CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Aspectos Particulares do Setor Fermiônico de Modelos Supersimétricos em Presença de Violação da Simetria de Lorentz

FERNANDO JOSÉ LIRA LEAL

RIO DE JANEIRO
2011

FERNANDO JOSÉ LIRA LEAL

Aspectos Particulares do Setor Fermiônico de Modelos Supersimétricos em Presença de Violação da Simetria de Lorentz

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.
Orientador: Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto.

Rio de Janeiro
2011

FERNANDO JOSÉ LIRA LEAL

Aspectos Particulares do Setor Fermiônico de Modelos Supersimétricos em Presença de Violação da Simetria de Lorentz

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

Aprovada em 09 de setembro de 2011

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto
CBPF
Orientador

Prof. Dr. Horatiu Stefan Nastase
IFT/UNESP

Prof. Dr. Humberto Belich Junior
UFES

Prof. Dr. Antonio José Accioly
CBPF

Prof. Dr. Sebastião Alves Dias
CBPF

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus por ter me permitido chegar até aqui, por ser o meu refúgio e fortaleza e pelo socorro bem presente nas horas difíceis. À minha querida esposa, Érika A. S. Leal, pelo amor, dedicação, apoio, paciência e confiança. Aos meus pais, José Leal Sobrinho e Maria Lira Leal (*in memoriam*), por tudo, principalmente pela formação do meu caráter, algo que certamente me faz ser quem sou. Ao meu filho, Fernandinho Filho, pela alegria e motivação de seguir em frente. À minha cunhada, Pricila, pelo apoio. Aos meus familiares por fazerem parte da minha vida. Ao meu orientador, José Abdalla Helayël-Neto, pela orientação, pela formação que ele me proporcionou através da ministração de excelentes cursos e mini-cursos, pela compreensão e pela paciência. Agradeço aos professores do CBPF e da UFRJ por também contribuírem decisivamente em minha formação, principalmente aos professores José Martin Salim, do CBPF, pelo excelente curso de relatividade geral e ao professor Carlos Farina de Souza, da UFRJ, pelos excelentes cursos de teoria quântica de campos. Ao amigo Jardel, pelas discussões, amizade e hospitalidade. Ao amigo Fábio "variedades" ou *manifolds*, pelas discussões e a amizade. Ao amigo Humberto, pelo apoio e pelas discussões. Aos colegas e amigos do nosso grupo de teoria de campo do CBPF. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (Faperj), pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese, propomos uma possível formulacão supersimétrica mínima do setor de *gauge* do Modelo Padrão Estendido. Consideramos o termo CPT-par, pois o seu estudo em um cenário supersimétrico ainda não se encontra na literatura. São analisadas diferentes possibilidades para a implementação da violação da simetria de Lorentz diretamente no superespaço. Os pontos centrais discutidos são a identificação dos condensados fermiônicos que se mostram relevantes no processo de violação da simetria relativística e a discussão da relação entre as escalas de energia para a violação da supersimetria e da simetria de Lorentz. Este último ponto é uma questão em aberto na literatura e a nossa proposta aponta para uma quebra simultânea destas duas simetrias que estão na base do Modelo-Padrão da Física de Partículas.
Palavras-Chave: Supersimetria e Violação da Simetria de Lorentz.

Abstract

We propose in this thesis a possible (minimal) supersymmetric formulation for the gauge sector of the Standard Model Extension. We focus on the CPT-even term, for its investigation in a supersymmetric scenario has not yet been pursued. We contemplate different possibilities for the implementation of Lorentz-symmetry violation directly in superspace. The central issues we tackle concern the identification of the fermion condensates relevant for the breakdown of the relativistic symmetry and the discussion of the relationship between the energy scales for the supersymmetry and Lorentz-symmetry breakings. This latter point is an open question and our proposal and results point towards a simultaneous breaking of these symmetries, which are both of crucial importance for the construction and stability of the Standard Model of Particle Physics.
Keywords: Supersymmetry and Lorentz-Violation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O Modelo-Padrão das Partículas Elementares repousa sobre quatro grandes pilares: A simetria de Poincaré, simetria-CPT, simetria de *gauge* e renormalizabilidade. Cada um deles trouxe consequências físicas que estão, até o presente momento, de perfeito acordo com os dados experimentais [1]. Mas este cenário não nos oferece garantias sólidas de que esses devem ser de fato as bases para descrever a natureza em regimes de energias ainda não sondados.

Um exemplo clássico de escolha de uma simetria em detrimento de outra, devido à mudança de nível de energia, é o caso da troca da simetria de Galileu em favor da simetria de Lorentz. A primeira mostra-se muito boa para descrever a Natureza no regime de baixas velocidades. A partir de certo ponto, a segunda é uma simetria muito bem testada e o seu sucesso para descrever a natureza é notável. Ainda não temos nenhum dado experimental que invalide a simetria de Lorentz. Entretanto, a afirmação de que essa simetria sempre será apropriada para descrever a natureza em qualquer nível de energia também não pode ser feita.

Frente a este obstáculo experimental vigente, só nos resta recorrer a teorias mais fundamentais, onde, supostamente, são válidas em níveis insondáveis de energias. Este foi o ponto de partida de A. V. Kostelecký e S. Samuel em 1989 [2]. Eles descobriram um mecanismo dentro da teoria de cordas que permite a violação da simetria de Lorentz na escala de energia de Planck. Este mecanismo trata-se de uma quebra espontânea da simetria de Lorentz realizada através de tensores que adquirem valores esperados no vácuo diferentes de zero. Isto é o que chamamos aqui de "condensação" dos tensores no vácuo.

Quebrar a simetria de Lorentz desta forma não significa deixar de usar a álgebra de Lorentz. Quebrar a simetria de forma espontânea significa construir uma ação que é invariante frente a esta simetria, enquanto o vácuo da teoria não o é. Na teoria eletrofraca de Glashow-Salam-Weinberg onde ocorre uma quebra espontânea de simetria, a simetria antiga, $SU(2)\times SU(1)$, ainda é usada para construir as derivadas invariantes de *gauge*. Entretanto, o vácuo da teoria deixa de ser invariante frente a essa simetria, pois um campo escalar passa a adquirir no vácuo um valor esperado diferente de zero. Se qualquer outro campo, que não seja o escalar, também adquirir no vácuo um valor esperado diferente de zero, necessariamente, a simetria de Lorentz será violada. Esta é a proposta do mecanismo que citamos. Portanto, sobre este aspecto, a simetria de Lorentz talvez não seja uma simetria exata da natureza.

Este mecanismo também promove a violação da simetria-CPT. Apesar de CPT ser uma simetria discreta, e, aparentemente, não ter relação alguma com a simetria de Lorentz; se a teoria for interagente, segundo Greenberg, violar CPT implica necessariamente violar Lorentz [3]. Portanto, investigações sobre violação de CPT pode ser um caminho para se buscar vestígios da violação da simetria de Lorentz. Um experimento de oscilação de neutrinos realizado em 2010 sugere que talvez exista a violação de CPT [4]. Por outro lado, segundo um trabalho recente e ainda não publicado [5], os autores invalidam o resultado encontrado por Greenberg. Estes desencontros na literatura deixam claro que se trata de um assunto incipiente e complexo que deve ser cuidadosamente estudado.

Outra possibilidade para se detectar a violação da simetria de Lorentz está centrada na observação de raios cósmicos ultra-energéticos. Quando prótons com energia da ordem de $E_{GZK} \approx 6\times 10^{19} eV$ colidem com os fótons que constituem a radiação cósmica de fundo, segundo o Modelo-Padrão, esses prótons devem se converter em píons. Portanto prótons com energia acima da E_{GZK} não deveriam ser observados em experimentos terrestres, a não ser que exista uma fonte localizada a uma distância máxima de $100Mpc$. Entretanto, não existem fontes de raios cósmicos localizadas nessa distância. Uma forma de contornar esse problema seria fornecida pela existência de partículas previstas pela supersimetria [6]. Outra possibilidade seria modificar a relação de dispersão, causando assim uma violação da simetria de Lorentz [7]. Recentemente, um experimento realizado no observatório Pierre Auger em 2008 indicou de fato a existência do limite GZK [8]. Mesmo que o limite exista, isto não responde definitivamente se há ou não violação da simetria de Lorentz; pois, como discutiremos com mais detalhes à frente, os efeitos da violação da simetria de Lorentz podem ser suprimidos por potências da massa de Planck.

Passando a focalizar diretamente os assuntos referentes à tese, abordaremos no próximo capítulo, que a maneira que citamos de promover a quebra da simetria de Lorentz não é a única. Entretanto, esta é uma maneira suave de quebrar uma simetria, isto é, a quebra da simetria de Lorentz ocorre de tal maneira que os efeitos desta quebra devem ser bem pequenos, no nível de energia do Modelo-Padrão, para que haja concordância com os dados experimentais. Este ponto de vista de quebrar Lorentz será seguido neste trabalho. Nesta tese, iremos realizar a supersimetrização de uma teoria de relevância para estudos da violação da simetria de Lorentz. Nossa motivação está embasada no seguinte argumento: Se a simetria de Lorentz é violada em altíssimas energias e se a supersimetria de fato existir, então, necessariamente, teorias que violam a simetria de Lorentz devem ser supersimétricas. Na verdade, nossa proposta será investigar vestígios da quebra da supersimetria em uma teoria que viola a simetria de Lorentz. Veremos que, segundo a abordagem utilizada, será impossível construir uma teoria supersimétrica e violadora de Lorentz ao mesmo tempo.

A tese procede dividida como segue: No Capítulo 2, faremos uma breve revisão da Eletrodinâmica violadora de Lorentz; no Capítulo 3, apresentaremos três possibilidades para implementar a supersimetria em teorias com quebra de Lorentz. No Capítulo 4 e 5, realizaremos a supersimetrização usando os supercampos quirais e vetoriais, respectivamente, para acomodar os termos violadores da simetria de Lorentz. Estes dois capítulos contêm as nossas contribuições originais ao tópico em estudo. Por fim, no capítulo 6, discutiremos os resultados obtidos e comentaremos sobre algumas perspectivas futuras.

Nosso interesse nesta tese é encontrar vestígios da supersimetria em uma teoria que viola a simetria de Lorentz, cuja parte bosônica é descrita pela ação

$$\Sigma = \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} K_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} - A_\mu j^\mu \Big\}. \tag{1.1}$$

Em particular queremos encontrar a versão supersimétrica da ação

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x \; K_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}, \tag{1.2}$$

onde $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ é um tensor[1] constante que será apresentado em mais detalhes no próximo capítulo. Os vestígios de que falamos referem-se ao setor fermiônico e será interessante observar como estes formam condensados fermiônicos relevantes no processo de violação da simetria de Lorentz.

A supersimetrização da ação (1.2) ainda não foi contemplada pela literatura. Para achar a sua versão supersimétrica iremos propor uma superação que contenha tal termo, quando escrita em campos componentes. Ao propor uma ação supersimétrica para esse termo bosônico, necessariamente teremos parceiros supersimétricos com spin maiores do que 2, pois mesmo que o "tensor" $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ seja constante, não significa que o supercampo que acomoda este tensor seja também constante; pois para que tenhamos uma descrição mais geral possível usaremos sempre, quando possível, supercampos não constantes e posteriormente ao exigirmos uma correspondência com a teoria que viola a simetria de Lorentz surgirá naturalmente o tensor de fundo da teoria. Por isto uma proposta para supersimetrizar diretamente este termo nos conduziria fatalmente a uma teoria com spin maior que 2, isto é, uma teoria não causal. Para superar esta dificuldade devemos restringir os graus de liberdade do "tensor" constante $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$, que devido às características (2.4) possui 19 graus de liberdade. Como usualmente aparece na literatura, iremos reduzir os graus de liberdade desse tensor usando uma decomposição em componentes não birrefringentes (2.17)

$$K_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\kappa}\tilde{\kappa}_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\tilde{\kappa}_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\lambda}\tilde{\kappa}_{\mu\kappa} - \eta_{\nu\kappa}\tilde{\kappa}_{\mu\lambda}\right).$$

Que pode ser reduzido ainda mais usando o *Ansatz* [10]:

$$\tilde{\kappa}_{\mu\nu} = \kappa\left(\xi_\mu\xi_\nu - \eta_{\mu\nu}\xi^\lambda\xi_\lambda/4\right), \tag{1.3}$$

com

$$\kappa = \frac{4}{3}\tilde{\kappa}^{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu, \tag{1.4}$$

onde $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$ é um tensor de traço nulo. Usando os *Ansatzë* (2.17) e (1.3) a ação (1.2) reduz-se à

[1] Quando a simetria de Lorentz é violada, os dois tipos de transformações, ativa (partícula) e passiva (observador), passam a não ser equivalentes. Por isto quando escrevemos a palavra tensor entre aspas estamos chamando a atenção para dizer que tal objeto não é um legítimo tensor sobre transformações de Lorentz [9].

$$S = \frac{\kappa}{4}\int d^4x \left\{\frac{1}{2}\xi_\mu\xi_\nu F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu} + \frac{1}{8}\xi_\lambda\xi^\lambda F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}. \tag{1.5}$$

Desta forma toda liberdade fica depositada no "vetor" constante ξ_μ. A ação (1.5), ao contrário da ação (1.2), é mais fácil de se trabalhar, e, quando supersimetrizada, não irá trazer parceiros supersimétricos com spin maiores do que 2. Este ponto é essencial em toda a nossa discussão seguinte. Portanto daqui em diante ficará implícito o uso dos *Ansatzë* (2.17) e (1.3) e a igualdade abaixo será usada sem distinção:

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x\ K_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} = \frac{\kappa}{4}\int d^4x \left\{\frac{1}{2}\xi_\mu\xi_\nu F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu} + \frac{1}{8}\xi_\lambda\xi^\lambda F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}. \tag{1.6}$$

Capítulo 2

Eletrodinâmica com Violação da Simetria de Lorentz

2.1 Introdução

Neste capítulo, iremos estudar algumas consequências da quebra espontânea da simetria de Lorentz sobre o setor fotônico do Modelo-Padrão. Essa proposta, apesar de radical, comporta uma física bastante interessante. Tudo tem início quando, após uma quebra espontânea da simetria de Lorentz, campos tensoriais, ao se "condensarem" no vácuo, deram origem a vários termos que não preservaram a simetria de Lorentz. Tal quebra aconteceu na escala de energia de Planck em uma teoria mais fundamental e os efeitos desta quebra para outros níveis de energia, por exemplo o do Modelo-Padrão das Interações Fundamentais, não foram até o presente momento detectados porque tais efeitos são suprimidos por potências da massa de Planck[1]. Por isto dizemos que se trata de uma quebra suave de simetria, e, mesmo que ainda não se tenha achado vestígios decisivos para essa quebra, é sem dúvida importante nos perguntarmos que consequências ela traria para o Modelo-Padrão (MP).

Tais estudos estão sendo feitos em vários ramos da física, como por exemplo na física de neutrinos [11]- [19], mésons [20]- [21], elétrons [22]- [28], em estudos do limite da massa do fóton [29]- [37], defeitos topológicos [38]- [39], entre outros ramos. Para poder contemplar uma teoria que contenha esta quebra de simetria, devemos adicionar ao MP tais termos. Porém, nem todo termo violador de Lorentz pode ser incorporado

[1] A referência [40] é uma boa revisão sobre gravidade quântica. Nesta revisão o autor informa que vários cálculos foram feitos e a supressão dos efeitos da violação da simetria de Lorentz tem a forma $E^2 = p^2 + m^2 + a_1 \frac{E^3}{M_P} + a_2 \frac{E^4}{M_P{}^2} + \cdots$, onde a_i são constantes adimensionais e M_P é a massa de Planck.

ao MP sem antes forem analisadas a renormalizabilidade por contagem de potências e a invariância frente a simetria de *gauge* do MP. A quebra de Lorentz implementada desta forma não afeta a covariância da teoria, isto é, a física é a mesma para qualquer observador inercial. O que se altera são as transformações de Lorentz do ponto de vista de partícula.

Vejamos brevemente como isto ocorre. Seja $\Phi(x)$ um campo onde os índices vetoriais ou espinoriais pertencentes a $SO(1,3)$ foram omitidos. Fazendo uma transformação de Lorentz sobre $\Phi(x)$ e, em seguida, tomando o seu valor esperado no vácuo, teremos[2]

$$\begin{aligned} \langle 0|\, \Phi'(0)\, |0\rangle &= \langle 0|\, e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\Phi(0)\, |0\rangle \\ &= \langle 0|\, (1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \cdots)\Phi(0)\, |0\rangle \end{aligned} \tag{2.1}$$

ou

$$\langle 0|\, \Phi'(0)\, |0\rangle - \langle 0|\, \Phi(0)\, |0\rangle = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\, \langle 0|\, \Phi(0)\, |0\rangle + \mathcal{O}(\omega^2). \tag{2.2}$$

Se $\Phi(0)$ for um campo escalar, então $M_{\mu\nu} = 0$. Portanto mesmo que o campo adquira um valor esperado no vácuo diferente de zero ($\langle 0|\, \Phi(0)\, |0\rangle \neq 0$) a simetria de Lorentz é preservada, pois $\langle 0|\, \Phi'(0)\, |0\rangle = \langle 0|\, \Phi(0)\, |0\rangle$. Aqui está a ideia do mecanismo de Higgs. Desejamos aqui estender este mecanismo para os demais campos. Entretanto, para qualquer outro campo (tensorial ou espinorial) os geradores $M_{\mu\nu}$ são diferentes de zero e, consequentemente, $\langle 0|\, \Phi'(0)\, |0\rangle \neq \langle 0|\, \Phi(0)\, |0\rangle$, isto é, a simetria de Lorentz é quebrada. É neste sentido que falamos que a violação da simetria de Lorentz se dá do ponto de vista de partícula[3]; pois partículas e campos ao interagirem com um vácuo que não é invariante frente a rotações, $SO(1,3)$, produzem consequências físicas diferentes para cada direção escolhida. Por outro lado, escolhida uma dada orientação todo observador inercial irá se deparar com a mesma física (a covariância é preservada).

[2]Devido à invariância por translação, $\langle 0|\, \Phi(x)\, |0\rangle = \langle 0|\, \Phi(0)\, |0\rangle$. Esta invariância implicará na conservação do tensor energia-momento.

[3]Como mostramos, esta quebra pode ser vista como uma extensão do mecanismo de Higgs.

2.2 O termo CPT-par

O nosso guia para estudar os termos violadores de Lorentz não espúrios é uma teoria efetiva que reúne um subconjunto mínimo desses termos. A teoria é chamada de Modelo Padrão Estendido (MPE), cujo setor de *gauge* é dado pela ação

$$\Sigma = \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4}K_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} - A_\mu j^\mu \Big\} \tag{2.3}$$

Temos aqui dois termos que violam a simetria de Lorentz. O primeiro deles, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$, é conhecido na literatura como termo de Carroll-Field-Jackiw [41], onde v_μ é um vetor constante e tem dimensão de massa. O segunto, $K_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}$, onde $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ é um tensor constante adimensional, denominaremos de termo K_{FF}. Neste trabalho, queremos apresentar em mais detalhes somente o tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$. Este tensor possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann

$$K_{\mu\nu\kappa\lambda} = K_{[\mu\nu][\kappa\lambda]},\ K_{\mu\nu\kappa\lambda} = K_{\kappa\lambda\mu\nu},\ K_{\mu\nu\kappa\lambda} + K_{\mu\kappa\lambda\nu} + K_{\mu\kappa\nu\lambda} = 0. \tag{2.4}$$

Podemos impor uma condição adicional de duplo traço nulo sem perda de generalidade, ${K_{\mu\nu}}^{\mu\nu} = 0$. Esta escolha não tem nenhuma consequência física, pois, caso não fosse escolhida, teríamos que o termo $K_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}$ se somaria ao termo de Maxwell alterando o valor do campo de *gauge* por um fator constante, que poderíamos redefiní-lo da seguinte forma: $A^\mu \to A^\mu + \text{constante} \to \mathcal{A}^\mu$, não alterando assim a física; pois os campos não são observáveis, e, sim, suas excitações. Do ponto de vista da teoria de grupo dizemos que o tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ não é uma representação irredutível do grupo de Lorentz, ou seja, que o mesmo pode ser reduzido à representação irredutível. Como dissemos, a eliminação dos graus de liberdade neste caso são essenciais para se evitar problemas de causalidade. Essas simetrias exigidas para o tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ faz com que o mesmo possua somente 19 graus de liberdade.

Além das simetrias contínuas que mencionamos (Lorentz e translação) o MPE contém um termo no setor de *gauge* que viola a simetria discreta CPT. Chamamos este termo de CPT-ímpar, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$. O outro termo que não viola a simetria CPT, $K_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}$, o chamamos de CPT-par. Como havíamos dito, nosso interesse é apresentar o setor CPT-par. O primeiro passo para isto é obter as equações de movimento a partir da ação (2.3) quando $v^\mu = 0$. Fazendo $\delta\Sigma = (\partial_\mu F^{\mu\nu} + K^{\mu\nu\kappa\lambda}\partial_\mu F_{\kappa\lambda} - j^\nu)\delta A_\nu = 0$, temos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + K^{\mu\nu\kappa\lambda}\partial_\mu F_{\kappa\lambda} = j^\nu, \tag{2.5}$$

que são as equações modificadas não-homogêneas. Tomando o dual do tensor intensidade de campo eletromagnético, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$, obtemos as equações homogêneas de Maxwell

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.6}$$

Portanto as únicas modificações das equações de Maxwell são para a parte inomogênea. Uma vez que as equações obtidas dependem somente de $F^{\mu\nu}$, a simetria de *gauge*, $U(1)$, é preservada. Entretanto, diferentemente do que ocorre na eletrodinâmica de Maxwell, a escolha do *gauge-fixing* de Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$), temporal ($A^0 = 0$) ou de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) não são equivalentes. Isto não é nenhum problema, pois a escolha do *gauge-fixing* significa modificar a teoria convenientemente de tal forma que consigamos achar a função de Green da teoria sem alterar a física do problema. Esta modificação, até mesmo na teoria de Mawell, não pode ser feita de qualquer forma. O que é possível mostrar é que deve existir uma modificação necessária (*gauge-fixing*) para inverter o operador (achar a função de Green) e no final dos cálculos o setor não físico deve desacoplar-se da teoria. Na referência [42] os autores mostram como esta escolha de *gauge-fixing* deve ser feita.

A equação (2.5) modifica a relação de dispersão da equação $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. Esta modificação, neste caso, produz um efeito chamado de birrefringência da luz. Modificação esta que em primeira ordem nos fornece a seguinte relação de dispersão [43]

$$\omega_\pm = (1 + \rho \pm \sigma)\,|\vec{p}|\,, \tag{2.7}$$

onde

$$\begin{cases} \rho = -\frac{1}{2}\tilde{K}_{\mu}{}^{\mu}; \\ \sigma^2 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{\mu\nu})^2 - \rho^2; \\ \tilde{K}^{\mu\nu} = K^{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{p}_{\kappa}\hat{p}_{\lambda}; \\ \hat{p}^{\mu} \equiv p^{\mu}/|\vec{p}|. \end{cases} \tag{2.8}$$

Temos aqui dois modos normais, ω_+ e ω_-. Para cada modo, temos uma dada velocidade de fase. Uma vez que estas velocidades de fases são diferentes, teremos o fenômeno da birrefringência da luz. O estudo da birrefringência é muito importante porque produz rigorosas restrições aos coeficientes violadores de Lorentz. Para expressar essas restrições será útil usar a decomposição do tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$, proposta por Kostelecký e Mewes [44]

$$\begin{cases} (K_{DE})^{ij} = -2K^{0i0j}; \\ (K_{HB})^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{0pqi}\epsilon^{0klj}K_{pqkl}; \\ (K_{DB})^{ij} = -(K_{HE})^{ji} = K_{0}{}^{i}{}_{pq}\epsilon^{0pqj}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Onde as matrizes 3×3 de paridade par são K_{DE} e K_{HB}, enquanto as outras matrizes 3×3 de paridade ímpar são K_{DB} e K_{HE}. Pode-se ainda usar essas quatro matrizes para se definir outras quatro matrizes de traço nulo

$$\begin{cases} (\tilde{K}_{e+})^{ij} = \frac{1}{2}(K_{DE} + K_{HB})^{ij}; \\ (\tilde{K}_{e-})^{ij} = \frac{1}{2}(K_{DE} - K_{HB})^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}(K_{DE})_{q}{}^{q}; \\ (\tilde{K}_{o+})^{ij} = \frac{1}{2}(K_{DB} + K_{HE})^{ij}; \\ (\tilde{K}_{o-})^{ij} = \frac{1}{2}(K_{DB} - K_{HE})^{ij}; \\ \tilde{K}_{tr} = \frac{1}{3}(K_{DE})_{q}{}^{q}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Todos os coeficientes de paridade par estão contidos em $\tilde{K}_{tr}$ e nas matrizes $\tilde{K}_{e+}$, $\tilde{K}_{e-}$, enquanto todos os coeficientes de paridade ímpar estão contidos nas matrizes $\tilde{K}_{o+}$ e $\tilde{K}_{o-}$. Todas as matrizes são simétricas, exceto a matriz $\tilde{K}_{o+}$, a qual é antissimétrica. É possível mostrar que a birrefringência é controlada pelas matrizes $\tilde{K}_{e+}$ e $\tilde{K}_{o-}$. Observações da polarização da luz a partir de galáxias distantes da odem $1Gpc \sim 10^{25}m$, mostraram que o limite superior para a magnitude de $\tilde{K}_{e+}$ e $\tilde{K}_{o-}$ é de 10^{-32} [45].

Usando a decomposição (2.9) o setor CPT-par da ação (2.1), na ausência de fontes, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot K_{DE}\cdot\vec{E} + \\ &- \frac{1}{2}\vec{B}\cdot K_{HB}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot K_{DB}\cdot\vec{B}\Big\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ou ainda usando a decomposição (2.10), teremos

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2}\left[\left(1+\tilde{K}_{tr}\right)\vec{E}^2 - \left(1-\tilde{K}_{tr}\right)\vec{B}^2\right] + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\left(\tilde{K}_{e+}+\tilde{K}_{e-}\right)\cdot\vec{E} + \\ &- \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\left(\tilde{K}_{e+}-\tilde{K}_{e-}\right)\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\left(\tilde{K}_{o+}+\tilde{K}_{o-}\right)\cdot\vec{B}\Big\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

A partir da ação (2.12) podemos perceber quais efeitos a quebra da simetria de Lorentz nos fornece. Vejamos: A ação (2.12) pode ainda ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2}\left(1-\tilde{K}_{tr}\right)\left[\frac{\left(1+\tilde{K}_{tr}\right)}{\left(1-\tilde{K}_{tr}\right)}\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right] + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\left(\tilde{K}_{e+}+\tilde{K}_{e-}\right)\cdot\vec{E} + \\ &- \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\left(\tilde{K}_{e+}-\tilde{K}_{e-}\right)\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\left(\tilde{K}_{o+}+\tilde{K}_{o-}\right)\cdot\vec{B}\Big\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Estamos usando $c = 1$, entretanto, para nos guiarmos apenas, vamos fazer $[E] = c[B]$. Notamos então que o primeiro termo da ação nos fornece uma modificação para a velocidade da luz

$$c^2 = \frac{1-\tilde{K}_{tr}}{1+\tilde{K}_{tr}} \tag{2.14}$$

ou

$$\frac{1}{\epsilon\mu} = \frac{1}{(1+\tilde{K}_{tr})(1-\tilde{K}_{tr})^{-1}}. \tag{2.15}$$

Se $\tilde{K}_{tr}$ não for nulo, a violação da simetria de Lorentz produz uma modificação na velocidade da luz, o que significa termos, por exemplo, uma permissividade ϵ e uma permeabilidade μ efetiva dados por

$$\epsilon - 1 = -(\mu^{-1} - 1) = \tilde{K}_{tr} \tag{2.16}$$

Podemos agora redefinir $\epsilon = \mu^{-1} = 1$ e transferir a violação de Lorentz para outro setor da teoria. Para que a teoria não tenha inconsistências, os valores permitidos para $\tilde{K}_{tr}$ são[4] [46]: $0 \leq \tilde{K}_{tr} < 1$. No MPE a liberdade para conduzir essas modificações está sobre nove coeficientes independentes, $\tilde{K}_{e-}$, $\tilde{K}_{o-}$ e $\tilde{K}_{tr}$. Modificações deste tipo são insensíveis em experimentos de birrefringência, pois neste tipo de experimento se compara luz com luz. Portanto é importante escrever o tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ somente em função dos coeficientes não birrefringentes para que esta decomposição seja apropriada em outros testes experimentais. Esta decomposição é [47]

$$K_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\kappa}\tilde{\kappa}_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\tilde{\kappa}_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\lambda}\tilde{\kappa}_{\mu\kappa} - \eta_{\nu\kappa}\tilde{\kappa}_{\mu\lambda}\right), \tag{2.17}$$

onde $\tilde{\kappa}_{\mu\nu} = K_{\lambda\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ é uma matriz de traço nulo. $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ decomposto desta forma será particularmente útil para nossos propósitos futuros.

No capítulo seguinte, cumpriremos a tarefa de estudar possíveis formulações, diferentes em suas premissas básicas, para a incorporação do termo CPT-par em um cenário supersimétrico. O interessante desta questão é a discussão que se abre sobre a relação entre as escalas de quebra da simetria de Lorentz e da supersimetria. Há diferentes visões sobre esta questão e em nossa linha de trabalho, adotamos o ponto de vista de implementar as duas quebras simultaneamente, como deverá ficar claro ao longo do Capítulo 3.

[4]Na verdade, estes valores foram obtidos usando $\Sigma = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}[(1+\tilde{K}_{tr})\vec{E}^2 - (1-\tilde{K}_{tr})\vec{B}^2] \right\}$.

Capítulo 3

Três Caminhos Para Implementar a Supersimetria em Teorias com Quebra de Lorentz

3.1 Introdução

A descoberta da possibilidade da simetria de Lorentz ser violada na escala de energia de Planck motivou a construção de um grande número de teorias efetivas compatíveis com a violação da simetria de Lorentz. Os pioneiros nessa área foram Alan Kostelecký e Stuart Samuel, que em 1989 descobriram um mecanismo num contexto da teoria de cordas para implementar essa violação. Desde então, teorias com essa particularidade estão sendo formuladas e estudadas em divesos campos, tais como teorias de campos não comutativas [48], teorias em cenários de mundos brana [49], entre outras teorias. Ou seja, há diversas possibilidades de se formular teorias que violam a simetria de Lorentz.

Por outro lado, o que deve ser consenso é que esta violação acontece em altíssimas energias, e, se, a supersimetria de fato existir, esta deve ser importante nessa escala de energia. E mesmo em baixas energias, onde a supersimetria deve ser quebrada, haverá traços de uma simetria perdida. Portanto devemos necessariamente formular teorias efetivas que forneça a informação de que em algum momento da história do Universo a supersimetria existiu. Atualmente existem três caminhos para implementar a supersimetria em teorias que violam a simetria de Lorentz. Passaremos agora a estudá-las e posteriormente discutiremos os seus resultados.

3.2 Primeiro Caminho: Modificação do Superespaço pela Inclusão da Quebra de Simetria da Lorentz

Em 2002, M. S. Berger e V. Alan Kostelecký proporam introduzir a violação de Lorentz no modelo supersimétrico de Wess-Zumino em quatro dimensões [50]. Os autores afirmam que obtiveram uma teoria totalmente supersimétrica incorporando a violação de Lorentz. Posteriormente isto foi defendido mais explicitamente por Berger [51]. Antes de estudarmos o modelo propriamente dito, vamos entender o que os autores consideram ser uma teoria totalmente supersimétrica incorporando a violação de Lorentz: A álgebra de Poincaré envolve os geradores de translação (P_μ) e os geradores de rotações e *boosts* de Lorentz ($M_{\mu\nu}$) da seguinte maneira

$$\begin{cases} [P_\mu, P_\nu] = 0; \\ [P_\mu, M_{\nu\lambda}] = i\left(\eta_{\mu\nu}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\nu\right); \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] = i\left(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho}\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

A álgebra supersimétrica em notação de espinores de 4 componentes é

$$\begin{cases} [Q, P_\nu] = 0; \\ \left\{Q, \bar{Q}\right\} = 2\gamma^\mu P_\mu. \end{cases} \tag{3.2}$$

A equação $\left\{Q, \bar{Q}\right\} = 2\gamma^\mu P_\mu$ nos diz que a anti-comutação entre os geradores de supersimetria produz uma translação ou que a comutação de duas transformações de supersimetria gera uma translação, isto é, é proporcional a P_μ ($[\delta_1, \delta_2] = 2i\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\partial_\mu$). Portanto se nas equações (3.1) o gerador $M_{\mu\nu}$ sofrer modificações oriundas de um *background* não trivial a simetria de Lorentz será violada, enquanto que nas equações (3.2), mesmo que apareça tensores violadores de Lorentz, se a propriedade da comutação de duas transformações de supersimetria for mantida a teoria será supersimétrica. É neste sentido que os autores afirmam que é possível haver violação da simetria de Lorentz e ao mesmo tempo a teoria ser supersimétrica. Os autores Usaram primeiramente para mostrar isso o modelo de Wess-Zumino. Ele é definido usualmente no superespaço pela superação

$$\mathcal{S} = \int d^4x\; d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\left\{\Phi\bar{\Phi} + \frac{1}{2}m\Phi^2\delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{3}g\Phi^3\delta(\bar{\theta}^2) + h.c.\right\}, \tag{3.3}$$

onde o superespaço é definido pelas coordenadas $z = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, com θ^α e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ sendo espinores de Weyl de duas componentes. O supercampo Φ é um supercampo quiral, isto é, $\bar{D}\Phi = 0$. Portanto

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = U_x f(x, \theta) = U_x \left(\phi(x) + \sqrt{2}\theta\Psi(x) + \theta^2 \mathcal{F} \right), \tag{3.4}$$

onde

$$U_x = e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}. \tag{3.5}$$

Esta superação em campos componentes é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{WZ} &= \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A + \frac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B + \frac{1}{2} i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \\ &+ m(-\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi + AF + BG) + \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}}[F^2(A^2 - B^2) + 2GAB - \bar{\psi}(A - i\gamma_5 B)\psi] \Big\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + iB); \\ \mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F - iG); \\ \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.7}$$

A atuação do operador U_x pode ser vista como uma mudança de coordenada $x^\mu \to x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Para incluir a violação de Lorentz e também de CPT a ideia é propor uma nova mudança de coordenada de tal forma que esta contenha termos que violam Lorentz e CPT. Uma vez que o vínculo de quiralidade deve ser mantido, $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ ou $U_x^{-1}\bar{D}_{\dot{\alpha}}U_x = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$, quando a mudança de coordenada for realizada (modificar U_x por $U'U_x$), necessariamente, deverá existir uma nova superderivada ($\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$), consequentemente novos geradores de supersimetria e por fim uma nova álgebra de supersimetria. Para isto, primeiramente defini-se os operadores

$$U_y = e^{iy} = e^{iK_{\mu\nu}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial^\nu} \tag{3.8}$$

e

$$T_k = e^{-k} = e^{-v_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})}, \tag{3.9}$$

com suas respectivas expansões dadas por

$$U_y = 1 + iK_{\mu\nu}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial^\nu - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2 K_{\mu\nu}K^{\mu\rho}\partial^\nu\partial_\rho \tag{3.10}$$

e

$$T_k = 1 - v_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2 v^2. \tag{3.11}$$

Aqui v_μ e $K_{\mu\nu}$ são "tensores de fundo", ou seja, são tensores que em uma teoria mais fundamental adquiriram um valor esperado no vácuo diferente de zero. Portanto violam a simetria de Lorentz. Os operadores U_y e T_k tem as seguintes propriedades, $U_y^* = U_y^{-1}$, $T_k^* = T_k$ e ${U_y}^2 = {T_k}^2 = 1$. Os novos supercampos com termos violadores da simetria de Lorentz são

$$\begin{cases} \Phi_y(x,\theta,\bar{\theta}) = U_y U_x f(x,\theta); \\ \bar{\Phi}_y(x,\theta,\bar{\theta}) = U_y^{-1}U_x^{-1}\bar{f}(x,\theta). \end{cases} \tag{3.12}$$

A atuação de U_y sobre o supercampo quiral, $e^{iK_{\mu\nu}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial^\nu}e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu} = e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}(\partial_\mu + K_{\mu\nu}\partial^\nu)}$, produz a mudança $\partial_\mu \to \partial_\mu + K_{\mu\nu}\partial^\nu$. Agora já a atuação de U_y^{-1} sobre o supercampo anti-quiral, produz $\partial_\mu \to \partial_\mu - K_{\mu\nu}\partial^\nu$. Pode-se perceber que a mudança de coordenada para o supercampo quiral é $x_+^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + iK^{\mu\nu}\theta\sigma_\nu\bar{\theta}$. Logo, o modelo de Wess-Zumino com termos que violam a simetria de Lorentz é

$$\mathcal{S} = \int d^4x\; d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\Big\{ (U_y\Phi)\left(U_y^*\bar{\Phi}\right) + \frac{1}{2}m\Phi^2\delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{3}g\Phi^3\delta(\bar{\theta}^2) + h.c.\Big\}. \tag{3.13}$$

Os novos supercampos que contém termos que violam a simetria-CPT são

$$\begin{cases} \Phi_k(x,\theta,\bar{\theta}) = T_k U_x f(x,\theta); \\ \bar{\Phi}_k(x,\theta,\bar{\theta}) = T_k U_x^{-1} \bar{f}(x,\theta). \end{cases} \tag{3.14}$$

A atuação sobre o supercampo quiral, $T_k U_x$, produz $\partial_\mu \to \partial_\mu + iv_\mu$, enquanto que sobre o supercampo anti-quiral, produz $\partial_\mu \to \partial_\mu - iv_\mu$. Portanto o modelo de Wess-Zumino com termos que violam a simetria-CPT é

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta} \left\{ (T_k\Phi) \left(T_k\bar{\Phi}\right) + \frac{1}{2}m\Phi^2\delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{3}g\Phi^3\delta(\bar{\theta}^2) + h.c. \right\} \\ &= \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta} \left\{ \Phi e^{-2K}\bar{\Phi} + \frac{1}{2}m\Phi^2\delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{3}g\Phi^3\delta(\bar{\theta}^2) + h.c. \right\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

A ação de Wess-Zumino somente com os termos que violam Lorentz expressa em campos componentes é

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{Lorentz} &= \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta} \left\{ (U_y\Phi) \left(U_y^*\bar{\Phi}\right) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ K_{\mu\nu}\partial^\mu A \partial^\nu A + K_{\mu\nu}\partial^\mu B \partial^\nu B + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}K_{\mu\nu}K^\mu{}_\rho(\partial^\nu A \partial^\rho A + \partial^\nu B \partial^\rho B) + \frac{1}{2}iK_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \right\}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Consideremos a superação

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{WZ} + \mathcal{S}_{Lorentz}. \tag{3.17}$$

É possível mostrar que a ação (3.17) é invariante sob o conjunto de transformações modificadas de supersimetria

$$\begin{cases} \delta A = \bar{\epsilon}\psi; \\ \delta B = i\bar{\epsilon}\gamma_5\psi; \\ \delta\psi = -(i\gamma^\mu\partial_\mu + iK_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu)(A + i\gamma_5 B)\epsilon + (F + i\gamma_5 G)\epsilon; \\ \delta F = -\bar{\epsilon}(i\gamma^\mu\partial_\mu + iK_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu)\psi; \\ \delta G = \bar{\epsilon}(\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu + K_{\mu\nu}\gamma_5\gamma^\mu\partial^\nu)\psi. \end{cases} \tag{3.18}$$

Ao se calcular a comutação entre duas transformações de supersimetria obtém-se

$$[\delta_1, \delta_2] = 2i\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\partial_\mu + 2iK_{\mu\nu}\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\partial^\nu, \tag{3.19}$$

que é proporcional ao gerador de translação $P_\mu = i\partial_\mu$. O gerador de translação e o novo gerador de supersimetria, $\mathcal{Q} = i\partial_{\bar{\theta}} - \gamma^\mu\theta\partial_\mu - K_{\mu\nu}\gamma^\mu\theta\partial^\nu$, satisfazem à álgebra

$$\begin{cases} [\mathcal{Q}, P_\nu] = 0; \\ \left\{\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}\right\} = 2\gamma^\mu P_\mu + 2K_{\mu\nu}\gamma^\mu P^\nu, \end{cases} \tag{3.20}$$

que é a nova álgebra de supersimetria. Nota-se que ela contém o "tensor" que viola Lorentz, entretanto a modificação da álgebra ainda diz que o anti-comutador dos geradores de supersimetria produz uma translação. Portanto a teoria viola a simetria de Lorentz e ao mesmo tempo é supersimétrica. Cabe lembrar que isto só foi possível graças a modificações dos geradores de supersimetria. Portanto deve-se tomar cuidado ao se comparar esta teoria com outras que não modificam a álgebra de supersimetria.

3.3 Segundo Caminho: Violação da Simetria de Lorentz em Campos Componentes

Em um trabalho de 2005 [52] Nibbelink e Pospelov proporam introduzir a violação da simetria de Lorentz em teorias de campo supersimétricas usando um argumento de dimensionalidade de operadores. Os autores tiveram como principal motivação o trabalho [53], onde diz que em teorias que contenha a violação de Lorentz, sob certas condições, os efeitos dessa violação são suprimidos por potências da massa de Planck se a dimensão do operador que aparece na lagrangeana for maior ou igual a 5 em massa. Entretanto, efeitos quânticos podem modificar este resultado. Isto seria possível através do mecanismo de Coleman-Weinberg [54], que é a indução de uma quebra de simetria via correções radiativas. A quebra de simetria, por sua vez, faria surgir um fenômeno conhecido na literatura de teoria de campos como transmutação dimensional.

Desta forma, a constante de acoplamento passaria a ter dimensão positiva em massa e o operador passaria a ter dimensão menor que 5, fazendo com que os efeitos da violação da simetria de Lorentz não fossem suprimidos por potências da massa de Planck. Os autores propõem que em uma dada escala de energia, onde a supersimetria seria exata, esta desempenharia o papel de "simetria de proteção", inibindo uma possível transmutação dimensional do operador para dimensões menores que 5. Vejamos como os autores constroem operadores violadores de Lorentz no contexto da supersimetria, mas, antes porém, analisemos primeiro como é possível haver supressão na relação de dispersão por uma escala de energia ultravioleta.

Existem muitas abordagens [55]- [59] em teorias quânticas de gravidade que afirmam que os efeitos da violação da simetria de Lorentz seriam fortementes verificados em escalas de energia da ordem de 10^{19} Gev $\sim M_{Planck}$. Como tentativa de explicar porque esses efeitos não são verificados na escala de energia do Modelo-Padrão, cuidadosos cálculos feitos a partir destas abordagens afirmam que tais efeitos devem ser suprimidos por potências da massa de Planck da seguinte maneira

$$E^2 = p^2 + m^2 + a_1 \frac{E^3}{M_P} + a_2 \frac{E^4}{{M_P}^2} + \cdots , \tag{3.21}$$

onde os a_i são constantes e M_P é a massa de Planck. Nibbelink e Pospelov usam abordagens baseadas na *loop quantum gravity.* Entretanto, usando teoria de cordas, como mostrado na refererência [55], Kostelecký e Potting descobriram um mecanismo que suprime a relação de dispersão da seguinte forma

$$\Delta K(p) = \frac{\lambda}{M_P^i} < T > \cdot \Gamma p^i , \tag{3.22}$$

onde os índices de Lorentz foram suprimidos, λ é uma constante de acoplamento (adimensional), $< T >$ é um tensor que adquire valor esperado no vácuo diferente de zero e Γ é um símbolo para denotar uma estrutura de matriz gama de Dirac. Esta relação de dispersão é oriunda de uma lagrangeana que contém o seguinte termo

$$\mathcal{L} \supset \frac{\lambda}{M_P^i} T\bar{\psi} \cdot \Gamma \chi p^i, \tag{3.23}$$

onde $\bar{\psi}$ e χ são férmions. Apesar de ainda não termos em mãos uma teoria final da gravitação, as abordagens citadas, que vem de teorias mais fundamentais, nos sugerem que a supressão na relação de dispersão deve existir. Isto posto, observemos o operador no termo de segunda ordem ($1/M_P$) na lagrangeana (3.23). Sabendo que a dimensão da lagrangeana em quatro dimensões é massa a quarta, então o operador $T\bar{\psi} \cdot \Gamma\chi p^i$ deverá ter dimensão 5. O fato do operador ter dimensão 5 classicamente não implica que ele não poderia mudar de dimensão após correções radiativas. O que conduziria a uma não supressão pela massa de Planck. No trabalho que os autores se basearam, [53], há algumas lagrangeanas de relevância para o MP que contém operadores que violam lorentz e modificam a relação de dispersão. Tais operadores de dimensão 5 foram construídos satisfazendo seis exigências:

1. Quadrádico nos campos;
2. As derivadas devem ser de segunda ordem ou mais;
3. Invariante de *gauge*;
4. Invariante de Lorentz, exceto por um tensor constante;
5. Não reduzível a baixas dimensões por equações de movimento;
6. Não reduzível por uma derivada total.

Para termos ideia de como o mecanismo funciona, vamos citar um exemplo simples dado pela lagrangeana do campo escalar complexo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + i\frac{\kappa}{M_P}\bar{\Phi}(\eta \cdot \partial)^3\Phi, \tag{3.24}$$

onde $\mathcal{L}_1 = i\frac{\kappa}{M_P}\bar{\Phi}(\eta\cdot\partial)^3\Phi$ e η^μ é um vetor violador de Lorentz. A equação de movimento em primeira ordem é $(\Box + m^2)\Phi = 0$. É possível checar que $\bar{\Phi}(\eta \cdot \partial)^3\Phi$ é o único operador que satisfaz as seis exigências e tem dimensão 5. Um outro operador possível seria $\bar{\Phi}\eta \cdot \partial\Phi$. Entretanto, o mesmo seria reduzível à $m^2\bar{\Phi}\eta\cdot\partial\Phi$ por meio da equação de movimento de primeira ordem. Considerando agora o termo violador de Lorentz, a equação de movimento fica

$$(\Box + m^2)\Phi = i\frac{\kappa}{M_P}(\eta \cdot \partial)^3\Phi. \tag{3.25}$$

Escolhendo $\eta^\mu = (1, 0, 0, 0)$ com $(\eta \cdot \partial \sim -iE)$, teremos

$$E^2 \cong |\vec{p}|^2 + m^2 + \frac{\kappa}{M_P}|\vec{p}|^3, \tag{3.26}$$

onde foi usado $\Box\Phi = -m^2\Phi$ e $E \cong |\vec{p}|$ para altas energias. Operadores de dimensão 5 para o setor de *gauge* são construídos da seguinte forma [60]

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}\partial^\nu \tilde{F}^{\mu\rho}; \\ F_{\mu\nu}\partial^\nu F^{\rho\lambda}; \\ F_{\mu\lambda}\partial_\nu \tilde{F}^{\rho\lambda}; \\ F^{\mu\nu}\partial^\lambda F^{\rho\tau}. \end{cases} \tag{3.27}$$

As duas primeiras expressões são descartadas por serem reduzidas pela equação de movimento de primeira ordem. As duas últimas são então contraídas por um tensor de fundo sem dimensão para formar o operador violador de Lorentz.

Agora que sabemos por que operadores violadores de Lorentz de dimensão cinco suprimem até certo ponto os efeitos da violação de Lorentz, iniciaremos uma discussão da supersimetrização feita por Nibbelink e Pospelov desses operadores. O objetivo desses autores é essencialmente dois: primeiro, saber se a supersimetria causa modificações relevantes na relação de dispersão; segundo, verificar se a supersimetria funciona como simetria de proteção para operadores de dimensão maior ou igual a 5. Nesta abordagem os operadores devem respeitar a invariância de *gauge* do Modelo-Padrão Supersimétrico Mínimo (MPSM) e possuir supersimetria exata. Uma vez que no MPSM os campos de matéria e de *gauge* são descritos por supermultipletes quirais e vetoriais, nos atentaremos agora somente a esses supercampos. Os supercampos quiral e vetorial não carregam índices de Lorentz. Então, seguindo o raciocínio anterior, toma-se a derivada do usual supermultiplete quiral de Wess-Zumino, Φ, o qual tem dimensão 1 em massa, e depois contrai-se o termo usando um tensor de fundo adimensional. Os possíveis operadores violadores de Lorentz para o supermultiplete quiral no superespaço são[1]

$$\begin{cases} \int d^2\theta \;\; \Phi\partial_\mu\Phi; \\ \int d^2\theta \;\; \Phi\partial_\mu\partial_\nu\Phi; \\ \int d^2\theta \;\; \Phi\Phi\partial_\mu\Phi. \end{cases} \tag{3.28}$$

Desses operadores o primeiro tem dimensão 4, enquanto os outros tem dimensão 5. Um operador só com um campo não pode ser usado porque seria reduzido a uma derivada total no superespaço. A derivada ∂_μ é modificada para que o operador seja invariante de *gauge*, $\Phi \to e^{-\Lambda}\Phi$. Quando isto é feito, é possível mostrar que quando se contrai um vetor de fundo com o operador de dimensão 4, este termo passa a não respeitar a quiralidade. Portanto operadores violadores de Lorentz quirais de dimensão 4 não devem estar presente no MPSM. Ao analisarem o setor de *gauge* eles concluem, utilisando um argumento de simetria, que o tensor de fundo deve carregar dois índices espinoriais anti-simétricos, e quando for contraído com o operador, que no caso de dimensão 4 terá dois índices espinoriais simétricos, será identicamente nulo no superespaço. Portanto, como regra geral, operadores violadores de Lorentz de dimensão 4 não podem estar presentes no MPSM, só restando analisar o caso de dimensão 3.

Os autores mostram que a ação da super-QED com todos os operadores de dimensão 5 violadores de Lorentz é

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{16e^2}W^2 + mE_+E_-\right) + h.c. + \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\bar{E}_\pm e^{\pm V}E_\pm + \\ &+ \frac{1}{M}\int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\left(iN^\mu_\pm\bar{E}_\pm e^{\pm V}\mathcal{D}_\mu E_\pm - \frac{1}{2}N^\mu\bar{W}\bar{\sigma}_\mu W\right) + \\ &+ \frac{1}{M}\int d^4x\, d^2\theta\, C^{\mu\nu\lambda}W\sigma_{\mu\nu}\partial_\lambda W + h.c. \end{aligned} \tag{3.29}$$

A primeira linha é a super-QED, sendo $E_\pm$ supercampos quirais. As duas últimas linhas descrevem uma teoria supersimétrica com violação da simetria de Lorentz, que é regida pelos tensores de fundo $N^\mu_\pm$, N^μ e $C^{\mu\nu\lambda}$. A relação de dispersão para esta ação é

[1]A exigência número 1, quadrática nos campos, é a única que será abandonada nesta abordagem supersimétrica.

$$E^2 = p^2 + m^2 + m^2(N^0_{\pm} - N^0_{\mp})\frac{E}{M_P} + \cdots, \tag{3.30}$$

onde $E << M_P$. Com isto os autores alcaçam o primeiro objetivo e concluem que a supersimetria não causa modificações significativas na relação de dispersão para operadores que violam Lorentz e tem dimensão 5 de massa. O segundo objetivo, que era saber se a supersimetria protege a relação de dispersão, será atingido após uma breve discussão de quebra de supersimetria que iniciaremos agora: Este caminho para supersimetrizar, como no primeiro caminho, produz uma teoria invariante por supersimetria e ao mesmo tempo violadora de Lorentz. Esta conclusão é facilmente verificada, pois a superação violadora de Lorentz têm a seguinte estrutura (tensor de fundo)(derivadas)(supercampos). Ao fazermos uma variação de supersimetria nesta superação, teremos

$$\begin{aligned} &\rightarrow \delta_{Susi}(\text{tensor de fundo})(\text{derivadas})(\text{supercampos}) \\ &= (\text{tensor de fundo})(\text{derivadas})\delta_{Susi}(\text{supercampos}){=}0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Os autores reconhecem a necessidade de implementar uma teoria que exiba tanto a quebra de Lorentz quanto a quebra de supersimetria e propõe a seguinte superação que conduz a uma quebra de supersimetria

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{V}\Psi, \text{ com } \tilde{V} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu, \tag{3.32}$$

onde v_μ é um vetor de fundo e Ψ é um supercampo arbitrário real. Os autores escolhem $\Psi = \Phi\bar{\Phi}$, onde Φ é um supercampo quiral com $[\Phi] = 1$. Desta forma, além da supersimetria deixar de ser exata o operador passa a ter dimensão 3 de massa. Entretanto, fazer isto implica que o termo de Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu A_\nu \partial_\kappa A_\lambda$, que guarda as características dessa superação, necessariamente deve violar a supersimetria. Aqui está a maior conclusão dos autores, isto é, eles concluem que a supersimetria exata proíbe operadores de dimensão 3. Logo, operadores de dimensão 5 são protegidos pela supersimetria do fenômeno de transmutação dimensional para dimensões menores[2]. Os

[2]Uma vez que os efeitos da violação da simetria de Lorentz para operadores de dimensão menores que 5 também ainda não foram detectados, os autores acreditam que uma supressão por meio da massa de Planck apareça proporcionada pela quebra suave de supersimetria.

autores enunciam este resultado da seguinte maneira:

Qualquer operador de dimensão maior ou igual a 5, violador da simetria de Lorentz, que respeita a simetria de gauge do MPSM e possui supersimetria exata, é suprimido por potências da escala ultravioleta M_P.

Veremos na próxima seção que essa quebra de supersimetria proposta aqui pelos autores guarda semelhanças com uma proposta anterior, onde foi utilizado um supercampo quiral para efetuar a quebra de supersimetria. A maneira que o vetor de fundo, v_μ, é acomodado em um supercampo quiral é justamente a mesma sugerida aqui pelos autores, $\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu$. Mostraremos, também na próxima seção, que quando a supersimetria faz o mapeamento entre férmions e bósons ou vice-versa, misturando assim os termos violadores de Lorentz, torna-se impossível violar Lorentz sem violar supersimetria. Portanto o método que Nibbelink e Pospelov sugerem, (3.32), para quebrar a supersimetria pode ser alcançado dentro de um formalismo mais geral desenvolvido anteriormente. Tratase do terceiro caminho que vamos apresentar para implementar a quebra de Lorentz em teorias supersimétricas. Método este que é uma proposta original do nosso grupo.

3.4 Terceiro Caminho: Quebra da Simetria de Lorentz Acompanhada pela Quebra da Supersimetria

Este terceiro caminho foi proposto em 2003 pelo trabalho [61]. Aqui é realizado a supersimetrização do termo CPT-ímpar do setor de *gauge* do MPE. Este termo é uma proposta de Carroll-Field-Jackiw para introduzir um termo tipo Chern-Simons em 4 dimensões. Termo este que futuramente foi incorporado ao conjunto mínimo de termos do MPE devido à sua relevância no contexto de teorias que violam Lorentz. Como já dissemos, o MPE é inspirado em uma teoria mais fundamental, a teoria de cordas. Por outro lado, a supersimetria é necessária para se eliminar inconsistências nesta última. Portanto, sob este ponto de vista, o MPE deve ser supersimetrizado, algo que e os autores começaram por aqui, fazendo a extensão supersimétrica do termo de Carroll-Field-Jackiw.

Veremos nesta seção que a maneira que a supersimetria é implementada segue os critérios canônicos de supersimetrização. Ou seja, é proposta uma superação guardando todas as simetrias exigidas por uma teoria quântica de campos supersimétrica, que reproduza em campos componentes, com a menor quantidade de termos possíveis, o termo de interesse. Somente quando exige-se a violação da simetria de Lorentz por algum operador que desempenhará o papel do vetor de fundo, que a ação passa a descrever realmente a teoria pretendida, isto é, uma teoria violadora de Lorentz e de supersimetria simultaneamente.

Os autores percebem que a simetria de *gauge* pode também ser usada como guia para identificar qual deve ser o operador que desempenhará o papel do vetor de fundo, v_μ, no termo $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu\partial_\nu F_{\kappa\lambda}$. Nesta abordagem nenhuma modificação da álgebra de supersimetria é feita. Portanto pode-se usar a álgebra usual de supersimetria antes mesmo de se realizar qualquer cálculo para saber o que acontecerá com a supersimetria quando Lorentz é quebrada. Veremos que a violação de Lorentz implicará necessariamente na violação de supersimetria. Começaremos agora a discutir brevemente o que significa supersimetrização canônica para depois discutir este último caminho que conduz à implementação da supersimetria em teorias com quebra de Lorentz.

Em teorias que preservam Lorentz, como é de conhecimento geral, para se construir uma teoria supersimétrica usando o formalismo de supercampos é exigido algumas características da superação

1. Adimensionalidade;
2. Invariância de Lorentz;
3. Invariância por supersimetria;
4. Invariância de *gauge*;
5. Realidade.

Para a eletrodinâmica de Maxwell, por exemplo, que tem a ação dada por

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.33}$$

a dificuldade para achar a sua versão supersimétrica está em construir um supercampo que contenha no máximo o tensor de segunda ordem, $F^{\mu\nu}$, e que seja como um todo invariante de *gauge*. Como sabemos, super-Maxwell é

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\; d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\Big\{W^\alpha W_\alpha \delta(\bar{\theta}^2) + h.c.\Big\}, \tag{3.34}$$

onde

$$
\begin{aligned}
W_\alpha(x,\theta,\bar\theta) &= \lambda_\alpha(x) + i\theta^\beta \sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu\lambda_\alpha(x) - \frac{1}{4}\bar\theta^2\theta^2\Box\lambda_\alpha(x) + \\
&+ 2\theta_\alpha D(x) - i\theta^2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu D(x) + \sigma^{\mu\nu\beta}_\alpha\theta_\beta F_{\mu\nu}(x) + \\
&- \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu\beta}_\alpha\sigma^\lambda_{\beta\dot\alpha}\theta^2\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\lambda F_{\mu\nu}(x) - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}(x)\theta^2. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

A contração $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é conseguida via contração dos índices espinoriais na superação $W^\alpha W_\alpha$. Super-Maxwell em campos componentes é

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda + 2D^2 \right\}. \qquad (3.36)$$

A ideia é reproduzir o termo principal, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, via campos conponentes. Os outros termos restantes é o preço que se paga por uma formulação supersimétrica. Isto é o que chamamos de formulação canônica para implementar a supersimetria. Vejamos agora como é possível supersimetrizar a ação violadora de Lorentz

$$\Sigma = \frac{1}{2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}. \qquad (3.37)$$

O Procedimento funciona da seguinte forma:

- Achar o objeto que poderia desempenhar o papel do vetor constante v_μ;
- Acomodar o objeto, que no momento não é constante, dentro de uma estrutura de supercampo;
- Construir uma superação invariante com todas as propriedades exigidas por uma supersimetrização canônica;
- Calcular a ação em campos componentes;
- Exigir, consistentemente, que o objeto que desempenhará o papel de vetor de fundo seja constante para violar a simetria de Lorentz.

Cabem aqui algumas colocações: Se o objeto que irá desempenhar o papel de vetor constante não for em primeiro momento uma constante, a ação (3.4) não será invariante de *gauge*. Entretanto, ao se exigir esta simetria dessa ação, achamos que $\delta_{gauge}\Sigma =$

$\frac{1}{8}\int d^4x\ \Lambda\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)$, onde $\delta_{gauge}A_\mu = \partial_\mu\Lambda$. Então, se $(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) = 0$, isto é, se o vetor for escrito como derivada de um campo escalar, $v_\mu = \partial_\mu s$, a simetria de *gauge* será preservada. Por outro lado, um vetor tem 4 graus de liberdade, enquanto que a derivada de um escalar real só tem um. Logo estas descrições não podem ser equivalentes, a não ser que o vetor seja constante.

Aqui que entra o papel da supersimetria. Para garantir a invariância de *gauge*, iremos usar como guia, para representar o vetor, a derivada de um escalar. A esturura da supersimetria irá permitir identificar $\partial_\mu s$ como o vetor constante v_μ. Portanto a simetria de *gauge* aqui neste momento só funciona como guia, não como fator determinante para achar a forma do vetor de fundo. Outro ponto importante é que a supersimetria sendo implementada desta forma, antes de tomar o vetor de fundo constante, é uma teoria supersimétrica convencional, da mesma forma que é super-Maxwell. Após acharmos que o vetor pode ser escrito como $v_\mu = \partial_\mu s$, deve-se acomodá-lo dentro de um supermultiplete. Exatamente como se faz com qualquer teoria supersimétrica usual. O supercampo que traria o conjunto mínimo possível de campos componentes e que acomodaria $\partial_\mu s$ é o supercampo escalar quiral, que é usualmente escrito como

$$\begin{aligned} S\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= s\left(x\right) + \sqrt{2}\theta\psi\left(x\right) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu s\left(x\right) + \\ &+ \theta^2 F\left(x\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\left(x\right) - \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box s\left(x\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Logo, o supermultiplete quiral tem os campos componentes $S = (s, \psi, F)$. Para que os graus de liberdade fermiônicos sejam iguais aos bosônicos, s deve ser um campo escalar complexo, ψ um campo espinorial e F um campo escalar complexo. Notamos aqui um aparente problema com a identificação $v_\mu = \partial_\mu s$, pois v_μ é real. Isto não é nenhum problema, pelo contrário, só vem reforçar o fato que a simetria de *gauge* serviu apenas como guia neste caso específico. Sendo $S\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ um supercampo, então ele deve transforma-se como tal. Logo, as trasformações de supersimetria envolvendo os campos componentes de S são

$$\delta s = \sqrt{2}\varepsilon^\alpha\psi_\alpha, \tag{3.39}$$

$$\delta\psi_\alpha \;=\; \sqrt{2}F\varepsilon_\alpha + i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu s, \tag{3.40}$$

$$\delta F \;=\; i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha. \tag{3.41}$$

A identificação consistente que nos referíamos quando tomarmos $v_\mu = \partial_\mu s$, é que devemos levar em conta que s pertence a um supermultiplete, $S(s(x), \psi, F)$, com $\partial_\mu s \neq 0$, mas constante. Por isto, nesta abordagem, não existe só um campo de fundo, mas sim, um multiplete de fundo. Uma vez que são campos de fundo, digamos que tenhamos, por exemplo, a configuração[3] $S(s(x), \psi = 0, F = 0)$ com $\partial_\mu s \neq 0$. Notamos, antes mesmo de calcular a ação em campos componentes, que quando $\partial_\mu s \neq 0$ a equação (3.40) nos informa que $\delta\psi_\alpha \neq 0$. Ou seja, quando impomos a condição de violação da simetria de Lorentz $\partial_\mu s \neq 0$, necessariamente, a supersimetria também é quebrada. É possível mostrar que a superação com N=1 supersimetria que reproduz o termo de Carroll-Field-Jackiw é

$$\mathcal{S} \;=\; \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\Big\{W^\alpha(D_\alpha V)S + h.c.\Big\}, \tag{3.42}$$

com W_α dado pela equação (3.35), $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu$ e V é um supercampo vetorial real no *gauge* de Wess-Zumino. A ação em campos componentes fica

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \;=&\; \int d^4x \left\{\frac{i}{2}\partial_\mu(s-s^*)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\nu F_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}(s+s^*)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 4D^2(s+s^*) + \right.\\ &- \; 2is\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - 2is^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \sqrt{2}\lambda\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} + \sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}F_{\mu\nu} + \\ &+ \left. \; \lambda^2F + \bar{\lambda}^2F^* - 2\sqrt{2}\lambda\psi D - 2\sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\psi}D\right\}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Agora tomando $i\partial_\mu(s - s^*) = v_\mu =$ constante, passamos a ter a versão supersimétrica do Termo de Carroll-Field-Jackiw de fato.

[3]Mesmo que sejam campos de fundo todas as possíveis configurações devem estar de acordo com as equações de movimento.

O fato da superação ser adimensional impoz que o supercampo S não tivesse dimensão, e, consequentemente, que o vetor de fundo tivesse dimensão de massa, que é a dimensão correta para o vetor. Notamos que a possibilidade de escrever o vetor de fundo como derivada de um campo escalar foi proporcionada pela supersimetria ao rearranjar a parte real do campo escalar complexo como $i(s-s^*)$. Portanto é devido à supersimetria que podemos identificar o vetor de fundo como derivada de um escalar, e, não à simetria de *gauge*. Este caminho para supersimetrização tem três grandes vantagens que os outros dois anteriores não tem:

1. A supersimetria é alcançada via método canônico de supersimetrização;
2. A teoria final viola Lorentz e a supersimetria ao mesmo tempo;
3. O vetor de fundo emerge da própria teoria.

Este caminho para supersimetrizar teorias que violam Lorentz será usado nesta tese.

3.5 Considerações Finais

Nesse revisão não foi nosso interesse estudar as consequências físicas de cada modelo proposto. Só estávamos interessados na maneira em que foram formulados e quais eram o ponto de partida e chegada dos autores. No primeiro caminho, vimos que a supersimetria era implementada via uma mudança de coordenadas cujo o efeito era $\partial_\mu \to \partial_\mu + K_\mu{}^\nu \partial_\nu$, modificando assim o superespaço. Logo, a modificação na álgebra de supersimetria assumiria a forma $2i\gamma^\mu\partial_\mu \to 2i\gamma^\mu\partial_\mu + 2iK_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu$. O resultado final era uma teoria violadora de Lorentz totalmente supersimétrica. No segundo caminho os autores introduziram os tensores violadores de Lorentz contraindo-os com uma estrutura de supercampo, fazendo com que a teoria final fosse supersimétrica e violadora de Lorentz. Esta formulação não é genuinamente feita no superespaço. Trata-se na verdade de uma formulação em campos componentes. No terceiro caminho os autores não introduzem à mão o vetor de fundo, como acontecem nos dois primeiros caminhos. O vetor de fundo emerge da teoria ao exigir que a mesma viole a simetria de Lorentz. O resultado final é uma teoria violadora de Lorentz e de supersimetria. Portanto, este último caminho não necessita de um mecanismo adicional para implementar a quebra de supersimetria. Devemos salientar que os três caminhos são formulados via teorias efetivas. E uma vez que ainda não temos elementos para decidir se as simetrias de Lorentz e supersimetria são quebradas no mesmo nível de energia, não podemos inviabilizar de antemão nenhuma das possibilidades em detrimento de outra. Entretanto, cada uma das abordagens trazem consequências que experimentos em altas energias poderiam nos informar qual abordagem está na direção certa.

Capítulo 4

Violação da Simetria de Lorentz por um Supermultiplete Quiral

4.1 Introdução

A ação que queremos supersimetrizar é escrita como

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x\ K_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} = \frac{\kappa}{4}\int d^4x \left\{\frac{1}{2}\xi_\mu\xi_\nu F^{\mu}{}_{\kappa}F^{\kappa\nu} + \frac{1}{8}\xi_\lambda\xi^\lambda F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\},$$

ou simplesmente

$$\mathcal{S} = \frac{\kappa}{4}\int d^4x \left\{\frac{1}{2}\xi_\mu\xi_\nu F^{\mu}{}_{\kappa}F^{\kappa\nu} + \frac{1}{8}\xi_\lambda\xi^\lambda F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}. \tag{4.1}$$

Uma vez que a violação da simetria de Lorentz é regida por um vetor, sabemos como proceder para implementar a versão supersimétrica da ação acima. Usaremos como inspiração o trabalho da referência [61], onde os autores realizaram a supersimetrização do termo de Carroll-Field-Jackiw, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$, identificando o vetor constante v_μ como derivada de um campo escalar. Para se conseguir tal feito o vetor de fundo v_μ (vetor que viola Lorentz) foi acomodado dentro de um supercampo quiral.

Entretanto ao fazermos a mesma identificação, $\xi_\mu = \partial_\mu S$, não podemos dizer que o vetor de fundo é a derivada de um campo escalar, pois a álgebra supersimétrica impõe que S deve ser um campo escalar complexo e o vetor de fundo é real. Os autores da última referência citada não tiveram esta dificuldade, pois em seu trabalho o campo escalar complexo ao ser escrito como uma parte real e outra imaginária, a estrutura da superação impôs que o vetor de fundo fosse sempre real. Isto foi possível de ser feito devido à característica do termo de Carroll-Field-Jackiw.

Neste trabalho, como veremos claramente no final dos cálculos, a escolha de um supercampo quiral para acomodar o vetor de fundo irá nos revelar uma interessante forma para $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$, que não será completamente fixada por apenas um campo escalar complexo, como acontece na supersimetrização do termo de Carroll-Field-Jackiw. Mostraremos que a supersimetria impõe que $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ deva ser constituído também de férmions. O fato da supersimetria ditar a forma deste tensor de fundo é inédito na literatura. E, como sabemos, que a partir de férmions podemos construir tensores, nada mais natural que a supersimetria imponha que $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ seja constituído, em sua composição mais fundamental, de férmions.

4.2 Supersimetrização

Construiremos uma superação na formulação do superespaço tal que sua expansão em campos componentes tenha como um de seus termos a ação (4.1). A princípio deveríamos propor duas superações para reproduzir $\frac{1}{2}\xi_\mu\xi_\nu F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu}$ e $\frac{1}{8}\xi_\lambda\xi^\lambda F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ separadamente. Entretanto, quando construímos a superação que contenha o primeiro termo, a mesma traz naturalmente o segundo. Isto não é simplesmente uma coincidência de cálculo e pode ser naturalmente esperado por uma análise das representações irredutíveis de $SO(1,3)$. Com o intuito de reproduzir a ação (4.1) propomos a superação com extensão mínima (N=1) como sendo dada por

$$S = \kappa \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta} \left\{ (D^\alpha \Omega)\, W_\alpha (\overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{\Omega}) \overline{W}^{\dot{\alpha}} + h.c. \right\}. \tag{4.2}$$

Onde as derivadas invariantes perante a supersimetria são

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \tag{4.3}$$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu. \tag{4.4}$$

O supermultiplete intensidade de campo W tem as seguintes propriedades $\overline{D}_{\dot{\beta}}W_\alpha\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=0$ e $D^\alpha W_\alpha\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=\overline{D}_{\dot{\alpha}}\overline{W}^{\dot{\alpha}}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$. Ele pode ser calculado usando a igualdade

$$W_\alpha(x,\theta,\bar{\theta})=-\frac{1}{4}\overline{D}^2D_\alpha V, \tag{4.5}$$

com $V=V^\dagger$. Como usualmente é feito na literatura escolheremos o *gauge* de Wess-Zumino

$$V_{WZ}(x,\theta,\bar{\theta})=\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x)+\theta^2\overline{\theta\lambda}\,(x)+\bar{\theta}^2\theta\lambda(x)+\theta^2\bar{\theta}^2D(x). \tag{4.6}$$

Portanto a expansão em θ de $W_\alpha(x,\theta,\bar{\theta})$ é dada por

$$\begin{aligned}W_\alpha(x,\theta,\bar{\theta}) &= \lambda_\alpha(x)+i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\lambda_\alpha(x)-\frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box\lambda_\alpha(x)+\\ &+ 2\theta_\alpha D(x)-i\theta^2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu D\,(x)+\sigma^{\mu\nu\beta}_\alpha\theta_\beta F_{\mu\nu}(x)+\\ &- \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu\beta}_\alpha\sigma^\lambda_{\beta\dot{\alpha}}\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\lambda F_{\mu\nu}(x)-i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x)\theta^2.\end{aligned} \tag{4.7}$$

O supercampo Ω na superação (4.2) é quiral ($\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Omega\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=0$), consequentemente deve ter a seguinte expansão[1] em θ

$$\begin{aligned}\Omega\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= S\,(x)+\sqrt{2}\theta\zeta\,(x)+i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu S\,(x)+\\ &+ \theta^2G\,(x)+\frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\zeta\,(x)-\frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box S\,(x)\,,\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde as transformações de supersimetria ($\delta\Omega=-i(\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}\overline{Q}^{\dot{\alpha}}+\epsilon^\alpha Q_\alpha)\Omega$) dos seus campos componentes são

$$\delta S = \sqrt{2}\varepsilon^\alpha\zeta_\alpha, \tag{4.9}$$

$$\delta\zeta_\alpha = \sqrt{2}G\varepsilon_\alpha+i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu S, \tag{4.10}$$

$$\delta G = i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\zeta_\alpha. \tag{4.11}$$

[1] O vínculo $\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Omega\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=0$ restringe bastante a expansão de Ω fazendo com que o campo componente de fundo tenha no máximo spin=1/2 e que seu superparceiro tenha spin zero.

Para que tenhamos uma correspondência com a ação que nos propomos a supersimetrizar, veremos que é possível escolher $\partial_\mu S$ como constante (S dependente linearmente de x^μ), pois $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ é constante. Ao fazermos isto, notamos que além do campo de fundo quebrar Lorentz ele quebra a supersimetria. Vejamos como: Seja o supermultiplete de fundo Ω como tendo seus campos componentes de fundo dados por

$$\Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta = 0,\, G = 0), \tag{4.12}$$

com a única restrição que torna este vácuo violador da simetria de Lorentz, $\partial_\mu S \neq 0$. Agora usando as transformações de supersimetria para Ω,

$$\delta S \;=\; S' - S = \sqrt{2}\varepsilon^\alpha \zeta_\alpha = 0, \tag{4.13}$$

$$\delta G \;=\; G' - G = i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu \zeta_\alpha = 0, \tag{4.14}$$

$$\delta \zeta_\alpha \;=\; \zeta'_\alpha - \zeta_\alpha = \sqrt{2}G\varepsilon_\alpha + i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu S \neq 0. \tag{4.15}$$

O valor inicial do campo de fundo ζ é zero. Entretanto, após uma transformação de supersimetria sobre o vácuo da teoria, Ω, o mesmo não permanece invariante, pois a equação (4.15) mostra que ζ assume um valor constante diferente de zero. Portanto ao dizermos que a teoria quebra Lorentz ($\partial_\mu S \neq 0$), naturalmente a supersimetria também é quebrada. Podemos ter outras configurações violadoras da simetria de Lorentz e, consequentemente, de supersimetria. Na verdade, qualquer configuração do *background* que tenha $\partial_\mu S \neq 0$ ou $\zeta \neq 0$ viola Lorentz e, consequentemente, conforme as transformações de supersimetria nos mostram, também viola a supersimetria. Portanto as propostas de possíveis configurações para o *background* são[2]

[2]Como já foi dito, todas as configurações possíveis do *background* devem estar de acordo com as equações de movimento. Logo, as equações de movimento podem restringir este conjunto de possibilidades.

$$\begin{cases} \Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta = 0,\, G = 0) \text{ com } \partial_\mu S \neq 0; \\ \Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta \neq 0,\, G = 0) \text{ com } \partial_\mu S \neq 0; \\ \Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta = 0,\, G \neq 0) \text{ com } \partial_\mu S \neq 0; \\ \Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta \neq 0,\, G \neq 0) \text{ com } \partial_\mu S \neq 0; \\ \Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta \neq 0,\, G = 0); \\ \Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta \neq 0,\, G \neq 0); \\ \Omega = \Omega(S = 0,\, \zeta \neq 0,\, G \neq 0); \\ \Omega = \Omega(S = 0,\, \zeta \neq 0,\, G = 0). \end{cases} \tag{4.16}$$

Estas configurações nos antecipa as possíveis constituições do tensor violador de Lorentz, $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$. A última configuração possível para o *background*, $\Omega = \Omega(S = 0,\, \zeta \neq 0,\, G = 0)$, é quando o tensor de fundo $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ é constituído somente por férmions. Mesmo que tenhamos de antemão as possibilidades para escrever esse tensor, o que irá determinar de fato se é possível ou não escrevê-lo assim será a característica da ação. Por exemplo, a ação de Carrol-Field-Jackiw, também tem um *background* quiral, mas o vetor violador de Lorentz não pode ser escrito em termos de férmions. Portanto o cálculo é imprescindível para saber a constituição e a forma de $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$. Se não usássemos a condição $\partial_\mu S \neq 0$ na primeira configuração, $\Omega = \Omega(S \neq 0,\, \zeta = 0,\, G = 0)$, a teoria seria invariante de Lorentz e, consequentemente, sobre supersimetria; pois inicialmente $S \neq 0$ e depois de uma transformação de supersimetria o campo de fundo S não mudaria, isto é, $\delta S = S' - S = \sqrt{2}\varepsilon^\alpha \zeta_\alpha = 0$. Sabemos qual deve ser a condensação dos campos (*background*), entretanto, não temos elementos para decidir como isto aconteceu, ou seja, não sabemos como ocorreu a quebra da supersimetria e tampouco se a simetria de Lorentz e a supersimetria foram quebradas ao mesmo tempo. Também não sabemos se a quebra de Lorentz se deu primeiro que a quebra de supersimetria ou vice-versa. O que temos aqui é um modelo efetivo que poderia ter sido obtido de uma teoria mais fundamental no qual a supersimetria teria sido quebrada por algum mecanismo mais fundamental.

A superação deve ter os seguintes pré-requisitos: Adimensionalidade, invariância de *gauge*, invariância por supersimetria. Devemos escolher a dimensão do supercampo quiral para que a superação seja adimensional. Sabemos que as dimensões dos objetos conhecidos na literatura são

$$\begin{cases} \left[\int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\right] = -2; \\ [W_\alpha] = \left[\overline{W}_{\dot{\alpha}}\right] = 3/2; \\ [D_\alpha] = \left[\overline{D}_{\dot{\alpha}}\right] = 1/2. \end{cases} \tag{4.17}$$

Isto nos obriga a dizer que Ω tem dimensão de massa a -1, ou seja, $[\Omega] = -1$. No que diz respeito a invariância por supersimetria a resposta é imediata, pois estamos usando a formulação de supercampos; onde a invariância por supersimetria é explícita. Já no tocante à invariância de *gauge* a resposta também é positiva, pois Ω é um objeto que antes da "condensação" pode ser escolhido como sendo invariante de *gauge*. Portanto a construção da superação está consistente[3].

A ação (4.2) quando escrita em campos componentes é bastante complexa e de difícil visualização. Por isto preferimos separá-la em três partes [62]: Parte bosônica, fermiônica e misturada. Portanto[4],

$$\begin{aligned} S_{\text{bóson}} &= \kappa \int d^4x \Big\{ -16 \left[\frac{1}{4}\partial_\lambda S \partial_\mu S^* (F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\lambda} + F^\lambda{}_\kappa F^{\kappa\mu}) + \frac{1}{8}\partial_\lambda S \partial^\lambda S^* F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] + \\ &+ 2D\varepsilon^{\lambda\mu\tau\rho}\partial_\lambda S\partial_\mu S^* F_{\tau\rho} - 2i\partial_\lambda S \partial_\mu S^* \varepsilon^{\lambda\tau\rho\kappa} F_{\tau\rho}F^\mu{}_\kappa + 8iD\partial_\lambda S\partial_\mu S^* F^{\lambda\mu} + \\ &- 2D\partial_\lambda S\partial_\mu S^* \varepsilon^{\lambda\mu\nu\kappa} F_{\nu\kappa} + 8D^2 \partial_\mu S \partial^\mu S^* + 16 D^2 \left|G\right|^2 + h.c. \Big\}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{férmion}} &= \kappa \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2}\partial_\lambda\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}\lambda\sigma^\lambda\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\partial_\lambda\zeta\sigma^\mu\bar{\lambda}\lambda\sigma^\lambda\partial_\mu\bar{\zeta} + 2\partial_\mu\zeta\partial^\mu\lambda\bar{\zeta}\bar{\lambda} + \\ &- \frac{1}{2}\partial_\lambda\zeta\sigma^\lambda\partial_\mu\bar{\zeta}\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda} - 2\partial_\lambda\zeta\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda\bar{\zeta}\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\lambda\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\mu\partial_\lambda\zeta\bar{\zeta}\partial_\mu\bar{\lambda} + \\ &- \frac{1}{2}\zeta\lambda\bar{\zeta}\Box\bar{\lambda} - \zeta\lambda\partial_\mu\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\tau\partial_\tau\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\zeta\lambda\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\zeta} + \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\lambda\bar{\zeta}\partial_\nu\bar{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta\Box\lambda\bar{\zeta}\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\zeta\partial_\nu\lambda\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\zeta} + \\ &- \frac{1}{2}\zeta\partial_\nu\lambda\partial_\mu\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\lambda} + \zeta\partial_\mu\lambda\bar{\zeta}\partial^\mu\bar{\lambda} - 2\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda + h.c. \Big\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

e

[3]Tomamos o hermitiano conjugado da superação (4.2), como usualmente aparece na literatura, com o intuito de se evitar problemas de unitariedade.

[4]O cálculo desta ação em campos componentes é bastante trabalhoso e delicado, por isto o uso de várias identidades da referência [63] foram extremamente úteis.

$$
\begin{aligned}
S_{\text{mistura}} &= \kappa\int d^4x\Big\{-4iD^2\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}-2\sqrt{2}iDG^*\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}+2\sqrt{2}D\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu S^*+\\
&+ 2D\zeta\sigma^\nu\partial_\mu\bar{\zeta}F_\nu{}^\mu+iD\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\zeta\sigma_\alpha\partial_\mu\bar{\zeta}F_{\tau\rho}+\sqrt{2}G^*\zeta\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\lambda}F_\mu{}^\nu+\\
&+ \frac{i}{\sqrt{2}}G^*\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\zeta\sigma_\alpha\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\tau\rho}+\sqrt{2}i\zeta\sigma^\tau\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda\partial_\mu S^*F_\tau{}^\mu+\\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\zeta\sigma_\alpha\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu S^*\partial_\nu\lambda F_{\tau\rho}-4\sqrt{2}iG^*D\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}+\\
&+ 2\sqrt{2}D\zeta\partial_\mu\lambda\partial^\mu S^*-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\zeta\partial_\tau\lambda\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\zeta\partial_\tau\lambda\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa}+\\
&- 4iD^2\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\zeta-2D\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\zeta F_\nu{}^\mu+iD\varepsilon^{\nu\kappa\mu\alpha}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\alpha\partial_\mu\zeta F_{\nu\kappa}+\\
&+ 2\sqrt{2}iDG^*\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\lambda}+2D\partial_\mu\zeta\sigma^\tau\bar{\zeta}F_\tau{}^\mu+iD\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\partial_\mu\zeta\sigma_\alpha\bar{\zeta}F_{\tau\rho}+\\
&+ 2\partial_\mu\zeta\sigma^\tau\bar{\sigma}^{\nu\kappa}\bar{\zeta}F_{\nu\kappa}F_\tau{}^\mu+i\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\partial_\mu\zeta\sigma_\alpha\bar{\sigma}^{\nu\kappa}\bar{\zeta}F_{\tau\rho}F_{\nu\kappa}+\sqrt{2}G^*\partial_\mu\zeta\sigma^\tau\bar{\lambda}F_\tau{}^\mu+\\
&+ \frac{i}{\sqrt{2}}G^*\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\partial_\mu\zeta\sigma_\alpha\bar{\lambda}F_{\tau\rho}-2\sqrt{2}iGD\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}+2i\left|G\right|^2\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}+\\
&- 2iG\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\partial_\mu S^*+4\sqrt{2}iGD\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\zeta}-2\sqrt{2}iGD\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda+\\
&- \sqrt{2}G\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\tau\lambda F_\mu{}^\tau+\frac{i}{\sqrt{2}}G\varepsilon^{\mu\nu\tau\alpha}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\alpha\partial_\tau\lambda F_{\mu\nu}-2i\left|G\right|^2\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda+\\
&+ 2\sqrt{2}D\partial_\mu S\bar{\zeta}\partial^\mu\bar{\lambda}+\sqrt{2}i\partial_\mu\left(\bar{\lambda}\bar{\zeta}\right)\partial_\lambda SF^{\lambda\mu}-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\mu\lambda\tau\rho}\partial_\mu\left(\bar{\lambda}\bar{\zeta}\right)\partial_\lambda SF_{\tau\rho}+\\
&- 2\sqrt{2}D\bar{\lambda}\partial_\mu\bar{\zeta}\partial^\mu S+2\sqrt{2}D\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S-\sqrt{2}i\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\nu\lambda}\partial^\lambda S+\\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\nu\kappa\lambda\alpha}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\alpha\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\nu\kappa}\partial_\lambda S+2G^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S-2\sqrt{2}\partial_\mu S\partial^\mu D\bar{\zeta}\bar{\lambda}+\\
&+ \sqrt{2}D\partial_\nu\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\partial_\mu S^*-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^\lambda\partial_\lambda\zeta\lambda\sigma^\nu\partial_\mu S^*F_\nu{}^\mu+\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha}\lambda\sigma_\alpha\bar{\sigma}^\lambda\partial_\lambda\zeta\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa}+\\
&- \frac{1}{2}\partial_\lambda\zeta\sigma^\lambda\bar{\lambda}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}+\sqrt{2}D\lambda\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\mu\partial_\lambda\zeta\partial_\mu S^*-\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\lambda\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda\lambda\partial_\mu S^*F_\nu{}^\mu+\\
&- \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha}\partial_\lambda\zeta\sigma_\alpha\bar{\sigma}^\lambda\lambda\partial_\mu S^*F_{\nu\kappa}+h.c.\Big\}. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Toda dependência do campo auxiliar D tem a forma[5] $\frac{1}{2}D^2+\alpha D^2+\beta D$. Portanto a equação de movimento, $\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta D}=0$, nos fornece

$$
D=-\frac{\beta}{1+2\alpha}. \qquad (4.21)
$$

[5] Adicionamos à nossa ação violadora de Lorentz o superpotencial de Maxwell, escolhido aqui como sendo $\frac{D^2}{2}$.

Logo, todos os termos que dependem de D podem ser escritos como

$$-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1+2\alpha}, \tag{4.22}$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2} + \kappa\left(8i\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\zeta} - 8i\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + 16\partial_\mu S\partial^\mu S^*\right) \tag{4.23}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta &= 2\sqrt{2}iG^*\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\lambda} + 2\sqrt{2}iG\partial_\mu\bar{\zeta}\sigma^\mu\lambda + 4\sqrt{2}iG^*\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \\
&- 4\sqrt{2}iG\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + 4\sqrt{2}\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu S^* + 4\sqrt{2}\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S + \\
&+ 4\sqrt{2}\bar{\lambda}\partial_\mu\bar{\zeta}\partial^\mu S + 4\sqrt{2}\partial_\mu S^*\lambda\partial^\mu\zeta + 2\sqrt{2}\partial_\mu S\bar{\zeta}\partial^\mu\bar{\lambda} + \\
&+ 2\sqrt{2}\partial_\mu S^*\partial^\mu\lambda\zeta + 4\zeta\sigma^\nu\partial_\mu\bar{\zeta}F_\nu{}^\mu + 4\partial_\mu\zeta\sigma^\nu\bar{\zeta}F_\nu{}^\mu + \\
&- 2\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\zeta F_\nu{}^\mu - 2\partial_\mu\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\zeta F_\nu{}^\mu + i\epsilon^{\nu\kappa\mu\rho}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\rho\partial_\mu\zeta F_{\nu\kappa} + \\
&- i\epsilon^{\nu\kappa\mu\rho}\partial_\mu\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\rho\zeta F_{\nu\kappa} + 4\sqrt{2}\zeta\partial_\mu\lambda\partial^\mu S^* + 4\sqrt{2}\bar{\zeta}\partial_\mu\bar{\lambda}\partial^\mu S + \\
&+ \sqrt{2}\partial_\nu\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\partial_\mu S^* - \sqrt{2}\partial_\nu\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\lambda}\partial_\mu S - \sqrt{2}\partial_\nu\zeta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\lambda\partial_\mu S^* + \\
&+ \sqrt{2}\partial_\nu\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Com a eliminação dos campos auxiliares[6], obteremos expressões mais longas e tediosas, mas optamos por introduzí-las no corpo da Tese, e não em um Apêndice, pois talvez seja necessário consultar termos específicos da ação, que será apresentada separadamente em termos da forma FF, $F\tilde{F}$, $\tilde{F}\tilde{F}$, $\lambda\lambda$, $\lambda\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}$ e $F\lambda$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{FF's} &= \int d^4x\Big\{ -\frac{1}{4}(K_{FF})_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} - \frac{1}{4}(K_{F\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}\tilde{F}^{\kappa\lambda} + \\
&- \frac{1}{4}(K_{\tilde{F}\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}^{\kappa\lambda}\Big\},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

[6]Foi escolhido $G = 0$ somente para explicitar a forma dos tensores de fundo, simplificando assim os cálculos.

$$\mathcal{S}_{\lambda\lambda} = \int d^4x \Big\{ -2iG\partial_\mu S^*(\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda) + 2G\partial_\mu S^*(\partial_\nu\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\lambda) \Big\}, \tag{4.26}$$

$$\mathcal{S}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}} = \int d^4x \Big\{ 2iG^*\partial_\mu S(\bar{\lambda}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}) + 2G^*\partial_\mu S(\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}) \Big\}, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\lambda\bar{\lambda}} \;=\; & \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}(\partial_\rho\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}_\mu\sigma^\rho\partial_\nu\bar{\zeta})(\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}(\partial_\nu\zeta\bar{\sigma}^\rho\sigma_\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\rho\bar{\zeta})(\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \\
- \;& (\partial_\mu\zeta\sigma^\nu\bar{\zeta})(\partial^\mu\lambda\sigma_\nu\bar{\lambda}) - (\zeta\sigma^\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\lambda\sigma_\nu\partial^\mu\bar{\lambda}) + \\
+ \;& (\partial_\rho\zeta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\nu\sigma_\mu\bar{\zeta})(\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + (\zeta\sigma_\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma_\rho\partial^\rho\bar{\zeta})(\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \\
- \;& \frac{1}{4}(\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\rho\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\zeta)(\lambda\sigma_\rho\partial_\nu\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}(\partial_\mu\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\sigma}^\rho\zeta)(\partial_\nu\lambda\sigma_\rho\bar{\lambda}) + \\
+ \;& \frac{1}{4}(\zeta\sigma^\mu\bar{\zeta})(\lambda\sigma_\mu\Box\bar{\lambda}) + \frac{1}{4}(\zeta\sigma_\mu\bar{\zeta})(\Box\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \\
+ \;& \frac{1}{2}(\zeta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta})(\lambda\sigma_\rho\partial_\nu\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\rho\bar{\zeta})(\partial_\nu\lambda\sigma_\rho\bar{\lambda}) + \\
- \;& \frac{1}{4}(\zeta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\zeta})(\lambda\sigma_\rho\partial_\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}(\partial_\nu\zeta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\rho\bar{\zeta})(\partial_\mu\lambda\sigma_\rho\bar{\lambda}) + \\
- \;& \frac{1}{4}(\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\rho\bar{\zeta})(\lambda\sigma_\rho\partial_\nu\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}(\zeta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta})(\partial_\nu\lambda\sigma_\rho\bar{\lambda}) + \\
+ \;& \frac{1}{4\sqrt{2}}(\zeta\sigma_\mu\bar{\zeta})(\Box\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(\zeta\sigma_\mu\bar{\zeta})(\lambda\sigma^\mu\Box\bar{\lambda}) + \\
- \;& \frac{1}{4}(\zeta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\zeta})(\partial_\nu\lambda\sigma^\rho\partial_\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}(\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\sigma^\rho\bar{\zeta})(\partial_\mu\lambda\sigma^\rho\partial_\nu\bar{\lambda}) + \\
+ \;& \frac{1}{4}(\zeta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\partial_\nu\lambda\sigma_\rho\bar{\lambda}) + \frac{1}{4}(\partial_\mu\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\sigma^\rho\bar{\zeta})(\lambda\sigma_\rho\partial_\nu\bar{\lambda}) + \\
- \;& \frac{1}{2}(\zeta\sigma_\rho\bar{\zeta})(\partial_\mu\lambda\sigma^\rho\partial^\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{2}(\zeta\sigma_\rho\bar{\zeta})(\partial^\mu\lambda\sigma^\rho\partial_\mu\bar{\lambda}) + \\
- \;& (\zeta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\rho\sigma^\nu\bar{\zeta})(\partial_\nu\lambda\sigma_\rho\partial_\mu\bar{\lambda}) - (\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\rho\sigma^\mu\bar{\zeta})(\partial_\mu\lambda\sigma_\rho\partial_\nu\bar{\lambda}) + \\
+ \;& 2i|G|^2(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) - 2i|G|^2(\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \\
+ \;& 2i|G|^2(\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) - 2i|G|^2(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) + \\
+ \;& \frac{1}{4}(\partial_\rho\zeta\sigma^\rho\bar{\sigma}_\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\zeta})(\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \frac{1}{4}(\partial_\nu\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}_\mu\sigma^\rho\partial_\rho\bar{\zeta})(\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) \Big\},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\mathcal{S}_{\lambda F} \;=\; \int d^4x \Big\{ \kappa \Big[\sqrt{2}G^*\zeta\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\lambda}F_\mu{}^\nu + \sqrt{2}G\partial_\nu\lambda\sigma^\mu\bar{\zeta}F_\mu{}^\nu +$$

$$
\begin{aligned}
- & \frac{i}{\sqrt{2}}G\epsilon^{\tau\rho\mu\kappa}\partial_\mu\lambda\sigma_\kappa\bar{\zeta}F_{\tau\rho} + \sqrt{2}i\zeta\sigma^\tau\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda\partial_\mu S^* F_\tau{}^\mu + \\
- & \frac{1}{\sqrt{2}}{}^{\tau\rho\mu\kappa}\zeta\sigma_\kappa\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu S^*\partial_\nu\lambda F_{\tau\rho} - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\tau\rho\mu\kappa}\partial_\mu S\partial_\nu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\nu\sigma_\kappa\zeta F_{\tau\rho} + \\
- & \sqrt{2}i\partial_\nu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\tau\bar{\zeta}\partial_\mu S F_\tau{}^\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\zeta\partial_\tau\lambda\partial_\mu S^* F_{\nu\kappa} + \\
+ & \frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\partial_\mu S\partial_\tau\bar{\lambda}\bar{\zeta}F_{\nu\kappa} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\zeta\partial_\tau\lambda\partial_\mu S^* F_{\nu\kappa} + \\
+ & \sqrt{2}G\partial_\mu\zeta\sigma^\tau\bar{\lambda}F_\tau{}^\mu + \sqrt{2}G\lambda\sigma^\tau\partial_\mu\bar{\zeta}F_\tau{}^\mu + \\
+ & \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\partial_\tau\bar{\lambda}\bar{\zeta}\partial_\mu S F_{\nu\kappa} + \frac{i}{\sqrt{2}}G\epsilon^{\tau\rho\mu\nu}\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\lambda}F_{\tau\rho} + \\
-i & \frac{i}{\sqrt{2}}G\epsilon^{\tau\rho\mu\nu}\lambda\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta}F_{\tau\rho} - 2i\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\partial_\mu S^* + \\
- & \sqrt{2}G\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\tau\lambda F_\mu{}^\tau - \sqrt{2}G^*\partial_\tau\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\zeta F_\mu{}^\tau + \\
+ & 2i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S + \frac{i}{\sqrt{2}}G\epsilon^{\mu\nu\tau\nu}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\nu\partial_\tau\lambda F_{\mu\nu} + \\
+ & \sqrt{2}i\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\zeta}\partial_\nu S F^{\nu\mu} + \sqrt{2}i\bar{\lambda}\partial_\mu\zeta\partial_\nu S F^{\nu\mu} + \\
+ & \sqrt{2}i\partial_\mu\zeta\lambda\partial_\nu S^* F^{\nu\mu} - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\zeta}\partial_\nu S F_{\tau\rho} + \\
- & \sqrt{2}i\zeta\partial_\mu\lambda\partial_\nu S^* F^{\nu\mu} - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\bar{\lambda}\partial_\mu\bar{\zeta}\partial_\nu S F_{\tau\rho} + \\
- & \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\zeta\partial_\mu\lambda\partial_\nu S^* F_{\tau\rho} - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\partial_\mu\zeta\lambda\partial_\nu S^* F_{\tau\rho} + \\
+ & \sqrt{2}i\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\zeta\partial^\tau S^* F_{\nu\tau} - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}\bar{\zeta}\bar{\sigma}_\rho\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\partial_\lambda S F_{\nu\kappa} + \\
- & \sqrt{2}i\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\partial^\tau S F_{\nu\tau} - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\sigma}_\rho\zeta\partial_\lambda S^* F_{\nu\kappa} + \\
+ & 2G^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda}\partial_\mu S + 2G\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu S^* + \\
+ & \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\tau\sigma^\nu\partial_\tau\bar{\zeta}\partial_\mu S^* F_\nu{}^\mu + \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\lambda\sigma_\tau\bar{\sigma}^\rho\partial_\rho\zeta\partial_\mu S^* F_{\nu\kappa} + \\
- & \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\tau\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\tau\lambda\partial_\mu S^* F_\nu{}^\mu + \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\partial_\rho\bar{\zeta}\bar{\sigma}^\rho\sigma_\tau\bar{\lambda}\partial_\mu S^* F_{\nu\kappa} + \\
- & \frac{1}{2}\partial_\nu\zeta\sigma^\nu\bar{\lambda}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} - \frac{1}{2}\lambda\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\zeta}\sigma^\mu\bar{\lambda} + \\
+ & \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\rho\sigma^\nu\partial_\rho\bar{\zeta}\partial_\mu S F_\nu{}^\mu - \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\partial_\tau\zeta\sigma_\rho\bar{\sigma}^\tau\lambda\partial_\mu S^* F_{\nu\kappa} + \\
- & \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\rho\zeta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\rho\lambda\partial_\mu S^* F_\nu{}^\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}G^*\epsilon^{\mu\nu\tau\nu}\partial_\tau\bar{\lambda}\bar{\sigma}_\nu\zeta F_{\mu\nu} + \\
+ & \frac{i}{\sqrt{2}}G^*\epsilon^{\tau\rho\mu\kappa}\zeta\sigma_\kappa\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\tau\rho} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\tau\sigma_\rho\partial_\tau\bar{\zeta}\partial_\mu S F_{\nu\kappa}\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
(K_{FF})_{\mu\nu\kappa\lambda} &= -16(\eta_{\mu\nu}\tilde{\kappa}_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\tilde{\kappa}_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\lambda}\tilde{\kappa}_{\mu\kappa} - \eta_{\nu\kappa}\tilde{\kappa}_{\mu\lambda}) + \\
&- 4\kappa(2i\partial_\mu\zeta\sigma_\kappa\bar{\zeta}\eta_{\nu\lambda} - 2i\zeta\sigma_\kappa\partial_\mu\bar{\zeta}\eta_{\nu\lambda} - \epsilon_{\nu\lambda\kappa\rho}\partial_\mu\zeta\sigma^\rho\bar{\zeta} + \\
&- \epsilon_{\nu\lambda\kappa\rho}\zeta\sigma^\rho\partial_\mu\bar{\zeta} + \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^\rho\zeta\sigma_\kappa\bar{\zeta} - \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa}\zeta\sigma_\lambda\partial^\rho\bar{\zeta}) + \\
&+ \left\{\frac{\kappa^2}{1+\kappa(8i\partial_\mu\zeta\sigma\bar{\zeta} - 8i\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + 16\partial_\mu S\partial^\mu S^*)}\times\right. \\
&\times \Big[-36(\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\zeta\sigma_\kappa\partial_\lambda\bar{\zeta}) + 36(\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\zeta})(\partial_\kappa\zeta\sigma_\lambda\bar{\zeta}) + \\
&+ \left. 48(\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\partial_\kappa\zeta\sigma_\lambda\bar{\zeta}) + 24(\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\zeta})(\zeta\sigma_\lambda\partial_\kappa\bar{\zeta})\Big]\right\}, \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

com

$$
\tilde{\kappa}_{\mu\nu} = \kappa\left\{\left(\frac{\partial_\mu S\partial_\nu S^* + \partial_\nu S\partial_\mu S^*}{2}\right) - \partial_\lambda S\partial^\lambda S^*\eta_{\mu\nu}/4\right\}. \qquad (4.31)
$$

$$
\begin{aligned}
(K_{F\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda} &= -4\kappa(i\epsilon_{\mu\nu\tau\kappa}\zeta\sigma_\lambda\partial^\tau\bar{\zeta} - i\epsilon_{\mu\nu\tau\kappa}\partial^\tau\zeta\sigma_\lambda\bar{\zeta}) + \\
&+ \left\{\frac{i\kappa^2}{1+\kappa(8i\partial_\mu\zeta\sigma\bar{\zeta} - 8i\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + 16\partial_\mu S\partial^\mu S^*)}\times\right. \\
&\times \Big[-24(\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\partial_\lambda\zeta\sigma_\kappa\bar{\zeta}) - 24(\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\zeta\sigma_\lambda\partial_\kappa\bar{\zeta}) + \\
&- \left. 24(\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\zeta})(\partial_\lambda\zeta\sigma_\kappa\bar{\zeta}) - 24(\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\zeta})(\partial_\mu\zeta\sigma_\nu\bar{\zeta})\Big]\right\} \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(K_{\tilde{F}\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda} &= \frac{-\kappa^2}{1+\kappa(8i\partial_\mu\zeta\sigma\bar{\zeta} - 8i\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + 16\partial_\mu S\partial^\mu S^*)}\times \\
&\times \Big[8(\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\partial_\lambda\zeta\sigma_\kappa\bar{\zeta}) + 4(\zeta\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\zeta})(\zeta\sigma_\lambda\partial_\mu\bar{\zeta})\Big]. \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

Devemos ainda simetrizar $(K_{FF})_{\mu\nu\kappa\lambda}$, $(K_{F\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda}$ e $(K_{\tilde{F}\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda}$. A simetria adicional de duplo traço nulo pode ser exigida também aqui sem perda de generalidade. Devido à realidade das ações, os tensores de fundo são reais por construção. Uma vez que $[\zeta] = [\bar{\zeta}] = -1$, esses tensores também devem ser, como esperado, adimensionais.

Percebemos que a supersimetria impõe que a ação

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x \left\{ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + K^{FF}_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} - j^{\nu}A_{\nu} \right\},$$

seja modificada. Uma das modificações que envolve somente os novos $K_{FF's}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -\frac{1}{4}\int d^4x \left\{ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + K^{FF}_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} + \right. \\ &+ \left. K^{F\tilde{F}}_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}\tilde{F}^{\kappa\lambda} + K^{\tilde{F}\tilde{F}}_{\mu\nu\kappa\lambda}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}^{\kappa\lambda} \right\}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

cuja equação de movimento é

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}F^{\mu\nu} &+ K^{\mu\nu\kappa\lambda}_{FF}\partial_{\mu}F_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}K^{\mu\nu\kappa\lambda}_{F\tilde{F}}\partial_{\mu}\tilde{F}_{\kappa\lambda} + \\ &+ \frac{1}{4}K^{\mu\rho\kappa\lambda}_{F\tilde{F}}\epsilon_{\kappa\lambda\tau}{}^{\nu}\partial^{\tau}F_{\mu\rho} + \frac{1}{2}K^{\mu\rho\kappa\lambda}_{\tilde{F}\tilde{F}}\epsilon_{\mu\rho}{}^{\tau\nu}\partial_{\tau}\tilde{F}_{\kappa\lambda} = j^{\nu}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

4.3 Considerações Finais

Notamos que ao se exigir que a violação de Lorentz seja feita por meio de um tensor de fundo de quarta ordem, emerge da teoria a forma do $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ ditada pela supersimetria. A supersimetria além de nos mostrar que o termo K_{FF} não é a única possibilidade para violar Lorentz, acaba nos fornecendo a forma de vários outros termos, como por exemplo $K_{F\tilde{F}}$ e $K_{\tilde{F}\tilde{F}}$. Todas as possibilidades para escrever o *background*, que havíamos mostrado de antemão, podem ser checadas através dos tensores de fundo calculados. Uma vez que essa ação não exibe supersimetria exata, podemos utilizá-la para calcular o propagador do fotino para saber qual a influência da quebra de Lorentz na geração de massa para o fotino. Notamos também que a maneira que a superação foi construída, $(D^{\alpha}\Omega)\,W_{\alpha}(\overline{D}_{\dot{\alpha}}\overline{\Omega})\overline{W}^{\dot{\alpha}}$, fez com que cada termo da ação, em campos componentes, tivesse o seguinte comportamento: (campo dinâmico)^2 $\times$ (campo de fundo)^2, como pode ser verificado facilmente.

Capítulo 5

Violação da Simetria de Lorentz por um Supermultiplete Vetorial

5.1 Introdução

Nesta Capítulo, iremos implementar a supersimetria seguindo um ponto de vista de supersimetrização um pouco diferente da seção anterior. Ao ivés de exigirmos da teoria a violação de Lorentz e, a partir daí, indentificarmos o que pode desempenhar o papel de tensor de fundo, introduziremos desde o início na superação um vetor constante. Esperamos mesmo assim que a álgebra de supersimetria também nos informe que exista uma correção para o termo K_{FF}. Esta maneira de supersimetrizar pode talvez não ser tão geral quanto a anterior. Entretanto, trata-se de um teoria efetiva, e, desta forma, não temos ainda elementos para decidir qual das duas possibilidades é mais viável fisicamente.

Apresentamos os dois caminhos com a perspectiva de que, em estudos futuros, possamos buscar argumentação fenomenológica que possa decidir por uma proposta ou outra.

5.2 Supersimetrização

Adotando uma formulação covariante no superespaço, propomos a seguinte extensão mínima (N=1) para a ação (4.1)

$$S = \kappa \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta} \left\{ (D^\alpha \Xi)\, W_\alpha (\overline{D}_{\dot{\alpha}} \Xi) \overline{W}^{\dot{\alpha}} + h.c. \right\}. \tag{5.1}$$

O supermultiplete intensidade de campo, bem como as superderivadas foram apresentados no capítulo anterior. O único que requer apresentações é o supercampo vetorial Ξ, cuja expansão em θ é dada por

$$\Xi\left(\theta,\bar{\theta}\right) = C + \theta\chi + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta^2 M + \bar{\theta}^2 M^* + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\xi_\mu + \theta^2\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}^2\theta\psi + \theta^2\bar{\theta}^2 B. \tag{5.2}$$

Este supercampo é construído de forma análoga à construção do supercampo de Wess-Zumino, V_{WZ}, equação (4.6). Entretanto, o supercampo V_{WZ} possui uma expressão mais simples, pois quando usamos a condição de invariância de gauge em V_{WZ} para eliminar um grau de liberdade do campo de Maxwell, A^μ, alguns campos componentes também são eliminados. Uma vez que queremos acomodar um campo vetorial real constante, ξ_μ, em Ξ, só podemos usar a condição de realidade para construir esse supercampo. É por esses motivos que além de Ξ não depender de x a sua forma é mais complexa do que a do V_{WZ}.

Nesse caso especial de termos um supercampo de fundo constante no espaço de Minkowski, os seus campos componentes também serão constantes e suas transformações de supersimetria serão

$$\begin{cases} \delta C = \varepsilon^\alpha\chi_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}, \\ \delta\chi_\alpha = 2M\varepsilon_\alpha + \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\xi_\mu, \\ \delta\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\varepsilon^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\xi_\mu + 2M^*\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}, \\ \delta M = \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \\ \delta M^* = \varepsilon^\alpha\chi_\alpha, \\ \delta\xi^\mu = \varepsilon^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\psi_\alpha, \\ \delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = 2\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}B, \\ \delta\psi_\beta = 2\varepsilon_\beta B, \\ \delta B = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Em um caso mais geral, B se transformaria como uma derivada total; mas nessas condições, onde ψ é constante, temos que $\delta B = 0$.

Separando a ação em campos componentes em três partes,

$$S = \kappa \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta} \Big\{ (D^\alpha \Xi) W_\alpha (\overline{D}_{\dot{\alpha}} \Xi) \overline{W}^{\dot{\alpha}} + h.c. \Big\} = S_{\text{bóson}} + S_{\text{férmion}} + S_{\text{mistura}},$$

teremos,

$$\begin{aligned} S_{\text{bóson}} &= \kappa \int d^4x \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} \xi_\lambda \xi_\mu F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\lambda} + \frac{1}{8} \xi_\lambda \xi^\lambda F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{i}{4} \xi_\lambda \xi_\mu \varepsilon^{\lambda\tau\rho\kappa} F_{\tau\rho} F^\mu{}_\kappa - 2D^2 \xi_\lambda \xi^\lambda + 8|M|^2 D^2 + h.c. \right\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde podemos identificar imediatamente a ação (5.4) com a ação (4.1).

$$\begin{aligned} S_{\text{férmion}} &= \kappa \int d^4x \left\{ - i\psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} \bar{\chi} \bar{\lambda} + \psi\lambda\bar{\psi}\bar{\lambda} + \frac{i}{2} \partial_\mu \lambda \sigma^\mu \bar{\psi} \bar{\chi} \bar{\lambda} + \psi\lambda\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\chi} + \right. \\ &- \left. \frac{i}{2} \lambda\sigma^\mu \bar{\psi} \bar{\chi} \partial_\mu \bar{\lambda} + \psi\lambda\bar{\psi}\bar{\lambda} + i\chi\lambda\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\overline{\psi} - i\chi\lambda\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + h.c. \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{mistura}} &= \kappa \int d^4x \left\{ - \frac{3}{4} i\chi\lambda\xi_\mu \partial^\mu D - \frac{1}{2} \chi\lambda\xi_\mu \partial_\nu F^\nu{}_\mu + \right. \\ &- \frac{i}{2} \chi\lambda\varepsilon^{\psi\nu\kappa\mu} \xi_\mu \partial_\psi F_{\nu\kappa} + 4\chi\lambda BD + D\chi\sigma^\mu\bar{\chi}\partial_\nu F^\nu{}_\mu + \\ &+ \frac{i}{4} D\varepsilon^{\psi\nu\kappa\alpha} \chi\sigma_\alpha\bar{\chi}\partial_\psi F_{\nu\kappa} - 6iDM^*\chi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + iD\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi\xi_\mu + \\ &- 4D^2\chi\psi - \frac{i}{2}\chi\sigma^\tau\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\nu F^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\varepsilon^{\tau\rho\kappa\alpha}\chi\sigma_\alpha\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\nu F^\nu{}_\kappa + \\ &+ \frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda\nu\kappa\rho}\chi\sigma^\tau\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\lambda F_{\nu\kappa} + \frac{i}{8}\varepsilon^{\psi\nu\kappa\alpha}\varepsilon^{\tau\rho}{}_{\alpha\beta}\chi\sigma^\beta\bar{\chi}F_{\tau\rho}\partial_\psi F_{\nu\kappa} + \\ &+ M^*\chi\sigma^\tau\partial_\nu\bar{\lambda}F_\tau{}^\nu + \frac{i}{2}M^*\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\chi\sigma_\alpha\partial_\mu\bar{\lambda}F_{\tau\rho} + \frac{1}{2}\chi\sigma^\tau\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda\xi_\mu F_\tau{}^\mu + \\ &+ \frac{i}{4}\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\chi\sigma_\alpha\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\lambda\xi_\mu F_{\tau\rho} - 2D\chi\sigma^{\tau\rho}\psi F_{\rho\tau} + \frac{1}{2}\chi\partial_\mu\lambda\bar{\chi}\partial^\mu\bar{\lambda} + \\ &+ iD\chi\partial_\mu\lambda\xi^\mu - \bar{\chi}\bar{\sigma}^\nu\chi\partial_\mu DF_\nu{}^\mu + \frac{i}{2}\varepsilon^{\nu\kappa\mu\alpha}\bar{\chi}\bar{\sigma}_\alpha\chi\partial_\mu DF_{\nu\kappa} + \\ &+ iMD\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\chi} + \frac{i}{2}M\lambda\sigma^\kappa\bar{\chi}\partial_\mu F^\mu{}_\kappa - \frac{1}{4}M\varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha}\lambda\sigma_\alpha\bar{\chi}\partial_\mu F_{\nu\kappa} + \\ &- i|M|^2\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + iM\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\lambda\xi_\mu - 4MD\psi\lambda + \\ &- \frac{1}{2}M\bar{\chi}\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\lambda F_\nu{}^\mu + \frac{i}{4}M\varepsilon^{\nu\kappa\mu\alpha}\bar{\chi}\bar{\sigma}_\alpha\partial_\mu\lambda F_{\nu\kappa} + \frac{i}{2}|M|^2\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda} + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
+ & \quad i\lambda\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\lambda}\xi^\nu\xi_\mu - \frac{i}{2}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\xi_\lambda\xi^\lambda - \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\nu\mu\alpha}\lambda\sigma_\alpha\partial_\nu\bar{\lambda}\xi_\lambda\xi_\mu + \\
+ & \quad \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\kappa\lambda\alpha}\lambda\sigma_\alpha\bar{\psi}\xi_\lambda F_{\nu\kappa} - B\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}\xi_\mu + \bar{\chi}\partial_\nu\bar{\lambda}\xi_\mu F^{\mu\nu} + \\
+ & \quad \frac{i}{2}\varepsilon^{\tau\rho\nu\lambda}\bar{\chi}\partial_\nu\bar{\lambda}\xi_\lambda F_{\tau\rho} - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\rho\psi\xi_\lambda F^\lambda{}_\rho - \frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda\tau\rho\alpha}\bar{\lambda}\bar{\sigma}_\alpha\psi\xi_\lambda F_{\tau\rho} + \\
- & \quad iD\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\bar{\chi}\xi_\lambda + \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\kappa\bar{\chi}\xi_\lambda F^\lambda{}_\kappa + \frac{i}{4}\varepsilon^{\lambda\nu\kappa\alpha}\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma_\alpha\bar{\chi}\xi_\lambda F_{\nu\kappa} + \\
- & \quad iM^*\partial_\mu\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\bar{\lambda}\xi_\lambda - \frac{1}{2}\bar{\chi}\bar{\lambda}\xi_\lambda\partial_\nu F^{\lambda\nu} - \frac{i}{4}\bar{\chi}\bar{\lambda}\varepsilon^{\tau\rho\nu\lambda}\xi_\lambda\partial_\nu F_{\tau\rho} + \\
- & \quad \frac{1}{2}D^2\bar{\chi}\bar{\psi} + D\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\nu\kappa}\bar{\psi}F_{\nu\kappa} - 2M^*D\bar{\psi}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\psi\sigma^\tau\bar{\lambda}\xi_\mu F_\tau{}^\mu + \\
+ & \quad \frac{1}{4}\varepsilon^{\tau\rho\mu\alpha}\psi\sigma_\alpha\bar{\lambda}\xi_\mu F_{\tau\rho} - B\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}\xi_\mu + 4BD\bar{\chi}\bar{\lambda} + h.c.\Big\}.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Para que a superação seja adimensional, Ξ deve ter dimensão de massa a -1, consequentemente, como esperado, ξ_μ será adimensional.

5.3 Considerações Finais

Da mesma forma que na seção anterior, o campo auxiliar D ao ser eliminado deve necessariamente fornecer uma correção para o termo K_{FF}. Podemos também utilizar esta ação para calcular a massa do fotino e comparar com o resultado anterior. Esta forma de supersimetrizar encontra algumas semelhanças com os dois caminhos introduzidos por Berger e Pospelov, onde os autores introduziram os tensores violadores de Lorentz à mão. Entretanto, a supersimetria necessariamente é violada desde o primeiro momento aqui, algo que não acontece lá nos dois primeiros caminhos para a supersimetrização. A acomodação da violação de Lorentz por meio de um supermultiplete vetorial deve ser importante, pois o MPSM é composto por supermultipletes quirais e vetoriais. Logo, essa possibilidade aqui apresentada dever servir, por exemplo, para sugerir formas e correções para o K_{FF} [64].

Capítulo 6

Considerações Finais e Perspectivas de Novas Questões

Nossa principal contribuição foi mostrar que a supersimetria fornece uma forma para o tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$, e que o mesmo é constituído, em sua composição mais fundamental, de férmions. Mostramos também que deve haver outros termos relevantes no setor de *gauge* do MPE, tais como $-\frac{1}{4}(K_{F\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}\tilde{F}^{\kappa\lambda}$ e $-\frac{1}{4}(K_{\tilde{F}\tilde{F}})_{\mu\nu\kappa\lambda}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}^{\kappa\lambda}$. A maneira pela qual a supersimetria é implementada em nossa abordagem, torna-se impossível violar Lorentz sem violar a supersimetria. Poderíamos acreditar que estamos de frente de um mecanismo de quebra de supersimetria regido pela quebra da simetria de Lorentz. Entretanto, de acordo com a nossa primeira proposta, pensar assim seria precipitado, pois não temos elementos para decidir qual das duas simetrias quebrou primeiro ou se as duas são quebradas na mesma escala de energia. O que de fato temos aqui é um mecanismo de implementação de supersimetria, que, devido à acomodação da violação de Lorentz dentro da estrutura de supercampo, nos obriga a violar as duas simetrias simultaneamente. A vantagem de acomodar desta forma a violação de Lorentz é que os tensores de fundo emergem da teoria quando exigimos da mesma uma correspondência com a teoria que viola Lorentz. O que se encontra na literatura são simplesmente propostas para o $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$, de tal maneira que suas simetrias esperadas sejam satisfeitas. Mostramos que as propostas iniciais, que fazem parte da literatura corrente, de escrever o tensor de fundo apenas em termos de objetos bosônicos, só pode ser atingida por meio da escolha de um *background* fermiônico nulo.

A partir desta Tese deixamos como perspectivas futuras o trabalho de reescrever todas as contribuições em termos de espinores de Majorana de quatro componentes, o que nos facilitará a visualização dos termos ao identificarmos os biliniares fermiônicos; a reconsideração da Eletrodinâmica de Myers-Pospelov com a introdução dos condensados fermiônicos, já que a formulação destes autores só inclui os termos em F e $\tilde{F}$; usar os limites encontrados por Myers-Pospelov para encontrar limites experimentais nos condensados fermiônicos do *background*; chegar à contribuição destes condensados para a separação de massa entre o fóton e o fotino e estudar uma formulação levando em conta a supersimetria local.

Escreverei em primeira pessoa daqui em diante para enfatizar minhas considerações sobre este campo de estudo. Num primeiro momento, percebi que a busca por vestígios da quebra da simetria de Lorentz parece causar bastante incômodo à comunidade científica conservadora. Este incômodo aumenta ainda mais quando se levanta a possibilidade da supersimetria está presente nesta busca. Entretanto, estamos passando por um momento na física em que muitas possibilidades teóricas deverão ser confrontadas com os experimentos; pois não temos garantias de que o MP seja correto para descrever a física em altíssimas energias. Já há indícios de uma nova física na faixa dos $140GeV$ detectada no Fermilab [65, 66]. Há quem diga que talvez tenha-se detectado uma partícula chamada de "tecnopíon", partícula esta prevista pela proposta teórica chamada de tecnocolor. Há outros que dizem que trata-se da quinta força da natureza. Estas propostas a meu ver são tão exóticas quanto a supersimetria. A supersimetria para mim é mais elegante e necessária para construir teorias mais fundamentais. Ainda pesa a favor da supersimetria o fato de ser complicado dizer em que faixa de energia deve-se encontrá-la, pois não se sabe exatamente como a supersimetria deve ser quebrada. Portanto acredito que estejamos iniciando um momento de "carência" teórica e cada possibilidade levantada é um passo à frente para se compreender melhor a natureza. Se algum dia for provado que de fato a simetria de Lorentz é exata e que a supersimetria não existe, será bem provável que os responsáveis que mais contribuíram para isto foram justamente os que trabalharam nesta área. A própria história da ciência já nos mostrou algo semelhante quando Michelson e Morley tentaram confirmar a teoria do éter. Parafraseando Helayel que em uma de suas aulas disse que "a humanidade está passando por momentos similares ao da alvorada da mecânica quântica", eu acrescentaria que neste momento é bem provável que sejamos obrigados a modificar as teorias ou, mais drasticamente, reconstruí-las, sendo assim extremamente importante descobrir possibilidades além do Modelo-Padrão.

Apêndice

Neste apêndice iremos definir algumas convenções e apresentar algumas relações úteis. Nossas convenções estão de acordo com as referências [67, 68].

A assinatura da métrica no espaço de Minkowski é

$$\{\eta^{\mu\nu}\} = diagonal(1\ -1\ -1\ -1). \tag{6.1}$$

O objeto abaixo será usado para levantar e abaixar índices espinoriais

$$\begin{cases} \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}; \\ \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}. \end{cases} \tag{6.2}$$

com

$$\begin{cases} \chi\psi = \chi^{\alpha}\psi_{\alpha}; \\ \bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}; \\ \psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}; \\ \psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}; \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}; \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}. \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\lambda} = -(\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta}) = -\delta^{[\gamma\lambda]}_{(\alpha\beta)}; \\ \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\lambda}} = -(\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}\delta^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} - \delta^{\dot{\lambda}}_{\dot{\alpha}}\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}) = -\delta^{[\dot{\gamma}\dot{\lambda}]}_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})}; \\ \epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta}; \\ \epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}; \\ \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}; \\ \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} \theta_{\alpha}\theta_{\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\,\theta^2; \\ \theta^{\alpha}\theta^{\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\,\theta^2; \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\bar{\theta}^2; \\ \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\bar{\theta}^2. \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\begin{cases} \partial^{\alpha} = -\epsilon^{\alpha\beta}\partial_{\beta}; \\ \partial_{\alpha} = -\epsilon_{\alpha\beta}\partial^{\beta}; \\ \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}}; \\ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}}. \end{cases} \tag{6.6}$$

A generalização das matrizes de Pauli são

$$\begin{cases} \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} = (1,\vec{\sigma})_{\alpha\dot{\alpha}}; \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}_{\beta\dot{\beta}} = (1,-\vec{\sigma})^{\dot{\alpha}\alpha}; \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = \sigma^{\mu\alpha\dot{\alpha}}; \\ Tr[\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}] = 2\eta^{\mu\nu}. \end{cases} \tag{6.7}$$

$$\begin{cases} \sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{i}{4}(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta} - \sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}); \\ \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}); \\ \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} \\ \sigma^{\mu\nu\dagger} = \bar{\sigma}^{\mu\nu}; \\ \epsilon_{\alpha\gamma}\sigma^{\mu\nu}{}_{\beta}{}^{\gamma} = \epsilon_{\beta\gamma}\sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\gamma}; \\ \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\gamma}}{}_{\dot{\alpha}}; \\ Tr[\sigma^{\mu\nu}] = Tr[\bar{\sigma}^{\mu\nu}] = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

As derivadas invariantes por Susi são

$$\begin{cases} D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}; \\ D^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}D_{\beta} = -\partial^{\alpha} + i\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}; \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}; \\ \bar{D}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}D_{\dot{\beta}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}; \end{cases} \tag{6.9}$$

com

$$\begin{cases} \partial_{\alpha}\theta^2 = 2\theta_{\alpha}; \\ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^2 = -2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}; \\ D^2\theta^2 = \bar{D}^2\bar{\theta}^2 = -4. \end{cases} \tag{6.10}$$

A integral de Berezin é definida como

$$\begin{cases} \int d^2\theta \;\; \theta^2 = \int d^2\theta \; \delta(\theta^2) = 1; \\ \int d^2\bar{\theta} \;\; \bar{\theta}^2 = \int d^2\theta \; \delta(\bar{\theta}^2) = 1; \\ \int d^2\theta \, d^2\bar{\theta} \;\; \theta^2\bar{\theta}^2 = 1; \end{cases} \tag{6.11}$$

onde $\delta(\theta^2) = \theta^2$ e $\delta(\bar{\theta}^2) = \bar{\theta}^2$.

Referências Bibliográficas

[1] C. Amsler *et al. Phys. Lett.* **B** 667, 1-1340 (2008).

[2] V.A. Kostelecký and S. Samuel. *Phys. Rev.* D **39**, 683685 (1989).

[3] O. W. Greenberg. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002).

[4] A. A. Aguilar-Arevalo *et al. Phys. Rev. Lett.* **105**, 181801 (2010).

[5] Masud Chaichiana, Alexander D. Dolgovb, Victor A. Novikovd and Anca Tureanua. Hep-th arXiv:1103.0168v2 (2011).

[6] P. Bhattacharjee and U. Sigl. *Physics Reports* **327**, 109-247 (2000).

[7] J. R. Chisholm and E.W. Kolb. *Phys. Rev. D* **69**, 085001 (2004).

[8] J. Abraham *et al. Phys. Rev. Lett.* **101**, 061101 (2008).

[9] D. Colladay e V.A. Kostelecký. *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).

[10] Q. G. Bailey, V.A. Kostelecký *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004); G. Betschart, E. Kant, and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* , **815**, 198-214 (2009).

[11] V. Barger, S. Pakvasa, T.J.Weiler, and K.Whisnant, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5055 (2000).

[12] V. A. Kostelecký and M. Mewes. *Phys. Rev. D* **69**, 016005 (2004).

[13] V. A. Kostelecký and M. Mewes. *Phys. Rev. D* **70**, 031902 (R) (2004).

[14] V. A. Kostelecký and M. Mewes. *Phys. Rev. D* **70**, 076002 (2004).

[15] T. Katori, A. Kostelecký, R. Tayloe. *Phys.Rev. D* **74**, 105009 (2006).

[16] R. Brustein, D. Eichler, S. Foffa. *Phys.Rev. D* **65**, 105006 (2002).

[17] Y. Grossman,C. Kilic, J. Thaler, and D.G. E. Walker. *Phys. Rev. D* **72**, 125001 (2005).

[18] L. B. Auerbach *et al. Phys. Rev. D* **72**, 076004 (2005).

[19] D. Hooper, D. Morgan, and E. Winstanley. *Phys. Rev. D* **72**, 065009 (2005).

[20] KTeV Collaboration, H. Nguyen, hep-ex/0112046; Y.B. Hsiung *et al.*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **86**, 312 (2000).

[21] V. Alan Kostelecký and Richard J. Van Kooten. *Phys. Rev. D* **82**, 101702(R) (2010).

[22] H. Dehmelt et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4694 (1999).

[23] R. Mittleman *et al. Phys. Rev. Lett.* **83**, 2116 (1999).

[24] G. Gabrielse *et al. Phys. Rev. Lett.* **82**, 3198 (1999).

[25] R. Bluhm *et al. Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999).

[26] R. Bluhm *et al. Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997).

[27] R. Bluhm *et al. Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998).

[28] C. D. Lane. *Phys. Rev. D* **72**, 016005 (2005).

[29] H. Belich M. M. Ferreira Jr, J. A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* **67**, 125011 (2003). Erratum: *Phys. Rev. D* **69**, 109903 (2004).

[30] H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J. A. Helayel-Neto and M. T. D. Orlando. *Phys. Rev. D* **68**, 025005 (2003).

[31] A. P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayel-Neto. *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003).

[32] H. Belich *et al. Nucl. Phys. B* Suppl. **127**, 105 (2004).

[33] H. Belich, M. M. Ferreira Jr and J. A. Helayel-Neto. *Eur. Phys. J. C* **38**, 511 (2005).

[34] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr. and J. A. Helayë l-Neto. *Eur. Phys. J. C* **42**, 127 (2005).

[35] Cantcheff M. B. *Eur. Phys. J. C* . **46**, 247-254, (2006).

[36] H. Belich, *et al. Rev. Bras. Ens. Fis.* **29**, 57 (2007).

[37] H. Belich, L. P. Colatto, T. Costa-Soares, J. A. Helayël-Neto and M. T. D. Orlando. *Eur. Phys. J. C.* **62**, 425-432 (2009).

[38] M. Lubo, *Phys. Rev. D* **71**, 047701 (2005).

[39] M.N. Barreto, D. Bazeia, and R. Meneses, *Phys. Rev. D* **73**, 065015 (2006).

[40] L. Smolin (2003), hep-th/0303185.

[41] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).

[42] D. Colladay and V. A. Kostelecký. *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).

[43] V. A. Kostelecký and M. Mewes. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001).

[44] V. A. Kostelecký and M. Mewes. *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002).

[45] V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140401 (2006).

[46] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro. *Phys. Rev. D* **80**, 125040 (2009).

[47] B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 041603 (2007).

[48] S. M. Carrol et al. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001).

[49] C.P. Burgess, J.M. Cline, E. Filotas, J. Matias, and G.D. Moore. *Journal of High Energy Physics* **3** 3535, (2002).

[50] M. S. Berger and V. A. Kostelecký. *Phys. Rev. D* **65**, 091701(R) (2002).

[51] M. S. Berger (2002), hep-ph/0212353v1.

[52] S. G. Nibbelink and M. Pospelov. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081601 (2005).

[53] R. C. Myers and M. Pospelov. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003).

[54] S. Coleman and E. Weinberg. *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).

[55] V. A. Kostelecký, R. Potting. *Phys. Rev. D* **51**, 3925 (1995).

[56] G. Amelino-Camelia et al.. *Nature* **393**, 763 (1998). astro-ph/9712103.

[57] R. Gambini and J. Pullin. *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999).

[58] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2318 (2000). [hep-th/0108061].

[59] N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia and J. Kowalski-Glikman. *Phys. Lett. B* **522**, 133 (2001).

[60] P. A. Bolokhov and M. Pospelov. *Phys. Rev. D* **77**, 025022 (2008).

[61] H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J.A. Helayël-Neto, A.L.M.A. Nogueira. *Phys. Rev. D* **68** 065030, (2003).

[62] J. A. Helayël-Neto, H. Belich, G. S. Dias, F. J. L. Leal, W. Spalenza. PoS(ICFI 2010)032.

[63] H. K. Dreiner, H. E. Haberb and S. P. Martin*Physics Reports.* **494** 1-196 (2010).

[64] H. Belich, L. G. Durand-Bernald, J. A Helayel-Neto, and F. J. L. Leal. Trabalho em Progresso.

[65] News and Analysis. *Science.* Vol. 332 no. 6027 p. 296 (2011).

[66] T. Aaltonen, *et al.* http://arxiv.org/abs/1104.0699 (2011).

[67] John Terning. *Modern Supersymmetry: Dynamics and Duality.* Oxford University Press (2006).

[68] Harald J. W. Muller-Kirsten and A. Wiedemann. *Supersymmetry: An Introduction With Conceptual and Calculational Details.* World Scientific (1987).