad (1.129)$$

$$D\mu = \sigma\lambda + \rho\mu + \Psi_2, \quad (1.130)$$

$$D\nu = \mu\bar{\tau} + \lambda\tau + \Psi_3, \quad (1.131)$$

$$\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = 2\nu\alpha - \lambda(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}) - \Psi_4, \quad (1.132)$$

$$\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\beta + \bar{\alpha}) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) - \Psi_1, \quad (1.133)$$

$$\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta - \Psi_2, \quad (1.134)$$

$$\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \Psi_3, \quad (1.135)$$

$$\delta\nu - \Delta\mu = \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + \mu(\gamma + \bar{\gamma}) - 2\nu\beta, \quad (1.136)$$

$$\delta\gamma - \Delta\beta = \mu\tau - \sigma\nu - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda}, \quad (1.137)$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = \bar{\lambda}\rho + 2\tau\beta - \sigma(3\gamma - \bar{\gamma} - \mu), \quad (1.138)$$

$$\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = \rho(\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu}) - \sigma\lambda - 2\tau\alpha - \Psi_2, \quad (1.139)$$

$$\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = \nu\rho - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\gamma} - \gamma - \bar{\mu}) - \Psi_3, \quad (1.140)$$

$$D\Psi_1 - \bar{\delta}\Psi_0 = 4\rho\Psi_1 - 4\alpha\Psi_0, \quad (1.141)$$

$$D\Psi_2 - \bar{\delta}\Psi_1 = 3\rho\Psi_2 - \lambda\Psi_0 - 2\alpha\Psi_1, \quad (1.142)$$

$$\bar{\delta}\Psi_2 - D\Psi_3 = +2\lambda\Psi_1 - 2\rho\Psi_3, \quad (1.143)$$

$$D\Psi_4 - \bar{\delta}\Psi_3 = -3\lambda\Psi_2 + 2\alpha\Psi_3 + \rho\Psi_4, \quad (1.144)$$

$$\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 = 3\sigma\Psi_2 + (4\gamma - \mu)\Psi_0 - (4\tau + 2\beta)\Psi_1, \quad (1.145)$$

$$\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 = -3\tau\Psi_2 + (2\gamma - 2\mu)\Psi_1 + \nu\Psi_0 + 2\sigma\Psi_3, \quad (1.146)$$

$$\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 = -3\mu\Psi_2 + (2\beta - 2\tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 + 2\nu\Psi_1, \quad (1.147)$$

$$\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 = 3\nu\Psi_2 - (2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4. \quad (1.148)$$

Obtenção do comportamento assintótico

Usualmente, o comportamento assintótico é obtido em termos do tensor métrico, mas será um pouco mais satisfatório impor restrições sobre o tensor de Weyl (ou Riemann, no vácuo), como será visto aqui nesta subseção.

A condição principal que será adotada aqui é

$$\Psi_0 = \mathcal{O}(r^{-5}), \quad (1.149)$$

juntamente com a condição

$$D\Psi_0 = \mathcal{O}(r^{-6}) \quad (1.150)$$

na derivada de Ψ_0 com relação à coordenada r . Além disso, assume-se uma condição de "suavidade uniforme" a qual impõe que quaisquer derivações de Ψ_0 com relação às coordenadas x^i ($i = 2, 3$) não alterem sua dependência assintótica:

$$\partial_i \Psi_0 = \mathcal{O}(r^{-5}), \dots, \partial_i \partial_j \dots \partial_k \partial_l \Psi_0 = \mathcal{O}(r^{-5}) \quad (1.151)$$

e

$$\partial_i D \Psi_0 = \mathcal{O}(r^{-6}), \dots, \partial_i \partial_j \dots \partial_k \partial_l D \Psi_0 = \mathcal{O}(r^{-6}). \quad (1.152)$$

O objetivo dessa seção é mostrar de maneira sucinta que, a partir de das condições (1.149), (1.150), (1.151) e (1.152),

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \mathcal{O}(r^{-4}), \quad \Psi_2 = \mathcal{O}(r^{-3}), \\ \Psi_3 &= \mathcal{O}(r^{-2}), \quad \Psi_4 = \mathcal{O}(r^{-1}). \end{aligned} \quad (1.153)$$

O procedimento para a obtenção das condições (1.153) é dado pela seguinte ordem: primeiro, obtém-se a dependência em r de ρ e σ através de um primeiro grupo de equações de Newman-Penrose. Em seguida, são obtidas as dependências de α , β , ζ^i , w e Ψ_1 a partir de um segundo grupo. Com estas últimas, são obtidas as dependências de λ , μ e Ψ_2 com um terceiro grupo de equações e, por fim, são obtidas as dependências de Ψ_3 e Ψ_4 . As dependências restantes das quantidades τ , γ , ν , Z^i e Q também podem ser obtidas se desejado, resultando no comportamento assintótico completo da métrica $g^{\mu\nu}$.

Escrevendo

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \bar{\sigma} & \rho \end{pmatrix}; \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \Psi_0 \\ \Psi_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.154)$$

(1.123) e (1.124) tornam-se

$$D\mathcal{H} = \mathcal{B}^2 + \mathcal{Q}. \quad (1.155)$$

A solução assintótica de (1.155) para \mathcal{H} é dada por [98, 99]

$$\mathcal{H} = -r^{-1}\mathcal{I} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (1.156)$$

onde \mathcal{I} é a matriz identidade 2×2 . Com isso,

$$\rho = -r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad \sigma = \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (1.157)$$

Para seguir adiante, é necessário a introduzir o seguinte lema³:

Lema 01. Sejam a matriz complexa ($n \times n$) B e o vetor coluna (de n linhas) complexo b , cujas componentes são funções de r onde,

$$B = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad b = \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (1.158)$$

Seja a matriz ($n \times n$) complexa A , independente de r e não que não posua autovalor com parte real positiva. Suponha que qualquer autovalor de A , com parte real igual a zero, seja regular, isto é, que sua multiplicidade seja igual ao número de autovetores linearmente independentes correspondentes a esse autovalor. Com isso, todas as soluções de

$$Dy = (Ar^{-1} + B)y + b \quad (1.159)$$

³A demonstração do lema encontra-se na referência [98], com o auxílio da referência [100].

são limitadas no infinito nulo futuro, $u = \text{constante}$, $r \rightarrow \infty$ e representado pelo símbolo \mathcal{I}^+ , sendo y um vetor coluna (de n linhas) complexo, dependente de r . O fato de y ser limitado no infinito resulta que $y = \mathcal{O}(1)$.

Em seguida, com o auxílio de (1.114), utiliza-se o lema para as equações (1.115), (1.116), (1.126), (1.127), (1.141) e seus respectivos conjugados complexos. Com isso, obtém-se que o vetor $b = 0$, o vetor coluna y possui a forma

$$y = [r^4\Psi_1, r^4\bar{\Psi}_1, r\alpha, r\bar{\alpha}, r\beta, r\bar{\beta}, r\zeta^2, r\bar{\zeta}^2, r\zeta^3, r\bar{\zeta}^3, w, \bar{w}] \quad (1.160)$$

e

$$A = \left(\begin{array}{cccccccc|cc} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & & & -a & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & -1 \end{array} \right), \quad (1.161)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.162)$$

Os elementos da matriz B são expressões em $r, \rho, \sigma, \Psi_0, D\Psi_0$ e $\partial_i\Psi_0$, todos da ordem de r^{-2} . Com isso,

$$\Psi_1 = \mathcal{O}(r^{-4}). \quad (1.163)$$

A seguir, considera-se as equações (1.129), (1.130) e (1.142). O lema se aplica novamente para $y = [r^3\Psi_2, r\lambda, r\mu]$, com $A = 0$ e B, b como certas expressões de $r, \rho, \sigma, \Psi_0, \alpha, \Psi_1, w, D\Psi_1, \zeta^i, \partial_i\Psi_1$, todos da ordem de r^{-2} . Com isso,

$$\Psi_2 = \mathcal{O}(r^{-3}). \quad (1.164)$$

De forma similar, o lema se aplica à equação (1.143), com $y = r^2\Psi_3$, gerando

$$\Psi_3 = \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (1.165)$$

e, finalmente, à equação (1.144), com $y = r\Psi_4$, implicando em

$$\Psi_4 = \mathcal{O}(r^{-1}). \quad (1.166)$$

Nesta subsecção foi visto que, sob certas suposições de assintoticidade plana – que devem ser observadas em espaços-tempos radiativos, no vácuo – o tensor de Weyl (Riemann) exhibe um comportamento assintótico característico da forma

$$\Psi_n = \mathcal{O}(r^{n-5}); \quad n = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (1.167)$$

O espaço então pode ser dividido em cinco regiões; uma zona de proximidade, onde todos os termos são importantes; três zonas de transição, onde Ψ_0, Ψ_1 e Ψ_2 passam a ser desprezíveis; e, finalmente, a zona de radiação na qual Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 e Ψ_3 são desprezados e somente Ψ_4 permanece importante. Nesse último setor, o tensor de Weyl (Riemann) é essencialmente Petrov tipo N (nulo). A quarta zona é essencialmente do tipo III , assim como a terceira zona é essencialmente algebricamente especial do tipo II . A segunda zona é essencialmente uma região na qual existem raios geodésicos, na terminologia de Sachs [90]. Finalmente a primeira

zona é do tipo geral. Conseqüentemente, um referencial que se move em direção à fonte, vindo do infinito nulo, ao longo de geodésicas nulas apropriadas, observa uma espécie de **descamamento** das direções principais nulas associadas ao tensor de Weyl (Riemann), de acordo com a hierarquia imposta pela classificação de Petrov (Fig. 1.3). Este resultado

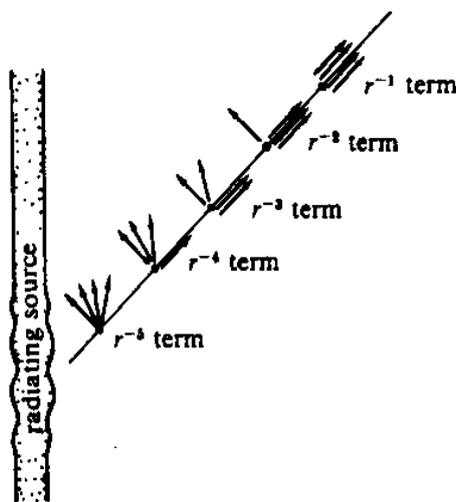


Figura 1.3: A propriedade de descamamento (*peeling off*) de espaços-tempos assintoticamente planos, ilustrando a multiplicidade das direções principais nulas do tensor de Weyl.

reproduz o resultado obtido por Sachs através da versão linearizada da Relatividade Geral [92] e que é denominado na literatura de **teorema de descamamento** (*peeling off theorem*).

A analogia entre as propriedades acima mencionadas acerca do campo gravitacional e as propriedades do campo eletromagnético é direta. No caso do eletromagnetismo, existem três regiões: a região de proximidade, onde os termos de ordem r^{-3} se tornam importantes; uma zona de transição, onde os termos de ordem r^{-2} dominam; e a zona de radiação, onde o campo eletromagnético se comporta como r^{-1} e que também é do tipo de Petrov N .

Capítulo 2

Emissão de Radiação Gravitacional no Formalismo Característico

2.1 O Trabalho Pioneiro de Bondi, van der Burg, Metzner e Sachs

"My interest in gravitational waves in particular and in energy transfer in general continues...I am delighted that the kernel of it all, paper VII, is still widely cited. In my judgement, it is my most important paper in a long career."

Hermann Bondi

2.1.1 Hipersuperfícies Características na Relatividade Geral

As equações de campo da Relatividade Geral formam um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas. Isto é melhor visto na aproximação linear, onde, numa apropriada escolha de calibre, as equações são simplesmente equações de onda. Em seu trabalho juntamente com van der Burg e Metzner, Bondi [89] apontou que equações diferenciais hiperbólicas possuem um caráter bem distinto das equações parciais parabóli-

cas e elípticas, pois elas permitem soluções que são inicialmente estáticas e que, de maneira súbita, se tornam dinâmicas. Tais soluções propagam seus efeitos ao longo de curvas privilegiadas e que são denominadas de **bicaracterísticas**. Além disso, estas curvas se encontram projetadas sobre superfícies especiais chamadas de **hipersuperfícies características** e que fazem o papel das **frentes de onda** na propagação destes efeitos. Estas superfícies podem ser definidas como sendo hipersuperfícies singulares para as quais o problema de Cauchy não se aplica.

Para que as hipersuperfícies características das equações de campo, no vácuo, sejam encontradas, leva-se em consideração as equações de evolução do problema de Cauchy [82],

$$R_{ij} = 0 \rightarrow g^{00}g_{ij,00} = H_{ij}, \quad (2.1)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ são índices referentes às coordenadas do tipo espaço. H_{ij} é uma expressão descrita em termos da métrica, de suas derivadas primeiras e de suas derivadas segundas, apenas nas coordenadas espaciais ou mistas entre a coordenada temporal e as espaciais. Se $g^{00} = 0$, torna-se inviável obter uma solução para $g_{ij,00}$. Esta condição é exatamente a condição para que a hipersuperfície $x^0 = \text{constante}$ seja uma **hipersuperfície nula**, dado que o módulo ao quadrado do vetor normal à $x^0 = \text{constante}$ é dado por g^{00} ($l_\mu = \delta_\mu^0$). Como o vetor normal à tal hipersuperfície é nulo, é também, por consequência, também tangente à ela. Com isso, uma hipersuperfície nula é localmente tangente ao cone de luz. Não somente as hipersuperfícies nulas são superfícies características, como também são onde estão projetadas as geodésicas nulas que representam as bicaracterísticas da teoria. Isto torna mais clara a idéia de que as perturbações gravitacionais são propagadas ao longo de geodésicas nulas, assim como deixa claro o fato de que as hipersuperfícies nulas fazem um papel importantíssimo no estudo da radiação gravitacional.

2.1.2 Coordenadas Radiativas de Bondi

A discussão da última seção sugere que, a fim de investigar radiação,

deve-se introduzir as hipersuperfícies

$$x^0 = U = \text{constante} \quad (2.2)$$

como uma família de hipersuperfícies nulas, cujo campo vetorial covariante e normal a essas superfícies é dado por

$$l_\mu = U_{,\mu} = \delta_\mu^0. \quad (2.3)$$

Como l^μ é nulo,

$$l_\mu l^\mu = g^{\mu\nu} U_{,\mu} U_{,\nu} = 0, \quad (2.4)$$

o campo vetorial é tanto normal quanto tangente às hipersuperfícies nulas. As bicaracterísticas são dadas pelas órbitas do vetor l^μ , ou seja,

$$x^\mu = x^\mu(r), \quad (2.5)$$

para um determinado parâmetro r , onde

$$\frac{dx^\mu}{dr} = l^\mu = g^{\mu\nu} l_\nu. \quad (2.6)$$

Com isso, o campo vetorial nulo l^μ é geodésico, $Dl^\mu = 0$ (como descrito no Capítulo 1), e afinamente parametrizado por r . Bondi utilizou uma segunda coordenada,

$$x^1 = R, \quad (2.7)$$

como um parâmetro radial ao longo das geodésicas nulas. Assim, as coordenadas restantes, x^2 e x^3 , ficarão responsáveis por nomear os raios nulos. Assumindo que o espaço-tempo é assintoticamente plano,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

pode-se escolher x^2 e x^3 como ângulos polares usuais

$$x^2 = \Theta, \quad x^3 = \Phi \quad (2.9)$$

definidos em cada 2-esfera no infinito nulo \mathcal{I}^+ ($U = \text{constante}$, $R = \infty$). As coordenadas (U, R, Θ, Φ) são denominadas na literatura de **coordenadas de Bondi** ou radiativas.

2.1.3 A Métrica Radiativa de Bondi

Um raio nulo é uma das curvas de coordenadas $U, \Theta, \Phi = \text{constante}$ com R variando. O vetor tangente a esta curva é

$$\frac{dx^\mu}{dR} = (0, 1, 0, 0) = \delta_1^\mu \quad (2.10)$$

e, conseqüentemente precisa ser paralelo ao vetor l^μ , isto é, $l^\mu = \chi \delta_1^\mu$, considerando um fator de proporcionalidade χ . Como, através de (2.3) e (2.6),

$$l^\mu = g^{0\mu} \quad (2.11)$$

as componentes da métrica g^{00} , g^{02} e $g^{03} = 0$ são nulos. Essas condições

induzem condições equivalentes para a métrica covariante, $g_{11} = g_{12} = g_{13} = 0$. Como visto na seção 1.2.3, Newman e Penrose, inspirados no trabalho de Robinson e Trautman [88], optaram por tomar a coordenada x^1 como um parâmetro afim ao longo das geodésicas nulas que, neste caso, exige que $\chi = 1$. Isso, torna $g_{01} = g^{01} = 1$. Contudo, Bondi optou por escolher $x^1 = R$ como um **parâmetro de distância de luminosidade**, definido por

$$\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = R^4 \sin^2 \Theta. \quad (2.12)$$

O significado dessa escolha é a de que as bisuperfícies ($U = \text{constante}$ e $R = \text{constante}$) devam possuir a área de uma 2-esfera, $4\pi R^2$.

Por fim, impõem-se duas simetrias: uma simetria axial, onde o espaço-tempo não depende da coordenada Φ e uma invariância de reflexão azimutal, onde a métrica mantém a sua forma sob uma transformação do tipo $\Phi \rightarrow -\Phi$. Esta última simetria faz com que mais componentes da métrica se anulem, $g_{03} = g_{13} = g_{23} = 0$. Juntando todas essas informações, pode-se obter a **métrica radiativa de Bondi**,

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(\frac{V}{R} e^{2b} - W^2 R^2 e^{2q} \right) dU^2 + 2e^{2b} dU dR + 2WR^2 e^{2q} dU d\Theta - \\ & - R^2 (e^{2q} d\Theta^2 + e^{-2q} \sin^2 \Theta d\Phi^2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde V , W , b e q são funções que dependem das coordenadas U , R e Θ . A forma como essas funções estão distribuídas na métrica está diretamente relacionada com o comportamento assintoticamente plano da métrica de Bondi. Este ponto será discutido nas próximas seções.

2.1.4 O Problema de Valor Inicial Característico

O caso proposto por Bondi e a introdução de coordenadas radiativas possui uma situação diferente do que é proposto no problema de Cauchy

pois, dessa vez, os dados iniciais são dados sobre uma superfície característica ao invés de uma hipersuperfície do tipo espaço. Como consequência, este caso é denominado de **problema de valor inicial característico**. Bondi ¹ mostrou que as dez equações de campo se dividem em três grupos (a forma explícita das equações de campo de Bondi, no formalismo de Newman-Penrose, se encontram no Apêndice A):

(i) Seis **equações principais**, que se dividem em dois subgrupos:

(a) Quatro **equações de hipersuperfície**

$$\Phi_{00} = 0; \quad \Phi_{01} = 0; \quad \Phi_{10} = 0; \quad \Phi_{11} + 3\Lambda = 0. \quad (2.14)$$

(b) Duas **equações padrão**

$$\Phi_{02} = 0; \quad \Phi_{20} = 0. \quad (2.15)$$

(ii) Uma **equação trivial**

$$\Phi_{11} - 3\Lambda = 0. \quad (2.16)$$

(iii) Três **equações suplementares**

$$\Phi_{12} = 0; \quad \Phi_{21} = 0; \quad \Phi_{22} = 0. \quad (2.17)$$

No problema usual de Cauchy, existe um resultado o qual determina que, se as equações dinâmicas (R_{ij}) são satisfeitas em cada ponto do espaço-tempo e as equações de vínculo (R_{00}, R_{0j}) são satisfeitas na hipersuperfície inicial, então as identidades de Bianchi contraídas garantem que as equações de vínculo são satisfeitas em cada ponto do espaço-tempo. Existe um resultado análogo para o problema característico, exceto pelo fato de que as 'equações de vínculo' consistem na equação trivial e nas

¹A classificação do problema de valor inicial característico no formalismo de tetradas foi introduzido por Sachs [90], numa generalização do artigo seminal de Bondi, onde a descrição é feita na base de coordenadas. Apesar de utilizar uma base de tetradas um pouco diferente da de Newman e Penrose, a nomenclatura do formalismo característico não é alterada.

equações suplementares. As equações suplementares não são exatamente equações de vínculo, pois também possuem derivadas com relação à coordenada x^0 . O caso característico é dado pelo seguinte lema:

Lema 02. Se as equações principais são satisfeitas em cada ponto do espaço-tempo, então as identidades de Bianchi contraídas garantem que

- (a) a equação trivial seja satisfeita como uma consequência algébrica,
- (b) as equações suplementares são satisfeitas em cada ponto do espaço-tempo se elas são satisfeitas sobre uma hipersuperfície $x^1 = \text{constante}$.

O lema pode ser visto de forma direta através das identidades de Bianchi contraídas apresentadas no Capítulo 1. Da equação (1.71), além do fato de que o vetor l^μ é geodésico ($\kappa = 0$), $\Phi_{11} = 0$, implicando em $\Phi_{11} - 3\Lambda = 0$. Da equação (1.72),

$$D\Phi_{12} = \sigma\Phi_{21} + (2\rho + \bar{\rho} - 2\epsilon)\Phi_{12}, \quad (2.18)$$

vê-se que, se as equações suplementares são satisfeitas, $D\Phi_{12} = 0$. Como D representa a variação das quantidades de Newman-Penrose ao longo da coordenada x^1 , as equações para Φ_{12} e Φ_{21} são satisfeitas para cada valor de x^1 . O mesmo vale para a equação proveniente de Φ_{22} , dada por (1.73),

$$\begin{aligned} D\Phi_{22} &= \delta\Phi_{21} + \bar{\delta}\Phi_{12} - (\tau - 2\beta - 2\pi)\Phi_{21} + (\rho + \bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\Phi_{22} - \\ &- (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\pi)\Phi_{12}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Com isso, o problema de valor inicial característico se resume a resolver as equações principais e satisfazer as equações suplementares para um determinado valor de x^1 .

As equações padrão (no caso de simetria axial, apenas uma) são as únicas que possuem derivadas com relação a x^0 e, conseqüentemente, propagam

as informações para o futuro nulo (de uma hipersuperfície nula para a próxima). As equações de hipersuperfície (no caso axial, três) envolvem apenas variações sobre a hipersuperfície $x^0 = \text{constante}$.

Supondo que a solução é analítica em cada ponto do espaço-tempo, uma análise detalhada das equações principais (A.36), (A.37), (A.38), (A.39) e (A.42) leva ao seguinte esquema de integração: primeiro é determinado o valor de q em U_0 , isto é, sobre uma hipersuperfície inicial $U_0 = \text{constante}$. As três equações de hipersuperfície determinam b , W e V sobre U_0 . A equação padrão serve para determinar q_U sobre U_0 , o que significa que q é determinado sobre a próxima hipersuperfície nula vizinha, $U_1 = \text{constante}$. Faz-se, assim, a integração das equações principais novamente para U_1 , depois o mesmo processo para uma nova hipersuperfície nula futura U_2 e assim por diante.

2.1.5 Massa de Bondi e Conservação de Energia

A partir de agora se mostra necessário expandir todas as quantidades em potências de $1/R$ para uma análise assintótica do espaço-tempo de Bondi. No final dessa seção se faz uma comparação entre o método de Bondi e o de NP, dado que a coordenada x^1 possui características distintas nas duas análises. Bondi adota para a função $q(U, R, \Theta)$ a **condição de radiação emergente**,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial(Rq)}{\partial R} \right]_{U=\text{constante}} = 0, \quad (2.20)$$

numa tentativa de prevenir que qualquer radiação proveniente do infinito passado \mathcal{I}^- ($u = \text{constante}$, $r \rightarrow -\infty$) pudesse afetar a fonte. Esta escolha foi feita em uma analogia com a **condição de Sommerfeld** [107] originária da teoria eletromagnética a qual previne a presença de radiação imergente. Tal condição, porém, não é forte o suficiente para impedir a ocorrência de radiação imergente fraca. A presença de radiação imergente de finita duração não representa um problema grave, pois esta

descreve o fenômeno de espalhamento e de caudas de ondas gravitacionais [101, 102] que decaem a zero na vizinhança de \mathcal{I}^+ .

No processo de expansão das quantidades de Bondi em potências inversas de R , somente é necessário trabalhar até uma certa ordem limite para que se obtenha a conservação de massa-energia, também denominada de resultado de **perda de massa**. Considera-se a seguinte expansão para a função $q(U, R, \Theta)^2$

$$q = \frac{c}{R} + \frac{y}{R^3} + \mathcal{O}(R^{-4}) \quad (2.21)$$

onde $c = c(U, \Theta)$ e $y = y(U, \Theta)$ são funções arbitrárias até este momento. As equações de hipersuperfície ((2.14) e Apêndice A), quando integradas, resultam em

$$\left. \begin{aligned} b &= -c^2/4R^2 + \mathcal{O}(R^{-3}), \\ W &= -(c_\Theta + 2c \cot \Theta)/R^2 + (2d + 3cc_\Theta + 4c^2 \cot \Theta)/R^3 + \mathcal{O}(R^{-4}), \\ V &= R - 2M + \mathcal{O}(R^{-1}), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

onde $d = d(U, \Theta)$ e $M = M(U, \Theta)$ também são funções arbitrárias. A substituição das expansões acima na métrica de Bondi (2.13), induzem o seguinte comportamento assintótico

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 + \mathcal{O}(R^{-1}); \\ g_{01} &= 1 + \mathcal{O}(R^{-1}); \\ g_{02} &= \mathcal{O}(1); \\ g_{22} &= -R^2 + \mathcal{O}(R); \\ g_{33} &= -R^2 \sin^2 \Theta + \mathcal{O}(R). \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

²Se o termo proporcional a R^{-2} for mantido na expansão de q , então a métrica de Bondi passa a fazer parte do grupo de espaços-tempos denominados de **polihomogêneos**; espaços-tempos que podem ser expandidos assintoticamente em uma combinação de potências de R^{-1} e $\ln R$. Estudos sobre estes espaços-tempos foram realizados em [94].

Com as expansões (2.21) e (2.22), a equação padrão ((2.15) e Apêndice A) implica em

$$4y_U = 2Mc - d_\Theta + d \cot \Theta, \quad (2.24)$$

assim como as equações suplementares que resultam em

$$M_U = -c_U^2 + \frac{1}{2}(c_{\Theta\Theta} + 3c_\Theta \cot \Theta - 2c)_U \quad (2.25)$$

e

$$-3d_U = M_\Theta + 3cc_{U\Theta} + 4cc_U \cot \Theta + 2c_U c_\Theta, \quad (2.26)$$

onde estas duas equações são os resultados exatos do lema 02 que fazem parte das equações de campo satisfeitas para qualquer hipersuperfície $R = \text{constante}$.

Uma investigação detalhada das equações de campo acima revelam com maior clareza o que já foi discutido acerca do problema de valor inicial característico. Os dados iniciais envolvem a prescrição das funções c e y em U_0 . Contudo, é necessária a prescrição de c_U para qualquer valor de R . Como o desenvolvimento se dá assintoticamente, deve-se prescrever c_U em \mathcal{I}^+ . Finalmente é necessária também a prescrição de M e d em U_0 , que descrevem a intersecção de U_0 e \mathcal{I}^+ . Com esses dados iniciais, todas as quantidades de Bondi são obtidas. De forma clara, é a função c_U que determina a evolução da fonte radiativa e, como consequência, é denominada de função **notícia**. Se a solução é estática, então a função notícia é nula. Restringindo a atenção aos períodos em que a fonte é estática, torna-se possível encontrar uma transformação de coordenadas que relaciona as quantidades M , d e y a quantidades físicas conhecidas. Isto é feito na análise do regime estático da métrica de Bondi, o espaço-tempo de Weyl [89]. Neste regime, a função M é diretamente ligada à

massa total do sistema e é denominada de **aspecto de massa**. De fato, a quantidade

$$m(U) = \frac{1}{2} \int_0^\pi M(U, \Theta) \sin \Theta \, d\Theta \quad (2.27)$$

determina a massa total do sistema de Bondi em \mathcal{I}^+ e é chamada de **massa de Bondi** (de forma similar, d representa o **aspecto de dipolo** e y , o **aspecto de quadrupolo**). Multiplicando (2.25) por $\sin \Theta$, integrando com relação a Θ , de 0 a π , e utilizando a definição de massa de Bondi, juntamente com as condições de regularidade sobre o eixo de simetria, $c(U, 0) = c(U, \pi) = 0$, obtém-se

$$m_U = -\frac{1}{2} \int_0^\pi c_U^2 \sin \Theta \, d\Theta. \quad (2.28)$$

A natureza não-positiva do lado direito da equação acima leva à conclusão de que **só existe perda de massa do sistema se existe a presença da função notícia**. No caso do vácuo, a energia total do sistema de Bondi, E_B , coincide com a massa total, representada pela massa de Bondi. Com isso, integrando a equação (2.28) com relação à coordenada U , a partir da hipersuperfície nula inicial U_0 até uma hipersuperfície nula futura U' , obtém-se a lei de conservação de massa-energia do sistema radiativo de Bondi,

$$dE_B = E_B(U') - E_B(U_0) = -\frac{1}{2} \int_{U_0}^{U'} dU \int_0^\pi c_U^2 \sin \Theta \, d\Theta, \quad (2.29)$$

cuja forma também pode ser dada por

$$\frac{dE_B}{dU} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi c_U^2 \sin \Theta \, d\Theta. \quad (2.30)$$

Com isso, se o sistema permanece quiescente, então a função notícia é

nula e a massa de Bondi se mantém constante. Se, contudo, o sistema irradia, então a função notícia é diferente de zero e o sinal negativo em (2.29) indica uma **perda** de massa-energia do sistema. A força deste resultado é de que não foi assumido a princípio um limite de campo fraco para o campo gravitacional em qualquer ponto do espaço-tempo, não havendo necessidade de técnicas de linearização da teoria da Relatividade Geral. É importante mencionar aqui que, logo após o trabalho de Bondi *et al.*, Sachs estudou o mesmo caso sem qualquer tipo de simetria e obteve essencialmente o mesmo resultado. Os cálculos são mais longos e possuem algumas novidades como, por exemplo, a presença de **duas** funções notícia, que correspondem aos dois graus de polarização das ondas gravitacionais (h_+ e h_\times), comumente vistos na representação linear da Relatividade Geral [87]. Este ponto será discutido novamente no Capítulo 4.

2.1.6 Caracterização da Zona de Radiação

A partir das expansões das funções de Bondi em potências inversas de R é possível obter as expansões dos objetos do formalismo de Newman-Penrose através das equações descritas no Apêndice A:

Coefficientes espinoriais

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -R^{-1} + \mathcal{O}(R^{-2}), & \sigma &= cR^{-2} + \mathcal{O}(R^{-4}), & \gamma &= \frac{1}{2}(M + cc_U)R^{-2} + \mathcal{O}(R^{-3}), \\ \mu &= -\frac{1}{2}R^{-1} + \mathcal{O}(R^{-2}), & \lambda &= c_U R^{-1} + \mathcal{O}(R^{-2}), & \tau &= \mathcal{O}(R^{-2}), & \pi &= \mathcal{O}(R^{-2}), \\ \nu &= \mathcal{O}(R^{-3}), & \alpha &= -2^{-\frac{3}{2}}R^{-1} \cot \Theta + \mathcal{O}(R^{-2}), & \beta &= 2^{-\frac{3}{2}}R^{-1} \cot \Theta + \mathcal{O}(R^{-2}); \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Escalares de Weyl

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \mathcal{O}(R^{-5}), & \Psi_1 &= \mathcal{O}(R^{-4}), & \Psi_2 &= -(M + cc_U)R^{-3} + \mathcal{O}(R^{-4}), \\ \Psi_3 &= -2^{-1/2}R^{-2}(c_{U\Theta} + c_U \cot \Theta) + \mathcal{O}(R^{-3}), & \Psi_4 &= -c_{UU}R^{-1} + \mathcal{O}(R^{-2}). \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Reescrevendo a expansão de σ e Ψ_2 da seguinte forma,

$$\sigma = \sigma^{(0)} R^{-1} + \mathcal{O}(R^{-2}), \quad (2.33)$$

$$\Psi_2 = \Psi_2^{(0)} R^{-3} + \mathcal{O}(R^{-4}), \quad (2.34)$$

a massa de Bondi pode ser reescrita, através de (2.31) e (2.32), em termos dos objetos de Newman-Penrose como

$$m(U) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\Psi_2^{(0)} + \sigma^{(0)} \sigma_U^{(0)} \right) \sin \Theta \, d\Theta. \quad (2.35)$$

Assintoticamente, o tipo de Petrov dominante é o de tipo N , que caracteriza a zona de radiação, como visto no capítulo anterior,

$$\Psi_4 = \Psi_4^{(0)} R^{-1} + \mathcal{O}(R^{-2}) \quad \rightarrow \quad \Psi_4^{(0)} = -c_{UU}. \quad (2.36)$$

A expressão de Ψ_4 que representa a zona de radiação gravitacional é proporcional à derivada segunda de c com relação à U . Desse resultado surge um problema: o caso $c_U = \text{constante}$, apesar de contabilizar uma perda constante de energia, segundo a variação da massa de Bondi, não representa uma emissão de radiação pois, $\Psi_4 = 0$. Neste caso depara-se com uma situação sem significado físico, com uma variação de c linearmente com o tempo retardado U . A forma de se contornar este problema é considerar uma emissão de ondas sanduíche, onde c possui valores constantes antes e/ou depois de um período de tempo finito [89].

Um último ponto, não menos importante, deve ser levado em consideração. Apesar da expansão dos escalares de Weyl possuir um comportamento assintótico semelhante ao do comportamento descrito pelo teorema de peeling off, estes não podem ser considerados idênticos. A diferença está concentrada no fato de que a coordenada x^1 , em cada caso, possui funções distintas. Enquanto a coordenada de Bondi, R , faz um papel de parâmetro de distância, a coordenada de Robinson-Trautman r

é um parâmetro afim ao longo da congruência de geodésicas nulas. Este fato faz com que a condição de radiação emergente seja distinta do teorema de peeling off. De fato, o teorema de peeling off é mais forte do que a condição de radiação emergente, pois, mesmo que a condição de radiação emergente seja satisfeita, a relação $\Psi_0 = \mathcal{O}(r^{-5})$ pode ser quebrada [81].

2.1.7 O Grupo de Bondi-Metzner-Sachs e a Conservação de Momento Linear

O grupo de Bondi-Metzner-Sachs, mais conhecido como grupo BMS, é um grupo de transformações das coordenadas de Bondi (U, R, Θ, Φ) que mantém o caráter assintótico da métrica de Bondi, dada por (2.23). As transformações são dadas por

$$\begin{aligned} U' &= K(\Theta, \Phi)U + \Omega(\Theta, \Phi), \\ R' &= R/K(\Theta, \Phi), \\ \Theta' &= \Theta'(\Theta, \Phi), \\ \Phi' &= \Phi'(\Theta, \Phi). \end{aligned} \tag{2.37}$$

As transformações das coordenadas Θ e Φ em Θ' e Φ' são denominadas na literatura de **transformações conformes** da 2-esfera em si própria,

$$d\Theta'^2 + \sin^2 \Theta' d\Phi'^2 = K^2(\Theta, \Phi)(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2) \tag{2.38}$$

e definido por

$$K^4 = \sin^2 \Theta J^2(\Theta, \Phi; \Theta', \Phi') \sin^{-2} \Theta', \tag{2.39}$$

onde $J(\Theta, \Phi; \Theta', \Phi')$ é o Jacobiano da transformação. A função $\Omega(\Theta, \Phi)$ é

uma função real arbitrária, suave, duas vezes diferenciável e definida na 2-esfera.

Bondi [89] obteve uma solução com simetria axial para o fator conforme que corresponde ao regime estacionário da métrica de Bondi, onde não há emissão de radiação gravitacional. Isto é feito com uma transformação do grupo BMS dada por

$$\begin{aligned} U' &= K(\Theta)U, \\ R' &= R/K(\Theta), \\ \Theta' &= \Theta'(\Theta), \\ \Phi' &= k_0^2\Phi, \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde k_0^2 é uma constante. A lei de transformação da coordenada Θ induz uma transformação $d\Theta' = K(\Theta)d\Theta$ que, por sua vez, induz uma nova transformação $\sin \Theta' = Y(\Theta)K(\Theta) \sin \Theta$, onde

$$Y(\Theta) = \frac{1}{K^2} - \frac{K_{\Theta\Theta}}{K^3} - \frac{K_{\Theta} \cot \Theta}{K^3} + \frac{K_{\Theta}^2}{K^4}. \tag{2.41}$$

Para que $K(\Theta)$ seja um fator conforme dado por (2.39),

$$K(\Theta) = \frac{k_0}{(\cosh \mathcal{V} \pm \cos \Theta \sinh \mathcal{V})}, \tag{2.42}$$

onde \mathcal{V} é uma constante. Com isso, $Y = k_0^{-2}$ e a transformação conforme é estabelecida. A transformação (2.40), junto com a solução (2.42), quando aplicada à equação (2.25), faz com que o aspecto de massa de Bondi tenha uma transformação induzida, $M \rightarrow MK^3$. Para a métrica de Schwarzschild ($q = b = W = 0$, $V = R - 2m_0$), onde o aspecto de massa é constante, $M = m_0$, a transformação $K(\Theta)$ faz com que

$$M(\Theta) = \frac{m_0 k_0^3}{(\cosh \mathcal{V} \pm \cos \Theta \sinh \mathcal{V})^3}. \tag{2.43}$$

Com isso, a massa de Bondi é constante e dada por

$$m = \frac{m_0 k_0^3}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.44)$$

onde $v = \tanh \mathcal{V}$ é o parâmetro de velocidade associado às transformações do grupo BMS.

A união de todas as transformações conformes dados por (2.38) formam um grupo, o grupo conforme. O grupo de rotações, o grupo O_3 , forma um subgrupo do grupo conforme, cujo fator conforme é dado por $K^2 = 1$. O grupo conforme é um grupo de Lie com seis parâmetros e que é isomórfico ao grupo de Lorentz próprio, ortócrono. O isomorfismo entre os dois grupos pode ser visto através da introdução de coordenadas estereográficas, que relacionam uma coordenada complexa ζ com as usuais coordenadas da esfera Θ e Φ por

$$\zeta = \sqrt{2} \cot \frac{\Theta}{2} e^{i\Phi}. \quad (2.45)$$

Em termos da coordenada estereográfica ζ , a métrica da 2-esfera possui a forma

$$ds^2 = d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2 = 2(1 + \zeta\bar{\zeta})^{-2} d\zeta d\bar{\zeta}. \quad (2.46)$$

Agora, a coordenada complexa ζ define um ponto no plano complexo. Transformações conformes do plano complexo induzem transformações conformes da esfera unitária em si própria. Isto pode ser visto pela transformação de Möbius,

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}; \quad ad - bc = 1, \quad (2.47)$$

onde a, b, c e d são quatro constantes complexas que, juntamente com a restrição indicada na equação (2.47), representam seis parâmetros reais.

Sob as transformações de Möbius, a métrica da esfera unitária é obtida:

$$ds^2 = 2K^2(1 + \zeta' \bar{\zeta}')^{-2} d\zeta' d\bar{\zeta}', \quad (2.48)$$

com o fator conforme K dado por

$$K = \frac{(a\bar{\zeta} + b)(\bar{a}\zeta + \bar{b}) + (c\bar{\zeta} + d)(\bar{c}\zeta + \bar{d})}{1 - \zeta\bar{\zeta}}. \quad (2.49)$$

Para mostrar o isomorfismo do grupo conforme com o grupo de Lorentz homogêneo, próprio e ortócrono, nota-se que a transformação (2.47) é exatamente como as transformações obtidas do grupo $SL(2, C)$, a representação espinorial do grupo de Lorentz [106]. Isto é visto ao introduzir um espaço vetorial linear, complexo e bidimensional. Sejam v_1 e v_2 componentes de um vetor neste espaço. Então, para cada transformação (2.47), existe uma transformação linear do grupo $SL(2, C)$ da forma

$$\begin{aligned} v'_1 &= av_1 + bv_2, \\ v'_2 &= cv_1 + dv_2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

como pode ser visto pela identificação $\zeta = v'_1/v'_2$. Com isso, pode-se identificar o grupo de transformações de Möbius com o grupo $SL(2, C)$. Devido à invariância do fator conforme dado por (2.49) sob uma mudança simultânea $a \rightarrow -a, b \rightarrow -b, c \rightarrow -c$ e $d \rightarrow -d$, segue-se que o grupo $SL(2, C)$ fornece uma cobertura dupla do grupo de Lorentz homogêneo, próprio e ortócrono. Isto é suficiente para estabelecer o isomorfismo entre o grupo conforme e o grupo de Lorentz homogêneo, próprio e ortócrono

e colocando-os como subgrupos do grupo BMS. Como exemplo, as transformações dadas por (2.40) representam uma rotação de Lorentz no plano (t, z) [106].

Outros subgrupos do grupo BMS são importantes de serem analisados. Primeiro, as transformações particulares $\Theta' = \Theta$ e $\Phi' = \Phi$ são denominadas de supertranslações. Neste caso,

$$U' = U + \Omega, \quad R' = R, \quad \Theta' = \Theta, \quad \Phi' = \Phi \quad (2.51)$$

para a equação (2.37). A junção de todas as supertranslações forma o **subgrupo de supertranslações**. Sob uma supertranslação, o sistema de hipersuperfícies nulas, $U = \text{constante}$, é transformado em um outro sistema de hipersuperfícies nulas, $U' = \text{constante}$, mas sem nenhuma rotação de Lorentz envolvida. Como $\Omega(\Theta, \Phi)$ é uma função real arbitrária, suave, duas vezes diferenciável e definida na 2-esfera, pode-se expandi-la em termos de harmônicos esféricos, $Y_{l,m}$:

$$\Omega(\Theta, \Phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \mathcal{A}_{l,m} Y_{l,m}(\Theta, \Phi), \quad (2.52)$$

onde $\mathcal{A}_{l,m}$ são constantes. O conjunto infinito de parâmetros $\mathcal{A}_{l,m}$, sujeito à condição $\mathcal{A}_{l,-m} = (-1)^m \bar{\mathcal{A}}_{l,m}$, define as supertranslações.

No caso $\mathcal{A}_{l,m} = 0$, para $l > 1$, Ω possui a seguinte forma:

$$\Omega(\Theta, \Phi) = \mathcal{E}_t - \mathcal{E}_x \sin \Theta \cos \Phi - \mathcal{E}_y \sin \Theta \sin \Phi - \mathcal{E}_z \cos \Theta, \quad (2.53)$$

onde $\mathcal{E}_t = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \mathcal{A}_{0,0}$, $\mathcal{E}_x = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\mathcal{A}_{1,1} - \mathcal{A}_{1,-1})$, $\mathcal{E}_y = i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\mathcal{A}_{1,1} + \mathcal{A}_{1,-1})$ e $\mathcal{E}_z = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mathcal{A}_{1,0}$ representam uma reparametrização do grupo³. Com isso, as supertranslações se reduzem ao caso especial, denominado de

³Sachs, em [91], adota a parametrização $\mathcal{E}_t \rightarrow \mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_x \rightarrow -\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y \rightarrow -\mathcal{E}_y$ e $\mathcal{E}_z \rightarrow -\mathcal{E}_z$, o que não modifica em nada o resultado obtido pela parametrização aqui adotada.

translações, que possuem quatro parâmetros (\mathcal{E}_t , \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_y e \mathcal{E}_z) e que dão origem ao **subgrupo de translação** do grupo de Poincarè. O parâmetro \mathcal{E}_0 está associado à uma translação temporal, assim como os outros três parâmetros estão associados às translações espaciais.

Os geradores das translações do grupo BMS podem ser obtidos pelas fórmulas gerais de construção dos geradores de um grupo de Lie. Primeiro reescreve-se a lei de transformação do grupo, levando-se em conta os seus parâmetros

$$X'^{\mu} = X'^{\mu}(X^{\mu}; \mathcal{E}_A); \quad \mu = 0, 1, 2, 3; \quad A = t, x, y, z. \quad (2.54)$$

Os geradores das translações⁴ são obtidos pela usual fórmula do termo de primeira ordem, na expansão do grupo de transformações em torno da identidade:

$$\mathcal{G}^{\mu A} = \left. \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial \mathcal{E}_A} \right|_{\mathcal{E}_A=0}. \quad (2.55)$$

Os operadores associados aos geradores das translações são obtidos através da expressão

$$\mathcal{P}^A = \mathcal{G}^{\mu A} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}}. \quad (2.56)$$

Para as translações, com o auxílio das equações (2.51), (2.53), (2.54), (2.55) e (2.56), constroem-se os operadores \mathcal{P}^A

$$\mathcal{P}^A = \mathcal{N}^A \frac{\partial}{\partial U}. \quad (2.57)$$

onde $\mathcal{N}^A = (1, -\sin \Theta \cos \Phi, -\sin \Theta \sin \Phi, -\cos \Theta)$.

⁴Os parâmetros \mathcal{E}_t , \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_y e \mathcal{E}_z estão associados às translações nas direções temporal t e cartesianas, x , y e z , respectivamente, de um referencial de Lorentz assintótico

Em seu trabalho de formalização do grupo BMS [91], Sachs obteve quatro integrais covariantes sob as transformações (2.37). Essas integrais envolvem cada um dos geradores de rotações de Lorentz e de super-translações. Para o subgrupo de translações, tais integrais levam a leis de conservação de quantidades fundamentais na teoria de emissão de radiação gravitacional. A forma das integrais covariantes sob translações é dada por

$$\begin{aligned}
I \left\{ \mathcal{N}^A \frac{\partial}{\partial U} \right\} &= \frac{1}{4\pi} \int_{U_0}^{U'} dU \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi \mathcal{N}^A c_U \bar{c}_U \sin \Theta d\Theta \\
&\equiv -dP^A \\
&= -[P^A(U') - P^A(U_0)]
\end{aligned} \tag{2.58}$$

ou por

$$\frac{dP^A}{dU} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi \mathcal{N}^A c_U \bar{c}_U \sin \Theta d\Theta. \tag{2.59}$$

Além disso, no caso axial, através da definição de massa de Bondi e de sua derivada com relação à U , a expressão para o quadrivetor de energia-momento é obtida

$$P^A = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^A M(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi. \tag{2.60}$$

Ainda no caso de simetria axial, c_U é uma função real e as integrais invariantes dP^x e dP^y se anulam na integração da coordenada Φ . Além disso, a integral dP^t , associada ao parâmetro de translação temporal \mathcal{E}_t coincide com a integral de energia de Bondi dE_B (eq.2.29), que rege a conservação de energia na emissão de radiação gravitacional. Com isso, o setor das translações espaciais \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_y e \mathcal{E}_z fica responsável pela lei de conservação de momento linear do processo radiativo nas direções x, y, z . No caso

axial, os momentos nas direções x e y se conservam, restando apenas a lei de conservação na direção z ,

$$dP^z = P^z(U') - P^z(U_0) = \frac{1}{2} \int_{U_0}^{U'} dU \int_0^\pi c_U^2 \sin \Theta \cos \Theta d\Theta, \quad (2.61)$$

que também pode ser escrita como

$$\frac{dP^z}{dU} = \frac{1}{2} \int_0^\pi c_U^2 \sin \Theta \cos \Theta d\Theta. \quad (2.62)$$

Através da desigualdade de Schwartz,

$$\left(\int f \bar{f} \right) \left(\int g \bar{g} \right) \geq \left(\int f \bar{g} \right) \left(\int g \bar{f} \right), \quad (2.63)$$

onde a integração é tomada nas coordenadas U , Θ e Φ . A igualdade em (2.63) é satisfeita se e somente se f e g são proporcionais. Inserindo na equação (2.63) o par de funções

$$\begin{aligned} f &= c_U; g = c_U \cos \Theta, \\ f &= c_U; g = c_U \sin \Theta \cos \Phi, \\ f &= c_U; g = c_U \cos \Theta \sin \Phi \end{aligned} \quad (2.64)$$

e, somando os três termos,

$$dP^A dP^B \eta_{AB} \geq 0, \quad dP^A dP^B \eta_{AB} = 0 \rightarrow dP^A = 0 \quad (2.65)$$

onde η_{AB} é a métrica usual de Minkowski. Com isso, apesar de \mathcal{N}^A ser um vetor nulo, ($\mathcal{N}^A \mathcal{N}^B \eta_{AB} = 0$) o vetor dP^A é do tipo tempo ($dP^A dP^B \eta_{AB} > 0$).

2.2 Ondas Esféricas no Vácuo: o Espaço-Tempo de Robinson-Trautman

"People are very open-minded about new things - as long as they're exactly like the old ones."

Charles Kettering

Apesar de ser bem estabelecido, com a existência de quantidades físicas bem definidas, o formalismo de Bondi-Sachs possui algumas dificuldades cruciais que dificultam a sua utilização na descrição de sistemas físicos de interesse. A primeira dificuldade está na solução das equações de campo, que possuem uma hierarquia estabelecida e tornam o sistema complexo de ser analisado até mesmo numericamente. A segunda e maior dificuldade está concentrada na obtenção de condições iniciais na hipersuperfície $U = U_0 = \text{constante}$ que representem, por exemplo, um modelo de buracos negros em colisão. Claro que estas dificuldades não implicam em uma impossibilidade. Um trabalho recente [77], inclui uma combinação entre os formalismos de Cauchy e característico para a obtenção das formas de onda (**Cauchy-characteristic extraction (CCE)**) que aproveita a vantagem de cada formulação e reflete a dificuldade que o formalismo característico BS puro possui na reprodução de resultados.

Na tentativa de obter uma análise mais maleável e de fácil entendimento, além de estabelecer uma nova via de análise teórica e computacional (e que será desenvolvida no capítulo 3), esta tese propõe o estudo dos espaços-tempos de Robinson-Trautman como o alicerce teórico para o estudo da emissão de radiação gravitacional proveniente da fusão de buracos negros. Os espaços-tempos de Robinson-Trautman estão enquadrados no formalismo característico devido ao fato de serem descritos com o mesmo sistema de coordenadas apresentado na seção 1.2.3 e que foram introduzidas exatamente nos trabalhos originais de Robinson e Trautman na construção dos espaços-tempos que levam os seus nomes.

2.2.1 Definição e Descrição no Formalismo Característico

Definição

As soluções das equações de Einstein que admitem uma congruência de geodésicas nulas l , livre de rotação ($Im(\rho) = 0$) e de deformações ($\sigma = 0$), juntamente com as condições $\Phi_{00} = 0$, $\Phi_{01} = 0$ e $\Phi_{02} = 0$, são denominadas de soluções de Robinson-Trautman [88], cujo elemento de linha possui a seguinte forma⁵:

$$ds^2 = S^2 du^2 + 2dudr - r^2 K^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.66)$$

onde, $S = S(u, r, \theta)$ e $K = K(u, \theta)$ ⁶.

Como descrito na seção 1.2.3 e discutido na seção 2.1.4, as coordenadas de Robinson-Trautman, assim como as de Bondi, se adaptam à descrição característica do problema de dados iniciais; a coordenada u nomeia a família de hipersuperfícies nulas $u = \text{constante}$, tal que $l_\mu = u_{,\mu}$. As curvas $x^\mu = x^\mu(r)$, definidas por $\partial x^\mu / \partial r = g^{\mu\nu} \partial_\nu u$, descrevem geodésicas nulas com parâmetro afim associado r e que repousam sobre as hipersuperfícies nulas com valores de u constantes. Com isso, a métrica de Robinson-Trautman, descrita pelas tetradas nulas de Newman-Penrose como em (1.108), no caso particular dado por (B.3), revela que

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{S^2}{2}, & Z^i &= 0, & w &= 0, \\ \zeta^\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2rK}, & \zeta^\phi &= i \frac{\sqrt{2}}{2rK \sin \theta}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Todas as quantidades de Newman-Penrose, calculadas a partir das tetradas de Robinson-Trautman, estão postas no apêndice B.

⁵Aqui foram usadas coordenadas $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$, relacionadas com as coordenadas originais da referência [88], $x^1 = \zeta$ e $x^2 = \eta$, respectivamente, através da relação $\zeta = 2 \cos \phi \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $\eta = 2 \sin \phi \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Além disso, foram introduzidas novas notações, $x^4 = \sigma \rightarrow x^0 = u$, $x^3 = \rho \rightarrow x^1 = r$, $p \rightarrow 1/K$ e $c \rightarrow S^2$

⁶Ao longo da tese será abordada apenas o caso de simetria axial, $S_\phi = K_\phi = 0$

Descrição no formalismo característico

Seguindo a classificação do formalismo característico, as equações de campo de Robinson-Trautman são obtidas através dos escalares de Ricci. Das equações principais, três das equações de hipersuperfície são automaticamente satisfeitas pela definição do espaços-tempos de Robinson-Trautman, $\Phi_{00} = 0$, $\Phi_{01} = 0$ e $\Phi_{10} = 0$, assim como as duas equações padrão $\Phi_{02} = 0$ e $\Phi_{20} = 0$. A quarta equação de hipersuperfície, $\Phi_{11} + 3\Lambda = 0$, determina a forma da função S^2 em termos da função conforme da 2-esfera, K ,

$$S^2 = Y + 2r \frac{K_u}{K} + \frac{f}{r}, \quad (2.68)$$

onde $f = f(u, \theta)$ e $Y = Y(u, \theta)$. Este último é dado em termos de K por

$$Y = \frac{1}{K^2} - \frac{K_{\theta\theta}}{K^3} - \frac{K_\theta \cot \theta}{K^3} + \frac{K_\theta^2}{K^4}. \quad (2.69)$$

Apesar da expressão de S^2 ser uma equação de hipersuperfície, ela possui um termo de derivação com relação à coordenada u , que rotula as hipersuperfícies nulas. Porém, como será visto logo mais abaixo, o termo K_u depende somente de derivadas com relação à coordenada θ , mostrando que, de fato, $\Phi_{11} + 3\Lambda$ é uma equação de hipersuperfície na nomenclatura de Bondi.

A equação (2.69) representa a curvatura Gaussiana (Y/r^2) associada ao espaço Riemanniano bidimensional $V_2^{(\theta, \phi)}$ e que é gerada pela estrutura conforme K . As superfícies $u, r = \text{constante}$ podem ser pensadas como esferas distorcidas (no caso de superfícies fechadas); por isso, as soluções (2.66) são comumente referidas na literatura como soluções que descrevem a emissão de ondas gravitacionais esféricas. Esta denominação é apenas uma referência ao sistema de coordenadas, pois é conhecido que, segundo o teorema de Birkoff, soluções esfericamente simétricas, no vácuo, são dadas pela solução exterior de Schwarzschild.

Como as equações principais são satisfeitas, de acordo com o lema 02, a equação trivial, $\Phi_{11} - 3\Lambda = 0$, é automaticamente satisfeita. Por fim, duas das equações suplementares, $\Phi_{12} = 0$ e $\Phi_{21} = 0$, com a substituição da expressão de S^2 , mostram que a função f depende somente da coordenada u , $f_\theta = 0$. Porém, com uma transformação de coordenadas que mantém a métrica (2.66) invariante,

$$u' = J(u), \quad r' = r/J_u, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi, \quad (2.70)$$

pode-se mostrar que a função f é reduzida a uma constante. A transformação $u \rightarrow u'$ renomeia a família de hipersuperfícies nulas $u = \text{constante}$, assim como o rótulo das geodésicas nulas dado por r . As transformações (2.70) induzem uma transformação sobre as funções f , K , $H \equiv K_u/K$ e Y da seguinte forma:

$$f' = \frac{f}{J_u^3}, \quad K' = KJ_u, \quad H' = \frac{H}{J_u} + \frac{J_{uu}}{J_u^2}, \quad Y' = \frac{Y}{J_u^2}. \quad (2.71)$$

Para que f' adquira valores constantes, $f_u = 3fJ_{uu}/J_u$. Por conveniência, adotar-se-á $f = -2m_0$. Com isso, a métrica de Robinson-Trautman recebe uma nova forma mais restrita,

$$ds^2 = \left(Y + 2r \frac{K_u}{K} - \frac{2m_0}{r} \right) du^2 + 2dudr - r^2 K^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.72)$$

que será a forma utilizada nas próximas seções.

A última equação suplementar, $\Phi_{22} = 0$, com a substituição da expressão de S^2 (eq.(2.68)) na equação (B.40), além da substituição $f = -2m_0$, resulta na equação dinâmica de Robinson-Trautman (RT),

$$K_u = \frac{1}{12m_0 K} (Y_{\theta\theta} + Y_\theta \cot \theta). \quad (2.73)$$

Como mencionado acima, a equação de RT, quando substituída na expressão de S^2 , elimina a derivada com relação à coordenada u , deixando a equação de hipersuperfície dependente apenas de derivadas com relação à coordenada θ . Além disso, a equação de RT é satisfeita em todos os pontos do espaço-tempo, pois, segundo o lema 02, ela é satisfeita para um valor de r .

Outro ponto interessante está relacionado com o comportamento da equação RT quando $u \rightarrow \infty$. Segundo teoremas de Chrusciel e Singleton [93], os espaços-tempos de Robinson-Trautman existem globalmente para todos os valores positivos de u , considerando dados iniciais arbitrários e bem comportados, e convergem assintoticamente para a métrica de Schwarzschild. Este dado será importante para a caracterização da configuração final da fusão frontal de dois buracos negros de Schwarzschild e que será considerada no capítulo 3.

2.2.2 Soluções Estacionárias e Caracterização da Zona de Radiação Gravitacional

A equação de Robinson-Trautman (2.73) possui duas soluções estacionárias:

a) a solução de Schwarzschild, onde

$$K = K_0 = \text{constante} \quad \rightarrow \quad Y = K_0^{-2}. \quad (2.74)$$

Com uma transformação do tipo $\tilde{u} = K_0^{-1}u$ e $\tilde{r} = K_0r$, o elemento de linha (2.72) se reduz à forma de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m_s}{\tilde{r}}\right) d\tilde{u}^2 + 2d\tilde{u}d\tilde{r} - \tilde{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.75)$$

onde m_s é a massa de Schwarzschild, dada por $m_s = m_0K_0^3$. A

transformação do elemento de linha de Schwarzschild dependente da coordenada usual t para a coordenada u se dá através da relação $u = t - [\tilde{r} + 2m_s \ln(\tilde{r} - 2m_s)]$.

b) a solução *boosted de Schwarzschild*, onde

$$K = K(\theta) = \frac{K_0}{\cosh \mathcal{V} \pm \cos \theta \sinh \mathcal{V}} \quad \rightarrow \quad Y = K_0^{-2}. \quad (2.76)$$

Com as mesmas transformações, $\tilde{u} = K_0^{-1}u$ e $\tilde{r} = K_0 r$, o elemento de linha (2.72) se reduz à forma *boosted de Schwarzschild*,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m_s}{\tilde{r}}\right) d\tilde{u}^2 + 2d\tilde{u}d\tilde{r} - \frac{\tilde{r}^2 K(\theta)^2}{K_0^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.77)$$

A denominação *boosted* se dá ao fato de que o fator conforme $K(\theta)$ de Robinson-Trautman possui a mesma forma do fator conforme (2.42) associado à transformação do grupo BMS (2.40), referente a uma rotação de Lorentz no eixo (t, z) , ou seja, um *boost* na direção z [89]. O parâmetro de velocidade do buraco negro *boosted* é dado por $v = \tanh \mathcal{V}$. Na próxima seção isto ficará mais claro com a determinação da expressão da massa de Bondi nas coordenadas de Robinson-Trautman, adiantando que a sua forma, no caso do buraco negro de Schwarzschild *boosted*, possui a mesma forma da equação (2.44).

Com a substituição da expressão de S^2 nas equações (B.44), (B.45) e (B.46), os escalares de Weyl diferentes de zero são

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= -\frac{m_0}{r^3}, \\ \Psi_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Y_\theta}{Kr^2}, \\ \Psi_4 &= \frac{D_1(u, \theta)}{r} + \frac{D_2(u, \theta)}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde as funções $D_1(u, \theta)$ e $D_2(u, \theta)$ são definidas por

$$D_1(u, \theta) \equiv \frac{1}{2K^2} \partial_u \left(\frac{K_{\theta\theta}}{K} - \frac{K_\theta}{K} \cot \theta - 2 \frac{K_\theta^2}{K^2} \right) \quad (2.79)$$

e

$$D_2(u, \theta) \equiv \frac{1}{4K^2} \left(Y_{\theta\theta} - 2 \frac{Y_\theta K_\theta}{K} - Y_\theta \cot \theta \right). \quad (2.80)$$

De acordo com a classificação de Petrov, os espaços-tempos de Robinson-Trautman são do tipo *II* e convergem assintoticamente ($u \rightarrow \infty$) [93] para o tipo de Petrov *D*. A função $D_1(u, \theta)$, em analogia com a teoria do eletromagnetismo, contém toda a informação da dependência angular e temporal das amplitudes das ondas gravitacionais (uma vez que $K(u, \theta)$ seja dado) caracterizando, assim, a zona de onda (Petrov tipo *N*). Em outras palavras, $D_1(u, \theta)$ e $D_2(u, \theta)$ são os objetos utilizados, no contexto de Robinson-Trautman, para a análise das formas de onda emitidas em um processo iniciado pelos dados $K(u_0, \theta)$, u_0 correspondendo à hipersuperfície nula inicial.

2.2.3 Transformação das Coordenadas de Bondi Para as Coordenadas de Robinson-Trautman: Conservação de Energia e Momento Linear

De forma a obter uma lei de conservação de energia e momento para o espaços-tempos de Robinson e Trautman, é necessário uma transformação de coordenadas do sistema de Bondi-Sachs para que as leis de conservação obtidas pela equação (2.61) sejam escritas nas coordenadas de Robinson-Trautman. Este procedimento é similar ao apresentado na referência [118] e segue, na sua maior parte, a referência [124]. O procedimento consiste na expansão das coordenadas de Bondi em potências

inversas de r com a exigência de que a métrica de Bondi, descrita nas coordenadas de Robinson-Trautman, possua o mesmo comportamento assintótico dado por (1.2.3). No caso de simetria axial, $\Phi = \phi$. Pelo elemento de linha da 2-esfera, $u, r = \text{constante}$, o *ansatz* $R \sim rK$ é sugerido. Com isso, as transformações são definidas por

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \frac{U_1}{r} + \frac{U_2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \\ R &= rK + R_0 + \frac{R_1}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), \\ \Theta &= T_0 + \frac{T_1}{r} + \frac{T_2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde todos os coeficientes dependem de u e θ . Para a determinação destes coeficientes a condição assintótica da métrica de Bondi

$$\begin{aligned} {}^{(B)}g^{UU} &= 0 = {}^{(B)}g^{\Theta U}, & {}^{(B)}g^{UR} &= 1 + \mathcal{O}(R^{-2}), \\ {}^{(B)}g^{\Theta R} &= \mathcal{O}(R^{-2}), & {}^{(B)}g^{\Theta\Theta} {}^{(B)}g^{\Phi\Phi} &= (R^4 \sin^2 \Theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

é tomada como referência⁷. Com a lei de transformação das componentes contravariantes métrica de Bondi,

$${}^{(B)}g^{\mu\nu} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} {}^{(RT)}g^{\alpha\beta}, \quad (2.83)$$

a expansão de ${}^{(B)}g^{\Theta R}$ resulta em

$${}^{(B)}g^{\Theta R} = T_{0,u}K + \mathcal{O}(r^{-1}). \quad (2.84)$$

⁷A métrica de Bondi será representada pelo índice (B) , enquanto a de Robinson-Trautman será representada por (RT) .

Assim, $T_{0,u} = 0$. Usando a liberdade do grupo BMS, faz-se a escolha $T_0 = \theta$, por simplicidade. Da transformação

$${}^{(B)}g^{RU} = U_{0,u}K + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad (2.85)$$

tem-se que $U_{0,u} = K^{-1}$, fixando a dependência de U_0 com relação à coordenada u . A liberdade na função U_0 com relação à coordenada θ também corresponde a uma transformação sob o grupo BMS. Todos os coeficientes restantes da transformação (2.81) são agora expressos em termos de U_0 . A condição ${}^{(B)}g^{UU} = 0$ revela que

$$U_1 = -\frac{1}{2}K^{-1}U_{0,\theta}^2, \quad U_2 = \frac{1}{2}K^{-2}U_{0,\theta}^2U_{0,\theta\theta} \quad (2.86)$$

e, de ${}^{(B)}g^{\Theta U} = 0$, tem-se que

$$T_1 = -K^{-1}U_{0,\theta}, \quad T_2 = K^{-2}U_{0,\theta}U_{0,\theta\theta}. \quad (2.87)$$

Finalmente, os coeficientes da expansão de R podem ser calculados a partir de ${}^{(B)}g^{\Theta\Theta(B)}g^{\Phi\Phi} = (R^4 \sin^2 \Theta)^{-1}$. Os primeiros cálculos confirmam o *ansatz* $R \sim rK$ e os cálculos subsequentes resultam em

$$R_0 = \frac{1}{2}[U_{0,\theta\theta} + \cot \theta U_{0,\theta}] \quad (2.88)$$

e

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4}U_{0,\theta}^2K^{-3}[2K_\theta^2 - K_{\theta\theta}K + \cot \theta K_\theta K] - \frac{1}{8}K^{-1}[U_{0,\theta\theta} + \cot \theta U_{0,\theta}]^2 - \\ &- \frac{1}{2}U_{0,\theta}K^{-1}[U_{0,\theta\theta\theta} - \cot^2 \theta U_{0,\theta}]. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Os coeficientes da transformação (2.81) são suficientes para extrair as quantidades físicas essenciais de Bondi-Sachs nas coordenadas de Robinson-Trautman, como a massa de Bondi e a função notícia. Seguindo com a análise assintótica das transformações de coordenadas,

$${}^{(B)}g^{RR} = \frac{V}{R}e^{-2b} = -1 + 2\frac{M}{R} + \mathcal{O}(R^{-2}) = -1 + 2\frac{M}{rK} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (2.90)$$

onde o aspecto de massa de Bondi, nas coordenadas de Bondi, é dado por

$$M = m_0K^3 + \frac{1}{4} \left[U_{0,\theta}^2 E_u K - U_{0,\theta\theta} E - U_{0,\theta} (2E_\theta + 3 \cot \theta E) \right] \quad (2.91)$$

onde E é definido por

$$E \equiv -K \sin \theta \partial_\theta \left(\frac{K_\theta K^{-2}}{\sin \theta} \right). \quad (2.92)$$

A expressão (2.91), quando escrita de forma similar à equação (2.35), resulta em

$$m(u) = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\Psi_2^{(0)} K^3 + K c c_u + \mathcal{R}(u, \theta) \right) \sin \theta d\theta, \quad (2.93)$$

onde,

$$\mathcal{R}(u, \theta) = U_{0,\theta} E \cot \theta + \frac{1}{2} U_{0,\theta} E_\theta - \frac{1}{4} U_{0,\theta}^2 E_u K. \quad (2.94)$$

A equação (2.93) possui uma forma bem diferente à da equação (2.35),

evidenciando a impossibilidade de se definir a massa de Bondi de forma invariante segundo o formalismo de Newman-Penrose (além do fato de que, nos espaços-tempos RT, para a base de tetradas considerada, $\sigma = 0$). As transformações das coordenadas de Bondi para as de Robinson-Trautman evidenciam a dependência da definição da massa de Bondi com relação ao sistema de coordenadas.

O caso estacionário, $c_u = 0$, $\mathcal{R} = 0$, $M = M(\theta)$ determina as massas de Bondi associadas aos espaços-tempos de Schwarzschild, como indicado na seção anterior. Como, neste caso,

$$M(\theta) = m_0 K(\theta)^3, \quad (2.95)$$

a massa de Bondi, para a solução boosted de Schwarzschild, é dada por

$$m = \frac{m_0 K_0^3}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.96)$$

e, no caso do buraco negro em repouso, $m = m_0 K_0^3$.

Assim como o aspecto de massa, a função notícia c_u também é obtida através da transformação de coordenadas por intermédio de

$${}^{(B)}g^{RU} = e^{-2b} = 1 + \frac{c^2}{2R^2} + \mathcal{O}(R^{-4}) = 1 + \frac{c^2}{2r^2 K^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (2.97)$$

com

$$c = \frac{\sin \theta}{2} \partial_\theta \left(\frac{U_{0,\theta}}{\sin \theta} \right). \quad (2.98)$$

Derivando c com relação à coordenada de Bondi U e considerando que, assintoticamente,

$$c_u = c_U \frac{\partial U}{\partial u} = c_U K^{-1}, \quad (2.99)$$

obtém-se que

$$c_U^2 = \frac{E^2}{4} = \frac{K^2}{4} \left(2 \frac{K_\theta^2}{K^3} - \frac{K_{\theta\theta}}{K^2} + \cot \theta \frac{K_\theta}{K^2} \right)^2. \quad (2.100)$$

Com isso, finalmente chega-se à expressão assintótica da conservação de energia-momento de Bondi-Sachs nas coordenadas de Robinson-Trautman

$$dP^A = -\frac{1}{4\pi} \int_{u_0}^{u'} du \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^A K c_u^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.101)$$

que, em termos da função notícia de Robinson-Trautman, se escreve como

$$dP^A = -\frac{1}{16\pi} \int_{u_0}^{u'} du \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^A K \left(2 \frac{K_\theta^2}{K^3} - \frac{K_{\theta\theta}}{K^2} + \cot \theta \frac{K_\theta}{K^2} \right)^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.102)$$

A equação (2.101) também pode ser reescrita como

$$\frac{dP^A}{du} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^A K c_u^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.103)$$

e que representa o fluxo de momento emitido em forma de ondas gravitacionais. Já o quadrivetor momento axial de Robinson-Trautman pode ser definido por

$$P^A \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^A M(u, \theta) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.104)$$

pois, com a expressão da evolução do aspecto de massa, descrita nas coordenadas de Robinson-Trautman,

$$M_u = -Kc_u^2 + \frac{1}{2} \partial_u (c_{\theta\theta} + 3c_\theta \cot \theta - 2c) , \quad (2.105)$$

a equação (2.103) é obtida através da derivação de (2.104) com relação à u . Lembrando que o segundo termo de (2.105) se anula na integração devido às condições de regularidade sobre o eixo de simetria, $c(u, 0) = c(u, \pi) = 0$.

Com todas as expressões até agora obtidas, já se torna possível construir um modelo de fusão por colisões de buracos negros no formalismo característico de Robinson-Trautman. Este é o objeto do capítulo que se segue.

Capítulo 3

Emissão de Radiação Gravitacional Através da Fusão de Dois Buracos Negros de Schwarzschild

*"La esperienza non falla, ma sol fallano i nostri giudizi,
promettendosi di lei cose che non sono in sua potestà."*

Leonardo da Vinci

Este capítulo se propõe a estudar a colisão de dois buracos negros de Schwarzschild na formulação característica por intermédio dos espaços-tempos de Robinson-Trautman, discutidos no capítulo anterior. Todos os resultados que serão apresentados aqui fazem parte de dois artigos de Aranha, Soares e Tonini [85, 86] e um artigo de Aranha, de Oliveira, Soares e Tonini [83]. Neles são construídos os dados iniciais correspondentes à fase de fusão na colisão frontal de dois buracos negros, juntamente com a análise da extração de energia e momento linear no processo de emissão de radiação gravitacional, assim como a análise de seus dos padrões angulares e temporais¹.

¹Na referência [85], a construção dos dados iniciais é refeita onde algumas questões técnicas da derivação em [83] são implementadas

Do ponto de vista teórico, os artigos [83, 85, 86] possuem uma distinção com relação à abordagem empregada no capítulo 1: os vetores da base de tetradas utilizados constituem uma base **semi-nula**, onde

$$\begin{aligned}
 e_{(1)}{}^\mu &= l^\mu, \\
 e_{(2)}{}^\mu &= n^\mu, \\
 e_{(3)}{}^\mu &= \frac{\sqrt{2}}{2}(m^\mu + \bar{m}^\mu), \\
 e_{(4)}{}^\mu &= \frac{i\sqrt{2}}{2}(m^\mu - \bar{m}^\mu).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

No entanto, apesar da diferença na base de tetradas, as equações de campo permanecem as mesmas do caso das tetradas de Newman-Penrose, mantendo o esquema numérico a ser descrito nas próximas seções.

3.1 Construção dos Dados Iniciais Característicos

Como mencionado no capítulo anterior, os dados iniciais de Robinson-Trautman se enquadram na classe de dados iniciais do problema de valor inicial característico, em contraponto ao caso do formalismo ADM ou problema de Cauchy. Para os espaços-tempos de Robinson-Trautman, a função $K(u_0, \theta)$, dada em uma hipersuperfície característica $u = u_0$, corresponde aos dados iniciais a serem evoluídos pela equação dinâmica (2.73). O objetivo desta seção é exibir dados iniciais $K(u_0, \theta)$ que representem dois buracos negros de Schwarzschild em fusão num procedimento similar ao utilizado no artigo seminal de Misner [108]. O método de Misner é baseado na solução da equação do vínculo hamiltoniano no formalismo ADM [4]. Isto pode ser visto da seguinte forma:

Em analogia com as coordenadas bi-esféricas [109] no plano cartesiano tridimensional Σ , introduz-se a seguinte parametrização para as coordenadas cartesianas ²

²Nota-se que as coordenadas cartesianas são funções contínuas, com derivadas con-

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a \sin \theta \sinh \eta}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta} \cos \phi, \\
y &= \frac{a \sin \theta \sinh \eta}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta} \sin \phi, \\
z &= \pm \frac{a}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde o sinal \pm representa $z > 0$ e $z < 0$ respectivamente. Os limites de η , θ e ϕ são dados por $0 \leq \eta \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Nesta parametrização, cada $\eta = \eta_0$ corresponde a 2-esferas, uma em $z > 0$ e a outra em $z < 0$, centradas em $(x = y = 0, z = \pm a \cosh \eta_0)$ respectivamente, com raio $a \sinh \eta_0$. O vetor cartesiano que liga a origem ao ponto $P : (x, y, z)$ de Σ possui comprimento

$$r(\eta, \theta) = a \sqrt{\frac{\cosh \eta - \cos \theta \sinh \eta}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta}}. \tag{3.3}$$

Para o caso $\eta \rightarrow \infty$, as esferas se degeneram nos planos $z = 0$ and $z \rightarrow \pm\infty$. A utilidade desta parametrização ficará clara no que vem a seguir. Para referência futura, são introduzidas as funções

$$\mathcal{S}_{(\pm)}(\eta, \theta) = \sqrt{\cosh \eta \pm \cos \theta \sinh \eta}. \tag{3.4}$$

O elemento de linha plano tridimensional $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ é expresso, de acordo com a parametrização acima como

$$ds_{\text{plano}}^2 = \frac{a^2}{\mathcal{S}_{(\pm)}^4(\eta, \theta)} \left[d\eta^2 + \sinh^2 \eta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \tag{3.5}$$

tínuas de (η, θ, ϕ) . A ocorrência de singularidades neste sistema de coordenadas é fruto das singularidades usuais de um sistema de coordenadas esféricas.

De forma geral, toma-se Σ como a hipersuperfície do tipo espaço onde estão definidos os dados iniciais, cuja geometria é definida pelo elemento de linha

$$ds^2 = a^2 K^2(\eta + \gamma_0, \theta) \left[d\eta^2 + \sinh^2(\eta + \gamma_0)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.6)$$

onde γ_0 é um parâmetro arbitrário. Assumindo que Σ é um corte maximal com curvatura extrínseca nula, obtém-se que o vínculo hamiltoniano é reduzido à ${}^{(3)}R = 0$, onde ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura da seção tridimensional ($g^{ij}R_{ij}$). Com a substituição $K \equiv \Pi^2$, a equação de vínculo se reduz à equação de Laplace descrita nas coordenadas tipo bi-esféricas (3.2)

$$\frac{1}{\sin \theta} \left[\Pi_\theta \sin \theta \right]_\theta + \left[\Pi_\eta \sinh^2(\eta + \gamma_0) \right]_\eta + \frac{3}{4} \sinh^2(\eta + \gamma_0) \Pi = 0. \quad (3.7)$$

Claramente as funções

$$\Pi = \left(\frac{1}{\mathcal{S}_{(\pm)}(\eta + \gamma_0, \theta)} \right) \quad (3.8)$$

são soluções a equação (3.7) e, com respeito a métrica (3.6), correspondem a soluções do espaço plano (curvatura nula). Como (3.7) é linear em Π ,

$$\Pi = \left(\frac{\alpha_1}{\mathcal{S}_{(-)}(\eta + \gamma_0, \theta)} \right) + \left(\frac{\alpha_2}{\mathcal{S}_{(+)}(\eta + \gamma_0, \theta)} \right) \quad (3.9)$$

é uma solução não-plana de (3.7), onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias positivas. O espaço-tempo tridimensional, não-plano, definido por (3.9),

$$ds^2 = a^2 \Pi^4 \left[d\eta^2 + \sinh^2(\eta + \gamma_0)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.10)$$

é assintoticamente plano e com uma forma análoga à da seção tridimensional da geometria de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas. De fato, uma manipulação direta mostra que a métrica (3.10) pode ser reescrita como

$$ds^2 = \left(\alpha_2 + \alpha_1 \frac{\mathcal{S}_{(+)}(\eta + \gamma_0, \theta)}{\mathcal{S}_{(-)}(\eta + \gamma_0, \theta)} \right)^4 ds_{plano}^2. \quad (3.11)$$

E, para valores de $\eta \gg \gamma_0$, (3.11) pode ser expressa como

$$ds^2 = \left(\alpha_2 + \frac{a\alpha_1}{r(\eta, \theta)} \right)^4 ds_{plano}^2. \quad (3.12)$$

De modo a investigar a estrutura assintótica da métrica (3.12), grandes valores de η são considerados e, para tais valores de η , pontos (x, y, z) , cujas distâncias da origem também são grandes, em outras palavras, quando $(\eta \rightarrow \infty, \theta \simeq \pi)$. Neste caso, retornando às coordenadas cartesianas, a tri-geometria (3.12) pode ser dada na forma aproximada

$$g_{ij} \simeq \left\{ 1 + \frac{2 m_s^{(1)}}{r(\eta, \theta)} \right\} \delta_{ij}, \quad (3.13)$$

onde, tomando $2a = \alpha_2 m_0$, tem-se fixada a escala das coordenadas do tipo bi-esféricas, assim como a massa de Schwarzschild que é dada por

$$m_s^{(1)} = m_0 \alpha_1. \quad (3.14)$$

(3.13) possui a forma da seção espacial da métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas. Na derivação acima, a troca $\alpha_1 \rightleftharpoons \alpha_2$ pode ser realizada através da transformação $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ($2a = \alpha_1 m_0$, $m_s^{(2)} = m_0 \alpha_2$).

A partir desta construção, pode-se extrair os dados iniciais da dinâmica de Robinson-Trautman, que possui sua formulação de valor inicial sobre hipersuperfícies nulas. Com base na descrição geral do formalismo característico proposta por D’Inverno, Smallwood e Stachel [110] – na qual os graus de liberdade do campo gravitacional, no vácuo, estão contidos na estrutura conforme da 2-esfera imersa em hipersuperfícies tridimensionais – adota-se aqui a estrutura conforme dada pela expressão (3.9), definida na hipersuperfície $\eta = \text{constante} = 0$,

$$K(u_0, \theta) = \left(\frac{\alpha_1}{\mathcal{S}_{(-)}(\gamma_0, \theta)} + \frac{\alpha_2}{\mathcal{S}_{(+)}(\gamma_0, \theta)} \right)^2, \quad (3.15)$$

como condição inicial para a dinâmica de Robinson-Trautman a ser estendida ao longo de bicaracterísticas nulas e propagadas ao longo de uma congruência tipo tempo do espaço-tempo. O espaço-tempo restrito à condição inicial (3.15) pode então ser construído localmente como o produto $V_2^{(u,r)} \times V_2^{(\theta,\phi)}$ do espaço riemanniano da geometria da 2-esfera conforme ($V_2^{(\theta,\phi)}$) com o espaço riemanniano associado ao plano (u, r) ($V_2^{(u,r)}$), este último gerado por um vetor nulo $\partial/\partial r$ e por um vetor do tipo tempo $\partial/\partial u$ e com geometria $ds_{(u,r)}^2 = S^2(u, r, \theta)du^2 + 2dudr$. Assim, o elemento de linha do espaço produto, dado por

$$ds^2 = S^2(u, r, \theta)du^2 + 2dudr - r^2K^2(u, \theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.16)$$

representa a geometria de Robinson-Trautman a ser propagada pela equação RT (2.73) para valores $u > u_0$.

A interpretação dos dados iniciais assintoticamente planos (3.15) como sendo de dois buracos negros de Schwarzschild boosted em fusão, ao longo do eixo z , é baseada nas perturbações da métrica de Robinson-Trautman construídas com tais dados iniciais. Para $\alpha_1 = 0$ os dados iniciais correspondem à solução estacionária de um buraco negro de Schwarzschild boosted (com massa de Bondi total $m_0(\alpha_2)^6 \cosh \gamma_0$) ao longo da

direção positiva do eixo z com $v = \tanh \gamma_0$. Para $\alpha_1 \neq 0$, com $\alpha_1 \ll \alpha_2$, a configuração já não possui um caráter estacionário e, com isso, não caracterizando uma solução de buraco negro, mas ainda pode ser interpretado como um buraco negro boosted inicialmente perturbado. De forma recíproca, a mesma consideração é mantida para $(\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0)$ e $\alpha_1 \neq 0$ com $\alpha_2 \ll \alpha_1$, o último caso correspondendo também a um buraco negro de Schwarzschild boosted inicialmente perturbado. Dada essa análise, o caso de perturbação é associado com um buraco negro de massa relativamente pequena e boosted ao longo da mesma direção do buraco negro de maior massa, porém em sentido contrário. A velocidade inicial de imersão dos dois buracos negros, considerados individualmente, é definida pelo parâmetro inicial γ_0 através de $v = \tanh \gamma_0$.

Também é importante ressaltar que, no problema completo de Bondi-Sachs, a análise das equações de campo da teoria mostram que dados iniciais específicos devem ser complementados pelas funções notícia (uma no caso de simetria axial e duas no caso sem simetria). Contudo, para a dinâmica de Robinson-Trautman, a função notícia já é especificada, uma vez que os dados iniciais (3.15) são prescritos segundo as equações (2.99) e (2.100).

Dada a dinâmica, é possível evoluir os dados iniciais (3.15) considerando desde pequenos valores de α_1 até os valores para os quais as não linearidades passam a ter um papel importante na dinâmica. Sem perda de generalidade, fixar-se-á $\alpha_2 = 1$ para o restante da tese. Com isso, o parâmetro α_1 fixa a razão das massas de repouso dos dois buracos negros em fusão quando considerados individualmente. Para evitar uma confusão no rótulo das figuras apresentadas neste capítulo, o índice 0 associado ao parâmetro γ_0 é retirado, assim como a introdução do parâmetro α , definido por $\alpha \equiv \alpha_1/\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$, que é introduzido no lugar de α_1 . Com isso os dados iniciais (3.15) adquirem uma nova forma

$$K(u_0, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{\cosh \gamma + \cos \theta \sinh \gamma}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\cosh \gamma - \cos \theta \sinh \gamma}} \right)^2. \quad (3.17)$$

Por fim, alguns pontos a respeito dos dados iniciais obtidos devem ser discutidos. A condição inicial (3.17) já possui um horizonte aparente comum, o que é característico dos espaços-tempos de Robinson-Trautman [113]. Com isso, a evolução da dinâmica a partir dela cobre o regime de fusão até a configuração final, quando a emissão de radiação gravitacional é extinta. O parâmetro α está relacionado com a razão das massas de repouso de Bondi dos buracos negros considerando-os individualmente, α^6 . Por outro lado, com base na equação (3.14), o parâmetro α pode ser considerado como a razão de massa ADM assintótica dos dois buracos negros iniciais em interação. É importante resaltar que as massas ADM e de Bondi são distintas: enquanto a massa ADM por definição é conservada na presença de emissão de radiação gravitacional, a massa de Bondi decresce com o tempo [115]. O valor dos dois tipos de massa coincidem apenas no caso estacionário.

Apesar de os dados iniciais (3.17) corresponderem a uma colisão frontal de buracos negros a partir de seu regime de fusão, a evolução dos dados iniciais, via dinâmica de Robinson-Trautman, apresenta características que são similares e consistentes com aquelas obtidas de colisões de buracos negros, incluindo a fase de espiral, através de simulações de relatividade numérica plena e de cálculos pós-newtonianos que incorporam avaliações no limite de proximidade (close limit approximation) [72, 42] e que serão discutidos nas próximas seções.

3.2 Evolução Numérica dos Dados Iniciais e Caracterização da Configuração Final

A integração numérica da equação dinâmica de Robinson-Trautman, a partir dos dados iniciais (3.17), é realizada a partir de uma combinação de dois métodos espectrais bem divulgados na literatura: os métodos de Galerkin³ e de colocação, este segundo também chamado de pseudo-espectral [114, 96]. Estes métodos serão revisados aqui brevemente por

³Boris Grigorievich Galerkin foi um engenheiro e matemático soviético criador do método que leva o seu nome.

uma questão de completeza. Ao longo deste capítulo, a variável θ será expressa em termos de uma nova variável, $s = \cos \theta$. Basicamente, os métodos espectrais ditam que a solução de uma determinada equação diferencial seja aproximada por uma expansão em série numa base de funções específica. Considerando o caso em que a solução seja dependente de duas variáveis, u e s , a expansão da solução é dada por

$$\Gamma(u, s) = \sum_{k=0}^N a_k(u) \varphi_k(s) \quad (3.18)$$

onde $N \in \mathbb{Z}_0^+$ representa o grau de aproximação de (3.18) com relação à solução exata e os $a_k(u)$'s são denominados de **coeficientes espectrais** da expansão que dão nome aos métodos. A base de funções $\varphi_k(s)$ deve ser ortogonal, isto é,

$$\begin{aligned} \langle j | k \rangle &\equiv \int_{s_1}^{s_2} \bar{\varphi}_j(s) \varphi_k(s) \omega(s) ds \\ &= v_{jk}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde s_1 e s_2 representam o intervalo de atuação em s da base de funções $\varphi_j(s)$, $\omega(s)$ é a função peso do problema de Sturm-Liouville e v_{jk} são constantes proporcionais à delta de Kronecker δ_{jk} que, no caso ortonormal, se reduzem à mesma.

Como a base de funções $\varphi_j(s)$ é dada a priori, a solução do problema se dá com a determinação dos coeficientes espectrais $a_k(u)$. Isto é feito através de projeções do espaço das funções base sobre a solução (3.18). A forma com que as projeções são tomadas distingue os diferentes métodos espectrais. O **método de Galerkin** baseia-se na projeção de soluções do tipo (3.18), com relação à própria base em que esta é expandida:

$$\begin{aligned}
\langle j | \Gamma \rangle_{Gal} &\equiv \int_{s_1}^{s_2} \bar{\varphi}_j(s) \Gamma(u, s) \omega(s) ds \\
&= \sum_{k=0}^N a_k(u) \int_{s_1}^{s_2} \bar{\varphi}_j(s) \varphi_k(s) \omega(s) ds \\
&= \sum_{k=0}^N a_k(u) v_{jk} \\
&\propto a_j(u)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Já o **método de colocação** baseia-se na projeção de soluções do tipo (3.18), com relação à função delta de Dirac, que seleciona os pontos s_j de s que representam os zeros da função $\Gamma(u, s)$ em s , isto é, $\Gamma(u, s_j) = 0$. Os pontos s_k são denominados de pontos de colocação ou de interpolação. Com isso,

$$\begin{aligned}
\langle j | \Gamma \rangle_{col} &\equiv \int_{s_1}^{s_2} \delta(s - s_j) \Gamma(u, s) ds \\
&= \sum_{k=0}^N a_k(u) \int_{s_1}^{s_2} \delta(s - s_j) \varphi_k(s) ds \\
&= \sum_{k=0}^N a_k(u) \varphi_k(s_j) \\
&= F_j(a_0, a_1, \dots, a_N) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $F_j(a_0, a_1, \dots, a_N)$ formam um sistema de $N + 1$ equações cujas variáveis são dadas pelos coeficientes espectrais. Este resultado indica outra diferença entre os dois métodos: enquanto que no método de Galerkin, os coeficientes espectrais são obtidos diretamente pelas projeções integrais, no método de colocação, o sistema de $N + 1$ equações, $F_j = 0$, deve ser resolvido, para cada $j = 0, 1, \dots, N + 1$.

Antes de iniciar o esquema de integração numérica do sistema de Robinson-Trautman, faz-se necessário mudar a forma do fator conforme

K para que as equações de campo possuam uma menor complexidade na sua estrutura numérica. Tal escolha é dada por

$$L(u, s) \equiv 2 \ln K(u, s). \quad (3.22)$$

Com esta mudança, as equações da curvatura gaussiana Y (2.69) e da equação de Robinson-Trautman (2.73) passam a ter a forma

$$Y(u, s) = e^{-L} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[(1 - s^2)L_{ss} - 2sL_s \right] \right\} \quad (3.23)$$

e

$$L_u = \frac{e^{-L}}{6m_0} \left[(1 - s^2)Y_{ss} - 2sY_s \right]. \quad (3.24)$$

Considerando o intervalo de atuação da coordenada s , $-1 \leq s \leq 1$, que a coordenada θ é a coordenada usual da 2-esfera e que o operador de Legendre

$$(1 - s^2) \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2s \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.25)$$

aparece nas duas equações de campo, a base de Legendre $\varphi_k(s) \rightarrow P_k(s)$ se torna uma opção natural a ser utilizada na solução **aproximada** da equação de Robinson-Trautman. Com isso,

$$L_{aprox}(u, s) = \sum_{k=0}^N b_k(u) P_k(s) \quad (3.26)$$

onde $b_k(u)$, $k = 0, 1, \dots, N$, são os coeficientes espectrais de Robinson-Trautman. A **relação de ortogonalidade** dos polinômios de Legendre é dada por

$$\langle k | j \rangle \equiv \int_{-1}^1 P_k(s) P_j(s) ds = \frac{2}{2j+1} \delta_{kj}. \quad (3.27)$$

Comparando com o caso geral (3.19), tem-se que $\omega(s) = 1$, $v_{kj} = 2(2j+1)^{-1} \delta_{kj}$, $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ e $\bar{P}_k(s) = P_k(s)$. O próximo passo é voltado para a substituição da solução aproximada (3.26), com o auxílio da equação (3.22), em (2.69) de forma a obter a expressão aproximada de $Y(u, s)$,

$$Y_{approx}(u, s) = e^{-L_{approx}} \left(1 + \sum_{j=0}^N \frac{1}{2} j(j+1) b_j(u) P_j(s) \right). \quad (3.28)$$

A inserção das equações (3.26) e (3.28) na equação de Robinson-Trautman (3.24) leva à seguinte expressão residual

$$Res(u, s) = \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial u} b_k(u) P_k(s) - \frac{1}{6m_0} e^{-L_{approx}} \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-s^2) \frac{\partial}{\partial s} Y_{approx} \right]. \quad (3.29)$$

Em geral, a equação residual se aproxima de zero no limite $N \rightarrow \infty$, significando que a expansão (3.26) tende a função exata $L(u, s)$. Através da definição do método de Galerkin, a projeção da base de Legendre sobre a equação residual estabelece que $\langle P_j(s) | Res(u, s) \rangle = 0$, $\forall j = 0, 1, \dots, N$. Estas relações podem ser colocadas como⁴

$$\frac{\partial}{\partial u} b_j(u) = \frac{2j+1}{12m_0} \left\langle j \left| e^{-L_{approx}} \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-s^2) \frac{\partial}{\partial s} Y_{approx} \right] \right. \right\rangle. \quad (3.30)$$

Com isso, a dinâmica dos espaços-tempos de Robinson-Trautman é então reduzida a um sistema de $N+1$ equações diferenciais ordinárias com relação aos coeficientes espectrais, formando um sistema dinâmico

⁴O sistema dinâmico (3.30) é obtido através de integrações simbólicas no software MAPLE. Já, a sua solução, foi desenvolvida em programas escritos na linguagem C++.

autônomo. Porém, o processo de obtenção deste sistema dinâmico apresenta uma dificuldade técnica associada à projeção indicada no lado direito de (3.30): o termo $e^{-L_{approx}}$ torna a integração inviável devido ao aumento exponencial do uso da memória computacional. Para contornar esse problema, expande-se $e^{-L_{approx}}$ na base de Chebyshev⁵

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^N b_k(u)P_k(s)\right) = \sum_{k=0}^N a_k(u)T_k(s). \quad (3.31)$$

cuja solução é dada pela relação dos coeficientes espectrais $a_k(u)$ em termos dos coeficientes espectrais $b_k(u)$, substituído-a no lado direito de (3.31) e introduzindo a expansão de Chebyshev no lugar de $e^{-L_{approx}}$ em (3.31). A escolha pela base de Chebyshev ao invés da base de Legendre é, primeiramente, devido ao fato de que a solução para (3.31) será efetuada via método de colocação e os pontos de colocação de Legendre não possuem uma forma fechada em termos do grau de aproximação N [114]. Como dito anteriormente, o método de colocação se propõe a substituir os valores de s pelos pontos de colocação s_j , neste caso, em (3.31). Os **pontos de colocação de Chebyshev** são dados por [114]

$$s_j = \cos\left[\frac{j\pi}{N}\right], \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (3.32)$$

Com isso, o sistema dinâmico autônomo $N + 1$ -dimensional é obtido. Para a solução deste sistema de equações, utiliza-se uma integração numérica via método de **Runge-Kutta** de quarta ordem [117], de passo fixo (apêndice C). Questões a respeito da acurácia e da eficiência do sistema dinâmico estão postas em [111].

As condições iniciais numéricas dadas pelos coeficientes espectrais $b_k(u_0)$ a serem utilizados na integração do sistema dinâmico (3.30) são

⁵O grau de aproximação da expansão de Chebyshev, no lado direito de (3.30) é independente do grau de aproximação de Galerkin na expansão do lado esquerdo de (3.30). Porém, por questão de acurácia, os dois graus possuem o mesmo valor de N [111].

fornecidos pela condição inicial $L(u_0, s) = 2 \ln K(u_0, s)$ construída na última seção. Estes dados iniciais são obtidos através das projeções de Galerkin por

$$b_j(u_0) = (2j + 1) \langle j | 2 \ln K(u_0, s) \rangle \quad (3.33)$$

O efeito do grau de aproximação (ou truncagem da série) N nos dados iniciais podem ser avaliados pelo erro relativo $RE(u_0, s)$ entre as expressões exata e aproximada de $L(u_0, s)$,

$$RE(u_0, s) = \frac{|L(u_0, s) - L_{approx}(u_0, s)|}{L(u_0, s)}. \quad (3.34)$$

Em todos os experimentos numéricos realizados para esta tese foi adotada a truncagem $N = 13$; com este grau de aproximação, o erro relativo (3.34) é da ordem ou menor que 10^{-7} , para todo $-1 \leq s \leq 1$. O parâmetro da condição inicial também recebem um limite de atuação. α é tomado no intervalo $(0, 1]$ para distintos valores de γ . Todos os experimentos numéricos mostram que, após um longo tempo computacional u_f , todos os coeficientes espectrais se tornam constantes o que, numericamente, quer dizer que $|b_k(u_f + h) - b_k(u_f)| \leq 10^{-10}$ para todo $k = 0, 1, \dots, 13$. Aqui, h representa a unidade de tempo computacional e também denominada de passo de integração do método de Runge-Kutta (apêndice C).

Em u_f , a emissão de radiação gravitacional é considerada extinta. Um critério físico para fixar o valor de u_f , para cada α , será discutida na próxima numa discussão acerca da conservação de energia no processo de emissão de radiação gravitacional. A partir dos coeficientes espectrais finais $b_k(u_f)$ é possível reconstruir o fator conforme

$$K_{approx}(u_f, s) = \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{13} b_k(u_f) P_k(s) \right), \quad (3.35)$$

que, em todos os casos, pode ser aproximado por

$$K(u_f, s) \simeq \frac{\alpha_f^2}{\cosh \gamma_f + s \sinh \gamma_f}. \quad (3.36)$$

Em cada caso, após o ajuste de valores apropriados de $\alpha_f > 1$ e $\gamma_f < \gamma$ o desvio RMS (Root Mean Square) [116] entre (3.35) e (3.36) é da ordem ou menor do que 10^{-10} . Em outras palavras, dentro da margem de erro, a configuração final corresponde a um buraco negro de Schwarzschild boosted ao longo do eixo z , como abordado no capítulo 2 e exposto pela equação (2.44), com parâmetro de velocidade $v_f = \tanh \gamma_f$ e massa de repouso final maior do que a soma das massas de repouso de cada buraco negro quando considerados individualmente

$$m_f \equiv m_0 \alpha_f^6 > m_0 (1 + \alpha^6). \quad (3.37)$$

O resultado de (3.36) é a verificação numérica do teorema de Chruściel e Singleton [93] acerca da convergência da métrica de Robinson-Trautman para a métrica de Schwarzschild em $u \rightarrow \infty$.

Um dos resultados básicos a ser retirado dos experimentos numéricos aqui discutidos está na obtenção dos valores dos parâmetros da configuração final (3.36), α_f e γ_f , para cada conjunto de parâmetros iniciais (α, γ) . Estes são os parâmetros básicos do buraco negro remanescente que – juntamente com os parâmetros dos dados iniciais do sistema – permite que as quantidades físicas essenciais e que são características do processo de transferência radiativa envolvidos na emissão de ondas gravitacionais. No caso particular do parâmetro final α_f , a dinâmica de Robinson-Trautman fornece um teste direto para a validação dos códigos numéricos utilizados na integração da equação de Robinson-Trautman. De fato, para qualquer função suficientemente suave $K(u, s)$ a quantidade

$$\bar{\zeta}(u) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K^2(u, s) ds \quad (3.38)$$

é conservada ao longo da dinâmica, ou seja, $\partial_u \tilde{\zeta}(u) = 0$ [122]. Com isso, para os dados iniciais (3.17) obtém-se que

$$\tilde{\zeta}(u_0) = \alpha_f^4. \quad (3.39)$$

Pode-se, com isso, utilizar a expressão (3.39) para a determinação analítica do valor de α_f e que ajuste numericamente o valor de γ_f a fim de obter um pequeno desvio RMS entre (3.36) e (3.35)⁶.

Finalmente é importante ressaltar que o parâmetro $y = m_f/m_0$ (a massa de repouso normalizada do buraco negro remanescente) é relacionada com os parâmetros dos dados iniciais α e γ por

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int_{-1}^1 K^2(u_0, s) ds \right)^{3/2}. \quad (3.40)$$

Esta relação é uma consequência direta de (3.39). Para valores limitados de γ , as variáveis α e y serão usadas alternadamente nas próximas seções como referência de análise dos objetos físicos na formulação de Robinson-Trautman.

3.3 Padrões Angulares e Temporais da Emissão de Radiação Gravitacional

Nesta seção serão estudadas as formas de onda, também denominadas na literatura de **padrões angulares e temporais**, da radiação gravitacional emitida no processo de fusão de buracos negros, via descrição

⁶No caso de dados iniciais com simetria de paridade $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ($\alpha = 1$), os parâmetros do buraco negro remanescente são completamente determinados, pois $\gamma_f = 0$. A computação numérica é, contudo, necessária de forma a determinar, não apenas a distribuição de momento final do buraco negro remanescente (para dados iniciais com $\alpha \neq 1$), mas também os padrões angulares e temporais da radiação gravitacional emitida.

de Robinson-Trautman. Estes padrões são obtidos através das funções $D_1(u, \theta)$ e $D_2(u, \theta)$, associadas ao escalar de Weyl Ψ_4 , equações (2.79) e (2.80) e que representam a zona de radiação e de transição respectivamente, de acordo com o teorema de Peeling (1.167). Essas funções quando descritas em termos da variável $s = \cos \theta$ ficam da seguinte forma,

$$D_1(u, s) \equiv \frac{(1 - s^2)}{2K^2} \partial_u \left(\frac{K_{ss}}{K} - 2 \frac{K_s^2}{K^2} \right) \quad (3.41)$$

e

$$D_2(u, s) \equiv \frac{(1 - s^2)}{4K^2} \left(Y_{ss} - 2 \frac{Y_s K_s}{K} \right). \quad (3.42)$$

Com a integração numérica da equação dinâmica de Robinson-Trautman (2.73), é possível determinar a função $K(u, s)$ para cada instante de tempo u , para todos os valores de s . Os padrões angulares, na zona de onda, são dados por $(\lim_{r \rightarrow \infty} r \Psi_4)$ variando em s e com valores de u fixos, enquanto que os padrões temporais são dados por $(\lim_{r \rightarrow \infty} r \Psi_4)$ variando em u e com valores de s fixos. Os experimentos numéricos realizados para a análise das formas de onda são divididos em quatro grupos de acordo com os valores dos parâmetros iniciais α e γ ; o grupo (i) com $\alpha = 0.1$ e $\gamma = 0.1$; grupo (ii) com $\alpha = 0.7$ e $\gamma = 0.1$; grupo (iii) com $\alpha = 0.1$ e $\gamma = 0.7$; grupo (iv) com $\alpha = 0.7$ e $\gamma = 0.7$. A escolha desses valores não é baseada em qualquer argumentação física. A divisão destes grupos busca apenas uma alternância de valores grandes e pequenos para ambos os parâmetros iniciais a fim de se obter todos os comportamentos qualitativos possíveis no processo de emissão de ondas gravitacionais.

Padrões angulares

A Figura 3.1 exibe o padrão angular dado pela função $D_1(u, s)$, associado ao grupo (i) de condições iniciais, para três tempos computacionais distintos, $u = 0.0$ (curva sólida), $u = 0.5$ (curva tracejada) e $u = 1.0$

(curva pontilhada). A figura da esquerda apresenta o padrão angular em função da coordenada s e evidencia a diminuição do valor máximo de D_1 inicialmente localizado em $s = s_{max} \simeq 0.54$. Já a figura da direita exibe o gráfico polar de D_1 , em termos de θ , para os mesmos valores temporais da figura da esquerda. O gráfico polar indica um padrão típico de radiação **Bremsstrahlung** como visto no caso eletromagnético de partículas carregadas e deceleradas ao longo de suas direções de movimento (detalhes acerca dos processos de extração de momento linear pelas ondas gravitacionais serão abordados na seção 3.5). Analogamente ao caso eletromagnético, o padrão angular possui dois lóbulos dominantes na direção do movimento cujo envoltório se abre e cujas amplitudes diminuem à medida que a aceleração do sistema diminui. [123].

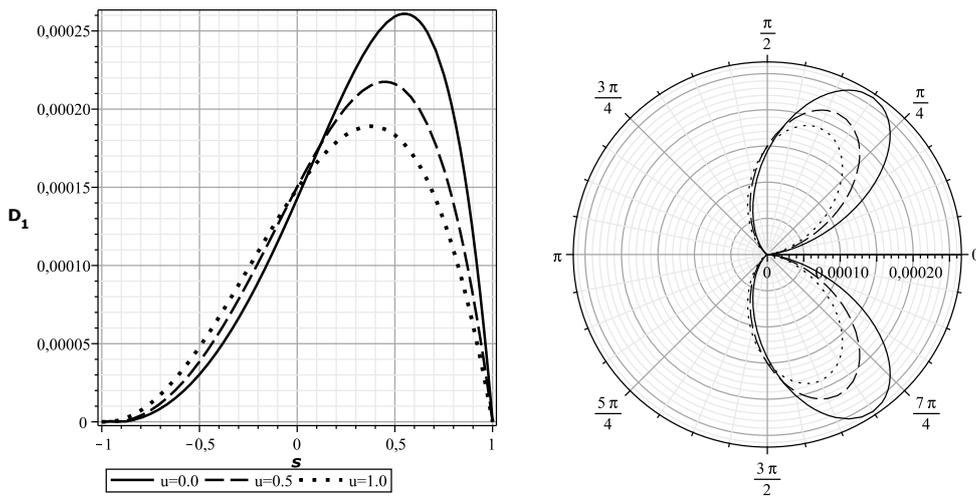


Figura 3.1: Padrões angulares para o grupo (i), $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.1$.

A Figura 3.2, associada ao grupo (ii) de parâmetros iniciais, difere da Figura 3.1 por exibir o padrão angular para um valor alto do parâmetro de razão de massas $\alpha = 0.7$. O aumento de α torna a configuração inicial mais simétrica em θ . Além disso, o valor máximo (inicialmente $s_{max} \simeq 0.51$) da amplitude D_1 decresce mais lentamente com relação ao tempo u (0.0 (curva sólida), 0.5 (curva tracejada) e 1.0 (curva pontilhada)),

evidenciando uma emissão quiescente, sem a presença de um curto pulso de emissão radiativa, ao contrário do caso $\alpha = 0.1$.

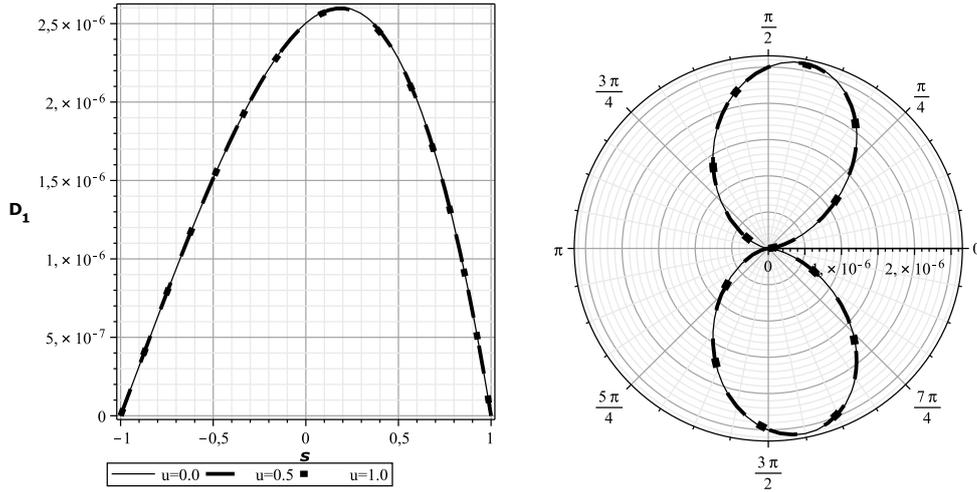


Figura 3.2: Padrões angulares para o grupo (ii), $\alpha = 0.7$, $\gamma = 0.1$.

Considerando agora um alto valor do parâmetro de velocidade inicial de imersão de $\gamma = 0.7$, os padrões angulares também apresentam diferenças significativas, mesmo com a manutenção dos valores de α utilizados nas Figuras 3.1 e 3.2, 0.1 e 0.7. A Figura 3.3, associada aos parâmetros iniciais do grupo (iii), mostra que a radiação emitida é mais concentrada em uma pequena região de s , com uma amplitude máxima mais alta $D_1 \simeq 1.6$ e localizada em $s_{max} \simeq 0.90$. Por consequência, os lóbulos da figura polar são mais fechados, porém levam muito menos tempo para abrir. Os tempos utilizados para cada uma das curvas da Figura 3.3 foram $u = 0.00$ (curva sólida), $u = 0.01$ (curva tracejada) e $u = 0.02$ (curva pontilhada), evidenciando não somente uma emissão de ondas gravitacionais bem localizadas no espaço como também uma emissão de curta duração.

O quarto e último grupo de parâmetros, grupo (iv), está associado à Figura 3.4, onde os padrões angulares descrevem, assim como na Figura

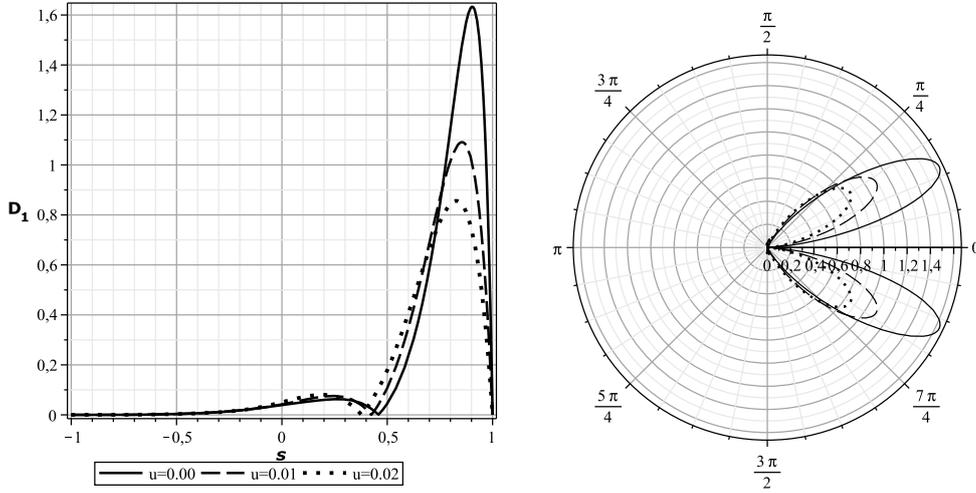


Figura 3.3: Padrões angulares para o grupo (iii), $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.7$.

3.2 (grupo (ii)), uma emissão quiescente e mais simétrica em θ . Porém, a emissão descrita pela Figura 3.4 não é tão simétrica quanto a da Figura 3.2, além de possuir uma maior amplitude máxima $D_1 \simeq 3.2 \cdot 10^{-4}$, localizada em $s_{max} \simeq 0.54$.

Padrões temporais

Os padrões temporais aqui apresentados possuem uma diferença de análise com relação aos padrões angulares, além da óbvia mudança de fixação da variável s ao invés da coordenada temporal u . A função $D_2(u, s)$ é incluída nos cálculos numéricos pois o teste computacional buscou incluir observadores que inicialmente ($u = u_0$) não fossem aptos a enxergar uma emissão de radiação gravitacional na direção de amplitude máxima s_{max} , em outras palavras,

$$r\Psi_4(u_0, s_{max}) = 0. \quad (3.43)$$

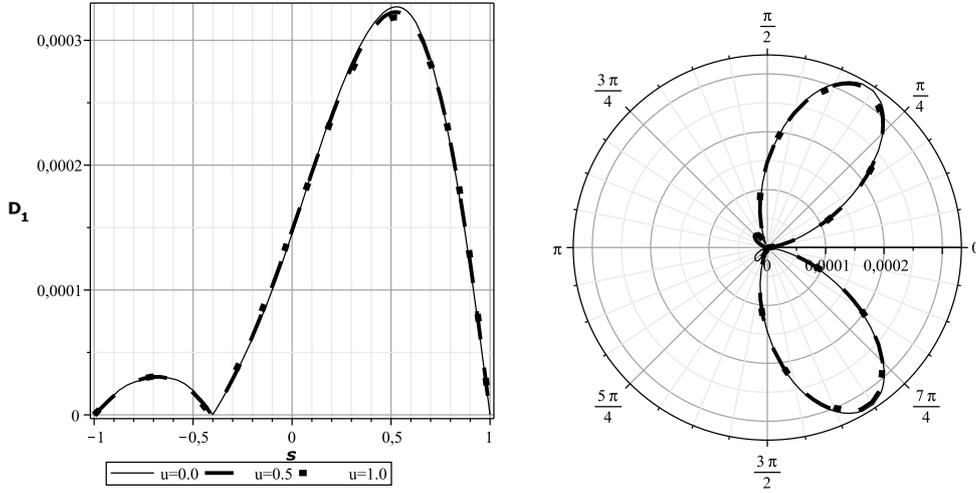


Figura 3.4: Padrões angulares para o grupo (iv), $\alpha = 0.7$, $\gamma = 0.7$.

Com isso, o parâmetro afim inicial r_0 , associado a tais observadores é determinado,

$$r_0 = -\frac{D_2(u_0, s_{max})}{D_1(u_0, s_{max})}. \quad (3.44)$$

A Figura 3.5 exibe os padrões temporais $r\Psi_4$, associados aos grupos de parâmetros iniciais (i) e (iii) e que representam emissões localizadas tanto no tempo quanto no espaço. A figura da esquerda (grupo (i)) exibe um pulso referente à emissão de ondas gravitacionais com uma duração aproximada de $du \simeq 10$ e amplitude máxima em $u_{max} \simeq 3$. O valor de r_0 para tal figura é dado por $r_0 \simeq 13.78$. A segunda figura apresenta a emissão de radiação gravitacional referente ao grupo (iii) de parâmetros iniciais. Para este grupo, o pulso de radiação se mostra ainda mais próximo do tempo inicial ($u_{max} \simeq 0.05$), curto ($du \simeq 1$) e amplo, quando comparado com o caso do grupo (i) que também apresenta uma emissão curta e localizada. Para a figura da direita, tem-se que $r_0 \simeq 5.49$.

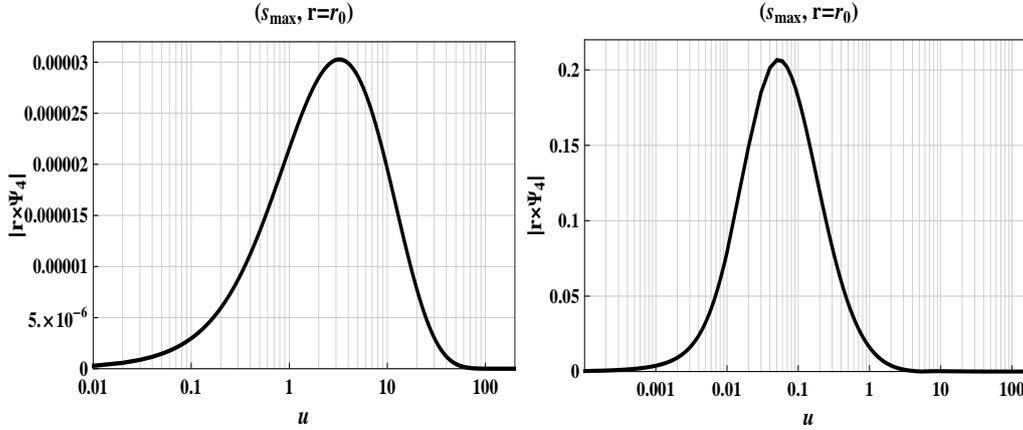


Figura 3.5: Padrões temporais para o grupo (i), $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.1$ (primeira figura) e para o grupo (iii), $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.7$ (segunda figura).

Por fim, a Figura 3.6 exibe os padrões temporais associados aos grupos de parâmetros iniciais (ii) e (iv) que representam uma emissão de ondas gravitacionais mais espalhada ao longo do espaço (s), de maior duração, mais tardia e de baixa amplitude, quando com comparadas com os casos dos grupos (i) e (iii) (apesar dos casos (i) e (iv) possuírem amplitudes máximas próximas). A diferença entre os casos (ii) e (iv) (figura da esquerda e da direita respectivamente) está na duração da emissão assim como no valor da amplitude máxima. Para o caso (ii), tem-se $du \simeq 300$ e $r_0 \simeq 83.22$, enquanto que, para o caso (iv), tem-se $du \simeq 400$ e $r_0 \simeq 61.85$.

A conclusão mais clara que se tira desta seção é a de que existem dois regimes de emissão de acordo com os parâmetros iniciais α e γ : para valores de α pequenos, o sistema de dois buracos negros em fusão emite pulsos de ondas gravitacionais curtas, com dois lóbulos dominantes na direção do movimento, cujo cone envoltório é mais ou menos fechado dependendo de γ ser maior ou menor. Já, para grandes valores de α , a emissão de ondas gravitacionais é quiescente com um longo tempo de emissão e amplitudes variando lentamente. Os diferentes valores de

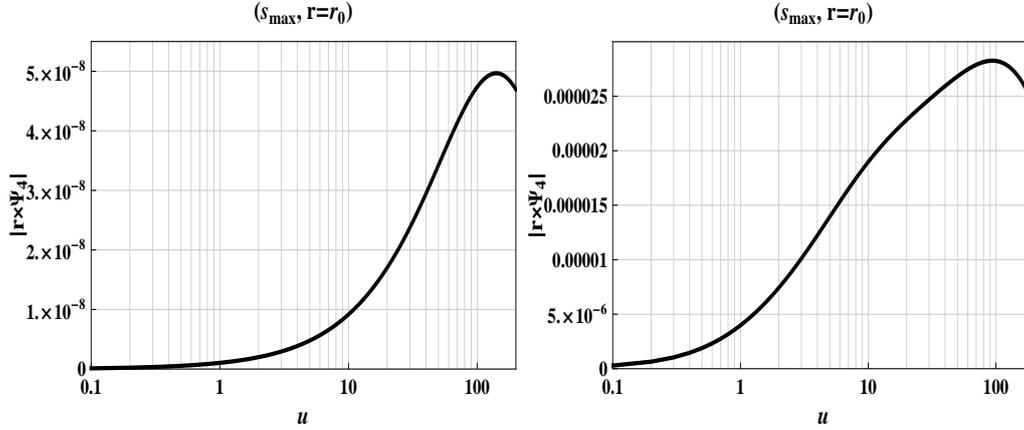


Figura 3.6: Padrões temporais para o grupo (ii), $\alpha = 0.7$, $\gamma = 0.1$ (primeira figura) e para o grupo (iv), $\alpha = 0.7$, $\gamma = 0.7$ (segunda figura).

γ influenciam também no valor da amplitude máxima e no tempo de duração do pulso. Esta diferença de regimes de emissão será novamente analisada adiante com o estudo da distribuição de momento linear da configuração final do buraco negro remanescente, bem como dos padrões temporais da potência das ondas gravitacionais emitidas (este ponto será visto nas próximas seções).

3.4 Análise dos Processos de Transferência de Energia

3.4.1 A Eficiência da Transferência de Energia Através da Emissão de Radiação Gravitacional

Para α no intervalo $(0, 1]$ os valores de α_f e γ_f caracterizam a configuração final de um buraco negro boosted para vários valores de γ . A partir destes parâmetros finais e da massa de Bondi inicial (para $u = u_0$), pode-se determinar a **eficiência** Δ da extração de massa-energia por intermédio da emissão de radiação gravitacional no processo de fusão de buracos

negros. De acordo com Eardley [119], a eficiência Δ é definida como

$$\Delta \equiv \frac{[m_{\text{fonte}}(u_0) - m(u_f)]}{m_{\text{fonte}}(u_0)}, \quad (3.45)$$

onde $m_{\text{fonte}}(u_0)$ é a massa de Bondi associada ao termo de fonte de (2.93), isto é, sem a presença dos termos radiativos ($c_u = 0, \mathcal{R} = 0$) e calculada com $K(u_0, \theta)$ dado por (3.17). Cabe mencionar aqui que, na expressão (2.93), os termos radiativos e o termo de fonte são claramente separados. Adiante, mostrar-se-á que a eficiência construída com a expressão exata da massa de Bondi inicial (com a inclusão dos termos radiativos) difere da eficiência definida por (3.45) em torno de 0.1%, para todos os valores de α . $m(u_f)$ é a massa de Bondi total avaliada a partir da expressão de $K_{\text{approx}}(u_f, \theta)$, dada pela equação (3.35). Ambas estão de acordo com a definição (2.104) para o caso $A = t$ ($P^t(u) \equiv m(u)$). Ressalta-se que, dentro da acurácia numérica, pode-se expressar $m(u_f)$ segundo $m(u_f) = m_0 \alpha_f^6 \cosh \gamma_f$. Este basicamente é o resultado expressão da massa de Bondi com a inserção da expressão (3.36).

A Figura 3.1 exhibe o gráfico log-linear entre a razão $y = m_f/m_0$ versus a eficiência Δ no intervalo $\alpha = (0, 0.55)$, correspondendo aos valores da massa de repouso do buraco negro remanescente até valores de $m_f \sim 12m_0$, para $\gamma = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ e 0.7 . Neste intervalo, os pontos numéricos são ajustados pela distribuição

$$\Delta = \Delta_c (1 - C y^{-\delta})^{1/(1-q)}. \quad (3.46)$$

onde C, δ e q são constantes a serem ajustadas. Com relação ao parâmetro de ajuste q , o melhor ajuste corresponde à $q \simeq 1/2$, para $\gamma = 0.3, 0.4$ e 0.5 , enquanto que, para valores mais altos, $\gamma = 0.6$ and 0.7 , os valores de q são também relativamente mais altos, $q \simeq 0.5233$ e $q \simeq 0.5701$ respectivamente. O melhor ajuste também fornece $C \simeq 1$ e $\delta \simeq 0.51 - 0.52$. Δ_c atua como a eficiência limite ($y \rightarrow \infty$) da distribuição (3.46). Os valores completos dos parâmetros para o melhor ajuste são dados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Parâmetros para o melhor ajuste dos pontos (Δ, y) pela distribuição (3.46), exibida na Figura 3.7. O valor y_* é o máximo aproximado de y para o considerado ajuste.

	C	δ	q	y_*	Δ_c	rms error
$\gamma = 0.3$	1.0	0.51	0.5011	13.051	0.0009674	3.6×10^{-5}
$\gamma = 0.4$	1.0	0.51	0.5045	12.468	0.0030059	5.34×10^{-5}
$\gamma = 0.5$	1.0	0.51	0.5054	11.779	0.007163	1.25×10^{-4}
$\gamma = 0.6$	0.9997	0.52	0.5233	7.5036	0.0149063	6.68×10^{-5}
$\gamma = 0.7$	0.9930	0.52	0.5701	6.9983	0.032025	9.7×10^{-4}

Alguns comentários com relação ao ajuste devem ser colocados neste momento. Primeiro, a escolha de (3.46) é inspirada na **mecânica estatística não-extensiva** de Tsallis [120] com **índice entrópico** q ($q \rightarrow 1$ no limite de Gibbs-Boltzman) e foi guiada pelas seguintes considerações; um buraco negro, mesmo em movimento, pode ser pensado como um sistema termodinâmico em equilíbrio enquanto que a condição inicial (3.17) (para os valores de $\alpha < 0.55$ onde a distribuição funciona) pode ser pensada como uma configuração fora do equilíbrio onde uma interação de longo alcance (como o caso gravitacional) é dominante. Por isso, a dinâmica que é responsável por levar o sistema inicial em direção a uma situação de equilíbrio, é esperada apresentar um comportamento não-extensivo [121]. A eficiência do processo de transferência radiativa – que regula o quanto de massa-energia deve ser expelida da configuração inicial para que a configuração em equilíbrio de um buraco negro seja atingida – também é esperada satisfazer uma lei não-extensiva como uma função da variável termodinâmica básica do buraco negro remanescente, sua massa de repouso m_f .

Segundo, no limite de baixa eficiência, $\Delta/\Delta_c \ll 1$, a distribuição (3.46), com $C = 1$ fixo, reduz a lei à forma $y - 1 \sim \Delta^{1-q}$. Isto coincide com o resultado obtido analiticamente a partir da análise do balanço de energia no regime linear da emissão de radiação gravitacional (onde a fórmula de quadrupolo é utilizada) e que fornece o valor $q \simeq 1/2$ [123]. Deste modo,

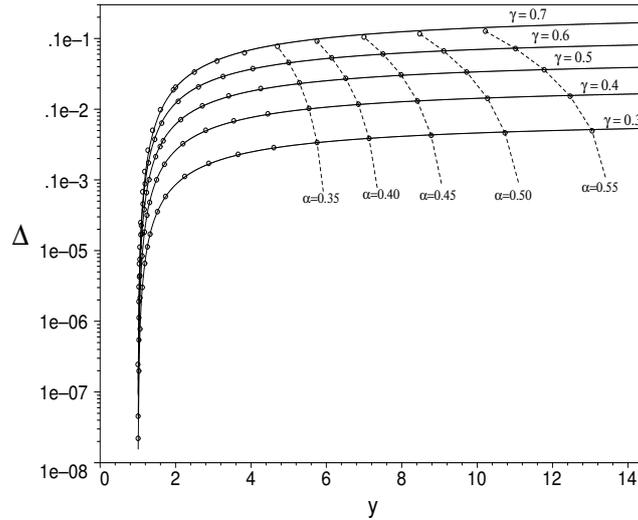


Figura 3.7: Gráfico log-linear da razão $y = m_f/m_0$ versus a eficiência Δ para o intervalo $\alpha = (0, 0.55)$ correspondendo aos valores de $y \lesssim 12$ para vários valores de γ . Neste intervalo, os pontos numéricos são ajustados por uma distribuição não-extensiva (3.46). As linhas contínuas são os melhores ajustes com índice entrópico $q \simeq 1/2$. Para valores além de $y \sim 12$ uma discrepância aparece entre os pontos experimentais e o ajuste pela distribuição não-extensiva; a eficiência apresenta um máximo absoluto em $\alpha = 1$, como mostrado na Figura 3.8. As linhas tracejadas conectam os pontos com mesmo valor de α para ilustrar a relação entre y e (α, γ) , de acordo com (3.40).

(3.46) estende o resultado proveniente do regime linear para o regime não-linear do processo e sugere que (3.46) pode não ser somente uma característica particular da dinâmica de Robinson-Trautman e sim uma característica de sistemas emissores de radiação gravitacional. Como já mencionado, de fato $C = 1$ e $q \simeq 1/2$ para $\gamma = 0.3, 0.4$ e 0.5 (Tabela 3.1).

Terceiro, um comentário sobre a discrepância dos pontos numéricos e dos melhores ajustes para os casos de $\gamma = 0.6, 0.7$ deve ser ressaltado. As curvas para $\gamma = 0.6, 0.7$ mostradas na Figura 3.1 são os melhores ajustes para os valores numéricos (pontos) até valores de $\alpha = 0.45$, correspondendo à $y \simeq 7.5$, para $\gamma = 0.6$ e $y \simeq 7.0$, com $\gamma = 0.7$. Contudo, os valores numéricos até $y \sim 11$ também são incluídos (para $\gamma = 0.6, 0.7$) e, por isso, esta discrepância é vista de forma mais clara.

Observa-se ainda que a dependência da eficiência com relação ao parâmetro inicial γ é completamente distinta daquela obtida para buracos negros perturbados e examinados em [123]. Na última referência, a distribuição de pontos (y, Δ) no regime não-linear, tende a convergir em uma única curva qualquer que seja o valor de γ (exceto na região de curva acentuada, também denominada de "joelhos"). Contrariamente, no presente caso envolvendo uma fusão de buracos negros, as curvas de eficiência, para diversos valores distintos de γ , espalham-se assim que entram no regime não linear, $\alpha \geq 0.05$.

Como mencionado anteriormente, para valores além de $\alpha \simeq 0.55$ ($y \sim 12$) observa-se que os pontos (y, Δ) , gerados pelos experimentos numéricos, começam a desviar da distribuição não-extensiva, posicionando-se sob as curvas do ajuste. Isto sugere que a lei de não-extensividade não é uma boa predição para altos valores de α . De fato, os pontos numéricos exibem um máximo absoluto em $\alpha = 1$, como discutido a seguir.

Considera-se o domínio $\alpha = [0, 1]$ assim como define-se $\tilde{\alpha} \equiv 1/\alpha \in [1, \infty)$. Os dados finais correspondendo ao domínio $\tilde{\alpha} = [1, \infty)$ podem ser analiticamente relacionados com os dados finais no domínio $\alpha = [0, 1]$, um aspecto que é característico da configuração inicial (3.17). Escolhendo um valor $\tilde{\alpha} \in [1, \infty)$, pode-se expressar a configuração inicial correspondente ao novo parâmetro como

$$K(u_0, \theta) = \tilde{\alpha}^2 \left(\frac{1}{\mathcal{S}_{(-)}(\gamma, \theta)} + \frac{(1/\tilde{\alpha})}{\mathcal{S}_{(+)}(\gamma, \theta)} \right)^2. \quad (3.47)$$

Com isso, os dados iniciais (3.47) estão associados com a configuração inicial (3.47) por $\alpha = (1/\tilde{\alpha}) \in (0, 1)$ e com parâmetro de boost $-\gamma$. A evolução numérica destes dados iniciais, através da dinâmica de Robinson-Trautman, levam aos seguintes parâmetros finais

$$\begin{aligned} \alpha_f(\tilde{\alpha}) &= \tilde{\alpha} \alpha_f(\alpha), \\ \gamma_f(\tilde{\alpha}) &= -\gamma_f(\alpha), \\ \Delta(\tilde{\alpha}) &= \Delta(\alpha). \end{aligned} \quad (3.48)$$

A terceira relação em (3.48) não é difícil de ser checada. De fato, as massas de Bondi inicial e final, para $\tilde{\alpha}$ e $\alpha = 1/\tilde{\alpha}$, são diferenciadas por um fator comum $\tilde{\alpha}^6$. Por isso a eficiência Δ não é alterada sob a transformação $\tilde{\alpha} \rightleftharpoons \alpha$. As relações (3.48) foram checadas numericamente para diversos valores de $\tilde{\alpha} > 1$ e obtiveram uma concordância em pelo menos 10 dígitos significativos. Este ponto se coloca como um profundo teste da acurácia dos códigos numéricos utilizados.

Os experimentos numéricos mostram que as eficiências Δ crescem conforme α cresce em direção ao valor 1 (para todos os valores de γ). A decorrência disso é que as eficiências possuem um valor máximo absoluto em $\alpha = 1$ (isto é, para buracos negros de mesma massa) independentemente do valor de γ (equação (3.48) acima), como ilustrado pela Figura 3.8.

Da equação (3.48) vê-se que $\gamma_f = 0$ for $\alpha = 1$, em outras palavras, o caso de máxima eficiência corresponde ao caso em que o buraco negro remanescente possui momento linear nulo. A máxima eficiência pode ser calculada analiticamente por

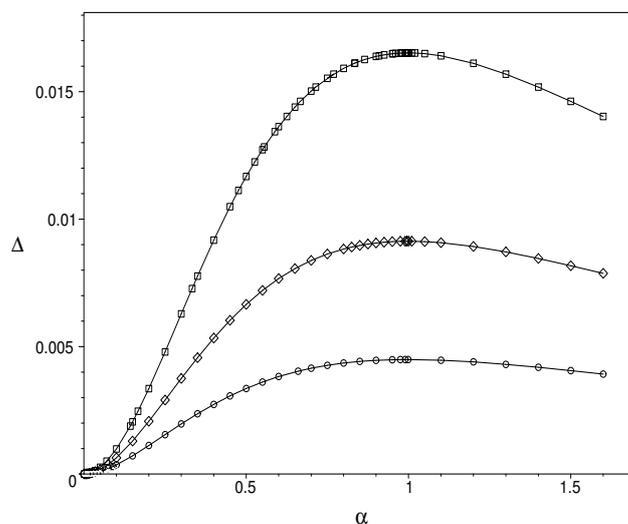


Figura 3.8: Gráfico da eficiência Δ como uma função do parâmetro α , para $\gamma = 0.5$ (círculos), $\gamma = 0.6$ (losangos) and $\gamma = 0.7$ (quadrados), com os máximos de Δ em $\alpha = 1$ (caso de buracos negros com mesmo parâmetro de massa). Os máximos são dados por $\Delta_{max}(0.5) \simeq 0.004491$, $\Delta_{max}(0.6) \simeq 0.0091316$ e $\Delta_{max}(0.7) \simeq 0.0165194$. Os pontos numéricos são conectados para uma melhor visualização.

$$\Delta_{max} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\left(\int_{-1}^1 K^2(u_0, s) ds \right)^{3/2}}{\left(\int_{-1}^1 K^3(u_0, s) ds \right)}. \quad (3.49)$$

Com a equação acima, obtém-se $\Delta_{max}(\gamma = 0.3) \simeq 0.0005983$, $\Delta_{max}(\gamma = 0.5) \simeq 0.004491$, $\Delta_{max}(\gamma = 0.6) \simeq 0.0091316$, $\Delta_{max}(\gamma = 0.7) \simeq 0.0165194$. Isto mostra que o processo de uma colisão frontal de dois buracos negros de Schwarzschild, após a formação do horizonte aparente global, possui uma eficiência relativamente mais baixa do que o caso de processos envolvendo colisões de buracos negros com spins diferentes de zero, como discutido na literatura [46, 47]. Os valores numéricos acima são compatíveis com as estimativas discutidas anteriormente na referência [71].

3.4.2 Aspectos Acerca da Conservação de Energia

Como discutido no capítulo 2, para uma classe de sistemas gravitacionais isolados assintoticamente planos, emitindo ondas gravitacionais e com uma dinâmica que se enquadra na formulação característica de dados iniciais, a conservação de energia é governada pela fórmula de massa de Bondi (2.103), para $A = t$

$$\frac{dP^t(u)}{du} = \frac{dm(u)}{du} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (c_u)^2 K \sin\theta d\theta, \quad (3.50)$$

onde a função notícia c_u , reescrita com a variável $s = \cos\theta$, é dada por

$$c_u = \frac{1}{2} \frac{(1-s^2)}{K} \left(\frac{2K_s^2}{K^2} - \frac{K_{ss}}{K} \right). \quad (3.51)$$

A extração de massa-energia total do sistema, através da emissão de ondas gravitacionais durante o intervalo de tempo $u_0 \leq u \leq u'$, é então expressa por

$$m(u') - m(u_0) = -E_W(u'), \quad (3.52)$$

onde E_W é definido por

$$E_W(u') \equiv \frac{1}{8} \int_{u_0}^{u'} du \int_{-1}^1 \frac{(1-s^2)^2}{K} \left(\frac{K_{ss}}{K} - \frac{2K_s^2}{K^2} \right)^2 ds, \quad (3.53)$$

A expressão (3.52) é exata e leva em consideração as correções radiativas da equação (2.93). Tomando $u' = u_f$ como o tempo final de computação, onde a emissão de radiação gravitacional é extinta (dentro da acurácia numérica com $c_u = 0$), $m(u') \rightarrow m(u_f) = m_0 \alpha_f^6 \cosh \gamma_f$. A quantidade restante $m(u_0)$, contendo a contribuição dos termos radiativos, difere da forma reduzida de fonte, $m_{fonte}(u_0)$, calculada de acordo com a equação (2.93), no caso $c_u = 0$ e $\mathcal{R} = 0$. Na Figura 3.9 exibe-se o gráfico log-linear das correções radiativas iniciais $\Gamma = m(u_0) - m_{fonte}(u_0)$ versus α , para $\gamma = 0.5$. Estas correções iniciais crescem a partir de valores da ordem de 10^{-7} para valores da ordem de 10^{-5} considerando valores de $\alpha = 0.01$ até $\alpha \sim 0.5$ e que, logo após destes valores de α , começam a decrescer lentamente.

A influência destas correções para o cálculo da eficiência do processo $\tilde{\Delta} \equiv [m(u_0) - m(u_f)]/m(u_0)$ é pequena. Como ilustração, consideram-se, para $\gamma = 0.5$, dois casos: (i) $\alpha = 0.01$: as eficiências são dadas por $\Delta \simeq 0.44350718 \times 10^{-5}$ e $\tilde{\Delta} = 0.4448098 \times 10^{-5}$, o último incluindo as correções radiativas com $\tilde{\Delta} - \Delta \sim 10^{-8}$; (ii) $\alpha = 0.55$: as eficiências são dadas por $\Delta \simeq 0.3607573 \times 10^{-2}$ e $\tilde{\Delta} = 0.3607823 \times 10^{-2}$, com $\tilde{\Delta} - \Delta \sim 10^{-5}$. Nas computações acima, foi adotado $m_0 = 10$; os resultados são, contudo, independentes desta escolha, pois sempre se pode tomar $m_0 = 1$ na equação de Robinson-Trautman (2.73) por uma transformação do tipo $u \rightarrow \tilde{u} = u/m_0$. Também é direto o cálculo a respeito do qual a eficiência $\tilde{\Delta}$ permanece invariante sob uma reescala dos dados iniciais $K(u_0, s)$ por uma constante (aqui utiliza-se a equação de Robinson-Trautman para mostrar como a reescala de u se dá com a reescala de K)

– implicando no fato de que a eficiência corrigida também satisfaz as relações $\tilde{\Delta}(1/\alpha) = \tilde{\Delta}(\alpha)$ para $\alpha \in (0, 1]$. Daí, segue-se que $\tilde{\Delta}$ possui um máximo em $\alpha = 1$, de forma similar à eficiência calculada somente com o termo de fonte Δ .

A energia total E_W carregada pelas ondas gravitacionais durante o processo é dada pela equação (3.53), onde $u' = u_f$ representa o tempo final de computação. A expressão para E_W pode ser reescrita em termos da amplitude das ondas gravitacionais emitidas na zona de onda, $\lim_{r \rightarrow \infty} (r\Psi_4)$, como

$$E_W = \frac{1}{8} \int_{u_0}^{u_f} du \int_{-1}^1 \frac{1}{K} \left[\int^u K^2 (r\Psi_4) d\bar{u} \right]^2 ds, \quad (3.54)$$

com o auxílio da definição da função $D_1(u, \theta)$ (equação (2.79)) e que é o análogo da estimativa padrão da energia total emitida na forma de ondas gravitacionais utilizada na literatura [71, 21]. Os termos extras K no integrando surgem devido ao uso da variável temporal de Robinson-Trautman u ao invés da variável de Bondi-Sachs U . Ao contrário do caso eletromagnético, onde a energia irradiada é proporcional ao fluxo do vetor de Poynting, nota-se que a energia irradiada pelas ondas gravitacionais é proporcional ao fluxo da **integral temporal** do vetor de Poynting equivalente na zona de onda.

Na Figura 3.10 exibe-se o gráfico log-linear de E_W versus α para dados iniciais correspondendo à $\gamma = 0.5$. A energia total irradiada E_W cresce monotonicamente com α , sendo, contudo, não-exponencial. Na Figura 3.11, exibe-se o gráfico de E_W versus $y = m_f/m_0$ para os primeiros dezenove pontos numéricos da Figura 3.10. O último ponto corresponde à $\alpha = 0.6$ com $y \simeq 14.19$. A curva contínua representa o melhor ajuste dos pontos numéricos com uma distribuição não-extensiva do tipo (3.46), $E_W = E_{Wmax}(1 - C y^{-\delta})^{1/(1-q)}$, com os parâmetros de melhor ajuste dados por $E_{Wmax} \simeq 0.3311868 \times 10^8$, $C \simeq 0.999$, $\delta \simeq 0.001$ e índice entrópico $q \simeq 2/3$. Além de $y \simeq 14.19$ (ou $\alpha = 0.6$), os pontos numéricos passam a desviar da distribuição não-extensiva e que crescem mais rapidamente do que a melhor curva ajustada. No limite de baixa energia E_W (the linear

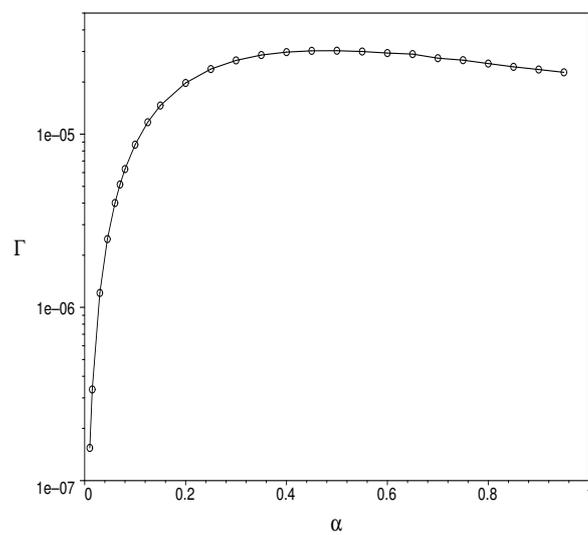


Figura 3.9: Gráfico log-linear das correções radiativas $\Gamma = m(u_0) - m_{fonte}(u_0)$ versus α para $\gamma = 0.5$, de acordo com a equação de conservação de massa-energia de Bondi (3.52). Estas correções levam a um pequeno aumento no valor da eficiência devido à extração de massa-energia na forma de ondas gravitacionais.

regime), obtém-se que $(E_W)^{1/3} \sim (y - 1)$ implicando em que $E_W \sim \Delta^{3/2}$.

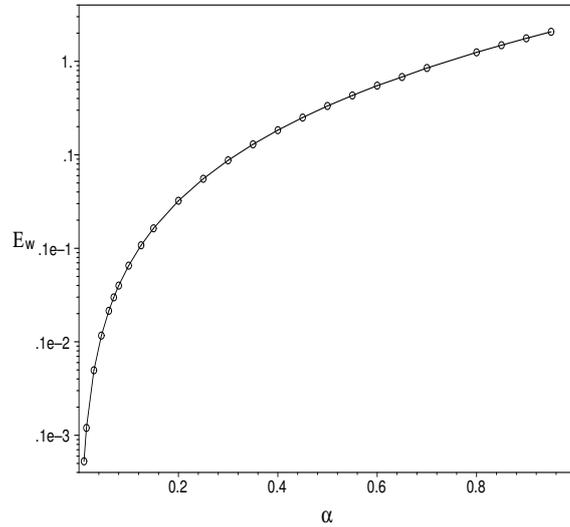


Figura 3.10: Gráfico log-linear da energia total E_W irradiada pelas ondas gravitacionais versus α , para $\gamma = 0.5$. E_W cresce monotonicamente com α , mas não exponencialmente. Os pontos numéricos são conectados para uma melhor visualização.

3.5 Análise dos Processos de Transferência de Momento Linear

3.5.1 A Distribuição de Momento do Buraco Negro Remanescente e o Regime de Radiação Bremsstrahlung

A partir de agora se mostra importante discutir a extração de momento linear e sua conexão com os padrões dinâmicos (temporal e angular) associados à emissão de ondas gravitacionais. Inicia-se por considerar o caso $\alpha = 0$, que corresponde a um buraco negro boosted isolado como dado pela solução de Bondi (2.95), com parâmetro de boost $v = \tanh\gamma$.

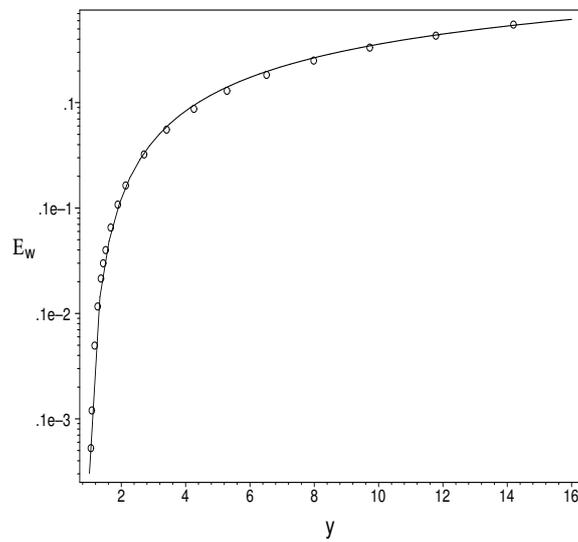


Figura 3.11: Gráfico log-linear plot de E_W versus $y = m_f/m_0$, para os primeiros 19 pontos numéricos da Figura 3.10. Os últimos pontos correspondem à $\alpha = 0.6$ com $y \simeq 14.19$. A curva contínua representa o melhor ajuste dos pontos à lei não-extensiva $E_W = E_{Wmax}(1 - C y^{-\delta})^{1/(1-q)}$, para um valor de índice entrópico $q \simeq 2/3$.

O momento linear deste buraco negro é conservado ao longo do eixo z positivo e dado por

$$\begin{aligned} P^z &= -\frac{m_0}{2} \int_0^\pi K(\theta)^3 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{m_0 K_0^3 v}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Agora, considerando pequenos valores de α nos dados iniciais (3.17), a interpretação do sistema passa a ser dada como a de um buraco negro boosted acrescido de uma perturbação (esta perturbação sendo um segundo buraco negro boosted ao longo do eixo z negativo e com uma massa de repouso muito pequena). Como já mencionado, o buraco negro perturbado evolui para uma configuração final que corresponde à solução de um único buraco negro boosted ao longo do eixo z positivo e com parâmetro de velocidade final inferior à v , ou seja, $v_f = \tanh \gamma_f < v$. Esta desaceleração é devido ao fluxo líquido de momento linear carregado pelas ondas gravitacionais emitidas, estas últimas possuindo um padrão característico de radiação do tipo Bremsstrahlung, como discutido na seção 3.3. Além disso, parte da energia (massa) do sistema perturbado é irradiada enquanto uma parte significativa é absorvida pelo buraco negro de maior massa, gerando um aumento em sua massa de repouso final, comprovado numericamente pela equação (3.37). De forma análoga à da equação (3.55), o **momento linear do buraco negro remanescente** é dado por

$$P^z(u_f) = m_0 \alpha_f^6 \sinh \gamma_f \equiv \frac{m_f v_f}{\sqrt{1-v_f^2}}. \quad (3.56)$$

Na Figura 3.12 é exibido o gráfico do momento linear do buraco negro remanescente $P^z(u_f)$ versus α para alguns valores de γ . Observa-se que, assim que α cresce (a partir de zero), o momento linear final também cresce, ao contrário da diminuição da velocidade final do buraco negro

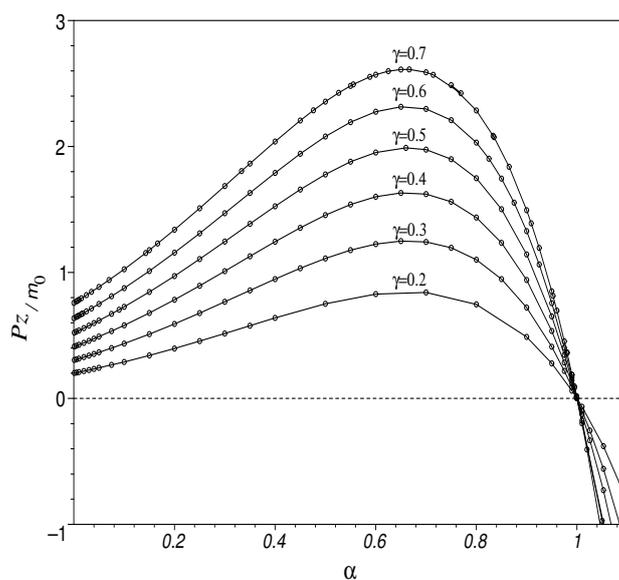


Figura 3.12: Distribuição do momento linear final do buraco negro remanescente, $P^z(u_f) = m_0 \alpha_f^6 \sinh \gamma_f$, versus o parâmetro de razão de massas α , para os valores de $\gamma = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$. Para todos os valores de γ , o momento final apresenta um máximo absoluto em $\alpha = \alpha_m \simeq 0.667$. Para o caso $\alpha = 1$, $P^z(u_f) = 0$ como esperado pela simetria dos dados iniciais. Como discutido no texto, o sistema possui duas regiões dinamicamente distintas, Região I: $0 < \alpha < \alpha_m$ e Região II: $\alpha_m < \alpha < 1$. Para o caso $\alpha > 1$, o momento final muda de sinal.

remanescente. Em outras palavras, apesar da emissão de ondas gravitacionais extrair energia e momento linear do sistema (com uma consequente desaceleração global do buraco negro remanescente), o momento final aumenta. Este efeito pode ser entendido pelo seguinte; o processo de absorção de massa-energia pelo buraco negro com maior massa de repouso durante a fusão contrabalança a desaceleração global do buraco negro inicialmente perturbado e sua consequente perda de energia cinética. Isto corresponde diretamente ao fato de que α_f^6 cresce mais rapidamente do que $\sinh\gamma_f$ decresce em (3.56), assim que α cresce.

Este padrão é mantido até $\alpha = \alpha_m \sim 0.667$, no qual o momento linear do buraco negro remanescente atinge um máximo independente do valor de γ . Para valores acima de α_m , o momento final decresce até atingir o valor zero na situação de simetria máxima dos dados iniciais, $\alpha = 1$; para $\alpha > 1$, o momento final muda de sinal pela mudança na superioridade massiva dos buracos negros, o que acarreta em um buraco negro remanescente ao longo do eixo z positivo⁷. Esta distribuição de momento pode ser comparada à distribuição da referência [123], onde foram estudadas perturbações de buracos negros, mas que não são geradas por buracos negros de baixa massa de repouso. Nesta referência, a distribuição difere qualitativamente pela ausência de um máximo absoluto. Vale a pena mencionar que o máximo de $P^z(u_f)$ ocorre para distintos valores de y , apesar deste ocorrer para o mesmo valor de α_m de acordo com a equação (3.40)

O comportamento descrito acima de $P^z(u_f)$ permite caracterizar duas regiões dinamicamente distintas e que possuem diferentes regimes de emissão de ondas gravitacionais e distribuição de momento linear, Região I: $0 < \alpha < \alpha_m$ and Região II: $\alpha_m < \alpha < 1$. No primeiro regime (Região I), basicamente a emissão de radiação gravitacional se dá por pulsos de radiação do tipo Bremsstrahlung, cuja duração cresce conforme α também cresce. Para ilustrar este fato, considera-se $\alpha = 0.1$ para o caso $\gamma = 0.5$.

Na Figura 3.13 são exibidos os gráficos polares das amplitudes $|D_1(u, \theta)|$

⁷A questão do momento linear associado com a solução de buraco negro boosted ao longo do eixo z negativo (positivo) ter sinal positivo (negativo) está relacionada com a escolha dos parâmetros do subgrupo de translação do grupo BMS ter sido diferente da escolhida tomada por Sachs [92].

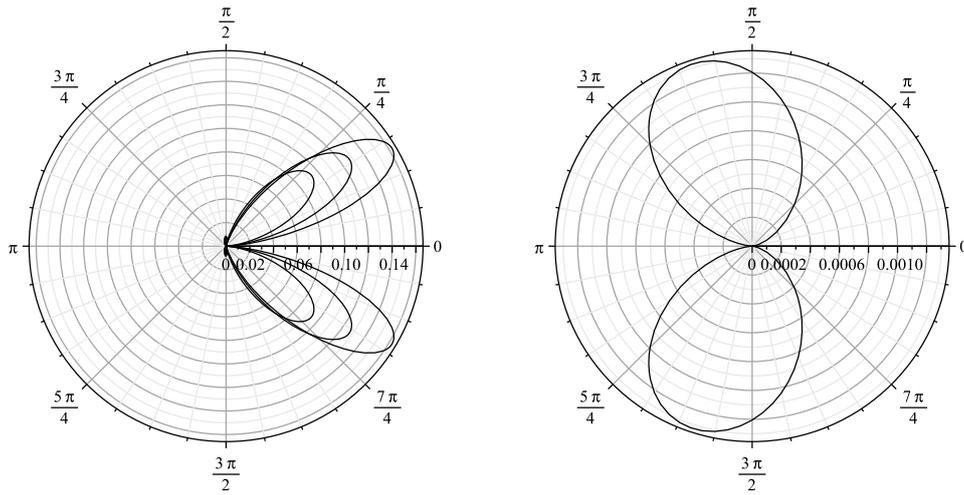


Figura 3.13: Gráfico em coordenadas polares das amplitudes na zona de onda $|D_1(u, \theta)|$ para tempos iniciais e correspondendo a um intervalo $du = 10$, para o caso $\alpha = 0.1$ e $\gamma = 0.5$. A linha horizontal corresponde ao plano equatorial $\theta = \pi/2$ e a linha de simetria dos lóbulos dominantes indica a direção de movimento do buraco negro remanescente, o eixo z positivo. O padrão angular (primeira figura) é típico de radiação Bremsstrahlung, com a máxima amplitude decrescendo por duas ordens de grandeza no intervalo $du = 10$ (segunda figura). O cone das máximas amplitudes se abre conforme a evolução do sistema conforme é rapidamente desacelerado em direção a configuração final (primeira figura). O processo corresponde a um pulso curto de radiação de Bremsstrahlung gravitacional.

para tempos iniciais, $u = 0.001, 0.02, 0.05$ (primeiro gráfico) e $u = 10.001$ (segundo gráfico), correspondendo ao intervalo $du = 10$. O padrão inicial (primeiro gráfico) exibe uma emissão dominante no hemisfério norte, com uma amplitude máxima em $s \simeq 0.856$ para $u = 0.001$. Este padrão é típico de radiação Bremsstrahlung, com dois lóbulos dominantes na direção de movimento do buraco negro remanescente (o eixo z positivo). O cone de emissão associado à amplitude máxima se abre devido a um decréscimo na desaceleração e, além disso, quanto mais o cone se abre, mais a amplitude máxima decresce. A desaceleração corresponde a uma perda de momento linear que é expelida na forma de ondas gravitacionais, da mesma forma que ocorre com a energia. A máxima amplitude decresce duas ordens de magnitude no intervalo $du = 10$ (segunda figura). O estado final do buraco negro remanescente, para este caso, possui parâmetro final de velocidade dado por $v_f \simeq 0.398$ ($\gamma_f \simeq 0.422$). No caso perturbativo (α suficientemente pequeno), a figura representa um buraco negro de massa superior sendo desacelerado, com a assimetria no padrão angular inicial indicando uma desaceleração ao longo do eixo z negativo e um fluxo líquido de momento na direção da assimetria.

Tal processo corresponde à pulsos de radiação de Bremsstrahlung gravitacional. De fato, pode-se avaliar que, para $\alpha = 0.1$ e $\gamma = 0.5$ (Figura 3.13), mais do que 85% da energia total expelida em forma de ondas gravitacionais ocorre no intervalo inicial $du = 10$. Além de $u \simeq 10$, a emissão se torna quiescente com um padrão $|D_1(u, \theta)|$ de baixa intensidade, tipicamente daquela da Figura 3.13 (segundo gráfico), tendendo a uma configuração aproximadamente simétrica (com respeito à mudança $\theta \rightarrow \pi - \theta$) para tempos tardios.

O segundo regime (Região II) corresponde à uma emissão quiescente e de longa duração de ondas gravitacionais. Os padrões angulares associados são análogos aos da Figura 3.13, porém com suas amplitudes variando lentamente com relação a u . Vale a pena comparar as amplitudes máximas quiescentes da Região I (após $du = 10$) e da Região II (para um valor inicial $u \simeq 0.001$), para $\gamma = 0.5$. O comportamento básico indica que os padrões para tempos longos correspondem a amplitudes D_1 que uma ou duas ordens de grandeza a menos do que os iniciais. De fato,

para $\alpha = 0.1$ (Região I) e $u \simeq 10.001$, a amplitude máxima é $|D_1| \simeq 0.0013$, enquanto que, para valores de α de 0.7 até 1.0 (Região II) e $u \simeq 0.001$, as amplitudes máximas variam de $|D_1| \simeq 0.00012$ até $|D_1| \simeq 1.12 \times 10^{-5}$, respectivamente.

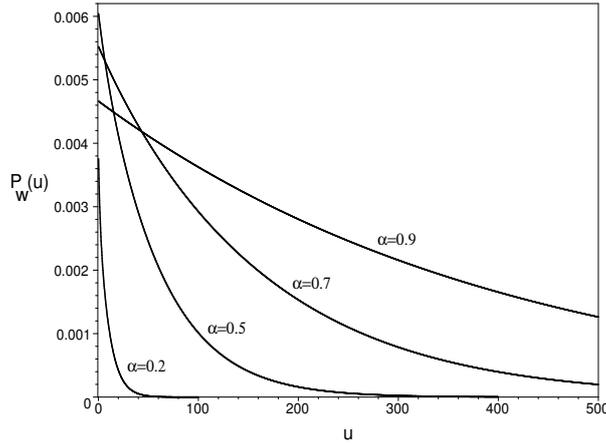


Figura 3.14: Gráfico da potência $P_W(u)$ associada à emissão de ondas gravitacionais, calculada para diferentes valores do parâmetro inicial α . As curvas permitem caracterizar os distintos regimes radiativos. Para $\alpha < 0.667$, a emissão é dada tipicamente por pulsos de radiação Bremsstrahlung, enquanto que para $\alpha > 0.667$ observa-se um regime quiésciente com um longo tempo de emissão.

Uma distinção entre os dois regimes pode ser caracterizada pelo comportamento da **potência** de emissão das ondas gravitacionais $P_W(u) \equiv (dE_W/du)(u)$,

$$P_W(u) = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \frac{(1-s^2)^2}{K} \left(\frac{K_{ss}}{K} - \frac{2K_s^2}{K^2} \right)^2 ds. \quad (3.57)$$

Na Figura 3.14 exibem-se as curvas de $P_W(u)$ para α no intervalo $(0, 1)$. Para pequenos valores de α , a potência emitida apresenta um rápido decaimento no tempo como, por exemplo, em um intervalo de tempo $du \sim 10$ para $\alpha \sim 0.1$, caracterizando de fato um curto pulso de radiação

Bremsstrahlung, como discutido anteriormente (Figura 3.13). Assim que α cresce, a potência inicial também cresce, juntamente com a duração du da emissão dominante (correspondendo à área dominante sob a curva). Este crescimento da potência inicial atinge um máximo em $\alpha \simeq 0.48$. Além deste valor, a potência inicial passa a decrescer, porém com um crescimento associado da área sob a curva. Para valores de α na Região II, tem-se um crescimento substancial da área sob a curva, correspondendo ao regime quiescente com um longo tempo de emissão e uma diminuição lenta da potência emitida (por exemplo, o comportamento das curvas para $\alpha = 0.7, 0.9$).

3.5.2 Extração de Momento e Velocidades de Recuo na Emissão de Ondas Gravitacionais

O principal objeto da presente seção é a análise da lei conservação de momento linear no processo da fusão frontal de dois buracos negros de Schwarzschild ⁸. Esta análise está concentrada no fluxo de momento linear de Robinson-Trautman (2.103), com o auxílio da função notícia (3.51), para $A = x, y, z$ e em como a descrição do impulso total gerado no processo leva diretamente às definições das velocidades de recuo descritas na introdução. Contudo, no caso atual de fusões frontais, tem-se que, $dP^A(u)/du = 0$ para $A = x, y$. Com isso, a equação de conservação relevante a ser tratada se reduz à

$$\frac{dP^z(u)}{du} = P_W^z(u), \quad (3.58)$$

onde

⁸A análise a ser considerada nesta seção difere da análise feita em paralelo por Rezzolla, Macedo e Jaramillo [112], onde as velocidades de recuo foram obtidas por uma descrição da curvatura do horizonte aparente dos espaços-tempos de Robinson-Trautman.

$$P_W^z(u) = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \frac{s(1-s^2)^2}{K} \left(\frac{K_{ss}}{K} - \frac{2K_s^2}{K^2} \right)^2 ds \quad (3.59)$$

representa o **fluxo líquido de momento linear** carregado pelas ondas gravitacionais emitidas, este fluxo sendo direcionado ao longo do eixo z .

Na Figura 3.15 estão exibidas as curvas do fluxo líquido carregado pelas ondas gravitacionais $P_W^z(u)$, para diferentes valores de α . Para todos os valores de α , pode-se observar que o fluxo muda de sinal em um determinado valor de $u = u_k$, que depende de α . O valor de u_k aumenta à medida que α também aumenta. Este comportamento mostra que o regime inicial de aceleração (i) está presente, quando o sistema é acelerado pela emissão de ondas gravitacionais a partir de $u = u_0$ até $u = u_k$. O regime (i) é seguido de forma contínua por um regime de desaceleração (ii), no intervalo $u_k \leq u \leq u_f$, em que $P_W^z(u)$ e, por consequência, $dP^z(u)/du$ mudam de sinal em $u = u_k$. No regime (ii), o sistema é desacelerado devido à emissão de ondas gravitacionais até que, em u_f , atinge sua configuração final (de um buraco negro remanescente com uma velocidade de recuo constante), instante esse em que a emissão de ondas gravitacionais cessa. $P_W^z(u)$ sempre apresenta um mínimo local em $u > u_k$. A fase de aceleração (i) que dura até $u = u_k$ é referido na literatura como um "kick" (ou impulso positivo) no sistema em fusão, enquanto que na fase de desaceleração (ii) é produzido um "antikick" (ou impulso negativo) [42] no sistema. Este comportamento físico importante já foi relatado em simulações precisas de relatividade numérica de um sistema binário de buracos negros de massas distintas [68, 72]. Apesar de restrito a uma dinâmica que considera uma colisão frontal de dois buracos negros, a partir da fase de fusão, os resultados a serem apresentados nesta seção possuem características semelhantes e consistentes com relação aos resultados obtidos por simulações de relatividade numérica plena.

Integrando a equação de conservação (3.58) com relação à coordenada temporal u , obtém-se que

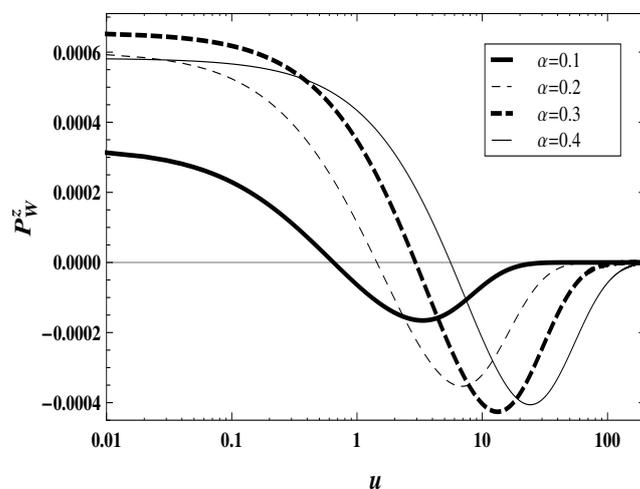


Figura 3.15: Gráfico log-linear do fluxo líquido de momento $P_W^z(u)$ para diferentes valores de α . O regime inicial corresponde a uma aceleração do sistema com conseqüente aumento de momento linear, $dP^z(u)/du > 0$. Após o tempo $u = u_k$, quando $P_W^z(u_k) = 0$, o sistema começa a ser desacelerado devido à emissão de ondas gravitacionais. Ambas as fases de aceleração e desaceleração correspondem à "kicks" (impulsos) no sistema em fusão.

Tabela 3.2: Resumo dos resultados numéricos correspondentes a um valor fixo de $\gamma = 0.5$ (ou uma velocidade inicial de imersão $v/c \simeq 0.462$). O melhor ajuste dos pontos (V_k, η) à fórmula (3.66) (vide Figura 3.17), corresponde a $A \simeq 0.1525$ e $B \simeq 6.5376$, enquanto que os melhores parâmetros de ajuste para (V_{ak}, η) são dados por $A \simeq 4.2668$ e $B \simeq 2.1083$ (vide Figura 3.18).

α	η	α_f^2	v_{in}/c	v_f/c	u_k	$I_W^z(u_k)$	$-I_W^z(u_f)$	V_k	V_{ak}
0.05	0.0453	1.09113574	0.43004142	0.43006090	0.415	1.7614×10^{-5}	3.4463×10^{-4}	0.4067	8.3655
0.10	0.0826	1.18719413	0.39844185	0.39850379	0.645	7.6368×10^{-5}	1.4702×10^{-3}	1.3692	27.7295
0.15	0.1134	1.28819392	0.36752941	0.36764298	0.975	1.8224×10^{-4}	3.4069×10^{-3}	2.5576	50.3698
0.20	0.1388	1.39414979	0.33746865	0.33763462	1.435	3.3754×10^{-4}	6.0983×10^{-3}	3.7370	71.2523
0.30	0.1775	1.62097343	0.28036065	0.28061148	2.935	7.8782×10^{-4}	1.3355×10^{-2}	5.5491	99.6199
0.35	0.1920	1.74185732	0.25345611	0.25373312	4.075	1.0701×10^{-3}	1.7677×10^{-2}	6.0745	106.4230
0.39	0.2018	1.84215650	0.23275765	0.23304695	5.245	1.3141×10^{-3}	2.1331×10^{-2}	6.3066	108.6730
0.40	0.2040	1.86773050	0.22769808	0.22798931	5.575	1.3768×10^{-3}	2.2259×10^{-2}	6.3397	108.8340
0.41	0.2062	1.89350425	0.22268459	0.22297729	5.925	1.4400×10^{-3}	2.3191×10^{-2}	6.3633	108.8453
0.44	0.2122	1.97202429	0.20799180	0.20821717	7.095	1.6307×10^{-3}	2.5986×10^{-2}	6.3794	108.0351
0.45	0.2140	1.99859732	0.20309302	0.20338723	7.525	1.6944×10^{-3}	2.6912×10^{-2}	6.3674	107.5020
0.60	0.2343	2.42118978	0.13603910	0.13628971	17.185	2.5098×10^{-3}	3.8938×10^{-2}	5.3050	87.6067
0.70	0.2422	2.72793102	0.09663941	0.09683392	28.335	2.8086×10^{-3}	4.2470×10^{-2}	4.1506	66.9139
0.80	0.2469	3.05469329	0.06108116	0.06121058	45.155	2.6185×10^{-3}	3.9314×10^{-2}	2.7559	44.1337

$$P^z(u') - P^z(u_0) = I_W^z(u'), \quad (3.60)$$

onde

$$I_W^z(u) = \frac{1}{8} \int_{u_0}^{u'} du \int_{-1}^1 \frac{s(1-s^2)^2}{K} \left(\frac{K_{ss}}{K} - \frac{2K_s^2}{K^2} \right)^2 ds \quad (3.61)$$

representa o **impulso** total transferido para o sistema em fusão devido ao momento linear carregado pelas ondas gravitacionais emitidas durante o intervalo $u_0 \leq u \leq u'$.

A Figura 3.16 exibe o gráfico de $I_W^z(u)$ para $\alpha = 0.1$ (primeira figura) e $\alpha = 0.7$ (segunda figura). Como esperado, as curvas apresentam um máximo local em $u = u_k$, quando a fase de desaceleração é iniciada, ou seja, quando a área medida abaixo da curva de $P_W^z(u)$ começa a receber uma contribuição negativa devido ao regime de desaceleração. Para instantes $u \sim u_f$, as curvas tendem a um valor constante (um platô), correspondente à configuração final quando a emissão de ondas gravitacionais cessa. O platô é considerado atingido quando $|I_W^z(u) - I_W^z(u+h)| \lesssim 10^{-10}$, onde h é o comprimento do passo de integração de Runge-Kutta utilizado para a avaliação de $I_W^z(u)$. Nesta fase, o buraco negro possui momento linear $P^z(u \sim u_f)$, cuja distribuição é dada pela figura 3.12. Da equação (3.60) pode-se deduzir que

$$P^z(u_k) - P^z(u_0) = I_W^z(u_k) \quad (3.62)$$

e

$$P^z(u_f) - P^z(u_k) = - [I_W^z(u_k) - I_W^z(u_f)], \quad (3.63)$$

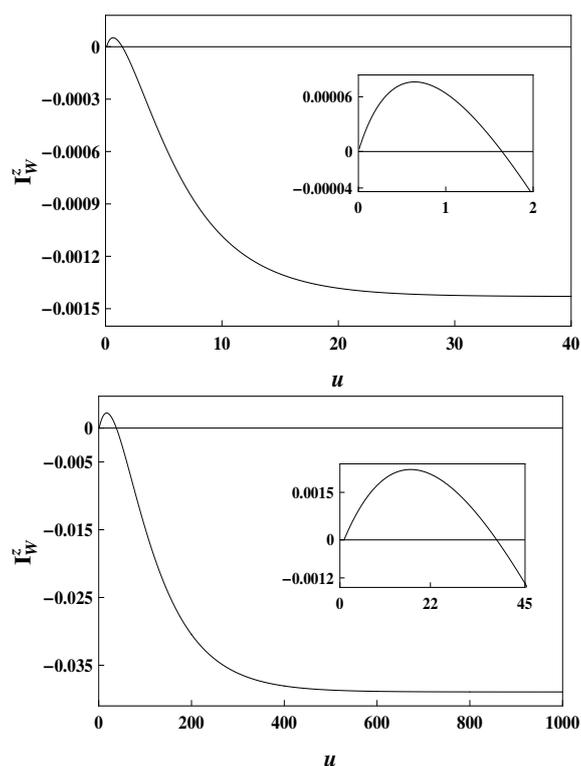


Figura 3.16: Gráfico do impulso gerado pela emissão de ondas gravitacionais, $I_W^z(u)$, para $\alpha = 0.1$ (primeira figura) e $\alpha = 0.7$ (segunda figura), com velocidade inicial de fusão fixada por $v \simeq 0.462$. As curvas apresentam um máximo local em $u = u_k$, quando o regime de desaceleração é iniciado. Para instantes $u \sim u_f$, as curvas tendem a um valor constante, correspondente à configuração final, quando a emissão de ondas gravitacionais cessa. Os destaques nas figuras amplificam as regiões de máximos locais.

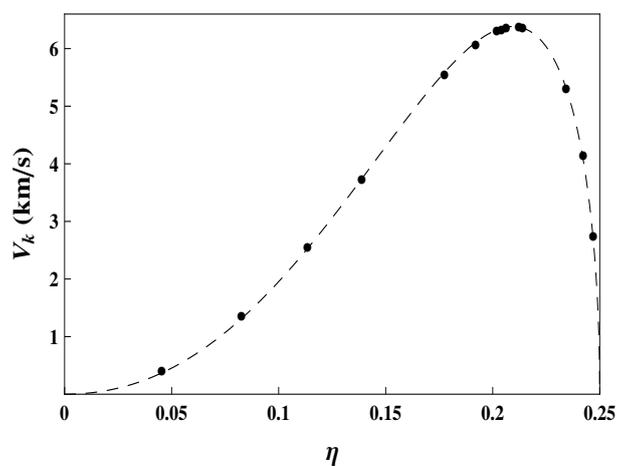


Figura 3.17: Gráfico dos pontos (V_k, η) , onde V_k é a velocidade de kick (3.64) da fase inicial acelerada, correspondentes aos resultados numéricos da Tabela 3.2. A linha tracejada representa a curva melhor ajustada pelo método dos mínimos quadrados para pontos numéricos com relação à fórmula analítica (3.66), com os melhores parâmetros de ajuste $A \simeq 0.1525$ e $B \simeq 6.5376$. A velocidade de kick máxima obtida na fase acelerada é de $V_k \simeq 6.4$ km/s para $\eta \simeq 0.209$.

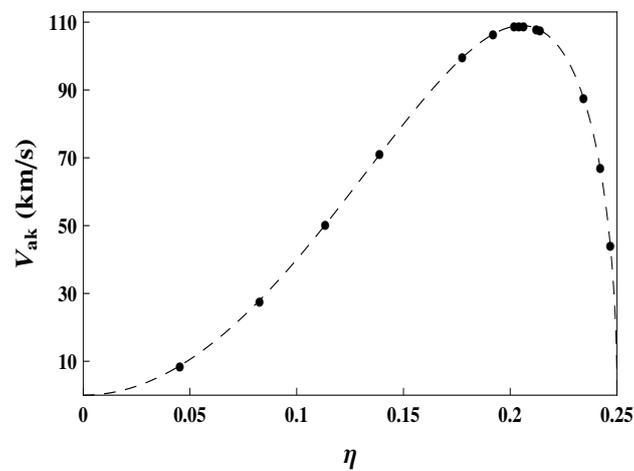


Figura 3.18: Gráfico dos pontos (V_{ak}, η) , onde V_{ak} é a velocidade de antikick (3.65) da fase desacelerada, correspondentes aos resultados numéricos da Tabela 3.2. A linha tracejada representa a curva melhor ajustada pelo método dos mínimos quadrados dos pontos numéricos com relação à fórmula analítica (3.66), com parâmetros de ajuste $A \simeq 4.2668$ e $B \simeq 2.1083$. A velocidade de antikick máxima obtida na fase de desaceleração é de $V_{ak} \simeq 109$ km/s para $\eta \simeq 0.205$.

onde o lado direito de (3.63) e (3.62) representam o impulso total gerado pelas ondas gravitacionais emitidas durante a fase de desaceleração e de aceleração, respectivamente. Com isso, define-se a **velocidade de kick** V_k como proporcional ao impulso líquido positivo transmitido para o sistema em fusão através da emissão de radiação gravitacional durante a fase de aceleração

$$V_k = \frac{c}{m_0 \alpha_f^6} I_W^z(u_k) \quad (3.64)$$

e a **velocidade de antikick** V_{ak} como proporcional ao impulso líquido negativo exercido sobre o sistema pela emissão de ondas gravitacionais durante a fase de desaceleração

$$V_{ak} = \frac{c}{m_0 \alpha_f^6} [I_W^z(u_k) - I_W^z(u_f)], \quad (3.65)$$

onde as constantes universais foram restauradas e com $m_0 \alpha_f^6$ sendo a massa de repouso do buraco negro remanescente [72]. Deve-se observar que as definições aqui apresentadas de velocidades de kick e antikick baseiam-se na função de impulso $I_W^z(u)$ que, por sua vez, é derivada de $K(u, \theta)$, para $u \in [u_0, u_f]$ e obtidas a partir de uma evolução numérica estável e precisa dos dados iniciais $K(u_0, \theta)$ até o instante final u_f . Essas definições estão de acordo com as utilizadas nas referências [68, 72]. Em todos os experimentos numéricos foi adotado $m_0 = 10$. Verifica-se que $I_W^z(u_0) = 0$. A partir dos resultados numéricos, avalia-se V_k e V_{ak} para diferentes valores de α . Os resultados estão resumidos na Tabela 3.2 e são utilizados na construção das Figuras 3.17 e 3.18, onde estão exibidos os gráficos de V_k e V_{ak} , respectivamente, versus o **parâmetro de massa simétrica** definido por $\eta = \alpha / (1 + \alpha)^2$. Com isso, comparam-se as estimativas do atual modelo com outras estimativas de velocidades de kicks em fusões de sistemas binários buracos negros. As linhas tracejadas exibidas nas Figuras 3.17 e 3.18 correspondem ao ajuste dos pontos (V_k, η) e (V_{ak}, η)

com a fórmula de Fitchett [126], derivada da análise pós-newtoniana de colisões de buracos negros e utilizada por diversos autores [42, 72] para descrever a distribuição das velocidades de kick e antikick,

$$V = A\eta^2(1 - 4\eta)^{1/2}(1 + B\eta) \times 10^3 \text{ km/s.} \quad (3.66)$$

Os valores dos parâmetros associados à (3.66) ($A \simeq 0.1526$, $B \simeq 6.5376$) para (V_k, η) na Figura 3.17 e ($A \simeq 4.2668$, $B \simeq 2.1083$) para (V_{ak}, η) na Figura 3.18, foram fixados pelo ajuste de mínimos quadrados dos pontos presentes nas curvas. O valor máximo das curvas são dadas por $V_k \simeq 6.4 \text{ km/s}$ em $\eta \simeq 0.209$ (para a velocidade de kick) e $V_{ak} \simeq 109 \text{ km/s}$ em $\eta \simeq 0.205$ (para a velocidade de antikick), conforme a Tabela 3.2.

Na Figura 3.19 (primeira figura) estão marcados os pontos $((V_{ak} - V_k), \eta)$, onde $(V_{ak} - V_k)$ representa a **velocidade de antikick líquida**, englobando as fases de aceleração e desaceleração do sistema em fusão com a linha tracejada correspondendo ao melhor ajuste dos pontos numéricos à curva (3.66) através do método dos mínimos quadrados e com parâmetros de ajuste $A \simeq 4.1143$ e $B \simeq 1.9442$. A velocidade máxima de antikick líquida obtida é de $\simeq 103 \text{ km/s}$ em $\eta \simeq 0.205$. O erro RMS nos ajustes dos dados numéricos das velocidades de antikick e antikick líquida é de $\simeq 0.18$ (com um erro RMS normalizado da ordem de 0.2%), enquanto o erro RMS no ajuste da velocidade de kick é de $\simeq 0.03$ (com um erro RMS normalizado da ordem de 0.6%). Isso mostra uma semelhança consistente com o comportamento dos resultados obtidos nas referências [72, 42] e, em particular, a boa concordância da localização em η dos máximos das distribuições de velocidades (Figura 3.19, segunda figura). A questão relacionada com o menor valor da velocidade de antikick líquida máxima obtida nas simulações descritas acima, quando comparado com os resultados de simulações de relatividade numérica plena, é discutida a seguir.

Resumindo, os resultados numéricos aqui obtidos, a partir dos dados iniciais que representam uma fusão de dois buracos negros, reproduzem qualitativamente (para um amplo conjunto de valores do parâmetro inicial α) estimativas analíticas pós-newtonianas, bem como estimativas ger-

adas por simulações de relatividade numérica plena para as velocidades de recuo globais produzidas na colisão de buracos negros binários, incluindo a fase de espiral. Essa consistência é notável e promissora, podendo indicar que a lei (3.66) é genérica tanto para kicks provenientes dos processos de extração de momento em colisões espirais quanto em colisões frontais.

Alguns comentários são importantes neste momento. Primeiro, a fase de aceleração (i), obtida no modelo aqui apresentado não está presente em nenhuma outra simulação de colisões de buracos negros, seja por avaliações pós-newtonianas, seja por simulações em relatividade numérica plena. Segundo, o fator de correção $(1 + B\eta)$ à principal contribuição newtoniana em (3.66) tem um peso diferente em V_k e V_{ak} . No caso de V_{ak} , a contribuição do termo de correção ao máximo da curva na figura 3.18 é da ordem de 30%, enquanto que, a contribuição ao máximo da curva na figura 3.17 (no caso de V_k) é da ordem de 60%. Neste sentido, pode-se dizer que o regime de aceleração (i), onde V_k é gerado, é "menos newtoniano" do que o regime de desaceleração (ii), onde V_{ak} é gerado. Em terceiro, também foram avaliadas as velocidades kick e antikick com relação a dados iniciais com parâmetros $\gamma = 0.7$ e $\alpha = 0.41$, este último correspondendo aproximadamente à localização em α dos máximos em ambas as velocidades para o caso $\gamma = 0.5$. Obtém-se valores substancialmente maiores, $V_k \simeq 32$ km/s e $V_{ak} \simeq 559$ km/s (a serem comparados com a Tabela 3.2). A escolha de $\gamma = 0.5$ para os experimentos numéricos não foi fixada por qualquer consideração física; uma escolha apropriada de γ nos dados iniciais poderia ser feita de modo que os resultados numéricos pudessem estar quantitativamente de acordo com os valores máximos das referências [72, 42]. E, finalmente, dada a semelhança na relação entre as distribuições das velocidades de recuo dadas por (3.66) tanto para a fase de espiral quanto para colisões frontais, a diferença nos resultados poderia também incluir um segmento exclusivamente espiral que segue a mesma distribuição (3.66). Ligado a este último comentário, deve-se notar o fato de que a lei de distribuição (3.66) satisfaz a propriedade

$$V = A\eta^2(1 - 4\eta)^{1/2}(1 + B\eta) \equiv \left[A_1\eta^2(1 - 4\eta)^{1/2}(1 + B_1\eta) \right] \\ \pm \left[A_2\eta^2(1 - 4\eta)^{1/2}(1 + B_2\eta) \right],$$

onde

$$A = A_1 \pm A_2, \quad B = \frac{A_1 B_1 \pm A_2 B_2}{A_1 \pm A_2}.$$

3.5.3 A Busca pelo Movimento do Centro-de-Massa do Sistema em Fusão

Ao longo do desenvolvimento numérico descrito nas subseções anteriores, foram introduzidos diversas variáveis de velocidade, como as velocidades de kick e antikick, a velocidade antikick líquido, a velocidade inicial de imersão do sistema em fusão $v = \tanh \gamma$ e a velocidade final do buraco negro remanescente v_f . Além dessas variáveis ainda será apresentada aqui uma tentativa de definição de uma velocidade inicial v_{in} para o sistema em fusão quando a interação entre os buracos negros e o conteúdo ondas gravitacionais são levados em consideração. O interesse principal da presente subseção está no exame da relação entre todas essas variáveis e tentar obter uma definição adequada de uma velocidade aproximada do centro de massa do sistema. O principal problema de encontrar uma definição adequada está conectado com o fato de que o sistema perde massa devido à emissão de ondas gravitacionais, o que levará à busca de uma definição baseada no impulso da radiação emitida, assim como das leis de conservação de momento associadas.

Na Tabela 3.2 temos dado a velocidade final $v_f/c = \tanh \gamma_f$ do buraco negro remanescente. Utilizando as equações (3.64) e (3.65), juntamente

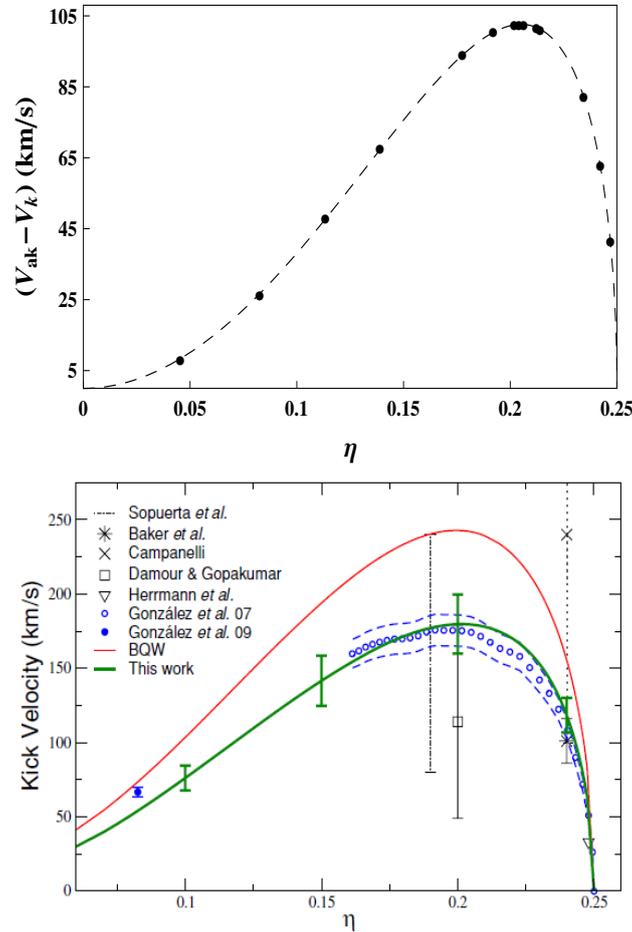


Figura 3.19: *Primeira figura:* Gráfico dos pontos $((V_{ak} - V_k), \eta)$, onde $(V_{ak} - V_k)$ é a velocidade antikick líquida dada ao sistema em fusão pela radiação gravitacional emitida. A curva tracejada representa o melhor ajuste (através do método de mínimos quadrados) dos pontos numéricos à fórmula analítica (3.66), com os melhores parâmetros de ajuste $A \simeq 4.1143$ and $B \simeq 1.9442$. A velocidade máxima de antikick líquida obtida é de $\simeq 103$ km/s em $\eta \simeq 0.205$. *Segunda figura:* Comparação das velocidades de kick globais obtidas na literatura, cada uma com diferentes valores de kick máximo [42].

com a equação de conservação de Bondi-Sachs (3.60), a relação de v_f com a a velocidade de kick líquida pode ser dada através de

$$\frac{m_0 \alpha_f^6}{c} (V_k - V_{ak}) = P^z(u_f) - P^z(u_0), \quad (3.67)$$

onde $P^z(u_0)$ é o momento inicial do sistema e que depende de α e γ e $P^z(u_f)$ representa o momento final que depende, por sua vez, de γ_f and α_f . A velocidade final associada ao momento linear final $P^z(u_f)$ é dada claramente por v_f .

Uma tentativa de definição da **velocidade inicial** do sistema em fusão pode ser calculada a partir de $P^z(u_0)$ por $v_{in} = P^z(u_0)/m(u_0)$, onde $m(u_0)$ é a massa Bondi inicial do sistema. $P^z(u_0)$ pode ser facilmente avaliada (com correções radiativas incluídas) através da lei de conservação (3.60), tomando $u' = u_f$. Seus valores, para diversos α 's, estão listados na Tabela 3.2. Nota-se que a velocidade inicial v_{in} é distinta da velocidade inicial de colapso $v = \tanh \gamma$ no seguinte sentido: a rigor, a interpretação de v deveria ser de fato a velocidade inicial de cada buraco individual no infinito, antes de serem trazidos para a interação, quando essa quantidade já não possui um significado definido separadamente. Ao contrário, v_{in} representa a velocidade inicial em u_0 , quando a interação dos dois buracos negros e do conteúdo inicial da onda gravitacional já estão configuradas nos dados iniciais. Como ilustração, para $\gamma = 0.5$, a velocidade inicial de imersão é dada por $v \simeq 0.4265$ enquanto que, para $\gamma = 0.5$ e $\alpha = 0.35$, por exemplo, obtém-se $v_{in} \simeq 0.2534$ (correspondente a um parâmetro efetivo $\gamma_{in} \simeq 0.2591$), com v_{in} sendo da ordem de grandeza de v_f .

Um exame detalhado dos resultados numéricos exibidos na Tabela 3.2 mostra que tanto v_f como v_{in} possuem uma diminuição monotônica com η (ou equivalentemente com α). Algumas características da extração de momento do sistema inicial em fusão em forma de ondas gravitacionais – ligada à assimetria da radiação emitida (ou seja, com α) e que estão presentes em $P^z(u_f)$, V_k , V_{ak} – são apagadas na distribuição de v_f . Este não é o caso da diferença $\delta V = (v_f - v_{in})$, que se ajusta muito bem com a fórmula pós-newtoniana (3.66) (de forma análoga ao comportamento

das velocidades de kick, antikick e de antikick líquida) como mostrado na Figura 3.20, com os melhores parâmetros de ajuste $A \simeq 4.8817$ e $B \simeq 5.5551$. É de se esperar que esta nova variável de velocidade δV

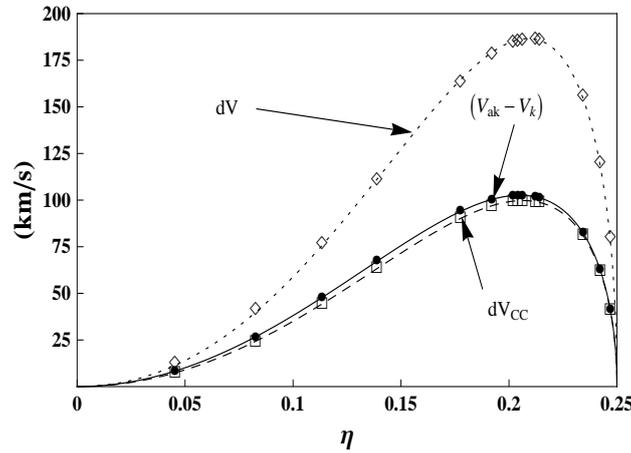


Figura 3.20: Gráficos dos pontos $|v_{in} - v_f|$ (losangos) e $(v_{in} - v_f/\zeta_0)$ (quadrados) versus o parâmetro de massa simétrica η . A curva pontilhada e a curva tracejada representam o ajuste através do método dos mínimos quadrados dos pontos de $|v_{in} - v_f|$ e $(\zeta_0 v_{in} - v_f)$ com a fórmula (3.66), respectivamente, com parâmetros de ajuste dados por $(A \simeq 4.8817, B \simeq 5.5551)$ e $(A \simeq 3.4840, B \simeq 2.9745)$. O valor máximo de $(\zeta_0 v_{in} - v_f)$ obtida é de $\simeq 100$ km/s em $\eta \simeq 0.206$. Os pontos (círculos pretos), ajustados curva sólida correspondem às velocidades de antikick líquidas da Figura 3.19, evidenciando uma estreita aproximação destes pontos com relação à também velocidade líquida $(v_{in} - v_f/\zeta_0)$.

seja relacionada com a velocidade de antikick líquida $(V_{ak} - V_k)$, avaliada através do impulso linear total extraído pela radiação gravitacional emitida durante fase pós-fusão. Porém, existem dois problemas com essa associação; não apenas δV é muito maior do que a velocidade de antikick líquida (com seu valor máximo cerca de duas vezes o valor máximo da velocidade de antikick líquida) mas também possui o sinal invertido, ou seja, $v_{in} < v_f$ para todos os α (vide Tabela 3.2), que não é fisicamente satisfatório, já que a fase de desaceleração é dominante nesta fase pós-

fusão. A razão para estas diferenças está no fato de que a variável δV , ou seja, a diferença $v_{in} - v_f$, não satisfaz nenhuma lei de conservação ou balanço de momento linear, enquanto que a velocidade de antikick líquida, que foi avaliada a partir da lei de conservação (3.60) a satisfaz. Escolhas alternativas para este problema podem ser obtidas através da lei de conservação (3.60), avaliada em $u = u_f$ e expressa como

$$v_{in} - v_f / \zeta_0 = -\frac{I_W^z(u_f)}{m(u_0)}, \quad (3.68)$$

onde $\zeta_0 \equiv m(u_0)/(m_0\alpha_f^6 \cosh \gamma_f)$ e $m(u_0)$ representa a massa de Bondi inicial do sistema.

Uma vez que, no regime não-linear, a energia do sistema é extraída pela emissão de radiação gravitacional, tem-se que a razão de massa $\zeta_0 > 1$, o que – tendo em vista (3.68) – torna a variável δV inadequada para uma descrição da dinâmica (com a uma exceção para o cenário não-físico no qual apenas momento linear, e não massa, é extraído da emissão de radiação gravitacional). Assim, considera-se velocidades adequadas líquidas construídas com v_{in} e v_f através de

$$\begin{aligned} \delta V_C &\equiv (v_{in} - v_f / \zeta_0) = -\frac{I_W^z(u_f)}{M_B(u_0)}, \\ \delta V_{CC} &\equiv (\zeta_0 v_{in} - v_f) = -\frac{I_W^z(u_f)}{m_0\alpha_f^6 \cosh \gamma_f}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde o parâmetro razão de massa ζ_0 corrige a definição de δV para a perda de massa no processo.

Os gráficos de δV_{CC} e, para comparação, da velocidade de antikick líquida ($V_{ak} - V_k$) são exibidos na Figura 3.20. Os pontos numéricos associados à definição alternativa δV_C não estão incluídos desde que a diferença relativa de seus valores numéricos para os de δV_{CC} não excedem 0.4% para $0 < \eta < 0.25$, tornando as duas definições indistinguíveis no gráfico. A curva tracejada representa o ajuste através do método dos mínimos quadrados dos pontos ($\delta V_{CC}, \eta$) (quadrados) com a fórmula (3.66),

com os melhores parâmetros de ajuste $A \simeq 3.4840$ e $B \simeq 2.9745$. O valor máximo de δV_{CC} é ~ 100 km/s em $\eta \simeq 0.206$. Esta distribuição mostra uma estreita concordância com a distribuição da velocidade de antikick líquida (círculos pretos e curva sólida). Da equação (3.67), pode-se obter uma relação analítica entre a velocidade de antikick líquida e δV_{CC} e/ou δV_C , dada por

$$(V_{ak} - V_k) = \cosh \gamma_f \delta V_{CC} = \zeta_0 \cosh \gamma_f \delta V_C. \quad (3.70)$$

Vale a pena mencionar que a concordância de δV_{CC} e/ou δV_C com a distribuição da velocidade de antikick líquida, como mostrado na Figura 3.20, deve-se ao fato de ζ_0 ser apenas ligeiramente maior do que 1 para $0 < \alpha < 1$. Por exemplo, para $\alpha = 0.1$, tem-se que $\zeta_0 \simeq 1.000357715$ e para $\alpha = 0.5$, $\zeta_0 \simeq 1.00273990$. Isto é suficiente para que δV_{CC} e/ou δV_C sejam positivos e alguns quilômetros por segundo menores do que a velocidade de antikick líquida. Observa-se também que $\cosh \gamma_f \sim 1$ para o domínio relevante de η ($\gamma = 0.5$ fixo).

A partir dos resultados acima é possível sugerir uma definição para a velocidade de centro de massa do sistema binário de buracos negros resultante da fusão. O ponto de partida está concentrado no fato de que a velocidade do centro de massa do buraco negro remanescente é, obviamente, v_f , como medido por um observador inercial em repouso no infinito. Além disso, por construção, a velocidade inicial do centro de massa da configuração inicial é aproximadamente v_{in} e, por razões discutidas acima, esta será adotada como $\zeta_0 v_{in}$. Relativo à este mesmo observador, e tendo em conta (3.68), introduz-se

$$v(u) = \zeta_0 v_{in} - \delta V_{CC}(u) \equiv \zeta_0 v_{in} + \frac{I_W^z(u)}{m_0 \alpha_f^6 \cosh \gamma_f}, \quad (3.71)$$

como uma tentativa de definição da **velocidade do centro de massa** do sistema em fusão, para valores de $u \geq u_0$. Para $u = u_f$ e $u = u_0$, tem-se, por construção, que $v(u_f) = v_f$ e $v(u_0) = \zeta_0 v_{in}$. Para um observador

inercial com velocidade $\zeta_0 v_{in}$, o movimento do centro de massa estaria inicialmente na direção positiva do eixo z , com sua velocidade aumentando até u_k , quando ele começa a diminuir até alcançar o valor zero e, em seguida, inverter o seu movimento para o sentido negativo da direção z até atingir a velocidade final do buraco negro remanescente (neste referencial inercial)

$$v(u_f) \simeq -\delta V_{CC}(u_f) \sim -(V_{ak} - V_k), \quad (3.72)$$

ou seja, a velocidade de antikick líquida conforme o esperado (neste caso, o comportamento das Figuras 3.16).

Capítulo 4

Considerações Finais

"I dislike the Bible as it contains both questions and answers, problems and solutions, past and future all in the language I understand."

William Shakespeare

4.1 Recapitulação da Tese

Este trabalho de tese considerou a construção e o desenvolvimento de um modelo teórico e computacional que simula uma colisão frontal de buracos negros de Schwarzschild e a emissão de radiação gravitacional emitida no processo. Para tal, se mostrou necessário introduzir o formalismo de Newman-Penrose que descreve, a partir do comportamento assintótico nas proximidades do infinito nulo, a teoria de radiação gravitacional no regime não linear através dos escalares de Weyl e com o auxílio da classificação de Petrov. A grande utilidade do formalismo de Newman-Penrose está na não determinação, a priori, de um espaço-tempo específico, apesar da necessidade de introduzir um sistema de coordenadas adequado ao tratamento assintótico do campo gravitacional. No Capítulo 1, foram desenvolvidas as representações das equações-mestras da Relatividade Geral em termos das quantidades de Newman-Penrose.

Apesar de estar enquadrada no formalismo característico de valor inicial da Relatividade Geral, o formalismo de Newman-Penrose, quando foi publicado em 1962, não forneceu quantidades físicas conservadas que dessem uma descrição mais realística de sistemas emissores de radiação gravitacional. Porém, no mesmo ano, Bondi, Metzner, van der Burg e Sachs, em dois artigos complementares, publicaram o primeiro modelo de emissão de radiação gravitacional no formalismo característico com a lei de conservação de energia e momento linear no processo. Contudo, a hierarquia das equações de Einstein associadas à métrica de Bondi, juntamente com a ausência de uma condição inicial que represente uma interação de buracos negros, geram uma dificuldade na abordagem do problema na descrição característica de Bondi-Sachs. Uma alternativa mais viável para o estudo de colisões frontais de buracos negros no formalismo característico se dá através dos espaços-tempos de Robinson-Trautman, cuja dinâmica característica é fornecida pela equação diferencial parcial parabólica de Robinson-Trautman. No Capítulo 2, foi desenvolvido todo o aparato teórico tanto do problema de Bondi-Sachs quanto do de Robinson-Trautman, inclusive com a descrição da conservação de energia e momento linear de Bondi-Sachs nas coordenadas de Robinson-Trautman. Os dois espaços-tempos também foram analisados no contexto do formalismo de Newman-Penrose com a identificação da zona de radiação para ambos os casos. Essa mescla entre as três descrições proporciona um melhor entendimento acerca do problema característico.

Com uma dinâmica mais acessível como a de Robinson-Trautman, uma solução que descreve um sistema de dois buracos negros em colisão frontal foi derivada. Isso deu margem à uma série de desenvolvimentos teóricos e computacionais. No Capítulo 3, primeiramente, constroem-se os dados iniciais para a equação de Robinson-Trautman equivalentes a uma colisão frontal de buracos negros de Schwarzschild. Estes dados iniciais, possuem dois parâmetros γ e α , o primeiro associado à velocidade de imersão dos buracos negros e o segundo relacionado à razão de massas ADM de cada um dos buracos negros. Apesar disso, os dados iniciais já possuem um horizonte aparente formado, implicando que a evolução do sistema binário ocorre a partir da fase de fusão até atingir a configura-

ração final de um único buraco negro, não incluindo a fase de espiral. A evolução dos dados iniciais é executada através de uma combinação de dois métodos espectrais, os métodos de Galerkin e de colocação, onde a solução da equação de Robinson-Trautman é dada por uma expansão em série numa base de funções de Legendre. Os métodos espectrais transformam a equação parcial de Robinson-Trautman em um sistema dinâmico autônomo cuja dimensão está relacionada com o grau de aproximação da solução numérica espectral. O sistema dinâmico de Robinson-Trautman é integrado segundo o método de Runge-Kutta de quarta ordem para diversas condições iniciais dadas por γ e α . Após a integração numérica, o conjunto de dados numéricos finais são utilizados para a construção da configuração final do sistema em fusão. Dentro da acurácia dos métodos numéricos, a configuração final é a de um único buraco negro remanescente com parâmetros $\gamma_f < \gamma$ e $\alpha_f > \alpha$.

Com o esquema numérico determinado, todas as quantidades físicas importantes para o sistema em fusão podem ser obtidas. As primeiras quantidades a serem investigadas foram as formas de onda ou padrões angulares e temporais das ondas gravitacionais emitidas. Os resultados foram divididos em quatro grupos, de acordo com a escolha dos parâmetros iniciais γ e α . Para valores de α pequenos, os padrões angulares e temporais evidenciam uma emissão bem localizada no espaço e de curta duração, uma emissão por pulsos de radiação do tipo Bremsstrahlung. Já para o caso de grandes valores de α , a emissão de ondas gravitacionais é quiescente, de longa duração, e mais simétrica em θ . Esses dois tipos de emissão independem do valor de γ .

Através da expressão da massa total do sistema sobre as hipersuperfícies características, também denominada de massa de Bondi, a eficiência da extração de energia no processo de fusão é avaliada. A distribuição dos valores numéricos da eficiência é ajustada, através do método dos mínimos quadrados por uma função de distribuição baseada na mecânica estatística não-extensiva em função da massa de repouso da configuração final. O melhor ajuste corresponde a um valor do índice entrópico $q \simeq 1/2$. Este ajuste generaliza para o regime não linear de emissão gravitacional o resultado obtido através da fórmula de quadrupolo prove-

niente da aproximação linear da Relatividade Geral, onde $q = 1/2$.

Ainda na discussão de extração de energia pela emissão de ondas gravitacionais na fusão de buracos negros de Schwarzschild, a lei de conservação de Bondi-Sachs mostra que a energia total emitida na forma de ondas gravitacionais cresce monotonicamente, porém não de forma exponencial com relação ao parâmetro α . Da mesma forma que foi feito com os valores numéricos da eficiência de extração de massa-energia do sistema em fusão, a energia total emitida também é ajustada, através do método dos mínimos quadrados por uma distribuição não-extensiva em função da massa de repouso da configuração final, porém com índice entrópico dado por $q \simeq 2/3$.

A distribuição de momento linear do buraco negro remanescente com relação ao parâmetro α permite caracterizar dois regimes de emissão da radiação gravitacional emitida e que corroboram com os padrões angulares e temporais da radiação na zona de onda e na zona de transição. A região I é caracterizada por valores de α entre 0 e o valor de máximo da distribuição, $\alpha_m \simeq 0.667$ e pela ocorrência de pulsos de radiação do tipo Bremsstrahlung. Já a região II é caracterizada por valores de α entre o valor de máximo da distribuição, $\alpha_m \simeq 0.667$ e 1, neste último caso quando os buracos negros possuem mesma massa de Bondi. A região II também é caracterizada por uma longa emissão de radiação quiescente e mais simétrica em θ . Essa diferença entre os dois regimes pode ser vista de uma outra forma a partir da potência das ondas gravitacionais emitidas durante o processo.

Numa colisão frontal de buracos negros de Schwarzschild ao longo do eixo cartesiano de Lorentz z , os momentos lineares correspondentes às direções x e y são automaticamente conservados. A análise resultante da lei de conservação de momento linear na direção z indica uma nova diferenciação de regimes de emissão de ondas gravitacionais, porém com relação à coordenada u . O regime de aceleração atua a partir da condição inicial u_0 até um valor u_k , onde o fluxo de momento linear emitido é nulo. A partir desse valor de u , o sistema entra no regime de desaceleração, onde permanece até o tempo u_f correspondendo à configuração final do buraco negro remanescente. A partir da integração em u da lei de conservação

de momento linear de Bondi-Sachs, é possível determinar o impulso total transferido para o sistema em fusão, tanto no regime de aceleração quanto no regime de desaceleração. Para cada regime, velocidades associadas aos impulsos positivos (aceleração) e negativos (desaceleração) são definidas. A velocidade de kick é definida como sendo proporcional ao momento linear total concedido ao sistema em fusão através do impulso positivo das ondas gravitacionais. De forma análoga, a velocidade de antikick é definida como sendo proporcional ao momento linear total concedido ao sistema em fusão através do impulso negativo das ondas gravitacionais. Com essas duas novas definições de velocidades, pode-se definir a velocidade de antikick líquida como a diferença entre as velocidades de kick e antikick e que representa o antikick global incluindo as duas fases, acelerada e a dominante desacelerada. As três velocidades, kick, antikick e antikick líquida são ajustadas à fórmula pós-newtoniana que representa a velocidade de kick versus o parâmetro de massa simétrica, definido em termos de α . A fórmula de kick pós-newtoniana possui um termo típico newtoniano e outro termo de correção pós-newtoniana. A velocidade de kick possui um maior valor do termo de correção quando comparada com o ajuste da velocidade de antikick e de antikick líquida. Com isso, pode-se dizer que o regime de aceleração é menos newtoniano do que o regime de desaceleração. Os valores máximos das três velocidades, de kick, antikick e antikick líquida são dadas respectivamente por 6.4km/s , 109km/s e 103km/s , para $\gamma = 0.5$. Porém, com uma aumento (ou uma diminuição) do valor de γ , os valores dos máximos das três velocidades mudam substancialmente. Para o caso $\gamma = 0.7$, tem-se que 32km/s , 559km/s e 527km/s .

Por fim, dadas as várias definições de velocidade obtidas, apresenta-se uma sugestão de definição para a velocidade do centro-de-massa do sistema em fusão. Tal velocidade é obtida, primeiramente, através da introdução de uma diferença δV_{CC} das velocidades inicial e final de Bondi que carrega um termo de correção, definido pela razão das massas de Bondi em u_0 e u_f . A diferença de velocidades δV_{CC} satisfaz a lei de conservação de Bondi-Sachs da mesma forma que satisfaz a distribuição de velocidades pós-newtoniana com valores muito próximos da distribuição da

velocidade de antikick líquida. A sugestão para a velocidade do centro-de-massa é construída com a ajuda de δV_{CC} , além do fato de que a velocidade do centro-de-massa inicial se reduz aproximadamente à velocidade inicial do sistema em fusão e que a velocidade do centro-de-massa do buraco negro remanescente é dada por v_f .

4.2 Desenvolvimentos Futuros

O atual estudo de colisões frontais de buracos negros por intermédio dos espaços-tempos de Robinson-Trautman é o início de um projeto mais amplo envolvendo generalizações dos pontos abordados nesta tese. A primeira e mais direta generalização compreende os espaços-tempos **não-axiais** de Robinson-Trautman, com a introdução da dependência em ϕ nas equações de campo. Essa mudança implica diretamente na abordagem de colisões não-frontais de buracos negros, o que aumenta a riqueza de conceitos e de resultados. Tanto as condições iniciais de colisões não-frontais de buracos negros de Schwarzschild quanto os códigos numéricos para a evolução da dinâmica não-axial de Robinson-Trautman estão prontos, em período de testes. Além do caso não-axial, também serão investigadas algumas outras possíveis generalizações para o caso apresentado nesta tese, como, por exemplo, a inclusão de espaços-tempos de Robinson-Trautman com presença matéria e de rotação.

4.3 Colaborações

Os trabalhos futuros descritos acima serão inicialmente desenvolvidos numa colaboração entre o grupo de Dinâmica Não-Linear em Gravitação e Cosmologia do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (Rio de Janeiro, Brasil), liderado pelo Prof. Dr. Ivano Damião Soares [125] e o grupo de Relatividade Numérica da Georgia Institute of Technology (Georgia Tech, Atlanta, EUA), liderado pelo Prof. Dr. Pablo Laguna [129]. O desenvolvimento de técnicas numéricas avançadas já utilizadas pelo grupo da Georgia Tech, assim como a utilização de supercomputadores de alta

performance, contribuirá para uma redução do tempo de obtenção de dados.

Em março de 2010, a Georgia Tech anunciou a formação do Instituto de Dados e Computação de Alta Performance (IDH) [128] em reconhecimento à necessidade do avanço e da coordenação da pesquisa e das atividades educacionais nesta área. A computação de alta performance (HPC) continua a crescer como uma área estrategicamente importante para a Georgia Tech, tanto na sua aplicação a áreas-chave da ciência e da engenharia, assim como no avanço de tecnologia propriamente dita.

Além do setor computacional, a colaboração se estenderá com o fornecimento de um banco de dados teóricos, através dos modelos desenvolvidos, para, num futuro próximo, serem comparados com os dados observacionais obtidos nos detectores de ondas gravitacionais e que estão em fase de construção ou em fase inicial de projeto (por exemplo VIRGO, LIGO e LISA). A interação entre os grupos, seja por meio de visitas, seminários, oficinas, workshops, etc., com cientistas e com a própria tecnologia local, é fundamental para uma verdadeira inserção aos últimos desenvolvimentos da área.

Apêndice A

Descrição do Espaço-Tempo de Bondi no Formalismo de Newman-Penrose

Uma base de vetores covariantes apropriada para a descrição do elemento de linha (2.13), com o auxílio de (1.7), pode ser expressa como

$$\begin{aligned} l_\mu &= (1, 0, 0, 0) \\ n_\mu &= \left(\frac{1}{2}Ve^{2b}/R, e^{2b}, 0, 0 \right) \\ m_\mu &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}We^qR, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^qR, -i\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-q}R \sin \Theta \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Através da métrica contravariante $g^{\mu\nu}$, associada à (2.13),

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2b} & 0 & 0 \\ e^{-2b} & -e^{-2b}V/R & e^{-2b}W & 0 \\ 0 & e^{-2b}W & -e^{-2q}/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2q}/R^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

derivam-se as componentes contravariantes da base (A.1)

$$\begin{aligned}
l^\mu &= (0, e^{-2b}, 0, 0) \\
n^\mu &= \left(1, -\frac{1}{2}V/R, W, 0\right) \\
m^\mu &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-q}/R, i\frac{\sqrt{2}}{2}e^q/R \sin \Theta\right). \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Após a construção das bases de tetradas, cada um dos objetos do formalismo de Newman-Penrose podem ser obtidos, por intermédio das fórmulas existentes na seção 1.2:

Derivadas direcionais:

$$\begin{aligned}
D &= e^{-2b} \frac{\partial}{\partial R} \\
\Delta &= \frac{\partial}{\partial U} - \frac{1}{2}V/R \frac{\partial}{\partial R} + W \frac{\partial}{\partial \Theta} \\
\delta &= \frac{\sqrt{2}}{2R} \left(e^{-q} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{i}{\sin \Theta} e^q \frac{\partial}{\partial \Phi} \right) \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

Pré-coeficientes de rotação de Ricci:

$$\lambda_{(1)(2)(2)} = -\frac{Vb_R}{R} - \frac{1}{2} \frac{V_R}{R} + \frac{1}{2} \frac{V}{R^2} + 2b_U + 2b_\Theta W; \quad (\text{A.5})$$

$$\lambda_{(1)(3)(2)} = \lambda_{(1)(4)(2)} = -\frac{1}{2} \sqrt{2} R W_R e^{q-2b}; \quad (\text{A.6})$$

$$\lambda_{(1)(2)(3)} = \lambda_{(1)(2)(4)} = \frac{b_\Theta \sqrt{2} e^{-q}}{R}; \quad (\text{A.7})$$

$$\lambda_{(1)(3)(3)} = \lambda_{(1)(4)(4)} = q R e^{-2b}; \quad (\text{A.8})$$

$$\lambda_{(1)(4)(3)} = \lambda_{(1)(3)(4)} = \frac{e^{-2b}}{R}; \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda_{(2)(2)(3)} = \lambda_{(2)(2)(4)} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}V_{\Theta}e^{2b-q}}{R^2}; \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda_{(2)(4)(3)} = \lambda_{(2)(3)(4)} = \frac{1}{2}W_{\Theta} - \frac{1}{2}\frac{V}{R^2} + \frac{1}{2}W\cot\Theta; \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{(2)(3)(3)} = \lambda_{(2)(4)(4)} &= \frac{1}{2}W_{\Theta} + Wq_{\Theta} + q_U - \frac{1}{2}\frac{Vq_R}{R} - \\ &- \frac{1}{2}W\cot\Theta; \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\lambda_{(3)(3)(4)} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}q_{\Theta}e^{-q}}{R} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\cot\Theta e^{-q}}{R}; \quad (\text{A.13})$$

$$\lambda_{(3)(4)(4)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}q_{\Theta}e^{-q}}{R} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\cot\Theta e^{-q}}{R}. \quad (\text{A.14})$$

Coefficientes de rotação de Ricci:

$$\gamma_{(1)(2)(2)} = -\frac{Vb_R}{R} - \frac{1}{2}\frac{V_R}{R} + \frac{1}{2}\frac{V}{R^2} + 2b_U + 2b_{\Theta}W; \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(1)(2)(3)} &= \gamma_{(1)(2)(4)} = \gamma_{(1)(3)(2)} = \gamma_{(1)(4)(2)} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{b_{\Theta}\sqrt{2}e^{-q}}{R} - \frac{1}{4}\sqrt{2}RW_R e^{q-2b}; \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma_{(1)(3)(3)} = \gamma_{(1)(4)(4)} = q_R e^{-2b}; \quad (\text{A.17})$$

$$\gamma_{(1)(4)(3)} = \gamma_{(1)(3)(4)} = \frac{e^{-2b}}{R}; \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{(2)(3)(1)} = \gamma_{(2)(4)(1)} = \frac{1}{2}\frac{b_{\Theta}\sqrt{2}e^{-q}}{R} + \frac{1}{4}\sqrt{2}RW_R e^{q-2b}; \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_{(2)(3)(2)} = \gamma_{(2)(4)(2)} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}V_{\Theta}e^{2b-q}}{R^2}; \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma_{(2)(3)(4)} = \gamma_{(2)(4)(3)} = \frac{1}{2} W_{\Theta} - \frac{1}{2} \frac{V}{R^2} + \frac{1}{2} W \cot \Theta; \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(2)(3)(3)} = \gamma_{(2)(4)(4)} &= \frac{1}{2} W_{\Theta} + Wq_{\Theta} + q_U - \frac{1}{2} \frac{Vq_R}{R} - \\ &- \frac{1}{2} W \cot \Theta; \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma_{(3)(4)(3)} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}q_{\Theta}e^{-q}}{R} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \cot \Theta e^{-q}}{R}; \quad (\text{A.23})$$

$$\gamma_{(3)(4)(4)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}q_{\Theta}e^{-q}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \cot \Theta e^{-q}}{R}. \quad (\text{A.24})$$

Coefficientes espinoriais:

$$\kappa = \epsilon = 0; \quad (\text{A.25})$$

$$\sigma = -q_R e^{-2b}; \quad (\text{A.26})$$

$$\lambda = \frac{1}{2} W_{\Theta} + Wq_{\Theta} + q_U - \frac{1}{2} \frac{Vq_R}{R} - \frac{1}{2} W \cot \Theta; \quad (\text{A.27})$$

$$v = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}V_{\Theta}e^{2b-q}}{R^2}; \quad (\text{A.28})$$

$$\rho = -\frac{e^{-2b}}{R}; \quad (\text{A.29})$$

$$\mu = \frac{1}{2} W_{\Theta} - \frac{1}{2} \frac{V}{R^2} + \frac{1}{2} W \cot \Theta; \quad (\text{A.30})$$

$$\tau = -\frac{1}{2} \frac{b_{\Theta} \sqrt{2} e^{-q}}{R} + \frac{1}{4} \sqrt{2} R W_R e^{q-2b}; \quad (\text{A.31})$$

$$\pi = \frac{1}{2} \frac{b_{\Theta} \sqrt{2} e^{-q}}{R} + \frac{1}{4} \sqrt{2} R W_R e^{q-2b}; \quad (\text{A.32})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{V b_R}{R} + \frac{1}{4} \frac{V_R}{R} - \frac{1}{4} \frac{V}{R^2} - b_U - b_{\Theta} W; \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{4} \frac{b_{\Theta} \sqrt{2} e^{-q}}{R} + \frac{1}{8} \sqrt{2} W_R R e^{q-2b} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} q_{\Theta} e^{-q}}{R} - \\ &- \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} \cot \Theta e^{-q}}{R}; \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{4} \frac{b_{\Theta} \sqrt{2} e^{-q}}{R} + \frac{1}{8} \sqrt{2} W_R R e^{q-2b} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} q_{\Theta} e^{-q}}{R} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} \cot \Theta e^{-q}}{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Escalares de Ricci:

$$\Phi_{00} = -2 \frac{b_R e^{-4b}}{R} + q_R^2 e^{-4b}; \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} b_{R,\Theta} e^{-2b-q}}{R} + \frac{1}{4} \sqrt{2} R b_R W_R e^{q-4b} - \frac{1}{8} \sqrt{2} R W_{R,R} e^{q-4b} - \\ &- \frac{1}{4} \sqrt{2} W_R e^{q-4b} - \frac{1}{4} \sqrt{2} R q_R W_R e^{q-4b} - \frac{1}{2} \frac{b_{\Theta} \sqrt{2} e^{-2b-q}}{R^2} - \\ &- \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} q_{R,\Theta} e^{-2b-q}}{R} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} q_R q_{\Theta} e^{-2b-q}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} q_R \cot \Theta e^{-2b-q}}{R}; \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{02} &= e^{-2b} \left(q_R + \frac{q}{R} \right)_U + \frac{1}{2} \frac{V q_{R,R} e^{-2b}}{R} + \frac{1}{2} \frac{q_R V_R e^{-2b}}{R} + \frac{1}{2} \frac{q_R V e^{-2b}}{R^2} - \\ &- \frac{1}{4} W_{R,\Theta} e^{-2b} - \frac{1}{2} q_{\Theta} W_R e^{-2b} - W q_{R,\Theta} e^{-2b} - \frac{1}{2} q_R W_{\Theta} e^{-2b} + \\ &+ \frac{1}{8} R^2 W_R^2 e^{2q-4b} - \frac{1}{2} q_R W \cot \Theta e^{-2b} + \frac{1}{4} W_R \cot \Theta e^{-2b} - \frac{1}{2} \frac{W_{\Theta} e^{-2b}}{R} - \\ &- \frac{W q_{\Theta} e^{-2b}}{R} + \frac{1}{2} \frac{b_{\Theta,\Theta} e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{b_{\Theta}^2 e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{b_{\Theta} \cot \Theta e^{-2q}}{R^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{W \cot \Theta e^{-2b}}{R}; \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} = & \frac{1}{2} b_{R,\Theta} W e^{-2b} - \frac{1}{4} \frac{V b_{R,R} e^{-2b}}{R} - \frac{1}{8} \frac{V_{R,R} e^{-2b}}{R} + \frac{1}{2} b_{R,U} e^{-2b} + \\
& + \frac{1}{4} \frac{V_{R,e^{-2b}}}{R^2} + \frac{3}{16} R^2 W_R^2 e^{2q-4b} - \frac{1}{4} \frac{b_{\Theta}^2 e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{e^{-2q}}{R^2} - \\
& - \frac{1}{4} \frac{V_R b_{R,e^{-2b}}}{R} + \frac{1}{4} \frac{V b_{R,e^{-2b}}}{R^2} + \frac{1}{4} b_{\Theta} W_{R,e^{-2b}} + \frac{1}{4} q_R W_{\Theta} e^{-2b} - \\
& - \frac{1}{4} q_R W \cot \Theta e^{-2b} - \frac{1}{4} \frac{W_{\Theta} e^{-2b}}{R} - \frac{1}{4} \frac{W \cot \Theta e^{-2b}}{R} + \\
& + \frac{1}{2} q_R W q_{\Theta} e^{-2b} + \frac{1}{2} q_R q_U e^{-2b} - \frac{1}{4} \frac{q_R^2 V e^{-2b}}{R} - \frac{1}{4} \frac{q_{\Theta,\Theta} e^{-2q}}{R^2} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{q_{\Theta}^2 e^{-2q}}{R^2} - \frac{3}{4} \frac{\cot \Theta q_{\Theta} e^{-2q}}{R^2};
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12} = & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} W q_{\Theta}^2 e^{-q}}{R} - \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2} \cot \Theta W q_{\Theta} e^{-q}}{R} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} W b_{\Theta,\Theta} e^{-q}}{R} + \\
& + \frac{1}{8} \sqrt{2} R W_{R,U} e^{q-2b} + \frac{1}{4} \sqrt{2} R q_U W_{R,e^{q-2b}} + \frac{1}{4} \sqrt{2} R W_R W_{\Theta} e^{q-2b} - \\
& - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} V_{\Theta} b_{R,e^{-q}}}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} q_R V_{\Theta} e^{-q}}{R^2} - \frac{1}{4} \sqrt{2} R b_U W_{R,e^{q-2b}} - \\
& - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} b_{\Theta} W \cot \Theta e^{-q}}{R} - \frac{1}{8} \sqrt{2} V q_R W_{R,e^{q-2b}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} q_U \cot \Theta e^{-q}}{R} - \\
& - \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2} V_{R,\Theta} e^{-q}}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} q_{\Theta,U} e^{-q}}{R} + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2} V_{\Theta} e^{-q}}{R^3} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} b_{\Theta,U} e^{-q}}{R} - \\
& - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} V q_R q_{\Theta} e^{-q}}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} V \cot \Theta q_{R,e^{-q}}}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} V W_{R,e^{q-2b}}}{R} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} q_U q_{\Theta} e^{-q}}{R} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} W q_{\Theta,\Theta} e^{-q}}{R} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} W e^{-q}}{R} + \frac{1}{4} \sqrt{2} R W q_{\Theta} W_{R,e^{q-2b}} - \\
& - \frac{1}{4} \sqrt{2} R W b_{\Theta} W_{R,e^{q-2b}} + \frac{1}{8} \sqrt{2} R W W_{R,\Theta} e^{q-2b} - \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2} V b_{R,\Theta} e^{-q}}{R^2} + \\
& + \frac{1}{8} \sqrt{2} V b_R W_{R,e^{q-2b}} + \frac{1}{8} \sqrt{2} R W_R W \cot \Theta e^{q-2b} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} V b_{\Theta} e^{-q}}{R^3} - \\
& - \frac{1}{16} \sqrt{2} V W_{R,R} e^{q-2b} + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2} V q_{R,\Theta} e^{-q}}{R^2};
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{22} = & \frac{1}{2} WW_{\Theta,\Theta} - \frac{1}{4} \frac{V_{\Theta}W_R}{R} - \frac{1}{4} \frac{VW_{R,\Theta}}{R} - \frac{1}{2} \frac{WV_{\Theta}}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{Vb_RW \cot \Theta}{R} - \\
& - \frac{1}{4} \frac{VW_R \cot \Theta}{R} - \frac{3}{4} \frac{VW \cot \Theta}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{V_RW \cot \Theta}{R} + \frac{1}{2} \frac{V_{\Theta}q_{\Theta}e^{2b-2q}}{R^3} + \\
& + W^2q_{\Theta}^2 + q_UW_{\Theta} - \frac{1}{2} \frac{V_U}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{V_{\Theta} \cot \Theta e^{2b-2q}}{R^3} + \frac{1}{2} \frac{Vq_RW \cot \Theta}{R} + \\
& + \frac{1}{2} W_{\Theta,U} - \frac{Wq_{\Theta}Vq_R}{R} + \frac{1}{2} W_{\Theta}^2 + \frac{1}{2} W_U \cot \Theta + WW_{\Theta}q_{\Theta} + \frac{1}{4} \frac{V_RW_{\Theta}}{R} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{V^2b_R}{R^3} + \frac{1}{4} \frac{V^2q_R^2}{R^2} - W^2q_{\Theta} \cot \Theta - b_UW \cot \Theta - \frac{1}{2} \frac{Vq_RW_{\Theta}}{R} - \\
& - q_UW \cot \Theta - b_{\Theta}W^2 \cot \Theta + \frac{1}{2} \frac{Vb_RW_{\Theta}}{R} + \frac{1}{2} W \cot \Theta W_{\Theta} + \\
& + \frac{b_{\Theta}WV}{R^2} - \frac{q_UVq_R}{R} + 2Wq_{\Theta}q_U - b_UW_{\Theta} - \frac{1}{2} W^2 + q_U^2 - \frac{1}{2} \frac{V_{\Theta}b_{\Theta}e^{2b-2q}}{R^3} + \\
& + \frac{b_UV}{R^2} - \frac{3}{4} \frac{VW_{\Theta}}{R^2} - b_{\Theta}WW_{\Theta} - \frac{1}{4} \frac{V_{\Theta,\Theta}e^{2b-2q}}{R^3};
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda = & \frac{1}{6} \frac{q_{\Theta}^2e^{-2q}}{R^2} + \frac{1}{12} \frac{Vb_{R,Re}^{-2b}}{R} + \frac{1}{12} \frac{VRe^{-2b}}{R^2} - \frac{1}{48} R^2W_R^2e^{2q-4b} + \\
& + \frac{1}{4} \frac{b_{\Theta}^2e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{12} \frac{e^{-2q}}{R^2} + \frac{1}{24} \frac{V_{R,Re}^{-2b}}{R} - \frac{1}{6} b_{R,\Theta}We^{-2b} - \frac{1}{12} \frac{q_{\Theta,\Theta}e^{-2q}}{R^2} - \\
& - \frac{1}{12} \frac{Vb_{Re}^{-2b}}{R^2} + \frac{1}{12} \frac{V_Rb_{Re}^{-2b}}{R} + \frac{1}{6} \frac{b_{\Theta} \cot \Theta e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{12} W_R \cot \Theta e^{-2b} - \\
& - \frac{1}{6} q_RWq_{\Theta}e^{-2b} - \frac{1}{4} \frac{W_{\Theta}e^{-2b}}{R} - \frac{1}{6} q_Rq_Ue^{-2b} - \frac{1}{4} \frac{W \cot \Theta e^{-2b}}{R} + \\
& + \frac{1}{12} \frac{q_R^2Ve^{-2b}}{R} - \frac{1}{4} \frac{\cot \Theta q_{\Theta}e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{12} q_RW_{\Theta}e^{-2b} + \frac{1}{12} q_RW \cot \Theta e^{-2b} - \\
& - \frac{1}{12} b_{\Theta}W_{Re}^{-2b} + \frac{1}{6} \frac{b_{\Theta,\Theta}e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{3} \frac{b_{\Theta}q_{\Theta}e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{12} W_{R,\Theta}e^{-2b} - \frac{1}{6} b_{R,U}e^{-2b}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Escalares de Weyl:

$$\Psi_0 = 2b_R q_R e^{-4b} - q_{R,R} e^{-4b} - 2 \frac{q_R e^{-4b}}{R}; \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} b_{R,\Theta} e^{-2b-q}}{R} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} b_\Theta q_R e^{-2b-q}}{R} - \frac{1}{4} \sqrt{2} R b_R W_R e^{q-4b} + \\ & + \frac{1}{8} \sqrt{2} R W_{R,R} e^{q-4b} + 1/4 \sqrt{2} W_R e^{q-4b} + \frac{1}{2} \sqrt{2} R q_R W_R e^{q-4b} - \\ & - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} q_{R,\Theta} e^{-2b-q}}{R} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} q_R q_\Theta e^{-2b-q}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} q_R \cot \Theta e^{-2b-q}}{R}; \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & \frac{1}{3} \frac{b_\Theta q_\Theta e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{6} b_\Theta W_R e^{-2b} + \frac{1}{12} W_R \cot \Theta e^{-2b} + \frac{1}{3} \frac{q_\Theta^2 e^{-2q}}{R^2} - \\ & - \frac{1}{6} \frac{q_{\Theta,\Theta} e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{\cot \Theta q_\Theta e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{6} R^2 W_R^2 e^{2q-4b} + \frac{1}{2} \frac{V e^{-2b}}{R^3} - \\ & - \frac{1}{3} \frac{V_R e^{-2b}}{R^2} - \frac{1}{6} \frac{b_{\Theta,\Theta} e^{-2q}}{R^2} - \frac{1}{3} q_R W \cot \Theta e^{-2b} + \frac{1}{12} W_{R,\Theta} e^{-2b} - \\ & - \frac{1}{6} \frac{b_\Theta \cot \Theta e^{-2q}}{R^2} + \frac{1}{3} q_R W_\Theta e^{-2b} + \frac{2}{3} q_R q_U e^{-2b} - \frac{1}{3} \frac{q_R^2 V e^{-2b}}{R} + \\ & + \frac{2}{3} q_R W q_\Theta e^{-2b} + \frac{1}{6} \frac{V_R b_R e^{-2b}}{R} + \frac{1}{6} \frac{V b_{R,R} e^{-2b}}{R} - \frac{1}{6} \frac{V b_R e^{-2b}}{R^2} - \\ & - \frac{1}{3} b_{R,\Theta} W e^{-2b} + \frac{1}{12} \frac{V_{R,R} e^{-2b}}{R} - \frac{1}{3} b_{R,U} e^{-2b} - \frac{1}{6} \frac{e^{-2q}}{R^2}; \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3 = & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}q_U \cot \Theta e^{-q}}{R} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}Wq_\Theta^2 e^{-q}}{R} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}Wq_{\Theta,\Theta} e^{-q}}{R} + \\
& + \frac{1}{4} \sqrt{2}Rb_U W_{Re}^{q-2b} - 1/8 \sqrt{2}RWW_{R,\Theta} e^{q-2b} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}q_U q_\Theta e^{-q}}{R} - \\
& - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}Vb_\Theta q_{Re} e^{-q}}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}b_{\Theta,U} e^{-q}}{R} + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2}V_{R,\Theta} e^{-q}}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}q_{\Theta,U} e^{-q}}{R} - \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sqrt{2}V_\Theta e^{-q}}{R^3} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}W e^{-q}}{R} - \frac{1}{8} \sqrt{2}RW_{R,U} e^{q-2b} + \frac{1}{16} \sqrt{2}VW_{R,Re}^{q-2b} + \\
& + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2}VW_{Re}^{q-2b}}{R} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}Wb_\Theta q_\Theta e^{-q}}{R} + \frac{1}{4} \sqrt{2}Vq_R W_{Re}^{q-2b} - \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{2}RWq_\Theta W_{Re}^{q-2b} + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2}Vq_{R,\Theta} e^{-q}}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}Wb_{\Theta,\Theta} e^{-q}}{R} + \\
& + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2}Vb_{R,\Theta} e^{-q}}{R^2} - \frac{1}{8} \sqrt{2}Vb_R W_{Re}^{q-2b} + \frac{1}{4} \sqrt{2}RWb_\Theta W_{Re}^{q-2b} - \\
& - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}Wb_\Theta \cot \Theta e^{-q}}{R} - \frac{1}{4} \sqrt{2}RW_R W_\Theta e^{q-2b} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}V_\Theta b_{Re} e^{-q}}{R^2} - \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{2}Rq_U W_{Re}^{q-2b} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}Vq_R q_\Theta e^{-q}}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}b_\Theta q_U e^{-q}}{R} + \\
& + \frac{1}{8} \sqrt{2}RW_R W \cot \Theta e^{q-2b} - \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2} \cot \Theta Wq_\Theta e^{-q}}{R} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}V \cot \Theta q_{Re} e^{-q}}{R^2};
\end{aligned} \tag{A.46}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_4 = & -q_{U,U} + 2b_{\Theta}W^2q_{\Theta} + \frac{1}{4}\frac{V_{\Theta}W_R}{R} - \frac{1}{4}\frac{V_RW_{\Theta}}{R} + \frac{3}{2}\frac{VWq_{\Theta}}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{V_RWq_{\Theta}}{R} + \\
& + \frac{1}{2}\frac{V^2b_Rq_R}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{WV_{\Theta}q_R}{R} + \frac{1}{2}W\cot\Theta W_{\Theta} - \frac{1}{2}\frac{Vb_RW_{\Theta}}{R} + \\
& + \frac{1}{2}\frac{VW_Rq_{\Theta}}{R} + \frac{1}{2}\frac{V_{\Theta}b_{\Theta}e^{2b-2q}}{R^3} - b_UW\cot\Theta + \frac{VWq_{R,\Theta}}{R} - \frac{b_UVq_R}{R} - \\
& - q_UW\cot\Theta - \frac{Vb_Rq_U}{R} - b_{\Theta}W^2\cot\Theta - W^2q_{\Theta}\cot\Theta + \frac{1}{4}\frac{VW_{R,\Theta}}{R} + \\
& + \frac{1}{2}\frac{V_Uq_R}{R} + 2b_{\Theta}Wq_U + \frac{Vq_{R,U}}{R} - \frac{1}{4}\frac{V^2q_{R,R}}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{V_Rq_U}{R} + \frac{1}{2}W_U\cot\Theta + \\
& + b_{\Theta}WW_{\Theta} + 2b_UWq_{\Theta} + \frac{3}{2}\frac{Vq_U}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{V^2q_R}{R^3} - 2WW_{\Theta}q_{\Theta} + \frac{3}{4}\frac{VW_{\Theta}}{R^2} + \\
& + \frac{1}{4}\frac{V_{\Theta,\Theta}e^{2b-2q}}{R^3} + b_UW_{\Theta} - q_UW_{\Theta} - W_Uq_{\Theta} - W^2q_{\Theta,\Theta} + 2b_Uq_U - \\
& - \frac{1}{2}WW_{\Theta,\Theta} - 2Wq_{\Theta,U} + \frac{1}{2}\frac{Vq_RW_{\Theta}}{R} - \frac{Vb_RWq_{\Theta}}{R} - \frac{b_{\Theta}WVq_R}{R} - \\
& - \frac{1}{2}W_{\Theta}^2 - \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_{\Theta,U} - \frac{3}{4}\frac{VW\cot\Theta}{R^2} + \frac{1}{4}\frac{V_RW\cot\Theta}{R} + \\
& + \frac{1}{2}\frac{Vq_RW\cot\Theta}{R} - \frac{1}{4}\frac{VW_R\cot\Theta}{R} + \frac{1}{2}\frac{Vb_RW\cot\Theta}{R} - \frac{1}{4}\frac{V_{\Theta}\cot\Theta e^{2b-2q}}{R^3}.
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Apêndice B

Descrição do Espaço-Tempo de Robinson-Trautman no Formalismo de Newman-Penrose

Uma base de vetores covariantes apropriada para a descrição do elemento de linha (2.66), com o auxílio de (1.7), pode ser expressa como

$$\begin{aligned} l_\mu &= (1, 0, 0, 0) \\ n_\mu &= \left(\frac{1}{2}S^2, 1, 0, 0 \right) \\ m_\mu &= \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}rK, -i\frac{\sqrt{2}}{2}rK \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Através da métrica contravariante $g^{\mu\nu}$, associada à (2.66),

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2K^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

derivam-se as componentes contravariantes da base (B.1)

$$\begin{aligned}
 l^\mu &= (0, 1, 0, 0) \\
 n^\mu &= \left(1, -\frac{1}{2}S^2, 0, 0\right) \\
 m^\mu &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2rK}, i\frac{\sqrt{2}}{2rK\sin\theta}\right). \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

Após a construção das bases de tetradas, cada um dos objetos do formalismo de Newman-Penrose podem ser obtidos, por intermédio das fórmulas existentes na seção 1.2:

Derivadas direcionais:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\partial}{\partial r} \\
 \Delta &= \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}S^2 \frac{\partial}{\partial r} \\
 \delta &= \frac{\sqrt{2}}{2rK} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

Pré-coeficientes de rotação de Ricci:

$$\lambda_{(1)(2)(2)} = -S S_r; \tag{B.5}$$

$$\lambda_{(1)(4)(3)} = r^{-1}; \tag{B.6}$$

$$\lambda_{(1)(3)(4)} = r^{-1}; \tag{B.7}$$

$$\lambda_{(2)(2)(3)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S S_\theta}{rK}; \tag{B.8}$$

$$\lambda_{(2)(4)(3)} = \frac{K_u}{K} - \frac{1}{2} \frac{S^2}{r}; \tag{B.9}$$

$$\lambda_{(2)(2)(4)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S S_\theta}{rK}; \tag{B.10}$$

$$\lambda_{(2)(2)(4)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S S_\theta}{rK}; \quad (\text{B.11})$$

$$\lambda_{(3)(3)(4)} = \frac{\sqrt{2}}{2r} \left(\frac{K_\theta}{K^2} + \frac{\cot \theta}{K} \right); \quad (\text{B.12})$$

$$\lambda_{(3)(4)(4)} = -\frac{\sqrt{2}}{2r} \left(\frac{K_\theta}{K^2} + \frac{\cot \theta}{K} \right). \quad (\text{B.13})$$

Coefficientes de rotação de Ricci:

$$\gamma_{(1)(2)(2)} = -S S_r; \quad (\text{B.14})$$

$$\gamma_{(1)(4)(3)} = r^{-1}; \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma_{(1)(3)(4)} = r^{-1}; \quad (\text{B.16})$$

$$\gamma_{(2)(2)(3)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S S_\theta}{rK}; \quad (\text{B.17})$$

$$\gamma_{(2)(4)(3)} = \frac{K_u}{K} - \frac{1}{2} \frac{S^2}{r}; \quad (\text{B.18})$$

$$\gamma_{(2)(2)(4)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S S_\theta}{rK}; \quad (\text{B.19})$$

$$\gamma_{(2)(2)(4)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S S_\theta}{rK}; \quad (\text{B.20})$$

$$\gamma_{(3)(3)(4)} = \frac{\sqrt{2}}{2r} \left(\frac{K_\theta}{K^2} + \frac{\cot \theta}{K} \right); \quad (\text{B.21})$$

$$\gamma_{(3)(4)(4)} = -\frac{\sqrt{2}}{2r} \left(\frac{K_\theta}{K^2} + \frac{\cot \theta}{K} \right). \quad (\text{B.22})$$

Coefficientes espinoriais:

$$\kappa = 0; \quad (\text{B.23})$$

$$\sigma = 0; \quad (\text{B.24})$$

$$\lambda = 0; \quad (\text{B.25})$$

$$\nu = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S S_\theta}{rK}; \quad (\text{B.26})$$

$$\rho = -r^{-1}; \quad (\text{B.27})$$

$$\mu = \frac{K_u}{K} - \frac{1}{2} \frac{S^2}{r}; \quad (\text{B.28})$$

$$\tau = 0; \quad (\text{B.29})$$

$$\pi = 0; \quad (\text{B.30})$$

$$\epsilon = 0; \quad (\text{B.31})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} S S_r; \quad (\text{B.32})$$

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4r} \left(\frac{K_\theta}{K^2} + \frac{\cot \theta}{K} \right); \quad (\text{B.33})$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{4r} \left(\frac{K_\theta}{K^2} + \frac{\cot \theta}{K} \right). \quad (\text{B.34})$$

Escalares de Ricci:

$$\Phi_{00} = 0; \quad (\text{B.35})$$

$$\Phi_{01} = 0; \quad (\text{B.36})$$

$$\Phi_{02} = 0; \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & -\frac{1}{4} S_r^2 - \frac{1}{4} SS_{rr} - \frac{1}{2} \frac{K_u}{rK} + \frac{1}{4} \frac{S^2}{r^2} + \frac{1}{4} \frac{K_{\theta\theta}}{r^2 K^3} + \frac{1}{4} \frac{K_{\theta} \cot \theta}{r^2 K^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{r^2 K^2} - \\ & - \frac{1}{4} \frac{K_{\theta}^2}{r^2 K^4}; \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\Phi_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{4r} \left(\frac{S_r S_{\theta}}{K} + \frac{SS_{r\theta}}{K} - \frac{K_{\theta u}}{K^2} + \frac{K_{\theta} K_u}{K^3} \right); \quad (\text{B.39})$$

$$\Phi_{22} = \frac{K_{uu}}{K} - \frac{SS_u}{r} - \frac{S^2 K_u}{rK} + \frac{SS_r K_u}{K} - \frac{1}{2} \frac{S_{\theta}^2}{r^2 K^2} - \frac{1}{2} \frac{SS_{\theta\theta}}{r^2 K^2} - \frac{1}{2} \frac{SS_{\theta} \cot \theta}{r^2 K^2}; \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{1}{12} S_r^2 + \frac{1}{12} SS_{rr} + \frac{1}{3} \frac{SS_r}{r} - \frac{1}{2} \frac{K_u}{rK} + \frac{1}{12} \frac{S^2}{r^2} + \frac{1}{12} \frac{K_{\theta\theta}}{r^2 K^3} + \frac{1}{12} \frac{K_{\theta} \cot \theta}{r^2 K^3} - \\ & - \frac{1}{12} \frac{1}{r^2 K^2} - \frac{1}{12} \frac{K_{\theta}^2}{r^2 K^4}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Escalares de Weyl:

$$\Psi_0 = 0; \quad (\text{B.42})$$

$$\Psi_1 = 0; \quad (\text{B.43})$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -\frac{1}{3} \frac{SS_r}{r} + \frac{1}{6} S_r^2 + \frac{1}{6} SS_{rr} + \frac{1}{6} \frac{S^2}{r^2} + \frac{1}{6} \frac{K_{\theta\theta}}{r^2 K^3} + \frac{1}{6} \frac{K_{\theta} \cot \theta}{r^2 K^3} - \\ & - \frac{1}{6} \frac{1}{r^2 K^2} - \frac{1}{6} \frac{K_{\theta}^2}{r^2 K^4}; \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

$$\Psi_3 = \frac{\sqrt{2}}{4r^2 K^3} \left(S_r S_{\theta} r K^2 + SS_{r\theta} r K^2 - 2SS_{\theta} K^2 + K_{\theta u} r K - K_{\theta} K_u r \right); \quad (\text{B.45})$$

$$\Psi_4 = \frac{1}{2} \frac{S_{\theta}^2}{r^2 K^2} + \frac{1}{2} \frac{SS_{\theta\theta}}{r^2 K^2} - \frac{SS_{\theta} K_{\theta}}{r^2 K^3} - \frac{1}{2} \frac{SS_{\theta} \cot \theta}{r^2 K^2}. \quad (\text{B.46})$$

Apêndice C

Algoritmo de Runge-Kutta de Quarta Ordem para a Solução de (3.30)

A equação (3.30) pode ser representada pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{\partial b_j}{\partial u} = \frac{\partial b_j}{\partial u}(b_0, \dots, b_N), \quad b_j(u_0) \equiv b_{0j}. \quad (\text{C.1})$$

para $u_0 \leq u \leq u_f$ e com $1 \leq j \leq (N + 1)$. Considerando que o intervalo $[u_0, u_f]$ é igualmente dividido em $(p + 1)$ valores de u , o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem e de passo fixo h é descrito esquematicamente como:

ENTRADA: extremidades u_0 e u_f ; truncagem N ;

SAÍDA: aproximação para y_j nos $(p + 1)$ valores de u .

Passo 1 : Seja $h = (u_f - u_0) / p$; $u = u_0$.

SAÍDA: (u, b_{0i})

Passo 2 : Para $k = 1, 2, \dots, p$ faça passos de 3 a 14

Passo 3 : Para $j = 1, 2, \dots, (N + 1)$ faça

$$K_j^{(1)} = \frac{\partial b_j}{\partial u} (b_i = b_{0i}), i = 1, 2, \dots, (N + 1)$$

Passo 4 : PARE

Passo 5 : Para $j = 1, 2, \dots, (N + 1)$ faça

$$K_j^{(2)} = \frac{\partial b_j}{\partial u} (b_i = b_{0i} + \frac{h}{2} K_i^{(1)}), i = 1, 2, \dots, (N + 1)$$

Passo 6 : PARE

Passo 7 : Para $j = 1, 2, \dots, (N + 1)$ faça

$$K_j^{(3)} = \frac{\partial b_j}{\partial u} (b_i = b_{0i} + \frac{h}{2} K_i^{(2)}), i = 1, 2, \dots, (N + 1)$$

Passo 8 : PARE

Passo 9 : Para $j = 1, 2, \dots, (N + 1)$ faça

$$K_j^{(4)} = \frac{\partial b_j}{\partial u} (b_i = b_{0i} + h K_i^{(3)}), i = 1, 2, \dots, (N + 1)$$

Passo 10 : PARE

Passo 11 : Para $j = 1, 2, \dots, (N + 1)$ faça

$$b_j = b_{0j} + \frac{h}{6} (K_j^{(1)} + 2K_j^{(2)} + 2K_j^{(3)} + K_j^{(4)})$$

$$b_{0j} = b_j$$

Passo 12 : PARE

Passo 13 : $u = u_0 + kh$

Passo 14 : SAÍDA: $(u, \{b_j\})$

Passo 15 : PARE

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Hulse, *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 699, (1994).
- [2] J. H. Taylor, *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 711, (1994).
- [3] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press (1983).
- [4] M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, Oxford University Press (2008).
- [5] Institute of Physics Publishing, *First International LISA Symposium, Class. Quantum Grav.*, **14(6)**, IOP, Bristol (1997). *Proceedings of First International LISA Symposium held at the Space Science department at CLRC's Rutherford Appleton Laboratory.*
- [6] California Institute of Technology, *LIGO home page* (1999), [Online HTML document]: cited on 15 January 2000, <http://www.ligo.caltech.edu/>.
- [7] *AIGO home page*, <http://www.aigo.org.au/>
- [8] *VIRGO home page*, (1999), [Online HTML document]: <http://www.virgo.infn.it/>.
- [9] University of Hanover, *GEO 600 home page* (1999), [Online HTML document]: <http://www.geo600.uni-hannover.de/>.
- [10] National Astronomy Observatory, Tokyo, *TAMA home page* (1999), [Online HTML document]: cited on 15 January 2000, <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/>.

- [11] Jet Propulsion Laboratory, *US LISA home page* (1999), [Online HTML document]: <http://lisa.jpl.nasa.gov/>.
- [12] Instituto Nacional Pesquisas Espaciais, *MARIO SCHENBERG home page*, <http://www.das.inpe.br/graviton>.
- [13] L. Blanchet, *Living Rev. Relativity*, **9**, 4 (2006).
- [14] B. Szilagyi, L. Lindblom e M. A. Scheel, *Phys. Rev.* **D80**, 124010 (2009).
- [15] S.G.Hahn and R.W. Lindquist, *Ann. Phys.*, **29**, 304 (1964).
- [16] L. Smarr, *Univ. of Texas at Austin Ph.D. Thesis* (1975).
- [17] K. R. Eppley, *Princeton Ph.D. Thesis* (1977).
- [18] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 285 (1980).
- [19] P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr and W. Suen, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 2851 (1993).
- [20] P. Anninos, K. Camarda, J. Masso, E. Seidel, W. M. Suen, M. Tobias and J. Towns, *arXiv:gr-qc/9412059*.
- [21] F. Pretorius, em *Physics of Relativistic Objects in Compact Binaries: from Birth to Coalescence*, editado por M. Colpi, P. Casella, V. Gorini, U. Moschella e A. Possenti, *Astrophysics and Space Science Library Series*, **359**, Springer, Heidelberg (2009).
- [22] M. J. Rees, *Class. Quantum Grav.*, **14**, 1411 (1997).
- [23] S. Komossa, V. Burwitz, G. Hasinger, P. Predehl, J. S. Kaastra, e Y. Ikebe, *Astrophys. J. Lett.*, **582**, 15 (2003).
- [24] D. Merritt e R. D. Ekers, *Science*, **297**, 1310 (2002).
- [25] S. Komossa, H. Zhou e H. Lu, *Astrophys. J. Lett.*, **678**, 81 (2008).
- [26] D. Merritt, M. Milosavljević, M. Favata, S. A. Hugues e D. E. Holz, *Astrophys. J. Lett*, **607**, 9 (2004).

- [27] J. D. Schnittman, *Astrophys. J. Lett*, **667**, 133 (2007).
- [28] B. Binggeli e H. Jerjen, *Astron. Astrophys.*, **333**, 17 (1998).
- [29] B. Binggeli, F. Barazza e H. Jerjen, *Astron. Astrophys.*, **359**, 447 (2000).
- [30] M. G. Haehnelt, M. B. Davies e M. J. Rees, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **366**, L22 (2006).
- [31] Z. Haiman, *Astrophys. J.*, **613**, 36 (2004).
- [32] T. Bogdanović, M. Eracleous e S. Sigurdsson, *Astrophys. J.*, **697**, 288 (2009).
- [33] M. Dotti, C. Montuori, R. Decarli, M. Volonteri, M. Colpi e F. Haardt, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **398**, L73 (2009).
- [34] G. A. Shields, E. W. Bonning e S. Salviander, *Astrophys. J.*, **696**, 1367 (2009a).
- [35] T. A. Boroson, T. R. Lauer, *Nature*, **458**, 53 (2009).
- [36] G. A. Shields *et al.*, *Astrophys. J.*, **707**, 936 (2009b).
- [37] P. G. Jonker, M. A. P. Torres, A. C. Fabian, M. Heida, G. Miniutti e D. Pooley, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **407**, 645 (2010).
- [38] M. Favata, S. A. Hughes e D. E. Holz, *Astrophys. J. Lett*, **607**, 5 (2004).
- [39] L. Blanchet, M. S. S. Qusailah e C. M. Will, *Astrophys. J.*, **635**, 508 (2005).
- [40] T. Damour e A. Gopakumar, *Phys. Rev. D*, **73**, 124006 (2006).
- [41] C. F. Sopuerta, N. Yunes e P. Laguna, *Phys. Rev. D*, **74**, 124010 (2006);
C. F. Sopuerta, N. Yunes e P. Laguna, *Phys. Rev. D*, **75**, 069903 (2007) (erratum);
C. F. Sopuerta, N. Yunes e P. Laguna, *Phys. Rev. D*, **78**, 049901 (2008) (erratum).
- [42] A. Le Tiec, L. Blanchet e C. M. Will, *Class. Quantum Grav.*, **27**, 012001 (2010).

- [43] F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 121101 (2005).
- [44] B. Brügmann, *Int. J. Mod. Phys. D*, **8**, 85 (1999).
- [45] J. G. Baker, M. Campanelli e C. O. Lousto, *Phys. Rev. D*, **65**, 044001 (2002).
- [46] M. Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti e Y. Zlochower, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 111101 (2006).
- [47] J. G. Baker, J. Centrella, D. I. Choi, M. Koppitz e J. van Meter, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 111102 (2006).
- [48] M. Shibata e T. Nakamura, *Phys. Rev. D*, **52** 5428 (1995); T. W. Baumgarte e S. L. Shapiro, *Phys. Rev. D*, **59**, 024007 (2002).
- [49] J. W. York, em *Sources of Gravitational Radiation*, Cambridge University Press (1979).
- [50] G. Nagy, O. E. Ortiz e O. A. Reula, *Phys. Rev. D*, **70**, 044012 (2004).
- [51] P. Anninos, K. Camarda, J. Masso, E. Seidel, W. M. Suen and J. Towns, *Phys. Rev. D*, **52**, 2059 (1995).
- [52] M. Alcubierre *et al.*, *Phys. Rev. D*, **64** 61501 (2001).
- [53] M. Alcubierre *et al.*, *Phys. Rev. D*, **67**, 084023 (2003).
- [54] J. Thronburg, *Class. Quantum Grav.*, **4**, 1119 (1987).
- [55] S. R. Brandt e B. Brügmann, *Phys. Rev. Lett.*, **78** 3606 (1997).
- [56] D. M. Shoemaker *et al.*, *Class. Quantum Grav.*, **20**, 3729 (2003).
- [57] M. Alcubierre e B. Brügmann, *Phys. Rev. D*, **63**, 104006 (2001).
- [58] F. Pretorius, *Class. Quantum Grav.*, **23**, S529 (2006).
- [59] F. Pretorius, *Class. Quantum Grav.*, **22**, 425 (2005).
- [60] C. Gundlach, J. M. Martín-García, G. Calabrese e I. Hinder, *Class. Quantum Grav.*, **22**, 3767 (2005).

- [61] J. B. Camp e N. J. Cornish, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **54**, 525 (2004).
- [62] J. G. Baker *et al.*, *Phys. Rev. D*, **75**, 124024 (2007).
- [63] B. Aylott *et al.*, *Class. Quantum Grav.*, **26**, 165008 (2009).
- [64] J. G. Baker *et al.*, *Phys. Rev. D*, **78**, 044046 (2008).
- [65] A. Sesana, M. Volonteri e F. Haardt, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **377**, 1711 (2007).
- [66] N. Bode, S. Phinney, *Am. Phys. Soc. Meet. Abstr.*, 1010 (2007).
- [67] M. Campanelli, *Class. Quantum Grav.*, **22**, S387 (2005).
- [68] J. G. Baker, J. Centrella, D. I. Choi, M. Koppitz, J. van Meter e M. C. Miller, *Astrophys. J.*, **653**, L93 (2006).
- [69] J. R. van der Meter, J. G. Baker, M. Koppitz, D. I. Choi, *Phys. Rev. D*, **73**, 124011 (2006).
- [70] F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker e P. Laguna, *Class. Quantum Grav.*, **24**, S33 (2007)
- [71] L. Smarr, in *Sources of Gravitational Radiation*, editado por L. Smarr, Cambridge University Press, Cambridge (1978).
- [72] J. A. González, U. Sperhake, B. Brügmann, M. Hannam e S. Husa, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 091101 (2007)
- [73] J. A. González J. A., U. Sperhake e B. Brügmann, *Phys. Rev. D*, **79**, 124006 (2009).
- [74] F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker, P. Laguna e R. A. Matzner, *Astrophys. J.*, **661**, 430 (2007).
- [75] M. Koppitz, D. Pollney, C. Reisswig, L. Rezzolla, J. Thornburg, P. Diener e E. Schnetter, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 041102 (2007).
- [76] J. Winicour, *Prog.Theor.Phys.Suppl.*, **136**, 57 (1999).

- [77] M.C. Babiuc, B. Szilagyi, J. Winicour e Y. Zlochower, *gr-qc:1011.4223* (2010).
- [78] M. Campanelli, C. Lousto, Y. Zlochower e D. Merritt, *Astrophys. J. Lett*, **659**, 5 (2007).
- [79] D. I. Choi, B. J. Kelly, W. D. Boggs, J. G. Baker, J. Centrella e J. van Meter, *Phys. Rev. D*, **76**, 104026 (2007).
- [80] J. Healy, F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker, P. Laguna e R. A. Matzner, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 041101 (2009).
- [81] J. A. V. Kroon, *Gen. Rel. Grav.*, **31**, 1219 (1999).
- [82] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago Press, (1984).
- [83] R. F. Aranha , H. P. de Oliveira, I. Damião Soares e E. V. Tonini, *Int. J. Mod. Phys. D*, **17**, 2049 (2008).
- [84] R. F. Aranha , H. P. de Oliveira, I. Damião Soares e E. V. Tonini, *Int. J. Mod. Phys. A*, **24**, 1583 (2009).
- [85] R. F. Aranha , I. Damião Soares e E. V. Tonini, *Phys. Rev. D*, **81**, 104005 (2010).
- [86] R. F. Aranha , I. Damião Soares e E. V. Tonini, *Phys. Rev. D*, **82**, 104033 (2010).
- [87] S. W. Hawking e W. Israel, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey* , Cambridge University Press, Cambridge, (1979).
- [88] I. Robinson e A. Trautman, *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 431 (1960); I. Robinson e A. Trautman, *Proc. Roy. Soc. A* **265**, 463 (1962).
- [89] H. Bondi, M. G. J. van der Berg e A. W. K. Metzner, *Proc. R. Soc. London A*, **269**, 21 (1962).
- [90] R. K. Sachs, *Proc. R. Soc. London A*, **270**, 103 (1962).
- [91] R. K. Sachs, *Phys. Rev.*, **128**, 2851 (1962); R. K. Sachs, *J. Math. Phys.*, **3**, 908 (1962).

- [92] R. K. Sachs, *Proc. R. Soc. London A*, **264**, 309 (1961).
- [93] P. Chruściel, *Commun. Math. Phys.*, **137**, 289 (1991); P. Chruściel, *Proc. Roy. Soc. London A*, **436**, 299 (1992); P. Chruściel e D. B. Singleton, *Commun. Math. Phys.*, **147**, 137 (1992).
- [94] P. T. Chruściel, M. A. H. MacCallum e D. B. Singleton, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, **350**, 113 (1995).
- [95] L. E. Kidder, M. A. Scheel, S. A. Teukolsky, E. D. Carlson e G. B. Cook, *Phys. Rev. D*, **62**, 084032 (2000).
- [96] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni e T. A. Zang, *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2006).
- [97] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, Springer (2009).
- [98] E. Newman e R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **3**, 566 (1962).
- [99] E. Coddington e N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, p.103 (1955).
- [100] N. Levinson, *Am. J. Math.*, **68**, 1 (1946).
- [101] R. J. Torrence e A. I. Janis, *J. Math. Phys.*, **8**, 1355 (1967).
- [102] W. E. Couch, R. J. Torrence, A. I. Janis e E. T. Newman, *J. Math. Phys.*, **9**, 484 (1968).
- [103] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford, (1983).
- [104] H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers e E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press (2003).
- [105] R. Penrose e W. Rindler *Spinors and Space-time*, vol. 1 e 2, Cambridge University Press (1987).

- [106] M. Carmeli, *Group Theory and General Relativity*, McGraw-Hill (1977).
- [107] S. H. Schot, *Historia Mathematica*, **19**, 385 (1992).
- [108] C. W. Misner, *Phys. Rev.*, **118**, 1110 (1960).
- [109] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York (1968).
- [110] R. A. D'Inverno e J. Stachel, *J. Math. Phys.*, **19**, 2447 (1978); R. A. D'Inverno and J. Smallwood, *Phys. Rev. D*, **22**, 1233 (1980).
- [111] H. P. Oliveira, E. L. Rodrigues, I. Damião Soares e E. V. Tonini, *Int. J. Mod. Phys. C*, **18**, 1853 (2007).
- [112] L. Rezzolla, R. P. Macedo e J. L. Jaramillo, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 221101 (2010).
- [113] K. P. Tod, *Class. Quantum Grav.*, **6**, 1159 (1989).
- [114] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd edition, Dover, New York (2001).
- [115] E. Poisson, *A Relativistic's Toolkit: The Mathematics of Black Hole Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [116] J. F. Kenney e E. S. Keeping, *Mathematics of Statistics*, Pt. 1, 3rd ed, Princeton, NJ: Van Nostrand, pp. 59-60, 1962.
- [117] R. L. Burden e J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Brooks Cole (2000).
- [118] D. Kramer e U. Hähner, *Classical Quantum Gravity*, **12**, 2287 (1995).
- [119] D. Eardley, *em Gravitational Radiation*, edited by N. Deruelle and T. Piran (North-Holland, Amsterdam 1983), pp. 257-296.
- [120] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, **52**, 479 (1988); E. M. F. Curado and C. Tsallis, *J. Phys. A*, **24**, L69 (1991).

- [121] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics* (Springer, New York, 2009).
- [122] R. P. Macedo e A. Saa, *Phys. Rev. D*, **78**, 104025 (2008).
- [123] H. P. Oliveira, I. Damião Soares e E. V. Tonini, *Phys. Rev. D*, **78**, 044016 (2008).
- [124] U. von der Gönna e D. Kramer, *Classical Quantum Gravity*, **15**, 215 (1998).
- [125] <http://portal.cbpf.br>.
- [126] M. J. Fitchett, *Mon. Not. R. Astron. Soc* 203, 1049 (1983).
- [127] <http://www.gatech.edu> .
- [128] <http://www.hpc.gatech.edu> .
- [129] <http://www.hpc.gatech.edu/faculty/pablo-laguna> .