

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DIAGRAMA DE HUBBLE DOS SURTOS DE RAIOS GAMA E
COSMOLOGIA COM DIMENSÕES ESPACIAIS EXTRAS:
CONFRONTANDO O MODELO CARDASSIANO

HABIB SALOMÓN DÚMET MONTOYA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro de 2007

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DIAGRAMA DE HUBBLE DOS SURTOS DE RAIOS GAMA E
COSMOLOGIA COM DIMENSÕES ESPACIAIS EXTRAS:
CONFRONTANDO O MODELO CARDASSIANO

HABIB SALOMÓN DÚMET MONTOYA

ORIENTADOR

HERMAN J. MOSQUERA CUESTA

Dedico esta Tese . . .

A minha rainha *Rebeca* ,
a vovôzinha mais fofa do mundo;
aos meus maravilhosos pais:

Laura e Salomóm;

meus saudadosos irmãos:

Merajad, Sahud, Abdel

Anisse e Zoila Rebeca,

às minhas três princesas:

Shadia, Shalile e Shamina,

a Laurita e Yazid.

Agradecimentos

Agradeço especialmente ao Prof. Dr. Herman J. Mosquera Cuesta pelo intenso ano de trabalho, seus valiosos ensinamentos, conselhos e a confiança depositada em mim para o desenvolvimento desta Tese.

Aos professores Mario Novello e João Carlos C. dos Anjos pelo apoio e a confiança tanto em Herman Mosquera quanto em mim.

A duas amigas muito especiais: Ana Carla Azeredo e Cristina Furlanetto, pelas suas valiosíssimas ajudas, conselhos e grande apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro, e ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF, por ter se tornado minha segunda casa. Ao competente corpo de pesquisadores do ICRA-BR, em especial a Martín Makler e José Martins Salim por seus conselhos e ensinamentos.

À família da Silva, da cidade do São Paulo: Teresa, Thais, Maria, Pedro Otávio por sua acolhida.

Agradeço também o apoio desinteressado de Myriam e Ricardo, assistentes de ciência e tecnologia da Cordenação de Formação Científica do CBPF

Ao Prof. Dr. Orfeu Bertolami do Instituto Superior Técnico, de Portugal, por seu apoio e conselhos.

Ao pessoal do CBPF, mestrandos, doutorandos, funcionários, etc.

À Turma da Pedagogia e Psicologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

A minhas amigas especiais Milva e Fátima, e meus amigos Neil e Octávio.

Finalmente, ao Brasil, país que me deu esta grande oportunidade de me aperfeiçoar cientificamente.

Resumo

Observações astronômicas recentes de Supernovas Tipo Ia (SNIa) sugerem, quando interpretadas no contexto do Modelo Padrão da Cosmologia, que o Universo entrou numa fase tardia de expansão acelerada. Essa interpretação apresenta um sério problema para a cosmologia, pois a causa de tal transição não tem uma explicação consistente dentro da atual cosmologia Einsteniana (à Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, por exemplo). Entretanto, inúmeras propostas teóricas foram construídas numa tentativa de explicar esta transição de fase tardia do universo. Dentre essas, a teoria que introduz a idéia de energia escura é uma das mais referenciadas.

O objetivo principal desta Tese é confrontar o Modelo Cosmológico Cardassiano com as observações de Surtos de Raios Gama ou SRG, as quais alcançam hoje desvios para o vermelho ou rubrodesvio ($z \sim 7$). Este modelo está inspirado na idéia de que só matéria é suficiente para desencadear um processo de expansão acelerada tardia do universo e descrever ao mesmo tempo a sua planitude. Para testar esse modelo, construiu-se o Diagrama de Hubble dos SRG usando cinco relações de luminosidade que utilizam as propriedades físicas impressas nas curvas de luz dos SRG. Também foi feita uma análise estatística destas propriedades afim de determinar os parâmetros cosmológicos correspondentes a este modelo.

Os resultados obtidos mostraram total concordância com as observações das SNIa, que só cobrem baixos rubrodesvios ($z \sim 1$). Estes resultados apoiam a idéia de que as observações de SRG fornecem uma ferramenta poderosa, que é complementar a outras observações astronômicas, para estudos em cosmologia de precisão.

Abstract

Recent astronomical observations of Supernovae Type Ia (SNIa) suggest, when interpreted in the context of the Standard Model of Cosmology, that the Universe has entered a late-time accelerated expansion phase. This interpretation presents a serious challenges for cosmology, because the cause of such a transistion does not have a consistent explanation in the current Einstenian cosmology (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, for example). However, a number of theoretical proposals do exist aiming to explain this late phase of the universe. Among these, the theory that introduces the idea of dark energy to explain the late accelerated expansion it is one of the most popular.

The main objective of this Thesis is to confront the current observations of Gamma-Ray Bursts or GRBs, after calibration with luminosity relations; so as to turn them standard candles, with the Cardassian Model. This model is inspired in the idea that only matter is sufficient to drive a process of accelerate expansion and to describe the flatness of the Universe. To achieve this goal, we construct the Hubble Diagram of GRBs using five luminosity relations, that take into account many of the physical properties of the GRBs light curves. We also performed a statistical analysis in the framework of this model to obtain the cosmological parameters associated with this Cardassian Cosmology.

Our results show that GRBs are in agreement with SNIa observations, and also support the idea that GRBs are complementary tools for studies in precision cosmology.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Observações e Teoria de Surtos de Raios-Gamma (SRG)	4
2.1 Descoberta, presente e futuro de SRG	4
2.2 Características Observacionais de SRG	9
2.2.1 Curva de luz: emissão rápida e estrutura geral de um SRG	9
2.2.2 Classificação dos tipos de surtos	9
2.2.3 Emissão tardia ou pós-luminescência	10
2.2.4 Espectro	14
2.3 Relações de Luminosidade	16
2.4 Modelos de Produção	18
2.4.1 Modelo da Bolha de Fogo (<i>Fireball Model</i>)	18
2.4.2 Modelo da Camada de Fogo (<i>Fireshell Model</i>)	19
2.4.3 Interpretação das observações	22
2.5 Mecanismos de produção e candidatos a Progenitores	22
2.5.1 O Modelo do Colapso	24
2.5.2 Modelo de surgimento de sistemas binários	24
3 Fundamentos de Cosmologia	26
3.1 Cosmologia Relativística	26

3.1.1	Princípio Cosmológico	27
3.1.2	Postulado de Weyl e o Tensor de Momento-Energia	27
3.1.3	A Teoria da Relatividade Geral	29
3.1.4	Equações de Friedmann	30
3.1.5	Lei de Hubble e a Expansão do Universo	30
3.1.6	Parâmetros cosmológicos e distância de luminosidade	34
3.1.7	Modelos Cosmológicos Clássicos	35
3.1.8	Modelos Cosmológicos Modernos	37
4	Cosmologia com Surtos de Raios Gama	39
4.1	O Modelo Cardassiano	41
4.1.1	Diagrama de Hubble dos SRG na Cosmologia Cardassiana	43
4.1.2	O método de análise de regressão não linear	45
4.2	Estimativa dos Parâmetros Cosmológicos	55
4.2.1	O método da Função log-likelihood ou χ^2	56
4.2.2	Vínculos cosmológicos com SRG	59
4.2.3	Vínculos com outras observações cosmológicas	60
4.3	Características Observacionais	65
4.3.1	Rubrodesvio Cardassiano	65
4.3.2	Parâmetro de Desaceleração	66
4.3.3	Relação Idade-Rubrodesvio	68
5	Conclusões e perspectivas futuras	70
A	Fundamentos de Relatividade Geral	72
A.1	Ferramentas Matemáticas Essenciais	72
A.2	Variedades e Tensores	72
A.3	Derivadas de campos tensoriais	75
A.4	Curvas Geodésicas	77
A.5	O Tensor de Curvatura	78
A.5.1	O tensor métrico	78

A.6	Teoria da Relatividade Geral	80
A.6.1	Pilares da Relatividade Geral	80
A.6.2	Princípio variacional e as equações de Einstein	84
B	Equações de Friedmann	86
B.1	Métrica de FLRW	86
B.1.1	Conexão Afim	87
B.1.2	Tensor de Ricci e o Tensor Escalar de Curvatura	88
B.1.3	Tensor de Einstein	93
B.1.4	Tensor de Momento-Energia	94
B.1.5	Equações de Friedmann	94
C	Parâmetro de Desaceleração	95
	Referências Bibliográficas	97

Lista de Figuras

2.1	Satélite norte-americano Vela equipado com detectores de raios-X e raios-gama, um dos primeiros satélites a detectar os Surtos de Raios Gama. Contudo, estes não possuíam resolução angular suficiente para permitir a determinação da posição exata desses eventos.	5
2.2	Compton-Gamma-Ray Observatory (C-GRO) e o mapa em coordenadas galácticas da distribuição espacial dos SRG. Podemos ver que sua distribuição é isotrópica	7
2.3	Diagrama esquematizando a detecção de uma pós-luminescência com o satélite Italo-Holandês Beppo-SAX. A determinação exata desta pós-luminescência permitiu resolver a suspeita sobre a origem cosmológica dos SRG, através de observações desde Terra que utilizaram diversos telescópios no óptico, radio, etc.	8
2.4	Diversos perfis temporais de SRG, observados pelo BATSE. Tomado do preprint da Ref.[104]: astro-ph/0503476 (2005)	10
2.5	Populações de SRG definidas a partir da estrutura temporal da curva de luz. Este gráfico mostra um catálogo de duração de SRG detectados pelo “BATSE”. O parâmetro de duração usado é o T_{90} . A região correspondente a $T_{90} > 2$ determina os SRG longos, enquanto que a região correspondente a $T_{90} < 2$ determina os SRG curtos. A curva de luz usada para o cálculo do T_{90} é integrada sobre todos os 4 canais ($E > 20\text{keV}$) do BATSE. Ver http://www.batse.msfc.nasa.gov/batse/grb/duration/	11

2.6	Modelo da “bolha de fogo”: Na região central se mostra o motor interno. As duas regiões subsequentes são explicadas pelo cenário de choques internos. A última região corresponde à emissão da pós-luminescência, é bem explicada pelo cenário de choques externos. http://www.astro.livjm.ac.uk	20
2.7	Modelo da “Camada de Fogo” : Fator de Lorentz Γ em função da Coordenada Radial para todas as eras. I: representa a expansão livre do plasma e^\pm ; II: representa a colisão com os remanescentes bariônicos. III: Expansão do pulso formado por $e^\pm - \gamma$ -bárions. IV: formação da pós-luminescência. V: regime não relativístico. No ponto 4 o sistema atinge a transparência. Fonte [arXiv:astro-ph/0503476]	21
2.8	Candidatos a progenitores dos SRG : A formação de um SRG começa com o surgimento de sistemas “EN-EN” ou “EN-BN” (modelo de surgimento de sistemas binários) ou com o colapso de uma estrela massiva (O Modelo Colapsar). Ambos eventos criam um disco de acreção ao redor dos buracos negros.	25
3.1	Desvio para o vermelho observado no espectro de absorção. http://stokes.byu.edu/redshift.html	31
3.2	Este gráfico mostra a Lei de Hubble. Pode se verificar a dependência aproximadamente linear da velocidade de recessão das galaxias com sua distância até nos. Na época, isto sugeriu que o Universo estava se expandindo. Ver referência [47].	32
4.1	Calibração das Relações de Luminosidade	49
4.2	Diagrama de Hubble (Módulo de distância $-\mu(z)$ em função do rubrodesvio $-z$) para um conjunto representativo de modelos cosmológicos, a linha vermelha refere-se ao Λ CDM (universo plano com $\Omega_m = 0.27$), a linha verde ao Gás de Chaplygin [51] (universo plano com $\Omega_m = 0.05, A_s = 0.8, \alpha = 1$), a linha azul ao modelo Cardassiano ($\Omega_m = 0.27, n = 0.2$), a linha marron ao modelo de Energia Escura (universo plano com equação de estado $w = -1.31 + 1.48z$ e $\Omega_m = 0.27$). $H_0 = 72 \text{ km}^{-1} \text{ sM}^{-1} \text{ pc}$ foi o valor escolhido na construção desses diagramas.	51

4.3	Diagrama de Hubble (Módulo de distância $-\mu(z)$ em função do Rubrodesvio $-z$) de SRG calibrados com a cosmologia Cardassiana. Claramente podemos apreciar a curva bem comportada descrita pelos SRG.	55
4.4	Contornos de Confiança obtidos com os SRG	61
4.5	Contornos de confiança para o espaço de parâmetros $\Omega_m - n$ com SRG+ \mathcal{R} : As regiões limitadas pelas linhas contínuas (ver Figura 4.4(b)) têm o ponto “cyan” (0.399, 0.226) correspondente ao melhor ajuste. As regiões limitadas pelas linhas traçadas correspondem aos vínculos obtidos a partir das observações de SRG com a RCF. O ponto da cor azul corresponde à constante cosmológica (que cai no nível 2σ), e a linha da cor azul corresponde à linha $q_0 = 0$	63
4.6	Contornos de confiança obtidos com os vínculos de SRG e outras observções cosmológicas. Estes resultados mostram compatibilidades entre a Cosmologia Cardassiana e a Cosmologia de Λ CDM, além de preferir a presente expansão acelerada do universo e admitir a fase de expansão desacelerada.	65
4.7	Parâmetro de desaceleração $q(z)$ para o Modelo Cardassiano como função do rubrodesvio (z) para valores dos parâmetros cosmológicos obtidos com o método da análise estatística. A linha horizontal (d)/(a) ($q(z) = 0$) divide as regiões com expansão (a) acelerada e (d) desacelerada. Claramente, pode-se ver que a transição de universo desacelerado a acelerado cai no intervalo $0.18 \leq z \leq 0.69$ que é aproximadamente o intervalo inferido a partir das observações das SNIa.	67

Lista de Tabelas

4.1	Procedimento de Calibração; os valores de \bar{a} , $\sigma_{\bar{a}}$, \bar{b} , $\sigma_{\bar{b}}$ foram obtidos da subrotina Sixlin.f e os valores obtidos de σ_{sys} foram obtidos seguindo a definição da Eq. (4.26).	50
4.2	Combinação dos Módulos de Distância	52
4.3	Análise de Melhor Ajuste	66
4.4	Características Observacionais	68

Capítulo 1

Introdução

A formulação da Teoria da Relatividade, no começo do século XX, marcou uma profunda revolução no pensamento científico da época. A aplicação da Teoria Geral da Relatividade à descrição do Universo criou o que hoje se conhece como a Cosmologia Científica, ou simplesmente Cosmologia: a ciência que estuda tudo o que existe. Nessa primeira formulação de Einstein, este universo era considerado como sendo estático. O surgimento posterior de outras descrições do Universo foi cimentando as bases de uma nova teoria do mundo, a qual exibia cada vez maior complexidade, relativa.

No entanto, em 1929 as observações do astrônomo Edwin Hubble permitiram interpretar alterações no espectro de nebulosas distantes (hoje sabemos que se tratava de galáxias localizadas muito longe da nossa Via Láctea) como a demonstração observacional do maior fenômeno já descoberto na ciência: a constatação de que o Universo estava em processo de expansão. Posteriormente, em 1964 os engenheiros de telecomunicações norte-americanos Arno Penzias e Robert Wilson observaram algo que muitos teóricos tinham tido praticamente em mãos a partir de outras observações, mas deixaram passar: a Radiação Cósmica de Fundo (RCF). Isto foi interpretado como sendo a prova experimental de que o Universo estava banhado por um gás de fótons em equilíbrio térmico, muito análogo a um corpo negro, à temperatura de 2.7 Kelvin. Esta observação corresponde exatamente à visão que Gamow e colaboradores tinham feito no anos 1940. Desta maneira, se conectarmos a observação de Hubble com a descoberta da RCF, resulta simples imaginar que no tempo passado remoto o Universo teria sido muito mais quente.

Essas primeiras descrições do Universo junto com estas observações de Hubble pareciam tornar o Universo um objeto de estudo para uma ciência nascente: a Cosmologia, pois esse conjunto de fatos constituía em si um quadro teórico-observacional coerente.

Por outro lado, recentemente as observações de Supernovas Tipo Ia (SNIa) reforçadas com as medidas da Radiação Cósmica de Fundo, e com a distribuição de Galáxias a Grande Escala, parecem ter desvendado para os cosmólogos outras características do Universo que permaneciam escondidas: a *Expansão Acelerada Tardia* e sua *Planitude* ou planaridade.

A informação fornecida pelas SNIa parece nos conduzir, embora um tanto de maneira inesperada, a uma nova visão da verdadeira dinâmica do universo. Contudo, é possível sondar mais profundamente a história da expansão do universo usando uma ferramenta complementar: os Surtos de Raios Gama (SRG). Estes fenômenos são as maiores explosões ocorridas (e observadas) no universo após o Big Bang. Estes SRG podem ser velas padrão, do mesmo modo que as SNIa, mediante um procedimento de calibração adequado que se fundamenta em relações de luminosidade empíricas, porém baseadas nas propriedades físicas observacionais de suas curvas de luz e do espectro de cada evento de SRG. Esta metodologia permite estender o Diagrama de Hubble até altos rubrodesvios esticando mais um pouco o nosso conhecimento da história de expansão do Universo.

Isto posto, o objetivo principal desta Tese é confrontar observações de SRG com um modelo cosmológico inspirado na idéia de que só a matéria é suficiente para induzir um processo de expansão acelerada tardia do universo, e descrever ao mesmo tempo sua planitude. Este modelo é conhecido como o *Modelo Cardassiano*.

A estrutura desta Tese é a seguinte:

No Capítulo 2 descrever-se-ão os fundamentos da astrofísica de SRG, cobrindo os aspectos centrais dessas observações: curvas de luz, espectro, relações de luminosidade, modelos de produção e candidatos a possíveis progenitores.

O Capítulo 3 descreve os fundamentos básicos da Cosmologia Relativística.

O Capítulo 4 descreve a física básica do Modelo Cardassiano, a construção do diagrama de Hubble dos SRG (via calibração simultânea das relações de luminosidade), a análise estatística neste contexto e o uso desses resultados para estimar alguns parâmetros observacionais próprios do Modelo Cardassiano.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões e as perspectivas futuras que podem vir a ser desenvolvidas seguindo o caminho percorrido aqui, fazendo-o extensivo ao confronto de outros modelos cosmológicos com as observações de SRG.

Capítulo 2

Observações e Teoria de Surtos de Raios-Gamma (SRG)

2.1 Descoberta, presente e futuro de SRG

Os Pulsos Abruptos de Raios Gamma, ou Surtos de Raios Gama (SRG), são fenômenos astrofísicos de origem cosmológica que produzem uma grande quantidade de energia, a qual é liberada em feixes altamente colimados de raios-gama. A duração destes eventos varia entre alguns segundos e várias dezenas de segundos. Eles acontecem em posições randômicas no céu. Devido à não transparência da atmosfera terrestre aos raios- γ , sua detecção direta da superfície resulta impossível. Por isso, para observá-los torna-se necessário colocar satélites em órbita da Terra já que os SRG não podem atravessar a atmosfera terrestre. Logo somente podem ser diretamente detectados no espaço com telescópios apropriados. Mas a emissão tardia ou pós-luminescência (excessão feita da radiação remanescente mais fraca na banda de raios-X) pode ser observada com telescópios terrestres no óptico ou banda visível do espectro electromagnético.

No final da década de 60, os Estados Unidos enviaram ao espaço um conjunto de satélites equipados com detectores de raios-X e raios-gama chamados Satélites Vela, cuja verdadeira missão era detectar se a hoje extinta União Soviética fazia testes nucleares na Lua. Esses satélites detectaram explosões nucleares, porém sem conhecer sua origem ver-

dadeira, mas em qualquer caso, pareciam oriundos de fontes não-locais, i.e., externas ao sistema solar. O anúncio da descoberta foi feito no ano de 1973 por Klebesadel, Strong e Olsen [53], cientistas do *Laboratório Nacional de los Alamos*. Eles reportaram a detecção em três anos de atividade dos satélites Vela 5 e Vela 6, determinando que tais eventos vinham do espaço exterior e não de testes feitos na Lua. A Figura 2.1 mostra uma fotografia de um satélite da série Vela.

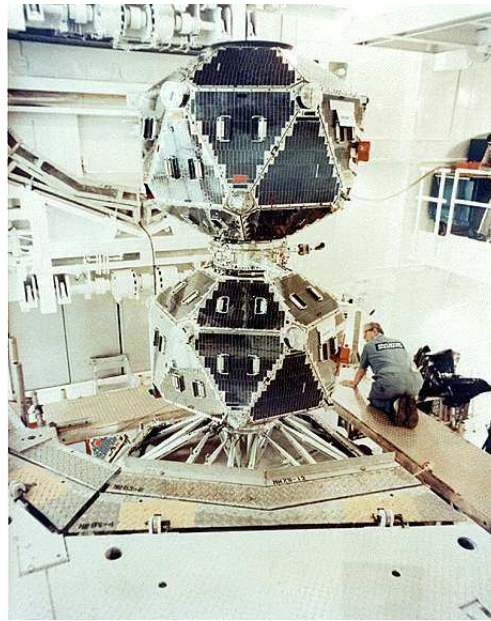


Figura 2.1: Satélite norte-americano Vela equipado com detectores de raios-X e raios-gama, um dos primeiros satélites a detectar os Surtos de Raios Gama. Contudo, estes não possuíam resolução angular suficiente para permitir a determinação da posição exata desses eventos.

Com isso começaram a surgir diversas missões com o objetivo de estudar os SRG e identificar sua origem, pois até aquela data acreditava-se que fossem fenômenos galácticos (sua distribuição espacial cobria essencialmente o plano galáctico). O primeiro passo importante na compreensão desses fenômenos foi dada pela NASA mediante o “*Bursts and Transient Source Experiment – (BATSE)*”, a bordo da espaçonave “*Compton Gamma-Ray Observatory – (CGRO)*”, ver Figura 2.2(a), (1991-2000). A principal característica deste instrumento era seu poder para determinar com grande precisão a localização das

fontes detectadas, uma vez que todos os eventos registrados eram isotropicamente distribuídos no espaço quando usadas coordenadas galácticas para representá-los (ver Figura 2.2(b)). Isto, por sua vez, constituía-se em uma evidência da natureza cosmológica dos SRG.

A prova final da origem cosmológica de SRG foi fornecida pelo satélite Italo-Holandês Beppo-SAX (1997-2002). Este satélite estava equipado com detectores de raios-gama (*“Gamma-Rays Bursts Monitor–SRGM”*), junto com câmeras de amplo campo, ou resolução angular (*“X-ray Wide Fields Cameras–WFCs”*), e instrumentos de campo de visada estreito (*“Narrow Field Instruments–NFIs”*). No dia 28 de fevereiro de 1997, o “WFCs” detectou com grande exatidão a posição de um SRG. Mais crucial ainda é que pela primeira vez na história das observações de SRG, foi observada uma pós-luminescência (ver Figura 2.3), na banda de raios-X do espectro do SRG 970228. Este fato foi logrado por Costa et al. (1998) [16].

Estas observações foram originalmente reportadas pelo “NFIs” após 8 horas de ocorrência do primeiro surto- γ deste evento.

A descoberta em raios-X desta pós-luminescência permitiu a determinação exata da localização do SRG com telescópios óticos, o que possibilitou medir seu rubrodesvio e confirmar a sua origem cosmológica (rubrodesvio $\neq 0$).

Os detectores como o BATSE detectam SRG a uma taxa aproximada de um por dia. Por isso, foi conveniente catalogá-los de acordo com a data em que foram detectados. Portanto, sua notação tem a seguinte forma AAMMDD. Por exemplo, o evento registrado no dia 29 de Março de 2003 é chamado **SRG030329**.

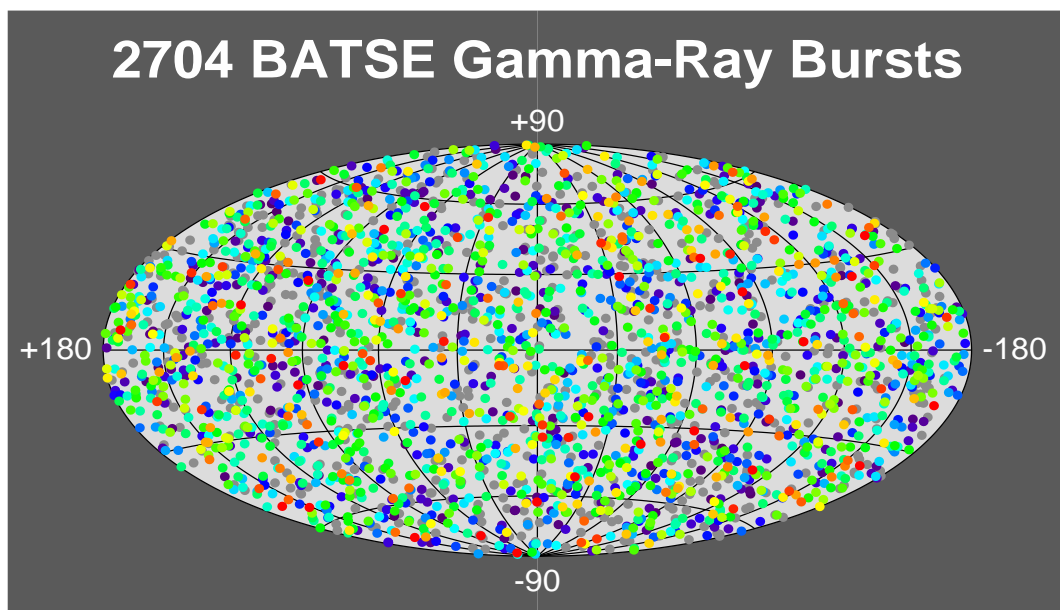
Na atualidade existem várias missões em órbita terrestre e interplanetária desenvolvidas para estudar os SRG, visando fundamentalmente desvendar sua natureza e o mecanismo (ou motor central) que os desencadeia. Alguns destes instrumentos são:

- **Konuss (1994)-:** A bordo da missão Wind permite uma cobertura contínua e omni-direcional de transientes de raios-gama.
- **Chandra** ¹(1999)-: É um dos mais sofisticados observatórios de raios-X, muito

¹<http://chandra.harvard.edu/about/axaf.mission.html>



(a) Compton-Gamma-Ray Observatory (C-GRO)



(b) Mapa da Distribuição dos SRG

Figura 2.2: Compton-Gamma-Ray Observatory (C-GRO) e o mapa em coordenadas galácticas da distribuição espacial dos SRG. Podemos ver que sua distribuição é isotrópica



Figura 2.3: Diagrama esquematizando a detecção de uma pós-luminescência com o satélite Italo-Holandês Beppo-SAX.

A determinação exata desta pós-luminescência permitiu resolver a suspeita sobre a origem cosmológica dos SRG, através de observações desde Terra que utilizaram diversos telescópios no óptico, radio, etc.

útil para a detecção de fontes tênues, isto é, emitem raios-X moles.

- **Newton XMM²(1999)**- Contém um telescópio de raios-X com uma área de detecção efetiva sem precedentes entre as gerações de instrumentos anteriores.
- **Hete II³(2000)**-: Construído especialmente para detectar e localizar SRG.
- **INTEGRAL⁴(2002)**-: É capaz de produzir um mapeamento do céu na banda de comprimentos de ondas da radiação gama mole e realizar uma análise espectral e

²<http://sci.esa.mit/science-e/www/object/index>

³<http://space.mit.edu/HETE/>

⁴<http://sci.esa.mit/science-e/www/object/index>

espacial detalhada das observações de raios-gama.

- **Swift**⁵(2004)-: É uma inovadora missão desenhada especificamente para localizar rapidamente os SRG e suas correspondentes pós-luminescências em diversos comprimentos de onda e ajudar a determinar seu rubrodesvio com grande exatidão.

2.2 Características Observacionais de SRG

2.2.1 Curva de luz: emissão rápida e estrutura geral de um SRG

“Emissão Rápida”

Basicamente, a curva de luz de um SRG é um registro da contagem do número de fótons que chegam ao detector em função do tempo. A primeira propriedade importante da curva de luz de um SRG é a emissão rápida, definida operacionalmente como o período de tempo no qual os instrumentos de raios-gama detectam o sinal acima do limite de ruído (chamada geralmente “background”) [90]. Usualmente, um SRG consiste tanto de raios gama quanto de algumas emissões de baixa energia, que acontecem subseqüentemente. Em alguns surtos, a emissão em raios-X é mais intensa do que o sinal do surto gama. Esta situação é chamada de “*X-ray flashes–XRFs*” [43].

A principal característica das curvas de luz da emissão rápida é que estas exibem uma ampla variedade de perfis temporais, tal como se aprecia na Figura 2.4.

2.2.2 Classificação dos tipos de surtos

Uma das principais grandezas medidas na curva de luz corresponde ao T_{90} , a duração para a qual a parte de maior brilho da curva de luz emite 90% da fluência [erg cm^{-2}]. Este tempo determina a mais clara classificação dos surtos, na qual os SRG podem ser distinguidos em duas classes [57]: os surtos de longa duração (chamaremos aqui de SRG longos), cujo T_{90} é maior do que 2s e os surtos de curta duração (chamaremos aqui de SRG curtos) cujo T_{90} é menor do que 2s. Também foi sugerida uma classe intermediária

⁵http://swift.sonoma.edu/about_swift/

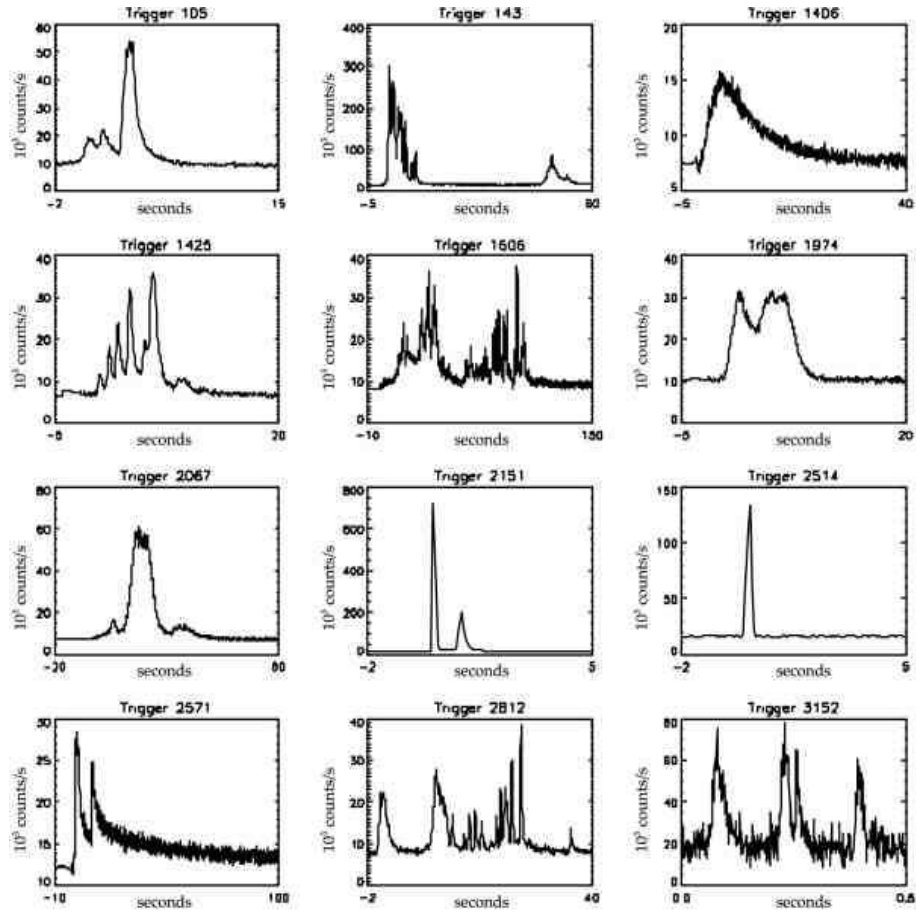


Figura 2.4: Diversos perfis temporais de SRG, observados pelo BATSE. Tomado do pre-print da Ref.[104]: astro-ph/0503476 (2005)

[46] com $2.5s < T_{90} < 7s$, porém essa terceira classificação não é estatisticamente significativa [41].

As observações da dureza típica dos SRG curtos mostraram que eles são entidades diferentes [19], assim como sua distribuição espacial é claramente diferente da distribuição espacial dos SRG longos. A Figura 2.5 mostra um histograma da duração dos SRG, observados pelo satélite “BATSE”

2.2.3 Emissão tardia ou pós-luminescência

Após a ocorrência da emissão rápida, começa uma fase de emissão tardia ou pós-luminescência. Nesta etapa, a energia total emitida corresponde a uma porcentagem (10%-50%) da ener-

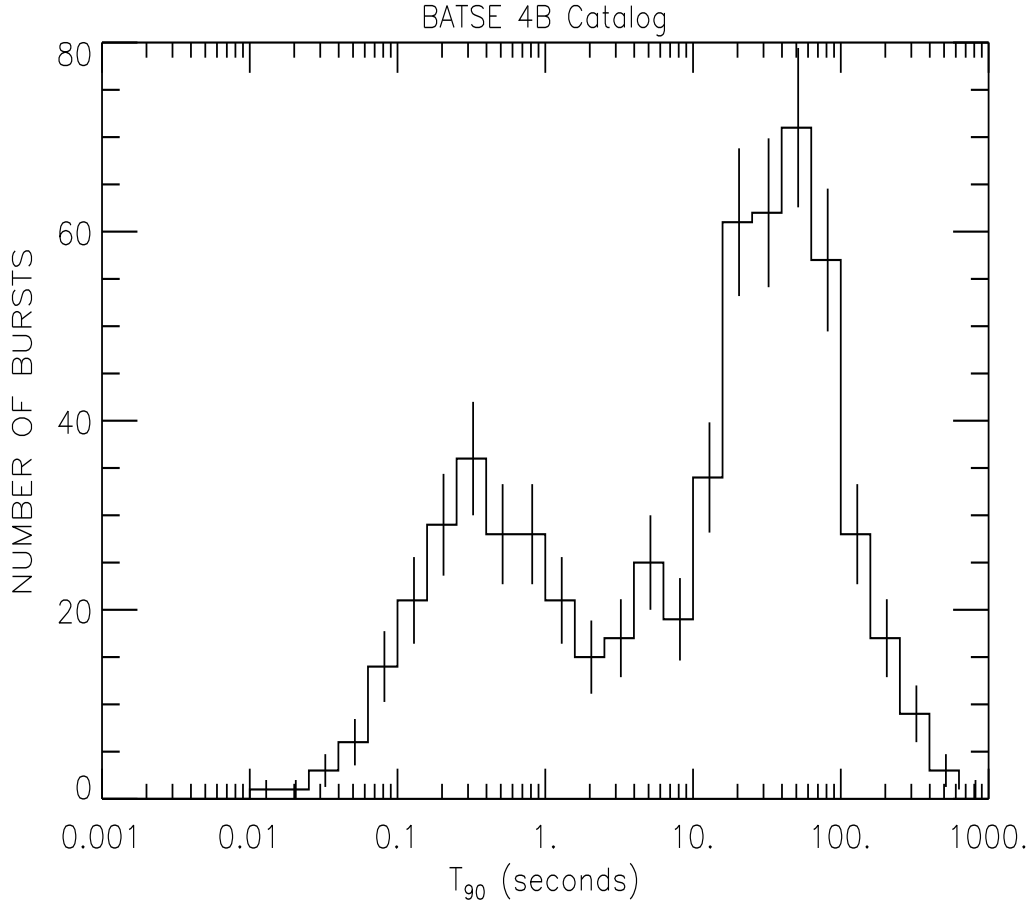


Figura 2.5: Populações de SRG definidas a partir da estrutura temporal da curva de luz. Este gráfico mostra um catálogo de duração de SRG detectados pelo “BATSE”. O parâmetro de duração usado é o T_{90} . A região correspondente a $T_{90} > 2$ determina os SRG longos, enquanto que a região correspondente a $T_{90} < 2$ determina os SRG curtos. A curva de luz usada para o cálculo do T_{90} é integrada sobre todos os 4 canais ($E > 20\text{keV}$) do BATSE.

Ver <http://www.batse.msfc.nasa.gov/batse/grb/duration/>

gia total emitida do SRG. A pós-luminescência consiste observacionalmente em emissões de radiação eletromagnética em múltiplos comprimentos de onda (raios-X, ótico, infravermelho, ondas de rádio) que ocorrem a uma distância aproximada de 10^{18} cm do progenitor do SRG.

Essas radiações emitidas definem o tipo espectral da pós-luminescência que descreveremos

a seguir.

Tipo espectral

1. **Pós-luminescência em raios-X** : É a primeira e mais forte, porém de sinal muito curto que usualmente começa muitas horas após da emissão rápida. O fluxo da pós-luminescência de raios-X tem uma relação com a frequência ν e com o tempo observado t na forma de lei de potências [91]: $f_\nu(t) \approx \nu^{-\beta} t^{-\alpha}$ com $\alpha \sim 1.4$ e $\beta \sim 0.9$. As observações mostram também que as pós-luminescências de raios-X com contraparte óptica são em média cinco vezes mais luminosas que os SRG escuros ⁶. As linhas de raios-X dessas pós-luminescências são detectadas 10 horas após o surto e são interpretadas como linhas de emissão de Fe $K\alpha$.
2. **Pós-luminescência no óptico e infra-vermelho**: Aproximadamente metade dos SRG que tiveram sua localização bem determinada mostraram pós-luminescência no óptico e infravermelho. Estes ficam em torno de 19–20 mag um dia depois do surto. Seu sinal (fluxo) decai inicialmente, seguindo uma lei de potência no tempo: $t^{-\alpha}$ com um valor típico de $\alpha \propto 1.2$, apresentando grandes flutuações ao redor desse valor. Geralmente, as linhas de absorção correspondem à absorção ao longo do caminho da fonte até a Terra. Tipicamente essas linhas de absorção a altos rubrodesvios são associadas à galáxia hospedeira, e isto fornece a medida do rubrodesvio do evento de SRG. A curva de luz no óptico da primeira pós-luminescência observada (o SRG 970228) foi visível por mais de seis meses [32]. Na maior parte dos casos, a pós-luminescência se enfraquece rapidamente e não pode ser seguido por mais do que algumas semanas. Neste estágio a pós-luminescência se torna significativamente mais fraca do que a galáxia onde ele acontece, enquanto sua curva de luz alcança um patamar correspondente à emissão da galáxia.

⁶A natureza dos SRG escuros ainda não está esclarecida. Existem três hipóteses: a primeira diz que são análogos aos SRG brilhosos com sua linha de visão altamente absorvida pela poeira molecular estelar [99]. A segunda diz que são mais distantes que os SRG com pós-luminescência óptica e rubrodesvio maior do que 5 [33, 60], tal que o “Lyman break” é deslocado para a banda óptica. A terceira diz que a pós-luminescência dos SRG escuros são mais tênues que os outros SRG.

3. **Pós-luminescência em rádio:** As pós-luminescências em rádio foram detectados em $\sim 50\%$ dos pulsos localizados. Seu espectro evolui seguindo a lei ν^2 [52]. Sua forma é determinada pela espessura óptica dos sistemas, relacionadas com auto-absorções a baixa frequência. Isto permitiu fazer estimativas do tamanho da região de emissão: por exemplo, o SRG 990528 tem uma região emissora $\sim 10^{17}$ cm. A curva de luz apresenta fortes flutuações possivelmente devido a cintilação [40]. O decaimento com o tempo das amplitudes na curva de luz pode se dever à transição entre cintilações fortes e fracas. Estas cintilações forneceram uma alternativa para estimar o tamanho da região de emissão. Por exemplo, o SRG 970508 após quatro semanas do surto teria alcançado um raio $\sim 10^{17}$ cm [28] para a região emissora.

O jato e sua colimação

No Modelo da Bolha de Fogo, muitas das curvas de luz das pós-luminescências mudam o índice típico da lei de potência ($\alpha \approx 2$) fazendo-o cair notavelmente, gerando desta maneira uma quebra monocromática (raramente é observada em diferentes bandas de energia) nas frequências ópticas e de rádio. O ajuste fenomenológico tem a forma funcional: $F_\nu(t) = f_*(t/t_*)^{-\alpha_1} \{1 - \exp[-(t/t_*)^{(\alpha_1 - \alpha_2)}](t/t_*)^{(\alpha_1 - \alpha_2)}\}$ [90].

A quebra é interpretada como uma quebra de jato ⁷ (observacionalmente, isto significa que o jato está referido à pós-luminescência em forma de cones de luz extremamente colimados, com ângulo de abertura θ) e o tempo no qual a quebra acontece (chamado geralmente de t_{jet}) é usado para estimar o ângulo θ_{jet} de abertura [100, 108].

Alternativamente, a quebra pode ser interpretada como se nós tivéssemos um jato de estrutura dependente do ângulo para ângulos de visada diferentes. A isto se chama “modelo padrão do jato” [102].

⁷O modelo da Camada de Fogo não requer da emissão colimada ou em forma de jato, e sua eventual quebra, para explicar consistentemente a fenomenologia observada nos SRG. A emissão esférica é suficiente para tal fim.

2.2.4 Espectro

Geralmente, os espectros dos SRG não são térmicos e variam fortemente de um surto para outro. Os picos de fluxo de energia ocorrem na faixa que vai dos keV aos GeV. Um excelente ajuste fenomenológico é descrito pela função de Band [3]:

$$N(\nu) = N_0 \times \begin{cases} (h\nu)^{\tilde{\alpha}} \exp(-\frac{h\nu}{E_0}) & \text{se } h\nu < (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})E_0 \\ (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}E_0)^{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}} (h\nu)^{\tilde{\beta}} \exp(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) & \text{se } h\nu > (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})E_0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são respectivamente os índices espectrais de baixa e alta energia, E_0 determina a energia de corte do espectro e $E_{\text{peak}} = (\tilde{\alpha} + 2)E_0$ determina a energia dos fótons, onde o espectro $\nu F_\nu \propto \nu^2 N(\nu)$ é mais brilhante. O parâmetro N_0 é escolhido para garantir a continuidade e se corresponder ao brilho observado do pulso.

Os brilhos reportados (pico de fluxo e fluência) são medidos sobre uma ampla variedade de filtros de banda e rubrodesvios, correspondentes a um amplo intervalo de energia no referencial de repouso do SRG. Uma forma de levar todos esses brilhos a uma base adequada é obter os brilhos bolométricos, onde o espectro medido é logo extrapolado a altas e baixas energias e finalmente integrado sobre todas as energias.

Se o pico do fluxo (P) é reportado em unidades de $\text{ergs cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, seu pico de fluxo bolométrico associado será (considerando $E = h\nu$):

$$P_{\text{bolo}} = P \frac{\int_{1/(1+z)}^{10^4/(1+z)} E N(E) dE}{\int_{E_{\text{min}}}^{E_{\text{max}}} E N(E) dE}. \quad (2.2)$$

Se o pico de fluxo é reportado em unidades de fótons $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, o pico de fluxo bolométrico será dado pela equação anterior, mas em unidades de $\text{ergs cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ no intervalo de 1 s

O conhecimento do pico bolométrico permite determinar a luminosidade isotrópica mediante a seguinte relação:

$$L = 4\pi d_L^2(z) P_{\text{bolo}}, \quad (2.3)$$

onde d_L é a distância de luminosidade do evento.

Analogamente, para a fluência observada (S) em unidades de ergs cm^{-2} , podemos calcular a fluência bolométrica como:

$$S_{\text{bolo}} = S \frac{\int_{1/(1+z)}^{10^4/(1+z)} E N(E) dE}{\int_{E_{\text{min}}}^{E_{\text{max}}} E N(E) dE}. \quad (2.4)$$

Assim, dada a fluência observada (e portanto a fluência bolométrica associada) do evento de raios-gama e o rubrodesvio do surto, podemos calcular a energia emitida nesse evento $E_{\gamma,\text{iso}}$, supondo uma emissão isotrópica, como [9]:

$$E_{\gamma,\text{iso}} = 4\pi d_L^2(z) S_{\text{bolo}} (1+z)^{-1}. \quad (2.5)$$

Justamente, as enormes fluências observadas desses eventos (10^{-7} e 10^{-5} ergs cm^{-2}) têm energias isotrópicas associadas da ordem de 10^{51} e 10^{54} ergs, o que torna os SRG os eventos observados mais energéticos de todo o universo [89].

Porém, quando o evento de SRG é emitido num jato colimado, a energia isotrópica associada a este evento de raios-gama deve ser corrigida com o fator geométrico de feixe, colimação ou radiante, $F_{\text{beam}} = (1 - \cos \theta_{\text{jet}})$:

$$E_{\gamma,\text{iso}} = 4\pi d_L^2(z) S_{\text{bolo}} F_{\text{beam}} (1+z)^{-1}. \quad (2.6)$$

Em ambos casos, se considera que a energia emitida no surto de raios-gama é $E_{\gamma} = E_{\gamma,\text{iso}}$.

Estrutura geral de um SRG

A forma da curva de luz e a posição de alguns de seus picos, são importantes para a determinação de três parâmetros muito importantes que serão de muita utilidade no Capítulo 4:

O tempo em que as curvas de luz dura e mole mudam, ou equivalentemente, a diferença de tempo em que os fótons moles chegam ao detector depois dos fótons duros determina o tempo de atraso (τ_{lag}). Norris [78] identificou o τ_{lag} como um indicador de luminosidade

usando só seis SRG com rubrodesvios obtidos opticamente para eventos detectados pelo BATSE.

As formas quebrada (discontinua) e suave da curva de luz determinam a variabilidade, V , que pode ser medida razoavelmente calculando a variância normalizada da razão da contagem de fótons (C) da curva de luz. Para isto, existem inúmeras propostas da forma funcional da variabilidade. Uma delas tem a forma [112]:

$$V = \left\langle \frac{(C - C_{\text{smooth}})^2 - \sigma_C^2}{C_{\text{smooth,max}}^2} \right\rangle \quad (2.7)$$

A característica principal da variabilidade é que a razão $\langle V/V_{\text{max}} \rangle$ fornece uma medida da distribuição espacial dos SRG. Uma distribuição galáctica implica que esse valor é meio (“0.5”) independente da função de luminosidade, mas os eventos observados pelo BATSE mostraram um desvio desse valor [68]. Isto levou a propor que os SRG são de natureza cosmológica ou extra-galáctica. Posteriormente, Fenimore e Ramirez Ruiz [26] identificaram V como um indicador de luminosidade baseados na medida de sete SRG com rubrodesvios obtidos opticamente para eventos detectados pelo BATSE.

Outra característica da curva de luz é que o tempo mais curto ao longo do qual a curva de luz aumenta numa quantidade igual à metade do fluxo máximo do pulso, ou equivalentemente, o tempo do máximo atraso entre o tempo de chegada dos fótons do centro da região visível e o tempo de chegada dos fótons das bordas da região visível. Este tempo é conhecido como o tempo mínimo de surgimento ou (τ_{RT}). Recentemente, Schaefer [112] identificou-o como indicador de luminosidade, calculando a variabilidade para uma ampla gama de curvas de luz simuladas, construídas a partir de pulsos individuais dados pelo modelo descrito por Norris [77].

2.3 Relações de Luminosidade

Tempo de Atraso e Luminosidade

Uma relação entre o Tempo de Atraso (τ_{lag}) e a Luminosidade foi proposta por Norris [78], baseando-se em uma consequência da relação teórica/empírica de Liang-Kargatis

que estabelece que a derivada temporal do E_{peak} é proporcional à luminosidade isotrópica [61]. Schaefer [111] demonstrou que a derivada temporal de E_{peak} é igual a uma constante dividida pelo tempo de atraso τ_{lag} , deduzindo portanto que $L \propto \tau_{\text{lag}}^{-1}$. Esta relação de luminosidade foi verificada por Schaeffer [109], baseado na relação predita entre $\tau_{\text{lag}} - V$ de 112 eventos SRG sem rubrodesvio determinado.

Variabilidade e Luminosidade

A relação entre a Variabilidade e Luminosidade foi proposta e confirmada por Reichart [98]. A forma desta relação entre L e V é do tipo lei de potência $L \propto V^\alpha$. Esta relação de luminosidade também foi confirmada demonstrando a existência de uma relação entre $V - E_{\text{peak}}$ com 159 SRG cujo rubrodesvio é conhecido, mais oito SRG com rubrodesvio conhecido no óptico – ambos detectados pelo BATSE [64]. A origem desta relação de luminosidade se encontra na física de colisões de jatos relativísticos [69, 55], e também foi verificada por Schaefer [109].

Energia do pico E_{peak} e Luminosidade

Esta relação de luminosidade foi proposta por Schaefer na Ref.[110] e verificada por ele mesmo em [112]. Está relacionada com a física no instante de tempo em que ocorre o máximo no espectro dos SRG e possui uma relação do tipo lei de potência: $L \propto E_{\text{peak}}^\alpha$

Energia do Pico (E_{peak}) e Energia do surto E_γ

Ghirlanda [36] verificou que a energia total emitida num SRG após corrigida pela colimação (E_γ) está fortemente correlacionada com a energia do pico E_{peak} do espectro νF_ν . A vantagem deste método é que a energia isotrópica equivalente do surto pode ser determinada com exatidão, permitindo a proposição de correções empíricas às distâncias de luminosidade de cada SRG. Este procedimento se assemelha às correções feitas às curvas de luz das Supernovas tipo Ia (SNIa), o que possibilita seu uso em estudos cosmológicos. A física desta relação de luminosidade é explicada no contexto do modelo padrão de jatos [23, 123, 97, 63], o qual implica numa relação do tipo lei de potência: $E_\gamma \propto E_{\text{peak}}^\alpha$.

Tempo Mínimo de Surgimento e Luminosidade

A relação entre o tempo mínimo de surgimento e a luminosidade, $L \propto \tau_{\text{RT}}^\alpha$, foi recentemente proposta por Schaefer [112] numa tentativa de entender o significado de variabilidade. Este autor encontrou que o tempo mínimo de surgimento das curvas de luz é a grandeza física mensurável mais importante na determinação do valor da variabilidade V . A física desta relação está conectada com a física de colisões de jatos.

2.4 Modelos de Produção

As características observacionais dos SRG mencionadas na seção anterior precisam ser interpretadas adequadamente no contexto de teorias físicas consistentes. Atualmente, as duas propostas mais aceitas são: o modelo da bolha de fogo (*fireball model*) e o modelo da camada de fogo (*fireshell model*). A seguir descreveremos cada um deles e suas respectivas implicações.

2.4.1 Modelo da Bolha de Fogo (*Fireball Model*)

O primeiro indício teórico para a necessidade de movimento relativístico em SRG surgiu a partir do problema da compactação [103], relacionado com a grande espessura ótica para criação de pares.⁸

Piran [89] propôs que a opacidade ótica fosse reduzida em um fator $\Gamma^{4+2\alpha}$, onde Γ é o fator de Lorentz do SRG (fonte emissora), α o índice espectral de alta energia. Assim, para obter uma fonte opticamente transparente, precisa-se que $\Gamma \gtrsim 100$. Isto implica movimento em regimes relativísticos, ou equivalentemente, fluxo de energia relativístico movimentando-se em direção ao observador. A forma mais simples de obter este fluxo de energia é na forma de energia cinética de partículas relativísticas.

O modelo proposto para acelerar partículas até velocidades relativísticas é chamado

⁸O espectro não-térmico dos SRG indica que suas fontes devem ser opticamente transparentes. Porém as estimativas da opacidade média dos surtos de raios-gama ultra-energéticos em processos de criação de pares e^\pm , mostraram espessuras óticas muito grandes [89], que resultam ser inconsistentes com espectros não-térmicos.

do modelo da bolha de fogo [39, 82]. O termo “bolha de fogo” refere-se, neste contexto, a um plasma opaco⁹ em expansão relativística, cujo valor de energia inicial é ordens de magnitude maior do que sua energia em repouso [89].

No modelo da bolha de fogo, o transporte de energia é feito através de partículas relativísticas que formam camadas de largura Δ . Esta energia é convertida em energia cinética de partículas relativísticas mediante dois mecanismos:

Choques internos [95]: Referem-se aos choques de múltiplas camadas que viajam a distintas velocidades as quais, ao se encontrarem, começam a esquentar a matéria nelas contida, convertendo enormes quantidades de energia cinética em movimento randômico de partículas, acrescentando a energia do processo de emissão.

Choques externos [96]: As camadas produzidas no mecanismo de choques internos começam a se aglutinar em uma simples camada que viaja em direção ao meio interstelar (MIE), formando uma onda de choque que, quando interage com ele, produz um surto remanescente que observacionalmente corresponderia à pós-luminescência.

2.4.2 Modelo da Camada de Fogo (*Fireshell Model*)

Este modelo descreve o fenômeno de um evento de SRG como um todo. Ele descreve as condições iniciais que caracterizam a dinâmica do progenitor [104] e identifica um simples mecanismo de emissão para todas as fases do SRG [105]. Igualmente, ele permite obter corretamente as curvas de luz e o espectro observados [106, 7]. Este modelo basicamente é dividido em duas fases, a primeira é conhecida como Fase de Injeção que começa com o colapso gravitacional até a formação de um buraco negro com carga elétrica e termina com a emissão do Próprio SRG (P-SRG). A segunda fase é conhecida como Fase feixe-alvo na qual observacionalmente vemos a pós-luminescência. A seguir, descreveremos cada uma das eras associadas a estas duas fases (ver Figura 2.7):

Era Zero: Esta era inicial começa com o colapso gravitacional da estrela progenitora, formando a Diadosfera. O parâmetro físico de importância é a Energia da Diadosfera E_{dya} .

⁹O plasma opaco é composto de fótons e léptons produzidos pela liberação de grandes quantidades de fótons de raios-gama, numa região compacta, através de mecanismos de criação de pares e^\pm .

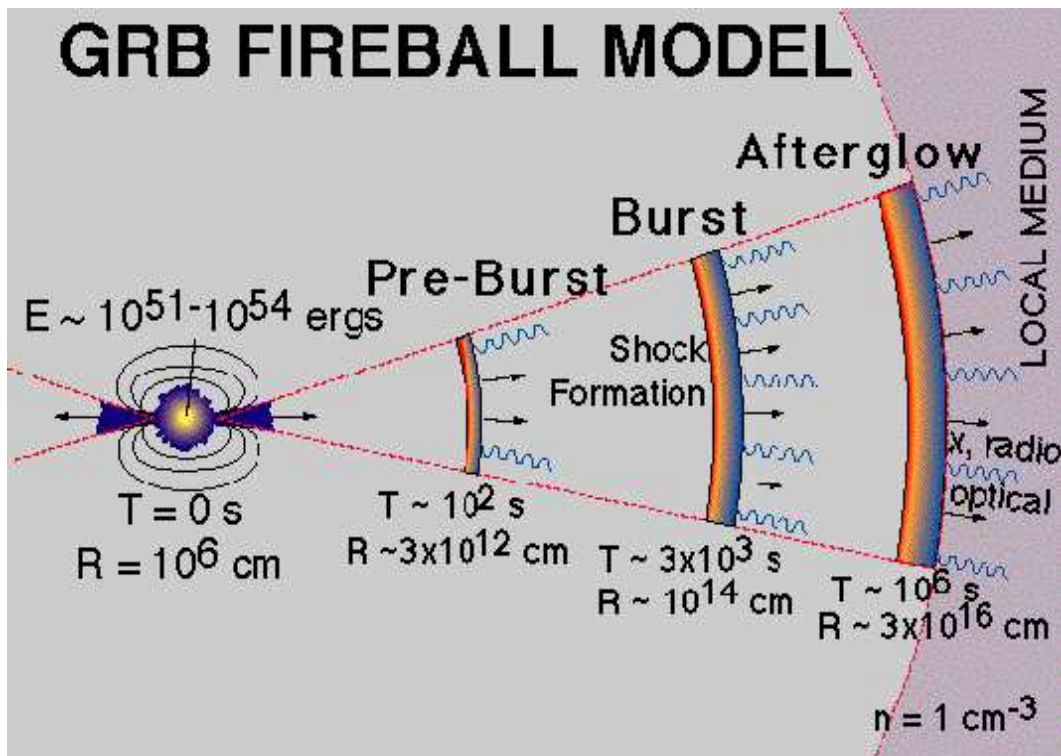


Figura 2.6: Modelo da “bolha de fogo”: Na região central se mostra o motor interno. As duas regiões subsequentes são explicadas pelo cenário de choques internos. A última região corresponde à emissão da pós-luminescência, é bem explicada pelo cenário de choques externos. <http://www.astro.livjm.ac.uk>

Primeira Era: Os pares elétron-pósitron começam a se espalhar ganhando energia cinética, afastando-se da Diadosfera em forma de um pulso eletromagnético de pares $e^+ e^-$ (PEM), que força um aumento do fator gama até atingir um valor aproximado de 100.

Segunda Era : O pulso PEM forma uma camada que começa a penetrar e empurrar a matéria bariônica remanescente da estrela progenitora após ter sofrido o colapso gravitacional. Este proceso de arrasto ou empurre de massa é expansivo e induz perda de energia cinética, o que implica uma forte redução do factor Γ . O parâmetro adimensional que mede a quantidade de matéria bariônica arrastada nesse processo é chamado de $B = \frac{M_B c^2}{E_{dya}}$.

Terceira Era: Depois do processo de empurre de matéria bariônica se desencadeia uma expansão adicional do pulso eletromagnético de bárions (P-EMB), o qual força um aumento do fator $\Gamma \simeq 10^3 - 10^4$ que passa a um regime ultra-relativístico até que finalmente permanece constante. Nesse instante se atinge a condição de transparência, seguindo automaticamente a emissão do Próprio-SRG (P-SRG).

Quarta Era: Depois da emissão do P-SRG, o pulso de matéria bariônica acelerada (MBA) em regime ultra-relativístico começa a colidir com os bárions e elétrons do medio inter-estelar (MIE), gerando um pico de emissão de pós-luminescência estendido. Esse momento é sinalizado por um decréscimo da luminosidade da fonte. Isto implica numa redução do fator Γ , passando de um regime ultra-relativístico a um regime relativístico. Justamente, esta fase da diminuição da luminosidade no modelo da camada de fogo corresponde à pós-luminescência do modelo da bolha de fogo.

Quinta Era: É uma fase de expansão continua (regime de Sedov), mas atingindo um regime não relativístico.

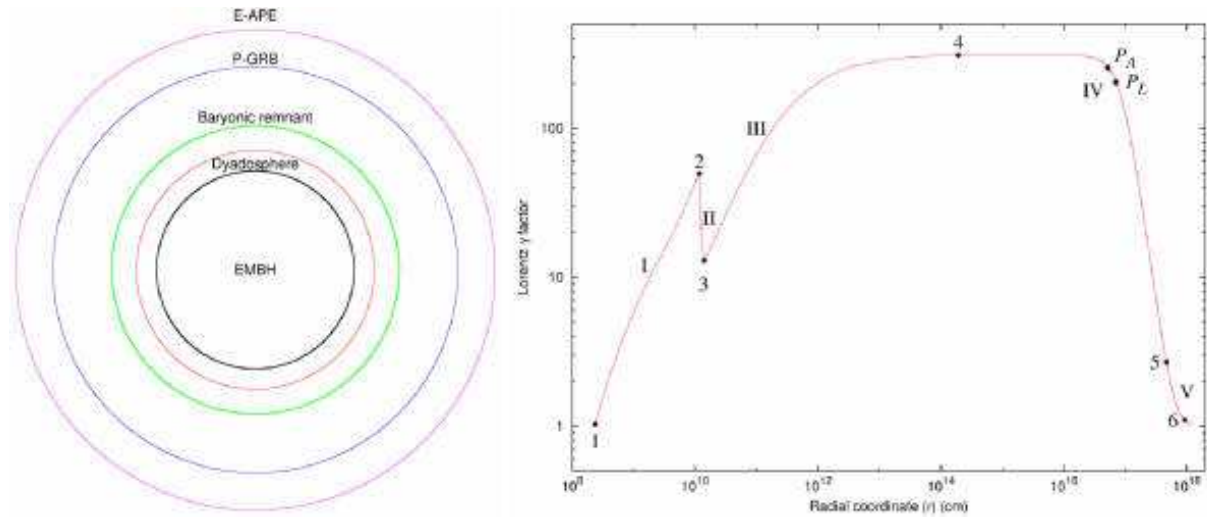


Figura 2.7: Modelo da “Camada de Fogo” : Fator de Lorentz Γ em função da Coordenada Radial para todas as eras. I: representa a expanssão livre do plasma e^\pm ; II: representa a colissão com os remanescentes bariônicos. III: Expanssão do pulso formado por $e^\pm - \gamma$ -bárions. IV: formação da pós-luminescência. V: regime não relativístico. No ponto 4 o sistema atinge a transparência. Fonte [arXiv:astro-ph/0503476]

2.4.3 Interpretação das observações

Os dois modelos descritos acima explicam a evolução de eventos de SRG, mas fornecem diferentes interpretações para suas propriedades observacionais.

Curva de Luz: emissão rápida: No modelo da bola de fogo, tanto a duração dos pulsos, quanto a separação entre eles, é determinada pelo intervalo de tempo em que as camadas são emitidas pelo motor central, tudo isto no contexto do mecanismo de choques internos. No modelo da camada de fogo, a curva de luz da emissão rápida do Fireball Model é determinada basicamente pela interação dos bárions acelerados com o MIE. Porém, cada interação é modelada como colisões inelásticas e não como choques.

Curva de Luz: pós-luminescência: No modelo da bolha de fogo, a pós-luminescência é produzido pela interação da camada relativística com o MIE (choques externos). Porém, no modelo da camada de fogo, o mecanismo de emissão da pós-luminescência é o mesmo que produz a emissão rápida, tendo como diferença principal que o factor de Lorentz é $\Gamma \simeq 10$, de tal forma que o efeito das inomogeneidades do MIE é suavizado.

Resumindo, o modelo da bolha de fogo é caracterizado por cenários de choques internos-externos [107], onde o SRG é produzido por choques internos e a pós-luminescência é produzido por choques externos. Já no modelo da camada de fogo, a emissão do SRG (emissão rápida e pós-luminescência) corresponde a um único mecanismo, agindo em fases de aceleração diferentes.

2.5 Mecanismos de produção e candidatos a Progenitores

O modelo da Bolha de Fogo, *Fireball*, pode explicar como funcionam os SRG, porém não pode responder às perguntas mais interessantes da astrofísica de SRG: Como eles se originam? Que processos astrofísicos geram fluxos ultra-relativísticos?

Vários indícios observacionais podem nos ajudar a responder estas questões:

- De acordo com o modelo das colisões internas, a escala de tempo é determinada pela atividade do motor central com $\delta t \sim 1\text{ms}$. Esta é a escala de tempo característica

de um colapso gravitacional.

- A energia total envolvida nos processos de emissão é da ordem de $\sim 10^{51}$ ergs. Esta é uma fração significativa da energia de ligação de objetos estelares compactos, sendo capaz de acelerar $\sim 10^{-5}M_{\odot}$ até alcançar velocidades relativísticas.
- Muitos dos SRG são colimados com ângulos de abertura de feixe de radiação entre $1^{\circ} < \theta < 20^{\circ}$. Isto permite colimar feixes relativísticos.
- Razão de Produção: Os SRG acontecem a uma razão de $4 \times 10^5 / \text{ano gal}$. Em média 1/3000 da taxa de produção atual de supernovas.

Esses indícios sugerem que os SRG surgem devido ao acréscimo de discos massivos ($\sim 0.1M_{\odot}$) sobre um objeto compacto, possivelmente durante a formação de um buraco negro. A curta escala de tempo requer de um objeto compacto. O Requerimento energético precisa de discos de acreção massivos, pois eles só podem se formar simultaneamente com a formação de objetos compactos. Portanto, a conclusão é que os SRG acompanham a formação de buracos negros, ou melhor: são a consequência da formação de um buraco negro (Ver Figura 2.8). Esses fatos estão corroborados pelas observações de jatos relativísticos em núcleos ativos de galaxias.

Vários cenários nos levam a sistemas de buracos negros (BN) - discos de acreção. Isto inclui o surgimento de sistemas binários de estrelas de nêutrons “EN-EN”, “EN-BN”, anã branca/BN, BN/estrelas de He e de modelos baseados em supernovas falidas, ou “collapsars”. Narayan [75] recentemente mostrou que a teoria de acreção sugere que de todos os cenários acima mencionados só colapso pode produzir SRG longos, enquanto que só o surgimento de sistemas binários “EN-EN” ou “EN-BN” produzem SRG curtos. A idéia básica é que a duração do disco de acreção depende diretamente do tamanho do disco. Por isto, os SRG curtos seriam produzidos por discos pequenos, enquanto que os SRG longos precisam de discos de acreção maiores.

2.5.1 O Modelo do Colapso

A evidência da associação dos SRG (longos) com as supernovas (Bloom & Woosley 2006) fornece um suporte firme para este modelo. Woosley [122] propôs que os SRG surgem devido ao colapso de uma estrela “*Wolf Rayet*” finalizada com uma rotação rápida.

Paczynski [84] sugeriu evidência de que SRG970228, SRG970508 e SRG970828 ocorreram próximos a regiões de formação de estrelas, e que os SRG estão associados com a morte cataclísmica de estrelas massivas. De acordo com este modelo, o caroço de Ferro das estrelas massivas (massa M maior do que $30M_{\odot}$) em rotação rápida colapsa a um buraco negro durante a fase de acreção que segue do colapso do caroço. O disco de acreção se forma ao redor do buraco negro e um funil surge ao longo do eixo de rotação, onde o material estelar tem um relativo suporte rotacional. A massa do disco de acreção está na faixa de $0.1M_{\odot}$ e o acréscimo do disco no buraco negro pode durar até dezenas de segundos. A energia pode ser obtida mediante processos de aniquilação de neutrinos [65] ou mediante o mecanismo de Blandford-Znajek. A energia depositada no meio material escapa ao longo do eixo de rotação produzindo jatos com um ângulo de abertura do feixe menor do que 10° . Esses jatos são suficientemente poderosos para penetrar no envelope estelar e produzir o SRG após atravessá-lo.

2.5.2 Modelo de surgimento de sistemas binários

O surgimento de sistemas binários de estrelas de neutrons, “EN-EN”, [22, 74] ou estrelas de neutrons-buracos negros, “EN-BN”, [83] produz um disco de acreção ao redor dos buracos negros. Estes objetos são os possíveis candidatos para o motor central dos SRG, especificamente de SRG curtos, devido às energias e às escalas de tempo envolvidas nesses processos.

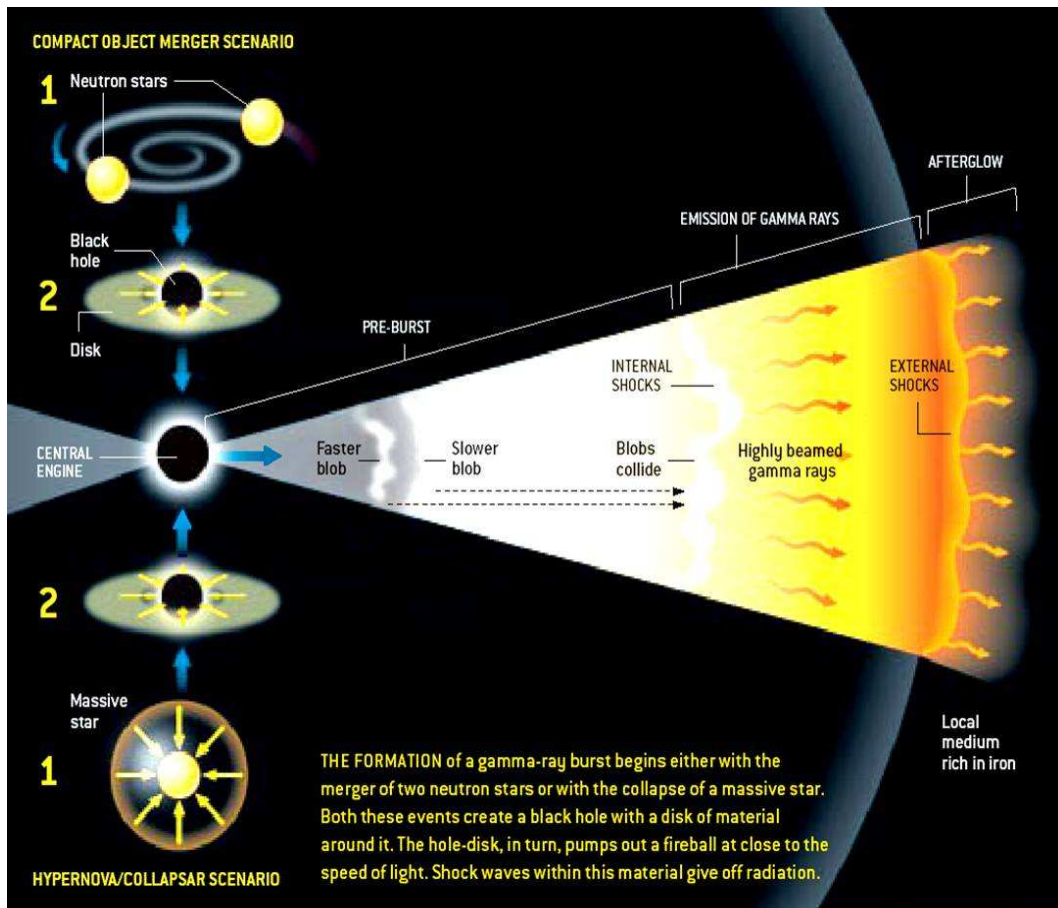


Figura 2.8: Candidatos a progenitores dos SRG : A formação de um SRG começa com o surgimento de sistemas “EN-EN” ou “EN-BN” (modelo de surgimento de sistemas binários) ou com o colapso de uma estrela massiva (O Modelo Colapsar). Ambos eventos criam um disco de acreção ao redor dos buracos negros.

Capítulo 3

Fundamentos de Cosmologia

3.1 Cosmologia Relativística

A Cosmologia é o estudo da evolução dinâmica do universo como um todo. Realmente é uma ciência jovem, pois só a começos do século XX, logo após do desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral, passou a ser considerada independente das outras áreas da física. No modelo padrão da cosmologia, a idéia central é que nosso universo se desenvolveu a partir de um estado inicial de grande densidade e temperatura, e que teve seu início num evento cataclísmico conhecido como “O Big-Bang”, ou grande explosão, há aproximadamente 15 bilhões de anos. A área da cosmologia que se ocupa do estudo desse processo global é chamada Cosmologia Relativística. A Cosmologia Relativística se fundamenta em 3 pilares: (1) o princípio cosmológico, (2) o postulado de Weyl, e (3) a Teoria Geral da Relatividade. O maior suporte observacional deste modelo provêm das observações da estrutura em grandes escalas, como a radiação cósmica de fundo. A estas escalas o Universo parece ser razoavelmente homogêneo e isotrópico.

3.1.1 Princípio Cosmológico

Este princípio estabelece que o universo é homogêneo e isotrópico a grandes escalas.¹ Portanto, o Universo pode ser descrito pelo elemento de linha de FLRW (em unidades relativística $c = 1$, e assinatura $(-, +, +, +)$)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \right), \quad (3.1)$$

onde a função $a(t)$ é conhecida como o Fator de Escala, que nos diz “quão grande” é o espaço num instante de tempo t dado. As coordenadas (t, r, θ, ϕ) usadas na Eq. (3.1) são conhecidas como coordenadas comóveis, e os observadores situados numa superfície cujas coordenadas espaciais são constantes são chamados observadores comoventes. Note que as substituições

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \frac{k}{|k|} \\ r &\rightarrow \sqrt{|k|}r \\ a(t) &\rightarrow \frac{a(t)}{\sqrt{|k|}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

deixam (3.1) invariante. Logo, o único parâmetro relevante é $k/|k|$, do qual resultam três casos de interesse: $k = -1$ que correspondente a uma superfície com curvatura constante negativa (geometria aberta). $k = 0$ que correspondente a uma superfície sem curvatura (geometria plana). $k = +1$ que correspondente a uma superfície com curvatura constante positiva (geometria fechada).

3.1.2 Postulado de Weyl e o Tensor de Momento-Energia

Em 1923, H. Weyl abordou o problema de como a Teoria Geral da Relatividade pode ser aplicada a um sistema único como o Universo. Ele propôs a hipótese da existência de observadores privilegiados que encontrariam-se em repouso em relação ao fluido cósmico.

¹Na atualidade este princípio é reforçado pelas observações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) que preserva a “memória” das propriedades do universo na última superfície de espalhamento entre matéria e radiação. Esta RCF comprova que o universo é extraordinariamente homogêneo e isotrópico.

Porém, como este último evolui, aqueles observadores, na verdade, são observadores comoventes. Esta hipótese implica que todos esses observadores vêem o Universo homogêneo e isotrópico, o que por sua vez implica que eles vêem o mesmo transcurso do tempo, o chamado tempo cósmico. Assim, o Postulado de Weyl estabelece que

As partículas que formam o substrato (fluido cósmico) do Universo evoluem no espaço-tempo sobre a congruência de geodésicas tipo-tempo que divergem a partir de um ponto no passado finito ou infinito.

Este postulado exige que as geodésicas nunca se interceptem exacto num ponto singular no passado, ou eventualmente num ponto singular no futuro. Isto significa que para uma descrição a grande escala é suficiente tratarmos o fluido cósmico como sendo perfeito. O tensor momento-energia de um fluido perfeito pode ser escrito como [13]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde ρ e p são, respectivamente, a densidade de energia e pressão isotrópica medidas no referencial de repouso. $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade do fluido.

Usualmente é mais conveniente subir um dos índices com o tensor métrico (neste caso escolhemos subir o primeiro índice), para expressá-lo da seguinte forma

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (3.4)$$

Note que seu traço é dado por

$$T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p. \quad (3.5)$$

A componente temporal dá a lei de conservação da energia, e se obtém usando as equações (B.13, B.14, B.15) como

$$\begin{aligned} 0 &= T^\mu{}_{0||\mu} = T^\mu{}_{0|\mu} + \Gamma^\mu{}_{\mu 0} T^0{}_\mu - \Gamma^\lambda{}_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda \\ 0 &= -\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho + p). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Neste ponto é preciso escolher uma equação de estado que relacione a densidade de energia e a pressão. Essencialmente, todos os fluidos perfeitos relevantes na cosmologia obedecem uma simples equação de estado $p = w \rho$, onde w é uma constante independente do tempo (em cosmologias sem energia escura). Com esta escolha, a conservação da energia toma a seguinte forma

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (3.7)$$

Integrando esta última equação obtemos

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}(t). \quad (3.8)$$

Os dois mais populares exemplos de fluidos cósmicos conhecidos são a poeira e a radiação ². A *poeira* corresponde a matéria não relativística, não interagente ($w = 0$), para qual a pressão é desprezível comparada a densidade de energia. Um exemplo típico acontece nas estrelas e nas galáxias. Neste caso a densidade de matéria evolui como $\rho = a^{-3}(t)$. Isto pode ser simplesmente interpretado como indicação de que em um Universo em expansão a densidade de partículas decresce. O Universo cujo maior conteúdo de energia corresponde à densidade de matéria é conhecido como “Universo dominado pela matéria”.

Entretanto, a *radiação* pode ser usada para descrever tanto a radiação do campo eletromagnético, quanto o movimento de partículas relativísticas massivas que se movimentam com velocidades próximas à velocidade da luz, de tal forma que não podem ser distingüidas dos fótons ($w = 1/3$). Neste caso, a densidade de energia evolui seguindo a lei $\rho = a^{-4}(t)$. O Universo cujo maior conteúdo de energia está na forma de radiação é conhecido como “Universo dominado pela radiação”.

3.1.3 A Teoria da Relatividade Geral

Após o surgimento da Teoria Geral da Relatividade (ver Apêndice A), Einstein tentou aplicá-la ao estudo do universo. Contudo, as “observações” na época sugeriam que o

²A referência [76] oferece uma revisão completa de outros exemplos de fluidos cósmicos.

Universo era estático (baseados nas medidas das velocidades das estrelas observadas na Via Láctea, as quais eram desprezíveis). As equações (A.21) não permitem soluções estáticas devido às propriedades gravitacionais da matéria. Em vista disto, Einstein propôs acrescentar às suas equações uma nova forma de densidade de energia que fosse capaz de frear o efeito da atração gravitacional para assim obter soluções estáticas. A este termo se chamou Constante Cosmológica, Λ . Desta forma, ele estabeleceu que o Universo era descrito pelas suas equações com Constante Cosmológica³.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

3.1.4 Equações de Friedmann

Usando estes três pilares fundamentais da cosmologia relativística (Ver apêndice B) obtemos

$$\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a(t)^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho \quad (3.10)$$

$$\frac{\ddot{a}^2(t) + 2a(t)\ddot{a}(t) + k}{a^2(t)} - \Lambda = -8\pi G_N p. \quad (3.11)$$

Este conjunto de equações junto com a Eq. (3.6) descrevem a dinâmica da evolução do Universo em seu conjunto.

3.1.5 Lei de Hubble e a Expansão do Universo

Um dos métodos mais usados pelos astrônomos para determinar a posição de uma galáxia, ou uma estrela, é obter seu espectro de emissão. As linhas espectrais da maioria das galáxias mostraram um deslocamento para as baixas frequências, isto é, um desvio para o vermelho, tal como mostra a Figura 3.1.

Este deslocamento para o vermelho ou rubrodesvio $-z$, é definido como

³No capítulo 22 do [20], as Equações de Einstein aparecem com o sinal negativo do lado da Constante Cosmológica porque na notação desse livro a métrica tem assinatura (+, -, -, -)

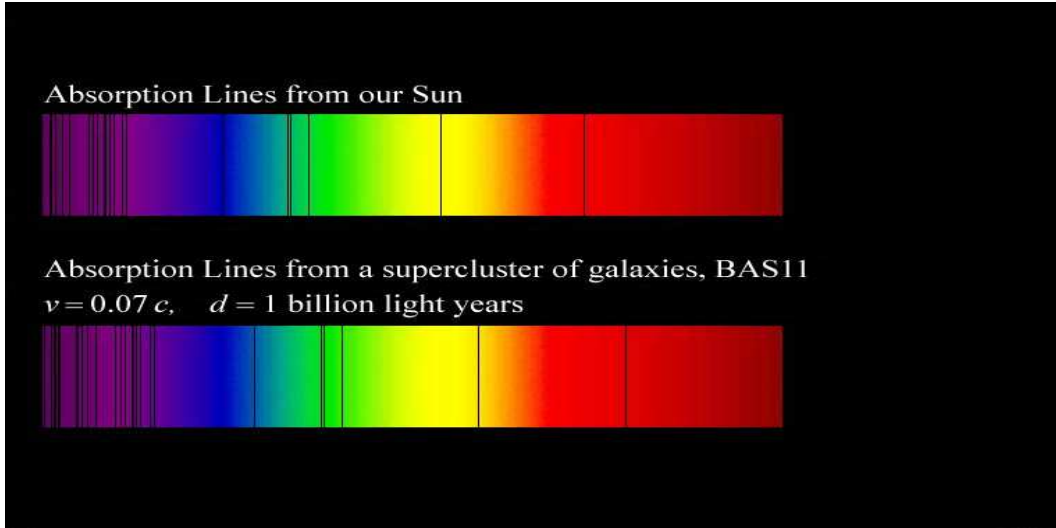


Figura 3.1: Desvio para o vermelho observado no espectro de absorção.

<http://stokes.byu.edu/redshift.html>

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (3.12)$$

onde λ é o comprimento de onda da radiação recebida na terra, e λ_0 é o comprimento de onda da radiação emitido pelos átomos da galáxia. Fisicamente, o rubrodesvio é o “deslocamento Doppler produzido pelo afastamento das galáxias distantes em relação à Terra”. Mas note que este deslocamento não é devido ao movimento próprio relativo entre as galáxias, e sim ao fato de que a separação espacial entre estas aumenta com o passar do tempo. Para velocidades baixas comparadas com a velocidade da luz, “ c ”, a variação fracional no comprimento de onda é dado pela fórmula Doppler

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}. \quad (3.13)$$

Portanto, a velocidade de recessão das galáxias em função do rubrodesvio é $v = cz$.

Usando uma idéia como esta, em 1929 o astrônomo Edwin Hubble [47], com base em observações de estrelas Cefeidas em galáxias distantes, descobriu a seguinte lei:

O desvio para o vermelho das linhas espectrais de galáxias afastadas, que é essencialmente proporcional à velocidade de recessão destas, é proporcional à distância a que estas se encontram de nós.

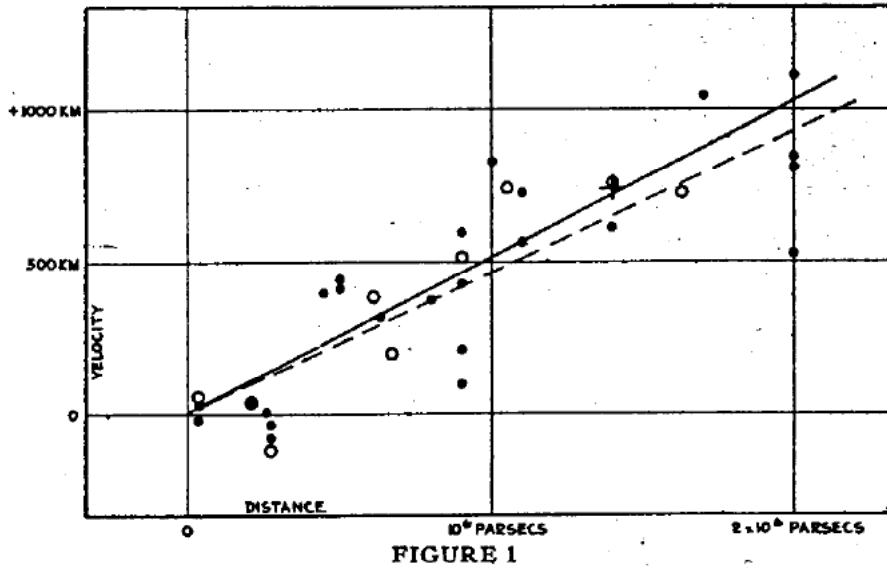


Figura 3.2: Este gráfico mostra a Lei de Hubble. Pode se verificar a dependência aproximadamente linear da velocidade de recessão das galáxias com sua distância até nós. Na época, isto sugeriu que o Universo estava se expandindo. Ver referência [47].

Disto segue-se que o diagrama mais útil para descrever a expansão do universo é o Diagrama de Hubble. Basicamente, ele consiste num gráfico da distância do objeto luminoso contra o desvio para o vermelho dele, tal que sua inclinação a um determinado rubrodesvio se corresponde com o inverso da taxa de expansão, também conhecido como o parâmetro de Hubble [86]. A grande vantagem da métrica de FLRW (Eq. (3.1)) é que ela incorpora de maneira direta a Lei de Hubble [8]. De fato, se considerarmos uma galáxia arbitrária (Ga), situada a grande distância (i. e., tal que possamos desprezar seu movimento próprio), sua distância, $r(t)$, até nós, (T), vem dada por

$$r(t) = a(t)\Delta l. \quad (3.14)$$

Aqui $\Delta l = \left[\frac{\Delta r^2}{1-kr^2} + r^2(\Delta\theta^2 + \sin^2\theta \Delta\phi^2) \right]^{1/2}$ denota a diferença entre as coordenadas de T e Ga . Naturalmente, a velocidade da recessão da Ga é dada pela derivada temporal de $r(t)$

$$v(t) \equiv \dot{r}(t) = \dot{a}(t)\Delta l, \quad (3.15)$$

e finalmente

$$v(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r(t) \equiv H(t)r(t), \quad (3.16)$$

onde $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ é chamado o parâmetro de Hubble. Ao valor deste parâmetro no tempo presente ($t = t_0$), denomina-se constante de Hubble H_0 . No contexto da cosmologia, o rubrodesvio está conectado ao fator de escala $a(t)$ mediante a seguinte relação

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (3.17)$$

onde t corresponde ao tempo de emissão da radiação num tempo passado, e t_0 corresponde ao tempo presente. Visto de uma outra forma, a distância até um objeto luminoso distante mantém uma estreita relação com o tempo ao qual a radiação foi emitida.

Como viu-se acima, a métrica de FLRW incorpora a observação fundamental de Hubble referente á proporcionalidade entre a velocidade de recessão das galáxias e suas distâncias. Então, surge uma pergunta: como medir a distância de um objeto cosmológico luminoso?

A resposta a esta questão reside simplesmente na propagação da luz em cosmologia. Para isto consideremos: (1) um objeto cosmológico luminoso emitindo uma potência total de radiação L (luminosidade absoluta) dentro de um intervalo de comprimentos de onda dado, e (2) um observador situado a uma distância d_L do objeto luminoso. Na cosmologia de um Universo estático, a potência total radiada pelo objeto luminoso distribui-se esfericamente sobre uma superfície de radio d_L . A intensidade l (luminosidade aparente) detectada pelo observador é

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (3.18)$$

A grandeza d_L é denominada “distância de luminosidade”, que no universo estático coincide com a distância comovente do objeto luminoso. Porém, num Universo em expansão, a energia radiada detectada pelo observador é reduzida, principalmente, pelo fato que os fótons distribuídos sobre a superfície esférica sofrem um deslocamento para o vermelho devido a expansão cósmica [56]. Portanto, a luminosidade aparente detectada pelo observador pode ser escrita como

$$l = \frac{L}{4\pi a(t_0)^2 r^2(z)(1+z)^2}. \quad (3.19)$$

Isto implica que num universo em expansão a distância de luminosidade d_L está relacionada com a distância comovente $r(z)$ através da lei

$$d_L(z) = a(t_0)(1+z)r(z). \quad (3.20)$$

Assim, usando: (1) a métrica de FLRW, (2) o fato que a luz se propaga numa geodésica nula, e (3) relação fator de escala com rubrodesvio, Eq. (3.17), e (4) a última equação 3.20, obtemos

$$d_L(z) = a(t_0) \frac{(1+z)}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sin}n \left[\frac{\sqrt{|k|}}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (3.21)$$

onde $\operatorname{sin}n(x) = \sin x$ se $k > 0$, $\operatorname{sin}n(x) = x$ se $k = 0$ e $\operatorname{sin}n(x) = \sinh x$ se $k < 0$. $H(z)$ é o parâmetro de Hubble em função do rubrodesvio, e $a(t_0)$ é o fator de escala no tempo presente.

3.1.6 Parâmetros cosmológicos e distância de luminosidade

Os parâmetros cosmológicos descrevem a dinâmica global do Universo, isto é, tanto sua taxa de expansão quanto sua curvatura. Além do parâmetro de Hubble, definido na seção anterior, que mede a taxa de expansão, as densidades paramétricas de energia nos dizem também a respeito da geometria do universo.

Estas densidades de energia são definidas como

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (3.22)$$

nesta definição ρ_c é conhecida como densidade crítica. A evolução dos componentes do universo ρ_i (isto é, sua dependência com o fator de escala) é determinada basicamente pela sua respectiva lei de conservação, e geralmente tem a forma de lei de potência com o fator de escala. Logo, a densidade total pode ser escrita como [76]:

$$\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_n \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_n (1+z)^n, \quad (3.23)$$

onde as densidades paramétricas Ω_n correspondem a seus valores fixos no tempo presente, permitindo-nos escrever a primeira equação de Friedmann como

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \Omega + \Omega_k (1+z)^2, \quad \Omega_k = -\frac{k}{H_0^2 a(t_0)^2}. \quad (3.24)$$

Note que no tempo presente ($t = t_0$) a última equação dá: $\Omega + \Omega_k = 1$, implicando que os parâmetros cosmológicos não são completamente independentes. Justamente a Eq.(3.24) permite-nos reescrever a distância de luminosidade (Eq.(3.21)) como

$$d_L(z) = cH_0^{-1} \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_k|}} \operatorname{sinn} \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')/H_0} \right], \quad (3.25)$$

lembrando que $\operatorname{sinn}(x) = \sin x$ se $\Omega_k < 0$, $\operatorname{sinn}(x) = x$ se $\Omega_k = 0$ e $\operatorname{sinn}(x) = \sinh x$ se $\Omega_k > 0$.

Assim, a determinação dos parâmetros cosmológicos é obtida através da comparação da distância de luminosidade predita pela teoria com a distância de luminosidade que provem das observações cosmológicas. Outros parâmetros cosmológicos de importância são: o parâmetro de desaceleração e a idade do Universo. Estes dois parâmetros, juntamente com os parâmetros cosmológicos acima referidos, serão discutidos e estimados adequadamente no capítulo 4.

3.1.7 Modelos Cosmológicos Clássicos

É possível encontrar soluções das Equações de Friedmann em varios casos simples. No entanto podemos investigar o comportamento qualitativo de varias possibilidades tais como:

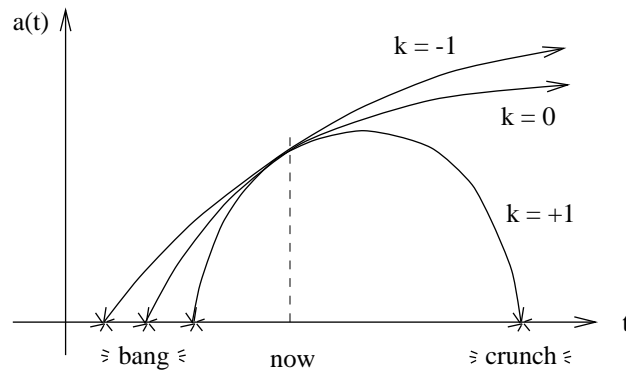
Modelos com $\Lambda = 0$

Neste caso a primeira equação de Friedmann (Eq. (3.10)) toma a seguinte forma:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{C}{a(t)} - k, \quad (3.26)$$

onde foi definido $C = \frac{8\pi G}{3}\rho a^3(t) = \text{cte}$, a singularidade em $a(t) = 0$ representa a momento da criação do universo, o *Big-Bang*. Assumindo a densidade de energia positiva, esta última equação oferece três possibilidades [20, 13]:

(a) o caso $k = 0$: chamado modelo Einstein-de Sitter que descreve um universo em eterna expansão, (b) o caso $k = -1$: que também descreve uma expansão eterna, e (c) o caso $k = +1$: no qual o universo não se expandiria indefinidamente, devido a que o fator de escala $a(t)$ atingiria um máximo valor com $\ddot{a}(t)$ negativo e depois inevitavelmente começaria a se contrair. Isto é mostrado na seguinte figura.



Modelos com $\Lambda \neq 0$

Historicamente o modelo com um valor determinado da constante cosmológica ($\Lambda = 4/(9C^2)$) e curvatura ($k = 1$) foi o primeiro modelo da cosmologia relativística que tornava o universo estático. No entanto, Λ poderia tomar qualquer valor. Assim, as soluções para valores positivos de Λ correspondem a universo em eterna expansão e todas estas soluções representam um mesmo espaço-tempo (o espaço de de Sitter). As soluções para valores negativos de Λ usualmente são chamados modelos oscilatórios. Nestes, a força cosmológica leva o universo a fases de colapso e expansão sucessivas, e representam um mesmo espaço-tempo, que é conhecido como o espaço anti-de Sitter.

Um modelo interessante, que não corresponde à cosmologia relativística, foi proposto por de Sitter em 1917, e é conhecido como o Modelo de de Sitter. Este modelo é obtido escolhendo ($\rho = p = k = 0$) nas equações de Friedmann. Por isso, ele fornece um exemplo de uma solução das equações de Einstein para um Universo vazio, porém com constante

cosmológica.

Isto posto, a pergunta que surge é: qual destes modelos cosmológicos é o mais adequado para descrever o Universo observado?

As observações de Hubble mostraram um Universo em expansão, do qual resultava claro que não era necessário introduzir a constante cosmológica, e portanto, o modelo estático de Einstein teria de ser abandonado. Foi assim que Einstein, segundo a autobiografia de Gamow, escreveu: “*This is the biggest blunder in my life*”. Posteriormente, em 1947 escreveu para Lemaître: “*Since I introduced this term I had always had a bad conscience. I am unable to believe that such an ugly thing is actually realized in nature*”.

No ano 1933, o astrofísico Fritz Zwicky aplicou o Teorema do Viral ao aglomerado de galáxias chamado *Coma*, ao comparar esta predição com o número de galáxias e brilho total do aglomerado encontrou aproximadamente 400 vezes mais brilho do que o previsto. Portanto, a gravidade das galáxias visíveis no aglomerado deveria ser pequena. Mas não era assim. Alguma coisa a mais devia estar faltando. Este problema foi conhecido como o *Problema da massa faltante*. Zwicky deduziu que deveria existir alguma forma de matéria não visível que forneceria grandes quantidades de massa e gravidade. Esta nova forma de matéria chamou-se Matéria Escura.

Posteriormente, com a planitude do Universo conforme inferida da Radiação Cósmica de Fundo, fez-se necessário propor que o modelo que melhor descreve o universo observado é o Λ Cold Dark Matter (Λ -CDM), e não aquele Standard Cold Dark Matter, que é o modelo descrito pelas equações de Friedmann considerando só matéria, isto é, $\Omega_m \approx 1$.

3.1.8 Modelos Cosmológicos Modernos

As observações das Supernovas tipo Ia (SNIa), bem como as observações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) [5], e a distribuição de galáxias a grande escala [117], indicam que o universo passa por uma fase de expansão acelerada tardia. O modelo que, acreditava-se descreveria razoavelmente bem o universo, o Standard Cold Dark Matter (SCDM) teve que ser abandonado, e deu passo ao surgimento do conceito de energia escura (EE), cujo principal efeito seria gerar a expansão acelerada. Muitos modelos baseados nesta idéia foram propostos. Porém, sua origem é desconhecida. Entre os candidatos á energia escura

estão a constante cosmológica Λ , que Einstein introduziu no ano 1917' [12, 58], um termo em que Λ que evolui com o tempo [81, 118], a teoria com campos escalares (referido por alguns como quintessência) [94, 10, 120], a energia fantasma (onde a soma da densidade de energia e pressão é negativa, levando o universo ao *Big-Rip*) [11, 18, 119], o modelo de Gás de Chaplygin [51, 6] que tem como principal característica permitir a unificação dos conceitos de energia escura e matéria escura [113, 66].

Uma vez que não temos evidências diretas da energia escura no laboratório, resulta desejável explorar alternativas motivadas pela física de partículas. Em alguns casos, isto nos leva a trabalhar em física com dimensões espaciais extras, onde o universo observável pode ser suposto como uma superfície, ou uma membrana, que é circunscrita por um espaço-tempo de dimensão maior, o *bulk*. A força gravitacional nestes modelos de espaço-tempo pode penetrar todas as dimensões enquanto que as forças restantes da natureza ficam confinadas à brana. Isto permite produzir um termo de curvatura novo que acelera o universo sem nenhuma componente de energia escura [45, 93, 21, 17]. Mas isto também implica em uma modificação das equações de Friedmann.

Capítulo 4

Cosmologia com Surtos de Raios Gama

As observações dos SRG e suas pós-luminescências podem se tornar ferramentas muito úteis na astrofísica e cosmologia contemporânea. As principais aplicações são:

Estudo do Meio Inter-Galáctico (MIG): As primeiras estrelas transformaram o universo primordial, ionizando o gás cósmico e enriquecendo-o com elementos pesados que não foram produzidos durante a núcleo-síntese primordial. Neste contexto, os SRG oferecem uma alternativa fascinante de sondar as condições físicas do MIG durante os primeiros bilhões de anos, quando as primeiras estrelas, galáxias e quasares surgiram, pois a emissão da pós-luminescência do SRG de alto rubrodesvio poderia potencialmente fornecer um diagnóstico sensível à ionização do MIG, perto do local da explosão, que dá origem ao surto de raios-gama [70, 4] e do seu enriquecimento em metais em diversas épocas [35].

Formação das Primeiras Estrelas: Um dos mais importantes objetivos da moderna cosmologia é entender como as primeiras estrelas se formaram e como elas mudaram um universo simples e homogêneo, em um universo com tal extrema complexidade. Neste contexto, o alto rubrodesvio obtido a partir da pós-luminescência do SRG oferece uma boa chance para a detecção das primeiras estrelas, chamadas também de Populações III (Pop III), pois os dados de polarização do WMAP sugerem que elas se formaram possivelmente antes do rubrodesvio $z \sim 10$ [14, 15, 114].

História da Formação Estelar: Este processo é de grande interesse para o estudo das nossas origens graças à formação de elementos pesados tais, como: o carbono, o oxigênio e o ferro, elementos fundamentais na composição de planetas rochosos e de organismos vivos que eventualmente possam vir a habitar nesses planetas. Devido à heterogênea distribuição da metalicidade no universo primordial, admite-se que diferentes mecanismos de formação estelar aconteceram simultaneamente¹. Recentes observações indicam que os SRG longos, detectados a baixo rubrodesvio e de baixa luminosidade, se originam preferencialmente em regiões de baixa metalicidade [34, 116]. Enquanto que os SRG detectados a alto rubrodesvio e com alta luminosidade, mostraram que o meio circundante a estes tem metalicidade, que em alguns casos pode ser elevada [92].

História da Expansão do Universo: Há alguns anos atrás acreditava-se que as Supernovas Tipo Ia (SNIa) eram as ferramentas astronômicas mais úteis na descrição da história de expansão do universo. A grande vantagem das SNIa é que elas podem ser consideradas velas-padrão, isto é, sua luminosidade absoluta pode ser calibrada e o mecanismo de explosão das progenitoras parece não sofrer evolução cósmica. Porém a luminosidade das SNIa é absorvida pela poeira estelar (efeito conhecido como extinção) e sua detecção a alto rubrodesvio torna-se difícil. Assim, uma alternativa natural a este problema é o uso dos SRG. Esta extraordinária possibilidade surgiu primeiramente com a descoberta da pós-luminescência do SRG 970228, e com a determinação aproximada de seu rubrodesvio [16]. Logo depois foi seguida pelo surgimento de métodos auto-consistentes, tais como a relação do Amati [2], a relação de Ghirlanda [36], a relação de Liang & Zhang [62], a relação de Firmani [27] e recentemente o método de calibração ideado por Schaefer para contornar o problema da circularidade na cosmologia com SRG [112]. Todas estas técnicas abriram o caminho para poder utilizar os SRG em testes reais na cosmologia relativística. Todas estas relações levam em conta as propriedades físicas dos SRG descritas no capítulo 2. Sua grande vantagem é permitir ‘m‘voltar no tempo” e conhecer a verdadeira história da expansão do universo, que, conforme indicado pelas últimas ob-

¹Os mecanismos principais de produção estelar são: estrelas de população III em regiões de gás altamente rarefeito (i. e., de baixa metalicidade) e estrelas de população I/II, de massa canônica imersas em bolsões previamente enriquecidos.

servações cosmológicas incluem uma possível expansão acelerada tardia. É justamente este o tema principal desta tese: avaliar a possível utilidade dos SRG em testes cosmológicos, focando-nos especificamente em um modelo alternativo à energia escura, que usa contribuições extras à densidade de energia total do universo somente oriundas da matéria. Esta idéia é conhecida como o Modelo Cardassiano.

4.1 O Modelo Cardassiano

A dinâmica do universo é governada pelas equações de Friedmann (3.10, 3.11) e pelas leis de conservação de fluidos perfeitos (3.6) (sem pressão e sem interação):

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = A\rho - \frac{k}{a^2} \quad (4.1)$$

$$\dot{\rho}_i + 3H\rho_i = 0 \Rightarrow \rho_i = \rho_{i,0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3, \quad (4.2)$$

onde $A = \frac{8\pi G_N}{3}$, o sub-índice “ i ” refere-se aos componentes do fluido ideal, $a(t)$ é o fator de escala do universo e o sub-índice “0” se refere ao tempo atual.

Utilizando idéias vindas da física com dimensões extras, Freese e Lewis [30] propuseram uma explicação da presente aceleração do universo sem invocar a constante cosmológica. Neste modelo, a equação de Friedmann fica modificada com o acréscimo de um termo não linear massivo $-B\rho_m^n$, como consequência da imersão de nosso universo como uma hipersuperfície ou brana em dimensões espaciais extras, tal que:

$$H^2 = Ag(\rho_m) = A \left[\rho_m + \left(\frac{B}{A} \right) \rho_m^n \right] - \frac{k}{a^2}. \quad (4.3)$$

O primeiro termo nesta equação exerce um domínio nas primeiras épocas do universo, mas num rubrodesvio z_{card} ambas contribuições são iguais, verificando-se que $B/A = \rho_{\text{card}}^{1-n}$, onde $\rho_{\text{card}} = \rho_m(1 + z_{\text{card}})^3$ é conhecida como a densidade de Cardassian. Um aspecto interessante é que a curvatura pode ser nula, mesmo se $\Omega_m \approx 0.3$. No caso $k = 0$ a equação de Friedmann modificada é [30, 31]:

$$H^2 = Ag(\rho_m) = A\rho_m \left[1 + \left(\frac{\rho_{\text{card}}}{\rho_m} \right)^{(1-n)} \right]. \quad (4.4)$$

Assim, em linhas gerais a função $g(\rho_m)$ é uma nova função da densidade de energia que contém somente matéria (tanto bariônica quanto escura fria) e se comporta como o termo usual nas primeiras épocas do universo, mas na época atual é capaz de induzir a expansão acelerada dominada somente por matéria a partir de um rubrodesvio z_{card} .

Equivalentemente a partir do rubrodesvio z_{card} , o valor da densidade de energia é menor do que ρ_{card} e portanto o segundo termo começa a exercer um domínio sobre o primeiro, determinando o início da *Era Cardassiana*. Este fato, juntamente com dados observacionais, permitem determinar o valor do parâmetro n . Assim, desprezando o primeiro termo, facilmente encontramos $a(t) = t^{2/3n}$. Portanto, a expansão é acelerada se $n < 2/3$. O caso em que $n = 2/3$ produz um termo na equação de Friedmann $H^2 \propto a^{-2}(t)$, semelhante com o termo de curvatura, mas neste caso é gerado pela matéria num universo com geometria plana. Esta característica tornou o modelo atrativo porque somente a matéria é suficiente para fornecer a geometria plana sugerida pela RCF. Porém esta característica do modelo cardassiano implica que a densidade crítica total² $-\rho_c$ seja modificada.

A densidade total de energia do universo, usando as equações. (4.2,4.4, 3.17) é:

$$\rho_{total}(z) = \rho_{c,old} \{ \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_x f_x(z) \}. \quad (4.5)$$

Aqui $\rho_{total}(z) = \rho_m(z) + \rho_x(z)$, $\rho_{c,old}$ é a densidade crítica no tempo atual e o sub-índice “x” refere-se ao componente equivalente à energia escura dos outros modelos. Neste caso, esse termo adicional é somente de matéria.

Para o Modelo Cardassiano, os termos da Eq. (4.5) provêm da matéria. Portanto, $\Omega_{total} = \Omega_m + \Omega_x = 1$. Assim obtemos diretamente da Eq. (4.4) no tempo presente:

$$\Omega_m = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,old}} = \frac{1}{[1 + (1 + z_{card})^{3(1-n)}]}. \quad (4.6)$$

E inversamente podemos expressar z_{card} e ρ_{card} em termos de Ω_m .

²Freese e Lewis [30] encontraram que $\rho_c = \rho_{c,old} F(n)$, onde $F(n) = [1 + (1 + z_{card})^{3(1-n)}]^{-1}$ e $\rho_{c,old} = 1.878 \times 10^{-29} h_0^2 \text{ g cm}^{-3}$ podendo ver que a densidade crítica total diminui com respecto do seu valor inicial.

$$z_{\text{card}} = [\Omega_{\text{m}}^{-1} - 1]^{1/3(1-n)} - 1 \quad (4.7)$$

$$\rho_{\text{card}} = \rho_{\text{c,old}} \Omega_{\text{m}} [\Omega_{\text{m}}^{-1} - 1]^{1/(1-n)}. \quad (4.8)$$

Finalmente a partir da Eq. (4.5), a densidade adimensional de energia escura $f_x(z)$ é:

$$f_x(z) = \frac{\rho_x(z)}{\rho_x(0)} = (1+z)^{3n}. \quad (4.9)$$

Assim, se a densidade de energia escura corresponde à constante cosmológica, encontra-se $f_x(z) = 1$, ou, equivalentemente, a $n = 0$ e $\Omega_{\text{m}} = 0.27$ para qualquer rubrodesvio z .

Com todas estas expressões, a forma explícita do parâmetro de Hubble H em função do rubrodesvio, da constante de Hubble hoje (H_0), e dos componentes de energia do universo [$H(H_0, z, \Omega_{\text{m}}, \Omega_x)$], nos permite obter a expressão para a distância de luminosidade:

$$d_L(z) = (1+z)cH_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad \text{onde : } E^2(z) = \Omega_{\text{m}}(1+z)^3 + \Omega_x f_x(z) \quad (4.10)$$

4.1.1 Diagrama de Hubble dos SRG na Cosmologia Cardassiana

Para construir o diagrama de Hubble dos SRG precisamos conhecer sua luminosidade isotrópica ou, alternativamente, sua energia total corrigida pelo fator de colimação, que aqui chamaremos de luminosidades, já que elas exibem uma dependência com a distância de luminosidade.

Usando as equações (2.3) e (2.6) podemos expressar as luminosidades numa forma mais geral, dada por:

$$\mathcal{L} = 4\pi d_L^2(z) \mathcal{B} (1+z)^{-B} = 4\pi d_L^2(z) f_{\mathcal{B}}(z), \quad (4.11)$$

onde a luminosidade do surto (\mathcal{L}) depende do brilho observado \mathcal{B} . O valor de (\mathcal{B}) pode ser o pico de fluxo bolométrico (P_{bolo}), ou a fluência bolométrica corrigida pelo fator radiante ($S_{\text{bolo}} F_{\text{beam}}$). O fator $(1+z)$, com $B = 1$, é necessário para corrigir os efeitos da dilatação temporal, no caso em que considerarmos como luminosidade a energia total corrigida pelo fator de colimação.

Porém para objetos astronômicos é habitual usar o conceito da magnitude aparente (m) para quantificar seu brilho (\mathcal{B}), definida como

$$m = -2.5 \log f_{\mathcal{B}}(z) = -2.5 \log \left(\frac{\mathcal{L}}{4\pi d_L^2(z)} \right), \quad (4.12)$$

e a magnitude absoluta (M), definida como a magnitude aparente a uma distância de luminosidade de 10pc, isto é

$$M = -2.5 \log \left(\frac{\mathcal{L}}{4\pi (d_L(z) = 10\text{pc})^2} \right). \quad (4.13)$$

Na realidade, com esta definição podemos ver a conexão entre a cosmologia e as observações astronômicas, pois a distância de luminosidade (d_L) depende da cosmologia, enquanto que a diferença entre a magnitude aparente [Eq. (4.12)] e a magnitude absoluta [Eq. (4.13)] nos fornece o módulo de distância:

$$\mu(z) = m - M = 5 \log d_L(z) + 25, \quad (4.14)$$

notemos que para esta definição do módulo de distância seja corretamente aplicada é preciso que as unidades de distância de luminosidade estejam em Mega-parsec (Mpc).

Calibração das Relações de Luminosidade: Procedimento

Conforme discutiu-se no capítulo 2, as relações de luminosidade conectam a luminosidade (\mathcal{L}) do surto com os indicadores de luminosidade, que chamaremos aqui de \mathcal{I} , mediante simples leis de potências:

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}[\mathcal{I}(1+z)]^Q C_{nor}^{-1}{}^b. \quad (4.15)$$

O Indicador de luminosidade \mathcal{I} pode ser o tempo de atraso (τ_{lag}), a variabilidade (V), a energia (E_{peak}) do espectro νF_{ν} , ou o tempo mínimo de surgimento (τ_{RT}). O termo $(1+z)^Q$ surge pelas correções feitas aos valores observados dos indicadores de luminosidade ao referencial de repouso dos SRG, devido as dilatações temporais e de rubrodesvio ($Q = -1$), associados ao evento detectado. A constante C_{nor} leva em conta as normalizações dos expoentes durante o proceso de ajuste, a qual é válida somente para o presente conjunto

de dados. Cada relação de luminosidade tem um conjunto definido de valores de \mathcal{L} , \mathcal{B} , \mathcal{I} , b , C_{nor} e um valor estimado de \mathcal{A} , os quais são fornecidos na Tabela 4.1.

Como podemos notar da equação (4.11), as relações de luminosidade dependem da cosmologia. Portanto, as recalcularemos com a distância de luminosidade que caracteriza o modelo Cardassiano, com uma escolha adequada dos parâmetros cosmológicos envolvidos. Assim, vamos considerar a densidade de matéria do universo $\Omega_m = 0.27$ com base nas medidas do WMAP [115]. O valor do parâmetro $n = 0.2$ foi tomado dos resultados do melhor ajuste, com dados observacionais da RCF [31]. O valor da constante de Hubble $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ foi tomado do Hubble Space Telescope Key Project [29]. Observe que esses valores usados são valores de referência e portanto não significam que os SRG forneçam essa informação. Isso será constatado quando fizermos a análise estatística correspondente a este modelo como função dos dados dos SRG.

A Tabela 4 de [112] ou, alternativamente, a Tabela 1 de [73] tem compilados todos os valores das luminosidades e dos indicadores de luminosidade necessários para produzir o diagrama de Hubble de 69 SRG. Nesta Tabela, a Coluna 1 fornece os 6 dígitos da identificação do evento AAMMDD; a Coluna 2 corresponde ao rubrodesvio (z) do SRG; a Coluna 3 corresponde a P_{bolo} e sua incerteza em unidades de $\text{ergs cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$; a Coluna 4 fornece os valores de S_{bolo} e suas incertezas medidas em unidades de ergs cm^{-2} ; a Coluna 5 fornece a lista do fator radiante F_{beam} e sua incerteza, a Coluna 6 fornece o tempo de atraso (τ_{lag}) para cada surto em unidades de segundos no referencial de repouso da Terra; a Coluna 7 lista a variabilidade (V) e suas incertezas; a Coluna 8 fornece a E_{peak} observada e sua incerteza; e a Coluna 9 lista o tempo mínimo de surgimento (τ_{RT}) em unidades de segundos no referencial de repouso na Terra.

4.1.2 O método de análise de regressão não linear

A regressão linear é um dos mais freqüentes procedimentos estatísticos aplicados na astronomia observacional e é usada para caracterizar quantitativamente alguma aparente correlação entre duas propriedades de uma amostra de objetos, para comparar correlações observacionais previstas por teorias astrofísicas e, a mais importante, para calibrar e quantificar as “escalas de distâncias cósmicas” necessárias para estudar a estrutura e evolução

do universo.

Historicamente os astrônomos rotineiramente aplicaram o simples método de regressão linear para todos esses propósitos:

O método dos Mínimos Quadrados Simples (MQS) das variáveis dependentes “Y” comparadas com as variáveis independentes “X” ou MQS(Y|X). No MQS(Y|X) a linha de regressão é definida como aquela que minimiza a soma dos quadrados dos residuais da variável dependente, notando que para sua aplicação precisamos que as variáveis independentes tenham sido medidas sem erro algum.

Posteriormente surgiram outras propostas concentradas na problemática da aparição do desvio intrínseco de dados dominados por erros surgidos no processo de medição. Uma dessas propostas é o uso da linha que bissecta as linhas MQS(Y|X) e sua inversa MQS(X|Y), usualmente conhecido como o método de Bissetor do MQS - o qual foi muito usado na caracterização das relações de Tully-Fisher e Faber-Jackson para estimar distâncias extragalácticas.

Com o objetivo de usar o método de regressão linear para calcular o melhor ajuste das relações de luminosidade acima referidas, linearizamos (tomamos o logaritmo) adequadamente a Eq. (4.15), levando em conta que as variáveis envolvidas foram obtidas independentemente. Porém, pelos erros associados as suas medidas, o mais recomendado seria usar o método Bissetor do MQS [48] e, sob a suposição de que esses desvios são consistentes com uma distribuição Gaussiana, usamos a lei de propagação de erros:

A incerteza $\sigma_{\bar{f}}$ de uma quantidade de interesse $f(\alpha_i)$ $i = 1, 2, \dots$ calculado a partir de medianas $\bar{\alpha}_i$ com seus respectivos desvios típicos $\sigma_{\bar{\alpha}_i}$ é dado por:

$$\sigma_{\bar{f}} = \left[\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right)^2 \sigma_{\bar{\alpha}_i}^2 \right]^{1/2}. \quad (4.16)$$

Como mencionamos acima, para linearizar as relações de luminosidade e aplicar o método de regressão linear tomamos o logaritmo da Eq. (4.15), permitindo-nos escolher:

$$Y_i = a + bX_i \quad (4.17)$$

$$Y_i = \log(\mathcal{L}) \quad (4.18)$$

$$X_i = \log[\mathcal{I}(1+z)^Q C_{nor}^{-1}] \quad (4.19)$$

$$a = \log \mathcal{A}. \quad (4.20)$$

Neste ponto, precisamos conhecer o desvio típico das variáveis a ajustar. Para isso, usamos a lei de propagação de erros nas equações (4.18) e (4.19). Assim, o desvio típico da variável “ X ” é:

$$\sigma_X = \frac{dX}{d\mathcal{I}} \sigma_{\mathcal{I}} = \frac{1}{\ln 10} \left(\frac{\sigma_{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}} \right). \quad (4.21)$$

De forma análoga, o desvio típico da variável “ Y ”, quando a luminosidade depende do P_{bolo} , é definido como:

$$\sigma_{\log \mathcal{L}} = \left(\frac{d \log \mathcal{L}}{d\mathcal{B}} \right) \sigma_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\ln 10} \left(\frac{\sigma_{P_{\text{bolo}}}}{P_{\text{bolo}}} \right), \quad (4.22)$$

e quando a luminosidade do surto é função da fluência (S_{bolo} e F_{beam}), obtemos facilmente:

$$\sigma_{\log \mathcal{L}} = \frac{1}{\ln 10} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{S_{\text{bolo}}}}{S_{\text{bolo}}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{F_{\text{beam}}}}{F_{\text{beam}}} \right)^2}. \quad (4.23)$$

Para aplicar o método Bissetor de MQS à Eq. (4.18) usou-se um programa que eu implementei em Fortran 77, que inclui a sub-rotina **Sixlin.f** [49]. Este programa nos permite obter os valores corretos da luminosidade para um respectivo indicador. Dessa maneira, a equação do melhor ajuste é:

$$\bar{Y}_i = \bar{a} + \bar{b} X_i. \quad (4.24)$$

O desvio típico associado a esta linha de melhor ajuste é obtido facilmente propagando os erros nesta equação. Portanto :

$$\sigma_{\bar{Y}_i}^2 = \sigma_{\bar{a}}^2 + (\sigma_{\bar{b}} X_i)^2 + (\bar{b} \sigma_{X_i})^2. \quad (4.25)$$

Por outro lado, devido às pequenas incertezas tanto nas luminosidades quanto em seus indicadores devemos levar em conta o erro sistemático adicional. Este erro, geralmente conhecido como σ_{sys} , é obtido de tal forma que o valor do χ^2 do ajuste produza um valor reduzido à unidade:

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_i^N \frac{(\bar{Y}_i - Y_i)^2}{\sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{\text{sys}}^2} \approx 1, \quad (4.26)$$

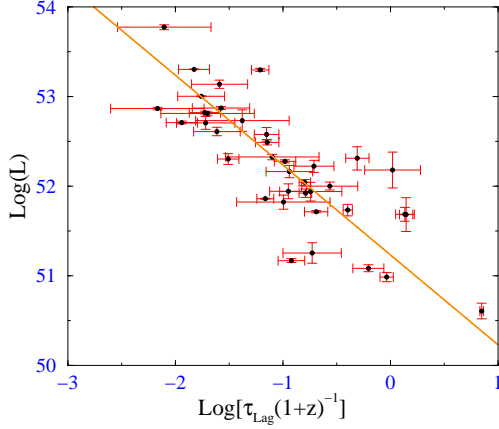
onde $\sigma_{Y_i}^2$ vem da Eq. (4.25). Assim, reescrevemos o desvio típico da correta luminosidade para cada surto como:

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sigma_a^2 + (\sigma_b X_i)^2 + (\bar{b}\sigma_{X_i})^2 + \sigma_{\text{sys}}^2. \quad (4.27)$$

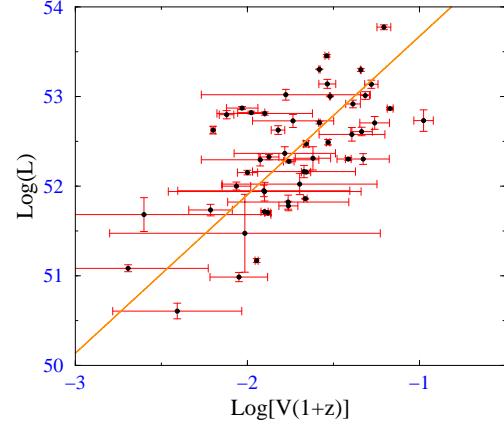
A Figura 4.1 mostra os resultados gráficos obtidos com o procedimento de calibração. Em todas as relações de luminosidade, a equação que define a linha do melhor ajuste vem dada pela equação (4.24) e seu correspondente desvio típico vem dado pela equação (4.27).

A Tabela 4.1 apresenta os resultados da calibração para cada relação de luminosidade (\bar{a} , σ_a , \bar{b} , σ_b e σ_{sys}), usando a distância de luminosidade característica do Modelo Cardassiano (com $\Omega_m = 0.27$, $n = 0.2$ e $H_0 = 72\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$). Vale a pena lembrar que estes resultados obtidos são muito parecidos com os obtidos por Schaefer em [112] para a cosmologia de concordância (modelo ΛCDM sem curvatura com a densidade de matéria $\Omega_m = 0.27$), confirmando novamente a fraca dependência da calibração com modelos cosmológicos.

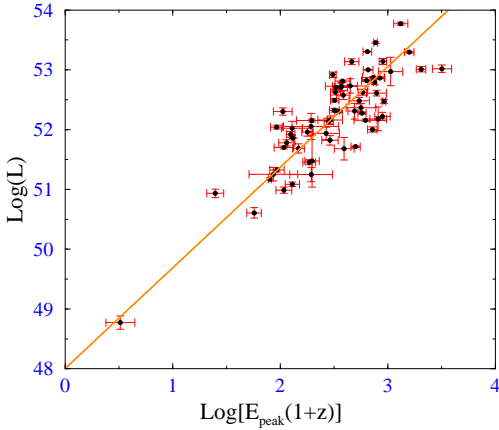
Notamos que os resultados acima obtidos não implicam que sejam válidos para as diversas cosmologias. A fundamentação deste argumento é a seguinte: se quisermos estudar as propriedades físicas dos SRG então podemos escolher uma cosmologia fiducial, por exemplo a cosmologia de concordância. Entretanto, se estamos interessados em testar cosmologias, temos que calibrar os dados com cada cosmologia devido aos efeitos dos rubrodesvios altos, onde temos distinção entre as cosmologias. Esta característica é exibida também pelas supernovas a partir de um rubrodesvio $z \sim 1$, porém, elas não precisam ser calibradas para cada cosmologia devido ao fato de elas serem velas padrão. Para um melhor entendimento dessa característica, a Figura 4.2 nos mostra uma variedade de modelos



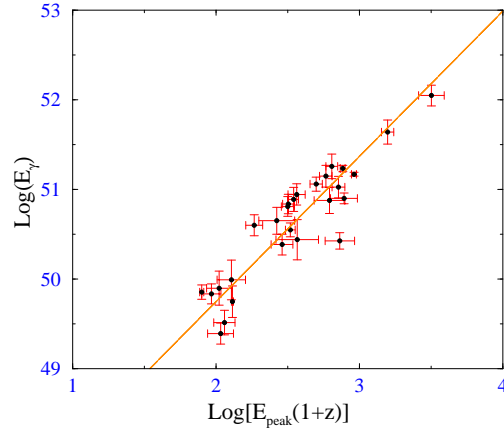
(a) Relação Tempo de Atraso-Luminosidade. O tempo de atraso (τ_{lag}) para 39 SRG foi corrigido ao referencial de repouso dos SRG e graficado contra a luminosidade isotrópica com a linha de melhor ajuste superposta (ver Eq. (4.24) e Tabela 4.1).



(b) Relação Variabilidade-Luminosidade: A variabilidade (V) foi corrigida ao referencial de repouso dos SRG e graficada contra a luminosidade isotrópica com a linha de melhor ajuste superposta (ver Eq. (4.24) e Tabela 4.1).



(c) Relação entre E_{peak} e Luminosidade. O valor da E_{peak} de 64 SRG, foi corrigida no referencial em repouso dos SRG graficada junto com a luminosidade isotrópica, também é mostrada a linha do melhor ajuste (ver Eq. 4.24 e Tabela 4.1).



(d) Relação $E_{\text{peak}}-E_{\gamma}$ mais conhecida como a Relação de Ghirlanda. O valor da E_{peak} de 27 SRG foi corrigido no referencial de repouso dos SRG e graficados contra a energia total do surto em raios- γ , anexando também a sua linha de melhor ajuste (ver Eq. 4.24 e Tabela 4.1).

Figura 4.1: Calibração das Relações de Luminosidade

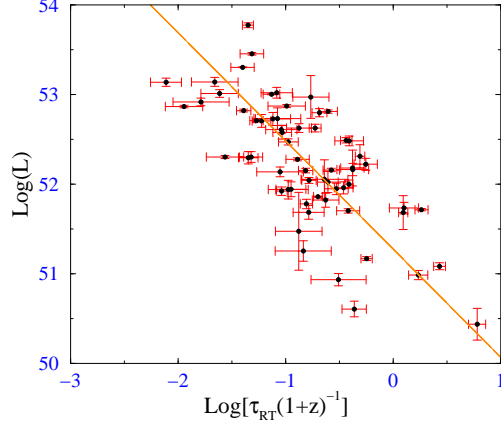


Figura 4.1: Calibração das relações de luminosidade: (e) Relação entre o tempo mínimo de surgimento τ_{RT} e luminosidade. O tempo mínimo de surgimento de 62 SRG foram corrigidos no referencial de repouso dos SRG e graficados contra a luminosidade isotrópica, juntamente com a linha de melhor ajuste (ver Eq. 4.24 e Tabela 4.1).

Relação	\mathcal{L}	\mathcal{B}	B	\mathcal{I}	Q	C_{nor}	\bar{a}	$\sigma_{\bar{a}}$	\bar{b}	$\sigma_{\bar{b}}$	σ_{sys}
$\tau_{\text{lag}} - L$	L	P_{bolo}	0	τ_{lag}	-1	0.1 s	52.23	0.07	-1.00	0.09	0.36
$V - L$	L	P_{bolo}	0	V	1	0.02	52.43	0.07	1.77	0.19	0.47
$E_{\text{peak}} - L$	L	P_{bolo}	0	E_{peak}	1	300 keV	52.18	0.05	1.68	0.10	0.40
$E_{\text{peak}} - E_{\gamma}$	$E_{\gamma, \text{iso}}$	$S_{\text{bolo}} F_{\text{beam}}$	1	E_{peak}	1	300 keV	50.52	0.05	1.62	0.10	0.21
$\tau_{\text{RT}} - L$	L	P_{bolo}	0	τ_{RT}	-1	0.1 s	52.48	0.07	-1.21	0.11	0.47

Tabela 4.1: Procedimento de Calibração; os valores de \bar{a} , $\sigma_{\bar{a}}$, \bar{b} , $\sigma_{\bar{b}}$ foram obtidos da subrotina Sixlin.f e os valores obtidos de σ_{sys} foram obtidos seguindo a definição da Eq. (4.26).

cosmológicos onde se pode apreciar claramente que a rubrodesvios altos as luminosidades são diferentes em cada cosmologia.

Módulos de Distância (calibrados) vs. rubrodesvio

Com os resultados obtidos na Seção anterior conseguimos $d_L(z)$ da Eq. (4.11) e substituímos na Eq. (4.14). Tendo em vista que $\bar{Y} = \log \mathcal{L}$, obtemos:

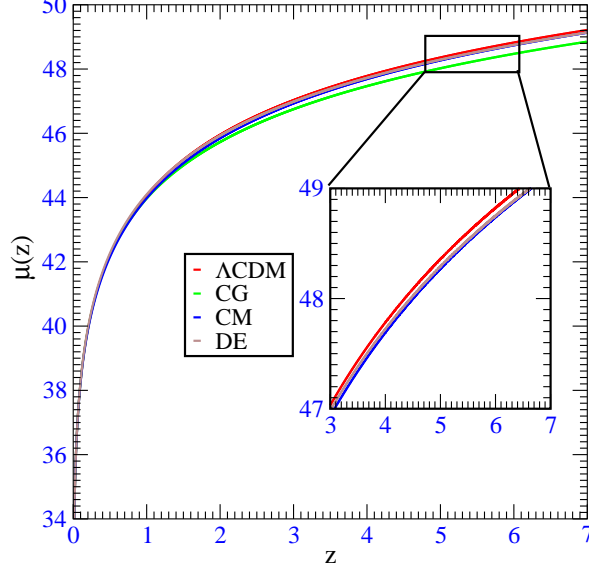


Figura 4.2: Diagrama de Hubble (Módulo de distância $-\mu(z)$ em função do rubrodesvio $-z$) para um conjunto representativo de modelos cosmológicos, a linha vermelha refere-se ao Λ CDM (universo plano com $\Omega_m = 0.27$), a linha verde ao Gás de Chaplygin [51] (universo plano com $\Omega_m = 0.05, A_s = 0.8, \alpha = 1$), a linha azul ao modelo Cardassiano ($\Omega_m = 0.27, n = 0.2$), a linha marron ao modelo de Energia Escura (universo plano com equação de estado $w = -1.31 + 1.48z$ e $\Omega_m = 0.27$). $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ foi o valor escolhido na construção desses diagramas.

$$\mu(z) = \frac{5}{2} \bar{Y} - \frac{5}{2} \log(4\pi \mathcal{B}(1+z)^{-B}) + 25. \quad (4.28)$$

As incertezas ou desvios típicos dos módulos de distância dependem do tipo da luminosidade calculada. Assim, propagando os erros na última equação, podemos escrever a expressão geral para os desvios típicos da seguinte forma:

$$\sigma_\mu = 2.5 [\sigma_{\bar{Y}}^2 + \sigma_{\log \mathcal{L}}^2]^{1/2}, \quad (4.29)$$

onde $\sigma_{\log \mathcal{L}}$ toma a forma da Eq. (4.22) quando calculamos a luminosidade em função do pico bolométrico, e toma a forma da Eq. (4.23) quando calculamos a luminosidade em função da fluência bolométrica. $\sigma_{\bar{Y}}$ segue da Eq. (4.27) aplicada à respectiva relação de luminosidade.

Assim, para cada relação de luminosidade calibrada, obtemos seu módulo de distância

associado com sua respectiva incerteza ao nível 1σ , para cada SRG. Da mesma forma que Schaefer [112], os chamaremos de $\mu_1 \pm \sigma_{\mu_1}$, $\mu_2 \pm \sigma_{\mu_2}$, $\mu_3 \pm \sigma_{\mu_3}$, $\mu_4 \pm \sigma_{\mu_4}$ e $\mu_5 \pm \sigma_{\mu_5}$, respectivamente. Logo, para calcular a melhor estimativa do módulo de distância μ para cada SRG teremos que estimar a média dos μ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ com seus respectivos pesos σ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$. Portanto, a melhor estimativa para o módulo de distância de cada SRG será:

$$\mu = \frac{1}{w} \sum_i^5 w_i \mu_i, \quad w_i = 1/\sigma_i^2 \quad \text{e} \quad w = \sum_i^5 w_i, \quad (4.30)$$

e seu desvio típico associado é: $\sigma_\mu = 1/\sqrt{w}$.

A Tabela 4.2 contém os valores do módulo de distância calculados com o procedimento de calibração para cada SRG. As Colunas (1) e (2) fornecem o evento e seu rubrodesvio. As Colunas (3) – (7) fornecem os módulos de distância $\mu_i \pm \sigma_{\mu_i}$ calculados para cada relação de luminosidade calibradas com a cosmologia representada pelo modelo cardassiano ($\Omega_m = 0.27, n = 0.2$ e $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$). A Coluna (8) fornece a melhor estimativa do módulo de distância e sua respectiva incerteza para cada SRG.

Tabela 4.2: Combinação dos Módulos de Distância

SRG	z	μ_1 (mag)	μ_2 (mag)	μ_3 (mag)	μ_4 (mag)	μ_5 (mag)	μ (mag)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
970228.....	0.70	...	42.41±1.23	42.31±1.19	...	43.29±1.20	42.67±0.70
970508.....	0.84	43.00±1.14	42.99±1.26	45.54±1.05	43.78±0.66	42.94±1.21	43.77±0.43
970828.....	0.96	...	42.85±1.21	43.96±1.05	43.47±0.66	43.14±1.24	43.43±0.47
971214.....	3.42	48.63±1.46	48.54±1.22	47.44±1.04	...	49.17±1.32	48.31±0.62
980613.....	1.10	45.75±1.35	45.75±1.35
980703.....	0.97	44.42±0.97	44.81±1.20	45.98±1.04	43.45±0.61	42.00±1.25	44.02±0.41
990123.....	1.61	43.14±0.95	44.69±1.20	45.49±1.05	45.38±0.69	...	44.78±0.46
990506.....	1.31	44.69±1.09	44.08±1.19	44.07±1.04	...	43.80±1.21	44.18±0.56
990510.....	1.62	46.45±1.02	45.11±1.19	44.13±1.03	45.38±0.60	45.53±1.20	45.34±0.41
990705.....	0.84	...	45.11±1.20	43.47±1.03	42.85±0.66	45.66±1.30	43.69±0.47
990712.....	0.43	41.75±1.07	41.41±0.69	...	41.51±0.58
991208.....	0.71	...	40.38±1.22	42.09±1.04	...	41.88±1.20	41.52±0.66
991216.....	1.02	43.43±1.01	42.38±1.19	42.61±1.04	43.53±0.68	43.19±1.23	43.16±0.43

Tabela 4.2: Combinação dos Módulos de Distância (Continuação)

SRG	z	μ_1 (mag)	μ_2 (mag)	μ_3 (mag)	μ_4 (mag)	μ_5 (mag)	μ (mag)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
000131.....	4.50	...	46.96±1.22	47.59±1.04	...	48.34±1.37	47.58±0.69
000210.....	0.85	...	40.78±1.22	43.68±1.03	...	41.81±1.21	42.28±0.66
000911.....	1.06	...	44.39±1.21	45.54±1.06	...	44.66±1.31	44.94±0.68
000926.....	2.07	...	46.12±1.22	44.13±1.03	...	47.23±1.44	45.49±0.69
010222.....	1.48	...	43.20±1.19	43.56±1.03	44.90±0.57	43.55±1.23	44.28±0.43
010921.....	0.45	42.76±1.02	40.86±2.42	43.07±1.07	...	41.06±1.26	42.34±0.62
012111.....	2.14	46.96±1.06	44.98±0.67	...	45.55±0.57
020124.....	3.20	47.73±1.18	48.37±1.28	46.14±1.07	46.39±0.67	47.22±1.23	46.88±0.44
020405.....	0.70	...	43.90±1.19	44.40±1.12	43.41±0.79	42.56±1.21	43.55±0.52
020813.....	1.25	44.31±0.97	45.19±1.19	43.91±1.04	43.90±0.64	42.86±1.21	44.01±0.41
020903.....	0.25	40.65±1.29	40.65±1.29
021004.....	2.32	46.34±1.21	46.60±2.76	46.62±1.18	45.71±0.84	47.53±1.34	46.34±0.53
021211.....	1.01	43.98±0.94	...	42.19±1.06	...	44.45±1.21	43.51±0.61
030115.....	2.50	46.48±1.09	47.25±1.78	46.42±1.14	...	45.36±1.29	46.29±0.63
030226.....	1.98	46.84±1.44	47.07±1.97	46.64±1.09	46.10±0.69	46.35±1.26	46.38±0.48
030323.....	3.37	46.74±1.58	...	47.22±1.46	47.00±1.07
030328.....	1.52	45.13±1.43	44.61±1.22	44.84±1.04	44.49±0.64	...	44.65±0.47
030329.....	0.17	41.94±0.98	41.55±1.20	39.57±1.03	38.81±0.61	40.49±1.21	39.97±0.41
030429.....	2.66	...	47.65±2.33	45.44±1.14	46.44±0.89	46.57±1.26	46.28±0.59
030528.....	0.78	42.75±1.05	44.75±2.08	44.20±1.10	...	46.08±1.26	44.19±0.62
040924.....	0.86	43.83±0.95	...	42.60±1.04	...	45.09±1.20	43.74±0.61
041006 ³	0.71	...	44.09±1.19	42.38±1.10	44.08±0.73	43.26±1.24	43.60±0.50
050126.....	1.29	45.37±0.98	46.74±1.41	45.77±1.08	...	44.69±1.27	45.57±0.57
050318.....	1.44	...	46.33±1.22	44.20±1.08	45.78±0.72	46.14±1.21	45.60±0.49
050319.....	3.24	...	46.49±1.93	48.65±1.23	48.03±1.04
050401.....	2.90	46.06±1.15	46.94±1.22	45.22±1.06	...	48.56±1.30	46.52±0.59
050406.....	2.44	48.16±1.19	...	46.41±1.43	...	48.96±1.45	47.87±0.77
050408.....	1.24	45.17±1.05	45.76±1.27	45.40±0.81
050416.....	0.65	41.38±1.12	...	45.22±1.43	42.83±0.88

³Em [112], este SRG não tem associado o τ_{lag} , segundo a Tabela 4, porém parece ter associado o τ_{lag} segundo a Tabela 8.

Tabela 4.2: Combinação dos Módulos de Distância (Continuação)

SRG	z	μ_1 (mag)	μ_2 (mag)	μ_3 (mag)	μ_4 (mag)	μ_5 (mag)	μ (mag)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
050502.....	3.79	47.26±1.46	50.00±1.30	46.89±1.27	...	47.16±1.39	47.87±0.67
050505.....	4.27	...	46.97±1.59	46.86±1.21	48.43±0.99	47.60±1.30	47.63±0.61
050525.....	0.61	44.01±0.95	44.26±1.19	41.93±1.03	43.13±0.71	43.32±1.19	43.27±0.43
050603.....	2.82	45.69±1.45	45.60±1.23	45.48±1.07	...	44.60±1.20	45.32±0.61
050802.....	1.71	...	45.74±2.52	45.34±1.25	45.42±1.12
050820.....	2.61	45.87±1.05	...	48.43±1.08	...	44.97±1.26	46.55±0.65
050824.....	0.83	43.22±1.37	43.22±1.37
050904.....	6.29	...	47.06±2.48	51.06±1.13	49.19±0.77	47.77±1.27	49.27±0.55
050908.....	3.35	46.82±1.06	...	46.91±1.23	46.86±0.80
050922.....	2.20	46.46±1.01	43.91±1.25	45.86±1.04	...	46.43±1.21	45.77±0.56
051022.....	0.80	...	43.47±1.19	44.69±1.03	43.73±0.57	43.33±1.22	43.81±0.43
051109.....	2.35	46.59±1.11	...	44.50±1.27	45.69±0.83
050922.....	1.55	44.90±0.96	44.64±1.35	43.71±1.30	44.52±0.67
060108.....	2.03	...	46.90±3.83	46.87±1.52	...	48.04±1.74	47.34±1.09
060115.....	3.53	47.34±1.04	...	48.38±1.36	47.73±0.83
060116.....	6.60	49.29±1.28	...	47.05±1.42	48.29±0.95
060124.....	2.30	46.83±1.09	47.39±1.24	46.89±1.10	46.96±0.69	46.03±1.27	46.87±0.45
060206.....	4.05	48.04±1.44	45.90±1.71	46.56±1.06	...	45.71±1.22	46.53±0.65
060210.....	3.91	47.48±1.15	45.08±1.27	47.52±1.11	49.43±0.73	46.63±1.30	47.84±0.46
060223.....	4.41	47.47±0.99	48.94±1.48	47.39±1.07	...	47.80±1.23	47.74±0.58
060418.....	1.49	44.90±0.96	45.19±1.20	45.99±1.04	...	45.24±1.23	45.33±0.54
060502.....	1.51	43.60±1.08	42.99±3.53	46.81±1.19	...	43.79±1.31	44.65±0.67
060510.....	4.90	...	48.02±1.77	48.89±1.19	48.62±0.99
060526.....	3.21	48.22±0.98	49.09±1.38	44.88±1.10	46.83±0.82	48.53±1.24	47.29±0.47
060604.....	2.68	45.16±1.01	...	46.56±1.07	...	47.98±1.28	46.36±0.64
060605.....	3.80	45.14±1.26	...	49.37±1.19	...	46.44±1.34	47.11±0.73
060607.....	3.08	45.08±1.03	47.67±1.31	47.56±1.10	...	45.35±1.25	46.33±0.58

A figura 4.3 mostra o Diagrama de Hubble para 69 SRG obtido com o procedimento de calibração simultâneo das cinco relações de luminosidade usadas nesta Tese.

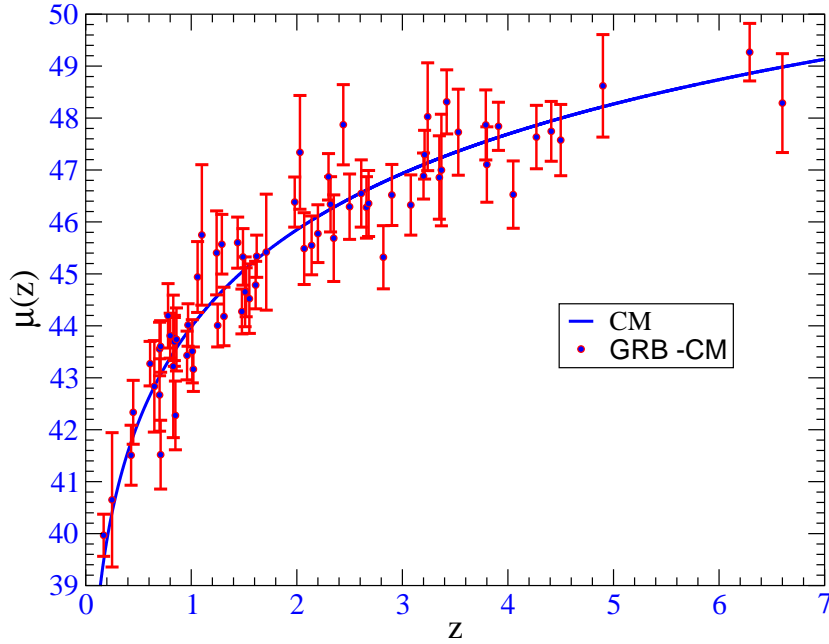


Figura 4.3: Diagrama de Hubble (Módulo de distância $-\mu(z)$ em função do Rubrodesvio $-z$) de SRG calibrados com a cosmologia Cardassiana. Claramente podemos apreciar a curva bem comportada descrita pelos SRG.

4.2 Estimativa dos Parâmetros Cosmológicos

O modelo cardassiano tem dois parâmetros cosmológicos fundamentais: a densidade de matéria do universo Ω_m e o índice n associado à densidade adimensional de energia escura (ver Eq. (4.9)), que denominaremos por $\theta_c = (\Omega_m, n)$. A estimativa dos parâmetros cosmológicos é determinada basicamente no confronto dos dados observacionais com o respectivo modelo cosmológico, através de métodos de análise estatística, permitindo-nos obter a melhor predição, usualmente chamada de “melhor ajuste”. Nesta tese, vamos considerar principalmente três tipos de dados observacionais: SRG, obtidos na seção anterior pela calibração simultânea das cinco relações de luminosidade, a RCF, determinada principalmente pelo parâmetro de deslocamento \mathcal{R} , e as Oscilações Acústicas de Bárions (OAB), determinada principalmente pelo parâmetro $\tilde{\mathcal{A}}$.

A seguir descreveremos o método da análise estatística usado para determinar os valores do melhor ajuste e a construção dos contornos de confiança, a sua aplicação ao

caso dos SRG e das outras observações cosmológicas.

4.2.1 O método da Função log-likelihood ou χ^2

Suponhamos que temos um conjunto de quantidades $A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, medidas independentemente, com uma certa função de distribuição de probabilidade (FDP) $f(x_i|\theta)$, onde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ é o conjunto de m parâmetros com valores desconhecidos. O método da função Likelihood consiste em encontrar os valores desse conjunto de parâmetros tal que maximizem a função Likelihood definida como

$$L(A|\theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i|\theta). \quad (4.31)$$

Numa forma mais simples, usualmente trabalha-se com o logaritmo da função “Likelihood”, chamada de função “log-likelihood”

$$\mathcal{L}(A|\theta) = -\ln[L(A|\theta)] = -\ln \left[\prod_{i=1}^N f(x_i|\theta) \right] = -\sum_{i=1}^N \ln f(x_i|\theta). \quad (4.32)$$

Assim, aplicando este formalismo ao caso da estimativa de parâmetros cosmológicos, supondo que os módulos de distância são independentes e possuem uma distribuição gaussiana, podemos obter a função “log-likelihood” a partir da estatística do χ^2 [101], tendo presente que $L(A|\theta) \propto e^{-\frac{\chi^2}{2}}$, onde

$$\chi^2(\theta_1, \dots, \theta_m) = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{te}(z_i, \theta_1, \dots, \theta_m) - \mu_{dat}(z_i)]^2}{\sigma_{dat}^2(z_i)}. \quad (4.33)$$

Aqui, cada dado observacional tem associado um rubrodesvio (z_i), $\mu_{dat}(z_i)$ e $\sigma_{dat}(z_i)$ correspondem ao módulo de distância e sua incerteza, respectivamente. $\mu_{te}(z_i)$ é a predição teórica do módulo de distância.

Quando estamos interessados na estimativa de dois parâmetros, digamos θ_1 e θ_2 , podemos encontrá-los, fixando ou marginalizando sobre os parâmetros indesejados. Assim, quando fixamos os parâmetros indesejados temos:

$$\chi^2(\theta_1, \theta_2) = \chi^2(\theta_1, \theta_2, \theta_{m-2}^*), \quad \theta^* \text{ são fixos.} \quad (4.34)$$

Quando marginalizamos respecto dos outros, $\theta_i \neq (\theta_1, \theta_2), i = 3, \dots, m-2$, parâmetros temos:

$$\chi^2(\theta_1, \theta_2) = -2 \ln \int \dots \int d^{m-2} \theta \exp \left(-\frac{1}{2} \chi^2(\theta) \right). \quad (4.35)$$

Um caso de especial interesse é quando consideramos o conhecimento a priori de algum parâmetro θ_s , cujo valor principal é θ_s^0 e sua respectiva incerteza é $\sigma_{\theta_s\text{-prior}}$.

Quando o parâmetro $\theta_s \in (\theta_1, \theta_2)$, seu conhecimento a priori facilmente é acrescido [37]:

$$\chi_{\text{prior}}^2(\theta_1, \theta_2) = \chi^2(\theta_1, \theta_2) + \frac{(\theta_s - \theta_s^0)^2}{\sigma_{\theta_s\text{-prior}}^2}. \quad (4.36)$$

Por outro lado, quando θ_s não é (θ_1, θ_2) a marginalização em relação a este parâmetro inclui o conhecimento a priori. Portanto

$$\chi_{\text{prior}}^2(\theta_1, \theta_2) = -2 \ln \int \dots \int d^{m-3} \theta \int d\theta_s \exp \left(-\frac{1}{2} \chi^2(\theta) \right) \pi(\theta_s). \quad (4.37)$$

Usualmente se consideram dois tipos de conhecimentos a priori: O conhecimento a priori gaussiano, que é equivalente a dizer que o parâmetro θ_s tem uma distribuição a priori gaussiana, e vem dado por

$$\pi(\theta_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_{\theta_s\text{-prior}}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2 \sigma_{\theta_s\text{-prior}}^2} (\theta_s - \theta_s^0)^2 \right], \quad (4.38)$$

e o conhecimento a priori uniforme, que é equivalente a dizer que o parâmetro θ_s tem uma distribuição prior uniforme. Neste caso $\pi(\theta_s) = 1$ num intervalo $\theta_s \in \theta_s^0 + \Delta\theta_s$ e $\pi(\theta_s) = 0$ fora desse intervalo.

Alternativamente à maximização da função “Likelihood”, podemos obter o melhor ajuste minimizando a função χ^2 em qualquer uma das suas formas. Para levar a cabo isto, implementei um programa em Fortran 77 que usa o código base MINUIT ⁴ [50].

⁴Este código base nos permite escolher até três algoritmos de minimização: algoritmo de Davidon-Fletcher, algoritmo de Nelder-Mead e algoritmo Metrópolis. Além disso, o programa realiza as análises de erro que levam em conta correlações e não-linearidades dos parâmetros. Isto é mais conhecido como análise MINOS.

Implementou-se também um código numérico que usa o comando *FindMinimum* do Software Mathematica [67], encontrando o valor mínimo da função $\chi^2(\theta_1, \dots, \theta_m)$, que chamaremos aqui de χ_{min}^2 .

A variável χ_{min}^2 é randômica no sentido que depende do conjunto de N dados usados e tem associada uma distribuição de probabilidade para $\nu = N - m$ graus de liberdade. Se $\chi^2/\nu \approx 1$, o ajuste é bom e o conjunto de dados é consistente com o modelo cosmológico em consideração. Esta distribuição de probabilidade também nos fornece os intervalos de confiança ⁵. Estes intervalos de confiança dão a medida da credibilidade de que o conjunto particular de observações gerado por um parâmetro pertençam ao intervalo estimado. As regiões (contornos) de confiança são definidas mediante a seguinte expressão

$$\chi^2(\theta_1, \theta_2) - \chi_{min}^2 \leq (\approx) \Delta \chi_{i\sigma}^2(m). \quad (4.39)$$

Onde o símbolo “ \leq ” é para as regiões de confiança e o símbolo “ \approx ” é para os contornos de confiança. O nível de confiança é determinado pelo valor de $\Delta \chi_{i\sigma}^2(m)$. Assim, para o contorno a 68% de confiança (chamado de 1σ), $\Delta \chi_{1\sigma}^2(m) = 2.3$, para dois ($m = 2$) parâmetros livres. O contorno a 95.4% de confiança (chamado de 2σ) têm $\Delta \chi_{2\sigma}^2(m) = 6.17$, para dois ($m = 2$) parâmetros livres.

Assim, para construir as regiões (ou contornos) de confiança minimizamos o χ^2 (ver Eq. (4.34), (4.35), (4.36), (4.37)); fixamos o valor de $\Delta \chi_{i\sigma}^2$ ($i = 1, 2, \dots$) na Eq. (4.39) (determinando a fronteira do i -ésimo contorno de confiança) e fazemos uso do comando *ContourPlot* do Software Mathematica.

Os contornos de confiança que obteremos a seguir mantêm a seguinte estrutura: As regiões coloridas amarela, laranja e vermelha, limitadas por linhas contínuas ou traçadas, representam as regiões de confiança 1σ , 2σ e 3σ , respectivamente. O ponto azul ($\Omega_m = 0.27, n = 0$) corresponde à constante cosmológica, incluído com o objetivo de verificar a concordância entre o conjunto de dados, o modelo Cardassiano e o Modelo Λ CDM. Incluiu-se também a linha azul ($q_0 = 0$, onde q_0 é o parâmetro de desaceleração no tempo

⁵No sentido estatístico, um intervalo de confiança dá a medida da probabilidade de que o verdadeiro valor dos parâmetros desconhecidos esteja dentro do intervalo estimado, na procura integral por tal parâmetro

atual) para distingüir os pontos do espaço de parâmetros favoráveis ou não favoráveis à expansão acelerada do universo.

4.2.2 Vínculos cosmológicos com SRG

A seguir discutiremos a aplicação do método de análise estatística aos SRG. A função χ^2 depende dos parâmetros essenciais do modelo cardassiano θ_c e de 6 parâmetros indesejados⁶ : a constante de Hubble (H_0) e as cinco inclinações que vêm da análise de regressão $b_i, i = 1, \dots, 5$. Portanto a função χ^2 é dada pela Eq. (4.33)

$$\chi^2(\theta_c, H_0, b_1, \dots, b_5) = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{te}(z_i, \theta_c, H_0) - \mu_{dat}(z_i, b_1, \dots, b_5)]^2}{\sigma_{dat}^2(z_i)}. \quad (4.40)$$

Então, a função χ^2 no espaço de parâmetros (θ_c, H_0) é obtida marginalizando em relação às cinco inclinações. No entanto, uma aproximação razoável que se considerou nesta Tese, toma em conta a posição dos SRG no diagrama de Hubble, que independe da cosmologia usada na calibração num intervalo razoável de parâmetros cosmológicos [112, 72]. Com base nisso fixamos os valores das inclinações no valor obtido na análise de regressão. Portanto, a função χ^2 será:

$$\chi^2(\theta_c, H_0) = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{te}(z_i, \theta_c, H_0) - \mu_{dat}(z_i)]^2}{\sigma_{dat}^2(z_i)}, \quad (4.41)$$

onde $\mu_{dat}(z_i)$ e $\sigma_{dat}(z_i)$ correspondem, para cada SRG, ao valor do módulo de distância e sua incerteza respectivamente, obtidos mediante o procedimento de calibração (ver Eq. 4.30 e coluna 8 da Tabela 4.2). A seguir, para a construção dos contornos de confiança no espaço de parâmetros (Ω_m, n) , vamos considerar dois casos:

Conhecimento exato de H_0 : Neste caso, fixamos $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [29]. O procedimento de minimização implicou o uso da Eq. (4.34) com a expressão do χ^2 da Eq. (4.41), encontrando $\chi_{\min}^2 = 70.88$ ($\chi_{\text{dof}}^2 = 1.06$). Os valores do melhor ajuste correspondem a $\theta_c = (0.45, -0.7)$. Adicionalmente, considerou-se o conhecimento a priori da densidade

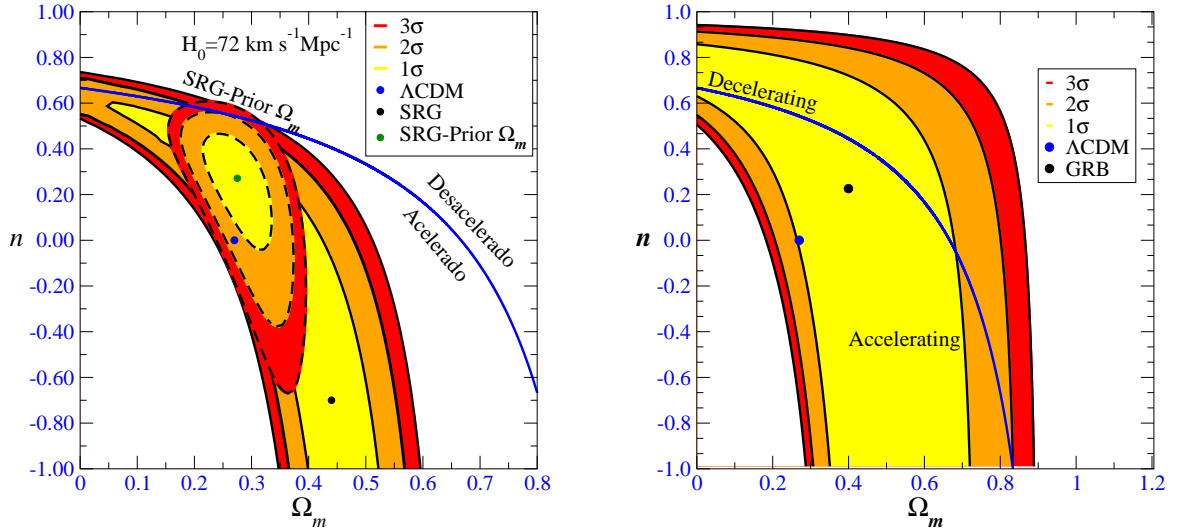
⁶Em [112], para o modelo Λ CDM, Schaefer considera 10 parâmetros indesejados (ele deixa fixo o valor de H_0), as 5 inclinações (b) e os 5 interceptos (a). Porém guardam uma relação linear directa [48] ($a = \bar{Y} - b\bar{X}$)

de matéria do universo, $\Omega_m = 0.27 \pm 0.04$ [115]; o procedimento de minimização implicou o uso das Equações (4.36) e (4.41). Os valores do melhor ajuste correspondem a $\theta_c = (0.275, 0.271)$. Os contornos de confiança são mostrados na Figura 4.4(a). Estes resultados mostram que os SRG não excluem a constante cosmológica (Λ cai no nível 2σ) e apoiam fortemente a fase da expansão acelerada tardia do universo.

Conhecimento Prior Gaussiano de H_0 : O procedimento de minimização foi desenvolvido usando a Eq. (4.37), usando $\theta_s = H_0$ e a expressão de χ^2 sendo dado pela Eq. (4.41). Neste caso, o valor do χ_{\min}^2 é 73.28 ($\chi_{\text{dof}}^2 = 1.09$). Os valores do melhor ajuste são $\theta_c = (0.399, 0.226)$ e este resultado está em concordância com o primeiro valor estimado de Ω_m por Schaefer[112] para o modelo Λ CDM. Os contornos de confiança são mostrados nas Figuras 4.4(b), 4.5, 4.6(a), 4.6(b). Baseados nestes resultados gráficos, os SRG são consistentes com a constante cosmológica em 1σ . Também são consistentes com a expansão acelerada do universo. No entanto a fase de expansão desacelerada é favorecida nos três níveis de confiança, o que está em concordância com o fato que o universo teve uma transição de desaceleração para aceleração.

4.2.3 Vínculos com outras observações cosmológicas

Uma característica importante no espectro de potência das anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) corresponde aos picos acústicos. Estes picos acústicos aconteceram devido a perturbações cósmicas que excitaram ondas sônicas no plasma relativístico do universo primordial [85, 44]. A importância destes picos acústicos, tanto na sua localização quanto as suas oscilações, é que eles podem ser usados para impor vínculos sobre parâmetros cosmológicos e energia escura. Neste contexto, consideraremos duas grandezas observacionais muito importantes na determinação desses picos acústicos: O parâmetro de deslocamento e as oscilações acústicas de bárions. A seguir descreveremos cada um deles.



(a) Contornos de confiança para o espaço de parâmetros $\Omega_m - n$: as regiões limitadas pelas linhas contínuas correspondem aos contornos de confiança para H_0 fixo. O ponto valor de melhor ajuste é o ponto preto (0.448, -0.701). As regiões limitadas pelas linhas traçadas correspondem aos contornos de confiança para o caso H_0 fixo e conhecimento a priori de Ω_m . O ponto verde (0.275, 0.271) correspondente ao melhor ajuste. A constante cosmológica em ambos casos cai no nível 2σ , e a linha da cor azul corresponde à linha $q_0 = 0$.

(b) Contornos de confiança para o espaço de parâmetros $\Omega_m - n$: As regiões, limitadas pelas linhas contínuas, das cores amarela, laranja e vermelha correspondem aos níveis 1σ , 2σ e 3σ , respectivamente. No caso em que assumimos um conhecimento a priori gaussiano da constante de Hubble H_0 . O ponto preto (0.399, 0.226) correspondente ao melhor ajuste. O ponto da cor azul corresponde à constante cosmológica, e a linha da cor azul corresponde à linha $q_0 = 0$.

Figura 4.4: Contornos de Confiança obtidos com os SRG

Parâmetro de deslocamento “ \mathcal{R} ”

O parâmetro de deslocamento -“ \mathcal{R} ”- é uma grandeza relacionada com a posição do primeiro pico acústico no espectro de potências das anisotropias da RCF. Ele é uma quantidade muitas vezes usada em testes simples de modelos de energia escura. No entanto, o parâmetro de deslocamento não é diretamente mensurável a partir dos dados da RCF e seu valor é usualmente obtido supondo uma cosmologia especialmente plana com matéria escura e constante cosmológica. Geralmente é definido em termos da distância de luminosidade livre $D_L = H_0 d_L$, se d_L é a distância de luminosidade, [79]

$$\mathcal{R} = \sqrt{\Omega_m} \frac{D_L(z_r)}{1 + z_r} = \sqrt{\Omega_m} \int_0^{z_r} \frac{dz}{E(z)}, \quad (4.42)$$

onde $E(z)$ vêm da Eq.(4.10) e $z_r=1089$ é o rubrodesvio da era da recombinação. A partir dos resultados dos 3 anos da WMAP, Wang e Mukherjee fizeram uma estimativa, obtendo $\mathcal{R}=1.70$ com incerteza $\sigma_{\mathcal{R}} = 0.03$ [121]. O valor do χ^2 associado a este parâmetro e supondo uma distribuição gaussiana é:

$$\chi_{\mathcal{R}}^2 = \frac{(\mathcal{R} - 1.70)^2}{\sigma_{\mathcal{R}}^2}. \quad (4.43)$$

Para combinar estes dados cosmológicos com os dados dos SRG simplesmente somamos os χ^2 , segundo a equação (4.36). Portanto:

$$\chi_{SRG+\mathcal{R}}^2 = \chi^2(\theta_c) + \chi_{\mathcal{R}}^2(\theta_c). \quad (4.44)$$

A minimização deste χ^2 nos permitiu obter $\chi_{\min}^2 = 73.29$ ($\chi_{\text{dof}}^2 = 1.09$). O ponto correspondente ao melhor ajuste é $\theta_c = (0.351, 0.399)$. Os contornos de confiança são mostrados na Figura 4.5. Claramente nessa figura, a redução do tamanho do contorno ao longo do eixo vertical é sinal dos fortes vínculos que impõe a escala acústica na RCF sobre o conteúdo de energia escura do universo.

Oscilações Acústicas de Bárions: Parâmetro “ $\tilde{\mathcal{A}}$ ”

Devido ao fato que o universo contém uma fração de bárions as oscilações acústicas no plasma relativístico teriam deixado sua impressão no espectro tardio da matéria não-

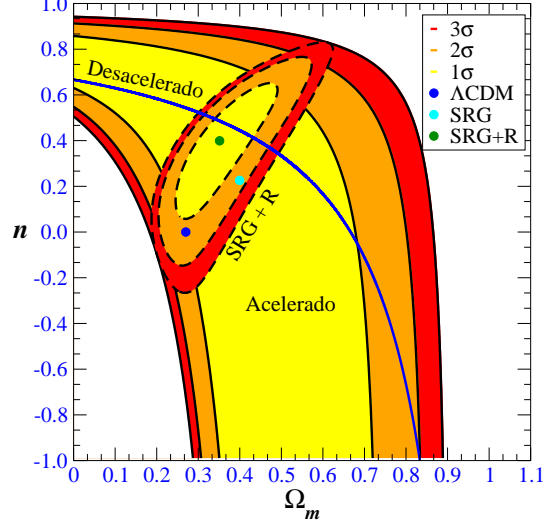


Figura 4.5: Contornos de confiança para o espaço de parâmetros $\Omega_m - n$ com $\text{SRG}+\mathcal{R}$: As regiões limitadas pelas linhas contínuas (ver Figura 4.4(b)) têm o ponto “cyan” (0.399, 0.226) correspondente ao melhor ajuste. As regiões limitadas pelas linhas traçadas correspondem aos vínculos obtidos a partir das observações de SRG com a RCF. O ponto da cor azul corresponde à constante cosmológica (que cai no nível 2σ), e a linha da cor azul corresponde à linha $q_0 = 0$.

relativística [85, 24]. O sinal acústico na aglomeração de galáxias a grande escala pode ser usado para impor vínculos sobre os parâmetros cosmológicos tais como a matéria escura. A detecção do pico na função de correlação de galáxias vermelhas luminosas é caracterizado pelo parâmetro $\tilde{\mathcal{A}}$ (genérico para o caso plano):

$$\tilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\Omega_m} \left[\frac{1}{z_1 E^{1/2}(z_1)} \int_0^{z_1} \frac{dz'}{E(z')} \right]^{2/3}, \quad (4.45)$$

onde $z_1 = 0.35$ é o rubrodesvio ao qual os picos acústicos na correlação da galáxias foram medidos. Eisenstein [25], a partir das medições do “Sloan Digital Sky Survey” SDSS, obteve 0.469 como valor medido do parâmetro $\tilde{\mathcal{A}}$ com uma incerteza $\sigma_{\mathcal{A}} = 0.017$. O vínculo associado as OAB é:

$$\chi_{\mathcal{A}}^2 = \frac{(\mathcal{A} - 0.469)^2}{\sigma_{\mathcal{A}}^2}. \quad (4.46)$$

De forma análoga à combinação dos SRG com o parâmetro \mathcal{R} , a estimativa dos parâmetros cosmológicos é obtida somando os χ^2 . Portanto:

$$\chi_{SRG+\mathcal{A}}^2 = \chi^2(\theta_c) + \chi_{\mathcal{A}}^2(\theta_c). \quad (4.47)$$

Neste caso encontramos $\chi_{\min}^2 = 73.30$, ($\chi_{\text{dof}}^2 = 1.09$). O ponto do melhor ajuste no espaço de parâmetros $\Omega_m - n$ é $(0.328, 0.452)$ e os contornos de confiança são mostrados na Figura 4.6(a). Esta combinação de dados é consistente com a constante cosmológica em 1σ ; com os períodos de aceleração e desaceleração do universo. A redução do tamanho do contorno ao longo do eixo horizontal é a assinatura do vínculo que impõe estas oscilações acústicas sobre o conteúdo de matéria escura.

SRG mais RCF e OAB

Finalmente consideraremos a combinação dessas três observações cosmológicas. O χ^2 vem dado pela seguinte expressão:

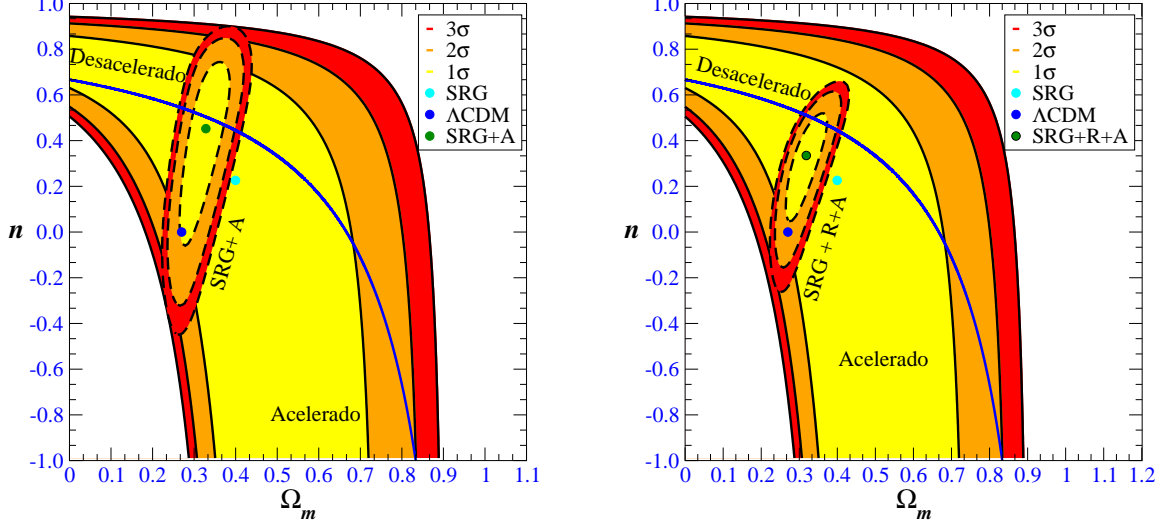
$$\chi_{SRG+\mathcal{R}+\mathcal{A}}^2 = \chi^2(\theta_c) + \chi_{\mathcal{R}}^2(\theta_c) + \chi_{\mathcal{A}}^2(\theta_c). \quad (4.48)$$

Neste caso $\chi_{\min}^2 = 73.50$ ($\chi_{\text{dof}}^2 = 1.10$). O ponto do melhor ajuste no espaço de parâmetros $\Omega_m - n$ é $(0.318, 0.335)$. E finalmente os contornos de confiança são mostrados na Figura 4.6(b). Claramente podemos ver que a redução do tamanho dos contornos de confiança é sinal de que o conteúdo total de energia do universo é limitado.

A Tabela 4.3 resume os resultados obtidos considerando os vínculos a partir dos dados dos SRG e os vínculos a partir dos SRG com as outras observações cosmológicas. Estes resultados serão úteis na próxima seção.

³ Aqui nos referimos como prior aos parâmetros livres com distribuição a priori gaussiana. Os resultados mostrados aqui, são aproximados para duas casas decimais.

⁴ Os erros dos parâmetros dados entre colchetes foram fornecidos pela análise MINOS do código base MINUIT, correspondentes a uma desviação padrão (1σ). Quando o valor mostrado é zero, significa que o MINOS não pode determiná-los, e conseqüentemente, os contornos de confiança não são limitados, tal como pode ser visto na Figura 4.4(b).



(a) Contornos de confiança para o espaço de parâmetros $\Omega_m - n$ com SRG+A: As regiões limitadas com linhas contínuas (ver Figura 4.4(b)) têm o ponto “cyan” (0.399, 0.226) correspondente ao melhor ajuste. As regiões limitadas por linhas traçadas correspondem as observações dos SRG mais as OAB, com o ponto verde (0.351, 0.399) correspondente ao melhor ajuste. O ponto da cor azul corresponde à constante cosmológica, que em ambos casos cai no nível 1σ . A linha da cor azul corresponde à linha $q_0 = 0$.

(b) Contornos de confiança para o espaço de parâmetros $\Omega_m - n$ com SRG+R+A: As regiões limitadas pelas linhas contínuas (ver Figura 4.4(b)) têm o ponto “cyan” (0.399, 0.226) correspondente ao melhor ajuste. As regiões limitadas pelas linhas traçadas correspondem ao presente caso, cujo melhor ajuste é o ponto verde (0.318, 0.335). O ponto da cor azul corresponde à constante cosmológica, que neste caso cai no nível 2σ e a linha da cor azul corresponde à linha $q_0 = 0$.

Figura 4.6: Contornos de confiança obtidos com os vínculos de SRG e outras observções cosmológicas. Estes resultados mostram compatibilidades entre a Cosmologia Cardassiana e a Cosmologia de Λ CDM, além de preferir a presente expansão acelerada do universo e admitir a fase de expansão desacelerada.

4.3 Características Observacionais

4.3.1 Rubrodesvio Cardassiano

Com o conhecimento dos valores do melhor ajuste dos parâmetros, procedemos a calcular o rubrodesvio cardassiano, z_{card} , que indica o tempo no qual o universo entrou numa

Tabela 4.3: Análise de Melhor Ajuste

Caso ³	$\Omega_m \pm \sigma_{\Omega_m}$ ⁴	$n \pm \sigma_n$ ⁴	χ^2	χ^2_{dof}
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
H_0 exato	0.45 ± 0.20 $^{+0.14}_{-0.09}$	-0.70 ± 2.68 $^{+0.00}_{-0.00}$	70.88	1.06
H_0 exato, Ω_m prior	0.28 ± 0.04 $^{+0.04}_{-0.04}$	0.27 ± 0.16 $^{+0.14}_{-0.19}$	71.53	1.07
prior H_0	0.40 ± 0.36 $^{+0.25}_{-0.00}$	0.23 ± 1.66 $^{+0.00}_{-0.00}$	73.28	1.09
SRG+ \mathcal{R}	0.35 ± 0.09 $^{+0.11}_{-0.08}$	0.40 ± 0.22 $^{+0.22}_{-0.23}$	73.29	1.09
SRG+ \mathcal{A}	0.33 ± 0.04 $^{+0.04}_{-0.04}$	0.45 ± 0.29 $^{+0.26}_{-0.33}$	73.30	1.09
SRG+ \mathcal{R} + \mathcal{A}	0.32 ± 0.04 $^{+0.04}_{-0.04}$	0.34 ± 0.16 $^{+0.14}_{-0.18}$	73.50	1.10

fase de expansão acelerada dominada pela matéria conhecida como a Era Cardassiana. Geralmente não coincide com a era de expansão acelerada inferida a partir dos dados astronômicos. Usando a Eq. (4.7) e os valores do melhor ajuste obtidos na Seção anterior notamos que $0.04 < z_{\text{card}} < 0.56$. Este resultado mostra concordância com os primeiros valores de z_{card} mostrados na Tabela 1 de [30], obtidos com as observações das SNIa e com a RCF. Os resultados correspondentes a cada caso analisado são mostrados na Coluna (2) da Tabela 4.4.

4.3.2 Parâmetro de Desaceleração

Este parâmetro foi introduzido para caracterizar a evolução dinâmica do universo baseado no sinal da segunda derivada temporal do fator de escala, e é definido como:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}. \quad (4.49)$$

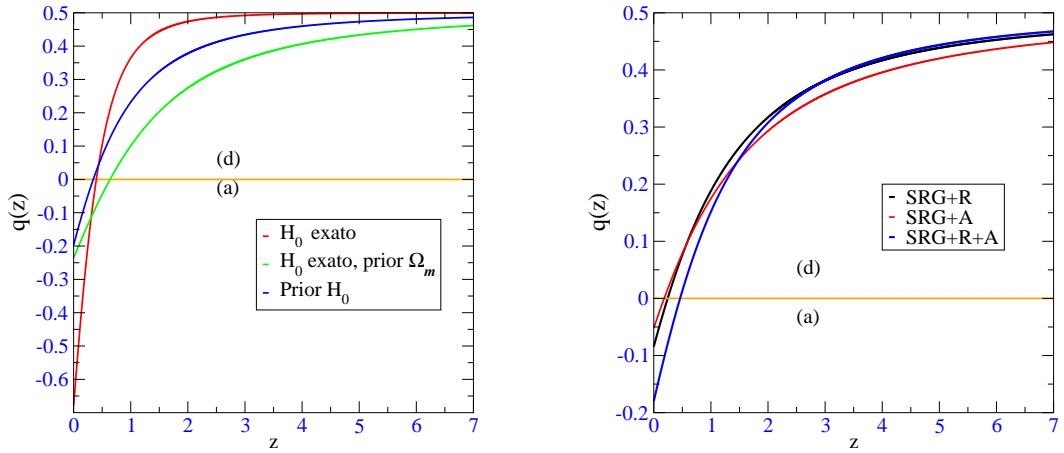
O sinal negativo foi colocado a mão devido a idéias e observações de alcance limitado que sugeriam que o universo encontrava-se em uma fase de expansão desacelerada. Uma forma prática de calcular este parâmetro é expressá-lo como uma função, tanto do parâmetro de Hubble como do rubrodesvio cosmológico, podendo reescrever a Eq. (4.49) facilmente (ver Apêndice C) como

$$q(z) = \frac{1}{2} \frac{(1+z)}{E^2(z)} \frac{dE^2(z)}{dz} - 1. \quad (4.50)$$

Os valores negativos deste parâmetro implicam que o universo se encontra numa fase de expansão acelerada. Os valores positivos entendem-se por um universo em expansão desacelerada. Assim, para a cosmologia descrita pelo Modelo Cardassiano (ver Eq. 4.10), obtemos facilmente:

$$q(z) = \frac{1}{2} - \frac{3(1-n)\kappa(z)}{2(1+\kappa(z))}, \quad \kappa(z) = \left(\frac{\Omega_x}{\Omega_m} \right) (1+z)^{-3(1-n)}. \quad (4.51)$$

A Figura 4.7 mostra o parâmetro de desaceleração em função do rubrodesvio para os valores dos parâmetros obtidos com o método da análise estatística (ver colunas (3) e (4) da Tabela 4.3).



(a) Parâmetro de desaceleração para o modelo Cardassiano usando dados de SRG somente

(b) Parâmetro de Desaceleração para o modelo Cardassiano usando dados de SRG combinados com outras observações

Figura 4.7: Parâmetro de desaceleração $q(z)$ para o Modelo Cardassiano como função do rubrodesvio (z) para valores dos parâmetros cosmológicos obtidos com o método da análise estatística. A linha horizontal (d)/(a) ($q(z) = 0$) divide as regiões com expansão (a) acelerada e (d) desacelerada. Claramente, pode-se ver que a transição de universo desacelerado a acelerado cai no intervalo $0.18 \leq z \leq 0.69$ que é aproximadamente o intervalo inferido a partir das observações das SNIa.

Outros aspectos importantes do parâmetro de desaceleração são:

- O valor de $q_0 = q(z = 0)$ que indica o ritmo de expansão atual. Este tem a seguinte forma: $q_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1 - n)\Omega_x$. Os valores obtidos para este parâmetro caem no intervalo $-0.91 < q_0 < -0.05$ e são mostrados na Coluna (3) da Tabela 4.4.
- O rubrodesvio de transição, z_{acc} (encontrado desenvolvendo a equação $q(z) = 0$), cai no intervalo $0.18 \leq z \leq 0.68$, mostrados na Coluna (4) da Tabela 4.4, mostrando total concordância com as observações das SNIa

Tabela 4.4: Características Observacionais

Case ³	z_{card}	q_0	z_{acc}	$H_0 t_0$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
H_0 exato	0.04	-0.91	0.37	0.90
H_0 exato, prior Ω_m	0.56	-0.29	0.68	0.94
SRG	0.19	-0.20	0.34	0.88
SRg + \mathcal{R}	0.41	-0.08	0.24	0.90
SRG + \mathcal{A}	0.55	-0.05	0.18	0.86
SRG + \mathcal{R} + \mathcal{A}	0.46	-0.18	0.46	0.89

4.3.3 Relação Idade-Rubrodesvio

Finalmente discutimos a relação idade-rubrodesvio em uma forma que resulta ser independente da constante de Hubble. Para isto calculamos o produto:

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)}, \quad (4.52)$$

onde a função adimensional $E(z)$ vêm da Eq. (4.10). Os resultados obtidos mostram que $0.86 \leq H_0 t_0 \leq 0.94$ (ver Coluna (5) da Tabela 4.4). A seguir verificaremos estes resultados calculando o produto $H_0 t_0$ imposto pelas observações da RCF e dos Aglomerados de

³Prior refere-se como parâmetro livre com distribuição a priori gaussiana.

Galáxias (AG). Assim, se assumimos $H_0 = h(9.77813 \text{ Gyr})^{-1}$ com $h = 0.72 \pm 0.08$ do HST Key Project [29]. Supondo ainda que as medidas de H_0 e t_0 não estão correlacionadas temos:

- A RCF mediu $t_0 = 14 \pm 0.5 \text{ Gyr}$ [54], portanto $0.79 < H_0 t_0 < 1.27$
- Os AG mediram $t_0 = 12.6^{+3.4}_{-2.4} \text{ Gyr}$ [59], portanto $0.67 < H_0 t_0 < 1.31$.

Claramente podemos ver que nossos resultados são totalmente consistentes com a idade do universo estimada a partir destas observações.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

A calibração simultânea dos dados dos eventos de SRG que tiveram seus rubrodesvios determinados com exatidão, usando como base a Cosmologia Cardassiana, nos permitiu obter seu diagrama de Hubble após usarmos as relações empíricas que envolvem indicadores de distância de luminosidade desses SRG.

Este diagrama de Hubble resulta ser uma curva bem comportada que cobre um espaço de parâmetros que vá muito além do regime “quase-linear” próprio das supernovas tipo Ia ($z \lesssim 1.7$). A posição dos SRG neste diagrama de Hubble, até primeira ordem, é independente da cosmologia, para um intervalo razoavelmente amplo de parâmetros.

A análise estatística destes dados calibrados contra o Modelo Cardassiano revela que:

1. Os SRG são compatíveis tanto com o Modelo Cardassiano quanto com a Constante Cosmológica, isto é, com o modelo Λ -CDM.
2. Os SRG apoiam fortemente a corrente de opinião atual, liderada pelas observações de SNIa, que sugere que o universo experimentou uma transição de fase de expansão desacelerada no passado, em concordância com o Modelo Cosmológico Padrão, para expansão acelerada tardia.
3. Embora tenha sido feita uma aproximação razoável na análise estatística destes SRG no modelo Cardassiano, encontrou-se, a partir das observações de SRG, que o conteúdo de matéria escura do universo: $\Omega_m \approx 0.4$, parece ser maior do que inferido das SNIa com base na suposição de um universo plano: $\Omega_m \approx 0.3$. Os resultados

obtidos a partir dos SRG com as outras observações cosmológicas confirmam a restrição sobre o conteúdo de matéria escura e energia escura do Universo. No entanto, estas mudanças no valor do conteúdo de matéria e energia escura favorecem a visão atual de que o universo teve uma transição de desaceleração para aceleração a um rubrodesvio menor do que um ($z \lesssim 1$), tal pode ser visto na Figura 4.7.

4. O cálculo da idade do universo, o qual resulta neste caso independente da constante de Hubble, mostrou estar em total concordância com as observações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) e de Aglomerados de Galáxias (AG).

Com base na análise precedente concluímos então que os SRG podem ser tratados como velas padrão após uma apropriada calibração baseada nas relações de luminosidade. Isto os torna de grande utilidade potencial em estudos de cosmologia de precisão, ao mesmo tempo que os converte em ferramentas de estudo, complementares as outras observações cosmológicas tais como as SNIa, a RCF, AG, etc. Esta característica demonstra conclusivamente a relevância dos estudos das propriedades dos SRG para a Cosmologia.

Esta pesquisa pode ser extensiva ao estudo de outras propriedades dos modelos cosmológicos, mas para tal fim faz-se necessário a implementação mais rigorosa do método de análise estatística desenvolvido nesta Tese.

É também possível estender este método de estudo de SRG em cosmologia para considerar outros modelos cosmológicos como: o Modelo Cardassiano Generalizado, o modelo de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP), o modelo de Gás de Chaplygin, o modelo Lemaître-Tolman-Bondi (LTB), ou ainda o modelo de branas de Randall-Sundrum, etc.

Também poderá ser considerado o confronto do diagrama de Hubble dos SRG com aquele previsto pelas condições de energia da relatividade geral quando impostas sobre modelos cosmológicos genéricos como o Modelo de Friedmann. Isto permitiria investigar se estas observações satisfazem tais condições, e quais as possíveis implicações de sua eventual prevalescência ou preservação.

Apêndice A

Fundamentos de Relatividade Geral

A.1 Ferramentas Matemáticas Essenciais

A Teoria Geral da Relatividade é a teoria da gravitação que descreve as interações gravitacionais como fenômenos associados à geometria do espaço-tempo curvo. Para entendermos melhor essa relação é preciso introduzir alguns conceitos matemáticos essenciais a este propósito.

A.2 Variedades e Tensores

Definimos uma *Variedade*, também chamada variedade diferenciável, como um conjunto de pontos, vistos localmente como um fragmento ou seção de um espaço de n -dimensões, que definem um território ou mapa. Mais exatamente, uma variedade é a configuração geométrica que se obtém ao se dispor um conjunto de vetores (que são linearmente independentes) de tal forma que definam uma congruência de curvas (família de figuras que tem o mesmo tamanho e forma) parametrizadas por um parâmetro, chamado u . Esta parametrização é feita de tal maneira que cada vetor num ponto (x^α) particular define uma linha geodésica nesse ponto, a qual é tangente ao vetor com parâmetro u igual ao da geodésica. Todas suas propriedades são definidas pela associação com os números reais, isto é, com sistemas de coordenadas. Baseando-nos neste conceito, um ponto da variedade pode ser descrito por muitos caminhos de coordenadas. Esta propriedade nos

permite definir transformações entre essas coordenadas:

$$d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu, \quad (\text{A.1})$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ é a matriz de transformação de coordenadas e seu determinante é conhecido como Jacobiano da transformação. Em uma variedade podemos definir também algumas estruturas geométricas. Por exemplo:

1. Curvas e Superfícies :

Uma curva é definida simplesmente como a imagem de um mapa, num espaço n -dimensional, descrita por uma função matemática diferenciável que depende de um parâmetro λ

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n).$$

Analogamente, para um sub-espço de m dimensões ($m < n$), podemos definir uma superfície como

$$x^\mu = x^\mu(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

Um caso particular é quando $m = n - 1$. Neste caso a superfície é conhecida como hipersuperfície.

2. Vetores :

Num ponto p da curva, podemos definir os vetores tangentes como:

$$\vec{V} \equiv \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^\mu \partial_\mu, \quad (\text{A.2})$$

onde $X^\mu = dx^\mu/d\lambda$ são as componentes do vetor. Estes vetores formam um espaço vetorial, sendo $\hat{e}_\mu = \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ sua base. O plano perpendicular a estes vetores é chamado plano tangente, portanto, em uma variedade podemos definir em cada ponto, um plano tangente. A grande vantagem dos vetores é que eles podem ser expressos em algum outro sistema de coordenadas dentro da mesma variedade, mediante uma lei de transformação:

$$\tilde{X}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu. \quad (\text{A.3})$$

Esta mudança de coordenadas leva conseqüentemente a uma transformação das bases

$$\tilde{e}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \hat{e}_\nu = (\Lambda^{-t})^\nu{}_\mu \hat{e}_\nu. \quad (\text{A.4})$$

Comparando estas duas últimas equações, vemos que os vetores tangentes e suas bases se transformam através de suas inversas. Por isso os vetores tangentes são chamados vetores contravariantes. Estes vetores contravariantes pertencem a um espaço tangente chamado T_p . Ademais, sabe-se, da álgebra linear, que podemos construir seu correspondente espaço dual, denotado por T_p^* , o qual é formado por vetores X_μ , conhecidos como vetores covariantes, cuja lei de transformação tem a mesma forma da Eq. (A.4), isto é:

$$\tilde{X}_\mu = (\Lambda^{-t})^\nu{}_\mu X_\nu. \quad (\text{A.5})$$

3. Tensores :

Um tensor é uma aplicação de um vetor em outro, que algumas vezes pode tomar uma forma simples (tensor métrico de Minkowsky), mas que também pode tomar formas mais complexas. Ele pode variar de um ponto a outro dentro de uma variedade. Em poucas palavras, é uma generalização do conceito de vetor. Assim, se fizermos uma transformação de coordenadas, é fácil mostrar que os componentes do tensor se transformam como

$$\tilde{T}_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots} = \Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma (\Lambda^{-t})^\theta{}_\mu (\Lambda^{-t})^\phi{}_\nu T_{\theta\phi\dots}^{\rho\sigma\dots}. \quad (\text{A.6})$$

Analogamente aos campos vetoriais também se definem os campos tensoriais como o conjunto de tensores \mathbf{T} avaliados em cada ponto da variedade, cujas componentes são: $T_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}(x^\kappa)$. Eles se classificam de acordo com sua ordem (relacionada com o número de índices que ele possui)

- Tensor de ordem zero: Geralmente chamados escalares, os quais são invariantes sob uma transformação de coordenadas. ($\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \Phi(x)$)
- Tensor de ordem um: Este é o caso correspondente aos vetores, tanto contravariantes quanto covariantes, e suas leis de transformação obedecem as equações (A.3) e (A.5).
- Tensor de ordem $n > 1$: Este corresponde ao caso mais geral, sua lei de transformação segue da Eq. (A.6). Um caso particular é quando $n = 2$, o qual pode ser representado também por uma matriz. No entanto, nem toda matriz é necessariamente um tensor.

As operações elementares com tensores são descritas em detalhade no Capítulo 5 da Ref. [20].

A.3 Derivadas de campos tensoriais

A noção de derivada de um campo tensorial pressupõe a comparação entre dois objetos em pontos diferentes do espaço. Assim, para tensores em geral, a derivada tensorial simplesmente é a derivada parcial em relação a uma certa variável x^ν . Por exemplo, para um tensor contravariante de ordem um a derivada tensorial é

$$\frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu} \doteq \partial_\nu T^\mu \doteq T^\mu_{|\nu} \doteq T^\mu_{,\nu}.$$

Nesta tese, usaremos a segunda representação ($T^\mu_{|\nu}$). Note que a derivada parcial de um tensor não é um tensor. Este fato era de se esperar pois estávamos comparando tal objeto geométrico em pontos diferentes de um espaço, não necessariamente plano. Para resolver este problema, é necessário definir o transporte de tensores. Os dois mais importantes são:

1. Arrasto e derivada de Lie: Se define uma congruência de curvas de forma tal que uma curva passa através de um ponto da variedade. Estas são chamadas órbitas ou trajetórias. Assim um campo vetorial definido sobre uma variedade pode ser usado

para definir uma congruência de curvas. Essas curvas são obtidas desenvolvendo equações diferenciais ordinárias do tipo

$$X^\mu(x(\lambda)) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}.$$

Supondo que um vetor tangente X^μ for dado, e havendo construído a congruência local de curvas, suponhamos agora que temos algum campo tensorial \mathbf{T} . A idéia é arrastar o tensor de um ponto P a um ponto vizinho Q mediante uma transformação do tipo $\tilde{x}^\mu = x^\mu - \lambda X^\mu$ (deslocamento infinitesimal). Para isso construímos a derivada de Lie, que nos diz quanto muda o campo tensorial ao ser arrastado. Ela é definida como

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}(T) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{T(\tilde{x}) - \tilde{T}(\tilde{x})}{\lambda} \quad (\text{A.7})$$

em função das derivadas parciais

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}(T_{\nu\dots}^{\mu\dots}) = X^\rho T_{\nu\dots|\rho}^{\mu\dots} \dots - T_{\nu\dots}^{\rho\dots} X^\mu_{|\rho} \dots + T_{\rho\dots}^{\mu\dots} X^\rho_{|\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Pode se ver desta última equação que a derivada de Lie dá a variação funcional dos campos ao se fazer uma transformação de coordenadas.

2. Transporte paralelo e derivada covariante: A derivada covariante de vetores ou tensores é obtida a partir de uma outra forma de transporte, relacionada com uma quantidade $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ chamada conexão, que conecta vetores de espaços tangentes diferentes, através do chamado transporte paralelo. As componentes do vetor transportado paralelamente desde um ponto P (x^γ) até um ponto Q ($x^\gamma + dx^\gamma$) estão dadas por

$$\bar{V}^\mu(x^\gamma + dx^\gamma) = V^\mu(x^\gamma) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x^\gamma) V^\nu(x^\gamma) dx^\rho.$$

Definindo, então, a derivada covariante como

$$\begin{aligned} V^\mu_{|\nu} &= \lim_{dx^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x^\gamma + dx^\gamma) - \bar{V}^\mu(x^\gamma + dx^\gamma)}{dx^\nu} \\ &= V^\mu_{|\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A conexão, simplesmente é uma propriedade associada a uma variedade e é uma função que depende da maneira como se defina o transporte paralelo. Visto que a derivada covariante por construção é um tensor, pode se mostrar que a conexão afim se transforma como

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}(\Lambda^{-t})^{\nu}_{\beta}(\Lambda^{-t})^{\rho}_{\gamma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Lambda^{\alpha}_{\mu} [(\Lambda^{-t})^{\mu}_{\beta}]_{|\gamma}. \quad (\text{A.10})$$

Vê-se que a conexão não é um tensor, e que quando ela se transforma segundo a última expressão (Eq.A.10) é chamada de conexão afim. No entanto, a diferença de duas conexões é sim um tensor chamado tensor de Torção, que só é nulo quando as conexões são simétricas. Para um tensor em geral sua derivada covariante é

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots|\rho} = & T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots|\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} T^{\mu\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} + \Gamma^{\beta}_{\mu\rho} T^{\alpha\mu\dots}_{\gamma\delta\dots} + \underbrace{\dots}_{\text{índices de cima}} \\ & - \Gamma^{\mu}_{\gamma\rho} T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\delta\dots} - \Gamma^{\mu}_{\delta\rho} T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\mu\dots} - \underbrace{\dots}_{\text{índices de baixo}} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.4 Curvas Geodésicas

Considere um vetor tangente com componentes V^{μ} , definido sobre uma variedade. As curvas geodésicas resultam ser generalizações das linhas retas. Portanto, podemos transportar paralelamente o vetor tangente de um ponto P a um ponto Q , com a peculiaridade de que este vetor transportado no ponto Q é proporcional a si mesmo. Isto implica $V^{\mu}V^{\alpha}_{||\mu} = \Phi(\lambda)X^{\alpha}$, ou equivalentemente

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} = \Phi(\lambda) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}. \quad (\text{A.12})$$

Existe também um parâmetro privilegiado λ , usualmente chamado de parâmetro afim “ s ”, pelo qual o vetor transportado paralelamente é igual a si mesmo. A geodésica parametrizada por este parâmetro é chamada “geodésica afim”. Neste caso, $\Phi(\lambda = s) \rightarrow 0$ e a Eq. (A.12) se reduz a

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Este parâmetro “ s ” determina o comprimento de uma geodésica afim entre dois pontos P_1 e P_2 ($l = \int_{P_1}^{P_2} ds$), além de permitir comparar comprimentos sobre uma mesma geodésica.

Na Teoria Especial da Relatividade definem-se três tipos de *geodésicas*: as geodésicas tipo tempo, correspondentes às curvas privilegiadas onde as partículas materiais podem viajar; as geodésicas nulas, que correspondem a todas aquelas curvas privilegiadas por onde as partículas sem massa (fótons) podem viajar e finalmente, as geodésicas tipo espaço onde a propagação ao longo delas não tem um significado físico pois a causalidade é violada.

A.5 O Tensor de Curvatura

Quando transportamos paralelamente um vetor com componentes A^μ , na vizinhança de um ponto P ao longo de um caminho fechado em uma variedade, encontra-se que sua variação é proporcional à curvatura da variedade. A curvatura da variedade é medida pelo tensor de curvatura e tem a seguinte forma

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma|\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho|\sigma} + \Gamma^\gamma_{\nu\sigma} \Gamma^\mu_{\gamma\rho} - \Gamma^\gamma_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\gamma\sigma}. \quad (\text{A.14})$$

O tensor de curvatura satisfaz as identidades de Bianchi

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma|\alpha} + R^\mu_{\nu\sigma\alpha|\rho} + R^\mu_{\nu\alpha\rho|\sigma} = 0 \quad (\text{A.15})$$

A.5.1 O tensor métrico

O tensor métrico, ou simplesmente chamado métrica, é outra estrutura que podemos definir sobre uma variedade, de forma independente da conexão. A métrica também permite generalizar o conceito de linha reta. Para isso, escrevemos o comprimento da curva e seu extremo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.16})$$

Note que para um espaço Euclideano n -dimensional, em coordenadas cartesianas $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, enquanto que para um espaço-tempo de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Impondo que a métrica não seja singular, podemos construir sua inversa

$$g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu.$$

Com isto podemos relacionar o espaço tangente T_p e seu espaço dual T_p^* , os quais até então não tinham relação expressa alguma. Assim temos, $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ ou, reciprocamente $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$.

Quando impormos também a condição de que o ângulo entre dois vetores transportados pela conexão ao longo de uma curva se mantenha constante, $(g_{\mu\nu}|_\rho = 0)$,¹ estabelecemos a relação entre a conexão e a métrica

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [g_{\sigma\nu|\rho} + g_{\rho\nu|\sigma} - g_{\rho\sigma|\nu}]. \quad (\text{A.17})$$

Neste caso, o tensor de curvatura, Eq. (A.14), é chamado tensor de Riemann, que é um tensor de quarta ordem e anti-simétrico em relação aos índices do primeiro e segundo par. Ele também é simétrico na troca global do primeiro par pelo segundo par e ainda satisfaz a lei cíclica nos últimos três índices. Estas propriedades de simetria e anti-simetria nos índices reduzem o número de componentes independentes de n^4 para $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$.

Podemos definir o tensor de Ricci como sendo

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu|\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\sigma|\nu} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\gamma\nu}, \quad (\text{A.18})$$

e o escalar de curvatura como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.19})$$

¹No caso da Teoria Especial da Relatividade, descrita pela métrica de Minkowski, a derivada covariante da métrica é nula em todos os pontos deste espaço-tempo. Por tal razão o transporte paralelo nesta geometria é feito de maneira simplificada.

Assim, finalmente, o tensor de Einstein pode ser escrito como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (\text{A.20})$$

que satisfaz as identidades de Bianchi $G^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$.

A.6 Teoria da Relatividade Geral

Einstein supondo a homogeneidade e isotropia do espaço-tempo, adicionalmente a seus dois postulados fundamentais (a equivalência dos observadores inerciais e a invariância da velocidade da luz), chegou a construir uma Mecânica compatível com as propriedades do grupo de Poincaré (transformações de Lorentz juntamente com translações rígidas no espaço-tempo), que no limite de baixas velocidades coincidia com a Mecânica Newtoniana, sempre, é claro, na ausência da Gravitação. Inspirado nestas idéias, seu objetivo seguinte foi compatibilizar a Gravitação Newtoniana com o grupo de Poincaré. Assim, uma década depois, Einstein logrou esta compatibilidade, dando um rumo jamais imaginado à visão física do mundo da época. Foi assim que ele introduziu a Teoria Geral da Relatividade. Uma teoria que traz atrelada uma das idéias mais belas e revolucionárias da ciência moderna: aquela que sugere que *gravidade e geometria do espaço-tempo curvo* são conceitos ou fenômenos fundamentalmente idênticos. Para isto, Einstein usou como pilares os quatro princípios fundamentais que a seguir descreveremos.

A.6.1 Pilares da Relatividade Geral

Princípio de Mach

A idéia principal de Mach era que o conceito de espaço absoluto, presente na visão Newtoniana do mundo, carecia de sentido. Segundo Mach, o que de fato era fundamental era o “movimento relativo”. Além disso, ele sustentava a idéia de que a força inercial associada ao movimento de matéria é gerada por todas as outras massas existentes no universo, e não por seu movimento em relação ao espaço absoluto. Para formular de maneira consistente estas idéias ele usou três elementos essenciais:

- A distribuição de matéria é determinada pela geometria.
- Se não há matéria, não há geometria.
- Um corpo num universo vazio não possui propriedades inerciais.

Motivado por idéias como estas, Einstein formulou o princípio de Mach como uma conexão entre métrica, energia e momento:

A geometria do espaço-tempo é completamente determinada pelo tensor momento-energia da matéria presente nele.

Princípio de Invariância Geral

Para podermos entender este princípio, comecemos por introduzir o conceito de covariância de uma lei física (ou “equação”): *Uma equação diz-se ser covariante sob uma transformação de coordenadas, se sua forma não é alterada por esta transformação. Portanto, o princípio de Covariância estabelece que todas as leis físicas devem ser descritas por equações que sejam covariantes sob transformações gerais de coordenadas.*

Isto implica que as equações da Gravitação, por exemplo, devem ser formuladas só em termos de objetos geométricos que se transformem como tensores. Porém, o princípio de Covariância não impõe qualquer vínculo sobre o conteúdo dessas leis físicas. Isto foi advertido por Kretschmann [80] num exame crítico da teoria de Einstein. Devido a este fato, Einstein voltou sua atenção ao conceito da invariância das equações. *A invariância numa equação é algo mais profundo: (1) ela inclui a covariância e (2) impõe a condição de que todas as “constantes absolutas” sejam mantidas inalteradas.* Desta maneira, Einstein propôs seu princípio de invariância geral:

Todas as leis físicas devem ser invariantes sob uma transformação geral de coordenadas

Uma conseqüência direta deste princípio é que a métrica deve ser um campo dinâmico que satisfaz algum tipo de equação de campo que depende da matéria.

Princípio de Equivalência

Seguindo as discussões do capítulo 9 de [20], e da Seção 1.5 de [80], na teoria Newtoniana temos três tipos de massas

- Massa inercial (m^I): É a medida da reação vinda de um corpo que muda seu estado de movimento. É caracterizada pela equação dinâmica $\mathbf{F} = m^I \mathbf{a}$.
- Massa gravitacional passiva (m^p): Mede a resposta de um corpo à presença do campo gravitacional. É caracterizada pela equação dinâmica $\mathbf{F} = m^p \nabla \Phi$.
- Massa gravitacional ativa (m^A): Mede a intensidade do campo gravitacional produzido por sua própria matéria, $\Phi = -G m^A / r$.

Estas três massas resultaram ser equivalentes

$$m^I = m^p = m^A.$$

Tal equivalência pode ser entendida como uma manifestação da interação gravitacional: ela é universal e capaz de imprimir igual aceleração a todas as partículas sobre as que ela age. Desta forma, foi formulado o Princípio de Equivalência, que pode ser apresentado de duas maneiras [88]

1. Princípio de Equivalência Fraco:

Em um dado campo gravitacional todas as partículas pontiformes caem com a mesma aceleração.

A consequência direta disto é a associação do campo gravitacional com a conexão. Isto pode ser visto interpretando o segundo termo da Eq. (A.13) como uma força gravitacional inercial

$$f^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds}.$$

No entanto, este princípio é limitado, pois não diz nada a respeito da interação gravitacional com outros campos existentes na natureza.

2. Princípio de Equivalência de Einstein:

Para formular este princípio, Einstein ideou um experimento imaginário no qual um observador não pode distinguir, através de qualquer experimento local, se ele está em queda livre num campo gravitacional externo, ou num referencial acelerado no espaço-tempo de Minkowski (referencial de Lorentz). Desta forma, se postula que

Num referencial de Lorentz local, valem as leis da Relatividade Especial .

Assim por exemplo, o transporte paralelo deveria ser feito tal como se faz na Relatividade Especial. Portanto, as derivadas simples de tensores devem ser iguais às derivadas covariantes de primeira ordem.² Uma consequência deste princípio é que a geometria da Teoria da Relatividade Geral tem que ser Riemanniana.

Princípio de Correspondência

Este princípio afirma que:

No limite de baixas velocidades e campos gravitacionais fracos, a Teoria Geral da Relatividade deve conter à Teoria da Gravitação de Newton.

Assim, para um espaço plano com uma pequena perturbação de ordem ξ ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \xi h_{\mu\nu}$), usamos as equações (A.13) e (A.17), para verificar que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\Phi_N/c^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0$, isto é, o potencial Newtoniano está contido na métrica. Portanto, a equação de Poisson ($\nabla^2 \Phi_N = 4\pi\rho$) indica que as equações da gravitação devem conter derivadas de segunda ordem da métrica. Mas os únicos tensores que envolvem estas segundas derivadas são o tensor de Curvatura e o tensor de Einstein.

Por outro lado, a equivalência massa-energia da Relatividade Especial indica que qualquer densidade de energia atua como densidade de massa. Isto reforça a idéia de que

²A igualdade entre as derivadas simples e derivadas covariantes de primeira ordem é conhecida como o Princípio de Acoplamento Mínimo. A transição entre as leis da Relatividade Especial e Geral se consegue fazendo $\partial_\mu(\cdot) \rightarrow \nabla_\mu(\cdot)$ em todas as equações da Relatividade Especial. Como pode se ver, de fato este princípio está contido no princípio de equivalência de Einstein.

podemos entender a gravidade como uma propriedade geométrica do espaço-tempo. Portanto, para que possamos ter a equação de Poisson como um limite da Relatividade Geral, e satisfazer as lei de conservação da energia (intimamente relacionada com as identidades de Bianchi), é necessário construir uma relação linear entre o tensor de momento-energia e o tensor de Einstein, sendo a constante de proporcionalidade entre eles a constante de acoplamento $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$. Assim, chegamos às Equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.21})$$

Estas equações, além de serem simples e elegantes, descrevem o universo numa linha só.

A.6.2 Princípio variacional e as equações de Einstein

Considerando uma densidade Lagrangiana de peso $w = +1$

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R + \kappa L_m), \quad (\text{A.22})$$

onde $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante da métrica, R é o tensor Escalar de Curvatura, κ é a constante de acoplamento, e L_m denota a Lagrangiana dos campos de matéria. A partir desta densidade Lagrangiana construímos a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int \mathcal{L} d^4x.$$

A variação desta ação com relação à métrica $g_{\mu\nu}$ (ver Apêndice A.4 [80]) nos permite obter de maneira direta as Equações de Einstein (A.21)

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta(R\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \\ \frac{\delta(L_m\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = -\sqrt{-g} T_{\mu\nu} \end{array} \right. . \quad (\text{A.23})$$

Aqui $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico de ordem 2 que possui divêrgencia nula e descreve a distribuição de matéria-energia. É mais conhecido como o tensor de momento-energia.

No contexto da Teoria Geral da Relatividade, os três tensores de momento-energia mais importantes são: (1) de matéria incoerente não interagente (poeira), (2) de fluido

perfeito e (3) de Maxwell³. Desta maneira, as equações de Einstein são um conjunto de dez equações diferenciais não-lineares que relacionam vinte quantidades: as dez componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ e as dez componentes do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Deste ponto de vista, as equações de Einstein impõem vínculos simultâneos à escolha de $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$.

Nesta tese, vamos estudar uma das soluções das Eq. (A.21) com tensor de momento-energia correspondente a um fluido perfeito e espaço com curvatura constante, usualmente conhecido como espaço de Robertson-Walker, descritos pelo elemento de linha de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker (FLRW) [13]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \right). \quad (\text{A.24})$$

Aqui define-se $a(t)$ como é o fator de escala (que é dependente do tempo). O parâmetro de 3-curvatura (espacial) é $k = +1, 0, -1$, dependendo de se o universo é fechado, plano ou aberto, respectivamente.

³Uma discussão detalhada destes tensores, no contexto da Teoria Geral da Relatividade é apresentada no Capítulo 12 de [20]

Apêndice B

Equações de Friedmann

B.1 Métrica de FLRW

O Princípio Cosmológico especifica que o universo é isotrópico e homogêneo a grandes escalas. Portanto, pode ser descrito através do seguinte elemento de linha (escrito em unidades relativísticas $c = 1$, com fator de escala $a(t)$, e curvatura $k = 0, \pm 1$, e métrica com assinatura negativa)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \right). \quad (\text{B.1})$$

Escolhendo $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$ com $\alpha = 0 \dots 3$, por simples comparação entre as equações (A.16) e (B.1), e usando $g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha$ temos:

$$g_{00} = -1 \quad \implies \quad g^{00} = -1 \quad (\text{B.2})$$

$$g_{11}(t, r) = \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \quad \implies \quad g^{11}(t, r) = \frac{1 - kr^2}{a^2(t)} \quad (\text{B.3})$$

$$g_{22}(t, r) = a^2(t)r^2 \quad \implies \quad g^{22}(t, r) = \frac{1}{a^2(t)r^2} \quad (\text{B.4})$$

$$g_{33}(t, r, \theta) = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \quad \implies \quad g^{33}(t, r, \theta) = \frac{\csc^2 \theta}{a^2(t)r^2}. \quad (\text{B.5})$$

B.1.1 Conexão Afim

Pela forma dos elementos do tensor métrico, isto é, a sua dependência com algumas das coordenadas, teremos três tipos de conexões afim não nulas

$$\Gamma^\mu_{\mu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}g_{\mu\mu|\mu}, \quad \Gamma^\mu_{\nu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu}g_{\nu\nu|\mu} \quad \text{e} \quad \Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}g_{\mu\mu|\nu}.$$

A seguir determinaremos cada uma destas conexões afim:

a) Conexões do tipo $\Gamma^\mu_{\mu\mu}$

- A dependência radial ($r = x^1$) de g_{11} determina:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}g_{11|1} = \frac{k r}{1 - k r^2} \quad (\text{B.6})$$

b) Conexões do tipo $\Gamma^\mu_{\nu\nu}$

- A dependência temporal ($t = x^0$) de g_{11} , g_{22} e g_{33} fornece:

$$\Gamma^0_{11} = -\frac{1}{2}g^{00}g_{11|0} = \frac{a(t)\dot{a}(t)}{1 - k r^2} \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma^0_{22} = -\frac{1}{2}g^{00}g_{22|0} = a(t)\dot{a}(t)r^2 \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma^0_{33} = -\frac{1}{2}g^{00}g_{33|0} = a(t)\dot{a}(t)r^2 \text{sen}^2\theta \quad (\text{B.9})$$

- A dependência radial de g_{22} e g_{33} determina:

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{22|1} = -(1 - k r^2)r \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{33|1} = -(1 - k r^2)r \text{sen}^2\theta \quad (\text{B.11})$$

- A dependência angular ($\theta = x^2$) de g_{33} nos dá:

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}g_{33|2} = -\text{sen}\theta \cos\theta \quad (\text{B.12})$$

c) Conexões do tipo: $\Gamma^\mu_{\nu\mu}$

- A dependência de g_{11} , g_{22} e g_{33} com o tempo fornece:

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}g^{11}g_{11|0} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2}g^{22}g_{22|0} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (\text{B.14})$$

$$\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{33}g_{33|0} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (\text{B.15})$$

- A dependência radial de g_{22} e g_{33} implica:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}g_{22|1} = \frac{1}{r} \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}g_{33|1} = \frac{1}{r} \quad (\text{B.17})$$

- A dependência de g_{33} com θ nos dá:

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}g^{33}g_{33|2} = ctg\theta \quad (\text{B.18})$$

B.1.2 Tensor de Ricci e o Tensor Escalar de Curvatura

Observação: Em alguns casos usarei a notação $\underbrace{\Gamma^\gamma_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma\nu}}_{\sigma=n}$, entendendo que para a coordenada descrita pelo índice $\sigma = n$, o produto dessas conexões não é nulo.

Componentes $R_{0\mu}$

1. Componente R_{00}

$$R_{00} = \Gamma^\sigma_{00|\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma|0} + \Gamma^\gamma_{00}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 0}.$$

Nesta expressão o primeiro e terceiro termos se anulam. Das equações do item (b) temos:

$$\begin{aligned} \Gamma^\sigma_{0\sigma|0} &= \Gamma^1_{01|0} + \Gamma^2_{02|0} + \Gamma^3_{03|0} = 3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)_{|0} = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - 3 \frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} \\ \Gamma^\gamma_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 0} &= \Gamma^1_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{10} + \Gamma^2_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{20} + \Gamma^3_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{30} = 3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2. \end{aligned}$$

Portanto:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (\text{B.19})$$

2. Componente R_{01}

$$R_{01} = \Gamma^\sigma_{01|\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma|1} + \Gamma^\gamma_{01}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 1}.$$

Nesta expressão os dois primeiros termos se anulam para qualquer combinação dos índices, logo

$$\begin{aligned} \Gamma^\gamma_{01}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} &= \Gamma^1_{01}\Gamma^\sigma_{1\sigma} + \Gamma^2_{01}\Gamma^\sigma_{2\sigma} + \Gamma^3_{01}\Gamma^\sigma_{3\sigma} \\ &= \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{01}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13} \\ &= 2 \frac{\dot{a}(t)}{a} \frac{1}{r} + \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11}, \\ \Gamma^\gamma_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 1} &= \Gamma^1_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{11} + \Gamma^2_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{21} + \Gamma^3_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{31} = 2 \frac{\dot{a}(t)}{a} \frac{1}{r} + \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11}. \end{aligned}$$

Portanto temos:

$$R_{01} = 0.$$

Cálculos análogos mostram que as seguintes componentes são nulas:

3. Componente R_{02}

$$R_{02} = \Gamma^\sigma_{02|\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma|2} + \Gamma^\gamma_{02}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 2} = 0.$$

4. Componente R_{03}

$$R_{03} = \Gamma^\sigma_{03|\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\sigma|3} + \Gamma^\gamma_{03}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 3} = 0.$$

Componentes $R_{1\mu}$

1. Componente R_{10} (por simetria)

$$R_{10} = 0$$

2. Componente R_{11}

$$R_{11} = \Gamma^\sigma_{11|\sigma} - \Gamma^\sigma_{1\sigma|1} + \Gamma^\gamma_{11}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma1}$$

Desenvolvendo cada um dos termos:

$$\begin{aligned} \Gamma^\sigma_{11|\sigma} &= \Gamma^0_{11|0} + \Gamma^0_{22|0} + \Gamma^0_{33|0} + \Gamma^1_{11|1} = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)_{|0} + \Gamma^1_{11|1} \\ &= \frac{\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)}{1 - kr^2} + \Gamma^1_{11|1} \\ \Gamma^\sigma_{1\sigma|1} &= \Gamma^1_{11|1} + \Gamma^2_{12|1} + \Gamma^3_{13|1} = 2\left(\frac{1}{r}\right)_{|1} + \Gamma^1_{11|1} \\ &= -2\frac{1}{r^2} + \Gamma^1_{11|1} \\ \Gamma^\gamma_{11}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} &= \Gamma^0_{11}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{11}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) \\ &= 3\left(\frac{\dot{a}(t)a(t)}{1 - kr^2}\right)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{2k}{1 - kr^2} + (\Gamma^1_{11|1})^2 \\ \Gamma^\gamma_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma1} &= \underbrace{\Gamma^0_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{01}}_{\sigma=1} + \underbrace{\Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{11}}_{\sigma=0, \sigma=1} + \underbrace{\Gamma^2_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{21}}_{\sigma=2} + \underbrace{\Gamma^3_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{31}}_{\sigma=3} \\ &= 2\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + (\Gamma^1_{11})^2 + (\Gamma^2_{12})^2 + (\Gamma^3_{13})^2 \\ &= 2\frac{\dot{a}^2(t)}{1 - kr^2} + 2\frac{1}{r^2} + (\Gamma^1_{11})^2 \end{aligned}$$

temos

$$R_{11} = \frac{2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t) + 2k}{1 - kr^2} \quad (\text{B.20})$$

3. Componente R_{12}

$$R_{12} = \Gamma^\sigma_{12|\sigma} - \Gamma^\sigma_{1\sigma|2} + \Gamma^\gamma_{12}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma2}$$

Desenvolvendo cada um dos termos:

$$\begin{aligned}\Gamma^\sigma_{12|\sigma} &= \Gamma^\sigma_{1\sigma|2} = 0 \quad \forall \sigma \\ \Gamma^\gamma_{12}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} &= \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23} = \frac{ctg\theta}{r} \\ \Gamma^\gamma_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 2} &= \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{32} = -\frac{ctg\theta}{r}\end{aligned}$$

Obtemos

$$R_{12} = 0.$$

4. Componente R_{13} (por simples inspeção)

$$R_{13} = \Gamma^\sigma_{13|\sigma} - \Gamma^\sigma_{1\sigma|3} + \Gamma^\gamma_{13}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 3} = 0.$$

Componentes $R_{2\mu}$

1. Componente R_{20} (por simetria)

$$R_{20} = 0$$

2. Componente R_{21} (por simetria)

$$R_{21} = 0$$

3. Componente R_{22}

$$R_{22} = \Gamma^\sigma_{22|\sigma} - \Gamma^\sigma_{2\sigma|2} + \Gamma^\gamma_{22}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} - \Gamma^\gamma_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 2}.$$

Desenvolvendo cada um dos termos:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\sigma_{22|\sigma} &= \Gamma^0_{22|0} + \Gamma^1_{22|1} = (a(t)\dot{a}(t)r^2)_{|0} + (-(1-kr^2)r)_{|1} \\
&= \dot{a}^2(t)r^2 + a(t)\ddot{a}(t) - 1 - 3kr^2 \\
\Gamma^\sigma_{2\sigma|2} &= \Gamma^3_{23|2} = (ctg\theta)_{|2} = -csc^2\theta \\
\Gamma^\gamma_{22}\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma} &= \Gamma^0_{22}\Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^1_{22}\Gamma^\sigma_{1\sigma} \quad (\sigma = 0, \dots, 3) \\
&= 3\dot{a}^2(t)r^2 + kr^2 - 2 \\
\Gamma^\gamma_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma 2} &= \underbrace{\Gamma^0_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{02}}_{\sigma=2} + \underbrace{\Gamma^1_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{12}}_{\sigma=2} + \underbrace{\Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{22}}_{\sigma=0,\sigma=1} + \underbrace{\Gamma^3_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{32}}_{\sigma=3} \\
&= 2\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + 2\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\
&= 2\dot{a}^2(t)r^2 - 2 + 2kr^2 + ctg^2\theta
\end{aligned}$$

Vemos facilmente que

$$R_{22} = 2\dot{a}^2(t)r^2 + a(t)\ddot{a}(t)r^2 + kr^2. \quad (\text{B.21})$$

4. Componente R_{23} (por simples inspeção)

$$R_{23} = 0$$

Componentes $R_{3\mu}$

1. Componente R_{30} (por simetria)

$$R_{30} = 0$$

2. Componente R_{31} (por simetria)

$$R_{31} = 0$$

3. Componente R_{32} (por simetria)

$$R_{32} = 0$$

4. Componente R_{33}

A relação entre as conexões Γ^1_{22} e Γ^1_{33} permite encontrar:

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (\text{B.22})$$

Tensor Escalar de Curvatura

Usando sua definição:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

e as Equações (B.2-B.5) e (B.19-B.22), temos:

$$R = 6 \left(\frac{\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t) + k}{a^2(t)} \right). \quad (\text{B.23})$$

B.1.3 Tensor de Einstein

Com os elementos básicos: Tensor métrico, Tensor de Ricci e o Tensor Escalar de Curvatura, vamos obter as componentes do Tensor de Einstein

1. Componente G_{00}

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3 \left(\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a(t)^2} \right) \quad (\text{B.24})$$

2. Componente G_{11}

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = - \left(\frac{\dot{a}^2(t) + 2a(t)\ddot{a}(t) + k}{1 - kr^2} \right) \quad (\text{B.25})$$

3. Componente G_{22}

$$G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R = - (\dot{a}^2(t) + 2a(t)\ddot{a}(t) + k) r^2 \quad (\text{B.26})$$

4. Componente G_{33}

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (\text{B.27})$$

B.1.4 Tensor de Momento-Energia

Pelo postulado de Weyl, que sugere que o universo se comporta como um fluido perfeito, o tensor de momento-energia que o descreve é:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu},$$

onde u_μ é a quadri-velocidade do fluido de densidade total ρ e pressão p . Escolhendo um sistema preferencial tal que $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ temos:

$$\begin{aligned} T_{00} &= (\rho + p) + pg_{00} = \rho \\ T_{11} &= pg_{11} = p \frac{a^2(t)}{1 - k r^2} \\ T_{22} &= pg_{22} = p a^2(t) r^2 \\ T_{33} &= pg_{33} = p a^2(t) r^2 \text{sen}^2\theta. \end{aligned}$$

B.1.5 Equações de Friedmann

Usando a Equação de Einstein ($G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$), facilmente atingimos nosso objetivo

$$\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a(t)^2} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho \tag{B.28}$$

$$\frac{\ddot{a}^2(t) + 2a(t)\ddot{a}(t) + k}{a^2(t)} = -8\pi G_N p. \tag{B.29}$$

Apêndice C

Parâmetro de Desaceleração

Em cosmologia são definidos diversos parâmetros tal que através do estudo de sua evolução dinâmica pode-se saber algo a mais sobre a história da expansão do universo após o Big Bang. Um destes é denominado o *parâmetro desaceleração*, que é definido como:

$$q = -\frac{\ddot{a} a}{\dot{a}^2}, \quad (\text{C.1})$$

onde o sinal negativo foi introduzido para levar em conta observações antigas que sugeriam que o universo estava numa fase de expansão desacelerada. O próximo objetivo é encontrar uma forma específica deste parâmetro q em função do parâmetro de Hubble e do rubrodesvio. Para nossos fins:

1. Rescrevemos a equação anterior da seguinte forma:

$$q = -\frac{\ddot{a} a^2}{a \dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2} \quad (\text{C.2})$$

2. Usando a regra da cadeia para as derivadas temporais vemos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{d\dot{a}}{da} \frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\dot{a}}{dz} \frac{dz}{da}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H(z) \frac{d\dot{a}}{dz} \frac{dz}{da} \quad (\text{C.3})$$

3. Derivando o parâmetro de Hubble, com respeito ao rubrodesvio

$$\frac{dH}{dz} = \frac{1}{a} \frac{d\dot{a}}{dz} - \frac{\dot{a}}{a^2} \frac{da}{dz}$$

4. Reescrevendo este último termo em função do parâmetro de Hubble e arranjando os termos adequadamente:

$$\frac{d\dot{a}}{dz} = a \left(\frac{dH}{dz} + \frac{H}{a} \frac{da}{dz} \right) \quad (\text{C.4})$$

Substituindo a Eq.(C.4) na Eq.(C.3), obtemos facilmente:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H a \left(\frac{dH}{dz} + \frac{H}{a} \frac{da}{dz} \right) \frac{dz}{da}$$

Ou alternativamente:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H a \left(\frac{dH}{dz} \frac{dz}{da} \right) + H^2. \quad (\text{C.5})$$

5. Da relação rubrodesvio-fator de escala, Eq.(3.17), é fácil obter:

$$\frac{dz}{da} = -\frac{(1+z)^2}{a_0} \quad (\text{C.6})$$

6. Finalmente, substituindo (C.6) em (C.5), e seu resultado na equação (C.2), obtemos facilmente:

$$q = (1+z) \frac{1}{H} \frac{dH}{dz} - 1 \quad (\text{C.7})$$

Alternativamente, sabemos que é mais comum trabalhar com o parâmetro de Hubble tal que este seja independente da constante de Hubble, $E(z) = \frac{H}{H_0}$, de tal forma que a última expressão pode ser rescrita como:

$$q(z) = \frac{1}{2} \frac{(1+z)}{E^2(z)} \frac{dE^2(z)}{dz} - 1. \quad (\text{C.8})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Alcaniz J. S., Jain D. & Dev A., 2003, Phys. Rev. D, **67**, 043514.
- [2] Amati L., et al., 2002, A & A **390**,81.
- [3] Band D., et al., 1993, ApJ, **413**, 281.
- [4] Barkana R. & Loeb A., 2004, ApJ, **601**, 64.
- [5] Bennett C. L. et al., 2003, ApJ. Suppl., **148**,1.
- [6] Bento M. C., Bertolami O., & Sen A. A., 2002, Phys. Rev. D, **66** , 043507.
- [7] Berdardini M. G., et al., 2005, ApJ, **634**, L29.
- [8] Bertolami O., 1996, “O Modelo Cosmológico Padrão”
<http://alfa.ist.utl.pt/orfeu/homeorfeu.html>
- [9] Bloom J. S., Frail D. A. & Sari R., 2001, Astron. J., **121**, 2879.
- [10] Caldwell R. D., R. & Steinhard P. J., 1998, Phys. Rev. Lett., **80**, 1582.
- [11] Caldwell R. D., 2002, Phys. Lett. B., **545**, 23.
- [12] Carroll S. M., Press W. H. & Turner E. L., 1992, ARA & A., **30**, 499.
- [13] Carroll S. M., 1997, Lectures Notes on General Relativity, [arXiv: gr-qc/9712019].
- [14] Cen R., 2003, ApJ, **591**, L5.
- [15] Ciardi B., Ferrara A. & White S. D. M., 2003, MNRAS, **344**, L7.

- [16] Costa E., et al., 1997, *Nature*, **387**, 783.
- [17] Chung D. J. H. & Freese K., 1999, *Phys. Rev. D*, **61**, 023511.
- [18] Dawroski M. P., Stachowiak T. & Szydlowski M., 2002, *Phys. Rev. D.*, **68**, 103519.
- [19] Dezalay J. P., et al., 1996, *Astrophys. J. Lett*, **471**, L27.
- [20] D’Inverno R., 1992, *Introducing Einstein’s Relativity*, OXFORD.
- [21] Dvali G, Gabadadze G. & Porrati M., 2000, *Phys.Lett. B*, **485**, 208.
- [22] Eichler D. et al., 1989, *Nature*, **340**, 126.
- [23] Eichler D. & Levinson A., 2004, *ApJ*, **614**, L13.
- [24] Eisenstein D. J. & Hu W., 1998, *ApJ*, **496**, 605.
- [25] Eisenstein D. J. et al., 2005, *ApJ*, **663**,560.
- [26] Fenimore E. E. & Ramirez-Ruiz E., 2000, [arXiv: astro-ph/0004176].
- [27] Firmani C. et al., 2006, *MNRAS*, **370**, 185.
- [28] Frail D. A., et al., 1997, *Nature*, **389**, 261.
- [29] Freedman W. L. et al., 2001, *AJ*, **553**, 47.
- [30] Freese K. & Lewis M., 2002, *Phys. Lett. B*, **540** , 1.
- [31] Freese K., 2003, *Nuclear Physics B*, **124**, 50.
- [32] Fruchter A. S., et al., 1998, *Gamma-rays Bursts. AIP conference Proceedings No. 428*, ed. por Meegan C. A., Koshat T. M. & Preece R. D., AIP Woodbury, N. Y., pag. **509**.
- [33] Fruchter A. S., et al., 1999, *Astrophys. J.*, **516**, 683.
- [34] Fructcher A. S., et al., 2006, *Nature*, **441**, 463.
- [35] Furlanetto S. R. & Loeb A., 2003, *ApJ*, **588**, 18.

- [36] Ghirlanda G., et al., 2004, ApJ, **616** , 331.
- [37] Goliath M. et al., 2001, A & A, **380**, 6.
- [38] Gondolo P. & Fresse K., 2003, Phys. Rev. D, **68**, 063509.
- [39] Goodman J., 1986, ApJ, **308**, L47.
- [40] Goodman J., 1997, New. Astron., **2**, 499.
- [41] Hakkila J., et al., 2000, Astrophys. J., **538**, 165.
- [42] Hamuy M. et al., 1996, AJ, **112**, 2391
- [43] Heise J., et al., 2001, Gamma-rays Bursts in the Afterglow Era: Proceedings, ed. por Costa E., Frontera F e Hjorth J., Springer-Verlag, pag. **16**.
- [44] Holtzmann J. A., 1989, ApJ. Suppl, **71**, 1.
- [45] Horáva P. & Witten E., 1996, Nucl. Phys.B, **460**; Horáva P. & Witten E., 1996, Nucl. Phys.B, **475**; Horáva P., 1996, Phys. Rev. D., **54**, 7561.
- [46] Horvath I., et al., 1998, Astrophys. J., **508**, 757.
- [47] Hubble E. P., 1929, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **15**, 168.
- [48] Isobe T., et al., 1990, ApJ, **364**, 104
- [49] Isobe T., Babu G. J. & Feigelson E. D., 1990, *Seis Regressões Lineares: Esta subrutina fornece os Coeficientes de Regressão Linear descritos em [48]*.
- [50] James F., 1998, MINUIT, Reference Manual, **CERN**
<http://www.info.cern.ch/asdoc/minuit/minmain.html>
- [51] Kamenshchik A. Y., Moschella U. & Pasquier V., 2001, Phys. Lett. B, **511**, 265.
- [52] Katz J. I & Piran T., 1997, Astrophys. J., **490**, 772.
- [53] Klebesabel R. W, Strong I. & Olsen R. A., 1973, ApJ, **182**, L85.

- [54] Knox L., et al., 2001, ApJ , **563**, L915.
- [55] Kobayashi S., Ryde F. & MacFadyen A., 2002, ApJ, **577**, 302.
- [56] Kolb E. W. & Turner M. S, 1990, *The Early Universe*, (Frontiers in Physics).
- [57] Kouveliotou C., et al., 1993, Astrophys. J. Lett., **413**, L101.
- [58] Krauss L. M. & Turner M. L., 1995, Gen. Rel. Grav, **27**, 1137.
- [59] Krauss L. M., et al., 2003, astro-ph/ 0301102.
- [60] Lamb D. Q. & Riechart D. E., 2000, Astrophys. J., **532**, 286.
- [61] Liang E. P. & Kargartis V. E., 1996, Nature, **381**, 49.
- [62] Liang E. W. & Zhang B., 2005, ApJ, **633**, 611.
- [63] Levinson A. & Eichler D.,2005, ApJ, **629**, L13.
- [64] Lloyd-Ronning N. M. & Ramirez-Ruiz E.,2002, ApJ, **576**, 101.
- [65] MacFadyen A. I., Woosley S. E. & Heger A.,2001, ApJ, **550**, 410.
- [66] Makler M., Oliveira S. Q. & Waga I., 2003, Phys. Rev. D, **68** , 12351.
- [67] Software Mathematica, <http://www.wolfram.com/>
- [68] Meagan C., et al., 1992, Nature, **355** , 143.
- [69] Mészáros P., et al., 2002, ApJ, **578**, 812.
- [70] Miralda-Escudé J., 1998, ApJ, **599**, 15.
- [71] Mosquera Cuesta H. J., et al., 2007, submetido no JCAP.
- [72] Mosquera Cuesta H. J., et al., 2007, submetido no A&A, [arXiv: astro-ph/0707.1297].
- [73] Mosquera Cuesta H. J., Dumet H. & Furlanetto C., 2007, submetido no Phys. Rev. D, [arXiv: astro-ph/0708.1355].

- [74] Narayan R., Paczyński B. & Piran T., 1992, ApJ, **395**, L83.
- [75] Narayan R., Piran T. & Kumac P., 2001, Astrophys. J., **557**, 949
- [76] Nemiroff R. J. & Patla B., 2007, [arXiv:astro-ph/0703739].
- [77] Norris J. P., et al., 1996, ApJ, **459**, 393.
- [78] Norris J. P., et al., 2000, ApJ, **534**, 248.
- [79] Odman C. J. et al., 2003, Phys. Rev. D, **67**, 083511.
- [80] Ohanian H. C., 1976, Gravitation and Spacetime, W. W. Norton & Company. Inc.
- [81] Ozer M. & Taha O., 1987, Nucl. Phys. B, **287**, 776.
- [82] Paczyński B., 1986, ApJ, **308**, L43.
- [83] Paczyński B., 1991, Acta Astron., **41**, 257.
- [84] Paczyński B., 1998, ApJ., **494**, L45.
- [85] Peebles P. J. & Yu J. T., 1970, ApJ, **162**, 815.
- [86] Perivaloropoulus L., 2006, [arXiv:astro-ph/0601014].
- [87] Perlmutter S., et al., 1999, ApJ, **517**, 565.
- [88] Pinto Neto N., 2002, A Teoria da Relatividade Geral, Anais da IV Escola do CBPF, pag.**419**
- [89] Piran T., 1999, Phys. Rept., **314**, 575.
- [90] Piran T., 2004, Phys. Rept., **76**, 1143.
- [91] Piro L., 2001, Gamma-rays Bursts in the Afterglow Era: Proceedings, ed. por Costa E., Frontera F e Hjorth J., Springer-Verlag, pp. **97**.
- [92] Prochaska J. X., et al., 2007, [arXiv:astro-ph/0703665]
- [93] Randall L. & Sundrum R., 1999, Phys. Rev. Lett., **83**, 3370.

- [94] Ratra B. & Peebles P. J., 1998, Phys. Rev. D., **37**, 3406.
- [95] Rees M. J. & Mészáros P., 1992, MNRAS, **258**, P41.
- [96] Rees M. J. & Mészáros P., 1994, ApJ, **430**, L3.
- [97] Rees M. J. & Mészáros P., 2005, ApJ, **628**, 847.
- [98] Reichart D. E., et al., 2001, ApJ, **555**, 57.
- [99] Reichart D. E. & Price P. A., 2002, Astrophys. J., **565**, 174.
- [100] Rhoad J. E., 1999, ApJ., **525**, 737.
- [101] Riess. A. G., et al., 1998, AJ, **116**, 1009.
- [102] Rossi E., Lazzati D. & Rees M. J., 2002, MNRAS, **332**, 945.
- [103] Ruderman M., 1975, Ann. N. Y. Acad. Sci., **262**, 164.
- [104] Ruffini R., et al., 2001, ApJ, **555**, L107; ApJ, **555**, L113; Ruffini R., et al., 2003, AIP Conf. Proc., **668**, 16; Ruffini et al., 2005, AIP Conf. Proc, **782**, 42.
- [105] Ruffini R., et al., 2004, Int. J. Mod. Phys. D, **13**, 843; Ruffini R., et al., 2005, Int. J. Mod. Phys. D, **14**,97.
- [106] Ruffini R., et al., 2002, ApJ, **581**, L19; Ruffini R., et al., 2006, ApJ, **645**, L109.
- [107] Sari R. & Piran T., 1997, ApJ., **485**, 270.
- [108] Sari R., Piran T. & Halpern J. P., 1999, ApJ., **519**, L17.
- [109] Schaefer B. E., et al., 2001, ApJ, **563**, L123.
- [110] Schaefer B. E., 2003, ApJ, **583**, L71.
- [111] Schaefer B. E., 2004, ApJ, **602**, 306.
- [112] Schaefer B. E., 2007, ApJ, **660**, 16.
- [113] Silva P. T. & Bertolami O., 2003, ApJ, **599** , 829.

- [114] Somerville R. S. & Livio M., 2003, ApJ, **593**, 611.
- [115] Spergel D. N., et al., 2003, Astrophys. J. Suppl, **148**, 175.
- [116] Stanek K. Z., et al., 2006, Acta Astron., **56**, 333.
- [117] Tegmark M., et al., 2004, Phys. Rev. D, **69**, 103501.
- [118] Vishwakarma R. G., 2001, Class. Quan. Grav., **18**, 1159.
- [119] Wang B., Gong Y. & (Su), 2004, [arXiv:hep-th/040832].
- [120] Wang Y. & Lovelace G., 2001, ApJ, **562**, L115.
- [121] Wang Y. & Mukherjee P., 2006, ApJ, **650**, 1.
- [122] Woosley S. E., 1993, ApJ, **405**, 273.
- [123] Yamazaki R., Ioka K. & Nakamura T., 2004, ApJ, **606**, L33.