



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

TESE DE DOUTORADO

SISTEMAS QUÂNTICOS EM CAVIDADES:
EFEITO CASIMIR DINÂMICO E EMARANHAMENTO

Edney Ramos Granhen

Rio de Janeiro, maio de 2011



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

TESE DE DOUTORADO

**SISTEMAS QUÂNTICOS EM CAVIDADES:
EFEITO CASIMIR DINÂMICO E EMARANHAMENTO**

Edney Ramos Granhen

Orientadores: Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson
Danilo Teixeira Alves

Tese apresentada ao Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas para a obtenção
do título de Doutor em Física

Rio de Janeiro, maio de 2011

RESUMO

Na presente tese, apresentamos o estudo do campo escalar em cavidades. Este é um assunto vasto e, neste trabalho, nos restringimos a dois casos: o efeito Casimir dinâmico e a evolução temporal de estados atômicos emaranhados. Em ambos os casos os fenômenos são puramente quânticos. Na primeira parte, consideramos o espaço-tempo bidimensional de Minkowski e fazemos um estudo do efeito Casimir dinâmico para o campo escalar sem massa, sujeito a condições de fronteira de Dirichlet ou Neumann, nas seguintes situações: uma única fronteira em movimento; e cavidade com uma ou duas fronteiras em movimento. Nosso principal resultado, nesta parte, foi a obtenção de fórmulas exatas para a força de radiação sobre fronteiras em movimento e para a densidade de energia em cavidades, considerando o estado inicial arbitrário do campo, com ênfase nos casos de vácuo e banho térmico.

Na segunda parte do trabalho, investigamos as propriedades de um sistema bipartite não-interagente, consistindo de dois átomos acoplados aos seus próprios campos. Consideramos o espaço euclideo tridimensional, e todo o sistema contido em uma esfera condutora de raio R . Este estudo foi feito usando o formalismo de *estados vestidos*, que é uma alternativa à teoria de perturbação. Nosso principal resultado, nesta parte, foi conseguir mostrar a diferença do comportamento no espaço livre ($R \rightarrow \infty$) e em pequenas cavidades. Para o espaço livre, o emaranhamento da superposição dos estados atômicos superpostos desaparece com o tempo, enquanto para uma cavidade pequena a medida de emaranhamento adotada nunca se anula, o que significa que os estados superpostos permanecem emaranhados por todo o tempo.

ABSTRACT

In this thesis we present a study of the scalar field in cavities. This is a vast subject and in this work we restrict ourselves to two cases: the dynamical Casimir effect and the time evolution of entangled atomic states. In both cases we are dealing with purely quantum phenomena. In the first part we consider the two-dimensional Minkowski space and we perform a study of the dynamical Casimir effect for the massless scalar field, submitted to Dirichlet and Neumann boundary conditions in the following situations: a single moving boundary and in cavities with moving boundaries. For these situations we obtain exact formulas for the force on the boundary and for the energy density, considering an arbitrary initial state for the field.

In the second part of this work we investigate entanglement properties of a noninteracting bipartite system, consisting of two atoms coupled to their own proper fields. We consider the Euclidean tridimensional space, the whole system being contained in a reflecting sphere of radius R . This study is performed using the *dressed state* formalism, which is an alternative to perturbation theory. Our main result in this part is that we get very contrasting behaviours in free space ($R \rightarrow \infty$) and in small cavities. For free space the entanglement of a superposed biatomic state disappears as time goes on, while for small cavities the entanglement measures adopted never vanish, which means that the superposed state remain entangled for all times.

Dedicatória,

Ao meu filho Gabriel Q. Granhen

*Ninguém é tão sábio que nada tenha para
aprender, nem tão tolo que nada tenha
pra ensinar.*

Blaise Pascal

Agradecimentos

Agradeço a Deus primeiramente, por ter concedido minha existência neste plano espiritual e a todos os amigos espirituais que me ajudaram nesta jornada.

Ao Prof. Dr. Danilo T. Alves pela orientação, amizade e confiança que depositou em minha pessoa no decorrer deste trabalho, tendo contribuído e muito para minha formação.

Ao Prof. Dr. Adolfo Malbouisson, pela orientação em minha estadia no Rio de Janeiro, pela compreensão nos momentos baixos e incentivador para alcançar os objetivos com profissionalismo.

À minha família, tão paciente e amiga nos momentos altos e baixos de minha carreira: Joaquim, Raimunda, Ewerton, Seu Ronaldo, D. Nete e Daniela minha esposa.

À minha adorável tia Justa que foi a minha segunda mãe durante o período no Rio de Janeiro.

Aos amigos, Rodrigo Turcati e Jeferson que fiz ao longo do tempo do Rio de Janeiro e que nos momentos finais me ajudaram na estadia no Rio de Janeiro.

Ao funcionários do terceiro andar, sempre tão gentis e por fim aos amigos que me ajudaram direta ou indiretamente neste trabalho.

Conteúdo

Introdução geral	10
I Efeito Casimir Dinâmico	19
1 Uma fronteira em movimento	20
1.1 Densidade de energia e força quântica sobre uma fronteira em movimento .	20
1.2 Banho térmico como estado inicial do campo	26
1.3 Aplicação ao movimento de Walker-Davies	27
1.4 Comentários finais do capítulo 1	30
2 Cavity com fronteira móvel: uma parede em movimento	31
2.1 Densidade de energia: fórmulas exatas	32
2.2 Situação estática	35
2.3 Situação não estática	37
2.4 Estados iniciais do campo: vácuo e térmico	41
2.5 Aplicação: cálculo da densidade de energia numa cavidade oscilante com condições mistas	46
2.6 Comentários finais do capítulo 2	52
3 Cavity com fronteira móvel: duas paredes em movimento	55
3.1 Densidade de energia e força quântica sobre as fronteiras em movimento . .	56
3.2 Comportamento da força em cada região do espaço-tempo	62
3.3 Comentários finais do capítulo 3	66

4	Pacote <i>Dynamical Casimir</i>	68
4.1	Uma visão global da estrutura do software	69
4.2	Aplicações a movimentos oscilatórios	71
4.2.1	Casos com condições não-mistas e vácuo	71
4.3	Casos envolvendo condições mistas ou não-mistas, e vácuo	75
4.4	Casos envolvendo condições não-mistas e banho térmico	77
4.5	Aplicações a movimentos não-oscilatórios	82
4.5.1	Casos com uma das fronteiras em movimento num banho térmico	84
4.5.2	Cavidade com duas fronteiras em movimento no vácuo	87
4.5.3	Discussão da precisão dos resultados	88
4.6	Comentários finais do capítulo 4	89
II	Emaranhamento	90
5	Emaranhamento	91
5.1	Problema de um átomo acoplado ao campo escalar	92
5.2	Sistema de dois átomos dentro de uma cavidade	100
5.3	Evolução temporal de estados vestidos emaranhados para um sistema de dois átomos dentro de uma cavidade	102
5.3.1	Limite de grande cavidade	107
5.3.2	Limite de pequena cavidade	108
5.4	Estados emaranhados	113
5.4.1	A entropia de von Neumann	114
5.4.2	Evolução do grau de impureza	117
5.4.3	A Concorrência e a Negatividade	118
	Considerações Finais	121
A	Código do Pacote <i>Dynamical Casimir</i>	125
A.1	Rotinas para cavidade com uma fronteira em movimento	125
A.2	Rotinas para cavidade com duas fronteiras móveis	132
B	Transformação da Hamiltoniana para eixos principais	137

C	O elemento de matriz t_0^r	143
D	Evolução dos estados vestidos	146
E	Concorrência e Negatividade	153
	E.1 Demonstração da fórmula para a Concorrência	153
	E.2 Demonstração da fórmula para a Negatividade	155
	Referências	158

Introdução geral

Neste trabalho, estudamos sistemas quânticos sujeitos a condições de contorno, enfocando dois assuntos específicos: o efeito Casimir dinâmico (ECD) e estados atômicos emaranhados. Ambos os efeitos exibem um caráter puramente quântico. O estudo apresentado por nós deriva dos artigos [1]-[10]. Sobre o ECD, investigamos o comportamento de um campo escalar real não massivo em 1+1 dimensões na presença de fronteiras dinâmicas [1]-[9]. Quanto aos estados atômicos emaranhados, estudamos esses estados em uma cavidade esférica [10].

Efeito Casimir Dinâmico

O problema da criação de partículas a partir do vácuo, ocasionada por condições de fronteira dependentes do tempo impostas ao campo, tem atraído crescente atenção desde os trabalhos pioneiros de Takahashi, Umezawa [11] e Parker [12] (acerca da criação de partículas em modelos de universo em expansão), Schwinger [13] (sobre a criação de partículas via presença de um campo eletromagnético externo), Moore [14], DeWitt [15], Fulling e Davies [16] (acerca da criação de partículas relacionada com distúrbios no vácuo quântico causados pelo movimento de espelhos descarregados). O último fenômeno tem sido comumente denominado *efeito Casimir dinâmico*. Uma das manifestações do ECD é a força quântica atuante sobre o espelho em movimento no vácuo, a qual pode dissipar energia do espelho e conseqüentemente (por conservação de energia) provocar a criação de partículas reais. O ECD é também relacionado a diversos outros problemas, tais como a radiação emitida por buracos negros em colapso [16, 17, 18, 19, 20], descoerência [21, 22], emaranhamento [23], efeito Unruh [24], criação de fônons em modelos análogos [25], entre

outros. O ECD tem sido assunto de intenso estudo teórico (para uma recente revisão ver, por exemplo, Refs. [26, 27, 28]), mas ainda não foi observado experimentalmente, porém alguns esquemas têm sido propostos [29, 30, 31, 32].

Moore [14], considerando o modelo de um campo escalar sem massa num espaço-tempo bidimensional, investigou a radiação gerada numa cavidade com uma parede em movimento. Ao impor a condição de Dirichlet para o campo e também uma lei de movimento prescrita para a fronteira, Moore obteve uma fórmula exata para o valor esperado do tensor energia-momentum, considerando o estado inicial do campo como sendo o vácuo. A solução do campo obtida por Moore é dada em termos de uma equação funcional, usualmente chamada de equação de Moore (que foi obtida independentemente por Vesnitskii [33]), para a qual não existe, até onde sabemos, uma técnica geral de solução analítica.

Fulling e Davies [16] estudaram o problema da radiação emitida por um único espelho, em movimento, no contexto do modelo do campo escalar real no espaço-tempo bidimensional, obtendo uma fórmula exata para o valor esperado do tensor energia-momentum, considerando o vácuo como estado inicial do campo. Seus resultados revelaram que a radiação origina-se no espelho e se propaga para longe dele. Ford e Vilenkin [34] desenvolveram um método perturbativo que pode ser aplicado a espelhos em movimento com pequenos deslocamentos e velocidades não relativísticas. Nesta aproximação, eles obtiveram, para um campo escalar real e sem massa no espaço-tempo bidimensional, que a força de reação de radiação é proporcional à terceira derivada temporal da lei de movimento, resultado esse que coincide com o limite não-relativístico da fórmula exata correspondente, encontrada na Ref. [16]. Ford e Vilenkin também aplicaram seus métodos ao campo escalar no espaço-tempo quadridimensional, obtendo a força proporcional à quinta derivada temporal do deslocamento do espelho. Fulling e Davies [18] (ver também [20]) encontraram uma classe de trajetórias hiperbólicas para um espelho em movimento, num espaço-tempo de Minkowski, no qual a radiação emitida corresponde ao espectro térmico.

Uma solução analítica exata para a equação de Moore foi obtida por Law [35], para um movimento ressonante particular da fronteira (ver também Ref. [36]). Cole e Schieve [37] propuseram um método de resolver exatamente a equação de Moore para uma lei de movimento geral da fronteira, que fornece resultados numéricos. Soluções analíticas aproximadas dessa equação também foram obtidas, por exemplo, por Dodonov-Klimov-

Nikonov [38] e Dalvit-Mazzitelli [39]. Com abordagens diferentes daquelas adotadas por Moore [14] e Fulling-Davies [16], métodos perturbativos foram desenvolvidos para resolver o problema do campo quântico na presença de uma única parede em movimento [40] e também em cavidades oscilantes [41, 42].

Modelos de único espelho e cavidades com uma das paredes em movimento têm sido estudados em muitos trabalhos (para uma revisão ver Ref. [43]). Diferentemente, o problema de uma cavidade com duas paredes em movimento tem sido recentemente investigado e há relativamente poucos trabalhos sobre este assunto na literatura (ver Refs. [44, 45, 46, 47, 48, 49]). Uma cavidade com dois espelhos em movimento pode exibir situações de interferência destrutiva e construtiva no número de partículas criadas, dependendo da relação entre as diferenças de fase de cada fronteira, as amplitudes e as frequências de oscilação [44, 46, 48]. Ji, Jung e Soh [44], considerando a expansão do campo quantizado em bases instantâneas e uma abordagem perturbativa, investigaram o problema da interferência na criação de partículas numa cavidade unidimensional com duas fronteiras movendo-se de acordo com leis de movimento prescritas, não-relativísticas e oscilatórias (de pequena amplitude). Dalvit e Mazzitelli [48] estenderam a solução do campo obtida por Moore [14] para o caso de uma cavidade unidimensional com duas fronteiras em movimento, derivando um conjunto de equações “generalizadas de Moore”, também obtendo o valor esperado do tensor energia-momentum para esse modelo, generalizando a correspondente fórmula obtida por Fulling e Davies [16]. Na Ref. [48] o conjunto de equações generalizadas de Moore foi resolvido para o caso de movimentos oscilatórios com pequenas amplitudes, via procedimento baseado em grupo de renormalização. Li e Li [50] aplicaram o método geométrico, proposto por Cole e Schieve [37], para resolver exatamente as equações generalizadas de Moore obtidas por Dalvit e Mazzitelli [48]. Lambrecht, Jaekel e Reynaud investigaram o problema da radiação emitida fora da cavidade com dois espelhos em movimento (com amplitudes de transmissão diferentes de zero) movendo-se no vácuo [49]. Eles deduziram, para leis de movimento arbitrárias, uma fórmula para o campo fora da cavidade, usando um método análogo ao descrito na Ref. [37], e também usaram a solução do campo para conseguir uma fórmula exata para a densidade de energia irradiada ao lado direito da cavidade, aplicando seus resultados a uma específica classe de movimentos harmônicos, bem como ao cálculo da energia arma-

zenada dentro da cavidade para este caso [49]. O método desenvolvido na Ref. [49] - se aplicado para encontrar a solução geral do campo dentro da cavidade com duas fronteiras em movimento, coeficiente de transmissão igual a zero e trajetórias arbitrárias - naturalmente deve resultar numa solução para o campo equivalente à solução exata recursiva encontrada na Ref. [50]. Esta solução do campo, inserida na fórmula renormalizada para o tensor energia-momentum encontrada na Ref. [48], nos permite alcançar o valor exato para a densidade de energia dentro da cavidade. Entretanto, este procedimento requer, em geral, cálculos recursivos e numéricos das primeiras, segundas e terceiras derivadas de cada função encontrada no conjunto de equações generalizadas de Moore propostas na Ref. [48]. Neste contexto, Li e Li obtiveram o comportamento exato da densidade de energia numa cavidade para lei de movimento particular senoidal, com pequena amplitude [51].

Os primeiros trabalhos que estudaram o problema da criação de partículas por espelhos em movimento com estado inicial diferente do vácuo foram publicados há cerca de trinta anos [18], e mostraram que a presença de partículas reais no estado inicial amplifica o fenômeno da criação de partículas. Considerando o banho térmico como o estado “in”, o ECD foi investigado para o caso de um único espelho [1, 52, 53, 54, 55], e também para uma cavidade oscilante [38, 54, 56]. Jaekel e Reynaud [52, 53] obtiveram para o campo escalar em $1 + 1$ dimensões a contribuição térmica para a força dissipativa proporcional à velocidade do espelho, válida para o limite não-relativístico. Os efeitos térmicos também foram considerados nas Refs. [53, 54, 55, 57, 58, 59]. O estado coerente é um outro estado inicial do campo que também foi considerado [1, 60, 61, 62, 63], bem como a superposição de estados coerentes para investigar a descoerência via ECD [21, 22]. Estados comprimidos também foram considerados em [1].

Grande atenção vem sendo dada ao papel das condições de contorno no ECD (no efeito Casimir estático, diferentes condições de contorno podem mudar o sinal da força de Casimir [64, 65, 66]). Recentemente, diversos trabalhos têm investigado a influência das diferentes condições de contorno sobre a força de Casimir dinâmica [60, 67, 68]. Neste contexto, Alves, Farina e Maia Neto mostraram que para o problema de um único espelho, as condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann levam à mesma força atuando sobre uma fronteira móvel quando o estado inicial do campo é simétrico sob translações tem-

porais [60], sendo que a validade desta conclusão foi obtida via abordagem perturbativa de Ford e Vilenkin [34], estava restrita às aproximações não-relativísticas e de pequenos deslocamentos.

Vemos, então, que o modelo de um campo escalar real sem massa em um espaço-tempo bidimensional (provavelmente o modelo mais simples com o qual se pode investigar o ECD) tem servido como um importante laboratório teórico para o estudo do ECD durante quatro décadas. Ele tem sido importante para o desenvolvimento de novas técnicas de cálculo, sendo que vários métodos desenvolvidos para campos escalares em 1+1 dimensões têm sido estendidos para outros campos e dimensões mais altas. Por exemplo, a técnica para obter a solução do campo em uma cavidade unidimensional através da expansão do campo em bases instantâneas [41] tem sido aplicada para analisar o problema da criação de fótons em cavidades tri-dimensionais oscilantes [69]; o formalismo usado para calcular numericamente a produção de partículas sem massa, a partir do vácuo, em uma cavidade dinâmica unidimensional [70, 71, 72] pode ser usado para investigar a criação de fótons com polarização transverso-elétrica em uma cavidade tridimensional perfeitamente condutora [73]. Além disso, o modelo possui conexão direta com alguns problemas realistas importantes. Por exemplo: recentemente uma das propostas experimentais promissoras para medir o ECD foi matematicamente descrita por este modelo, especificamente por um campo escalar em 1+1 dimensões sob condição de contorno de Robin [30, 74]. O modelo pode ainda ser realizado fisicamente pelos modos TEM (transverso eletromagnéticos) em um guia de ondas cilíndrico coaxial [67]. Se consideramos, ainda, um modelo em 3+1 dimensões com estados iniciais do campo apresentando somente partículas reais com direção de propagação perpendicular ao espelho móvel, é esperado que (a menos dos termos de vácuo) esse problema seja equivalente a um problema em 1+1 dimensões. Há ainda situações em que o uso do modelo de campo escalar em 1+1 dimensões, em vez de modelos em dimensões mais altas, parece ser obrigatório. Quando se quer, por exemplo, investigar a conexão entre o ECD e a radiação Hawking, é requerido que o movimento da fronteira pertença a uma classe de trajetórias hiperbólicas, em que a fronteira se move num mesmo sentido, com sua velocidade aproximando-se cada vez mais da velocidade da luz (simulando o colapso de uma estrela). A solução do campo com a fronteira obedecendo a esse tipo de trajetória está fora do alcance dos métodos perturbativos, que requerem

movimentos não-relativísticos e de pequena amplitude. Para tal investigação, o modelo bidimensional de campo escalar sem massa permite a aplicação de um método baseado em transformação conforme, tal como feito por Fulling e Davies [16], que permite encontrar a solução exata do campo.

No presente trabalho, investigamos vários aspectos do ECD em 1+1 dimensões, buscando soluções exatas para a força dinâmica de Casimir e a densidade de energia associada ao campo, focando em problemas com uma única parede, e cavidades com um ou duas paredes móveis. Também levamos em conta diversas condições de contorno e a presença de banho térmico como estado inicial do campo. Desenvolvemos um pacote de rotinas computacionais que permite extrair valores numéricos das fórmulas por nós obtidas.

Estados atômicos emaranhados

Outra vertente de nosso trabalho consiste no estudo de estados atômicos emaranhados. Discutiremos o formalismo empregado para abordar o problema de dois átomos acoplados, cada um ao seu campo próprio. Estudamos o emaranhamento de uma família de estados biatômicos superpostos e todo o sistema está contido em uma superfície esférica refletora de raio R , seu comportamento é estudado nas situações em que tomamos os limite de pequena e grande cavidade.

A estabilidade é uma característica dos sistemas quânticos na ausência de interação. Quando a interação é introduzida nestes sistemas, a tendência é que eles dissipem. Um corpo material - por exemplo, um átomo excitado, ou uma molécula excitada, ou um núclon - muda de estado por interação com um meio ambiente. A natureza do mecanismo de desestabilização é em geral dependente do modelo adotado para se descrever o sistema e aproximado. Estudos sobre o assunto, em particular para o movimento Browniano, são encontrados nas referências [75, 76]. A estabilidade (ou não) de um sistema quântico não é devida apenas à presença (ou ausência) de um meio com o qual ele interage. Por exemplo, o comportamento de átomos confinados em pequenas cavidades é completamente diferente no espaço livre ou em grandes cavidades. No primeiro caso, o processo de decaimento é inibido pela presença de fronteiras, um fato que tem sido apontado há bastante tempo na literatura [77, 78, 79], enquanto no segundo caso, o átomo decai após um tempo

suficientemente longo.

Este fenômeno de inibição do decaimento e aspectos relacionados foi analisado em [80, 81, 82, 83, 84] usando o formalismo de “estados vestidos” introduzido em [85]. Com este formalismo são previstas as observações experimentais de que os estados excitados de átomos em cavidades suficientemente pequenas são estáveis. Em [80, 82] são obtidas fórmulas para a probabilidade de que um átomo permaneça excitado por um tempo infinitamente longo, desde que seja colocado em uma cavidade de tamanho apropriado. Para uma frequência de emissão do vermelho visível, o tamanho da cavidade está em bom acordo com as observações experimentais [86, 87]. O formalismo dos estados vestidos leva em conta, no contexto do modelo em que estão definidos, o fato de que, por exemplo, uma partícula física carregada está sempre acoplada ao campo de calibre; em outras palavras, está sempre “vestida” por uma nuvem de quanta do campo. Em geral, para um sistema de partículas de matéria, a idéia é que as partículas estejam acopladas ao meio ambiente, que usualmente é modelado de duas maneiras equivalentes: tanto representado por um campo livre, como feito nas Refs. [75, 76], quanto considerando o meio ambiente como um reservatório composto de um grande número de osciladores harmônicos não-interagentes (veja, por exemplo, [88, 89, 90, 91]). Em ambos os casos, exatamente o mesmo tipo de argumento dado previamente no caso de uma partícula carregada aplicada a tais sistemas. Podemos falar da “vestimenta” de um conjunto de partículas pelo conjunto dos infinitos modos harmônicos do meio ambiente. Deve-se notar que nossos estados vestidos *não* são os mesmos empregados na óptica quântica e no âmbito da física geral, usualmente associados com estados estáveis [92, 93]. Nossos estados vestidos são dados em termos das nossas coordenadas vestidas e podem ser vistos como uma versão rigorosa do procedimento de “vestimenta”, no contexto do modelo empregado aqui (ver Eqs. (5.38) e (5.39) no capítulo 5).

Na presente tese, estudamos a evolução temporal de uma família de estados vestidos de dois átomos, generalizando um trabalho anterior que trata de uma situação mais simples, da superposição dos estados de apenas um átomo [84]. Nossa abordagem ao problema faz uso do conceito supracitado de estados vestidos. Consideramos nosso sistema consistindo de dois átomos, cada um deles interagindo independentemente com o meio fornecido pelos modos harmônicos do campo. O sistema como um todo está contido numa cavidade

esférica de raio R . Podemos tomá-lo como um sistema bipartite, em que cada subsistema consiste de um dos átomos vestidos. Consideramos a superposição de dois tipos de estados: Em um deles, todas as entidades (tanto átomos quanto modos do campo) estão em seu estado fundamental, e um estado em que um dos átomos é deixado no seu primeiro estado excitado, com o outro átomo e todos os modos do campo no estado fundamental.

A análise da matriz densidade do sistema leva à evolução temporal da superposição dos estados. O cálculo da entropia de Von Neumann leva ao resultado de que a matriz densidade permanece inalterada com o passar do tempo, para uma cavidade de qualquer tamanho. Isto ocorre apesar de comportamentos distintos para a evolução temporal do sistema para uma pequena cavidade ou para uma grande cavidade (espaço livre $R \rightarrow \infty$). Neste último caso o sistema dissipa completamente com o tempo, enquanto para uma pequena cavidade o sistema tem um comportamento oscilatório, que nunca decai completamente.

A evolução da superposição destes estados atômicos leva a uma matriz densidade (reduzida) dependente do tempo. Expressões para estes elementos são calculados em ambos os casos de uma cavidade infinitamente grande (isto é, espaço livre) e de uma cavidade pequena, quando os dois átomos são considerados idênticos. Diferentes comportamentos são obtidos para esta evolução temporal. No caso de grande cavidade, o sistema mostra dissipação, e, com o passar do tempo, ambos os átomos chegam ao estado fundamental. Uma cavidade pequena apresenta um comportamento oscilatório, ou seja os átomos nunca decaem.

O emaranhamento está relacionado ao fato que para sistemas multipartites o princípio de superposição leva naturalmente ao conceito de estado emaranhado; neste caso, subsistemas não-interagentes podem compartilhar estados emaranhados que descrevem correlações quânticas. Tais emaranhamentos carregam estruturas não locais que podem ser analisadas por comparação com correlações clássicas [94, 95]. Se uma interação entre os átomos vestidos, mediado por suas nuvens de campo é introduzida, esperamos que a entropia de Von Neumann associada aos átomos vestidos possa depender do tempo e do tamanho da cavidade. Estabelecer este formalismo de coordenadas vestidas e estados vestidos para um sistema de dois átomos interagentes é uma tarefa difícil, que talvez não seja possível por meios puramente analíticas. podemos pensar em introduzir estas interações

como um tipo de “perturbação” em torno dos estados atômicos vestidos individuais. Este será um assunto para um trabalho futuro.

Enfatizamos que aqui consideramos emaranhamento como um efeito puramente quântico, uma característica da mecânica quântica, que é também não local, no sentido que sistemas distantes e não-interagentes podem estar emaranhados. Isto é devido à existência de estados superpostos, não à interação entre os átomos (no nosso caso, vestidos). De fato, tais propriedades de emaranhamento de sistemas não-interagentes têm sido usadas para conceber dispositivos de comunicação quântica [96].

Parte I

Efeito Casimir Dinâmico

Capítulo 1

Uma fronteira em movimento

Neste capítulo, investigamos o problema de um campo real, sem massa, num espaço-tempo bidimensional, onde uma única fronteira móvel impõe a condição de Dirichlet ou Neumann ao campo, e o estado inicial do campo é arbitrário. Em vez de usar abordagens perturbativas, tal como encontrado na literatura [60], usamos a abordagem de DeWitt [15] e Fulling-Davies [16] e mostramos que, também para movimentos relativísticos, as condições de Dirichlet e Neumann levam à mesma força de reação de radiação atuando sobre a fronteira em movimento quando o estado inicial do campo é diagonal, ou seja, a matriz densidade associada a estes estados só possui elementos na diagonal principal. Neste contexto, obtemos as fórmulas exatas para a densidade de energia do campo e para a força de reação a radiação sobre a fronteira, considerando os estados iniciais do campo como sendo o vácuo ou um banho térmico. Mostramos que no limite não-relativístico nossas fórmulas levam aos resultados conhecidos na literatura [52, 53, 60].

O presente capítulo derivou dos artigos [1, 3].

1.1 Densidade de energia e força quântica sobre uma fronteira em movimento

Começamos por analisar uma solução exata do campo para as condições de fronteira dinâmicas de Dirichlet e Neumann [15, 16, 17]. Vamos considerar que o campo satisfaz a

equação de Klein-Gordon não massiva (daqui por diante admitiremos $\hbar = c = 1$):

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0, \quad (1.1)$$

e obedece à condição de Dirichlet

$$\phi'(t', x')|_{fronteira} = 0 \quad (1.2)$$

ou Neumann

$$\partial_{x'} \phi'(t', x')|_{fronteira} = 0, \quad (1.3)$$

tomadas no referencial de Lorentz que, num dado instante, movimentada-se com a mesma velocidade da fronteira. Examinamos um conjunto particular de funções-movimento para as quais $z(t < 0) = 0$, como mostrado na Fig. 1.1, onde $z(t)$ é a posição da placa no instante t . Usando a transformação de Lorentz apropriada, as condições de Dirichlet e Neumann podem ser escritas, respectivamente, em termos das quantidades definidas no referencial do laboratório inercial como:

$$\phi[t, z(t)] = 0,$$

$$(\dot{z}(t)\partial_t + \partial_x) \phi(t, x)|_{x=z(t)} = 0.$$

A solução do campo pode ser obtida através da exploração da invariância conforme da equação de Klein-Gordon para esse modelo. Considerando a transformação conforme de coordenadas $t - x = f(w - s)$ e $t + x = g(w + s)$, a equação de onda para o campo escalar em 1 + 1 permanece invariante, ou seja:

$$(\partial_w^2 - \partial_s^2) \phi(w, s) = 0. \quad (1.4)$$

As funções f e g podem ser configuradas para uma classe de leis de movimento $z(t)$ tal que a curva $s = 0$ coincida com a funções-movimento $x = z(t)$: $[t, z(t)] \rightarrow (w, 0)$ [16]. Então, as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, vistas no espaço (w, s) , tornam-se respectivamente:

$$\phi(w, 0) = 0, \quad (1.5)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \phi(w, s) \right|_{s=0} = 0. \quad (1.6)$$

A solução da equação da onda para as condições de Dirichlet ou Neumann no espaço (w, s) são bem conhecidas, de tal modo que, voltando às coordenadas (t, x) , o operador de campo é escrito como:

$$\hat{\phi}(t, x) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega \phi_\omega + \hat{a}_\omega^\dagger \phi_\omega^*], \quad (1.7)$$

onde

$$\phi_\omega(t, x) = (4\pi\omega)^{-1/2} [\gamma e^{-i\omega r(v)} + \gamma^* e^{-i\omega p(u)}] \quad (1.8)$$

formam um conjunto completo de soluções de frequências positivas, e $u = t - x$, $v = t + x$. Na Eq. (1.8), introduzimos uma notação que nos permite colocar numa única fórmula as soluções para condições de contorno de Dirichlet e Neumann, e também as soluções para o lado direito (regiões I e II da Fig. 1.1) e do lado esquerdo (regiões III e IV da Fig. 1.1) do espelho. Neste sentido, para $\gamma = 1$ a Eq.(1.8) leva à solução para Neumann,

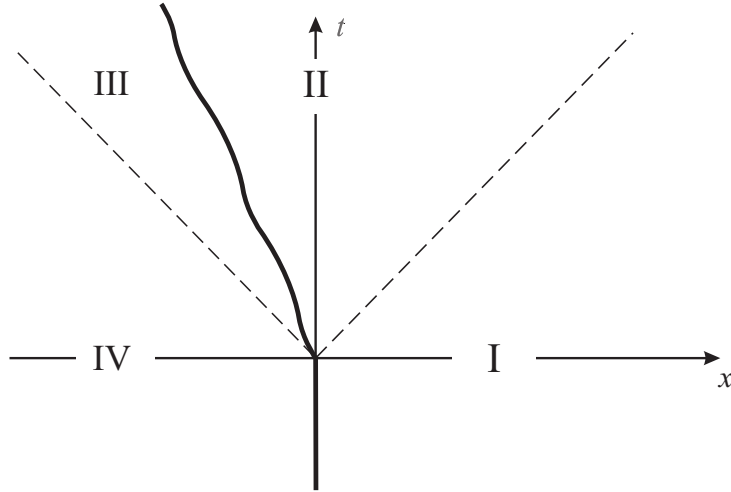


Figura 1.1: Trajetória do espelho (linha grossa). As linhas tracejadas são linhas nulas que separam a região I da região II, e a região III da região IV.

enquanto $\gamma = i$ leva à solução para Dirichlet. Para as regiões I e II mostradas na Fig. 1.1: $r(v) = v$ e $2\tau(u) - u = f^{-1}(u) \equiv p(u)$, onde $\tau(u)$ pode ser obtido de $\tau(u) - z[\tau(u)] = u$; para as regiões III e IV: $p(u) = u$ e $2\tau(v) - v = g^{-1}(v) \equiv r(v)$. A causalidade requer que o campo nas regiões I e IV, representado por ϕ_0 , não seja afetado pelo movimento da fronteira [16], de forma que p e r são escolhidos de modo que sejam funções identidade

nessas “regiões estáticas”. A seguir, consideraremos as médias $\langle \dots \rangle$ tomadas sobre um estado inicial arbitrário do campo (regiões I e IV) supostos aqui, por simplicidade, como sendo o mesmo para ambos os lados da fronteira. Continuamos nossa análise escrevendo a função correlator $\mathcal{C} = \langle \phi_0(t, x) \phi_0(t', x') \rangle$. Para tanto, tomamos o produto dos campos:

$$\begin{aligned} \phi(t, x) \phi(t', x') &= \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega \left[\hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \phi_\omega(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') + \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'}^\dagger \phi_\omega^*(t, x) \phi_{\omega'}^*(t', x') \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \phi_\omega^*(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') + \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'}^\dagger \phi_\omega(t, x) \phi_{\omega'}^*(t', x') \right]. \end{aligned}$$

Usando a relação de comutação $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = i\delta(\omega - \omega')$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(t, x) \phi(t', x') &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega \operatorname{Re} \left[\hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \phi_\omega(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') + \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \phi_\omega^*(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') \right] \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega \phi_\omega(t, x) \phi_\omega^*(t', x'). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Tomando a média do produto dos campos, considerando arbitrário o estado inicial do campo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi(t, x) \phi(t', x') \rangle &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega \operatorname{Re} \left[\langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle \phi_\omega(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') \right] \\ &\quad + 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega \operatorname{Re} \left[\langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle \phi_\omega^*(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') \right] \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega \phi_\omega(t, x) \phi_\omega^*(t', x'). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Substituindo (1.8) (para as regiões estáticas I e IV) em (1.10), temos:

$$\phi_\omega(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') = \frac{\exp[-i\omega t - i\omega' t']}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \operatorname{Re} \left[|\gamma|^2 \exp(-i\omega x + i\omega' x') + \gamma^2 \exp(-i\omega x - i\omega' x') \right], \quad (1.11)$$

$$\phi_\omega^*(t, x) \phi_{\omega'}(t', x') = \frac{\exp[i\omega t - i\omega' t']}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \operatorname{Re} \left[|\gamma|^2 \exp(-i\omega x + i\omega' x') + \gamma^2 \exp(-i\omega x - i\omega' x') \right]. \quad (1.12)$$

Em seguida, substituímos (1.11) e (1.12) em (1.10) e escrevemos o correlator \mathcal{C} dividindo-o da seguinte forma: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{vac} + \mathcal{C}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} + \mathcal{C}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$, onde

$$\mathcal{C}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle} = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega \operatorname{Re} \left[\langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle \mathcal{F}_1(\omega, -\omega'; \gamma, |\gamma|) \right], \quad (1.13)$$

$$\mathcal{C}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega \operatorname{Re} [\langle\hat{a}_\omega^\dagger\hat{a}_{\omega'}\rangle \mathcal{F}_1(\omega, \omega'; |\gamma|, \gamma)], \quad (1.14)$$

$$\mathcal{C}_{vac} = \int_0^\infty d\omega \mathcal{F}_1(\omega, \omega'; |\gamma|, \gamma)|_{\omega'=\omega} \quad (1.15)$$

e

$$\mathcal{F}_1(\omega, \omega'; \rho, \lambda) = \frac{\exp[-i\omega t + i\omega' t']}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \operatorname{Re} [\rho^2 \exp(-i\omega x + i\omega' x') + \lambda^2 \exp(-i\omega x - i\omega' x')]. \quad (1.16)$$

Destas equações, vemos que, na presença de fronteiras, \mathcal{C}_{vac} , $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle}$ e $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ não são simétricos com relação a translações espaciais. O termo \mathcal{C}_{vac} é simétrico sob translações temporais, enquanto $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle}$ é simétrico se $\langle\hat{a}_\omega^\dagger\hat{a}_\omega\rangle \propto \delta(\omega' - \omega)$. Por outro lado, $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$, se é diferente de zero, não é simétrico sob translação temporal. No contexto da abordagem perturbativa [34], a força de radiação pode ser dada em termos das funções de correlação dependentes do operador de campo não perturbado ϕ_0 : $[\partial_x \partial_{x'} \mathcal{C}]_{x'=x=0}$ e $[\mathcal{C}]_{x'=x=0}$ para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente [34, 60]. Como mostrado na Ref. [60], as partes da força relacionadas a \mathcal{C}_{vac} e $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ são as mesmas para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Por outro lado, a parte relacionada com $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ é diferente por um sinal. Em outras palavras, na Ref. [60] é mostrado que a diferença entre a força sobre uma fronteira, em que o campo está sob condição de Dirichlet ou Neumann, emerge, no contexto de um espelho em movimento não-relativístico com pequena amplitude, da parte do correlator não perturbado \mathcal{C} que é não-invariante sob translação temporal, ou seja, que as condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann levam à mesma força atuando sobre uma fronteira móvel quando o estado inicial do campo é diagonal [60]. Entretanto, a validade dessa conclusão obtida em [60] está restrita a movimentos não-relativísticos e com pequenos deslocamentos.

Agora investigaremos este problema no contexto de uma abordagem exata, partindo da solução do campo (1.8) e calculando a fórmula exata para o valor esperado do operador densidade de energia $\mathcal{T} = \langle\hat{T}_{00}(t, x)\rangle$, e para força total $F(t)$ atuante sobre a fronteira em movimento, definida por (desde que $T_{00} = T_{11}$ neste modelo): $F(t) = \mathcal{T}[t, z(t)]^{(-)} - \mathcal{T}[t, z(t)]^{(+)}$, onde o índice “+” indica as regiões I e II, enquanto “-” indica as regiões III e IV na Fig. 1.1. Vamos separar \mathcal{T} , escrevendo $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{vac} + \mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} + \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$, onde:

$$\mathcal{T}_{vac} = \int_0^\infty \frac{d\omega\omega'}{2} \mathcal{F}_2(\omega, \omega'; |\gamma|, |\gamma|)|_{\omega'=\omega},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \operatorname{Re} [\langle\hat{a}_\omega^\dagger\hat{a}_{\omega'}\rangle \mathcal{F}_2(\omega, \omega'; |\gamma|, |\gamma|)], \\ \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle} &= -2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \operatorname{Im} [\langle\hat{a}_\omega\hat{a}_{\omega'}\rangle \mathcal{F}_2(\omega, -\omega'; \gamma, \gamma^*)]\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{F}_2(\omega, \omega'; \rho, \lambda) = \frac{\sqrt{\omega'\omega}}{2\pi} \left\{ \rho^2 [r'(v)]^2 e^{-i(\omega-\omega')r(v)} + \lambda^2 [p'(u)]^2 e^{-i(\omega-\omega')p(u)} \right\}.$$

O primeiro termo \mathcal{T}_{vac} é a densidade de energia local relacionada ao estado de vácuo, e apresenta divergência. Após a regularização e renormalização via separação de pontos (ver Ref. [16]), \mathcal{T}_{vac} pode ser redefinido como a densidade de energia local renormalizada

$$\mathcal{T}_{vac} = -\frac{|\gamma|^2}{24\pi} \left[\frac{p'''(u)}{p'(u)} - \frac{3p''(u)^2}{2p'(u)^2} \right] - \frac{|\gamma|^2}{24\pi} \left[\frac{r'''(v)}{r'(v)} - \frac{3r''(v)^2}{2r'(v)^2} \right], \quad (1.17)$$

onde o objeto entre colchetes é conhecido como derivada Schwarziana. Vale observar que, em nossa notação, para o lado direito do espelho temos $r(v) = v$, de forma que esta equação devolve a fórmula encontrada na Ref. [16] para Dirichlet, e, além disso, verificamos que a mesma fórmula é válida para a condição de contorno de Neumann ($|\gamma|^2 = 1$, tanto para Dirichlet quanto para Neumann). Agora, vamos investigar a força de radiação total F que atua sobre o espelho em movimento. Vamos considerar $F = F_{vac} + F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} + F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$, onde:

$$F_{vac} = \frac{|\gamma|^2}{2\pi} (1 + \dot{z}^2) \left[\frac{\ddot{z}^2 \dot{z}}{(1 - \dot{z}^2)^4} + \frac{1}{3} \frac{\ddot{z}}{(1 - \dot{z}^2)^3} \right], \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \operatorname{Re} [\langle\hat{a}_\omega^\dagger\hat{a}_{\omega'}\rangle \mathcal{F}_3(\omega, \omega'; |\gamma|, |\gamma|)], \\ F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle} &= -2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \operatorname{Re} [\langle\hat{a}_\omega\hat{a}_{\omega'}\rangle \mathcal{F}_3(\omega, \omega'; \gamma^*, \gamma)],\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3(\omega, \omega', \rho, \lambda) &= \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \left\{ -\rho^2 \frac{(1 + \dot{z})^2}{(1 - \dot{z})^2} e^{-i(\omega-\omega')p[t-z(t)]} + \rho^2 e^{-i(\omega-\omega')[t-z(t)]} \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \left\{ \lambda^2 \frac{(1 - \dot{z})^2}{(1 + \dot{z})^2} e^{-i(\omega-\omega')r[t+z(t)]} - \lambda^2 e^{-i(\omega-\omega')[t+z(t)]} \right\}. \quad (1.19)\end{aligned}$$

Vemos que F_{vac} e $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ dependem de $|\gamma|^2$, que tem o mesmo valor tanto para as condições de Dirichlet quanto Neumann. Por outro lado $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ depende de γ^{*2} (ou γ^2), que difere

por um sinal no caso de Dirichlet ou Neumann. Notando que o termo $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ ($\langle\hat{a}\hat{a}\rangle \neq 0$) é não simétrico sob translação temporal, podemos generalizar o resultado encontrado na Ref. [60], concluindo que, para uma lei de movimento geral (relativística), as condições de Dirichlet e Neumann levam à mesma força de radiação atuando sobre uma fronteira em movimento, quando o estado inicial do campo é simétrico sob translação temporal. Como um teste de consistência das fórmulas por nós obtidas, no limite não-relativístico reobtemos $F_{vac}(t) \approx |\gamma|^2 \dot{z} / 6\pi$, encontrado na Ref. [34] para Dirichlet, e na Ref. [60] para a condição de Neumann.

1.2 Banho térmico como estado inicial do campo

Agora examinaremos a força de radiação sobre o espelho em movimento quando existem partículas reais no estado inicial do campo, enfocando o caso em que o estado inicial é um banho térmico à temperatura T , que (tal como o vácuo) é um exemplo de estado de campo invariante sob translação temporal. Para este estado precisamos levar em conta que

$$\langle \hat{a}_{\omega'}^\dagger \hat{a}_\omega \rangle = \bar{n}(\omega) \delta(\omega - \omega') \quad (1.20)$$

onde

$$\bar{n}(\omega) = 1/(e^{\omega/T} - 1), \quad (1.21)$$

com a constante de Boltzmann igual a 1. Obtemos $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle} = 0$ e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$, renomeada como a densidade de energia $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(T)}$, é dada por

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(T)} = \frac{|\gamma|^2 \pi T^2}{12} [r'(v)^2 + p'(u)^2]. \quad (1.22)$$

A força $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle} = 0$, enquanto $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$, renomeada como a força térmica $F^{(T)}$, é dada por

$$F^{(T)} = -\sigma_T \left[\dot{z} \frac{(1 + \dot{z}^2)}{(1 - \dot{z}^2)^2} \right] = -\sigma_T \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \dot{z}^{2n+1}, \quad (1.23)$$

onde $\sigma_T = 2|\gamma|^2 \pi T^2 / 3$ é o coeficiente de viscosidade. Esta fórmula exata é a generalização daquela obtida na Ref. [52]. Para velocidades não relativísticas relacionadas, por exemplo, com movimentos mecânicos do espelho ($\dot{z} \sim 10^{-8}$) ou para simulação de movimento do

espelho por mudança da reflectividade de um semiconductor irradiado por laser ($\dot{z} \sim 10^{-3}$) [97], a série pode ser truncada em $n = 0$, levando à fórmula aproximada:

$$F^{(T)} \approx F_{(0)}^{(T)} = -2|\gamma|^2 \pi T^2 \dot{z}/3, \quad (1.24)$$

que é a mesma fórmula encontrada nas Refs. [52] (para Dirichlet) e Ref. [60] (para condição de fronteira de Neumann). No contexto não-relativístico, esta fórmula aproximada está em bom acordo com a fórmula exata. Para espelhos com velocidades relativísticas (por exemplo, um feixe de elétrons relativísticos que podem simular um espelho relativístico [98]), correções para a fórmula aproximada tornam-se necessárias, como pode ser visto na Fig. 1.2.

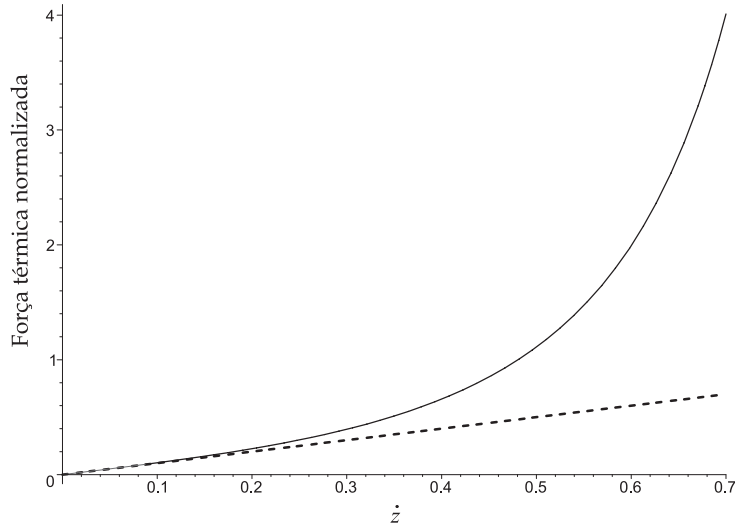


Figura 1.2: Força térmica normalizada $|F^{(T)}|/\sigma_T$ (linha sólida) e força térmica aproximada $|F_{(0)}^{(T)}|/\sigma_T$ (linha tracejada), ambas válidas para as condições de Dirichlet e Neumann, graficamente mostradas como função da velocidade do espelho \dot{z} .

1.3 Aplicação ao movimento de Walker-Davies

Diversos movimentos para o espelho considerados na literatura, incluindo aqueles investigados na Ref. [16], supõem uma aceleração para a fronteira que começa ou termina

repentinamente, o que gera uma densidade de energia infinita, ou um pulso delta de energia emitida a partir desse ponto de descontinuidade. Walker e Davies [99] apresentaram uma lei de movimento para o espelho que acelera suavemente e segue ao longo de um movimento assintoticamente estático. Eles obtiveram uma solução exata para o problema da radiação de um espelho em movimento. Suas funções-movimento assintoticamente estáticas têm a vantagem de evitar certas patologias relacionadas com a radiação emitida pelo movimento do espelho com acelerações abruptas. Nesta seção, investigaremos o modelo proposto por Walker e Davies [99], mas considerando o estado inicial do campo como sendo o térmico, e as condições de Dirichlet ou Neumann impostas ao campo. Especificamente, mostramos o comportamento da força térmica que atua sobre a fronteira.

Na Ref. [99], Walker e Davies propuseram a seguinte lei de movimento proposta para a fronteira:

$$t = -z \pm A (e^{-2z/B} - 1)^{1/2}, \quad (1.25)$$

onde A e B são constantes, com $A > B$, de modo que $|\dot{z}| < 1$. Este é um movimento suave e assintoticamente leva a uma velocidade uniforme (ver Fig. 1.3) em $t \rightarrow \pm\infty$. A forma

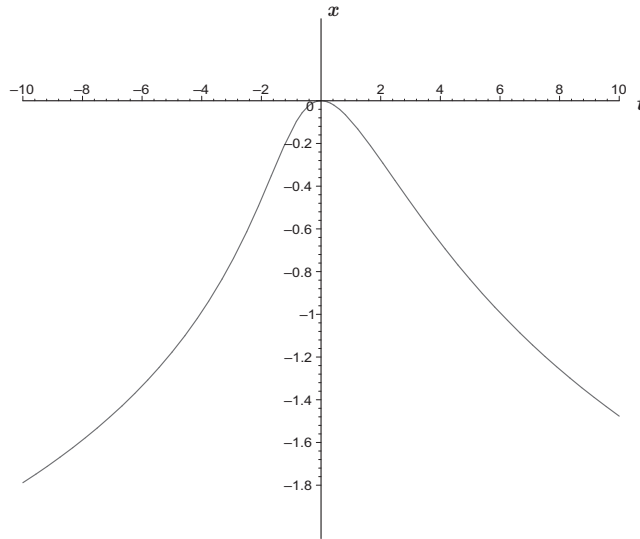


Figura 1.3: O movimento suave e assintótico proposto por Walker e Davies, com $A=2$ e $B=1$.

desta trajetória é mostrada na Fig. 1.3. O sinal de $+$ na Eq. (1.25) refere-se a metade do lado esquerdo da curva, enquanto o sinal $-$ a metade do lado direito. A velocidade da fronteira se aproxima de zero no limite que $t \rightarrow \pm\infty$. Este tipo de movimento nos

permite escrever a expressão para a velocidade como [99]:

$$\dot{z} = -\frac{Bp(u)}{Bp(u) + p(u)^2 + A^2}, \quad (1.26)$$

onde a função $p(u)$ é obtida de $p(u) = 2\tau(u) - u$ e $\tau(u)$ de $u = \tau(u) - z[\tau(u)]$. Para uma trajetória como essa Walker e Davies calcularam a energia emitida ao longo de toda a trajetória, obtida integrando a densidade de energia ao longo de toda a trajetória [99]:

$$\int_{z(t)}^{\infty} \langle T_{00}(t, x) \rangle dx = \frac{B^2}{48(A^2 - B^2)^{3/2}}. \quad (1.27)$$

Como pode ser observado de (1.27) a energia é constante. Note que se $A \rightarrow B$ a energia vai a infinito, o que corresponde a uma trajetória que torna-se nula num ponto. Se $B \rightarrow 0$ a trajetória praticamente torna-se uma reta paralela ao eixo do tempo, uma posição constante, então a energia vai a zero. Substituímos agora (1.26) nas Eqs. (1.18) e (1.23) e obtemos o comportamento da força total sobre a fronteira, como mostrado na Fig. 1.4. Vemos que para velocidades maiores uma maior discrepância entre valores exatos e aproximados ocorre.

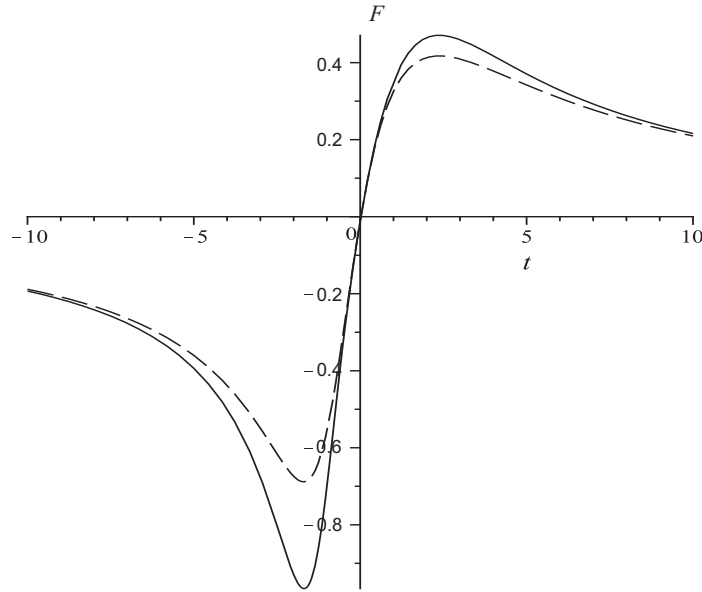


Figura 1.4: A força total exata F (linha sólida) e a força total aproximada $F \approx F_{(0)}$ (linha tracejada), para $T = 1$, $A = 2$ e $B = 1$.

1.4 Comentários finais do capítulo 1

Resumindo, enfocando as vantagens da abordagem de Fulling-Davies para o caso do campo escalar não massivo em $1+1$ dimensões, neste capítulo mostramos qual é a força dinâmica de Casimir exata que atua sobre uma fronteira em movimento sob a condição de Neumann, com o vácuo como o estado inicial do campo, generalizando o resultado não-relativístico encontrado na Ref. [60]. Para o campo térmico, considerando ambas as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, escrevemos a fórmula exata para a força térmica, que generaliza a fórmula aproximada proposta na Ref. [52] e que é também encontrada, por exemplo, nas Refs. [53, 54, 57, 58, 60]. Estendemos para uma lei de movimento geral (relativística) a conclusão encontrada na literatura [60] segundo a qual a força de radiação é a mesma para as condições de Dirichlet e Neumann sobre uma fronteira em movimento, quando o estado inicial do campo é invariante sob translação temporal. Como exemplo de aplicação, usamos nossas fórmulas para caso particular de movimento proposto por Walker e Davies [99], mostrando o comportamento da força térmica, a qual é válida tanto para a condição de Dirichlet quanto para a condição de Neumann.

Capítulo 2

Cavidade com fronteira móvel: uma parede em movimento

No presente capítulo, apresentamos, com base na Ref. [5], a solução exata para a densidade de energia dentro de uma cavidade não estática unidimensional, bem como para as forças atuando sobre as fronteiras, quando partículas reais estão presentes no estado inicial do campo. Nós estendemos, para um estado inicial arbitrário do campo, o método exato para calcular a densidade de energia proposto por Cole-Schieve [37, 100] no contexto da condição de Dirichlet e do vácuo como estado inicial do campo. Considerando o estado inicial arbitrário e também uma lei de movimento arbitrária, mostramos que a densidade de energia num dado ponto do espaço-tempo pode ser obtida através do trançado de uma sequência de linhas nulas que conectam o valor da densidade de energia em um determinado ponto do espaço-tempo a um ponto numa região que chamaremos “zona estática”, onde os modos iniciais do campo não são afetados pelos distúrbios causados pelo movimento da fronteira. Investigamos, especialmente, estados diagonais (para os quais a densidade de energia estática é invariante sob translação temporal), examinado em particular os estados térmico e de vácuo, levando em consideração as condições de Dirichlet e Neumann. Fechamos o capítulo aplicando o método apresentado na investigação do comportamento da densidade de energia e da energia das partículas criadas dentro de uma cavidade que realiza movimento oscilante sob condições mistas. Comparamos nosso resultado com soluções analíticas aproximadas, propostas por Dodonov [38] e Dalvit-

Mazzitelli [39].

O presente capítulo derivou dos artigos [2, 5, 4].

2.1 Densidade de energia: fórmulas exatas

Consideremos o campo satisfazendo a equação de Klein-Gordon não massiva, Eq. (1.1), mas agora o campo obedecendo a condições de contorno impostas na fronteira estática localizada em $x = 0$, e na posição $x = L(t)$ com $L(t)$ sendo uma lei prescrita para o movimento da fronteira, com $L(t < 0) = L_0$, onde L_0 é o comprimento da cavidade na situação estática. Consideremos quatro tipos de condições de contorno. A condição de Dirichlet-Neumann (DN) impõe a condição de Dirichlet na fronteira estática

$$\phi'(t', x') = \phi(t, x)|_{x=0} = 0, \quad (2.1)$$

enquanto a derivada espacial do campo, tomada instantaneamente em co-movimento com o referencial da fronteira, é nula na posição da fronteira em movimento (condição de Neumann):

$$\partial_{x'}\phi'(t', x')|_{boundary} = 0. \quad (2.2)$$

Usando a transformação de Lorentz apropriada, esta condição pode ser escrita em termos das quantidades definidas no referencial inercial do laboratório como segue:

$$\partial_{x'}\phi'(t', x') = \left[\left(\dot{L}(t)\partial_t + \partial_x \right) \phi(t, x) \right] \Big|_{x=L(t)} = 0. \quad (2.3)$$

A condição de Neumann-Neumann (NN) imposta nas duas fronteiras é escrita como:

$$\partial_x\phi(t, x)|_{x=0} = 0; \quad \left[\left(\dot{L}(t)\partial_t + \partial_x \right) \phi(t, x) \right] \Big|_{x=L(t)} = 0, \quad (2.4)$$

enquanto a condição de Neumann-Dirichlet (ND) impõe:

$$\partial_x\phi(t, x)|_{x=0} = 0; \quad \phi(t, L(t)) = 0. \quad (2.5)$$

A condição de Dirichlet-Dirichlet (DD) impõe:

$$\phi(t, 0) = 0; \quad \phi(t, L(t)) = 0. \quad (2.6)$$

Considerando o procedimento adotado nas Ref. [14, 16], o campo na cavidade pode ser obtido explorando a invariância conforme da equação de Klein-Gordon, logo o operador de campo, solução da equação da onda, é dado por:

$$\hat{\phi}(t, x) = \lambda[\hat{A} + \hat{B}\phi^{(0)}(t, x)] + \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} [\hat{a}_n\phi_n(t, x) + H.c.], \quad (2.7)$$

onde $\phi^{(0)} = [R(v) + R(u)]/2$ [67], e os modos do campo $\phi_n(t, x)$ dados por:

$$\phi_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4(n+\beta)\pi}} [\gamma \varphi_n^{(\beta)}(v) + \gamma^* \varphi_n^{(\beta)}(u)], \quad (2.8)$$

com $\varphi_n^{(\beta)}(z) = e^{-i(n+\beta)\pi R(z)}$, $u = t - x$, $v = t + x$, e R satisfazendo a equação funcional de Moore:

$$R[t + L(t)] - R[t - L(t)] = 2. \quad (2.9)$$

Os operadores \hat{A} e \hat{B} satisfazem a regra de comutação $[\hat{A}, \hat{B}] = i$, $[\hat{A}, \hat{a}_n] = [\hat{B}, \hat{a}_n] = 0$ [67]. Nas Eqs. (2.7) e (2.8) foi introduzida a notação capaz de por em uma única fórmula as soluções para as quatro condições de fronteira consideradas. Neste sentido, para $\lambda = \gamma = 1$ e $\beta = 0$, as Eqs. (2.7) e (2.8) dão a solução NN. As outras três possíveis situações são recuperadas se considerarmos $\lambda = 0$, $\beta = 0$ e $\gamma = i$ para o caso DD; $\beta = 1/2$ e $\gamma = i$ para o caso DN; $\beta = 1/2$ e $\gamma = 1$ para o caso ND.

Daqui por diante, considerando a representação de Heisenberg, estaremos interessados nas médias $\langle \dots \rangle$ tomadas sobre qualquer estado inicial do campo aniquilado por \hat{B} . Neste contexto, escreveremos as fórmulas exatas para o valor esperado do operador densidade de energia $\mathcal{T} = \langle \hat{T}_{00}(t, x) \rangle$. Podemos separar \mathcal{T} da seguinte forma:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{vac}} + \mathcal{T}_{\text{non-vac}}, \quad (2.10)$$

onde

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = \frac{\pi|\gamma|^2}{4} \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} (n+\beta) [R'^2(v) + R'^2(u)] \quad (2.11)$$

e

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} + \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}, \quad (2.12)$$

com

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = g_1(v) + g_1(u), \quad (2.13)$$

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle} = g_2(v) + g_2(u), \quad (2.14)$$

$$g_1(z) = \frac{\pi|\gamma|^2}{2} \sum_{n,n'=1-2\beta}^{\infty} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \Re \left\{ e^{i(n-n')\pi R(z)} [R'(z)]^2 \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle \right\}, \quad (2.15)$$

$$g_2(z) = -\frac{\pi\gamma^2}{2} \sum_{n,n'=1-2\beta}^{\infty} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \Re \left\{ e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(z)} [R'(z)]^2 \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle \right\} \quad (2.16)$$

O termo \mathcal{T}_{vac} é a densidade de energia local relacionada ao estado de vácuo, que é divergente. Seguindo a referência [16], adotamos o método de regularização de “separação de pontos” (*point-splitting*) e obtemos \mathcal{T}_{vac} (agora redefinida) como a densidade de energia local renormalizada:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = -f(v) - f(u), \quad (2.17)$$

onde

$$f = \frac{|\gamma|^2}{24\pi} \left\{ \frac{R'''}{R'} - \frac{3}{2} \left(\frac{R''}{R'} \right)^2 + \pi^2 \left[\frac{1}{2} - 3(\beta - \beta^2) \right] R'^2 \right\}. \quad (2.18)$$

Na equação acima a derivada é tomada com relação ao argumento da função R . A parte “não-vácuo” da densidade de energia pode ser escrita com uma notação análoga a (2.17):

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = -g(v) - g(u), \quad (2.19)$$

onde $g = -(g_1 + g_2)$. Note que \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ dependem de $|\gamma|^2$, que tem o mesmo valor para as condições de contorno consideradas. Por outro lado, $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ depende de γ^2 , que pode ser 1 ou -1, dependendo da situação. Para uma melhor análise, é útil escrevermos:

$$\mathcal{T} = -h(v) - h(u), \quad (2.20)$$

onde

$$h = f + g. \quad (2.21)$$

A Eq. (2.20) generaliza a correspondente fórmula para o caso de vácuo e condição de Dirichlet obtida por Fulling e Davies [16].

2.2 Situação estática

Vamos primeiramente examinar as fórmulas da seção anterior para a situação estática $t \leq 0$, quando a equação de Moore é reduzida a $R(t + L_0) - R(t - L_0) = 2$. Para este caso, a função R é dada por [14]:

$$R(z) = z/L_0. \quad (2.22)$$

As funções f , g , g_1 e g_2 , agora renomeadas como $f^{(s)}$, $g^{(s)}$, $g_1^{(s)}$ e $g_2^{(s)}$, são dadas por:

$$f^{(s)} = \frac{|\gamma|^2 \pi}{24L_0^2} \left[\frac{1}{2} - 3(\beta - \beta^2) \right], \quad (2.23)$$

$$g^{(s)} = -(g_1^{(s)} + g_2^{(s)}), \quad (2.24)$$

$$g_1^{(s)}(z) = \frac{\pi |\gamma|^2}{2L_0^2} \sum_{n,n'=1-2\beta}^{\infty} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \Re \left\{ e^{i(n-n')\pi z/L_0} \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle \right\}, \quad (2.25)$$

$$g_2^{(s)}(z) = -\frac{\pi \gamma^2}{2L_0^2} \sum_{n,n'=1-2\beta}^{\infty} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \Re \left\{ e^{-i(n+n'+2\beta)\pi z/L_0} \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle \right\}. \quad (2.26)$$

Note que $f^{(s)}$ é uma constante e \mathcal{T}_{vac} (neste caso a densidade de energia de Casimir e renomeada como \mathcal{T}_{cas}) é tal que (ver Refs. [67, 65]):

$$\mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{DD}} = \mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{NN}} = -\frac{\pi}{24L_0^2}, \quad \mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{DN}} = \mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{ND}} = \frac{\pi}{48L_0^2}, \quad (2.27)$$

onde os índices DD, NN, DN e ND significam os tipos de condições de contorno consideradas nos cálculos. Note que, para a fronteira mista (neste caso ND ou DN), a energia de Casimir é positiva, originando uma força de Casimir repulsiva (ver Ref. [107]). Por outro lado, $g^{(s)}$ é, em geral, dependente do espaço-tempo, o que implica $\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}$ e $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$, na situação estática, renomeadas respectivamente, como $\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)}$ e $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)}$, são funções das variáveis do espaço-tempo. Apesar do fato de $\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)}$ e $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)}$ dependerem do tempo, do princípio de conservação da energia, a energia total é constante no tempo para a situação estática. De fato, para um estado arbitrário inicial, a integração das Eqs. (2.25) e (2.26) dão:

$$\int_0^{L_0} \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)} dx = \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} \omega_n \mathcal{N}_n, \quad (2.28)$$

$$\int_0^{L_0} \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)} dx = 0, \quad (2.29)$$

onde $\omega_n = \pi(n + \beta)/L_0$, e $\mathcal{N}_n = \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rangle$ é o número médio inicial das partículas no n -ésimo modo. Então, para a cavidade estática, a função $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)}$ pode dar a contribuição para o comportamento espaço-temporal da densidade de energia \mathcal{T} (agora renomeada como $\mathcal{T}^{(s)}$), mas não para a energia total armazenada na cavidade. A energia estática total $\mathcal{E}^{(s)} = \int_0^{L_0} \mathcal{T}^{(s)} dx$ pode ser escrita como $\mathcal{E}^{(s)} = \mathcal{E}_{\text{cas}} + \sum_n \omega_n \mathcal{N}_n$, onde $\mathcal{E}_{\text{cas}} = \int_0^{L_0} \mathcal{T}_{\text{cas}} dx$. Note que, para uma cavidade estática e para qualquer estado inicial do campo considerado, temos: $\mathcal{E}^{(s)\text{ND}} = \mathcal{E}^{(s)\text{DN}}$ e $\mathcal{E}^{(s)\text{DD}} = \mathcal{E}^{(s)\text{NN}}$.

Para o estado inicial do campo tal que a matriz seja diagonal na base de Fock, ou seja, $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle = 0$ e $\langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle = \mathcal{N}_n \delta_{nn'}$ [61], temos

$$g_2^{(s)}(z) = 0, \quad \partial_z[g_1^{(s)}(z)] = 0, \quad \partial_z[h^{(s)}(z)] = 0, \quad g^{(s)} \leq 0, \quad (2.30)$$

levando a uma densidade de energia - invariante sob translação temporal - na zona estática. Neste caso temos:

$$\mathcal{T}^{(s)\text{DD}} = \mathcal{T}^{(s)\text{NN}}, \quad \mathcal{T}^{(s)\text{DN}} = \mathcal{T}^{(s)\text{ND}}. \quad (2.31)$$

Isto estende a igualdade $\mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{DD}} = \mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{NN}}$ e $\mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{DN}} = \mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{ND}}$, mostrada na Eq. (2.27), do vácuo para qualquer outro estado diagonal do campo.

Para um estado inicial do campo cuja matriz densidade tenha elementos não-nulos fora da diagonal principal, a função $g^{(s)}$ pode depender do espaço-tempo, o que leva a densidade de energia ser não invariante sob translação temporal. Para duas cavidades com condições de fronteira diferentes, mas de mesmo comprimento L_0 e valor de $\langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle$ temos:

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)\text{DD}} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)\text{NN}}, \quad \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)\text{DN}} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)\text{ND}}. \quad (2.32)$$

Por outro lado, para os mesmos valores de $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle$, conseguimos:

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)\text{DD}} = -\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)\text{NN}}, \quad \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)\text{DN}} = -\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)\text{ND}}. \quad (2.33)$$

Entretanto, diferentes e apropriadas escolhas para $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle$, por exemplo $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle_1$ e $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle_2$ podem produzir:

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle_1}^{(s)\text{DD}} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle_2}^{(s)\text{NN}}, \quad \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle_1}^{(s)\text{DN}} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle_2}^{(s)\text{ND}}. \quad (2.34)$$

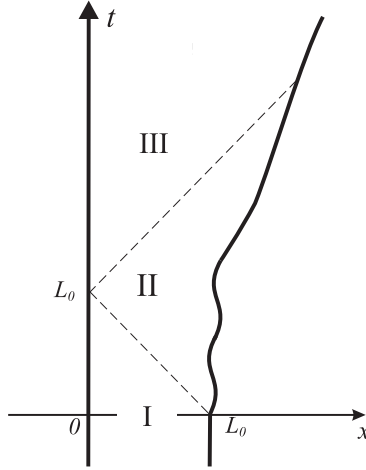


Figura 2.1: Diagrama espaço-tempo das fronteiras (linhas sólidas). Linhas tracejadas são linhas nulas que separam as regiões I de II, e II de III.

2.3 Situação não estática

Agora, examinaremos a cavidade na situação não-estática ($t > 0$). Os modos do campo na Eq. (2.7) são formados pelas partes que se propagam para a direita e para a esquerda. Como requer a causalidade, o campo na região I ($v \leq L_0$) (ver Fig. 2.1) não é afetado pelo movimento da fronteira, tanto que, neste sentido, esta região é considerada como uma *zona estática*. Na região II ($v > L_0$ e $u \leq L_0$), as partes propagantes para a direita dos modos do campo permanecem inalteradas pelo movimento da fronteira, tanto que esta região II também é considerada como *zona estática* para estes modos. Por outro lado, as partes que se propagam para a esquerda na região II são, necessariamente, afetadas pelo movimento da fronteira. Na região III ($u > L_0$), ambos, tanto os modos que se propagam para a esquerda quanto os que se propagam para a direita são afetados pelo movimento da fronteira. Em resumo, as funções que correspondem às partes propagantes para a esquerda e para a direita são consideradas na zona estática se seus argumentos z (z simbolizando v ou u) são tais que $z \leq L_0$. Observamos que as Eqs. (2.22), (2.23), (2.25) e (2.26) são válidas não apenas na situação estática ($t \leq 0$), mas também na zona estática ($t \pm x \leq L_0$).

Para um certo ponto no espaço-tempo (\tilde{t}, \tilde{x}) , o operador de campo $\hat{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})$ é conhecido se

a respectiva parte propagante para a esquerda e para a direita, tomadas, respectivamente, sobre as linhas nulas $v = z_1$ e $u = z_2$ (onde $z_1 = \tilde{t} + \tilde{x}$ e $z_2 = \tilde{t} - \tilde{x}$), são conhecidas; ou, em outras palavras, $\hat{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x})$ é conhecido se $R(v)|_{v=z_1}$ e $R(u)|_{u=z_2}$ são conhecidas. Cole e Schieve [37] propuseram um método recursivo para obter a função R para uma lei geral de movimento da fronteira, baseado no traçado de uma sequência de linhas nulas, até uma certa linha nula chegar na zona estática onde a função R é conhecida. Para uma breve discussão deste método, vamos supor que (\tilde{t}, \tilde{x}) pertença à região III, e que a linha nula $v = z_1$ intercepte a trajetória de movimento do espelho (fronteira) no ponto $[t_1, L(t_1)]$ (veja Ref. [37]). Temos, então, $R(v)|_{v=z_1} = R[t_1 + L(t_1)]$. Usando a equação de Moore (2.9), conseguimos $R(v)|_{v=z_1} = R(u)|_{u=t_1-L(t_1)} + 2$, tanto que, como apontado por Cole e Schieve, “o valor de R aumenta de 2 toda vez que houver uma reflexão na fronteira em movimento” [37]. Se $t_1 - L(t_1) \leq L_0$, então a linha nula $u = t_1 - L(t_1)$ está na zona estática, e então podemos escrever $R(u)|_{u=t_1-L(t_1)} = [t_1 - L(t_1)]/L_0$, e também $R(v)|_{v=z_1} = [t_1 - L(t_1)]/L_0 + 2$. Por outro lado, se $t_1 - L(t_1) > L_0$, podemos desenhar outra linha nula $v = t_1 - L(t_1)$ que intercepta a linha de mundo da fronteira estática no ponto $[t_1 - L(t_1), 0]$. Então, temos $R(u)|_{u=t_1-L(t_1)} = R(v)|_{v=t_1-L(t_1)}$, e escrevemos $R(v)|_{v=z_1} = R(v)|_{v=t_1-L(t_1)} + 2$. Considerando que a linha nula $v = t_1 - L(t_1)$ intercepte a linha de mundo no ponto $[t_2, L(t_2)]$, temos $t_2 + L(t_2) = t_1 - L(t_1)$, escrevendo: $R(v)|_{v=z_1} = R(v)|_{v=t_2+L(t_2)} + 2$. Do mesmo modo, considerando a equação de Moore, escrevemos $R(v)|_{v=z_1} = R(u)|_{u=t_2-L(t_2)} + 4$, e assim por diante, até a linha nula ser considerada na zona estática, onde a função R é conhecida. Em resumo, escrevemos [37]:

$$R(\tilde{z}) = 2n + [\tilde{z} - 2 \sum_{i=1}^n L(t_i)]/L_0, \quad (2.35)$$

onde n é o número de reflexões na fronteira em movimento, necessário para conectar a linha nula $v = \tilde{z}$ (ou $u = \tilde{z}$) a uma linha nula na zona estática.

O comportamento da densidade de energia numa cavidade, para o estado inicial de vácuo, é descrito pela função f , que obedece a seguinte equação proposta por Cole e Schieve [100]:

$$f[t + L(t)] = f[t - L(t)] \mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t), \quad (2.36)$$

onde

$$\mathcal{A}(t) = \left[\frac{1 - L'(t)}{1 + L'(t)} \right]^2, \quad (2.37)$$

$$\mathcal{B}(t) = -\frac{1}{12\pi} \frac{L'''(t)}{[1+L'(t)]^3 [1-L'(t)]} - \frac{1}{4\pi} \frac{L''^2(t) L'(t)}{[1+L'(t)]^4 [1-L'(t)]^2}, \quad (2.38)$$

que nos permite obter $f(z)$, e portanto \mathcal{T}_{vac} , recursivamente em termos dos valores $f = f^{(s)}$ na região estática (ver Refs. [37, 100]). Para um estado inicial arbitrário, o comportamento da densidade de energia na cavidade é descrito pela função f (relacionada à parte de vácuo) e uma nova função g (relacionada à parte do não-vácuo) proposta no presente trabalho. Para esta última, das Eqs. (2.9), (2.15) e (2.16) obtemos a seguinte equação:

$$g[t+L(t)] = g[t-L(t)] \mathcal{A}(t), \quad (2.39)$$

que nos permite chegar a $g(z)$, e portanto $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$, recursivamente em termos do seu valor $g(z) = g^{(s)}(z)$ na zona estática. Agora, para uma análise completa envolvendo as partes do vácuo e não-vácuo, vamos escrever a equação para a função h , Eq. (2.20), somando (2.36) e (2.39) como segue:

$$h[t+L(t)] = h[t-L(t)] \mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t). \quad (2.40)$$

A Eq. (2.40) generaliza a fórmula (2.36), que é encontrada na Ref. [100]. O procedimento para encontrar $h(z)$, resolvendo recursivamente a Eq.(2.40), inicia-se por configurar $z = t_1+L(t_1)$ e traçando a linha nula $v = t_1+L(t_1)$. De (2.40), após a primeira reflexão traçada sobre a fronteira em movimento, obtemos a relação $h(z) = h[t_1-L(t_1)] \mathcal{A}(t_1) + \mathcal{B}(t_1)$. Agora, como explicado anteriormente, configuramos $t_1-L(t_1) = t_2+L(t_2)$, e, após a segunda reflexão sobre a fronteira, obtemos:

$$h(z) = h[t_2-L(t_2)] \mathcal{A}(t_2) \mathcal{A}(t_1) + \mathcal{B}(t_2) \mathcal{A}(t_1) + \mathcal{B}(t_1).$$

Este processo segue adiante até uma linha nula entrar na zona estática, onde $h = h^{(s)} = f^{(s)} + g^{(s)}$ é conhecido. Por fim, obtemos:

$$h(z) = h^{(s)}(z) \tilde{\mathcal{A}}(z) + \tilde{\mathcal{B}}(z), \quad (2.41)$$

onde:

$$h^{(s)}(z) = f^{(s)} + g^{(s)}[\tilde{z}(z)], \quad (2.42)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(z) = \prod_{i=1}^{n(z)} \mathcal{A}[t_i(z)], \quad (2.43)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(z) = \sum_{j=1}^{n(z)} \mathcal{B}[t_j(z)] \prod_{i=1}^{j-1} \mathcal{A}[t_i(z)] \quad (2.44)$$

e

$$\tilde{z}(z) = t_n - L(t_n) = z - 2 \sum_{i=1}^{n(z)} L(t_i), \quad (2.45)$$

O número $n(z)$ de reflexões e a sequência de instantes t_1, \dots, t_n dependem de z . O conjunto de instantes mencionados em (2.43) e (2.44) são calculados via [37]:

$$z = t_1 + L(t_1) \quad (2.46)$$

$$t_{i+1} + L(t_{i+1}) = t_i - L(t_i), \quad i = 1, 2, 3\dots \quad (2.47)$$

Deste processo, observamos que o valor de f não muda por reflexão na fronteira estática, mas muda por reflexão na fronteira em movimento.

Notamos também, de (2.40), que a função h , após uma reflexão, muda da mesma maneira para todas as condições de fronteiras consideradas neste trabalho (para a mesma lei de movimento). Observamos na Eq. (2.41) que as funções $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ dependem apenas da lei de movimento do espelho, enquanto toda a dependência das condições de fronteira e do estado inicial do campo são armazenadas na função estática $h^{(s)}(z)$. Também observamos, para uma lei genérica do movimento, que $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ são funções diferentes, com as seguintes propriedades:

$$\tilde{\mathcal{A}}(z) > 0 \quad \forall z, \quad \tilde{\mathcal{A}}(z < L_0) = 1, \quad \tilde{\mathcal{B}}(z < L_0) = 0, \quad (2.48)$$

que são diretamente obtidas das Eqs. (2.37) e (2.38).

A densidade de energia \mathcal{T} pode ser dada como na Eq. (2.10), mas agora com a parte \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ reescrita como:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = -f^{(s)} \left[\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v) \right] - \tilde{\mathcal{B}}(u) - \tilde{\mathcal{B}}(v), \quad (2.49)$$

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = -g^{(s)}[\tilde{z}(u)]\tilde{\mathcal{A}}(u) - g^{(s)}[\tilde{z}(v)]\tilde{\mathcal{A}}(v). \quad (2.50)$$

A força instantânea \mathcal{F} atuante sobre a fronteira em movimento, no modelo bidimensional, é dada por: $\mathcal{F} = \mathcal{T}[t, L(t)]$. Também definimos $\mathcal{F}_{\text{vac}} = \mathcal{T}_{\text{vac}}[t, L(t)]$ e $\mathcal{F}_{\text{non-vac}} = \mathcal{T}_{\text{non-vac}}[t, L(t)]$.

Das Eqs. (2.20), (2.49) e (2.50) vemos que duas cavidades diferentes, tendo apenas em comum o comprimento inicial L_0 , a densidade de energia total $\mathcal{T}^{(s)}$ na zona estática

e a mesma lei de movimento, sempre vão exibir a mesma evolução temporal para suas densidades de energias \mathcal{T} .

2.4 Estados iniciais do campo: vácuo e térmico

Agora analisemos o comportamento de \mathcal{F}_{vac} e $\mathcal{F}_{\text{non-vac}}$ para o estado inicial do campo no qual a matriz densidade seja diagonal na base de Fock. Quando o vácuo é o estado inicial do campo a força \mathcal{F}_{vac} que atua sobre a fronteira é dada por:

$$\mathcal{F}_{\text{vac}} = \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)} + \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(+)(\text{u})}, \quad (2.51)$$

$$\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)}(t) = -f^{(s)} \left\{ \tilde{\mathcal{A}}[t - L(t)] + \tilde{\mathcal{A}}[t + L(t)] \right\} - \tilde{\mathcal{B}}[t - L(t)] - \tilde{\mathcal{B}}[t + L(t)], \quad (2.52)$$

e

$$\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(+)(\text{u})}(t) = -\frac{1}{12\pi} \frac{L'''(t)}{[1 + L'(t)][1 - L'(t)]^3} - \frac{1}{4\pi} \frac{L'(t)[L''(t)]^2}{[1 + L'(t)]^2[1 - L'(t)]^4}, \quad (2.53)$$

onde $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)}$ e $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(+)(\text{u})}$ são, respectivamente, a força que atua sobre o lado esquerdo e direito da fronteira. Note que $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(+)(\text{u})}$ corresponde ao campo de vácuo não limitado à direita da fronteira [1, 16]. Na região II (ver Fig. 2.1), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}[t - L(t)] &= 1, & \tilde{\mathcal{A}}[t + L(t)] &= \mathcal{A}(t), \\ \tilde{\mathcal{B}}[t - L(t)] &= 0, & \tilde{\mathcal{B}}[t + L(t)] &= \mathcal{B}(t). \end{aligned} \quad (2.54)$$

A força $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)}$ nesta região, agora denotada como $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)(\text{II})}$, é dada por:

$$\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)(\text{II})}(t) = -2f^{(s)} \times \left[\frac{1 + L'(t)^2}{[1 + L'(t)]^2} \right] + \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)(\text{u})}(t),$$

onde $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)(\text{u})}$ é idêntica à força de vácuo do lado esquerdo da fronteira em movimento para o caso de uma única fronteira [1, 16]. Considerando o limite $L_0 \rightarrow \infty$ recuperamos a fórmula:

$$\lim_{L_0 \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)(\text{II})}(t) = \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)(\text{u})}(t),$$

e no caso estático recuperamos a força de Casimir \mathcal{F}_{cas} :

$$\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)(\text{II})}(t)|_{L(t)=L_0} = -2f^{(s)} = \mathcal{F}_{\text{cas}}.$$

Na região III (ver Fig. 2.1), em geral é difícil obter resultados analíticos para a força exata (2.51). No entanto, resultados numéricos podem ser obtidos, como examinaremos a seguir. Antes, vamos generalizar os resultados anteriores para o estado diagonal de não-vácuo. Neste caso, das Eqs. (2.30) e (2.50), obtem-se:

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = -g^{(s)} \left[\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v) \right], \quad (2.55)$$

onde $g^{(s)}$ é um fator constante. Das Eqs. (2.49) e (2.55) podemos ver que toda a dependência do espaço-tempo de \mathcal{T} vem de $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$. Para este caso temos:

$$\mathcal{T}^{\text{DD}} = \mathcal{T}^{\text{NN}}, \quad \mathcal{T}^{\text{DN}} = \mathcal{T}^{\text{ND}}. \quad (2.56)$$

A Eq. (2.56) é válida para qualquer lei de movimento, generalizando a Eq. (2.31); esta equação também é válida para qualquer estado diagonal, o que estende a conclusão obtida na Ref. [2], onde as fórmulas que correspondem a Eq. (2.56) foram obtidas considerando apenas o vácuo como estado inicial do campo.

A energia total armazenada na cavidade como função do tempo pode ser escrita como $\mathcal{E}(t) = \int_0^{L(t)} \mathcal{T}(t, x) dx$. Para o estado inicial diagonal, temos:

$$\mathcal{E}(t) = -h^{(s)} \mathcal{W}_1(t) - \mathcal{W}_2(t), \quad (2.57)$$

onde $\mathcal{W}_1(t) = \int_0^{L(t)} \left[\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v) \right] dx$ e $\mathcal{W}_2(t) = \int_0^{L(t)} \left[\tilde{\mathcal{B}}(u) + \tilde{\mathcal{B}}(v) \right] dx$. Enfatizando que \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 dependem apenas da lei de movimento da fronteira, enquanto toda a dependência do estado inicial do campo ou do tipo de condição de contorno está armazenada no coeficiente $h^{(s)}$.

Para o estado térmico levamos em conta que $\langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle = \delta_{nn'} \bar{n}(n, \beta)$ e $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle = \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'}^\dagger \rangle = 0$, onde $\bar{n}(n, \beta) = 1/(e^{(n+\beta)\pi/(L_0 T)} - 1)$, com a constante de Boltzmann (k_B) igual a 1. Para este estado inicial, a densidade de energia $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$, agora denotada como \mathcal{T}_T , é dada por:

$$\mathcal{T}_T = \mathcal{G}(T, \beta, L_0) \left[\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v) \right], \quad (2.58)$$

onde

$$\mathcal{G}(T, \beta, L_0) = \frac{\pi |\gamma|^2}{2L_0^2} \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} \left[\frac{n + \beta}{\exp \left\{ \frac{(n+\beta)\pi}{L_0 T} \right\} - 1} \right]. \quad (2.59)$$

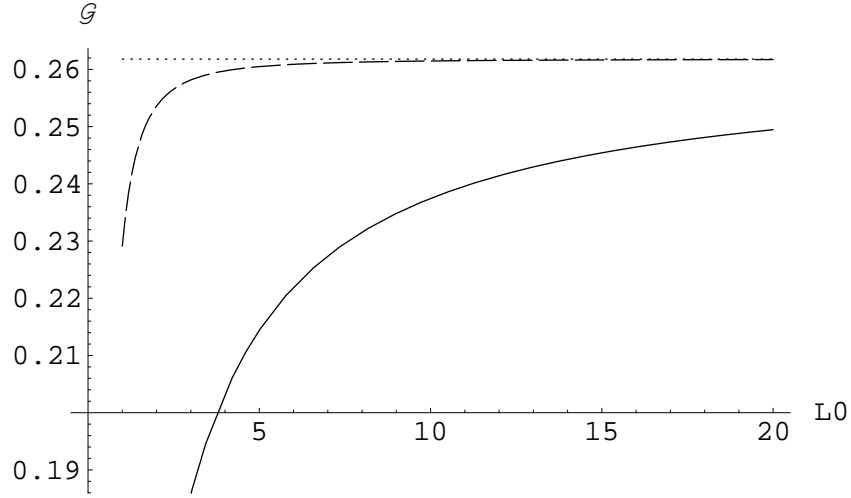


Figura 2.2: A curva sólida corresponde a $\mathcal{G}(1, 1/2, L_0)$, a pontilhada à $\mathcal{G}(1, 0, L_0)$ enquanto a linha tracejada é $\sigma(1)/8$.

Desde que $\mathcal{G}(T, 1/2, L_0) > \mathcal{G}(T, 0, L_0)$ (ver Fig. 2.2), e $\tilde{\mathcal{A}}(z) > 0 \forall z$, para $T > 0$ temos:

$$\mathcal{T}_T^{\text{misto}} > \mathcal{T}_T^{\text{não-misto}} \Rightarrow \mathcal{F}_T^{(-)\text{misto}} > \mathcal{F}_T^{(-)\text{não-misto}}.$$

onde o “misto” significa os casos ND ou DN, enquanto “não-misto” significa os casos NN ou DD.

A força total \mathcal{F}_T atuando sobre o lado direito da fronteira em movimento é dado por:

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_T^{(-)} + \mathcal{F}_T^{(+)(u)}, \quad (2.60)$$

$$\mathcal{F}_T^{(-)}(t) = \mathcal{G}(T, \beta, L_0) \left\{ \tilde{\mathcal{A}}[t - L(t)] + \tilde{\mathcal{A}}[t + L(t)] \right\}, \quad (2.61)$$

$$\mathcal{F}_T^{(+)(u)}(t) = -\frac{\sigma(T)}{4} \left\{ \frac{1 + L'(t)^2}{[1 - L'(t)]^2} \right\}, \quad (2.62)$$

onde $\mathcal{F}_T^{(-)}$ e $\mathcal{F}_T^{(+)(u)}$ são respectivamente as forças atuantes sobre os lados esquerdo e direito da fronteira em movimento, e $\sigma(T) = 2|\gamma|^2\pi T^2/3$ é o coeficiente de viscosidade para os casos de único espelho. Note que $\mathcal{F}_T^{(+)(u)}(t)$ - corresponde ao campo não limitado à direita da fronteira em movimento - obtido via Ref. [1]. Então a fórmula exata obtida aqui para \mathcal{F}_T é uma generalização daquela obtida na Ref. [1].

Na região II (ver Fig. 2.1), considerando (2.54), a força \mathcal{F}_T nesta região, agora denotada como $\mathcal{F}_T^{(\text{II})}$ é dada por:

$$\mathcal{F}_T^{(\text{II})} = 2\mathcal{G}(T, \beta, L_0) \left\{ \frac{1 + L'(t)^2}{[1 + L'(t)]^2} \right\} - \frac{\sigma(T)}{4} \left\{ \frac{1 + L'(t)^2}{[1 - L'(t)]^2} \right\}. \quad (2.63)$$

Para obter os resultados de um espelho, basta fazer $\omega_n = (n + \beta)\pi/L_0$ e $\Delta\omega_n = \pi/L_0$ na Eq. (2.59), tomando o limite $L_0 \rightarrow \infty$, mudando $\omega = \xi T$ e considerando o valor de Gamma (Γ) e a função zeta de Riemann (ζ_R), obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{L_0 \rightarrow \infty} [\mathcal{G}(T, \beta, L_0)] &= \frac{|\gamma|^2}{2\pi} \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} \Delta\omega \left[\frac{\omega_n}{(e^{\omega_n/T} - 1)} \right] \\ &= \frac{|\gamma|^2}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega}{e^{\omega/T} - 1} \\ &= \frac{|\gamma|^2 T^2}{2\pi} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} \\ &= \frac{|\gamma|^2 T^2}{2\pi} \Gamma(2) \zeta_R(2) = \frac{\pi |\gamma|^2 T^2}{12} \\ &= \sigma(T)/8. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Então conseguimos:

$$\begin{aligned} \lim_{L_0 \rightarrow \infty} [\mathcal{F}_T^{(\text{II})}] &= -\sigma(T) \left\{ L'(t) \frac{1 + L'(t)^2}{[1 - L'(t)]^2} \right\} \\ &= -\sigma(T) \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) [L'(t)]^{2n+1}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

que é a fórmula obtida na Ref. [1]. Se as velocidades forem consideradas não-relativísticas expandimos em séries de $L'(t)$ até a primeira ordem a equação (2.63), obtendo:

$$\mathcal{F}_T^{(\text{II})} \approx 2\mathcal{G}(T, \beta, L_0) - \sigma(T)/4 - [4\mathcal{G}(T, \beta, L_0) + \sigma(T)/2] L'(t), \quad (2.66)$$

que é uma generalização da fórmula aproximada obtida por Jaekel e Reynaud [52, 53].

Para a completa linha de mundo da fronteira, incluímos a região III (ver Fig. 2.1), de modo geral é difícil obtermos resultados analíticos para a força de radiação quântica $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{vac}} + \mathcal{F}_T$, para uma trajetória arbitrária. Por outro lado, nossos resultados são capazes obter resultados numéricos para a força quântica atuante sobre a fronteira em movimento, numa cavidade com lei de movimento arbitrária, incluindo os movimentos não

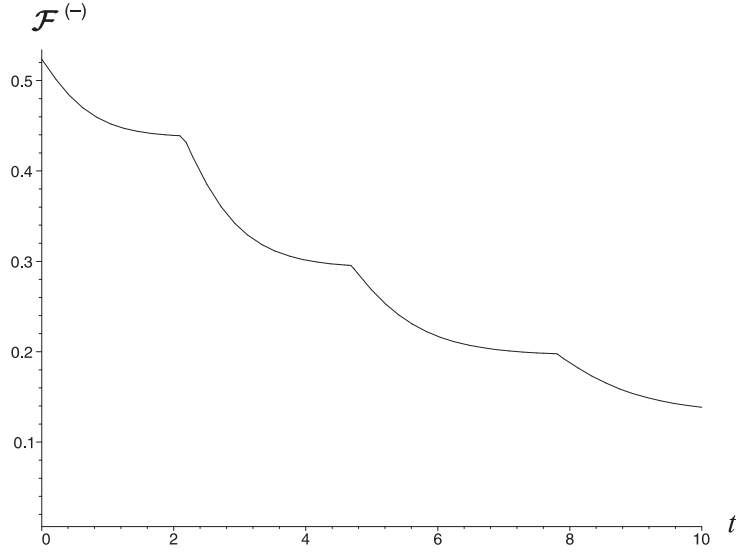


Figura 2.3: A força de radiação quântica $\mathcal{F}^{(-)}$ atuando sobre a fronteira em movimento num banho térmico de acordo com a trajetória dada pela Eq. (2.67), com $\kappa = 0.1$, $t_F = 10$, $L_0 = 1$ e $T = 1$, para o caso de uma cavidade com condições de contorno mistas. A descontinuidade na derivada ocorre em $t_1 \approx 2.15$, $t_2 \approx 4.70$ e $t_3 \approx 7.80$.

oscilatórios e de grande amplitude, que estão fora do alcance das abordagens perturbativas encontradas na literatura. Neste contexto, aplicando nossas fórmulas para uma lei de movimento em particular, cuja trajetória não é trivial, baseada numa proposta de Haro na Ref. [101]:

$$L(t) = \begin{cases} L_0 & \text{if } t \leq 0 \\ L_0 + \kappa \ln \cosh(t) & \text{if } t \in [0, t_F] \\ L_0 + \kappa_1(t - t_F) + \kappa \ln \cosh(t_F) & \text{if } t \geq t_F, \end{cases} \quad (2.67)$$

onde $\kappa_1 = \kappa \tanh(t_f)$. Considerando $\kappa = 0.1$, $t_F = 10$ e $L_0 = 1$ temos uma cavidade expandindo com velocidade relativística. Na Fig. 2.3, usando (2.43), (2.44), (2.52) e (2.61), obtemos graficamente para as condições mistas e banho térmico como estado inicial do campo a evolução temporal da força quântica $\mathcal{F}^{(-)} = \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(-)} + \mathcal{F}_T^{(-)}$ atuante sobre a fronteira em movimento (linha sólida) para cada posição L . Na Figura 2.3 vemos as descontinuidades na função de derivada. Estas descontinuidades sempre ocorrem quando a frente de onda na densidade de energia encontra o lado direito da fronteira. Quando

$t = 0$ a fronteira inicia seu movimento, interagindo com vácuo e o campo de banho térmico, gerando uma onda que será refletida de volta pela fronteira da esquerda (estática) e se propagará para a direita até se encontrar com a fronteira da direita no instante $t = t_1 \approx 2.15$. Este valor pode ser obtido resolvendo a equação $t_1 - L_0 = L(t_1)$. Deste instante em diante, a fronteira da direita estará na região III (ver Fig. 2.1), interagindo também com esta onda refletida. A frente de onda na densidade de energia, após as reflexões, também irá encontrar a fronteira da direita nos instantes $t = t_i$, onde $i = 2, 3, \dots$, que podem ser obtidos resolvendo as equações $t_i - t_{i-1} - L(t_{i-1}) = L(t_i)$.

2.5 Aplicação: cálculo da densidade de energia numa cavidade oscilante com condições mistas

Na presente seção investigamos o comportamento da densidade de energia para um campo escalar real sem massa num espaço tempo bidimensional, dentro de uma cavidade oscilante com condições de fronteiras mistas. A evolução temporal da densidade de energia é investigada tomando como base dois métodos para resolver a equação de Moore: o método numérico proposto por Cole e Schieve [37, 100], e o método analítico aproximado obtido por Dodonov [38] e Dalvit- Mazzitelli [39]. Vamos, primeiramente, considerar que o campo satisfaz à equação de Klein-Gordon (1.1), e à condição de contorno de Dirichlet-Neumann (2.1) e (2.3) (já tomadas no referencial inercial do laboratório). Considerando o procedimento adotado nas Refs. [14, 16] e discutido na seção anterior, o campo na cavidade pode ser obtido explorando-se a invariância conforme da equação de Klein-Gordon. A solução para o campo da equação de onda nas coordenadas (t, x) , para o caso DN é obtida fazendo-se $\lambda = 0$, $\beta = 1/2$ e $\gamma = i$ nas equações (2.7) e (2.8)), o que resulta:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\hat{a}_n \phi_n(t, x) + \hat{a}_n^\dagger \phi_n^*(t, x)],$$

onde

$$\phi_n(t, x) = \frac{i}{\sqrt{4\omega_n}} (e^{-i\omega_n R(t-x)} - e^{-i\omega_n R(t+x)}),$$

formam um conjunto completo de soluções de frequência positivas, com $\omega_n = (n + \frac{1}{2})\pi$, e R satisfazendo a equação de Moore (2.9). O valor esperado do operador tensor momentum-

energia, já renormalizado, pode ser escrito, para este caso, como

$$\mathcal{T}_{vac} = -f_{DN}(t+x) - f_{DN}(t-x), \quad (2.68)$$

onde

$$f_{DN} = \frac{1}{24\pi} \left\{ \frac{R'''}{R'} - \frac{3}{2} \left(\frac{R''}{R'} \right)^2 + \frac{\pi^2}{4} R'^2 \right\}, \quad (2.69)$$

onde fizemos $\beta = 1/2$ e $\gamma = i$ em (2.18). Em [102], o modelo considerado foi uma cavidade ND (Neumann em $x = 0$ e Dirichlet em $x = L(t)$). Para este modelo foi obtida a solução do campo com $\phi^{(n)}$ dado por (fazendo $\beta = 1/2$ e $\gamma = i$ em (2.8)):

$$\phi_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\omega_n}} (e^{-i\omega_n R(t-x)} + e^{-i\omega_n R(t+x)}). \quad (2.70)$$

Apesar desta mudança, a densidade de energia local relacionada a este campo coincide com aquela obtida para ao caso DN. A função f_{DN} obtida para o caso misto é, no entanto, diferente da função f_{DD} para o caso DD:

$$f_{DN}(z) = f_{DD}(z) - \frac{3\pi^2}{4} [R'(z)]^2. \quad (2.71)$$

Vamos, primeiramente, examinar a implicação desta distinção, considerando a situação estática ($t \leq 0$). Para este caso, a solução da equação de Moore é dada por $R(z) = z/L_0$. Então, se considerarmos f_{DD} no tensor energia momentum normalizado, recuperamos a densidade de energia estática de Casimir negativa. Enquanto, se consideramos f_{DN} , recuperamos a densidade estática de Casimir positiva, que ocorre para as condições mistas [65, 104]: $\pi/48L_0^2$. Entretanto, a distinção entre f_{DN} e f_{DD} não causa apenas diferença nas densidades de energia estáticas de Casimir, mas também afetam significativamente o efeito Casimir dinâmico para ambos os casos. Para investigar esta questão, consideramos o movimento da fronteira descrito pela seguinte lei de movimento, para $t > 0$ e $\epsilon \ll 1$ um parâmetro sem dimensão:

$$L(t) = L_0 \left[1 + \epsilon \sin \left(\frac{q\pi t}{L_0} \right) \right], \quad (2.72)$$

onde $L(t) = L_0$ para $t \leq 0$ e L_0 é o comprimento da cavidade na situação estática, e q é um número real. Para esta lei de movimento, faremos a comparação do efeito Casimir dinâmico dos casos DN e DD. Notamos que f_{DN} e f_{DD} envolvem R' e R''' , e - da equação

de Moore - estas derivadas estão relacionadas com as primeiras e terceiras derivadas da função L , que são descontínuas em $t = 0$. Isto gera uma função δ na densidade de energia, que se propaga na cavidade [16, 35, 37]. Para movimentos ressonantes, esta função δ será refletida sobre as fronteiras, sem mudança da forma [37]. Ao longo desta seção iremos ignorar a contribuição da função δ , pois estamos interessados na evolução da densidade de energia para $t > 0$. Usando rotinas computacionais (ver a apresentação do pacote *Dynamical Casimir* feita no Cap. 4) baseadas no método numérico proposto por Cole e Schieve [37, 100], podemos calcular a evolução da densidade de energia na cavidade, comparando a densidade de energia para o caso DN com a densidade de energia do caso DD. A seguir, consideramos a notação T_{DN} para a densidade de energia no caso DN e T_{DD} para a densidade de energia no caso DD. Dos cálculos, encontramos que, para $q = 1$, o valor máximo para T_{DN} cresce na cavidade fazendo com que o pico da densidade de energia estreite-se com o tempo, e também que T_{DN} cresce mais rapidamente do que T_{DD} , por exemplo: $T_{DN}(0, L_0/2) = 0.7$, $T_{DN}(20.5L_0, L_0/2) = 2.4$, $T_{DN}(80.5L_0, L_0/2) = 150.6$, enquanto $T_{DD}(0, L_0/2) = -1.326$, $T_{DD}(20.5L_0, L_0/2) = -1.325$, $T_{DD}(80.5L_0, L_0/2) = -1.223$. Quando os pacotes de onda são refletidos na fronteira, os valores máximos de T_{DN} são amplificados, visto que há uma superposição. Por exemplo, o valor máximo de T_{DN} para o instante $80.5L_0$ (antes da reflexão na fronteira dinâmica) é 150.631, enquanto para o instante $81.5L_0$ (após a reflexão) é 170.985. De fato, os pacotes para o caso DN neste modelo ganham energia quando são refletidos na fronteira em movimento, o que está relacionado ao fenômeno da criação de partículas e será discutido em seguida. Observamos também a ressonância na amplitude da densidade de energia para ambos os casos DD e NN.

Investigamos também o comportamento da densidade de energia para o caso DN usando a solução analítica aproximada da equação de Moore, válida para $q \in \mathbb{N}$, obtido por Dalvit e Mazzitelli via abordagem de grupo de renormalização [39]:

$$R(t) = \frac{t}{L_0} - \frac{2}{(\pi q)} \arctan \left[\frac{\sin(q\pi t/L_0)}{(1 - \xi^2)} + \cos \left(\frac{q\pi t}{L_0} \right) \right] + \frac{z}{L_0} \frac{2\epsilon (-1)^q \xi \sin(\frac{q\pi z}{L_0})}{\left[1 + \xi^2 + (1 - \xi^2) \cos \left(\frac{q\pi z}{L_0} \right) \right]},$$

com $\xi = \exp((-1)^{q+1} \pi q \epsilon t / L_0)$, $z = t - 2pL_0$ ($p \in \mathbb{N}$) e $-L_0 \leq z \leq L_0$, onde o valor de p é obtido como $p = \frac{1}{2} \text{int}(t/L_0)$ ou $p = \frac{1}{2} [\text{int}(t/L_0) + 1]$ para $\text{int}(t/L_0)$ par ou ímpar, respectivamente. Encontramos boa concordância entre os cálculos da densidade

de energia, para o caso DN, levando em conta as derivadas desta fórmula [por exemplo, $T_{DN}(80.5L_0, 0.25L_0) = -0.9976$, $T_{DN}(80.5L_0, 0.5L_0) = 150.2817$, $T_{DN}(80.5L_0, 0.75L_0) = -1.0729$] e a densidade de energia obtida via rotinas computacionais baseadas no método numérico [37, 100] (por exemplo, $T_{DN}(80.5L_0, 0.25L_0) = -1.0352$, $T_{DN}(80.5L_0, 0.5L_0) = 150.6311$, $T_{DN}(80.5L_0, 0.75L_0) = -1.0362$). Vamos, agora, comparar o comportamento da força exercida pelo campo sobre a fronteira nos casos DN e DD para $q \in \mathbb{N}^*$ e conveniente escolha $L_0 = 1$. Um meio para investigar isso é via cálculos da força média \bar{F}_{DN} , tomados no período de oscilações $2/q$:

$$\bar{F}_{DN}(t) = \frac{q}{2} \int_t^{t+2/q} T_{DN}[t, L(t)] dt, \quad (2.73)$$

no qual, para o modelo do campo escalar no espaço tempo bidimensional, os valores de T_{DN} considerados em $[t, L(t)]$ correspondem à força instantânea sobre a fronteira. Considerando as derivadas da solução de Dalvit-Mazzitelli para R , no limite de tempos longos ($\epsilon t \gg 1$), temos

$$\bar{F}_{DN}(t) = -\frac{\pi}{24} \left[q^2 - \frac{1}{4} (2q^2 + 1) (\xi + \xi^{-1}) \right]. \quad (2.74)$$

O valor médio da força correspondente para o caso DD é [38]

$$\bar{F}_{DD}(t) = -\frac{\pi}{24} \left[q^2 + \frac{1}{2} (1 - q^2) (\xi + \xi^{-1}) \right]. \quad (2.75)$$

Para $q = 1$, a fórmula para \bar{F}_{DD} devolve a força estática de Casimir, tal que a força média conserva o seu valor no vácuo estático [38]. Isto está relacionado ao fato de que, nesta aproximação, nenhuma partícula é criada para o caso DD com $q = 1$ [38]. Por outro lado, fazendo $q = 1$ na fórmula para \bar{F}_{DN} , tem-se o valor médio da força crescendo com o tempo, o que está relacionado à criação ressonante de partículas no caso DN, como examinaremos a seguir. Na Fig. 2.4, comparamos \bar{F}_{DD} e \bar{F}_{DN} para diversos valores de q . Observamos que $\bar{F}_{DD} < \bar{F}_{DN}$ para todos os valores examinados de q . Agora, vamos considerar $q = 2$. Para este movimento, um pacote de onda com dois picos cresce dentro da cavidade. O máximo valor de T_{DN} cresce mais rapidamente do que o valor máximo para T_{DD} , o que está relacionado a maiores efeitos dissipativos da força atuante sobre a fronteira oscilante, no caso DN. A energia armazenada numa cavidade, como função do tempo, pode ser escrita como

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^{L_0} T_{00}(t, x) dx = - \int_{t-L_0}^{t+L_0} h(u) du, \quad (2.76)$$

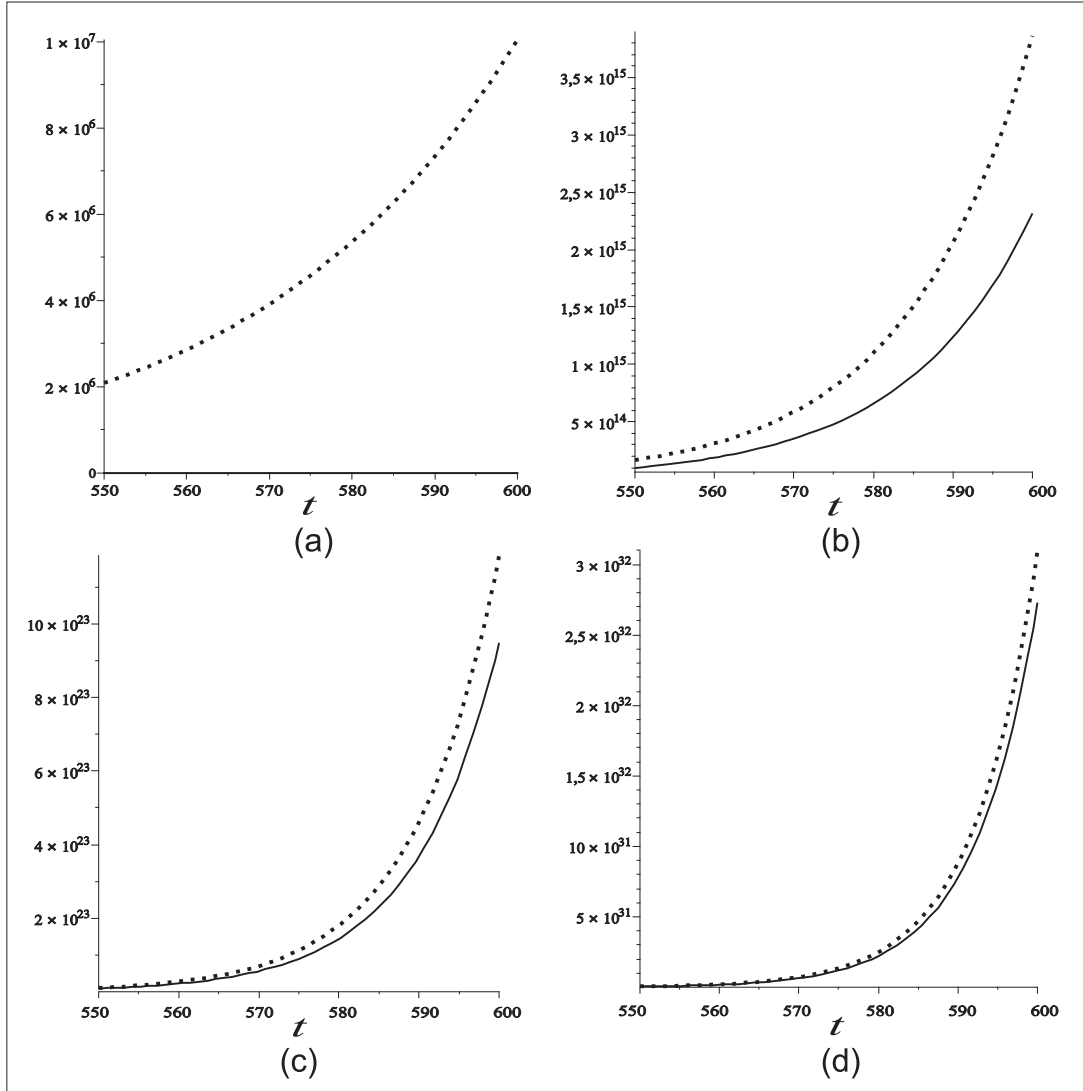


Figura 2.4: Evolução temporal do valor médio da força \overline{F}_{DD} (linha sólida) e \overline{F}_{DN} (linha pontilhada) atuando sobre o movimento da fronteira, tomado sobre o período de oscilação $2/q$, e a figura mostra resultados para: (a) $q = 1$; (b) $q = 2$; (c) $q = 3$; (d) $q = 4$. $L_0 = 1$ e $\epsilon = 0.01$.

para valores de t tais que $L(t) = L_0$. A função h pode representar f_{DN} ou f_{DD} , se considerarmos os casos DN ou DD, respectivamente. Subtraindo a energia do vácuo $\mathcal{E}_{(Cas)}$ da energia total, obtemos a energia $\tilde{\mathcal{E}}$ relacionada à criação de partículas dentro da cavidade, tanto que podemos escrever [61]:

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_{(Cas)}, \quad (2.77)$$

onde $\mathcal{E}_{(Cas)}$ representa $-\pi/24L_0$ ou $\pi/48L_0$, se considerarmos os casos DD ou DN. No presente trabalho, calculamos $\tilde{\mathcal{E}}$ via método exato através do pacote *Dynamical Casimir*, que nos permite obter a energia na cavidade para movimentos arbitrários das fronteiras. Por outro lado, há na literatura fórmulas analíticas para $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ aplicadas ao movimento oscilatório não-relativístico com pequenas amplitudes. Para os parâmetros $q \in \mathbb{N}^*$ e $q\epsilon\pi \ll 1$, Dodonov [62] obteve para o caso DD:

$$\tilde{\mathcal{E}}^{DD}(t) = \pi \frac{(q^2 - 1)}{12L_0} \sinh^2 \left(\frac{q\epsilon\pi t}{2L_0} \right). \quad (2.78)$$

Considerando os mesmos parâmetros, visto que os casos ND e DN têm a mesma densidade de energia, podemos tomar o resultado analítico para a energia das partículas criadas, encontrado na Ref. [102] para o caso ND, como também válido para o caso DN. Então, considerando $q = 1$, obtemos

$$\tilde{\mathcal{E}}^{DN}(t) = \frac{\pi}{8L_0} \sinh^2 \left(\frac{\epsilon\pi t}{2L_0} \right). \quad (2.79)$$

Na tabela 2.1 comparamos \mathcal{E}^{DD} e \mathcal{E}^{DN} para a mesma lei de movimento, com $q = 1$, $L_0 = \pi/10$ e $\epsilon = 0.01$, considerando dois métodos de cálculo. Na primeira coluna temos os valores do tempo. Na segunda e terceira colunas são mostrados os valores de \mathcal{E}^{DD} calculados via método numérico e via fórmula encontrada na Ref. [62], respectivamente. A segunda coluna mostra valores da energia \mathcal{E}^{DD} próximos da energia estática de Casimir. A terceira coluna mostra que \mathcal{E}^{DD} permanece exatamente como a energia estática. Ao contrário, tanto a quarta quanto a quinta colunas mostram valores de \mathcal{E}^{DN} - calculados via método numérico exato e via fórmula da Ref. [102], respectivamente - crescendo com o tempo e apontam para a criação ressonante de partículas. A Tabela 2.1 também revela forte concordância entre ambos os métodos de cálculo.

Vamos seguir com a investigação da referida lei de movimento, com $q = 2$. Para este movimento, o pacote de onda possui dois picos crescentes dentro da cavidade, exibindo

Tabela 2.1: \mathcal{E}^{DD} e \mathcal{E}^{DN} , calculado via método numérico (colunas 2 e 4) e fórmulas analíticas aproximadas (colunas 3 e 5), com $L_0 = \pi/10$, $\epsilon = 0.01$ e $q = 1$.

$\frac{t}{L_0}$	$\mathcal{E}_{(num)}^{DD}$	$\mathcal{E}_{(Ref. [62])}^{DD}$	$\mathcal{E}_{(num)}^{DN}$	$\mathcal{E}_{(Ref. [102])}^{DN}$
0	-0.4166666665	-0.4166666665	0.2083333333	0.2083333333
10	-0.4166666636	-0.4166666665	0.2394433778	0.2394303526
30	-0.4166666462	-0.4166666665	0.5072233318	0.5070813122
90	-0.4166665074	-0.4166666665	4.8877543277	4.8837047968

Tabela 2.2: $\tilde{\mathcal{E}}^{DD}$ e $\tilde{\mathcal{E}}^{DN}$ calculados via método numérico, com $L_0 = \pi/10$, $\epsilon = 0.01$ e $q = 2$.

t/L_0	0	10	30	90
$\tilde{\mathcal{E}}^{DD}$	0	0.2554155182	2.968792123	178.51937499
$\tilde{\mathcal{E}}^{DN}$	0	0.3831229718	4.453186024	267.77898352

fenômeno ressonante na amplitude da densidade de energia para ambos os casos DD e DN. Também obtivemos $\tilde{\mathcal{E}}^{DD}$ e $\tilde{\mathcal{E}}^{DN}$ crescendo com o tempo (ver tabela 2.2) com $\tilde{\mathcal{E}}^{DN} > \tilde{\mathcal{E}}^{DD}$ para $t > 0$, e $\tilde{\mathcal{E}}^{DN}$ crescendo mais rapidamente do que $\tilde{\mathcal{E}}^{DD}$. Comparando as energias transferidas ao campo pelo movimento oscilatório da fronteira, nos casos DD e DN, para diversas outras leis de movimento, por exemplo, as leis de movimentos consideradas em [37], encontramos que a energia dissipada no caso DN é maior do que a energia dissipada no caso DD.

2.6 Comentários finais do capítulo 2

No presente capítulo, mostramos fórmulas que nos permitiram obter resultados exatos para a força de radiação quântica e a densidade de energia numa cavidade não-estática com uma lei de movimento e estado inicial do campo arbitrários, incluindo movimentos não oscilatórios, com grandes deslocamentos e relativísticos, que estão fora do alcance das abordagens perturbativas encontradas na literatura. Para casos particulares cujo estado inicial do campo é o vácuo, condição de contorno de Dirichlet, velocidades não

relativísticas ou no limite de grande cavidades, nossos resultados mostraram estar de acordo com os resultados encontrados para força que atua sobre a fronteira em movimento [1, 16, 100, 52, 53, 60].

Mostramos que, fora a parte da lei de movimento, a evolução da densidade de energia está completamente determinada pela densidade de energia na zona estática. Neste sentido, se configurarmos duas cavidades com diferentes condições de contorno e diferentes estados iniciais para o campo, mas de tal maneira que ambas tenham a mesma densidade de energia na zona estática, teremos (dado o mesmo movimento prescrito para a fronteira) a mesma força quântica e a mesma evolução temporal para a densidade de energia.

Obtivemos também que, para o mesmo estado diagonal inicial do campo, e lei de movimento (arbitrária), a densidade de energia para o caso DD é idêntica à densidade para o caso NN, e o mesmo ocorre entre os casos ND e DN. Esta conclusão generaliza, para qualquer estado diagonal, aquela obtida apenas para o vácuo na Ref. [2], e também estende para o problema da cavidade a conclusão de que a força atuante sobre a fronteira é invariante sob a mudança $N \rightleftharpoons D$, quando o estado inicial do campo é invariante sob translação temporal (nas Refs. [1, 60] esta conclusão foi obtida para o caso de uma fronteira). Para estados não diagonais, com densidade de energia na zona estática não invariante sob translação temporal, obtemos que a densidade de energia para o caso DD na situação dinâmica é, em geral, diferente da obtida para o caso NN, e o mesmo ocorre para os casos DN e ND.

Focando no problema de numa cavidade oscilante mista, obtivemos o valor esperado renormalizado do tensor energia-momentum, tomado com relação ao estado “in” de vácuo, e vimos que a mesma fórmula para o valor esperado do tensor energia momentum foi obtida para o caso DN. Assim sendo, apesar da distinção entre os modos do campo para DN e ND, o efeito Casimir dinâmico é o mesmo (para estados diagonais). Desta conclusão, apontamos que os resultados encontrados [102] para o caso ND também são estendidos para o caso DN. Considerando inicialmente a lei de movimento com $q = 1$, calculamos - resolvendo exatamente - a evolução da densidade de energia na cavidade para os casos DD e DN. Em ambos os casos, a formação e propagação dos pacotes de onda para a densidade de energia podem ser observados, com valores de máximo crescendo e estreitando-se com o tempo. Entretanto, os resultados na literatura mostram que, no caso DD com $q = 1$, a

ressonância na amplitude da densidade de energia não se estende ao fenômeno da criação de partículas: nenhuma partícula é criada na cavidade no limite de tempos longos [38], ou, em outras palavras, o valor da energia na cavidade permanece próximo ao valor da energia de Casimir estática [37]. Observamos (ver Tabela 2.1) que, para o caso DN com ($q = 1$), ocorre ressonância tanto nas amplitudes de densidade de energia quanto na energia armazenada na cavidade (ou na criação de partículas). Isto aponta uma notável diferença, pois, para uma mesma lei de movimento para a fronteira oscilante, com o mesmo comprimento de cavidade estática, podemos não encontrar a criação de partículas no caso DD e, em contraste, termos ressonância na criação de partículas no caso misto. Em adição, a Tabela 2.1 exibe o bom acordo entre a solução numérica [37] aplicada aos casos DD e DN, e a solução analítica encontrada nas Refs. [62, 102]. Considerando as derivadas no tempo da solução analítica aproximada para a equação de Moore [39] no limite de tempo-longo, obtivemos as fórmulas analíticas para o valor da força média atuante sobre a fronteira em movimento, para o caso DN. Comparando com o valor médio encontrado para o caso DD, é observado que a força média para DN é maior do que a força para o caso DD. O comportamento $\tilde{\mathcal{E}}^{DN}(t > 0) > \tilde{\mathcal{E}}^{DD}(t > 0)$ foi observado, incluindo outras leis de movimento, como exemplo, as leis de movimentos consideradas na Ref. [37]

Capítulo 3

Cavidade com fronteira móvel: duas paredes em movimento

No presente capítulo, apresentamos, com base na Ref. [8], a solução exata para a densidade de energia dentro de uma cavidade não estática unidimensional, bem como para as forças atuando sobre as fronteiras, quando ambas as fronteiras estão sujeitas a leis de movimento prescritas arbitrárias. Para chegar a essas soluções, exploramos a abordagem geométrica já usada nas Refs. [37, 49, 50, 51], mas, como feito na Ref. [5], focamos diretamente no processo de reflexões da própria densidade de energia. Analogamente ao que foi mostrado no capítulo anterior, considerando o vácuo como o estado inicial do campo, mostramos que a densidade de energia num dado ponto do espaço-tempo pode ser obtida através do traçado de uma sequência de linhas nulas, que conectam o valor da densidade de energia em um dado ponto do espaço-tempo, a um certo valor conhecido da densidade num ponto da “zona estática”, onde os modos iniciais do campo não são afetados pelos distúrbios causados pelos movimentos das fronteiras. Uma vantagem das fórmulas obtidas é que a densidade de energia exibe uma clara estrutura, com um fator correspondente ao valor inicial da densidade de energia no vácuo, e outra dependente apenas da lei de movimento da fronteira. Essas fórmulas generalizam aquelas encontradas na literatura [5], onde este problema é abordado para uma cavidade com apenas um espelho em movimento (ver Capítulo 1). Para o caso particular de uma cavidade com apenas uma fronteira em

movimento, velocidades não-relativística, ou no limite de grandes cavidades (um único espelho), nossos resultados reproduzem aqueles encontrados na literatura [1, 5, 100]. Fechamos o capítulo discutindo em detalhes o comportamento da força de radiação em cada região do espaço-tempo.

O presente capítulo derivou do artigo [8].

3.1 Densidade de energia e força quântica sobre as fronteiras em movimento

Consideramos um campo escalar satisfazendo a equação de Klein-Gordon não massiva: $(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0$, obedecendo a condição de Dirichlet imposta as fronteiras localizadas à esquerda $x = L(t)$, e também à direita $x = R(t)$, onde $L(t)$ e $R(t)$ são leis de movimento arbitrárias, com $R(t < 0) = L_0$ e $L(t < 0) = 0$, onde L_0 é o comprimento da cavidade na situação estática. Vamos começar por considerar o operador do campo, solução da equação da onda, dada por [48]:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\hat{a}_k \psi_k(t, x) + \hat{a}_k^\dagger \psi_k^*(t, x) \right],$$

onde os modos do campo são

$$\psi_k(t, x) = \frac{i}{\sqrt{4\pi k}} \left[e^{-ik\pi G(v)} - e^{-ik\pi F(u)} \right], \quad (3.1)$$

com $v = t + x$, $u = t - x$, e

$$G[t + L(t)] - F[t - L(t)] = 0 \quad (3.2a)$$

$$G[t + R(t)] - F[t - R(t)] = 2. \quad (3.2b)$$

O conjunto de equações (3.2), obtidas por Dalvit e Mazzitelli explorando a invariância conforme deste modelo [48], é uma generalização da equação de Moore [14], que pode ser recuperada fazendo $L(t) = 0$ nessas equações. A densidade de energia renormalizada na cavidade é dada por [48]

$$\langle T_{00}(t, x) \rangle = -f_G(v) - f_F(u), \quad (3.3)$$

onde

$$f_G(z) = \frac{1}{24\pi} \left\{ \frac{G'''(z)}{G'(z)} - \frac{3}{2} \left[\frac{G''(z)}{G'(z)} \right]^2 + \frac{\pi^2}{2} [G'(z)]^2 \right\}, \quad (3.4a)$$

$$f_F(z) = \frac{1}{24\pi} \left\{ \frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2} \left[\frac{F''(z)}{F'(z)} \right]^2 + \frac{\pi^2}{2} [F'(z)]^2 \right\}. \quad (3.4b)$$

Li e Li [50] resolveram exatamente (3.2a) e (3.2b), aplicando o método geométrico proposto por Cole e Schieve [37]. As fórmulas explícitas para F e G , obtidas na Ref. [50], podem ser usadas para calcular a densidade de energia (3.3). Entretanto, este procedimento requer, em geral, cálculos numéricos e recursivos para que se consiga cada uma das funções F' , F'' , F''' , G' , G'' , G''' . Nesta seção em vez de resolver (3.2), usaremos as Eqs. (3.2a), (3.2b), (3.4a) e (3.4b) para obter o seguinte conjunto de equações para as funções f_G e f_F :

$$f_G[t + R(t)] = f_F[t - R(t)] A_R(t) + B_R(t), \quad (3.5a)$$

$$f_G[t + L(t)] = f_F[t - L(t)] A_L(t) + B_L(t), \quad (3.5b)$$

com

$$A_q(t) = \left[\frac{1 - q'(t)}{1 + q'(t)} \right]^2, \quad (3.6)$$

$$B_q(t) = -\frac{1}{12\pi} \frac{q'''(t)}{[1 + q'(t)]^3 [1 - q'(t)]} - \frac{1}{4\pi} \frac{q''^2(t) q'(t)}{[1 + q'(t)]^4 [1 - q'(t)]^2}, \quad (3.7)$$

onde q pode representar R ou L . As Eqs. (3.5a) e (3.5b) são uma extensão da correspondente equação para f , válida para uma cavidade com apenas um espelho em movimento, encontrada na Ref. [100]. Se considerarmos o caso particular de $L(t) = 0$ na Eq. (3.5), recupera-se o resultado correspondente encontrado em [100]. Para ($t < 0$) temos $f_G(v) = f_F(u) = f^{(s)} = \pi/(48L_0^2)$, e $\langle T_{00} \rangle = -\pi/(24L_0^2)$, que é a densidade de energia

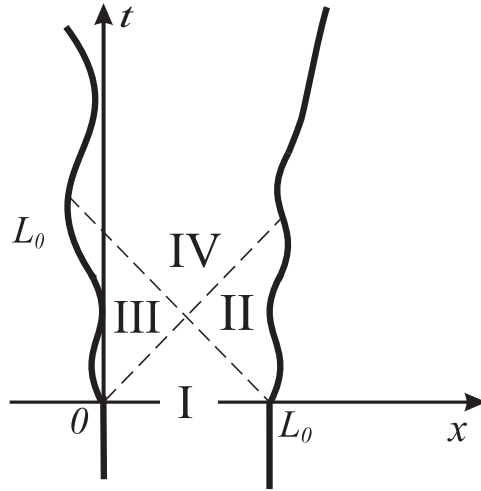


Figura 3.1: Trajetórias das fronteiras (linhas sólidas). As linhas tracejadas são linhas nulas separando as regiões I de II e III, e estas da região IV.

de Casimir para este modelo. Nosso principal objetivo é resolver as Eqs. (3.5a) e (3.5b) recursivamente, usando o ponto de vista geométrico.

Vamos, primeiro, examinar a cavidade na situação não-estática ($t > 0$). Os modos do campo na equação (3.1) são formados pelas partes propagantes para a esquerda e para a direita. Como requer a causalidade, o campo na região I ($v < L_0$ e $u < 0$) (ver Fig. 3.1) não é afetado pelo movimento da fronteira, tanto que, neste sentido, esta região é considerada como uma “zona estática”. Na região II ($v > L_0$ e $u < 0$), a parte propagante para a direita dos modos do campo permanecem não-afetadas pelo movimento da fronteira, tanto que a região II também é zona estática para estes modos. Por outro lado, Às partes propagantes para a esquerda na região II são, em geral, afetadas pelo movimento da fronteira. Similarmente, nas região III ($u > 0$ e $v < L_0$), as partes dos modos do campo propagantes para a esquerda não são afetadas pelo movimento da fronteira, mas as partes propagantes para a direita são. Na região IV ($v > L_0$ e $u > 0$), ambas as partes propagantes para a esquerda e direita são afetadas pelo movimento da fronteira. Em resumo, a função correspondente as partes para a esquerda e para a direita dos modos do campo estão consideradas na região estática se seus argumentos são, respectivamente, $v < L_0$ e $u < 0$. Então, temos $f_G(v < L_0) = f^{(s)}$ e $f_G(u < 0) = f^{(s)}$.

Para um certo ponto do espaço-tempo (\tilde{t}, \tilde{x}) , o tensor energia-momentum $\langle T_{00}(\tilde{t}, \tilde{x}) \rangle$

é conhecido se as partes propagantes para a esquerda e para a direita são conhecidas, tomadas, respectivamente, sobre as linhas nulas $v = z_1$ e $u = z_2$ (onde $z_1 = \tilde{t} + \tilde{x}$ e $z_2 = \tilde{t} - \tilde{x}$), são conhecidas; ou, em outras palavras, $\langle T_{00}(\tilde{t}, \tilde{x}) \rangle$ é conhecido se $f_G(v)|_{v=z_1}$ e $f_F(u)|_{u=z_2}$ são conhecidos. Li e Li [50] usaram o método recursivo de [37] para obter funções G e F para diferentes leis de movimento das fronteiras, traçando de volta linhas nulas até a linha nula que está numa zona estática, onde as funções G ou F são conhecidas. Aqui, adotamos este método para obter f_G e f_F , estendendo o trabalho feito na Ref. [50]. Vamos admitir que (\tilde{t}, \tilde{x}) pertença à região IV, e que a linha nula $v = z_1$ intersecciona a trajetória do movimento do espelho num ponto da trajetória no ponto $[t_1, R(t_1)]$ (ver Fig. 3.2(a)), tanto que $\tilde{t} + \tilde{x} = t_1 + R(t_1)$.

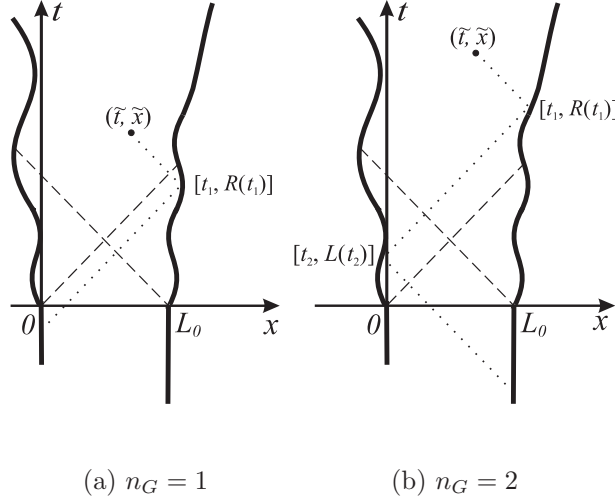


Figura 3.2: Sequência de linhas nulas (linhas pontilhadas) que conectam um ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) a uma zona estática. As linhas tracejadas são linhas nulas que separam as regiões I e II e III, e estas da região IV, como apresentadas na Fig. 3.1. Na Fig. 3.2(a), vemos o caso de uma reflexão ($n_G = 1$), enquanto na Fig. 3.2(b) o caso $n_G = 2$.

Temos $f_G(v)|_{v=z_1} = f_G[t_1 + R(t_1)]$. Usando a equação (3.5a), conseguimos $f_G[t_1 + R(t_1)] = f_F[t_1 - R(t_1)]A_R(t_1) + B_R(t_1)$. Se $t_1 - R(t_1) < 0$, então a linha nula $u = t_1 - R(t_1)$ está na zona estática (Fig. 3.2(a)), tanto que podemos escrever $f_F[t_1 - R(t_1)] = f^{(s)}$, e também $f_G[t_1 + R(t_1)] = f^{(s)}A_R(t_1) + B_R(t_1)$, com isso podemos dizer que o número de reflexões n_G para se chegar a zona estática é, neste caso, $n_G = 1$. Por outro lado,

se $t_1 - R(t_1) > 0$ (caso mostrado na Fig. 3.2(b)) podemos desenhar outra linha nula $v = t_2 + L(t_2)$ que intercepta a linha de mundo da fronteira da esquerda no ponto $[t_2, L(t_2)]$, com $t_1 - R(t_1) = t_2 - L(t_2)$. Neste caso temos, usando (3.5b), $f_G[t_1 + R(t_1)] = \{f_G[t_2 + L(t_2)] - B_L(t_2)\} A_R(t_1)/A_L(t_2) + B_R(t_1)$. Se $t_2 + L(t_2) < L_0$ (ver Fig. 3.2(b)), então $f_G[t_2 + L(t_2)] = f^{(s)}$, $f_G[t_1 + R(t_1)] = \{f^{(s)} - B_L(t_2)\} A_R(t_1)/A_L(t_2) + B_R(t_1)$ e $n_G = 2$. Se $t_2 + L(t_2) > L_0$, assumimos que a linha nula $v = t_2 + L(t_2)$ intercepta a linha de mundo da fronteira da direita no ponto $[t_3, R(t_3)]$, então $t_2 + L(t_2) = t_3 + R(t_3)$ e nós conseguimos $u = t_3 - R(t_3)$. Repetimos este procedimento até a linha nula chegar a uma zona estática, onde a função f_F ou f_G são conhecidas. Em resumo, obtemos para f_G :

$$f_G(z) = f^{(s)} \tilde{A}_G(z) + \tilde{B}_G(z), \quad (3.8)$$

em que, para $n_G(z)$ par, temos:

$$\tilde{A}_G(z) = \prod_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left[(1 - \delta_{k,0}) \frac{A_R[t_{2k-1}(z)]}{A_L[t_{2k}(z)]} + \delta_{k,0} \right], \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_G(z) = & \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{B_R[t_{2k-1}(z)] A_L[t_{2k}(z)]}{A_R[t_{2k-1}(z)]} - B_L[t_{2k}(z)] \right] \right. \\ & \left. \times \prod_{j=0}^k \left[(1 - \delta_{j,0}) \frac{A_R[t_{2j-1}(z)]}{A_L[t_{2j}(z)]} + \delta_{j,0} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.9b)$$

com δ simbolizando a função delta de Kronecker. Para $n_G(z)$ ímpar temos:

$$\tilde{A}_G(z) = \prod_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left[\frac{A_R[t_{2k+1}(z)]}{(1 - \delta_{k,0}) A_L[t_{2k}(z)] + \delta_{k,0}} \right], \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_G(z) = & \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \{ [B_R[t_{2k+1}(z)] - (1 - \delta_{k,0}) B_L[t_{2k}(z)]] \\ & \times \prod_{j=0}^k \left[(1 - \delta_{j,0}) \frac{A_R[t_{2j-1}(z)]}{A_L[t_{2j}(z)]} + \delta_{j,0} \right] \}. \end{aligned} \quad (3.10b)$$

Note que o número n_G de reflexões e a sequências de instantes t_1, \dots, t_{n_G} dependem do argumento z . O conjunto de instante mencionados nas equações (3.9) e (3.10) são calculados

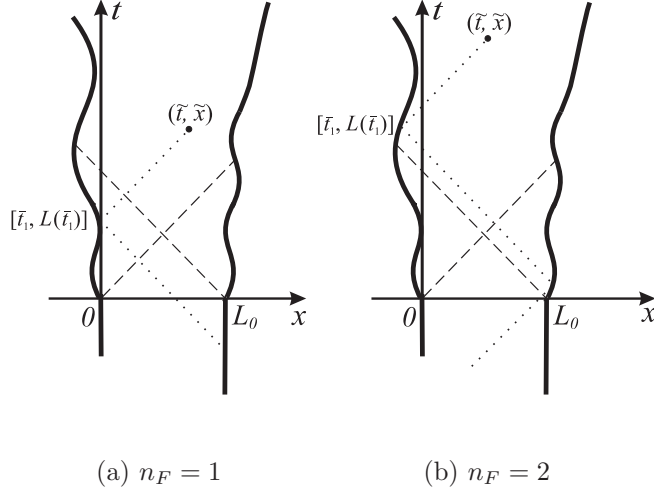


Figura 3.3: Sequência de linhas nulas (linhas pontilhadas) que conectam um ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) a zona estática. As linhas tracejadas são linhas nulas que separam a região I de II e III, e estas da região IV, como apresentado na Fig. 3.1. Na Fig. 3.3(a), o caso de um reflexão ($n_F = 1$), enquanto na Fig. 3.3(b) podemos ver o caso $n_F = 2$.

via [50]:

$$\begin{aligned}
 z &= t_1 + R(t_1), \\
 t_{2l+1} - R(t_{2l+1}) &= t_{2l+2} - L(t_{2l+2}), \\
 t_{2l+2} + L(t_{2l+2}) &= t_{2l+3} + R(t_{2l+3}), \\
 l &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Para resolver recursivamente o conjunto de equações (3.5) para f_F , iniciamos supondo que a linha nula $u = \tilde{t} - \tilde{x}$ intercepta a linha de mundo do espelho da esquerda no ponto $[\bar{t}_1, L(\bar{t}_1)]$, tal que $\tilde{t} - \tilde{x} = \bar{t}_1 - L(\bar{t}_1)$. Então, temos: $f_F(u)|_{u=z_2} = f_F[\bar{t}_1 - L(\bar{t}_1)]$. Usando a Eq. (3.5b), conseguimos $f_F[\bar{t}_1 - L(\bar{t}_1)] = \{f_G[\bar{t}_1 + L(\bar{t}_1)] - B_L(\bar{t}_1)\} / A_L(\bar{t}_1)$. Se $\bar{t}_1 + L(\bar{t}_1) < L_0$, então a linha nula $v = \bar{t}_1 + L(\bar{t}_1)$ já está na zona estática, tanto que podemos escrever $f_G[\bar{t}_1 + L(\bar{t}_1)] = f^{(s)}$, e também $f_F[\bar{t}_1 - L(\bar{t}_1)] = \{f^{(s)} - B_L(\bar{t}_1)\} / A_L(\bar{t}_1)$, e dizer que o número de reflexões n_F para se chegar a zona estática é, neste caso, $n_F = 1$ (ver Fig. 3.3(a)). Por outro lado, se $\bar{t}_1 + L(\bar{t}_1) > L_0$ (como mostrado na Fig. 3.3(b)) nós precisamos encontrar $f_G[\bar{t}_1 + L(\bar{t}_1)]$ recursivamente via Eq. (3.8). No geral, obtemos:

$$f_F(z) = f^{(s)} \tilde{A}_F(z) + \tilde{B}_F(z), \quad (3.12)$$

onde

$$\tilde{A}_F(z) = \frac{\tilde{A}_G \{\bar{t}_1(z) + L[\bar{t}_1(z)]\}}{A_L[\bar{t}_1(z)]}, \quad (3.13a)$$

$$\tilde{B}_F(z) = \frac{\tilde{B}_G \{\bar{t}_1(z) + L[\bar{t}_1(z)]\} - B_L[\bar{t}_1(z)]}{A_L[\bar{t}_1(z)]}, \quad (3.13b)$$

onde com a função $\bar{t}_1(z)$ calculada via

$$z = \bar{t}_1 - L(\bar{t}_1). \quad (3.14)$$

As fórmulas (3.9), (3.10) e (3.13) generalizam aquelas para \tilde{A} e \tilde{B} encontradas na Ref. [5] (mostradas no capítulo 2), que são válidas para uma cavidade com apenas a fronteira da direita em movimento. Das Eqs. (3.3), (3.8) e (3.12), conseguimos fórmulas exatas para a densidade de energia normalizada como:

$$\langle T_{00}(t, x) \rangle = -f^{(s)} \left[\tilde{A}_G(v) + \tilde{A}_F(u) \right] - \tilde{B}_G(v) - \tilde{B}_F(u). \quad (3.15)$$

Eq. (3.15) dá diretamente os valores exatos para a densidade de energia numa cavidade não estática para leis de movimento arbitrárias $R(t)$ e $L(t)$. Desde que $T_{00} = T_{11}$ neste modelo, temos as seguintes fórmulas exatas para a força quântica renormalizada $\mathcal{F}_R = \langle T_{00}[t, R(t)] \rangle$ e $\mathcal{F}_L = -\langle T_{00}[t, L(t)] \rangle$ (ver Refs. [1, 60]) atuando respectivamente, sobre o lado direito e esquerdo dentro da cavidade:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_R(t) = & -f^{(s)} \left\{ \tilde{A}_G[t + R(t)] + \tilde{A}_F[t - R(t)] \right\} + \\ & -\tilde{B}_G[t + R(t)] - \tilde{B}_F[t - R(t)], \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L(t) = & f^{(s)} \left\{ \tilde{A}_G[t + L(t)] + \tilde{A}_F[t - L(t)] \right\} + \\ & +\tilde{B}_G[t + L(t)] + \tilde{B}_F[t - L(t)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2 Comportamento da força em cada região do espaço-tempo

A seguir, examinaremos o comportamento das forças em cada região apontada na Fig. 3.1. Na região I (Fig. 3.1), temos $n_G = n_F = 0$. Então, Eqs. (3.9) e (3.13) dão:

$\tilde{A}_G(z) = \tilde{A}_F(z) = 1$ e $\tilde{B}_G(z) = \tilde{B}_F(z) = 0$. Isto resulta, como esperado, na força estática de Casimir

$$\mathcal{F}_R^{(Cas)} = -\mathcal{F}_L^{(Cas)} = -\pi/(24L_0^2),$$

atuante sobre a fronteira.

Na região II, temos $n_G = 1$ e $n_F = 0$. Para este caso, Eq. (3.13) dá $\tilde{A}_F(u) = 1$ e $\tilde{B}_F(u) = 0$, enquanto da Eq. (3.10) temos $\tilde{A}_G(v) = A_R[t_1(v)]$ e $\tilde{B}_G(v) = B_R[t_1(v)]$. Para calcular a força $\mathcal{F}_R(t)$ na Eq. (3.16) fazemos $v \rightarrow t + R(t)$, obtendo $t_1(v)$ como já discutido: $t + R(t) = t_1 + R(t_1) \Rightarrow t_1 = t$. Então conseguimos $\tilde{A}_G[t + R(t)] = A_R(t)$ e $\tilde{B}_G[t + R(t)] = B_R(t)$. A força $\mathcal{F}_R(t)$ sobre a fronteira da direita na região II, agora renomeada como $\mathcal{F}_R^{(II)}(t)$, é:

$$\mathcal{F}_R^{(II)}(t) = -f^{(s)} [1 + A_R(t)] - B_R(t). \quad (3.18)$$

Desta fórmula, podemos obter um resultado analítico para uma lei de movimento arbitrária $R(t)$. Note que na equação (3.18) o índice L não é encontrado, portanto a força quântica para a linha de mundo na região II não tem influência do movimento da fronteira da esquerda. Considerando o limite $L_0 \rightarrow \infty$ recuperamos a força quântica de radiação $\mathcal{F}_q^{(-u)}$ correspondente ao campo não limitado, atuando do lado esquerdo de um único espelho: $\lim_{L_0 \rightarrow \infty} \mathcal{F}_R^{(II)}(t) = \mathcal{F}_R^{(-u)}(t)$, sendo

$$\mathcal{F}_q^{(-u)}(t) = -B_q(t). \quad (3.19)$$

No limite não-relativístico, de (3.18) obtemos $\mathcal{F}_R^{(II)}(t) \approx \mathcal{F}_R^{(Cas)} + \ddot{R}/(12\pi)$, e adicionando o limite $L_0 \rightarrow \infty$ recuperamos a força quântica aproximada $\mathcal{F}_R^{(II)}(t) \approx \ddot{R}/(12\pi)$, que atua sobre o lado esquerdo de um único espelho [34].

Na região III, temos $n_G = 0$ e $n_F = 1$. Para este caso, Eqs. (3.9) e (3.13) dão $\tilde{A}_F(u) = 1/A_L[\bar{t}_1(u)]$; $\tilde{B}_F(u) = -B_L[\bar{t}_1(u)]/A_L[\bar{t}_1(u)]$; $\tilde{A}_G(v) = 1$; $\tilde{B}_G(v) = 0$. Considerando $u \rightarrow t - L(t)$ e $t - L(t) = \bar{t}_1 - L(\bar{t}_1) \Rightarrow \bar{t}_1 = t$, a força $\mathcal{F}_L(t)$ sobre a fronteira da esquerda nesta região, agora renomeada como $\mathcal{F}_L^{(III)}(t)$, é:

$$\mathcal{F}_L^{(III)}(t) = f^{(s)} \left\{ 1 + \frac{1}{A_L(t)} \right\} - \frac{B_L(t)}{A_L(t)}. \quad (3.20)$$

Considerando o limite $L_0 \rightarrow \infty$ recuperamos a força quântica de radiação $\mathcal{F}_q^{(+u)}$ correspondente ao campo não limitado à direita de um único espelho: $\lim_{L_0 \rightarrow \infty} \mathcal{F}_L^{(III)}(t) = \mathcal{F}_L^{(+u)}(t)$,

na qual:

$$\mathcal{F}_q^{(+u)}(t) = -\frac{B_q(t)}{A_q(t)}. \quad (3.21)$$

Das Eqs. (3.19) e (3.21) recuperamos a força quântica total $\mathcal{F}_q^{(u)}(t)$ atuante sobre um único espelho no vácuo, com trajetória prescrita $x = q(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_q^{(u)}(t) &= \mathcal{F}_q^{(-u)}(t) + \mathcal{F}_q^{(+u)}(t) \\ &= (1 + \dot{q}^2) \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{q}\ddot{q}^2}{(1 - \dot{q}^2)^4} + \frac{1}{6\pi} \frac{\ddot{q}}{(1 - \dot{q}^2)^3} \right\}, \end{aligned}$$

que está de acordo com o que é encontrado na literatura (ver Ref. [1] e Cap. 1)). No limite não-relativístico, reobtemos a força quântica de radiação aproximada $\mathcal{F}_q^{(u)}(t) \approx \ddot{q}/(6\pi)$ [34].

Para calcular a força total $\mathcal{F}_R^{(tot)}$ e $\mathcal{F}_L^{(tot)}$ atuante sobre, respectivamente, as fronteiras da direita e da esquerda, para qualquer uma das regiões II, III ou IV mostradas na Fig. 3.1, precisamos, além das Eqs. (3.16) e (3.17), levar em conta a força dinâmica de Casimir correspondente ao lado de fora da cavidade, que é dada pelas Eqs. (3.19) e (3.21). Com isso temos:

$$\mathcal{F}_R^{(tot)} = \mathcal{F}_R(t) + \mathcal{F}_R^{(+u)}(t), \quad (3.22)$$

$$\mathcal{F}_L^{(tot)} = \mathcal{F}_L(t) + \mathcal{F}_L^{(-u)}(t). \quad (3.23)$$

As Eqs. (3.22) e (3.23) nos permitem calcular direta e analiticamente a força quântica total atuante sobre ambos os espelhos para leis de movimento arbitrárias $R(t)$ e $L(t)$, nas regiões II ou III, porque para essas regiões as Eqs. (3.16) e (3.17) são substituídas por seus casos particulares dados pelas Eqs. (3.18) e (3.20).

Na região IV (ver Fig. 3.1), em geral é difícil obter resultados exatos analíticos para a força quântica (3.16) e (3.17), com trajetórias arbitrárias $R(t)$ e $L(t)$. A dificuldade está em resolver equações como $t_1 - R(t_1) = t_2 - L(t_2)$ (ver Eq. (3.11)), que surgem após um segunda reflexão ($n_G \geq 2$ ou/e $n_F \geq 2$). Trajetórias podem ser construídas para dar soluções analíticas destas equações, mas uma grande classe de leis de movimento relevantes não resultam em soluções exatas analíticas. Entretanto, nossas expressões nos permitem a obtenção de resultados numéricos exatos para a força quântica atuante sobre as fronteiras com leis de movimentos arbitrárias para a cavidade, incluindo movimentos

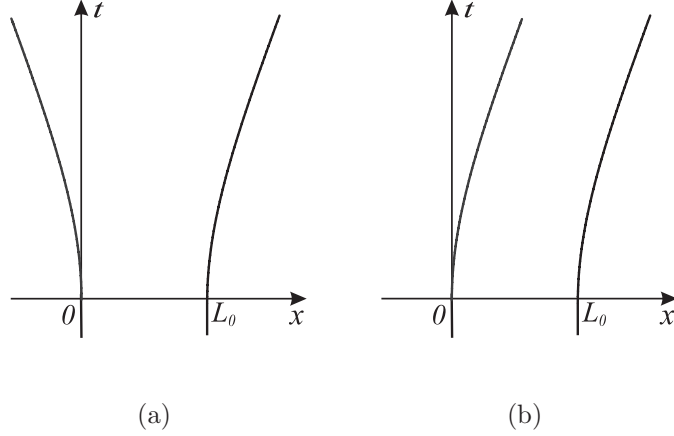


Figura 3.4: As linhas sólidas mostram as trajetórias das fronteiras descritas na Eq. (3.24). Fig. 3.4(a) descreve o caso $\kappa_R = -\kappa_L = 0.1$, enquanto 3.4(b) descreve o caso $\kappa_R = \kappa_L = 0.1$.

não-oscilatórios, relativísticos e com grandes deslocamentos, que estão fora do alcance dos métodos perturbativos encontrados na literatura, como iremos examinar a seguir. Neste contexto, vamos aplicar nossas fórmulas à seguinte trajetória particular não-trivial, baseada naquela proposta por Haro na Ref. [101]:

$$L(t) = \kappa_L \ln[\cosh(t)], \quad (3.24a)$$

$$R(t) = L_0 + \kappa_R \ln[\cosh(t)]. \quad (3.24b)$$

Considerando, por exemplo, $\kappa_R = -\kappa_L = 0.1$ (Fig. 3.4(a)), temos uma cavidade expandindo com grande amplitude e velocidades relativísticas. Se considerarmos $\kappa_R = \kappa_L = 0.1$ (Fig. 3.4(b)), temos os espelhos em movimento com velocidades relativísticas, mas mantendo constante o comprimento da cavidade.

Nas Figs. 3.5 e 3.6, usando as fórmulas (3.9)-(3.13) e (3.22), visualizamos graficamente a evolução da força quântica $\mathcal{F}_R^{(tot)}(t)$ e $\mathcal{F}_R(t)$ para, respectivamente, os casos $\kappa_R = -\kappa_L = 0.1$ (ver Fig. 3.4(a)), e $\kappa_R = \kappa_L = 0.1$ (ver Fig. 3.4(b)). Podemos ver as descontinuidades das derivadas para $\mathcal{F}_R^{(tot)}$ e $\mathcal{F}_R(t)$. Estas descontinuidades sempre ocorrem quando a frente destas ondas na densidade de energia encontram o lado direito da fronteira. No caso, por exemplo, mostrado na Fig. 3.5, quando $t = 0$ a fronteira da esquerda começa a se mover e gera uma onda na densidade de energia, propagando-se para a direita e encontrando

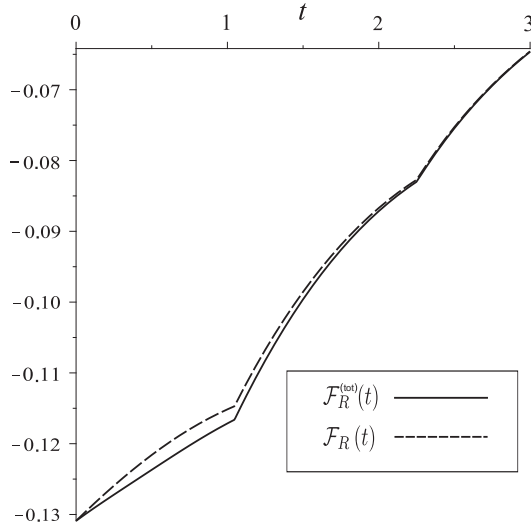


Figura 3.5: A linha sólida mostra a força total $\mathcal{F}_R^{(tot)}(t)$, enquanto a linha tracejada mostra a força $\mathcal{F}_R(t)$, ambas para a lei de movimento (3.24), com $\kappa_R = -\kappa_L = 0.1$ e $L_0 = 1$.

a fronteira da direita no instante $t = \tau_1 \approx 1.05$, calculado via equação $\tau_1 - R(\tau_1) = 0$, e que corresponde à primeira descontinuidade da derivada mostrada na Fig. 3.5. Em $t = 0$, uma outra frente de onda é gerada pela fronteira da direita, propagando-se para esquerda e encontrando a fronteira da esquerda no instante $\tau_1 \approx 1.05$, e então refletindo de volta e encontrando a fronteira da direita no instante $\tau_2 \approx 2.25$, calculado através da equação $\tau_2 - R(\tau_2) = \tau_1 - L(\tau_1)$. Este instante corresponde à segunda descontinuidade da derivada mostrada na Fig. 3.5. Visto que o comprimento da cavidade permanece o mesmo no caso mostrado na Fig. 3.4(b), a força quântica $\mathcal{F}_R^{(tot)}(t)$ oscila em torno da força estática de Casimir (Fig. 3.6), enquanto essa força vai a zero para o caso mostrado na Fig. (Fig. 3.5), onde as fronteiras vão para um comportamento assintótico de comprimento infinito e velocidade constante.

3.3 Comentários finais do capítulo 3

Resumindo nossos resultados, as fórmulas obtidas no presente capítulo nos permitem conseguir valores exatos para a densidade de energia do campo e a força quântica que atua sobre as fronteiras de uma cavidade, para leis de movimento arbitrárias para as fronteiras, sendo o vácuo o estado inicial do campo. As Eqs. (3.5a) e (3.5b) são extensões das

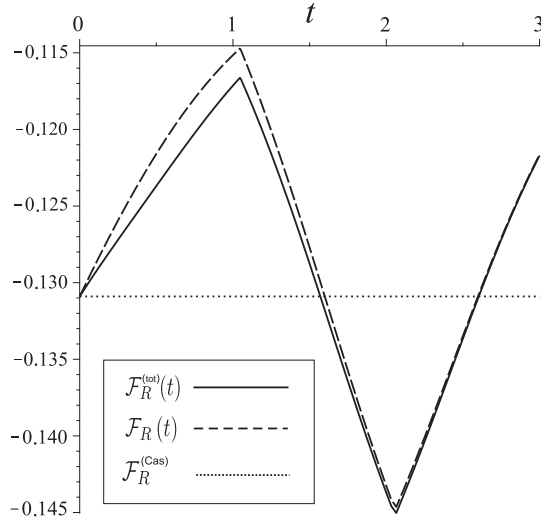


Figura 3.6: A linha sólida mostra a força total $\mathcal{F}_R^{(tot)}(t)$, a linha tracejada mostra a força $\mathcal{F}_R(t)$, ambas para a lei de movimento (3.24), com $\kappa_R = \kappa_L = 0.1$ e $L_0 = 1$. A linha pontilhada mostra a força estática de Casimir.

correspondentes equações para uma cavidade com apenas uma das fronteiras em movimento, encontradas na Ref. [100], e a obtenção de f_G e f_F recursivamente, traçando uma sequência de linhas nulas, pode ser vista como uma extensão do trabalho feito na Ref. [50]. As fórmulas (3.9), (3.10) e (3.13) generalizam aquelas encontradas na Ref. [5]. A fórmula (3.15) exhibe uma estrutura clara para a densidade de energia: as informações a respeito da densidade de energia do vácuo (dadas pela condição de contorno) são armazenadas em $f^{(s)}$, enquanto toda a informação a respeito do movimento dos espelhos é armazenada nas funções \tilde{A} e \tilde{B} . Mostramos que, para os casos particulares de uma cavidade com apenas uma fronteira em movimento, velocidades não-relativísticas, ou no limite de grande cavidades (um único espelho), nossos resultados estão de acordo com aqueles encontrados na literatura [1, 5, 16, 34, 100]. Os presentes resultados nos permitem investigar diversos problemas (usualmente tratados por abordagens perturbativas na literatura) com uma abordagem exata e também fora do regime de pequenas amplitudes. Por exemplo, aqueles relacionados a forças inerciais no efeito Casimir com dois espelhos em movimento [45], ou o fenômeno da interferência na produção de fótons [44]. Estas questões estão sob investigação e serão discutidas em trabalhos futuros.

Capítulo 4

Pacote *Dynamical Casimir*

Embora as fórmulas (2.43), (2.44), (2.49) e (2.50) sejam formalmente exatas, para extrairmos valores numéricos para \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{non-vac}$ precisamos calcular as funções $t_i(z)$, as quais são dadas pelas Eqs. (2.46) e (2.47). Em geral, podemos apenas obter soluções numéricas para as equações (2.49) e (2.50), o que requer o uso de computador. Além disso, o processo de recorrências que conecta o valor da densidade de energia em um determinado ponto do espaço-tempo a um ponto da “zona estática” (tal como discutido no Cap. 2), também requer implementação computacional.

Neste capítulo, tomando como base as fórmulas (2.49), (2.50), (2.46) e (2.47), elaboramos no ambiente de computação algébrica Maple [105] um pacote de comandos que denominamos *Dynamical Casimir*, que nos permite investigar o comportamento exato da densidade de energia para uma cavidade não-estática com estado inicial arbitrário do campo.

Mostramos que nossos comandos são capazes tanto de reproduzir diversos resultados encontrados na literatura (e também nos capítulos anteriores) quanto de produzir novos resultados, apontar erros e mostrar limitações nos resultados obtidos via métodos perturbativos, como será discutido adiante.

O presente estudo deriva dos artigos [1, 5, 7, 8, 9].

4.1 Uma visão global da estrutura do software

O pacote *Dynamical Casimir* é escrito em Maple e implementa comandos computacionais úteis para o cálculo do valor exato da densidade de energia para um campo escalar sem massa num espaço-tempo bidimensional, dentro de uma cavidade não-estática com estado inicial arbitrário, como discutido nos capítulos anteriores. O comando fundamental `n` calcula o número de reflexões e a lista de instantes $[t_1, \dots, t_n]$, de acordo com as fórmulas (2.45), (2.46) e (2.47). Os comandos `A` e `B` calculam o valor das funções \mathcal{A} e \mathcal{B} definidos em (2.37) e (2.38). Estes comandos são usados por outros comandos nomeados `A_tilde` e `B_tilde`, que calculam os valores, respectivamente, das funções $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ dados por (2.43) e (2.44). Finalmente, o pacote *Dynamical Casimir* apresenta os comandos `g` e `h`, que implementam as funções g e h , dadas pelas Eqs. (2.24) e (2.42), e que são fundamentais para o cálculo da densidade de energia (2.10).

A instalação do pacote é simples: basta copiar o arquivo `dynamical_casimir_package.mm` (ver Apêndice A) para um diretório no computador, abrir uma seção de Maple (versão 10 ou mais recente) e escrever:

```
> read('caminho-do-diretório/dynamical_casimir_package.mm');
```

Em seguida faremos a descrição de cada comando disponível no pacote *Dynamical Casimir*:

- O comando `n` faz os cálculos do número de reflexões $n(z)$, o valor de $\tilde{z}(z)$ e a lista de instantes $[t_1, \dots, t_n]$ relacionados ao mapeamento das linhas nulas $t + x = z$ até a linha nula $t - x = \tilde{z}(z)$ na zona estática, de acordo com as fórmulas (2.45), (2.46) e (2.47).

Sequência de parâmetros usados pelo comando: `n(L, z, s)`

Parâmetros: `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `z` - um número real que define a linha nula ($t + x = z$); `s` - assume os valores de 1, 2, 3, e 4, e controla se os valores de saída informam o número de reflexões (se a escolha é 1), o valor de $\tilde{z}(z)$ (se a escolha é 2), a lista $[n, \tilde{z}(z)]$ ou $[n, \tilde{z}(z), [t_1, \dots, t_n]]$ para as escolhas 3 e 4, respectivamente.

- O comando `A` faz os cálculos da função $\mathcal{A}(t)$ dada pela Eq. (2.37).
Sequência de parâmetros usados pelo comando: `A(L, t)`
Parâmetros: `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `t` - um número real que representa o instante t .
- O comando `B` faz os cálculos da função $\mathcal{B}(t)$ dada pela Eq. (2.38).
Sequência de parâmetros usados pelo comando: `B(L, t)`
Parâmetros: `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `t` - um número real que representa o instante t .
- O comando `A_tilde` faz os cálculos da função $\tilde{\mathcal{A}}(z)$ dada pela Eq. (2.43).
Sequência de parâmetros usados pelo comando: `A_tilde(L, z)`
Parâmetros: `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `z` - um número real que define a linha nula $t + x = z$.
- O comando `B_tilde` faz os cálculos da função $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ dada pela Eq. (2.44).
Sequência de parâmetros usados pelo comando: `B_tilde(L, z)`
Parâmetros: `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `z` - um número real que define a linha nula $t + x = z$.
- O comando `h` faz os cálculos da função $h(z)$ dada pela Eq. (2.41).
Sequência de parâmetros usados pelo comando: `h(s, L, z)`
Parâmetros: `s` - um procedimento que define a função $h^{(s)}(z)$ pela Eq. (2.42); `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `z` - um número real que define a linha nula $t + x = z$.
- O comando `g` faz os cálculos da função $g(z)$
Sequência de parâmetros usados pelo comando: `g(s, L, z)`
Parâmetros: `s` - um procedimento que define a função $g^{(s)}[\tilde{z}(z)]$ pela Eq. (2.24); `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `z` - um número real que define a linha nula $t + x = z$.

- O comando `R` faz os cálculos da função de Moore, de acordo com a fórmula (2.35).

Sequência de parâmetros usados pelo comando: `R(L, z)`

Parâmetros: `L` - um procedimento que define a lei de movimento da fronteira da direita; `z` - um número real que define a linha nula $t + x = z$.

4.2 Aplicações a movimentos oscilatórios

Vamos iniciar as aplicações do pacote analisando uma cavidade com uma das fronteiras em movimento oscilatório, estando o campo inicialmente no estado de vácuo. Investigaremos a seguinte classe de movimentos, definida por

$$L(t) = L_0 (1 + \epsilon \sin(q\pi t/L_0)^s), \quad (4.1)$$

onde $\epsilon < 1$ é um parâmetro sem dimensão, L_0 é o comprimento da cavidade na situação estática, e q é um número real.

4.2.1 Casos com condições não-mistas e vácuo

Neste primeiro exemplo, vamos investigar o caso particular (considerados por Cole e Schieve na Ref. [37]) onde a condição de fronteira é DD e a lei de movimento (denotada como L_{CS1}) é dada pela Eq. (4.1) com $L_0 = \pi/10$, $\epsilon = -0.01$, $q = 21/20$ e $s = 2$ na Eq. (4.1). Para este modelo, a função $h^{(s)}$, denotada como h_{vacDD} , é dada por $h_{vacDD} = \pi/(48L_0^2)$. A implementação no Maple pode ser feita da seguinte maneira:

```
> L0:=evalf(Pi/10): # comprimento inicial da cavidade
> L_CS_1:=t->L0*(1-0.01*sin(21*Pi*t/(20*L0))^2): #lei de movimento
> h_vac_DD := z -> evalf(Pi/(48*L0^2)): # valor estático da função h
```

A densidade de energia do vácuo \mathcal{T}_{vac} e a densidade de energia de Casimir estática \mathcal{T}_{cas} são escritas como:

```
> T_vac:= (h_s,L,t,x)->-h(h_s,L,t-x)-h(h_s,L,t+x): # densidade de energia
> T_cas:=T_vac(h_vac_DD,L_CS_1,0*L0,L0/2): # densidade de energia de Casimir
```


O comportamento da densidade de energia na cavidade, para $t = 0$, $t = L_0/2$ e $t = 2L_0/3$ pode ser visualizado via:

```
> plot(['T_vac(h_vac_DD,L_CS_1,2/3*L0,x*L0)',
'T_vac(h_vac_DD,L_CS_1,1/2*L0,x*L0)',T_cas],x=0..1);
```

O resultado é mostrado na Fig. 4.1. Note uma onda de densidade de energia propagando-se para a esquerda com velocidade da luz. Note também que parte da cavidade permanece com a densidade de energia de Casimir estática (isto é correspondente à região II mostrada na Fig. 2.1). Vamos agora observar a evolução temporal da densidade de energia no ponto $x = L_0/2$, ou seja $\mathcal{T}_{vac}(t, L_0/2)$, de $t = 0$ até $t = 20L_0$:

```
> plot(['T_vac(h_vac_DD,L_CS_1,t*L0,L0/2)',T_cas],t=0..20);
```

O resultado é mostrado na Fig. 4.2 e está de acordo com o resultado encontrado na Ref. [37]. Outra comparação com os resultados encontrados na Ref. [37] pode ser feita se considerarmos o seguinte exemplo: $L_0 = \pi/10$, $\epsilon = -0.01$, $q = 1$ e $s = 1$ na Eq. (4.1), obtendo a lei de movimento denotada como L_{CS2} :

```
> L_CS_2:=t->evalf(L0-0.01*L0*sin(Pi*t/L0)); # Lei de movimento
```

O comportamento temporal, de $t = 49$ até $t = 52.5$, da força $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{vac}$, Eq. (2.51), atuante sobre o movimento da fronteira, pode ser visualizado via

```
> plot(['T_vac(h_vac_DD,L_CS_2,t*L0,L_CS_2(t*L0))'],t=49.5..52.5);
```

O resultado é mostrado na Fig. 4.3 e está em acordo com o resultado encontrado na Ref. [37].

Um caso interessante - em que um resultado do pacote não coincide com o encontrado na literatura - pode ser discutido considerando $L_0 = \pi/10$, $\epsilon = -0.01$, $q = 1$ e $s = 2$ na Eq. (4.1), resultando numa lei de movimento que chamaremos aqui L_{Law} . Esta lei de movimento foi considerada por Law na Ref. [35], trabalho que foi importante na história do ECD porque foi pioneiro em propor uma solução analítica exata para o problema do campo em uma cavidade oscilante e, ainda, por mostrar o surgimento de regiões (chamadas por Law de “sub-Casimir”) em que a densidade de energia está abaixo do valor correspondente à densidade de energia de Casimir da cavidade estática.

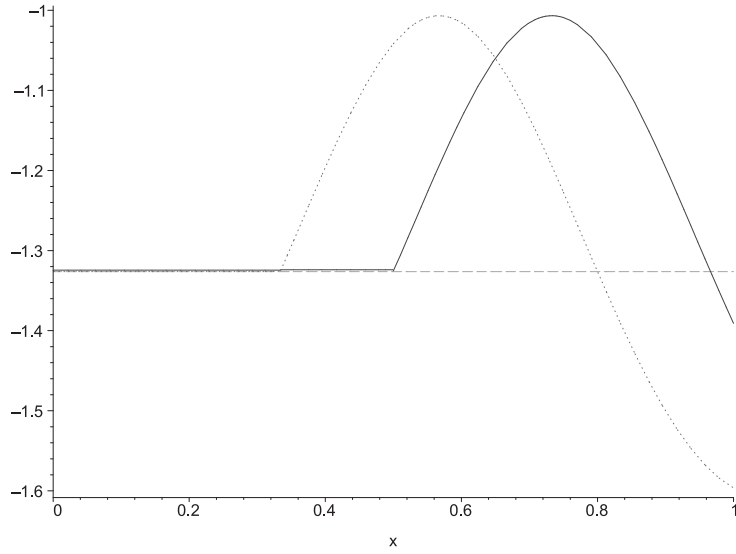


Figura 4.1: Densidade de energia $\mathcal{T}_{\text{vac}}(t, xL_0)$ (eixo vertical) versus x , em três instantes: $\mathcal{T}_{\text{vac}}(0, xL_0)$ (linha tracejada); $\mathcal{T}_{\text{vac}}(L_0/2, xL_0)$ (linha sólida); $\mathcal{T}_{\text{vac}}(2L_0/3, xL_0)$ (linha pontilhada).

Vamos usar o pacote para calcular a evolução temporal da densidade de energia no ponto $x = L_0/2$, ou seja $\mathcal{T}_{\text{vac}}(t, L_0/2)$, de $t = 0$ até $t = 25L_0$, e comparar com o correspondente resultado exibido na Ref. [35]. Usando o pacote temos:

```
> plot(['T_vac(h_vac_DD,L_Law,t*L0,L0/2)',T_cas],t=0..25);
```

Nosso resultado é mostrado na Fig. 4.4, mas não está de acordo com o resultado encontrado na Fig. 3 do artigo [35], a qual mostra o pico máximo de valor de densidade de energia cerca de cinco vezes maior do que aquele por nós encontrado. Buscando explicação para tal discrepância, notamos que a função f definida na Ref. [35], não obedece precisamente à relação de recorrência dada na Eq. 2.36. Concluindo, acreditamos que os nossos resultados estão corretos.

Ressaltamos que, dadas as Eqs. (2.56), toda a análise anterior feita para casos DD, vale para casos NN.

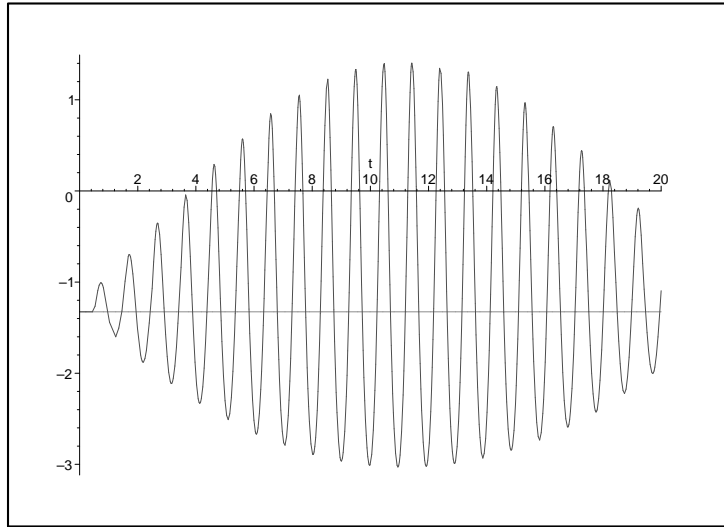


Figura 4.2: Densidade de energia $\mathcal{T}_{\text{vac}}(tL_0, L_0/2)$ (eixo vertical) versus t .

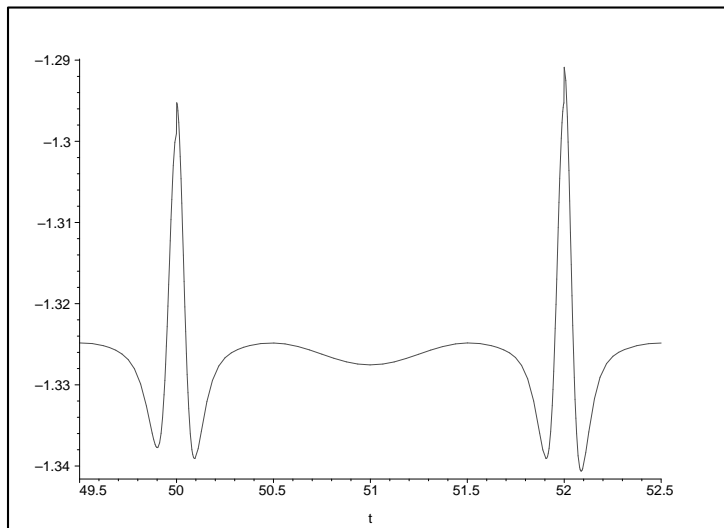


Figura 4.3: $\mathcal{F}_{\text{vac}} = \mathcal{T}_{\text{vac}}[tL_0, L_{CS2}(tL_0)]$ (eixo vertical) versus t (eixo horizontal).

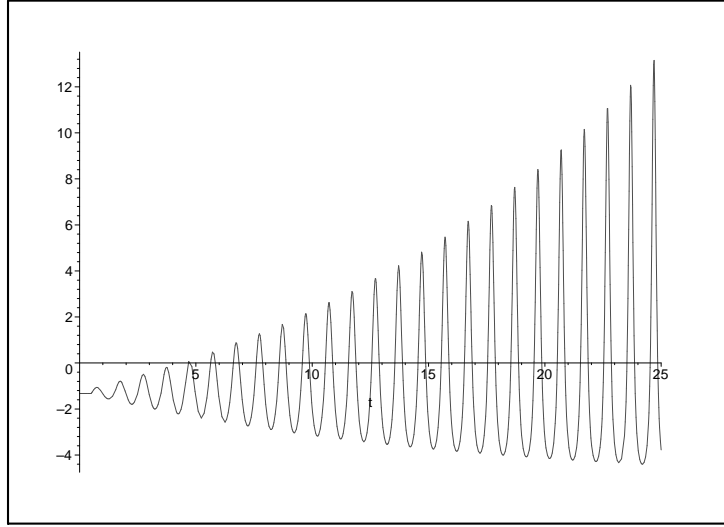


Figura 4.4: $\mathcal{T}_{vac}(tL_0, L_0/2)$ (eixo vertical) versus t (eixo horizontal).

4.3 Casos envolvendo condições mistas ou não-mistas, e vácuo

Agora investigaremos uma classe particular de problemas onde a condição de fronteira pode ser DD, NN, ND or ND, e as leis de movimento dadas pela Eq. (4.1) com $L_0 = \pi/10$, $\epsilon = 0.01$, $s = 1$; $q = 1$ (neste caso a função L é denotada como L_{D1}) ou $q = 2$ (L_{D2}). Primeiro exemplo: para os casos DD e NN, a função $h^{(s)}$ tem o mesmo valor, e será renomeada como: $h_{vac-non-mixed}^{(s)}$ e dada por $h_{vac-non-mixed}^{(s)} = \pi/(48L_0^2)$. Segundo exemplo: para os casos DN e ND a função $h^{(s)}$ tem também o mesmo valor, e será renomeada como: $h_{vac-mixed}^{(s)}$ e dada por $h_{vac-mixed}^{(s)} = -\pi/(96L_0^2)$. A implementação em Maple pode ser feita da seguinte maneira:

```
> L0:=evalf(Pi/10): # comprimento inicial da cavidade
> L_D_1:=t->L0*(1+0.01*sin(1*Pi*t/(L0))^2): #lei de movimento, q = 1
> L_D_2:=t->L0*(1+0.01*sin(2*Pi*t/(L0))^2): #lei de movimento, q = 2
> h_s_vac_non_mixed := z -> evalf(Pi/(48*L0^2)): # dens. de Casimir - não misto
> h_s_vac_mixed := z -> -evalf(Pi/(96*L0^2)): # dens. de Casimir - misto
```

Vamos agora usar o pacote *Dynamical Casimir* para investigar o comportamento exato da energia total $\mathcal{E}(t)$ (energia armazenada na cavidade em função do tempo), e comparar

com o resultado analítico aproximado encontrado na literatura. A energia total pode ser escrita como $\mathcal{E} = \int_0^{L_0} \mathcal{T}(t, x) dx = \int_{t-L_0}^{t+L_0} h(u) du$, fórmula esta válida para valores de t tais que $L(t) = L_0$. Extraíndo a energia do vácuo $\mathcal{E}_{(Cas)} = \mathcal{E}(0)$ da energia total obtemos a energia $\tilde{\mathcal{E}}$ relacionada com a criação de partículas na cavidade, de modo que podemos escrever: $\tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_{(Cas)}$, onde $\mathcal{E}_{(Cas)}$ pode representar $-\pi/24L_0$ ou $\pi/48L_0$, se consideramos, respectivamente, o caso não-misto ou o misto. A função \mathcal{E} , renomeada como: $\mathcal{E}_{vac-non-mixed-1}$ (para a configuração descrita no primeiro exemplo desta subseção) e $\mathcal{E}_{vac-mixed-1}$ (segundo exemplo), podem ser implementadas como segue:

```
> h_non_mixed_1:= u-> -h(h_s_vac_non_mixed,L_D_1,u); # função h; não misto; q=1
> h_mixed_1:= u-> -h(h_s_vac_mixed,L_D_1,u); # função h; misto; q=1
> E_non_mixed_1:= w-> evalf(Int(h_non_mixed_1,w-L0..w+L0));
> # o input acima corresponde a energia total;não misto;q=1
> E_mixed_1:= w-> evalf(Int(h_mixed_1,w-L0..w+L0)); # energia total; misto; q=1
> E_tilde_non_mixed_1:= w-> evalf(Int(h_non_mixed_1,w-L0..w+L0))
> -T_cas_non_mixed*L0; # energia partículas criadas - não misto
> E_tilde_mixed_1:= w-> evalf(Int(h_mixed_1,w-L0..w+L0))
> -T_cas_mixed*L0; # energia partículas criadas - misto
```

Para obtermos a evolução temporal da energia total armazenada nas correspondentes cavidades ou, mais especificamente, para obtermos os valores para a energia total exibidos nas colunas 2 e 4 da Tabela 2.1 (Cap. 2), fazemos:

```
> E_non_mixed_1(0);E_non_mixed_1(10);E_non_mixed_1(30);E_non_mixed_1(90);
> E_mixed_1(0);E_mixed_1(10);E_mixed_1(30);E_mixed_1(90);
```

Para obtermos somente os valores da energia associada com as partículas criadas, mostrados na tabela 2.2 (Cap. 2), fazemos:

```
> E_tilde_non_mixed_1(0);E_tilde_non_mixed_1(10);
> E_tilde_non_mixed_1(30);E_tilde_non_mixed_1(90);
> E_tilde_mixed_1(0);E_tilde_mixed_1(10);
> E_tilde_mixed_1(30);E_tilde_mixed_1(90);
```

4.4 Casos envolvendo condições não-mistas e banho térmico

Vamos agora usar o pacote *Dynamical Casimir* (e sua abordagem exata) para estudar o comportamento da densidade de energia em uma cavidade, na presença de um banho térmico e com movimento oscilatório ressonante de uma das fronteiras. Pelas Eqs. (2.37), (2.38), (2.43) e (2.44) conclui-se que as funções $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ são diferentes uma da outra para uma lei de movimento qualquer [106], e conseqüentemente \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ (dadas pelas Eqs. (2.49) e (2.50)) possuem, em geral, estruturas diferentes (ver Ref. [106]). Definimos aqui “estrutura” da seguinte maneira: dois gráficos têm a mesma estrutura se eles têm o mesmo número de pontos de máximo e mínimo, e esses pontos estão nas mesmas posições em ambos os gráficos. À primeira vista, essa conclusão contrasta com a mostrada por Dodonov e Andreatta na Ref. [61], segundo a qual \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ exibem a mesma estrutura para estados iniciais do campo que sejam diagonais (como é o caso dos estados vácuo e térmico). O objetivo desta seção é investigar esta aparente contradição, usando o pacote *Dynamical Casimir*.

Suponhamos a seguinte lei de movimento $L(t)$ para o espelho móvel dada pela Eq. (4.1) com $L_0 = 1$, $s = 1$ e $q = p$ (sendo $p = 1, 2, \dots$). Neste caso, a função L é renomeada como L_{AD} . No contexto de métodos analíticos aproximados [61], considerando o limite de pequenas oscilações $|\epsilon| \ll 1$, a densidade de energia pode ser escrita como $\mathcal{T} \approx \mathcal{T}^{(a)}$, com

$$\mathcal{T}^{(a)} = -(h^{(s)} - p^2 f^{(s)})[s(u) + s(v)] - 2p^2 f^{(s)}, \quad (4.2)$$

$$s(z) = \frac{(1 - \kappa^2)^2}{[1 + \kappa^2 + 2(-1)^p \kappa \cos(p\pi z)]^2},$$

$$\kappa = \frac{\sinh(p\tau)}{\sqrt{1 + \sinh^2(p\tau)}},$$

$$\tau = \frac{1}{2L_0} \epsilon \pi t,$$

onde se define momentaneamente $t = N/p$ e N sendo um número inteiro não-negativo. A densidade de energia $\mathcal{T}^{(a)}$ na Eq. (4.2) também pode ser escrita em termos de contribuições do vácuo e do banho térmico como: $\mathcal{T}^{(a)} = \mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)} + \mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)}$, onde:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)} = (p^2 - 1)f^{(s)}[s(u) + s(v)] - 2p^2 f^{(s)}, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)} = -g^{(s)}[s(u) + s(v)]. \quad (4.4)$$

Nesta situação, como $(p^2 - 1)f^{(s)} > 0$ e $-g^{(s)} > 0$, as Eqs. (4.3) e (4.4) nos dizem que $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)}$ e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)}$ possuem a mesma estrutura [61]. Esta afirmação contrasta com o dito no início desta seção, onde concluimos que, do ponto de vista exato, \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ possuem estruturas diferentes, em geral. Conseguir-se, entretanto, harmonizar ambas as conclusões se for possível mostrar que, para $|\epsilon| \ll 1$ temos:

$$\frac{\tilde{\mathcal{B}}(z)}{\tilde{\mathcal{A}}(z) - 1} \rightarrow -p^2 f^{(s)}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(z) \rightarrow s(z). \quad (4.6)$$

A razão $\sigma(z) = \tilde{\mathcal{B}}(z) / [\tilde{\mathcal{A}}(z) - 1]$, para $p = 2$, pode ser visualizada graficamente, através do pacote *Dynamical Casimir*, da seguinte forma:

```
> f_s:=z->Pi/(48*L0^2);
> L_AD1:=u->L0*(1+0.1*sin(2*Pi*u/(L0))); # lei de movimento da fronteira
> L_AD2:=u->L0*(1+10^(-2)*sin(2*Pi*u/(L0))); # lei de movimento da fronteira
> L_AD3:=u->L0*(1+10^(-3)*sin(2*Pi*u/(L0))); # lei de movimento da fronteira
```

onde as funções L_{AD1} , L_{AD2} e L_{AD3} correspondem a L_{AD} para ϵ valendo, respectivamente, 10^{-1} , 10^{-2} e 10^{-3} . A função σ , por sua vez, pode ser implementada através dos comandos `A_tilde` e `B_tilde` descritos anteriormente. Seguindo a implementação, temos:

```
> sigma_:=(zz,q)-> if type(zz,integer) then
> return NULL else B_tilde(q,zz)/(A_tilde(q,zz)-1)fi;
```

A geração do gráfico se dá via:

```
> plot(['sigma_(z,L_AD1)',40*('sigma_(z,L_AD2)'+
> 4*f_s(b))-4*f_s(b),200*('sigma_(z,L_AD3)'+4*f_s(b))-4*f_s(b),
> -4*f_s(b)],z=1..7);
```

O que resulta na Fig. 4.5 (mostrada nas Refs. [7, 28]), na qual foram considerados três valores de amplitudes de oscilação: $\epsilon = 10^{-3}$, $\epsilon = 10^{-2}$ e $\epsilon = 10^{-1}$. Observe que a razão se aproxima mais do valor constante $-4f^{(s)}$ para $\epsilon = 10^{-3}$ do que para $\epsilon = 10^{-1}$. Com

procedimento computacional análogo, na Fig. 4.6, exibimos os gráficos de σ para $p = 3$. Notamos que, à medida que ϵ se torna menor, mais σ tende ao valor $-9f^{(s)}$. Concluimos, desta forma, que esses resultados indicam que a hipótese dada na Eq. (4.5) está correta.

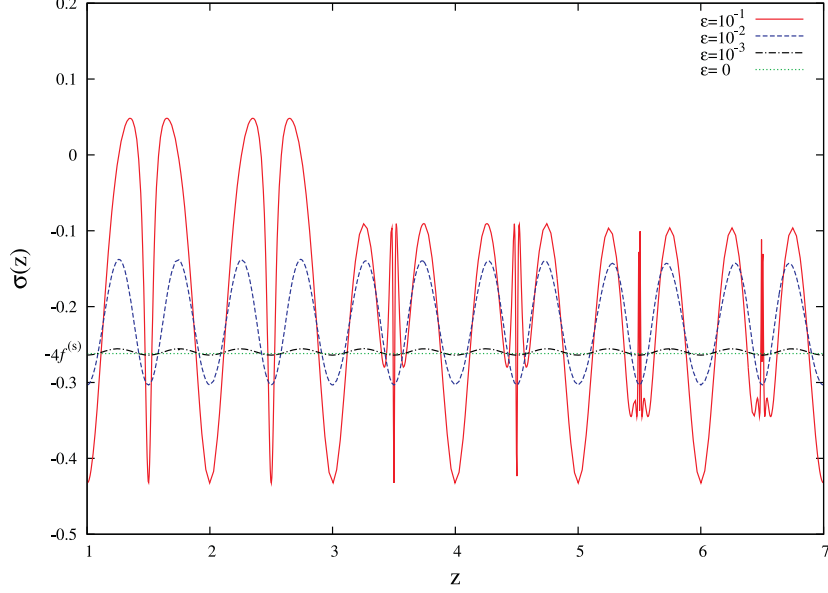


Figura 4.5: A razão $\sigma(z) = \tilde{\mathcal{B}}(z) / [\tilde{\mathcal{A}}(z) - 1]$ para a lei de movimento L_{AD} com $p = 2$. Utilizamos diferentes escalas para $\sigma(z)$ em cada caso. A linha cheia corresponde a $\epsilon = 10^{-1}$. A linha tracejada corresponde ao caso $\epsilon = 10^{-2}$, onde exibimos $40 \times [\sigma(z) + 4f^{(s)}] - 4f^{(s)}$. A linha traço-ponto corresponde à situação $\epsilon = 10^{-3}$, e exibimos no gráfico $200 \times [\sigma(z) + 4f^{(s)}] - 4f^{(s)}$. Finalmente, a linha pontilhada representa o caso $\epsilon = 0$. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ temos $\sigma(z) \rightarrow -4f^{(s)}$ para $p = 2$.

A razão $\lambda(z) = \tilde{\mathcal{A}}(z)/s(z)$, para $p = 2$, pode ser visualizada graficamente com auxílio do pacote *Dynamical Casimir*, de modo similar ao feito para σ , resultando na Fig. 4.7 (mostrada nas Refs. [7, 28]), para os seguintes valores de ϵ : $\epsilon = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\epsilon = 10^{-2}$ e $\epsilon = 10^{-1}$. Observamos que no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos $\lambda(z) \rightarrow 1$, o que indica que a hipótese dada na Eq. (4.6) está correta. Temos então que, quanto menor o valor do parâmetro ϵ , mais os resultados fornecidos por nossas expressões exatas se aproximam dos obtidos via métodos aproximados.

Agora vamos ao seguinte ponto: como nossas expressões valem para qualquer valor de

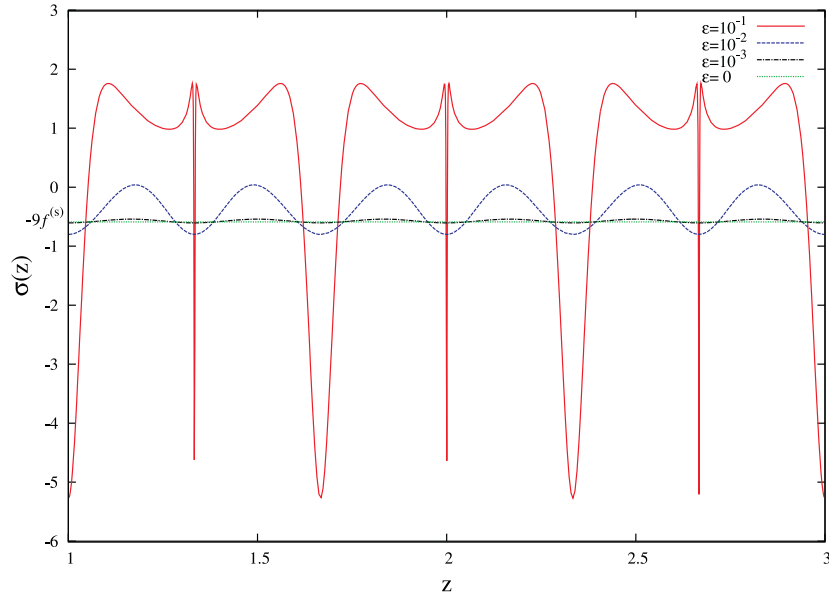


Figura 4.6: A razão $\sigma(z) = \tilde{\mathcal{B}}(z)/[\tilde{\mathcal{A}}(z) - 1]$ para a lei de movimento L_{AD} com $p = 3$. Utilizamos diferentes escalas para $\sigma(z)$ em cada caso. A linha cheia corresponde a $\epsilon = 10^{-1}$. A linha tracejada representa $\epsilon = 10^{-2}$, onde mostramos na figura $40 \times [\sigma(z) + 9f^{(s)}] - 9f^{(s)}$. A linha traço-ponto corresponde ao caso $\epsilon = 10^{-3}$ e exibimos $300 \times [\sigma(z) + 9f^{(s)}] - 9f^{(s)}$. A linha pontilhada corresponde a $\epsilon = 0$. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ temos $\sigma(z) \rightarrow -9f^{(s)}$ para $p = 3$.

ϵ , é interessante ver o que ocorre para valores maiores deste parâmetro e investigar a densidade de energia dentro de uma cavidade oscilante fora do regime de pequenas amplitudes, bem como comparar os nossos resultados com os obtidos via métodos aproximados. Para tal, vamos investigar o valor máximo da densidade de energia numa cavidade oscilante. No caso $p = 2$, a densidade de energia tem seu valor máximo nos instantes $t = N$ (N um número natural), no centro da cavidade ($x = 0.5$, sendo que $L_0 = 1$ nesta subseção). Os máximos valores das densidades de energia correspondentes às partes de vácuo e banho térmico, denominadas, respectivamente, por $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}$ e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}}$, são dadas por:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}} = \mathcal{T}_{\text{vac}}(N, 0.5), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}} = \mathcal{T}_{\text{non-vac}}(N, 0.5). \quad (4.8)$$

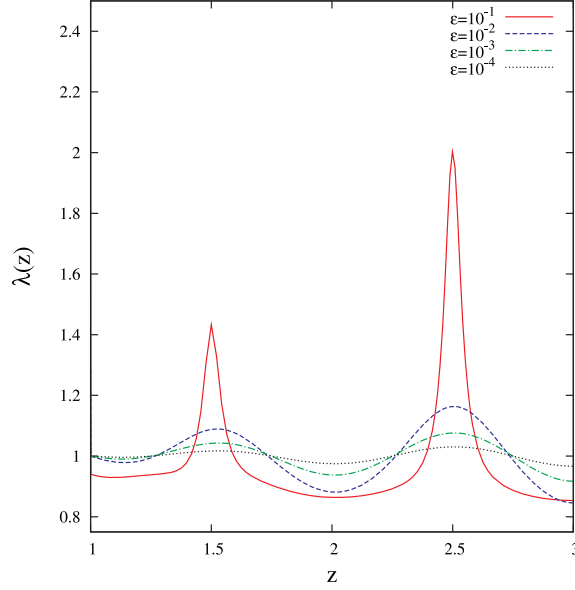


Figura 4.7: A razão $\lambda(z) = \tilde{\mathcal{A}}(z)/s(z)$ para a lei de movimento L_{AD} com caso $p = 2$. Usamos diferentes escalas para $\lambda(z)$ em cada situação. A linha cheia corresponde ao caso $\epsilon = 10^{-1}$, onde mostramos na figura $1/6 \times [\lambda(z) - 1] + 1$. A linha tracejada representa $\epsilon = 10^{-2}$. A linha traço-ponto corresponde ao caso $\epsilon = 10^{-3}$, onde exibimos na figura $1/5 \times \lambda(z)$, enquanto a linha pontilhada representa $\epsilon = 10^{-4}$, e exibimos na figura $20 \times \lambda(z)$. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ encontramos $\lambda(z) \rightarrow 1$.

De acordo com a Ref. [61], $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}$ e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}}$ são dados aproximadamente por:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)\text{max}} = 6f^{(s)}(e^{8\tau} - 1) - 2f^{(s)}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)\text{max}} = -2g^{(s)} \frac{(1 + \kappa)^2}{(1 - \kappa)^2}. \quad (4.10)$$

Na Fig. 4.8, mostramos a evolução temporal do valor máximo da densidade de energia, para a lei de movimento L_{AD2} (para a qual $\epsilon = 10^{-2}$), comparando o que é previsto pela fórmula aproximada (4.9) e o previsto pela fórmula exata (4.7). Vemos que ambas estão em excelente acordo. Na Tabela 4.1, consideramos novamente L_{AD2} , e comparamos $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}$ com $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)\text{max}}$ para tempos grandes. Observamos o crescente erro das fórmulas aproximadas em comparação com as fórmulas exatas, observando que o erro de $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)\text{max}}$ cresce mais rapidamente. Para gerar a Fig. 4.8 e a Tabela 4.1, implementamos, com auxílio do pacote *Dynamical Casimir*, os seguintes comandos:

```

> G := T->evalf(1/2*(Pi/L0^2*evalf(sum((n+0)/(exp((n+0)/T)-1),
> n=1-(2*0)..infinity)))));
> g_1:=G(1);
> g_s:=z->-g_1;
> f_s:=z->Pi/(48*L0^2);
> h_s:=z->Pi/(48*L0^2)-g_1;
> T_vac:=(t,x,q)->-h(f_s,q,t-x)-h(f_s,q,t+x);
> T_non_vac:=(t,x,q)->-g(g_s,q,t-x)-g(g_s,q,t+x);

```

Para gerar a Fig. 4.8, fazemos:

```

> plot(['T_vac(qq,1/2,L_AD2)', '((6*Pi)/(48))*(exp(8*((1/2)*(0.01)*qq*(Pi/L0)))-1)
> -2*Pi/(48*L0^2)', -2*Pi/(48*L0^2)], qq=0..20);

```

Para gerar a Tabela 4.1, aplicamos os comandos definidos para \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ para $x = 0.5$ e valores de tempo tais como mostrados na referida tabela.

Na Fig. 4.9 examinamos o caso discutido na Fig. 4.8, porém com valor maior de ϵ : $\epsilon = 10^{-1}$. O gráfico pode ser gerado via:

```

> plot(['T_non_vac(tt,1/2,s2_1)', T_max_non_vac(tt,0.1)], tt=0..3.5);

```

Neste caso, fica evidente o desacordo entre a evolução temporal exata do valor máximo da densidade de energia (4.7), e aquela prevista pela fórmula (4.9). Na Tabela 4.2, vemos o rápido crescimento nos erros percentuais nessa situação. Por outro lado, considerando valores muito pequenos de ϵ , por exemplo $\epsilon = 10^{-8}$, encontramos um excelente acordo numérico entre os métodos aproximados e numéricos, seja para tempos curtos ou longos. Por exemplo, encontramos: $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}(4 \times 10^4) \approx \mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)\text{max}}(4 \times 10^4) \approx -0.129$; $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}}(4 \times 10^4) \approx \mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)\text{max}}(4 \times 10^4) \approx 3.75$.

Dadas as Eqs. (2.56), toda a análise acima feita para casos com DD, vale para casos com NN.

4.5 Aplicações a movimentos não-oscilatórios

Conforme discutido na “Introdução geral”, há situações em que é interessante investigar o ECD para leis de movimento em que a fronteira se move com grandes deslocamentos

t	$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}$	$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)\text{max}}$	Erro percentual
10	0.864	0.856	0.870
10^2	115	113	2.16
5×10^2	0.832×10^{27}	0.761×10^{27}	8.44
10^3	0.175×10^{55}	0.148×10^{55}	15.7
	$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}}$	$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)\text{max}}$	
10	13.12	13.1	0.17
10^2	109×10^4	107×10^4	1.64
5×10^2	0.785×10^{28}	0.723×10^{28}	7.95
10^3	0.165×10^{56}	0.149×10^{42}	99.9

Tabela 4.1: $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}$ e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}}$ (para $T = 1$) calculados via método exato numérico (coluna 2) e via fórmula aproximada analítica (coluna 3), com $L_0 = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ e $p = 2$. O erro percentual $(\mathcal{T}_{[\text{vac}, \text{non-vac}]}^{\text{max}} - \mathcal{T}_{[\text{vac}, \text{non-vac}]}^{(a)\text{max}})/\mathcal{T}_{[\text{vac}, \text{non-vac}]}^{\text{max}} \times 100$ é mostrado na coluna 4.

t	$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}$	$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(a)\text{max}}$	Erro percentual
10	191×10^4	113×10^3	94.1
40	0.338×10^{26}	0.266×10^{22}	99.9
	$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}}$	$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(a)\text{max}}$	
10	971×10^4	107×10^4	88.9
40	0.171×10^{27}	0.252×10^{23}	99.9

Tabela 4.2: $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{\text{max}}$ and $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{\text{max}}$ (for $T = 1$) calculados via método exato numérico (coluna 2) e via fórmula analítica aproximada (coluna 3), com $L_0 = 1$, $\epsilon = 10^{-1}$ e $p = 2$. O erro percentual $(\mathcal{T}_{[\text{vac}, \text{non-vac}]}^{\text{max}} - \mathcal{T}_{[\text{vac}, \text{non-vac}]}^{(a)\text{max}})/\mathcal{T}_{[\text{vac}, \text{non-vac}]}^{\text{max}} \times 100$ é mostrado na coluna 4.

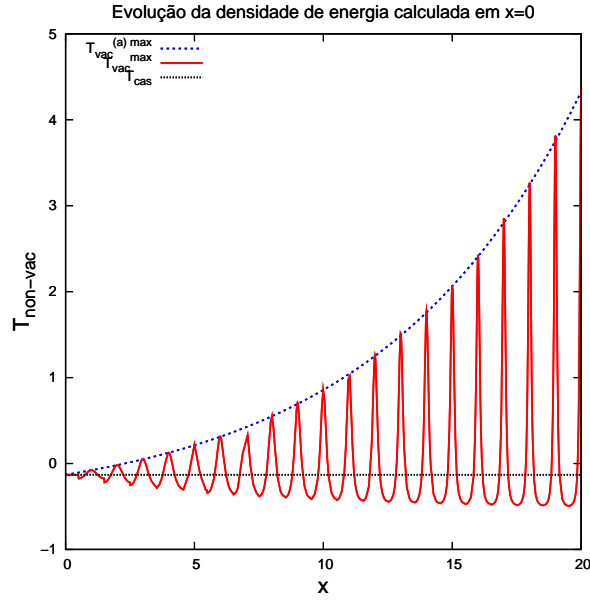


Figura 4.8: A densidade de energia \mathcal{T}_{vac}^{max} (linha sólida), dada pela Eq. (4.7) e seu crescimento com o tempo (linha tracejada), conforme a previsão feita pela Eq. (4.9), no caso $\epsilon = 10^{-2}$.

e com velocidades aproximando-se da velocidade da luz. A solução do campo, e consequentemente a força de radiação e a densidade de energia na cavidade com fronteiras obedecendo a esse tipo de trajetória estão fora do alcance dos métodos perturbativos, que requerem movimentos não-relativísticos e de pequena amplitude. Tal situação, entretanto, pode ser abordada com auxílio dos comandos do pacote *Dynamical Casimir*, que permite encontrar a solução exata do campo para uma lei de movimento relativística arbitrária. Discutiremos alguns casos a seguir.

4.5.1 Casos com uma das fronteiras em movimento num banho térmico

Consideremos aqui, o seguinte exemplo. O campo obedecendo à condição mista (DN ou ND) para uma lei de movimento relativística dada pela Eq. (2.67) (que aqui chamaremos L_{FDH}), com comprimento inicial da cavidade $L_0 = 1$ e na presença de um banho térmico à temperatura $T = 1$. Neste exemplo, o campo na cavidade obedece à condição não-mista

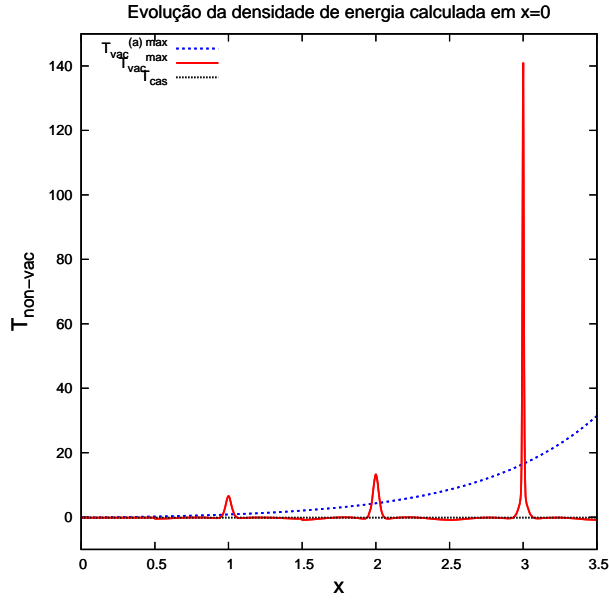


Figura 4.9: A densidade de energia \mathcal{T}_{vac}^{max} (linha cheia), dada pela Eq. (4.7) e seu crescimento no tempo $t = x$ previsto pela Eq. (4.9). Consideramos $\epsilon = 10^{-1}$.

(DD ou NN), também para os mesmos parâmetros de comprimento inicial da cavidade e temperatura. Para calcular a força total que atua sobre a fronteira em movimento, tal como mostrado na Fig.2.3, devemos implementar as funções $g^{(s)} = -\mathcal{G}(T, \beta, L_0)$ (Eq. 2.59) e a função $f^{(s)}$ (Eq. 2.23) que constitui a função $h^{(s)} = f^{(s)} + g^{(s)}$ (que será nomeada como h_{s_mixed} para o caso misto e $h_{s_non_mixed}$ para o caso não-misto). O tensor energia momentum para ambos os casos também serão renomeados para \mathcal{T}_{non_mixed} e \mathcal{T}_{mixed} . De modo que implementamos os seguintes comandos:

```
> L0:=1;# comprimento inicial da cavidade
> L_FDH:=t->L0+0.1*ln(cosh(t));# lei de movimento
> h_s_mixed:=f_s(1/2) - G_T(1,1/2,1); # h estático; misto
> h_s_non_mixed:=f_s(0) - G_T(1,0,1); # h estático; não-misto
> T_mixed:=(t,x)->-h(h_s_mixed,L_FDH,t-x)
> -h(h_s_mixed,L_FDH,t+x);# dens. energia; caso misto
> T_non_mixed:=(t,x)->-h(h_s_non_mixed,L_FDH,t-x)
> -h(h_s_non_mixed,L_FDH,t+x);# dens. energia; caso não-misto
```

Sendo que as funções auxiliares são:

```
> f_s:=(beta)->evalf(Pi/(24*L0^2)*(1/2
> -3*(beta-beta^2)));
> G_T:=(T,beta,L)->Pi/(2*L^2)*sum((n+beta)/
> (exp((n+beta)*Pi/(L*T))-1),n=1-2*beta..infinity);
```

Usando o pacote *Dynamical Casimir*, o comportamento da função pode ser visualizado via (ver Fig. 2.3 e Ref. [5]):

```
> plot('T_mixed(t,q(t))',t=0..10);
```

Para este exemplo, mostramos um gráfico (Fig. 4.10) que compara a força total atuando sobre a fronteira em movimento, tanto para o caso misto quanto para o caso não-misto, na presença de um banho térmico. Para gerá-lo, fazemos

```
> plot(['T_mixed(t,q(t))', 'T_non_mixed(t,q(t))'],t=0..10);
```

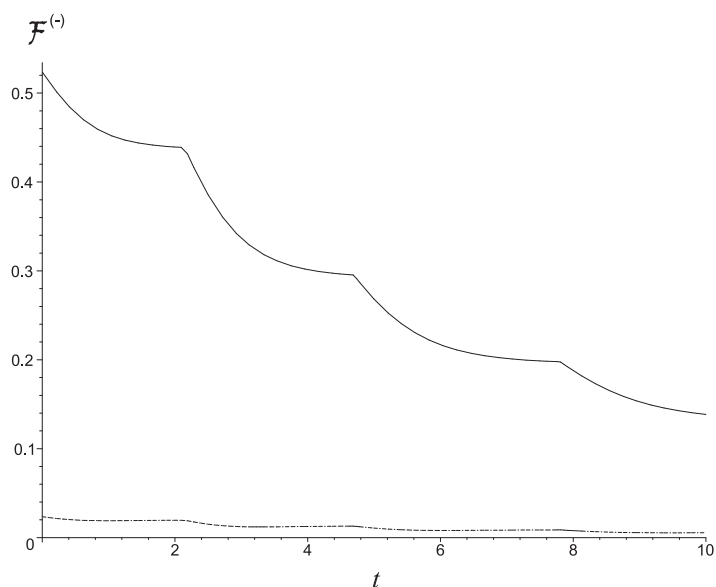


Figura 4.10: O comportamento da força quântica $\mathcal{F}^{(-)} = \mathcal{F}_{vac}^{(-)} + \mathcal{F}_T^{(-)}$ sobre a fronteira em movimento numa cavidade com comprimento inicial $L_0 = 1$ e banho térmico à temperatura $T = 1$, para o caso misto (linha sólida) e o caso não-misto (linha tracejada).

4.5.2 Cavidade com duas fronteiras em movimento no vácuo

Vamos estudar o caso de uma cavidade com as duas fronteiras em movimento sob condição de Dirichlet em ambas as fronteiras, com o estado inicial do campo sendo o vácuo. Calculamos a força total sobre a fronteira da direita $\mathcal{F}_R^{(tot)}$ (Eq. 3.22). Ambas as leis de movimento são relativísticas, definidas nas Eqs. (3.24a) e (3.24b) (aqui definidas como l_{FDH} e r_{FDH}). O tensor densidade energia-momentum dentro cavidade Eq. (3.3) e da força fora da cavidade Eq. (3.19), aqui renomeados como T_{2F} e T_{RF} . Para obter os gráficos exibidos nas Fig. 3.5 e Fig. 3.6 usamos as seguintes linhas de comando:

```
> L0:=1;# length of cavity
> l_FDH:=u->kappa[L]*ln(cosh(u));# law of motion of the left
> r_FDH:=u->L0+kappa[R]*ln(cosh(u));# law of motion of the right
> T_2F:=(u,v)->-fG(u+v)-fF(u-v);# in cavity
> T_RF:=q->(1+D(q)(t)^2)*(1/(2*Pi))*(D(q)(t)*'@@'(D,2)(q)(t)^2)
> /(1-D(q)(t)^2)^4+1/(6*Pi)*('@@'(D,3)(q)(t))/(1-D(q)(t)^2)^3);# out cavity
```

O comando para visualizar o gráfico na Fig. 3.5 em que vemos a força total, $\mathcal{F}_R^{(tot)}$, na Eq. (3.22), e a força dentro da cavidade, \mathcal{F}_R , na Eq. 3.21, sendo que a cavidade está em expansão e os parâmetros κ_R e κ_L obedecem a seguinte relação: $\kappa_R = -\kappa_L = 0.1$, é visualizado a seguir:

```
> kappa[R]:=0.1;
> kappa[L]:=-kappa[R];
> plot(['T_2F(t,r(t))'+T_RF(r),'T_2F(t,r(t))'],t=0..3);
```

Para o caso em que a cavidade está se movendo, mas mantém constante o seu comprimento, com parâmetros κ_R e κ_L obedecendo a seguinte relação $\kappa_R = \kappa_L = 0.1$, o comando para gerar o gráfico na Fig. 3.6 permanece o mesmo, devendo apenas tomar o cuidado para redefinir a constante κ_L no programa, como podemos visualizar:

```
> kappa[R]:=0.1;
> kappa[L]:=kappa[R];
> plot(['T_2F(t,r(t))'+T_RF(r),'T_2F(t,r(t))'],t=0..3);
```


4.5.3 Discussão da precisão dos resultados

Conforme já discutido, as fórmulas (2.43), (2.44), (2.49) e (2.50) são formalmente exatas, mas para obtermos valores numéricos para \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ precisamos calcular as funções $t_i(z)$, que são dadas pelas Eqs. (2.46) e (2.47). Para leis de movimentos do tipo (4.1) (e em geral) nós conseguimos apenas soluções numéricas de (2.46) e (2.47). Para um dado valor de z , a Eq. (2.46) pode ser resolvida numericamente e o resultado para t_1 naturalmente tem um certo limite de exatidão. Quando t_1 for usado na Eq. (2.46) para calcular t_2 , a solução de $t_2 + L(t_2) = t_1 - L(t_1)$ pode levar a resultados com menos exatidão do que o resultado anterior obtido para t_1 , e sucessivos cálculos dos valores restantes de t_i via equações (2.47) (para $i = 2, 3, 4, \dots$) podem gerar um resultado final para t_n com uma pobre exatidão, se comparada com a exatidão do valor inicial para t_1 . Entretanto, quando inserimos os valores numéricos para t_i nas Eqs. (2.43), (2.44), (2.49) e (2.50), os valores finais de \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ podem ter sua exatidão diminuídas muito mais. Para tratar desta questão e controlar a exatidão final dos resultados, fizemos cálculos no sistema computacional Maple [105], que nos permitiu controlar o número de dígitos usando cálculos com números de ponto flutuante. Para obter um valor numérico final para \mathcal{T}_{vac} ou $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$, realizamos vários cálculos independentes, usando o pacote *Dynamical Casimir* [9]. Em cada cálculo, tomamos todas as soluções numéricas com um certo número de dígitos. Consideramos de 3 a 100 dígitos e observamos que a convergência nos resultados com o número de dígitos relacionados (em relação ao número de dígitos considerado para a solução de (2.46)) está aumentando. Isto nos permitiu apontar quais são os dígitos exatos (a exatidão) em nossos resultados. Por exemplo, os valores de $\mathcal{T}_{\text{vac}}(10, 0.5)$ ($L_0 = 1, p = 2$) realizados com 3, 4, 5, 6, 10 e 20 dígitos são dados, respectivamente, por: 0.856, 0.8638, 0.86364, 0.863704, 0.8637005768 e 0.86370057587773139184. Analisando também a convergência de resultados até a exatidão de 100 dígitos podemos obter uma exatidão final de 10 dígitos ou mais, mas aqui, limitamos a mostrar apenas o resultado como $\mathcal{T}_{\text{vac}}(10, 0.5) \approx 0.864$, onde os primeiros dois dígitos podem ser considerados como dígitos exatos.

4.6 Comentários finais do capítulo 4

Usando o pacote *Dynamical Casimir*, podemos reproduzir vários resultados encontrados na literatura, incluindo (nos limites apropriados) aqueles aproximados encontrados via abordagens diferentes, o que reforça tanto a validade do programa quanto do método de cálculo no qual o programa se baseou. Por exemplo, considerando o banho térmico como estado inicial do campo numa cavidade com um espelho em movimento num espaço-tempo bidimensional, encontramos para pequenas amplitudes de oscilações, um bom acordo entre os resultados exatos e aproximados para os valores de máximo da densidade de energia, como mostrados na Tabela 4.1. Este acordo fortalece a validade das aproximações analíticas obtidas na referência [61], e também reforça a validade do pacote *Dynamical Casimir*. Para grandes valores de ϵ , como mostrados na tabela 4.2, significantes discrepâncias surgem, e crescem com o tempo principalmente a parte térmica da densidade de energia. Isto é esperado, sabendo que as fórmulas analíticas são válidas para $|\epsilon| \ll 1$. Então, o pacote *Dynamical Casimir* dá resultados para grandes amplitudes, que estão fora do alcance das abordagens perturbativas encontradas na literatura. Observamos que, embora tenhamos exemplificado esta aplicação para o caso de vácuo e para o caso térmico (os casos mais comuns encontrados em literaturas), o pacote pode levar em conta qualquer estado inicial do campo, bastando para isso o usuário regular o valor da função $h(s)$ para este estado.

Parte II

Emaranhamento

Capítulo 5

Emaranhamento

Para tratar do segundo tema desta tese, faremos neste capítulo uma abordagem do formalismo de estados vestidos desenvolvido em [112], que será aplicado aqui neste trabalho. Este formalismo deu origem a outros trabalhos [80, 81, 82, 83, 112, 113]. Em 2001, a técnica dos estados vestidos foi aplicada ao sistema de um átomo, na aproximação de um oscilador harmônico acoplado a um campo dentro de uma cavidade esférica perfeitamente refletora de raio R [112]. Neste trabalho, foi apresentado o estudo do comportamento deste sistema no espaço livre, entendido como o limite em que $R \rightarrow \infty$. Com a introdução de coordenadas vestidas, são definidos os estados vestidos que permitem uma descrição unificada e não-perturbativa do processo de radiação dentro da cavidade nos limites de pequena e grande cavidade, com acoplamento forte ou fraco do átomo com o campo [80]. Como é sabido a solução das equações de movimento em Teorias de Campo quando campos acoplados são considerados não é, de longe, um problema fácil a ser considerado. De fato, apenas alguns métodos são capazes de resolver exatamente tal problema, e ainda assim para poucos casos especiais. Consideremos por exemplo uma partícula carregada descrita por um campo $\psi(x)$ interagindo com um campo neutro (por exemplo o campo eletromagnético) $\phi(x)$, do qual por simplicidade omitimos todos os índices tensoriais; esta interação é descrita através de certo acoplamento $f(g; \psi, \phi)$ (em geral este acoplamento é não linear), onde g é uma constante de acoplamento, num sentido geral a carga da partícula. A solução perturbativa é obtida por meio da introdução de campos “nús” não interagentes $\psi_0(x)$ e $\phi_0(x)$, com os quais os quanta “nús” da matéria e do campo

estão associados, a interação sendo introduzida ordem a ordem nas potências da constante de acoplamento na expansão perturbativa. Fisicamente, o efeito introduzido perturbativamente pela interação pode ser visto pictoricamente da seguinte maneira: no caso da teoria eletromagnética podemos dizer que uma partícula que interage com o campo, na linguagem da teoria quântica de campos, carrega consigo uma “nuvem” de fótons que são continuamente emitidos e absorvidos pela partícula carregada, e portanto espera-se que a força atuante sobre a partícula devido a este efeito contribua para a inércia, ou em outras palavras, para a massa da partícula [114]. Experimentalmente, a massa medida leva em conta este efeito, e quando incluímos esta contribuição nas equações de movimento da teoria podemos ter uma interpretação mais precisa a respeito da massa da partícula; este procedimento é conhecido como a renormalização da massa. Este procedimento indica que a massa “nua” m , originalmente introduzida na Lagrangeana não tem significado físico, mas sim $m + \delta m = m_{\text{exp}}$, onde δm é a contribuição devido à interação entre a partícula e o campo. Note que, em geral, tanto m quanto δm são infinitos (com sinais contrários) de tal modo que m_{exp} , a massa física, é finita. O presente capítulo derivou do artigo [10].

5.1 Problema de um átomo acoplado ao campo escalar

Iniciamos a descrição do método, considerando um átomo, que sob certas condições pode ser aproximado por um oscilador harmônico, tendo frequência *não-vestida* ou “nua” ω_0 , linearmente acoplado ao campo descrito por N ($N \rightarrow \infty$) outros osciladores, com frequências ω_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Todo o sistema está contido em uma cavidade esférica perfeitamente refletora de raio R , o espaço livre correspondendo ao limite $R \rightarrow \infty$. Daqui em diante, nos referiremos ao oscilador harmônico como *átomo*, para distinguí-lo dos modos harmônicos do campo.

Consideramos o sistema descrito pela Lagrangeana,

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 q_0^2 + \int \left[\frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \hbar \sqrt{8\pi g c} q_0 \Phi \delta^3(\mathbf{x}) \right] d^3\mathbf{x} \quad (5.1)$$

onde g é a constante de acoplamento; a escolha destas constantes no termo de interação asseguram a dimensão correta da Lagrangeana, seja no sistema de unidades naturais ou

no MKS. Seguindo o formalismo canônico, obtemos os momentos canônicos conjugados do campo e do átomo:

$$\Pi^\nu(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial(\hbar\partial^\nu\Phi)} = \hbar\partial^\nu\Phi \quad (5.2)$$

e

$$p_0(t) = \frac{\partial L}{\partial(\dot{q}_0)} = \dot{q}_0; \quad (5.3)$$

em seguida obtemos a Hamiltoniana

$$H = \int \left[\frac{\hbar^2}{2c^2} (\partial_t\Phi)^2 - \frac{\hbar^2}{2} (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}p_0^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2q_0^2 - \hbar\sqrt{8\pi gc}q_0\Phi\delta^3(\mathbf{x}) \right] d^3\mathbf{x}. \quad (5.4)$$

Como o campo está confinado numa cavidade esférica, o mesmo deve satisfazer à condição de fronteira $\Phi(t, \mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{R}} = 0$; então expandimos o campo da seguinte forma:

$$\Phi = c \sum_k q_k(t) \phi_k(\mathbf{x}), \quad (5.5)$$

onde as funções ϕ_k obedecem às relações de ortogonalidade:

$$\int \phi_k(\mathbf{x}) \phi_j^*(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{\delta_{kj}}{\hbar^2} \quad (5.6)$$

$$\int \nabla\phi_k(\mathbf{x}) \nabla\phi_j^*(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = -\frac{\omega_j^2}{\hbar^2 c^2} \delta_{kj}. \quad (5.7)$$

Os coeficientes da expansão do campo podem ser obtidos com o uso destas relações:

$$\begin{aligned} \int \Phi\phi_j^*(\mathbf{x}) d^3x &= c \sum_k q_k(t) \int \phi_k(\mathbf{x}) \phi_j^*(\mathbf{x}) d^3x \\ &= c \sum_k q_k(t) \frac{\delta_{kj}}{\hbar^2} \\ &= \frac{c}{\hbar^2} q_j(t) \\ q_j(t) &= \hbar^2 c^{-1} \int \Phi\phi_j(\mathbf{x}) d^3x. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Substituindo (5.8) em (5.5) obtemos também a relação de completudeza:

$$\begin{aligned} \Phi &= \hbar^2 c^{-1} \int \Phi \left[c \sum_k \phi_k(\mathbf{y}) \phi_k(\mathbf{x}) \right] d^3y \\ &= \int \Phi \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d^3y, \end{aligned}$$

$$\sum_k \phi_k(\mathbf{y}) \phi_k(\mathbf{x}) = \frac{\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\hbar^2} \quad (5.9)$$

onde a função ϕ_k obedece à equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \phi_k(\mathbf{x}) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} \phi_k(\mathbf{x}). \quad (5.10)$$

Esta imposição requer que os modos do campo, as frequências ω_k , sejam harmônicos esféricos, obedecendo a simetria proposta para o problema. Resolvendo a equação da onda para o campo escalar não massivo, separamos a parte radial da parte temporal de acordo com a Eq. (5.5). Como supomos o problema de simetria esférica, o campo não depende das coordenadas angulares, e deste modo a parte radial do campo obedece ao laplaciano, que em coordenadas esféricas $|\mathbf{x}| = r$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \phi_k(r) \right) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} \phi_k(r), \quad (5.11)$$

cuja solução é

$$\phi_k(r) = \frac{1}{\hbar \sqrt{2\pi R}} \frac{\sin\left(\frac{\omega_k r}{c}\right)}{r}, \quad (5.12)$$

onde

$$\omega_k = k \frac{\pi c}{R}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

e no limite em que $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi_k(r) = \frac{\omega_k}{\hbar c \sqrt{2\pi R}}. \quad (5.14)$$

De modo que para a expressão final do campo (5.5) temos:

$$\Phi(t, r) = c \sum_k^N q_k(t) \frac{\sin\left(\frac{\omega_k r}{c}\right)}{\hbar r \sqrt{2\pi R}}. \quad (5.15)$$

Substituindo a expansão do campo (5.5) em (5.4) e tomando o limite de $r \rightarrow 0$, para usar a relação (5.14), podemos escrever a Hamiltoniana, denotando por $q_0(t)$ ($p_0(t)$) e $q_k(t)$ ($p_k(t)$) as coordenadas (momenta) associadas com o átomo e aos osciladores do campo, respectivamente:

$$H = \frac{1}{2} \left[p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \right] - q_0 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_k, \quad (5.16)$$

onde o limite $N \rightarrow \infty$ será tomado posteriormente; redefinimos também a constante de acoplamento entre o oscilador e os modos do campo introduzindo a quantidade:

$$\eta = \sqrt{\frac{4gc}{R}} = \sqrt{\frac{4g\Delta\omega}{\pi}}, \quad (5.17)$$

onde temos o intervalo entre as frequências do campo é dado por $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \pi c/R$ e g sendo a constante de acoplamento com dimensão de frequência. A Hamiltoniana (5.16) é diagonalizada por uma transformação canônica das coordenadas e momenta *não-vestidos* para as coordenadas e momenta normais, conhecidas em mecânica clássica como transformação de ponto, dada por:

$$q_\mu = \sum_{r=0}^N t_\mu^r Q_r, \quad p_\mu = \sum_{r=0}^N t_\mu^r P_r, \quad (5.18)$$

onde $\mu = (0, \{k\})$, $k = 1, 2, \dots, N$, e $r = 0, \dots, N$; os elementos t_μ^r são elementos de uma matriz ortonormal $T = (t_\mu^r)$. Os sub-índices $\mu = 0$ e $\mu = k$ referem-se, respectivamente, ao átomo e aos modos harmônicos do campo enquanto os índices r referem-se aos modos normais. Com (5.18), escrevemos (5.16) como (ver apêndice B):

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2), \quad (5.19)$$

onde Ω_r são as frequências normais que correspondem aos modos de oscilação coletivos *estáveis* do sistema acoplado (em física de estado sólido, estes modos normais correspondem aos fônons da rede cristalina).

Usando as transformações de coordenadas $q_\mu = \sum_r t_\mu^r Q_r$ nas equações de movimento obtidas a partir da Hamiltoniana (5.16):

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = \eta \sum_{k=1}^N \omega_k q_k, \quad (5.20)$$

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \eta \omega_k q_0, \quad (5.21)$$

e explicitando o uso da condição de normalização,

$$\sum_{\mu=0}^N (t_\mu^r)^2 = 1, \quad (5.22)$$

obtemos,

$$t_k^r = \frac{\eta\omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r, \quad (5.23)$$

$$t_0^r = \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.24)$$

No apêndice B, chegamos à condição (B.20), que pode ser escrita como:

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2\omega_k^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (5.25)$$

O lado direito da equação (5.25) diverge no limite $N \rightarrow \infty$. A Equação (5.25) tem $N + 1$ soluções Ω^2 , correspondendo aos modos normais do sistema. Pode-se mostrar [112] que, se $\omega_0^2 > \Omega_r^2$, todas as soluções possíveis para Ω^2 são positivas, fisicamente significando que o sistema oscila harmonicamente em todos os modos. Por outro lado, se $\omega_0^2 < \Omega_r^2$, uma das soluções é negativa e então existe uma configuração não-estável. Num contexto diferente, esta solução está relacionada à existência de estados ligados no modelo de Lee–Friedrichs. Isto é devido ao fato de que, neste caso, esta solução implica num comportamento não harmônico para os autoestados (“runaway solution”). Esta solução é considerada na Ref. [115] no contexto de um modelo para descrever qualitativamente a existência de estados ligados em física de partículas.

Para continuar, definimos então um contra-termo $\delta\omega^2 = N\eta^2$ (por simplicidade, suprimimos momentaneamente o índice das frequências normais, $\Omega_r = \Omega$); desta forma, podemos escrever:

$$\omega_0^2 - \delta\omega^2 - \Omega^2 = \eta^2\Omega^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega^2}. \quad (5.26)$$

Aqui, apenas consideramos a situação em que todos os modos normais são harmônicos, correspondendo ao primeiro caso acima, $\omega_0^2 > \Omega^2$, e definimos assim a frequência *renormalizada*:

$$\bar{\omega}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (\omega_0^2 - N\eta^2), \quad (5.27)$$

seguindo o trabalho pioneiro da Ref. [116]. No limite $N \rightarrow \infty$, a Eq. (5.26) torna-se:

$$\bar{\omega}^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2}. \quad (5.28)$$

Vemos que, no limite $N \rightarrow \infty$, o procedimento acima é exatamente o análogo da renormalização da massa em Teoria Quântica de Campos: a adição de um contra-termo $-N\eta^2 q_0^2$ permite-nos compensar o infinito de ω_0^2 de tal maneira a deixar a quantidade finita, fisicamente significativa, que chamaremos de frequência renormalizada $\bar{\omega}$.

Em (5.28), as frequências do campo ω_k podem ser escritas como $\omega_k = kc\pi/R$ e $\Omega = uc\pi/R$, de modo que, usando a identidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - u^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{\pi}{u} \cot(\pi u) \right], \quad (5.29)$$

a Eq. (5.28) pode ser escrita na forma fechada:

$$\cot\left(\frac{R\Omega}{c}\right) = \frac{\Omega}{2g} + \frac{c}{R\Omega} \left(1 - \frac{R\bar{\omega}^2}{2gc}\right). \quad (5.30)$$

Os elementos da matriz de transformação do sistema átomo-campo para eixos principais, são obtidos em termos das quantidades físicas significativas Ω_r , $\bar{\omega}$, após uma longa manipulação algébrica [112] (ver apêndice C); escrevemos:

$$t_0^r = \frac{\eta\Omega_r}{\sqrt{(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{\eta^2}{2}(3\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + 4g^2\Omega_r^2}}, \quad (5.31)$$

$$t_k^r = \frac{\eta\omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r. \quad (5.32)$$

Deste ponto em diante, consideremos o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$), de modo que os autoestados do nosso sistema, $|n_0, n_1, n_2, \dots\rangle$, são representados pelas autofunções normalizadas, em termos das coordenadas normais $\{Q_r\}$:

$$\langle Q | n_0 n_1 \dots; t \rangle \equiv \phi_{n_0 n_1 \dots}(Q, t) = \prod_{s=0}^N \phi_{n_s}(Q_s, t) \quad (5.33)$$

$$\phi_{n_s}(Q_s, t) = \left(\frac{\Omega_s}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_{n_s}(\sqrt{\Omega_s} Q_s)}{\sqrt{2^{n_s} n_s!}} \Gamma_0(Q) e^{-iE_{n_0 n_1 \dots} t}, \quad (5.34)$$

onde H_{l_s} designa o l_s -ésimo polinômio de Hermite, Γ_0 é a autofunção normalizada do vácuo,

$$\Gamma_0(Q) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{r=0}^N \Omega_r Q_r^2\right\} \quad (5.35)$$

e $E_{n_0 n_1 \dots}$ sendo o autovalor da energia da Hamiltoniana diagonalizada (5.19), contendo a contribuição do vácuo, dada por:

$$E_{n_0 n_1 n_2 \dots} = \sum_{r=0}^N (n_r + \frac{1}{2}) \Omega_r. \quad (5.36)$$

Em seguida, definimos o conjunto de coordenadas “vestidas” (q'_0, q'_i) associadas ao átomo e ao campo “vestidos”. Estas coordenadas irão tratar da descrição não-perturbativa do sistema átomo-campo. As condições gerais que as coordenadas vestidas devem satisfazer, levando em conta que o sistema é rigorosamente descrito pelas coordenadas normais Q_r , são as seguintes:

- Devido ao caráter linear do problema, as coordenadas q'_0 e q'_i devem ser funções lineares das coordenadas normais Q_r .
- Elas devem permitir a construção de configurações ortogonais correspondendo à separação do sistema em duas partes, o átomo e o campo vestidos.
- O conjunto dessas configurações deve conter uma configuração básica que coincida com o estado fundamental, Γ_0 .

Esta última condição restringe a transformação linear entre as coordenadas vestidas q_μ ($\mu = 0, i$) e as coordenadas normais Q_r que deve manter invariante a forma quadrática:

$$\sum_r \Omega_r Q_r^2 = \bar{\omega}(q'_0)^2 + \sum_i \omega_i (q'_i)^2. \quad (5.37)$$

Com isso as novas coordenadas q'_μ que descrevem as configurações do átomo e dos quanta vestidos do campo satisfazem à seguinte relação com as coordenadas normais Q_r :

$$\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu = \sum_r t_\mu^r \sqrt{\Omega_r} Q_r, \quad (5.38)$$

onde $\bar{\omega}_\mu = \{\bar{\omega}_0, \omega_i\}$. Em termos das coordenadas vestidas (q'_0, q'_i) , definimos para um instante fixo $t = 0$, o estado *vestido*, $|\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots\rangle$ por meio de um conjunto completo de funções ortonormais [112]:

$$\langle q' | \kappa_0 \kappa_1 \dots; 0 \rangle \equiv \psi_{\kappa_0 \kappa_1 \dots}(q', 0) = \prod_{\mu=0}^N \psi_{\kappa_\mu}(q'), \quad (5.39)$$

$$\psi_{\kappa_\mu}(q') = \left(\frac{\omega_\mu}{\pi}\right)^{1/4} (2^{\kappa_\mu} \kappa_\mu!)^{-1/2} H_{\kappa_\mu}(\sqrt{\omega_\mu} q'_\mu) \Gamma_0(q') \quad (5.40)$$

onde μ denota coletivamente, para $\mu = 0$ o átomo vestido e $\mu = i = 1, 2, 3, \dots$ para os modos do campo. De (5.37), vemos que Γ_0 em (5.40) permanece inalterado, ou seja,

$$\Gamma_0(q') \propto \Gamma_0(Q). \quad (5.41)$$

Desta forma, cada função $\psi_{\kappa_0 \kappa_1 \dots}(q')$ descreve um estado no qual o átomo vestido q'_μ está no κ_μ -ésimo estado excitado.

Em termos das coordenadas não-vestidas, as coordenadas vestidas são expressas como:

$$q'_\mu = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} q_\nu, \quad (5.42)$$

onde

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\omega_\mu}} \sum_r t_\mu^r t_\nu^r \sqrt{\Omega_r}. \quad (5.43)$$

Note que as coordenadas vestidas, assim como as coordenadas normais, são objetos coletivos, entretanto a transformação entre estas coordenadas (5.38) é não ortogonal, conseqüentemente a Hamiltoniana em termos das coordenadas renormalizadas é não-diagonal. Vamos, agora, considerar um estado particular $|\Gamma_1^\mu(0)\rangle$ no instante $t = 0$, representado pela função de onda $\psi_{00\dots 1(\mu)0\dots}(q')$. Esta configuração descreve o estado em que *apenas* o μ -ésimo oscilador vestido está no primeiro nível excitado, sendo que todos os outros permanecem no estado fundamental. A evolução temporal do estado $|\Gamma_1^\mu\rangle$ é dada por (ver demonstração no Apêndice D):

$$|\Gamma_1^\mu(t)\rangle = \sum_\nu f_{\mu\nu}(t) |\Gamma_1^\nu(0)\rangle, \quad (5.44)$$

onde os índices $\mu, \nu = (0, \{i\})$, referem-se, respectivamente, átomo e aos modos do campo vestidos, e a quantidade $f_{\mu\nu}(t)$ é dada por,

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_s t_\mu^s t_\nu^s e^{-i\Omega_s t}. \quad (5.45)$$

Além disso, pode-se mostrar que para qualquer μ (ver apêndice D),

$$\sum_\nu |f_{\mu\nu}(t)|^2 = 1, \quad (5.46)$$

o que permite interpretar os coeficientes $f_{\mu\nu}(t)$ como amplitudes de probabilidade; por exemplo, $f_{00}(t)$ é a amplitude de probabilidade, de que se o átomo vestido estava excitado no primeiro nível no instante $t = 0$, ele permaneça excitado no instante t , enquanto $f_{0i}(t)$ representa a amplitude de probabilidade, de que nas mesmas condições iniciais, o i -ésimo modo harmônico vestido do campo esteja no instante t excitado no primeiro nível. Devido à relação linear (5.38) entre as coordenadas vestidas e normais a função de onda do estado vestido (5.39) também pode ser escrita como uma combinação linear do conjunto completo das auto-funções ortonormais em termos das variáveis Q_r (no instante $t = 0$):

$$\psi_{l_0 l_1 \dots}(q', 0) = \sum_{\kappa_0 \kappa_1 \dots} T_{l_0 l_1 \dots}^{\kappa_0 \kappa_1 \dots} \phi_{\kappa_0 \kappa_1 \dots}(Q, 0), \quad (5.47)$$

onde os elementos da matriz $T_{\kappa_0 \kappa_1 \dots}^{l_0 l_1 \dots}$ são dados por:

$$T_{\kappa_0 \kappa_1 \dots}^{l_0 l_1 \dots} = \int dQ \psi_{\kappa_0 \kappa_1 \dots}(q') \phi_{l_0 l_1 \dots}^*(Q). \quad (5.48)$$

Estes coeficientes podem ser calculados para um estado vestido no qual apenas o κ_μ -ésimo oscilador vestido esteja no N -ésimo nível excitado, com todos os outros no estado fundamental; obtendo [112]:

$$T_{00 \dots \mu(k)00 \dots}^{l_0 l_1 \dots} = \left(\frac{N!}{l_0! l_1! \dots} \right)^{\frac{1}{2}} (t_\mu)^{l_0} (t_\mu^1)^{l_1} \dots, \quad (5.49)$$

onde $l_0 + l_1 + \dots = N$. Em [112] o estudo foi feito para $N = 1$ e $N = 2$, casos em que somente o átomo vestido está excitado inicialmente e os demais osciladores do campo estão no estado fundamental.

5.2 Sistema de dois átomos dentro de uma cavidade

Consideramos um sistema formado por dois átomos, A e B , cada qual individualmente acoplado ao campo, como descrito no seção anterior. O sistema é um sistema bipartite, $S = A \cup B$ em que os subsistemas A e B correspondem, respectivamente, aos átomos vestidos no sentido da seção anterior. O sistema completo está contido em uma esfera de raio R . Para cada átomo (subsistema) escrevemos a Hamiltoniana H_λ , onde o sub-índice λ indica o átomo A ou B :

$$H_\lambda = \frac{1}{2} \left[p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \right] - q_\lambda \sum_{k=1}^N \eta_\lambda \omega_k q_k, \quad (5.50)$$

onde $\eta_\lambda = \sqrt{4g_\lambda\Delta\omega/\pi}$ e g_λ é a constante de acoplamento entre o átomo λ e o campo. Como na seção anterior, a Hamiltoniana (5.50) pode ser diagonalizada por meio da transformação de ponto,

$$q_{\mu_\lambda} = \sum_{r_\lambda=0}^N t_{\mu_\lambda}^{r_\lambda} Q_{r_\lambda}, \quad p_{\mu_\lambda} = \sum_{r_\lambda=0}^N t_{\mu_\lambda}^{r_\lambda} P_{r_\lambda}, \quad (5.51)$$

onde $\mu_\lambda = (\lambda, k)$, $k = 1, 2, \dots$ e $r_\lambda = 0, \dots, N$. Os elementos $t_{\mu_\lambda}^{r_\lambda}$ pertencem à matriz ortonormal T cujos índices $\mu = \lambda$ e $\mu = k$ referem-se respectivamente ao átomo λ (A ou B) e aos modos do campo. Os sub-índices das coordenadas coletivas r_λ referem-se aos modos normais. Então, para cada um dos subsistemas, tomamos a Hamiltoniana diagonalizada em termos dos momenta e coordenadas normais:

$$H_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{r_\lambda=0}^N (P_{r_\lambda}^2 + \Omega_{r_\lambda}^2 Q_{r_\lambda}^2), \quad (5.52)$$

mais uma vez identificando as frequências normais, Ω_{r_λ} , que correspondem às oscilações coletivas do sistema formado pelo átomo λ (A ou B) interagindo com seu campo próprio. Com o uso da transformação entre as coordenadas (5.51) e a condição de normalização $\sum_{\mu_\lambda} (t_{\mu_\lambda}^{r_\lambda})^2 = 1$ obtemos, como na seção anterior, os elementos de matriz:

$$t_k^{r_\lambda} = \frac{\eta_\lambda \omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_{r_\lambda}^2} t_0^{r_\lambda}, \quad (5.53)$$

$$t_\lambda^{r_\lambda} = \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_\lambda^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_{r_\lambda}^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.54)$$

O procedimento para renormalização da frequência é idêntico ao procedimento tomado no seção anterior; desta forma, portanto, apresentamos o elemento de matriz (5.54) no limite de $N \rightarrow \infty$:

$$t_\lambda^{r_\lambda} = \frac{\eta_\lambda \Omega_{r_\lambda}}{\sqrt{(\Omega_{r_\lambda}^2 - \bar{\omega}_\lambda^2)^2 + \frac{\eta_\lambda^2}{2} (3\Omega_{r_\lambda}^2 - \bar{\omega}_\lambda^2) + 4g_\lambda^2 \Omega_{r_\lambda}^2}}, \quad (5.55)$$

onde a frequência renormalizada do átomo λ (A ou B) é dada por,

$$\bar{\omega}_\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} (\omega_\lambda - N^2 \eta_\lambda^2). \quad (5.56)$$

De maneira inteiramente análoga na seção anterior, é conveniente escrevermos os auto-estados do sistema átomo(λ)-campo, $|l_\lambda, l_1, l_2, \dots\rangle$, representados pelas autofunções nor-

malizadas, escritas em termos das coordenadas normais Q_{r_λ} , para $t = 0$:

$$\phi_{n_\lambda n_1 n_2 \dots}(Q, 0) = \prod_{s_\lambda=0}^N \left(\frac{\Omega_{s_\lambda}}{\pi} \right)^{1/4} N_{s_\lambda} H_{n_{s_\lambda}} \left(\sqrt{\Omega_{s_\lambda}} Q_{s_\lambda} \right) \Gamma_0(Q_{r_\lambda}), \quad (5.57)$$

onde $H_{l_{s_\lambda}}$ designa o l_{s_λ} -ésimo polinômio de Hermite, $N_{s_\lambda} = (2^{l_{s_\lambda}} l_{s_\lambda}!)^{-1/2}$, $\Gamma_0(Q_{r_\lambda})$ é a auto-função normalizada do vácuo; além disso, temos também a função de onda para os estados vestidos $|\kappa_\lambda, \kappa_1, \kappa_2, \dots\rangle$ definidas por:

$$\psi_{\kappa_\lambda \kappa_1 \kappa_2 \dots}(q', 0) = \prod_{\mu_\lambda=0}^N \left(\frac{\bar{\omega}_{\mu_\lambda}}{\pi} \right)^{1/4} N_{\mu_\lambda} H_{\kappa_{\mu_\lambda}} \left(\sqrt{\bar{\omega}_{\mu_\lambda}} q'_{\mu_\lambda} \right) \Gamma_0(q'_{\mu_\lambda}), \quad (5.58)$$

onde $\bar{\omega}_{\mu_\lambda} = \{\bar{\omega}_\lambda, \omega_k\}$ e $N_{\mu_\lambda} = (2^{l_{\mu_\lambda}} l_{\mu_\lambda}!)^{-1/2}$. Em (5.58), temos que a autofunção vestida do vácuo $\Gamma_0(q')$ é a mesma que a $\Gamma_0(Q)$. De maneira análoga ao que vimos na seção anterior, consideramos o estado vestido, $|\Gamma_1^{\mu(\lambda)}(0)\rangle$ no instante $t = 0$, representado pela função de onda $\psi_{00\dots 1_{\mu_0}\dots}(q')$, que descreve a seguinte situação: apenas o μ -ésimo oscilador está excitado no primeiro nível, enquanto os demais estão no estado fundamental. A evolução temporal deste estado é descrita por:

$$|\Gamma_1^{\mu(\lambda)}(t)\rangle = \sum_{\nu} f_{\mu\nu}(t) |\Gamma_1^{\nu(\lambda)}(0)\rangle, \quad (5.59)$$

onde $\mu(\lambda), \nu(\lambda) = (\lambda, \{i\})$, referem-se, respectivamente, ao átomo λ e aos modos do campo, com $f_{\mu\nu}(t)$ tendo a mesma definição de (5.45):

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_s t_\mu^s t_\nu^s e^{-i\Omega_s t}. \quad (5.60)$$

5.3 Evolução temporal de estados vestidos emaranhados para um sistema de dois átomos dentro de uma cavidade

O sistema como um todo \mathcal{S} é composto pelos dois subsistemas, \mathcal{A} e \mathcal{B} , $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$; cada subsistema é constituído de um átomo- λ (A ou B) vestido individualmente pelo seu campo próprio, o sistema inteiro estando contido numa esfera de raio R . A informação sobre o sistema \mathcal{S} está contida nos estados que definem cada subsistema; para o subsistema \mathcal{A}

temos a seguinte família de estados: $|\Gamma_{n_A k_1 k_2 \dots}^A\rangle$, indicando que o átomo A está no n_A -ésimo nível excitado e os modos do campo nos k_1, k_2, \dots, k_i -ésimos níveis excitados. Para o subsistema \mathcal{B} usamos o mesmo raciocínio; sabemos que o campo é o mesmo para ambos os átomos, mas configuramos os níveis do campo no subsistema \mathcal{B} como uma duplicação (réplica) dos níveis correspondentes do subsistema \mathcal{A} . Assim, temos o estado $|\Gamma_{n_B q_1 q_2 \dots}^B\rangle$, com o átomo B no n_B -ésimo nível excitado e os modos do campo nos q_1, q_2, \dots, q_i -ésimos níveis excitados. O estado do sistema \mathcal{S} como um todo é escrito como:

$$|\Gamma_{n_A k_1 k_2 \dots; n_B q_1 q_2 \dots}^{(AB)}\rangle \equiv |n_A k_1 k_2 \dots; n_B q_1 q_2 \dots\rangle = |\Gamma_{n_A k_1 k_2 \dots}^A\rangle \otimes |\Gamma_{n_B q_1 q_2 \dots}^B\rangle. \quad (5.61)$$

Usando esta definição, vamos considerar no instante $t = 0$, uma família de superposições de estados do sistema bipartite dada por:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sqrt{\xi} |\Gamma_{1(A)00\dots; 0(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle + \sqrt{1-\xi} e^{i\phi} |\Gamma_{0(A)00\dots; 1(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle \\ &= \sqrt{\xi} |1_A, 0, 0, \dots; 0_B, 0, 0, \dots\rangle + \sqrt{1-\xi} e^{i\phi} |0_A, 0, 0, \dots; 1_B, 0, 0, \dots\rangle, \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde $0 < \xi < 1$. Na Eq. (5.62), $|\Gamma_{1(A)00\dots; 0(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle$ e $|\Gamma_{0(A)00\dots; 1(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle$ são, respectivamente, os estados nos quais o átomo vestido A (B) está no primeiro nível excitado, e o átomo B (A) e todos os modos vestidos do campo estão inicialmente no estado fundamental. São eles:

$$|\Gamma_{1(A)00\dots; 0(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle = |\Gamma_{100\dots}^A(0)\rangle \otimes |\Gamma_{000\dots}^B(0)\rangle \quad (5.63)$$

e

$$|\Gamma_{0(A)00\dots; 1(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle = |\Gamma_{000\dots}^A(0)\rangle \otimes |\Gamma_{100\dots}^B(0)\rangle. \quad (5.64)$$

A matriz densidade para esta situação em $t = 0$ é

$$\begin{aligned} \varrho(0) &= |\Psi\rangle \langle\Psi| \\ &= \xi |1_A, 0, 0, \dots; 0_B, 0, 0, \dots\rangle \langle 1_A, 0, 0, \dots; 0_B, 0, 0, \dots| \\ &\quad + (1-\xi) |0_A, 0, 0, \dots; 1_B, 0, 0, \dots\rangle \langle 0_A, 0, 0, \dots; 1_B, 0, 0, \dots| \\ &\quad + \sqrt{\xi(1-\xi)} e^{-i\phi} |1_A, 0, 0, \dots; 0_B, 0, 0, \dots\rangle \langle 0_A, 0, 0, \dots; 1_B, 0, 0, \dots| \\ &\quad + \sqrt{\xi(1-\xi)} e^{i\phi} |0_A, 0, 0, \dots; 1_B, 0, 0, \dots\rangle \langle 1_A, 0, 0, \dots; 0_B, 0, 0, \dots|. \end{aligned} \quad (5.65)$$

No instante t , o estado do sistema é descrito pela matriz densidade:

$$\varrho(t) = e^{-iHt} |\Psi\rangle \langle\Psi| e^{iHt}, \quad (5.66)$$

onde H é o operador Hamiltoniano de todo o sistema, tal que

$$e^{-iHt} = e^{-iH_A t} \otimes e^{-iH_B t}, \quad (5.67)$$

e onde H_A e H_B são as Hamiltonianas H_λ das equações (5.50) ou (5.52). Então obtemos

$$\begin{aligned} \varrho(t) = & \xi (|\Gamma_{100\dots}^A(t)\rangle \langle \Gamma_{100\dots}^A(t)|) \otimes (|\Gamma_{000\dots}^B\rangle \langle \Gamma_{000\dots}^B|) \\ & + (1 - \xi) (|\Gamma_{000\dots}^A\rangle \langle \Gamma_{000\dots}^A|) \otimes (|\Gamma_{100\dots}^B(t)\rangle \langle \Gamma_{100\dots}^B(t)|) \\ & + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} (|\Gamma_{000\dots}^A\rangle \langle \Gamma_{100\dots}^A(t)|) \otimes (|\Gamma_{100\dots}^B(t)\rangle \langle \Gamma_{000\dots}^B|) \\ & + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} (|\Gamma_{100\dots}^A(t)\rangle \langle \Gamma_{000\dots}^A|) \otimes (|\Gamma_{000\dots}^B\rangle \langle \Gamma_{100\dots}^B(t)|), \quad (5.68) \end{aligned}$$

onde os estados $|\Gamma_{000\dots}^A\rangle$, $|\Gamma_{000\dots}^B\rangle$ são estacionários e os estados $|\Gamma_{100\dots}^A(t)\rangle$, $|\Gamma_{100\dots}^B(t)\rangle$ evoluem de acordo com a equação (5.44).

Para descrever a evolução temporal do sistema, iremos considerar a matriz densidade reduzida obtida pelo traço sobre todos os graus de liberdade associados com o campo. O cálculo é análogo ao apresentado nas Ref. [10, 84]. Após tomar o traço, a matriz densidade tem índices referindo-se aos dois estados atômicos. Explicitamente, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{n_A n_B}^{m_A m_B}(t) = & \xi \sum_{\{k_i=1\}}^{\infty} \langle n_A, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^A(t) \rangle \langle \Gamma_{100\dots}^A(t) | m_A, k_1, k_2, \dots \rangle \\ & \sum_{\{q_i=1\}}^{\infty} \langle n_B, q_1, q_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^B \rangle \langle \Gamma_{000\dots}^B | m_B, q_1, q_2, \dots \rangle \\ & + (1 - \xi) \sum_{\{k_i=1\}}^{\infty} \langle n_A, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^A \rangle \langle \Gamma_{000\dots}^A | m_A, k_1, k_2, \dots \rangle \\ & \sum_{\{q_i=1\}}^{\infty} \langle n_B, q_1, q_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^B(t) \rangle \langle \Gamma_{100\dots}^B(t) | m_B, q_1, q_2, \dots \rangle \\ & + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} \sum_{\{k_i=1\}}^{\infty} \langle n_A, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^A \rangle \langle \Gamma_{100\dots}^A(t) | m_A, k_1, k_2, \dots \rangle \\ & \sum_{\{q_i=1\}}^{\infty} \langle n_B, q_1, q_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^B(t) \rangle \langle \Gamma_{000\dots}^B | m_B, q_1, q_2, \dots \rangle \\ & + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} \sum_{\{k_i=1\}}^{\infty} \langle n_A, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^A(t) \rangle \langle \Gamma_{000\dots}^A | m_A, k_1, k_2, \dots \rangle \\ & \sum_{\{q_i=1\}}^{\infty} \langle n_B, q_1, q_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^B \rangle \langle \Gamma_{100\dots}^B(t) | m_B, q_1, q_2, \dots \rangle. \quad (5.69) \end{aligned}$$

Na expressão acima temos expressões do tipo:

$$\langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^A \rangle = \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \delta_{k_10} \delta_{k_20} \dots \quad (5.70)$$

e

$$\begin{aligned} \langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^A(t) \rangle &= \sum_{\nu} f_{A\nu}(t) \langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^{\nu}(0) \rangle \\ &= f_{AA}(t) \langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^A(0) \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} f_{Ai}(t) \langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^i(0) \rangle \\ &= f_{AA}(t) \delta_{n_{\mathcal{A}}1} \delta_{k_10} \delta_{k_20} \dots + \sum_{i=1}^{\infty} f_{Ai}(t) \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \delta_{k_10} \dots \delta_{k_i1} \dots, \end{aligned} \quad (5.71)$$

de modo que os termos típicos da equação (5.69) são escritos como:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, \dots} \langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^A \rangle \langle \Gamma_{000\dots}^A | m_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots \rangle &= \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \delta_{m_{\mathcal{A}}0} \sum_{k_1} \delta_{k_10} \delta_{k_10} \sum_{k_2} \delta_{k_20} \delta_{k_20} \dots \\ &= \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \delta_{m_{\mathcal{A}}0}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, k_2, \dots} \langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^A \rangle \langle \Gamma_{100\dots}^A(t) | m_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots \rangle \\ &= \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \left[f_{AA}^*(t) \delta_{m_{\mathcal{A}}1} \sum_{k_1} \delta_{k_10} \delta_{k_10} \sum_{k_2} \delta_{k_20} \delta_{k_20} \dots + \sum_i f_{Ai}^*(t) \sum_{k_1} \delta_{k_10} \delta_{k_10} \dots \sum_{k_i} \delta_{k_i0} \delta_{k_i1} \dots \right] \\ &= f_{AA}^*(t) \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \delta_{m_{\mathcal{A}}1} \end{aligned} \quad (5.73)$$

e

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, k_2, \dots} \langle n_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^A(t) \rangle \langle \Gamma_{100\dots}^A(t) | m_{\mathcal{A}}, k_1, k_2, \dots \rangle \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots} \left[f_{AA}(t) \delta_{n_{\mathcal{A}}1} \delta_{k_10} \delta_{k_20} \dots + \sum_i f_{Ai}(t) \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \delta_{k_10} \dots \delta_{k_i1} \dots \right] \\ &\quad \times \left[f_{AA}^*(t) \delta_{m_{\mathcal{A}}1} \delta_{k_10} \delta_{k_20} \dots + \sum_j f_{Aj}^*(t) \delta_{m_{\mathcal{A}}0} \delta_{k_10} \dots \delta_{k_j1} \dots \right] \\ &= |f_{AA}|^2 \delta_{n_{\mathcal{A}}1} \delta_{m_{\mathcal{A}}1} + \sum_i |f_{Ai}|^2 \delta_{n_{\mathcal{A}}0} \delta_{m_{\mathcal{A}}0}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Fazendo uso das relações (5.72), (5.73) e (5.74) em (5.69), juntamos todas estas expressões e seus análogos para os elementos da matriz reduzida em relação ao átomo- B , e finalmente,

obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{n_{\mathcal{A}}n_{\mathcal{B}}}^{m_{\mathcal{A}}m_{\mathcal{B}}}(t) &= \xi \left[|f_{AA}(t)|^2 \delta_{n_{\mathcal{A}1}} \delta_{m_{\mathcal{A}1}} + \sum_i |f_{Ai}(t)|^2 \delta_{n_{\mathcal{A}0}} \delta_{m_{\mathcal{A}0}} \right] \delta_{n_{\mathcal{B}0}} \delta_{m_{\mathcal{B}0}} \\
&+ (1 - \xi) \delta_{n_{\mathcal{A}0}} \delta_{m_{\mathcal{A}0}} \left[|f_{BB}(t)|^2 \delta_{n_{\mathcal{B}1}} \delta_{m_{\mathcal{B}1}} + \sum_i |f_{Bi}(t)|^2 \delta_{n_{\mathcal{B}0}} \delta_{m_{\mathcal{B}0}} \right] \\
&+ \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} f_{AA}^*(t) f_{BB}(t) \delta_{n_{\mathcal{A}0}} \delta_{m_{\mathcal{A}1}} \delta_{n_{\mathcal{B}1}} \delta_{m_{\mathcal{B}0}} \\
&+ \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} f_{AA}(t) f_{BB}^*(t) \delta_{n_{\mathcal{A}1}} \delta_{m_{\mathcal{A}0}} \delta_{n_{\mathcal{B}0}} \delta_{m_{\mathcal{B}1}}.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Os elementos não-nulos da matriz densidade reduzida são dados por:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{0_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}^{0_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}(t) &= \xi \sum_i |f_{Ai}(t)|^2 + (1 - \xi) \sum_i |f_{Bi}(t)|^2, \\
\tilde{\rho}_{0_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}^{0_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}(t) &= (1 - \xi) |f_{BB}(t)|^2, \\
\tilde{\rho}_{1_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}^{1_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}(t) &= \xi |f_{AA}(t)|^2, \\
\tilde{\rho}_{0_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}^{1_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}(t) &= \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} f_{AA}^*(t) f_{BB}(t), \\
\tilde{\rho}_{1_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}^{0_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}(t) &= \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} f_{AA}(t) f_{BB}^*(t).
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Verificamos que o traço da matriz reduzida é igual a unidade, ou seja, somando os elementos de (5.76) temos:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}_{0_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}^{0_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}(t) + \tilde{\rho}_{0_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}^{0_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}(t) + \tilde{\rho}_{1_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}^{1_{\mathcal{A}}0_{\mathcal{B}}}(t) + \tilde{\rho}_{1_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}^{1_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{B}}}(t) \\
&= \xi \left[|f_{AA}(t)|^2 + \sum_i |f_{Ai}(t)|^2 \right] + (1 - \xi) [|f_{BB}(t)|^2 + |f_{Bi}(t)|^2] \\
&= \xi + 1 - \xi = 1,
\end{aligned} \tag{5.77}$$

onde a Eq. (5.46) foi usada. Esta propriedade indica que $\tilde{\rho}$ representa um estado físico do sistema. Temos também que, $\text{Tr}[\tilde{\rho}^2] \neq 1$, o que significa que o estado $|\Xi(t)\rangle$ associado a esta matriz é um estado não-puro.

O grau de impureza de um estado pode ser medido pelo desvio da propriedade idempotente. No presente caso, esta medida é escrita como:

$$\begin{aligned}
D(t, \xi) &= 2 |f_{BB}(t)|^2 - 2 |f_{BB}(t)|^4 \\
&+ 2\xi (|f_{AA}(t)|^2 - |f_{BB}(t)|^2) (1 - 2 |f_{BB}(t)|^2) \\
&- 2\xi^2 (|f_{AA}(t)|^2 - |f_{BB}(t)|^2)^2.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

No caso em que os átomos são idênticos, ou seja, tomando simbolicamente $A \equiv B \equiv 0$ a função $D(t, \xi)$ torna-se:

$$D(t, \xi) = 2 |f_{00}(t)|^2 (1 - |f_{00}(t)|^2). \quad (5.79)$$

Nas seções seguintes, faremos o estudo do comportamento da amplitude de probabilidade $|f_{AA}(t)|^2$, para uma grande e uma pequena cavidade; tanto para acoplamento fraco quanto para o acoplamento forte. Um estudo inteiramente análogo vale para a quantidade $|f_{BB}(t)|^2$.

5.3.1 Limite de grande cavidade

Vamos analisar o comportamento da probabilidade $|f_{AA}(t)|^2$ para o limite de grande cavidade; para tanto partiremos do elemento de matriz t_λ^r na equação (5.55), lembrando a definição do parâmetro $\eta_A = \sqrt{\frac{4g_A c}{R}}$ e que no presente caso $\lambda = A$; assim temos, para R arbitrariamente grande

$$\lim_{R \rightarrow \infty} t_A^r = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4g_A/\pi}\Omega\sqrt{\frac{\pi c}{R}}}{\sqrt{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4g_A^2\Omega^2}}. \quad (5.80)$$

Neste limite, $\Delta\omega = \pi c/R \rightarrow d\omega = d\Omega$, a soma na definição $f_{AA}(t)$, equação (5.45), torna-se uma integral

$$f_{AA}(t) = \frac{4g_A}{\pi} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega^2 e^{-i\Omega t}}{(\Omega^2 - \bar{\omega}_A^2)^2 + 4g_A^2\Omega^2}. \quad (5.81)$$

Agora vamos definir o parâmetro $\kappa = \sqrt{\bar{\omega}_A^2 - g_A^2}$ e considerar tanto $\kappa^2 \geq 0$ ou $\kappa^2 \leq 0$; vemos que $\kappa^2 \gg 0$ e $\kappa^2 \ll 0$ correspondem, respectivamente, ao acoplamento fraco ($g_A \ll \bar{\omega}_A$) e ao acoplamento forte ($g_A \gg \bar{\omega}_A$) dos átomos com o campo. Usando a definição de κ na integral (5.81) temos:

$$f_{AA}(t) = \frac{4g_A}{\pi} \int d\Omega \frac{\Omega^2 e^{-i\Omega t}}{(\Omega^2 - \kappa^2 - g_A^2)^2 + 4g_A^2\Omega^2}. \quad (5.82)$$

A função $f_{AA}(t)$ pode ser calculada diretamente usando o teorema de Cauchy, obtendo com isso, as três situações possíveis:

(a) $\kappa^2 > 0$:

$$f_{AA}(t) = -\frac{e^{-g_A t}}{2} \left[\cos \kappa t - \frac{g_A}{\kappa} \sin \kappa t \right] + iG(t; \bar{\omega}_A, g_A); \quad (5.83)$$

(b) $\kappa^2 = 0$:

$$f_{AA}(t) = e^{-g_A t} (1 - g_A t) + iG(t; \bar{\omega}_A, g_A); \quad (5.84)$$

(c) $\kappa^2 < 0$:

$$f_{AA}(t) = -\frac{1}{2} \left[\cosh |k| t - \frac{g_A}{|k|} \sinh |k| t \right] e^{-g_A t} + iG(t; \bar{\omega}_A, g_A). \quad (5.85)$$

Nestas expressões, a função $G(t; \bar{\omega}_A, g_A)$ é dada por:

$$G(t; \bar{\omega}_A, g_A) = -\frac{4g_A}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{y^2 \sin(yt)}{(y^2 - \bar{\omega}_A^2)^2 + 4g_A^2 y^2}. \quad (5.86)$$

O comportamento da função $G(t; \bar{\omega}_A, g_A)$ é ilustrado na figura 5.1; observamos que, em todos os casos, tanto a parte real quanto a parte imaginária de $f_{AA}(t)$ decaem com o tempo, para tempos longos. No regime de acoplamento fraco, a quantidade $|f_{AA}(t)|^2$ é dada por:

$$|f_{AA}(t)|^2 \approx \frac{e^{-2g_A t}}{4} \left[\cos \bar{\omega}_A t - \frac{g_A}{\bar{\omega}_A} \sin \bar{\omega}_A t \right]^2 + \frac{64g_A^2}{\bar{\omega}_A^8 t^6}. \quad (5.87)$$

e no regime de acoplamento forte, é dada por:

$$|f_{AA}(t)|^2 \approx \frac{1}{4} e^{-4g_A t} + \frac{64g_A^2}{\bar{\omega}_A^8 t^6}; \quad (5.88)$$

Vemos que em ambos os regimes, $|f_{AA}(t)|^2$ tende à zero no limite $t \rightarrow \infty$.

5.3.2 Limite de pequena cavidade

Para uma cavidade finita, o espectro das autofrequências é discreto, e a linguagem contínua usada no caso de grande cavidade não pode ser aplicada. Se a cavidade é suficientemente pequena, as frequências Ω_{r_A} podem ser determinadas seguindo as etapas descritas em [10, 80]. Primeiramente, vamos rotular as frequências normais Ω_{r_A} como $\Omega_{r_A} = (\Omega_A, \{\Omega_k\})$, sendo $k = 1, 2, \dots$. A frequência Ω_A indica a mais baixa das frequências normais (ver gráfico na Figura 5.2), enquanto os Ω_k estão mais próximos dos valores das frequências que correspondem às assíntotas da curva $\cot\left(\frac{R\Omega}{c}\right)$; em uma análise numérica da equação (5.30), podemos determinar estas frequências na condição de cavidades pequenas. Vamos primeiramente determinar a expressão para as frequências normais Ω_k ; e para este propósito, reescrevemos a equação (5.30) tomando o índice $r_A = k$:

$$\cot\left(\frac{R\Omega_k}{c}\right) = \frac{\Omega_k}{2g_A} + \frac{c}{R\Omega_k} \left(1 - \frac{R\bar{\omega}_A^2}{2g_A c}\right); \quad (5.89)$$

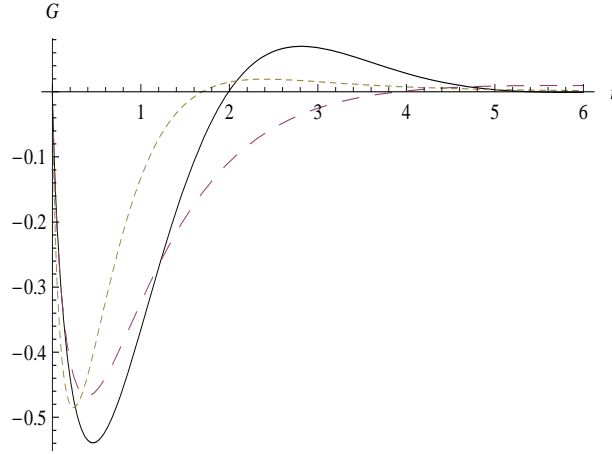


Figura 5.1: O comportamento de $G(t; \bar{\omega}_A, g_A)$ como função do tempo t para três casos distintos: $\bar{\omega}_A = 1.5$ e $g_A = 1.0$ (linha cheia); $\bar{\omega}_A = 1.0$ e $g_A = 1.2$ (linha tracejada); e $\bar{\omega}_A = g_A = 2.0$ (linha pontilhada).

fazendo uma analogia com as frequências $\omega_k = k\pi c/R$ tomamos também $\Omega_k = \Omega = x\pi c/R$, e com isso (5.89) torna-se:

$$\cot(\pi x) = \frac{\pi c}{2Rg_A}x + \frac{1}{\pi x} \left(1 - \frac{R\bar{\omega}_A^2}{2g_Ac} \right). \quad (5.90)$$

A equação (5.90) pode ser resolvida graficamente. De acordo com o gráfico, na figura 5.2, verificamos que a secante traçada pela curva do lado direito da equação (5.90) corta apenas uma vez cada ramo da função cotangente, de forma que $x \equiv x_k = k + \varepsilon_k$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), com $0 < \varepsilon_k < 1$. Então, podemos escrever a expressão para a frequência normal Ω_k na forma $\Omega_k = \frac{\pi c}{R}(k + \varepsilon_k)$ substituindo na equação (5.90), e expandir assim o lado direito em torno das quantidades ε_k ; e com isso a equação (5.90) resulta em:

$$\cot(\pi\varepsilon_k) = \frac{\pi c}{2g_AR} (k + \varepsilon_k) + \frac{1}{\pi(k + \varepsilon_k)} \left(1 - \frac{R\bar{\omega}_A^2}{2g_Ac} \right). \quad (5.91)$$

Para todo valor ε_k , podemos linearizar a equação (5.91) expandindo a $\cot(\pi\varepsilon_k)$ para um valor de ε_k pequeno, obtendo:

$$\varepsilon_k = \frac{2g_AcRk}{\pi^2c^2k^2 - \bar{\omega}_A^2R^2 + 2g_AcR}. \quad (5.92)$$

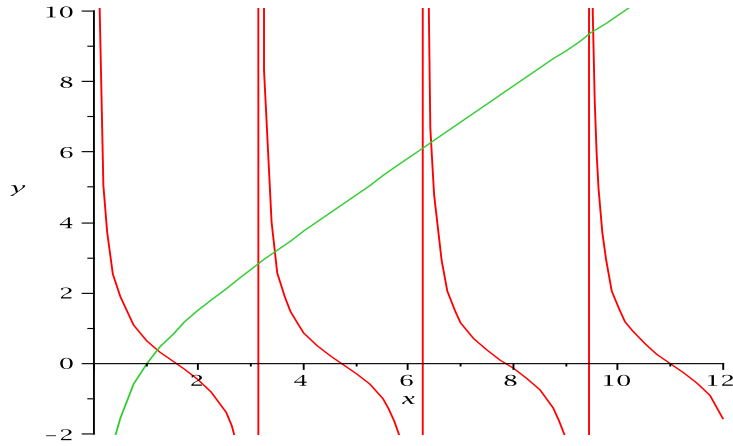


Figura 5.2: O lado direito de (5.90) corta apenas uma vez cada ramo da função $\cot(\pi x)$; o primeiro corte representa a mais baixa frequência, Ω_A , que está mais afastada de sua respectiva assíntota, as demais frequências Ω_k estão distantes dos valores das respectivas assíntotas apenas por uma pequena quantidade ε_k . Plotamos este gráfico para os os seguintes parâmetros: $\bar{\omega}_A = 2 \times 10^{11} s^{-1}$, $R = 10^{-2} m$, $g_A = \alpha \bar{\omega}_A$, onde $\alpha = 1/137$ é a constante de estrutura fina.

Lembramos que temos dois átomos contidos numa esfera de raio R e como cada átomo está acoplado individualmente com seu campo próprio, temos duas constantes de acoplamentos diferentes para cada átomo; considerando que sejam átomos diferentes, temos dois valores de comprimento de coerência, que definimos como: $L_A = c/g_A$ ($L_B = c/g_B$). Devemos comparar o tamanho da cavidade com o comprimento de coerência, mas podemos adotar o comprimento de coerência do átomo A ou do átomo B; esse impasse pode ser resolvido se supusermos que os átomos são idênticos, portanto teremos então, apenas um comprimento de coerência a definir; e em relação a ele comparar o tamanho da cavidade. A cavidade deve satisfazer a seguinte condição: $R \ll c/g_A$, adotando o comprimento de coerência para o átomo A, a aproximação torna-se $g_A R/c \ll 1$, e com isso desprezamos o último termo do denominador em (5.92) obtendo:

$$\varepsilon_k = \frac{2g_A R c k}{\pi^2 c^2 k^2 - \bar{\omega}_A^2 R^2}. \quad (5.93)$$

Substituindo a Eq. (5.93) na expressão da frequência Ω_k temos:

$$\begin{aligned}\Omega_k &= \frac{\pi c}{R} (k + \varepsilon_k) \\ &= \frac{\pi c}{R} \left[k + \frac{2g_A R}{\pi^2 c k \left(1 - \frac{\bar{\omega}_A^2 R^2}{\pi^2 c^2 k^2}\right)} \right].\end{aligned}$$

Definindo o parâmetro para o átomo A (este parâmetro é definido do mesmo modo para o átomo B):

$$\delta_A = \frac{\pi g_A}{\Delta\omega} = \frac{g_A R}{c}, \quad (5.94)$$

e substituindo o parâmetro (5.94) na expressão para as frequências Ω_k , podemos reescrevê-la como:

$$\Omega_k = \Delta\omega \left[k + \frac{2\delta_A}{k\pi \left(1 - \frac{\bar{\omega}_A^2}{g_A^2 k^2} \delta_A^2\right)} \right] \quad (5.95)$$

A definição (5.94) está de acordo com a condição de pequena cavidade $R \ll c/g_A$ desde que $\delta_A \ll 1$; logo a expressão final para as frequências normais Ω_k no limite de pequena cavidade é:

$$\Omega_k = \frac{g_A}{\delta_A} \left(k + \frac{2\delta_A}{\pi k} \right). \quad (5.96)$$

Para obtermos a frequência normal Ω_A , no limite de pequena cavidade, escrevemos a Eq. (5.89) na forma:

$$\cot\left(\frac{R\Omega_A}{c}\right) = \frac{\Omega_A}{2g_A} + \frac{c}{R\Omega_A} \left(1 - \frac{R\bar{\omega}_A^2}{2g_A c}\right). \quad (5.97)$$

Como Ω_A é a mais baixa frequência usamos a aproximação $\Omega_A R/c \ll 1$; com isso expandimos o lado direito da equação (5.97) até a segunda ordem em Ω_A obtendo:

$$\cot\left(\frac{R}{c}\Omega_A\right) \approx \frac{c}{R\Omega_A} - \frac{1}{3} \frac{R\Omega_A}{c} = \frac{2c}{\eta_A^2 R} \frac{\Omega_A^2 - \bar{\omega}_A^2}{\Omega_A} + \frac{c}{R\Omega_A}. \quad (5.98)$$

Resolvendo a equação (5.98) para Ω_A temos:

$$\Omega_A = \bar{\omega}_A \left[1 + \frac{2g_A R}{3c} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.99)$$

Usando em seguida, o parâmetro δ_A , a Eq. (5.94) em (5.99), com a condição $\delta_A \ll 1$, leva à seguinte expressão para Ω_A :

$$\Omega_A \approx \bar{\omega}_A \left(1 - \frac{\delta_A \pi}{3} \right). \quad (5.100)$$

Para determinar $f_{AA}(t)$, calculamos o quadrado dos elementos de matriz $(t_A^A)^2$ e $(t_A^k)^2$. Usando $\omega_k = k\Delta\omega = kg_A/\delta_A$, encontramos (até a primeira ordem em δ), o elemento da matriz de transformação

$$(t_A^k)^2 \approx \frac{4\delta}{\pi k^2} (t_A^A)^2. \quad (5.101)$$

Agora, considerando a condição de normalização (5.22) para a matriz (t_μ^ν) , e a soma sobre os índices k , usamos a função Zeta de Riemann: $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$, para determinar $(t_A^A)^2$:

$$(t_A^A)^2 \approx \left(1 + \frac{2\pi\delta_A}{3}\right)^{-1}. \quad (5.102)$$

Obtemos com isso, o resultado de $f_{AA}(t)$ para cavidades suficientemente pequenas ($\delta_A \ll 1$),

$$f_{AA}(t) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{3}\pi\delta_A\right)^{-1} \left[e^{-i\bar{\omega}_A(1-\frac{2\pi\delta_A}{3})t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16\delta_A}{\pi k^2} e^{-i\frac{g_A}{\delta_A}(k+\frac{4\delta_A}{\pi k})t} \right]. \quad (5.103)$$

É importante mencionar que, a aproximação que fizemos independe da intensidade do acoplamento entre a átomo e o campo, e portanto é aplicado para ambos os regimes de acoplamento, forte ou fraco. Lembramos de (5.44) e (5.45) (ou (5.59) e (5.60)) que a probabilidade de que o átomo(A) permaneça excitado no primeiro nível é dada pela quantidade $|f_{AA}(t)|^2$. Em uma pequena cavidade, esta probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} |f_{AA}(t)|^2 \approx & \left(1 + \frac{2}{3}\pi\delta_A\right)^{-2} \left\{ 1 + \frac{8\delta_A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \left[\bar{\omega}_A \left(1 - \frac{\pi\delta_A}{2}\right) - \frac{g_A}{\delta_A} \left(k + \frac{2\delta_A}{\pi k}\right) \right] t \right. \\ & \left. + \frac{16\delta_A^2}{\pi^2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 l^2} \cos \left[\left(\frac{g_A}{\delta_A} - \frac{2g_A}{\pi}\right) (k-l) \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Esta probabilidade oscila com o tempo passando periodicamente por um valor mínimo $\min \{|f_{AA}(t)|^2\}$. Este mínimo tem um limite inferior obtido tomando as funções cosseno na equação acima iguais a -1 ; e mais uma vez fazendo uso da função Zeta de Riemann nos termos de somatório em (5.104),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \equiv \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2 k^2} \equiv [\zeta(2)]^2 = \frac{\pi^4}{36}, \quad (5.105)$$

obtemos este limite inferior para a probabilidade $|f_{AA}(t)|^2$:

$$\min \{|f_{AA}(t)|^2\} \approx \left(1 + \frac{2}{3}\pi\delta_A^2\right)^{-2} \left\{ 1 - \frac{4\pi\delta_A^2}{3} - \frac{4\pi^2\delta_A^2}{9} \right\}. \quad (5.106)$$

Este valor de mínimo indica que átomo vestido numa cavidade pequena nunca decai completamente, mantendo-se com probabilidade finita de estar permanentemente excitado. Vamos estimar um valor aproximado para o mínimo desta probabilidade tomando como exemplo, no caso de acoplamento fraco, uma situação física de interesse que ocorre quando as interações envolvidas são do tipo eletromagnética. Neste caso, $g_A = \bar{\omega}_A \alpha$, onde $\alpha = 1/137$ é a constante de estrutura fina. Para uma frequência típica de $\bar{\omega}_A \approx 4 \times 10^{14}/s$ (frequência na cor vermelha na faixa do visível), o comprimento de coerência é $L_A = c/g_A = 1.027 \times 10^{-4}m$; além disso, como a condição é de que a cavidade tenha um tamanho muito menor do que o comprimento de coerência, escolhemos $R \approx 10^{-6}m$. O parâmetro δ_A será $\delta_A = 9.7 \times 10^{-3}$ e com isso o valor mínimo para a probabilidade é $\min \{|f_{AA}(t)|^2\} \approx 0.92$, o que significa que 92% do tempo o átomo permanecerá excitado, ou se preferirmos, a probabilidade de que o átomo decaia do estado excitado é menor do que 8%.

Não existe uma conexão direta entre os dois regimes de pequena e grande cavidade, isso se deve a que, no regime de grande cavidade, tanto as frequências do campo quanto as frequências dos modos normais têm uma distribuição contínua, levando todos os somatórios a integrais, desta forma podemos resolver analiticamente as expressões para as quantidades fisicamente relevantes. Já no regime de pequena cavidade definida pelo requerimento de que o tamanho da cavidade seja muito menor que c/g , onde c é a velocidade da luz e g a constante de acoplamento (com dimensão de frequência) fazemos aproximações que não são válidas para cavidades maiores. Para estudar um regime intermediário de tamanho de cavidade métodos numéricos são absolutamente necessários. Isto será feito em prosseguimento a esta tese.

5.4 Estados emaranhados

O emaranhamento é um tipo de correlação entre dois subsistemas ou mais de um sistema quântico, que não tem um análogo na física clássica. O emaranhamento foi primeiramente descrito por Einstein, Podolsky, e Rose [117], famosos pelo chamado paradoxo EPR, e Schrödinger [118] como um fenômeno inteiramente quântico. Bell [94, 95] foi o primeiro a apresentar uma maneira sistemática de se analisar estados emaranhados. A

existência do estado emaranhado está diretamente relacionado à natureza do formalismo quântico, baseado na estrutura do espaço de Hilbert e no princípio da superposição.

Nos últimos anos, o interesse por estados emaranhados tem aumentado, pois estes podem vir a ser um ingrediente básico para computadores quânticos [119]. Em [125], o emaranhamento numa estrutura mesoscópica constituída de partes não-interagentes é investigado. Estes autores estudaram a correlação dependente do tempo elétron-elétron e elétron-buraco num dispositivo mesoscópico e analisaram o emaranhamento por meio de um teste de desigualdade de Bell e de testes da desigualdade de Bell baseados na coincidência das probabilidades. Na estrutura da teoria da computação quântica, uma situação conceitualmente próxima àquela por nós investigada está em [126]: dois qubits, inicialmente separados num estado emaranhado, estão *acoplados aos seus próprios meios ambientes* independentemente. Estes autores encontraram condições para um emaranhamento não-nulo num tempo arbitrário, tanto para temperatura zero quanto temperatura diferente de zero. Também na Ref. [127], é feito um estudo da evolução do emaranhamento de dois átomos interagindo independentemente com os campos das suas respectivas cavidades. Em [128], o emaranhamento é abordado para um ensemble de elétrons não-interagentes. Este autores usaram este ponto de partida para estudar o gás interagente, afirmando que neste contexto o efeito Hall quântico pode ser pensado com uma base para a computação quântica.

5.4.1 A entropia de von Neumann

Para um estado puro como $|\Psi(t)\rangle$ o emaranhamento pode ser medido pela entropia de Von Neumann, associada com a matriz densidade reduzida em relação a um dos subsistemas não-interagentes. Neste caso, para estudarmos o emaranhamento do sistema bipartite, no qual cada átomo tem seu campo próprio, partimos da matriz densidade e da Eq. (5.62). Para estados puros, como a superposição de estados em $t = 0$ na Eq. (5.62), a entropia de von Neumann mede o grau de emaranhamento. Esta é obtida considerando um subsistema e tomando o traço sobre os estados do subsistema complementar.

Vamos inicialmente tratar o sistema em $t = 0$. Então, para o subsistema \mathcal{A} , a matriz

densidade reduzida é:

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{A}}(0) &= \text{Tr}_{\mathcal{B}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \\
&= \sum_{n_{\mathcal{B}}, q_j=0}^{\infty} \langle n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots | \Psi \rangle \langle \Psi | n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots \rangle \\
&= \xi |1_A, 0, 0, \dots\rangle \langle 1_A, 0, 0, \dots| + (1 - \xi) |0_A, 0, 0, \dots\rangle \langle 0_A, 0, 0, \dots| \quad (5.107)
\end{aligned}$$

e, similarmente para o subsistema \mathcal{B} ,

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{B}}(0) &= \text{Tr}_{\mathcal{A}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \\
&= \xi |0_B, 0, 0, \dots\rangle \langle 0_B, 0, 0, \dots| + (1 - \xi) |1_B, 0, 0, \dots\rangle \langle 1_B, 0, 0, \dots|. \quad (5.108)
\end{aligned}$$

O grau de emaranhamento do sistema de dois átomos é medido pela entropia de Von Neumann de qualquer matriz densidade reduzida; por exemplo,

$$E(\xi) = -\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}} \ln \rho_{\mathcal{A}}] = -\sum_{\alpha} \alpha \ln \alpha, \quad (5.109)$$

onde somamos sobre todos os autovalores de α de $\rho_{\mathcal{A}}$. Desde que $\rho_{\mathcal{A}}$ seja diagonal na base de Fock dos estados vestidos dos átomos A , seus autovalores podem ser obtidos diretamente de (5.107):

$$\alpha_1 = 1 - \xi, \quad \alpha_2 = \xi, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 0, \quad (5.110)$$

portanto,

$$E(\xi) = -[(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi \ln \xi]. \quad (5.111)$$

A evolução temporal dos estados $|\Gamma_{1(A)00\dots;0(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle$ e $|\Gamma_{0(A)00\dots;1(B)00\dots}^{(AB)}(0)\rangle$ é dirigida pela evolução temporal dos estados puros vestidos $|\Gamma_{100\dots}^A\rangle$ e $|\Gamma_{100\dots}^B\rangle$, respectivamente, dados pela equação (5.44),

$$|\Gamma_{100\dots}^{\lambda}(t)\rangle = \sum_{\nu} f_{\lambda\nu}(t) |\Gamma_{100\dots}^{\nu(\lambda)}\rangle, \quad (5.112)$$

onde, de acordo com a notação na seção anterior, o índice λ refere-se a cada um dos átomos A e B e

$$f_{\lambda\nu}(t) = \sum_s t_{\lambda}^s t_{\nu}^s e^{-i\Omega_s t}. \quad (5.113)$$

Na equação (5.112), $|\Gamma_{100\dots}^{\nu(\lambda)}\rangle$ é o estado na qual o modo vestido $\nu(\lambda)$ do átomo λ está no primeiro nível e todos os outros modos estão no estado fundamental.

A matriz densidade reduzida para o subsistema \mathcal{A} no instante t é

$$\rho_{\mathcal{A}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{B}} \varrho(t) = \text{Tr}_{\mathcal{B}} [|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|].$$

Usando a equação (5.112), primeiramente escrevemos $\rho_{\mathcal{A}}(t)$ em termos das quantidades $f_{\lambda\nu}(t)$ da equação (5.113):

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{A}}(t) &= \sum_{n_{\mathcal{B}}, q_j=0}^{\infty} \langle n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots \rangle \\ &= \sum_{n_{\mathcal{B}}, q_j} \sum_{\mu, \nu} \left[\sqrt{\xi} f_{A\mu}(t) |\Gamma_{100\dots}^{\mu(A)}\rangle \langle n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots | \Gamma_{000\dots}^B \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-\xi} e^{i\phi} f_{B\mu}(t) |\Gamma_{000\dots}^A \rangle \langle n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^{\mu(B)} \rangle \right] \\ &\quad \times \left[\sqrt{\xi} f_{A\nu}^*(t) \langle \Gamma_{100\dots}^{\nu(A)} | \langle \Gamma_{000\dots}^B | n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-\xi} e^{-i\phi} f_{B\nu}^*(t) \langle \Gamma_{000\dots}^A | \langle \Gamma_{100\dots}^{\nu(B)} | n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots \rangle \right] \\ &= \sum_{\mu, \nu} \xi f_{A\mu}(t) f_{A\nu}^*(t) |\Gamma_{100\dots}^{\mu(A)}\rangle \langle \Gamma_{100\dots}^{\nu(A)}| + (1-\xi) |\Gamma_{000\dots}^A \rangle \langle \Gamma_{000\dots}^A|, \end{aligned} \quad (5.114)$$

onde usamos

$$\sum_{\mu} f_{B\mu}(t) \langle n_{\mathcal{B}}, q_1, q_2, \dots | \Gamma_{100\dots}^{\mu(B)} \rangle = f_{BB}(t) \delta_{n_{\mathcal{B}}1} \prod_i \delta_{i0} + \delta_{n_{\mathcal{B}}0} \sum_i f_{Bi}(t) \delta_{i1} \prod_{j \neq i} \delta_{j0} \quad (5.115)$$

e a equação (5.46).

A entropia de Von Neumann agora é dada por:

$$E(t, \xi) = -\text{Tr} [\rho_{\mathcal{A}}(t) \ln \rho_{\mathcal{A}}(t)] = -\sum_{\alpha} \alpha \ln \alpha, \quad (5.116)$$

onde aqui α são os autovalores da matriz densidade reduzida no instante t . Estas devem ser soluções da equação característica, que no caso de (5.114), é:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \xi - \alpha & & & & \\ & \xi |f_{AA}|^2 - \alpha & \xi f_{A1} f_{AA}^* & \xi f_{A2} f_{AA}^* & \cdots \\ & \xi f_{AA} f_{A1}^* & \xi |f_{A1}|^2 - \alpha & \xi f_{A2} f_{A1}^* & \cdots \\ & \xi f_{AA} f_{A2}^* & \xi f_{A1} f_{A2}^* & \xi |f_{A2}|^2 - \alpha & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 0. \quad (5.117)$$

Encontramos que os autovalores não-nulos de ρ_A são:

$$\alpha_1 = 1 - \xi, \quad \alpha_2 = \xi \sum_{\mu} |f_{A\mu}(t)|^2 = \xi. \quad (5.118)$$

Isto implica que a entropia de Von Neumann toma a seguinte expressão:

$$E(t, \xi) = - [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi \ln(\xi)], \quad (5.119)$$

isto é, toda a dependência temporal da entropia para o sistema de dois átomos, contida em $f_{\lambda\nu}(t)$, é completamente cancelada; desse modo, a situação reproduzida é a mesma que no instante $t = 0$, com o máximo de emaranhamento ocorrendo em $\xi = 1/2$ (ver Figura 5.5). Em outras palavras, embora a superposição $|\Psi(t)\rangle$ dos estados evolua no tempo, em ambas as situações, tanto no limite de grande cavidade quanto no limite de pequena cavidade, a natureza do emaranhamento do estado de dois átomos permanece inalterada por todo o tempo, independentemente do tamanho da cavidade.

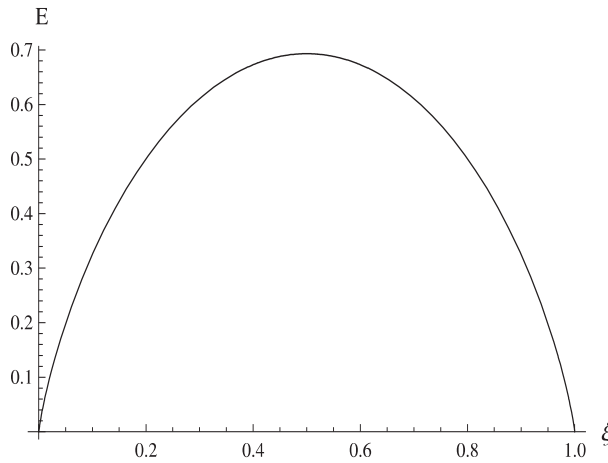


Figura 5.3: O comportamento da entropia de Von Neumann em todo o tempo, equação (5.119), como uma função do parâmetro ξ .

5.4.2 Evolução do grau de impureza

Uma outra situação é descrita quando tomamos uma matriz densidade $\tilde{\rho}(t)$, reduzida em relação a todos os modos dos campos próprios dos átomos A e B. Isto significa “absorver” todos os campo e “isolar” os átomos vestidos A e B. Isto representa um estado $|\Xi(t)\rangle$

associado a $\tilde{\rho}(t)$, diferente de $|\Psi(t)\rangle$. Dos elementos de matriz Eq. (5.76) verificamos que $Tr\tilde{\rho}^2 \neq 1$; isto significa que o estado descrito pela matriz $\tilde{\rho}$ não é puro. O grau de impureza do estado quântico $|\Xi(t)\rangle$, é dado pela equação (5.79); na figura 5.4 mostramos o comportamento da função $D(t, \xi)$ para o caso de dois átomos idênticos nos limites de pequena e grande cavidade.

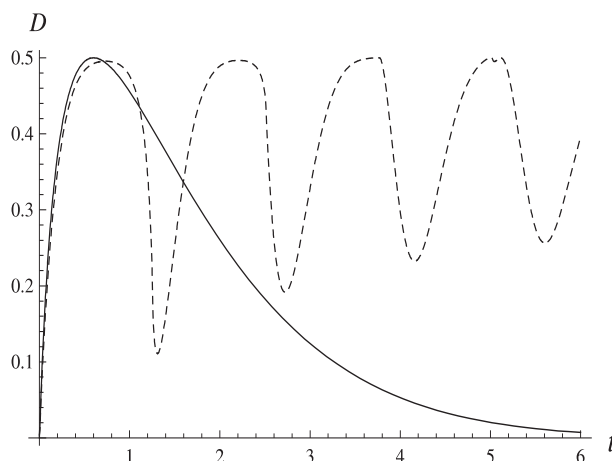


Figura 5.4: O comportamento do grau de pureza $D(t, \xi)$ como função do tempo para uma cavidade pequena (linha pontilhada) e grande cavidade (linha sólida); tomamos os parâmetros $g = 0.5$, $\delta = 0.1$ e $\bar{\omega} = 1.0$.

Da figura (5.4) vemos que o grau de impureza, dado pela equação (5.79), vai a zero quando $t \rightarrow \infty$ para grandes cavidades, pois $|f_{00}(t)|^2 \rightarrow 0$, mostrando que no espaço livre, numa cavidade arbitrariamente grande ($R \rightarrow \infty$), o sistema é dissipativo; com o passar do tempo, ambos os átomos vão ao estado fundamental. Para uma cavidade pequena, tomando $\delta = 0.1$, $\bar{\omega} = 1.0$ e $g = 0.5$, o sistema nunca decai completamente, pois $|f_{00}(t)|^2$ é uma função que oscila com o tempo, tendo um mínimo dado por (5.106).

5.4.3 A Concorrência e a Negatividade

Calculamos a seguir duas grandezas importantes que analisam se o sistema está emaranhado, no caso como o nosso, em que tratamos no instante t com um estado de mistura (não-puro). São elas, a concorrência e a negatividade (ver Ref. [124]), que no nosso caso, para átomos idênticos, são dadas respectivamente por (ver demonstração destas

quantidades no apêndice E):

$$C_\rho(t) = 2\sqrt{\xi(1-\xi)} |f_{00}(t)|^2 \quad (5.120)$$

e

$$N_\rho(t) = \sqrt{(1-\xi|f_{00}(t)|^2)^2 + 4\xi(1-\xi)|f_{00}(t)|^4} - 1 + \xi|f_{00}(t)|^2, \quad (5.121)$$

onde adotamos a notação $f_{AA}(t) = f_{BB}(t) \equiv f_{00}(t)$.

Ambas as quantidades são calculadas nos casos do limite de uma cavidade arbitrariamente grande e de uma pequena cavidade. Na figura 5.5, estão descritas os comportamentos da concorrência e da negatividade com o tempo, no limite de uma cavidade arbitrariamente grande. Vemos que ambas as quantidades tendem a zero para $t \rightarrow \infty$, o que significa que o emaranhamento inicial do estado biatômico se desfaz com o passar do tempo. Na figura 5.6 está ilustrada a evolução temporal da concorrência e da negatividade numa cavidade pequena. Vemos que, ao contrário do que ocorre numa cavidade arbitrariamente grande (espaço livre), a concorrência e a negatividade comportam-se ambas como funções oscilatórias, cujos mínimos são estritamente positivos. Isto significa que, numa cavidade pequena, o emaranhamento original do estado nunca se desfaz completamente.

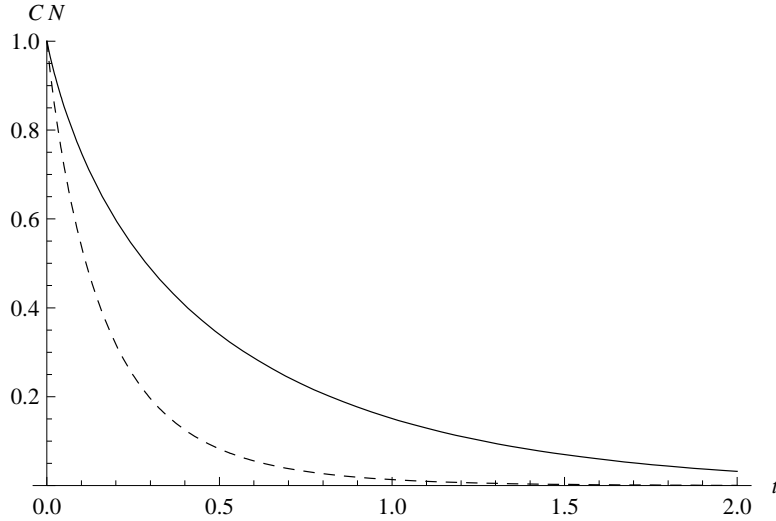


Figura 5.5: O comportamento da concorrência (linha cheia) e negatividade (linha tracejada) como funções do tempo, para estados com $\xi = 0.5$, $\bar{\omega} = 1.5$ e $g = 1.0$ (unidades arbitrárias), para uma cavidade arbitrariamente grande.

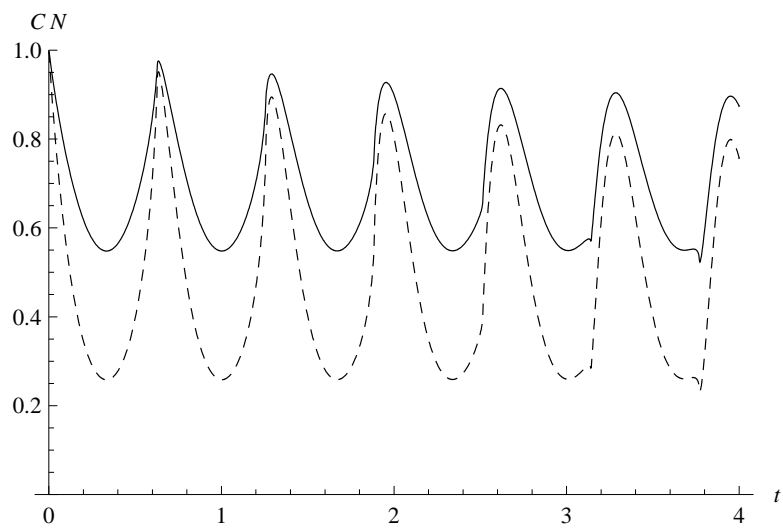


Figura 5.6: O comportamento da concorrência (linha cheia) e da negatividade (linha tracejada) como funções do tempo, para estados com $\xi = 0.5$, $\bar{\omega} = 1.5$ e $g = 1.0$ (unidades arbitrárias), para uma cavidade pequena, com $\delta = 0.1$.

Considerações Finais

Apresentamos, a seguir, um resumo dos principais resultados discutidos no presente trabalho, bem como algumas perspectivas de prosseguimento das pesquisas.

Efeito Casimir Dinâmico

No Cap. 1, enfocando as vantagens da abordagem de Fulling-Davies para o caso do campo escalar não massivo em $1 + 1$ dimensões, mostramos qual é a força dinâmica de Casimir exata que atua sobre uma fronteira em movimento sob a condição de Neumann, com o vácuo como o estado inicial do campo, generalizando o resultado não-relativístico encontrado na Ref. [60]. Para o campo térmico, considerando ambas as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, escrevemos a fórmula exata para a força térmica, que generaliza a fórmula aproximada proposta na Ref. [52] e que é também encontrada, por exemplo, nas Refs. [53, 54, 57, 58, 60]. Para fronteiras com velocidades relativísticas, nossa fórmula deve ser usada, em vez da fórmula aproximada encontrada em [52].

No Cap. 2, mostramos fórmulas que nos permitem obter resultados exatos para a força de radiação quântica e a densidade de energia numa cavidade não-estática com uma lei de movimento e estado inicial do campo arbitrários, incluindo movimentos não oscilatórios, com grandes deslocamentos e relativísticos, que estão fora do alcance das abordagens perturbativas encontradas na literatura. Para casos particulares cujo estado inicial do campo é o vácuo, condição de contorno de Dirichlet, velocidades não relativísticas ou no limite de grande cavidades, nossos resultados reproduzem os resultados encontrados na literatura para força que atua sobre a fronteira em movimento [1, 16, 100, 52, 53, 60]. Focando no problema de numa cavidade oscilante no vácuo, encontramos uma notável diferença entre

os casos misto e não misto: para uma mesma lei de movimento para a fronteira oscilante, com o mesmo comprimento de cavidade estática, podemos não encontrar a criação de partículas no caso não misto e, em contraste, termos ressonância na criação de partículas no caso misto.

No Cap. 3, mostramos fórmulas obtidas que nos permitem conseguir valores exatos para a densidade de energia do campo e a força quântica que atua sobre as fronteiras de uma cavidade, para leis de movimento arbitrárias para as fronteiras, sendo o vácuo o estado inicial do campo. Analisamos em detalhes os limites dessas fórmulas, mostrando que, para os casos particulares de uma cavidade com apenas uma fronteira em movimento, velocidades não-relativísticas, ou no limite de grande cavidades (um único espelho), nossos resultados estão de acordo com aqueles encontrados na literatura [1, 5, 16, 34, 100]. Os presentes resultados nos permitem investigar diversos problemas (usualmente tratados por abordagens perturbativas na literatura) com uma abordagem exata e também fora do regime de pequenas amplitudes. Por exemplo, aqueles relacionados a forças inerciais no efeito Casimir com dois espelhos em movimento [45], ou o fenômeno da interferência na produção de fótons [44]. Estas questões estão sob investigação e serão discutidas em trabalhos futuros. Uma extensão, ainda, seria generalizar, para estados arbitrários do campo, as fórmulas mostradas no presente trabalho.

No Cap. 4, apresentamos o pacote *Dynamical Casimir*, com o qual é possível reproduzir vários resultados encontrados na literatura, incluindo (nos limites apropriados) aqueles aproximados encontrados via abordagens diferentes, o que reforça tanto a validade do programa quanto do método de cálculo no qual o programa se baseou. O pacote pode dar resultados para movimentos de grandes amplitudes, relativísticos, que estão fora do alcance das abordagens perturbativas encontradas na literatura. Esta ferramenta computacional ficará disponível para a comunidade científica, e poderá ser útil a quem investiga o ECD. Extensões possíveis para o pacote incluem o cálculo de coeficientes de Bogoliubov, número de partículas criadas, além de uma série de ferramentas que permitam a investigação de efeitos como interferência, descoerência e emaranhamento em cavidades dinâmicas. Provavelmente, deveremos implementar uma vertente do pacote em linguagem Fortran ou C, a fim de que se tenha resultados mais rápidos e precisos.

Durante a elaboração do presente trabalho, tentamos, ainda, investigar o ECD em um

espaço-tempo em 2+1 dimensões, especificamente no contexto de uma teoria de Maxwell com o termo de massa de Chern-Simons. Não chegamos ao ECD para esse modelo, mas em nosso processo de estudo obtivemos resultados intermediários, no contexto do Efeito Casimir estático, e que foram publicados na Ref. [6]. Este trabalho discute o papel das diferentes condições de contorno no efeito Casimir entre linhas paralelas. Verificamos que, quando consideramos duas linhas paralelas infinitamente permeáveis, obtemos uma força de Casimir atrativa, tal como já se sabia ocorrer para linhas condutoras. Entretanto, quando temos uma cavidade mista (uma linha condutora e outra permeável), a força é repulsiva. Finalmente, vimos que, para um mesmo comprimento da cavidade e mesma massa topológica, a magnitude da força de Casimir no caso misto é maior do que no caso não misto. As magnitudes da força de Casimir nos casos misto e não-misto dependem ainda da massa topológica de modo diferente: o aumento da massa topológica diminui o valor absoluto da força, mas no caso misto essa queda ocorre mais rapidamente. A perspectiva é seguir investigando o modelo no contexto do ECD.

Emaranhamento

Sistemas não interagentes têm sido, e são, objeto de intensa investigação no campo da teoria da informação quântica. Em [125], foi investigado o emaranhamento numa estrutura mesoscópica consistindo de partes não interagentes. Estes autores estudaram as correlações dependentes do tempo, elétron-elétron e elétron-buraco num aparato mesoscópico e analisaram o emaranhamento por meio do teste da desigualdade de Bell e dos testes de desigualdade baseados na coincidência das probabilidades. Como já mencionado anteriormente, no âmbito da teoria da computação quântica, uma situação conceitualmente próxima a esta que investigamos aqui, é estudada em [126]: dois qubits não interagentes, inicialmente preparados num estado emaranhado, são acoplados aos seus ambientes, *independentemente* e evoluem sob sua influência. Estes autores encontraram condições para o emaranhamento não nulo a qualquer tempo, para ambas as temperaturas nula e não nula. Também, em [127], é apresentado um estudo da evolução do emaranhamento de dois átomos remotos interagindo independentemente com o campo da cavidade. Em [128], o emaranhamento é abordado para um conjunto de elétrons não interagentes. Este

autor pretende que, neste contexto, o efeito Hall quântico possa ser pensado como uma base para a computação quântica.

O estudo dos estados emaranhados de sistemas não interagentes é interessante por si só. Como claramente exposto em [129], emaranhamento pode existir como um efeito puramente quântico para um conjunto de *partículas não interagentes*, que são descritas pela mesma função de onda. Emaranhamento significa que partículas individuais não são independentes uma da outra, mesmo se elas não interagem, e suas propriedades quânticas são indissociavelmente “amarradas”. Este fato é a origem da denominação original de Schrödinger, *verschränkte Zustände*, para estes estados. Neste contexto, a influencia de um átomo sobre outro *não* é devida à interação entre eles, mas sim devida à atribuição de *significado físico para a superposição de estados*, um conceito sem correspondência na física clássica.

No que concerne aos resultados obtidos nesta secção destacamos os comportamentos contrastantes do sistema em uma cavidade arbitrariamente grande (espaço livre) e em uma cavidade pequena. Se adotamos a idéia de que estados emaranhados carregam informação, poderíamos tecer especulações sobre a utilização de cavidades de dimensões apropriadas para uma “estocagem quântica de dados”.

No estudo de estados atômicos bipartite, no Capítulo 5, o emaranhamento do sistema consiste da superposição dos estados do sistema bipartite, que no instante $t < 0$, são dados por (5.62). O comportamento da evolução temporal deste estado é descrito pelo operador matriz densidade (5.66). A partir daí podemos verificar o grau de pureza (ou grau de mistura dos estados) deste estado calculando a função definida na Eq. (5.79), considerando que estes átomos são idênticos. Fizemos o estudo da amplitude de probabilidade $|f_{AA}(t)|^2$, dada pela Eq. (5.60), para os limite de grande cavidade ($R \rightarrow \infty$) - espaço livre - e pequena cavidade. O grau de emaranhamento do sistema pode ser descrito pela entropia de Von Neumann Eq. (5.111), mostrando que a natureza do sistema emaranhado não depende do tamanho da cavidade, mas o que vai indicar se o sistema permanece emaranhado ou não, pode ser conferido com as funções da Concorrência e da Negatividade definidas, respectivamente, em (5.120) e (5.121). Concluimos que no limite de grande cavidade o emaranhamento, com o passar do tempo, se desfaz, enquanto que, no limite de pequena cavidade o emaranhamento nunca se desfaz completamente.

Apêndice A

Código do Pacote *Dynamical Casimir*

Neste apêndice exibimos o código em Maple [105] do pacote *Dynamical Casimir*. O presente apêndice derivou da Ref. [9].

A.1 Rotinas para cavidade com uma fronteira em movimento

Esta seção contém o código Maple que correspondente ao arquivo `dynamical_casimir_package.mm`, mencionado no Cap. 4.

```
#####  
# We present a Maple package for doing calculation of the energy  
# density inside a one-dimensional non-static cavity with an arbitrary  
# initial field state.  
#  
# Authors: D. T. Alves(1,*) and E. R. Granhen(2,3)  
# (1)-Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará,  
# 66075-110, Belém, PA, Brazil  
#  
# (2)-Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rua Dr. Xavier Sigaud,  
# 150, 22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brazil
```

```

#
# (3)-Faculdade de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará,
# 68505-080, Marabá, PA, Brazil
#
# (*) Corresponding author. Email address: danilo@ufpa.br ;
# danilo.t.alves@gmail.com
#
# ABSTRACT:
# We present a Maple package for doing calculation of the exact value
# of the energy density for a real massless scalar field in a
# two-dimensional spacetime, inside a non-static cavity with an arbitrary
# initial field state. The routines are based on the exact numerical
# approach proposed by Cole and Schieve (Phys. Rev. A 52 (1995) 4405),
# and also on the extension
# of this approach to an arbitrary initial field state developed by the
# present authors in collaboration with Lima and Silva
# (Phys. Rev. D 81 (2010) 025016).
#####

'The Dynamical Casimir package commands: [n, A, B, A_tilde, B_tilde, h, g, R]';

#####
# Routine for calculation of the function "n" (number of reflections)
# (see Ref. D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima,
# Phys. Rev. D 81, 025016 (2010)).
#
# The output of the routine "n" also
# can give: (i) the z_tilde = t[n]-q(t[n]);
# (ii) a list with the sequence of the instants of the
# reflections.

```

```

n := proc(q,z,s)
local z_final, z_, z1, zz, zz1, Z,sequence_of_instants,
n1, nt, i, number_of_reflections, list_of_instants, L0;
z_ := evalf(z):
n1 := 0:
Z[0] := z_:
L0 := q(0):
sequence_of_instants := NULL:
if z_<=L0 then
sequence_of_instants := fsolve(z_=t[1]+q(t[1]),t[1]):
else z1 := z_:
for i from 1 while(z1>L0) do
zz := z1 = t[i] + q(t[i]):
zz1 := fsolve(zz,t[i]):
sequence_of_instants := sequence_of_instants, zz1:
zz := evalf(q(zz1)):
z1 := zz1 - zz:
Z[i] := z1:
n1 := n1 + 1:
od:
fi:
number_of_reflections := n1:
z_final := Z[n1]:
list_of_instants := [sequence_of_instants]:
if s = 1 then
return(number_of_reflections)
elif s = 2 then
return(z_final)
elif s = 3 then
return(list_of_instants)
elif s = 12 then

```



```

return([number_of_reflections,z_final]):
elif s = 123 then
return([number_of_reflections,z_final, list_of_instants]):
fi:
end:

#####
# Routine for calculation of the function "R" (Moore's function)
# (see Cole and Schieve, Phys. Rev. A 52, 4405 (1995)).
R := proc(q,z)
local zz_final, zz_, zz0, zz_n;
zz0 := q(0):
zz_ := n(q,z,12):
zz_n := op(1,zz_):
zz_final := op(2,zz_):
2*zz_n+1/zz0*zz_final:
end:

#####
# Routine for calculation of the auxiliary functions "A" and "B" defined
# in Ref. D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima,
# Phys. Rev. D 81, 025016 (2010).
A := (L,t) -> (-1+D(L)(t))^2/(1+D(L)(t))^2:
B := (L,t) -> -1/(12*Pi)/(1-D(L)(t))/(1+D(L)(t))^3*@@'(D,3)(L)(t)
-1/4*@@'(D,2)(L)(t)^2*D(L)(t)/Pi/(-1+D(L)(t))^2/(1+D(L)(t))^4:

#####
# Routine for calculation of the functions "A_tilde" defined
# in Ref. D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima,
# Phys. Rev. D 81, 025016 (2010).
A_tilde := proc(q,z)

```

```

local A_, zz, list_of_instants, n_, zz_n:
zz_n := n(q,z,123):
n_ := op(1,zz_n):
list_of_instants := op(3,zz_n):
zz := product(A_(q,t[i]),i=1..n_):
zz := subs(A_=A, zz):
zz := subs(L=q,zz):
zz := subs({seq(t[i]=op(i,list_of_instants),i=1..n_)},zz);
zz := evalf(%):
end:

```

```
#####
```

```

# Routine for calculation of the functions "B_tilde" defined
# in Ref. D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima,
# Phys. Rev. D 81, 025016 (2010).

```

```

B_tilde := proc(q,z)
local A_, B_, zz, list_of_instants, n_, zz_n:
zz_n := n(q,z,123):
n_ := op(1,zz_n):
list_of_instants := op(3,zz_n):
zz:=value(sum(B_(q,t[n_+1-j])*product(A_(q,t[i]),i=1..n_-j),j=1..n_)):
zz := subs(A_=A, B_=B, zz):
zz := subs(L=q,zz):
zz := subs({seq(t[i]=op(i,list_of_instants),i=1..n_)},zz);
zz := evalf(%):
end:

```

```
#####
```

```

# Routine for calculation of the function "h" defined
# in Ref. D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima,
# Phys. Rev. D 81, 025016 (2010).

```

```

h := proc(g,q,z)
local h_static, z_final, L, zz, zz_n,
f_, mm, ww, n_, nt, i, number_of_reflections, list_of_instants;
zz_n := n(q,z,123):
number_of_reflections := op(1,zz_n):
z_final := op(2,zz_n):
list_of_instants := op(3,zz_n):
h_static := g(z_final):
n_ := number_of_reflections;#The number of reflections off the moving boundary.
if n_=0 then
return(evalf(h_static))
fi:
nt := n_-1;
mm := f_(t+L(t)) = f_(t-L(t))*A_(L,t)+B_(L,t):
for i from 1 to n_ do
ww||(i) := subs(t=t[i],mm):
od;
zz := subs(t=t[1],rhs(mm));
for i from 1 to nt do
ww := subs(L(t[i])=t[i]-t[i+1]-L(t[i+1]),zz);
zz := subs(ww||(i+1),ww);
od;
zz := subs(L(t[i])=t[i]-z_final,zz);
zz := subs({f_(z_final)=h_static},zz);
zz := subs(A_=A,B_=B,zz):
zz := subs(L=q,zz):
zz := subs({seq(t[i]=op(i,list_of_instants),i=1..n_)},zz);
zz := subs({f_(0)=h_static},zz);
zz := evalf(%);
end:

```

```

#####
# Routine for calculation of the function "g" defined
# in Ref. D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima,
# Phys. Rev. D 81, 025016 (2010).
g := proc(g,q,z)
local h_static, z_final, L, zz, zz_n,
f_, mm, ww, n_, nt, i, number_of_reflections, list_of_instants;
zz_n := n(q,z,123):
number_of_reflections := op(1,zz_n):
z_final := op(2,zz_n):
list_of_instants := op(3,zz_n):
h_static := g(z_final):
n_ := number_of_reflections;#The number of reflections off the moving boundary.
if n_=0 then
return(evalf(h_static))
fi:
nt := n_-1;
mm := f_(t+L(t)) = f_(t-L(t))*A_(L,t):
for i from 1 to n_ do
ww||(i) := subs(t=t[i],mm):
od;
zz := subs(t=t[1],rhs(mm));
for i from 1 to nt do
ww := subs(L(t[i])=t[i]-t[i+1]-L(t[i+1]),zz);
zz := subs(ww||(i+1),ww);
od;
zz := subs(L(t[i])=t[i]-z_final,zz);
zz := subs({f_(z_final)=h_static},zz);
zz := subs(A_=A,B_=B,zz):
zz := subs(L=q,zz):
zz := subs({seq(t[i]=op(i,list_of_instants),i=1..n_)},zz);

```

```

zz := subs({f_(0)=h_static},zz);
zz := evalf(%);
end:

```

```
#####
```

A.2 Rotinas para cavidade com duas fronteiras móveis

```
#####
```

```

# ADAPTAÇÃO PARA DUAS FRONTEIRAS
# Esta parte da rotina foi elaborada apenas para o caso em que o campo
# obedece em ambas as fronteiras a condição de Dirichlet e para
# o vácuo como estado inicial do campo

```

```
#####
```

```
# Authors: Danilo T. Alves and Edney R. Granhen
```

```
#####
```

```

routines_2F := module()
option package;
local A, B, A1, B1;
export fG, fF;
#####
# Rotina fG
# Entradas: z
# Saida: fG(z)
fG := proc(z)
local z_, zz, L, n, n1, n2, z1, i, zz1, Z, j, sequencia_instantes, zfinal,
fG_, fF_, A_, B_, A1_, B1_, nn, mm, ww, r0,
menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica,
Numero_Recorrencias, Lista_Instantes;
#option trace:
z_ := evalf(z):

```

```

n1 := 0:
n2 := 0:
Z[0] := z_:
sequencia_instantes := NULL:
menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica := 1/48*Pi*(1/L0)^2:
if z_<=L0 then
return(evalf(menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica)):
else
z1 := z_:
for i from 1 by 2 while(z1>L0) do
zz := z1 = t[i] + r(t[i]):
zz1 := fsolve(zz,t[i]):
zz := evalf(r(zz1)):
z1 := zz1 - zz:
sequencia_instantes := sequencia_instantes, zz1:
n1 := n1 + 1:
if z1>0 then
zz := z1 = t[i+1] - l(t[i+1]):
zz1 := fsolve(zz,t[i+1]):
zz := evalf(l(zz1)):
z1 := zz1 + zz:
sequencia_instantes := sequencia_instantes, zz1:
n1 := n1 + 1:
fi:
Z[i] := z1:
n2 := i:
od:
fi:
Numero_Recorrencias := n1:
Lista_Instantes := [sequencia_instantes]:
z1 := z;

```

```

r0 := r(0):
n := Numero_Recorrencias;
if n=0 then return(evalf(menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica)) fi:
mm := fG_(t+L_r(t)) = fF_(t-L_r(t))*A_(t)+B_(t);
nn := fF_(t-L_l(t)) = (fG_(t+L_l(t)) - B1_(t))/A1_(t):
n1:= n;
for i from 1 by 2 to n1 do ww||i:=subs(t=t[i],mm); od;
for i from 2 by 2 to n1 do ww||i:=subs(t=t[i],nn); od;
zz:=subs(t=t[1],rhs(mm));
for i from 1 by 2 to n1-1 do
ww:=subs(L_r(t[i])=t[i]-t[i+1]+L_l(t[i+1]),zz); zz:=subs(ww||(i+1),ww);
ww:=subs(L_l(t[i+1])=-t[i+1]+t[i+2]+L_r(t[i+2]),zz);
if i+2<=n1 then
zz:=subs(ww||(i+2),ww);
fi;
zz;
od;
if n1=0 then
return(menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica)
elif type(n1,odd) then
zz:=subs(L_r(t[i])=t[i]-zfinal,zz)
else zz:=subs(L_l(t[i-1])=-t[i-1]+zfinal,zz)
fi;
if type(n1,odd) then
zz := subs({fF_(zfinal)=menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica},zz);
else zz := subs({fG_(zfinal)=menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica},zz);
fi;
zz;
n1:=n:
zz1 := {seq(A_(t[m])=
A(t[m]),m=1..n1),seq(B_(t[m])=B(t[m]),m=1..n1),seq(A1_(t[m])=A1(t[m]),m=

```

```

1..n1),seq(B1_(t[m])=B1(t[m]),m=1..n)}:
zz := subs(zz1,zz);
zz1:=
{seq('@@'(D,1)(L_r)(t[m])=diff(r(t[m]),t[m]),m=1..n1),seq('@@'(D,
2)(L_r)(t[m])=diff(r(t[m]),t[m]$2),m=1..n1),seq('@@'(D,3)(L_r)(t[m])=
diff(r(t[m]),t[m]$3),m=1..n1),seq('@@'(D,1)(L_1)(t[m])=diff(l(t[m]),
t[m]),m=1..n1),seq('@@'(D,2)(L_1)(t[m])=diff(l(t[m]),t[m]$2),m=1..n1),
seq('@@'(D,3)(L_1)(t[m])=diff(l(t[m]),t[m]$3),m=1..n1)}:
zz := subs(zz1,zz);
zz := evalf(subs({seq(t[i]=op(i,Lista_Instantes),i=1..n)},zz));
end:

#####
# Rotinas A, B, A1, B1
# Entradas: t
# Saida: A_fG(t)
A := t-> (-1+D(L_r)(t))^2/(1+D(L_r)(t))^2:
B := t-> -1/12/Pi/(1-D(L_r)(t))/(1+D(L_r)(t))^3*@@'(D,3)(L_r)(t)
-1/4*@@'(D,2)(L_r)(t)^2*D(L_r)(t)/Pi/(-1+D(L_r)(t))^2/(1+D(L_r)(t))^4;
A1 := t-> (-1+D(L_1)(t))^2/(1+D(L_1)(t))^2:
B1 := t-> -1/12/Pi/(1-D(L_1)(t))/(1+D(L_1)(t))^3*@@'(D,3)(L_1)(t)
-1/4*@@'(D,2)(L_1)(t)^2*D(L_1)(t)/Pi/(-1+D(L_1)(t))^2/(1+D(L_1)(t))^4:

#####
# Rotina fF
# Entradas: z
# Saida: fF(z)
fF := proc(z)
local zz, zz1, zz2, menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica:
menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica := 1/48*Pi*(1/L0)^2:
if z<=0 then return(evalf(menos_meio_vezes_energia_casimir_estatica)) fi:

```



```

zz := evalf(z) = x - l(x):
zz1 := fsolve(zz, x):
zz := evalf(2*zz1 - z):
zz2:=subs({L_1=1},(fG(zz)-B1(zz1))/A1(zz1));
evalf(%);
end:

#####
end module;

```

Apêndice B

Transformação da Hamiltoniana para eixos principais

O sistema constituído de um oscilador acoplado ao campo escalar é descrito pela Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \left[p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \right] - q_0 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_k, \quad (\text{B.1})$$

onde (p_0, q_0) e (p_k, q_k) são os momenta e as coordenadas “nuas”, ou não vestidas, e $\eta = \sqrt{4g\Delta\omega/\pi}$, um parâmetro que depende da constante de acoplamento entre o campo e átomo. Reescrevemos a Hamiltoniana em termos das coordenadas e momenta normais dados pela relação:

$$q_\mu = \sum_{r=0}^N t_\mu^r Q_r; \quad p_\mu = \sum_{r=0}^N t_\mu^r P_r, \quad (\text{B.2})$$

onde (t_μ^r) é uma matriz ortonormal. Fazendo uso desta relação na Hamiltoniana, obtemos

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r,s=0}^N [t_0^s t_0^r + t_k^s t_k^r] P_s P_r + \sum_{r,s=0}^N \left[t_0^s t_0^r \omega_0^2 + \sum_{k=1}^N \omega_k^2 t_k^s t_k^r - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k t_0^r t_k^s \right] Q_s Q_r \right\}.$$

Os elementos t_μ^r obedecem à relação de ortogonalidade

$$\sum_{\mu} t_\mu^s t_\mu^r = \delta^{rs};$$

logo a Hamiltoniana torna-se:

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r=0}^N P_r^2 + \sum_{r,s=0}^N \left[t_0^s t_0^r \omega_0^2 + \sum_{k=1}^N \omega_k^2 t_k^s t_k^r - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k t_0^r t_k^s \right] Q_s Q_r \right\}.$$

Definimos A^{rs} o fator no somatório do segundo termo, escrito como,

$$A^{rs} = t_0^r \left(t_0^s \omega_0^2 - \sum_{k=1}^N \eta \omega_k t_k^s \right) + \sum_{k=1}^N t_k^s (\omega_k^2 t_k^r - \eta \omega_k t_0^r); \quad (\text{B.3})$$

esta definição deixa a Hamiltoniana com a seguinte estrutura:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N P_r^2 + \sum_{r,s=0}^N A^{rs} Q_s Q_r. \quad (\text{B.4})$$

Mostraremos que a equação (B.3) leva às frequências normais mais adiante. Usando as equações de Lagrange na Lagrangeana (5.1) obtemos a equação diferencial do campo,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi - \nabla^2 \Phi - \sqrt{8\pi g c q_0} \delta^3(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{B.5})$$

substituindo a expansão do campo definida por:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = c \sum_k q_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \quad (\text{B.6})$$

em (B.5) temos:

$$\frac{1}{c} \int \sum_k \ddot{q}_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} - c \sum_k q_k(t) \int \nabla^2 \phi_k(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} - \sqrt{8\pi g c q_0} \int \delta^3(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0; \quad (\text{B.7})$$

os modos do campo obedecem à equação de Helmholtz $\nabla^2 \phi_k(\mathbf{x}) = -\omega_k^2/c^2 \phi_k(\mathbf{x})$, e então a equação (B.7) torna-se:

$$\frac{1}{c} \int \sum_k \ddot{q}_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + \sum_k q_k(t) \frac{\omega_k^2}{c} \int \phi_k(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} - \sqrt{8\pi g c q_0} \int \delta^3(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Usando a equação (5.9) no limite em que $\mathbf{y} \rightarrow 0$, podemos escrever $\delta^3(\mathbf{x})$ em termos da relação de completeza:

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow 0} \sum_k \phi_k(\mathbf{x}) \phi_k^*(\mathbf{y}) = \frac{\delta^3(\mathbf{x})}{\hbar^2};$$

substituindo esta relação em (B.8) e agrupando os modos $\phi_k(\mathbf{x})$, temos:

$$\int \left[\frac{1}{c} \sum_k \ddot{q}_k(t) + \frac{1}{c} \sum_k q_k(t) \omega_k^2 - \hbar^2 \sqrt{8\pi g c q_0} \sum_k \phi_k^*(\mathbf{0}) \right] \phi_k(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Escrevendo a equação de Helmholtz em coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \phi_k(r) \right) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} \phi_k(r) \quad (\text{B.10})$$

cuja solução ortonormalizada é

$$\phi_k(r) = \frac{1}{\hbar \sqrt{2\pi R}} \frac{\sin \frac{\omega_k r}{c}}{r}; \quad (\text{B.11})$$

e tomando o limite de $r \rightarrow 0$ nesta solução obtemos,

$$\phi_k(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \phi_k(r) = \frac{\omega_k}{\hbar c \sqrt{2\pi R}}. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo (B.12) em (B.9) temos:

$$\int \left[\frac{1}{c} \sum_k \ddot{q}_k(t) + \frac{1}{c} \sum_k q_k(t) \omega_k^2 - \frac{1}{c} \hbar q_0 \sum_k \sqrt{4 \frac{g\pi c}{\pi R}} \omega_k \right] \phi_k(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0,$$

sabendo que o intervalo entre as frequências do campo é dada por $\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i = c\pi/R$ e que podemos redefinir o parâmetro g em termos de η , esta última equação torna-se:

$$\int \sum_k \frac{1}{c} [\ddot{q}_k(t) + q_k(t) \omega_k^2 - \hbar \eta q_0 \omega_k] \phi_k(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0, \quad (\text{B.13})$$

Da equação (B.13) obtemos a equação diferencial para as coordenadas do campo,

$$\ddot{q}_k(t) + q_k(t) \omega_k^2 - \hbar \eta q_0 \omega_k = 0. \quad (\text{B.14})$$

Das equações de Lagrange derivadas da Eq. (5.1) obtemos também a equação diferencial para o átomo:

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 - \hbar \int \sqrt{8\pi g c} \Phi \delta^3(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0, \quad (\text{B.15})$$

substituindo a expansão do campo (B.6) e o limite (B.12) em (B.15,) temos

$$\begin{aligned} \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 - \hbar \sqrt{8\pi g c} \sum_k q_k(t) \int \phi_k(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} &= 0 \\ \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 - c \hbar \sqrt{8\pi g c} \sum_k q_k(t) \phi_k(0) &= 0 \\ \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 - c \hbar \sqrt{8\pi g c} \sum_k q_k(t) \frac{\omega_k}{c \hbar \sqrt{2\pi R}} &= 0 \\ \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 - \sum_k q_k(t) \omega_k \sqrt{4 \frac{g \pi c}{\pi R}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

e ao final obtemos a equação diferencial para o oscilador mecânico (o átomo)

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 - \eta \sum_k \omega_k q_k(t) = 0. \quad (\text{B.17})$$

O sistema de osciladores acoplados é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 - \eta \sum_k \omega_k q_k(t) = 0; \\ \ddot{q}_k(t) + q_k(t) \omega_k^2 - \hbar \eta q_0 \omega_k = 0, \end{cases}$$

com $k = 1, 2, \dots, N$. Tomando a transformação da Hamiltoniana para os eixos principais, a Eq. (5.19), descreve o sistema como um todo com cada Ω_r sendo uma frequência possível para o sistema. Supondo que somente o N -ésimo modo vibracional normal, de frequência Ω_N , esteja excitado, temos a solução do oscilador harmônico para a Hamiltoniana (5.19);

$$Q_r = \bar{Q}_N \delta_{Nr} \exp(-i\Omega_N t);$$

com a relação entre as coordenadas Q e q de (5.18) temos,

$$q_\mu = \sum_{s=0}^N t_\mu^s Q_s;$$

$$q_0 = t_0^N \bar{Q}_N \exp(-i\Omega_N t);$$

$$q_k = t_k^N \bar{Q}_N \exp(-i\Omega_N t),$$

onde \bar{Q}_N é uma constante. Substituindo estas relações no sistema de equações (B.18) temos:

$$\begin{aligned} (-\Omega_N^2 + \omega_0^2) t_0^N \bar{Q}_N &= \eta \sum_{k=1}^N \omega_k t_k^N \bar{Q}_N; \\ (-\Omega_N^2 + \omega_k^2) t_k^N \bar{Q}_N &= \eta \omega_k t_0^N \bar{Q}_N; \end{aligned}$$

então chegamos às identidades mais gerais fazendo $N = r$

$$t_k^r = \frac{\eta \omega_k}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} t_0^r \quad (\text{B.18})$$

e

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)}. \quad (\text{B.19})$$

Com o uso da relação de ortogonalidade da matriz T , usando (B.18), chegamos à expressão para o elemento de matriz t_0^r em (5.24); a identidade (B.19) é usada na renormalização da frequência. Substituindo (B.18) em (B.3) podemos simplificar este termo do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
A^{rs} &= t_0^r \left(t_0^s \omega_0^2 - \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_s^2)} t_0^s \right) + \sum_{k=1}^N t_k^s \left(\frac{\eta \omega_k^3}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} t_0^r - \eta \omega_k t_0^r \right) \\
&= t_0^r \left(t_0^s \omega_0^2 - \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_s^2)} t_0^s \right) + \sum_{k=1}^N t_k^s t_0^r \frac{\eta \omega_k \Omega_r^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} \\
&= t_0^r t_0^s \omega_0^2 - \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_s^2)} t_0^r t_0^s + \sum_{k=1}^N \Omega_r^2 \frac{\eta \omega_k}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} t_0^r t_k^s;
\end{aligned}$$

a relação (B.19) pode ser escrita como:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_0^2 - \Omega_r^2)(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} = 1; \tag{B.20}$$

nesta forma podemos usa-la no primeiro termo de A^{rs} , simplificando-o ainda mais,

$$\begin{aligned}
A^{rs} &= \sum_{k=1}^N \omega_0^2 \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_0^2 - \Omega_s^2)(\omega_k^2 - \Omega_s^2)} t_0^r t_0^s - \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_s^2)} t_0^r t_0^s + \sum_{k=1}^N t_k^r t_k^s \Omega_r^2 \\
&= \sum_{k=1}^N \left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega_s^2)} - 1 \right] \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_s^2)} t_0^r t_0^s + \sum_{k=1}^N t_k^r t_k^s \Omega_r^2 \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_s^2}{(\omega_0^2 - \Omega_s^2)} \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_s^2)} t_0^r t_0^s + \sum_{k=1}^N t_k^r t_k^s \Omega_r^2. \tag{B.21}
\end{aligned}$$

O primeiro termo identificamos à relação (B.20) e por fim obtemos:

$$A^{rs} = \sum_{\mu} t_{\mu}^r t_{\mu}^s \Omega_r^2,$$

que substituindo na Hamiltoniana (B.4) juntamente com a relação de ortogonalidade da matriz (t_{μ}^r) , dá

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N P_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N \sum_{\mu} t_{\mu}^r t_{\mu}^s \Omega_r^2 Q_s Q_r \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N P_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N \delta^{rs} \Omega_r^2 Q_s Q_r;
\end{aligned}$$

assim obtemos a Hamiltoniana diagonalizada nas coordenadas e momenta normais:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N P_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N \Omega_r^2 Q_r^2. \quad (\text{B.22})$$

Apêndice C

O elemento de matriz t_0^r

Neste apêndice será obtido o elemento de matriz t_0^r . Usando a condição de ortogonalidade para a matriz $T = (t_\mu^r)$:

$$\sum_{\mu} (t_\mu^r)^2 = (t_0^r)^2 + \sum_k (t_k^r)^2 = 1, \quad (\text{C.1})$$

na Eq. (5.23) temos:

$$(t_0^r)^2 + \sum_k \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} (t_0^r)^2 = 1,$$

e em seguida podemos obter o elemento t_0^r

$$t_0^r = \left[1 + \sum_k \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-1/2}. \quad (\text{C.2})$$

Na expressão

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} \quad (\text{C.3})$$

adicionamos e subtraímos o contratermo $\eta^2 \Omega_r^2$ no lado direito da expressão acima,

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \Omega_r^2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2 - \eta^2 \Omega_r^2 + \eta^2 \Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} \\ &= \sum_{k=1}^N \eta^2 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}; \end{aligned}$$

com isso definimos a frequência renormalizada

$$\bar{\omega}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (\omega_0^2 - N\eta^2),$$

obtendo assim a Eq.(C.3) na forma,

$$\bar{\omega}^2 - \Omega_r^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (\text{C.4})$$

Existem $N + 1$ soluções para esta equação, correspondendo aos $N + 1$ modos de vibração do sistema. Para isso definimos o lado direito de (C.4) como a função $f(\Omega)$:

$$f(\Omega) = \eta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2}. \quad (\text{C.5})$$

As frequências normais Ω podem ser escritas como $\Omega = x \frac{\pi c}{R}$, de modo que ao fazermos uso da identidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{x} \cot(\pi x) \right],$$

temos

$$f(\Omega) = \frac{\eta^2}{2} \left[1 - \frac{\Omega R}{c} \cot\left(\frac{\Omega R}{c}\right) \right]. \quad (\text{C.6})$$

A função $f(\Omega)$ de acordo com (C.4) também é dada por $f(\Omega) = \bar{\omega}^2 - \Omega^2$, que ao substituímos em (C.6) leva à equação,

$$\frac{\eta^2}{2} \left[1 - \frac{\Omega R}{c} \cot\left(\frac{\Omega R}{c}\right) \right] = \bar{\omega}^2 - \Omega^2,$$

isolando a cotangente na equação acima e usando a definição do parâmetro $\eta^2 = 4g\Delta\omega/\pi = 4gc/R$, temos

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{\Omega R}{c}\right) &= \frac{c}{\Omega R} - \frac{1}{2g\Omega} \bar{\omega}^2 + \frac{2\Omega}{g} \\ &= \frac{c}{\Omega R} \left[1 - \frac{R\bar{\omega}^2}{2gc} \right] + \frac{\Omega}{2g}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Derivando a função $f(\Omega)$, o lado direito de (C.5), torna-se:

$$\frac{df(\Omega)}{d\Omega} = 2\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2}. \quad (\text{C.8})$$

Voltando à Eq. (C.2) podemos reescreve-la como:

$$t_0^r = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2\Omega} \frac{d}{d\Omega} f(\Omega)}}, \quad (\text{C.9})$$

derivando a função $f(\Omega)$ em (C.6)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\Omega}f(\Omega) &= -\frac{\eta^2}{2}\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{\Omega R}{c}\cot\left(\frac{\Omega R}{c}\right)\right] \\ &= -\frac{\eta^2}{2}\left\{\frac{R}{c}\cot\left(\frac{\Omega R}{c}\right) - \Omega\frac{R^2}{c^2}\left[1 + \cot^2\left(\frac{\Omega R}{c}\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

e substituindo no elemento de matriz t_0^r chegamos a seguinte expressão:

$$t_0^r = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad (\text{C.10})$$

onde

$$B = 1 - \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{2}\left\{\frac{R}{\Omega c}\cot\left(\frac{\Omega R}{c}\right) - \frac{R^2}{c^2}\left[1 + \cot^2\left(\frac{\Omega R}{c}\right)\right]\right\}. \quad (\text{C.11})$$

Podemos escrever em termos da frequência renormalizada do sistema substituindo (C.7) em (C.11),

$$\begin{aligned}B &= 1 - \frac{\eta^2}{4}\left\{\frac{1}{\Omega^2}\left[1 - \frac{2}{\eta^2}(\bar{\omega}^2 - \Omega^2)\right] - \frac{R^2}{c^2} - \frac{1}{\Omega^2}\left[1 - \frac{2}{\eta^2}(\bar{\omega}^2 - \Omega^2)\right]^2\right\} \\ &= \frac{3\Omega^2 - \bar{\omega}^2}{2\Omega^2} + \frac{1}{4}\frac{\eta^2 R^2}{c^2} + \frac{1}{\eta^2\Omega^2}(\bar{\omega}^2 - \Omega^2)^2,\end{aligned}$$

reduzindo a expressão B ao mesmo denominador

$$B = \frac{\eta^2(\bar{\omega}^2 - 3\Omega^2) + 8g^2\Omega^2 + 2(\bar{\omega}^2 - \Omega^2)^2}{2\eta^2\Omega^2},$$

que por fim leva t_0^r a expressão final:

$$t_0^r = \frac{\Omega\eta}{\sqrt{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{\eta^2}{2}(3\bar{\omega}^2 - \Omega^2) + 4\Omega^2g^2}}.$$

Apêndice D

Evolução dos estados vestidos

Discutiremos neste apêndice como se dá a evolução temporal do estado vestido, seguindo a notação de que no instante $t = 0$ o estado é representado pelo ket $|k_0 k_1 \dots; 0\rangle_v$, o índice d indica estado vestido (*vestido*). No instante t o estado é dado por:

$$|k_\lambda k_1 \dots; t\rangle_v = \exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right) |k_\lambda k_1 \dots; 0\rangle_v, \quad (\text{D.1})$$

onde \hat{H} é a Hamiltoniana do sistema dada em (5.19); os autoestados de energia da Hamiltoniana são denotados por $|n_0 n_1 \dots; 0\rangle_c$, que obedecem à equação,

$$\hat{H} |n_0 n_1 \dots; 0\rangle_c = E_{n_0 n_1 \dots} |n_0 n_1 \dots; 0\rangle_c, \quad (\text{D.2})$$

onde os autovalores da energia são escritos como:

$$E_{n_0 n_1 \dots} = \sum_{r=0}^N \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \Omega_r. \quad (\text{D.3})$$

Para estes estados temos a seguinte relação de completeza,

$$\sum_{n_0 n_1 \dots} |n_0 n_1 \dots; 0\rangle_c \langle n_0 n_1 \dots; 0|_c = 1; \quad (\text{D.4})$$

define-se também o ket em termos das coordenadas normais $|Q\rangle = |Q_0 Q_1 \dots; 0\rangle$, com a medida de integração $dQ = \prod_{\mu=0}^N dQ_\mu$, cuja relação de completeza é

$$\int dQ |Q\rangle \langle Q| = \int \int \dots \int dQ_0 dQ_1 \dots |Q_0 Q_1 \dots; 0\rangle \langle Q_0 Q_1 \dots; 0| = 1. \quad (\text{D.5})$$

Aplicamos a relação (D.4) em (D.1) e obtemos:

$$\begin{aligned}
|k_0 k_1 \dots; t\rangle_v &= \sum_{n_0 n_1 \dots} \exp\left(-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t\right) |n_0 n_1 \dots; 0\rangle_c \langle n_0 n_1 \dots; 0 | k_0 k_1 \dots; 0\rangle_v \\
|k_0 k_1 \dots; t\rangle_v &= \sum_{n_0 n_1 \dots} \exp\left(-i \frac{E_{n_0 n_1 \dots}}{\hbar} t\right) |n_0 n_1 \dots; 0\rangle_c \langle n_0 n_1 \dots; 0 | k_0 k_1 \dots; 0\rangle_v \\
&= \sum_{n_0 n_1 \dots} \exp\left(-i \frac{E_{n_0 n_1 \dots}}{\hbar} t\right) T_{k_0 k_1 \dots}^{n_0 n_1 \dots} |n_0 n_1 \dots; 0\rangle_c,
\end{aligned} \tag{D.6}$$

com os coeficientes $T_{k_0 k_1 \dots}^{n_0 n_1 \dots}$ definidos pela amplitude,

$$T_{k_0 k_1 \dots}^{n_0 n_1 \dots} = \langle n_0 n_1 \dots | k_0 k_1 \dots \rangle_v. \tag{D.7}$$

Usando a relação (D.5) escrevemos na forma integral (D.7) como:

$$T_{k_0 k_1 \dots}^{n_0 n_1 \dots} = \int dQ_c \langle n_0 n_1 \dots | Q \rangle \langle Q | k_0 k_1 \dots \rangle_v. \tag{D.8}$$

Neste momento é útil estabelecer a relação entre $\psi_{n_0 n_1 \dots}(q') = \langle q' | n_0 n_1 \dots \rangle_v$ e $\langle Q | n_0 n_1 \dots \rangle_v$; esta demonstração pode ser encontrada também no trabalho [82]. Para isso escrevamos a amplitude de probabilidade:

$${}_v \langle m_0 m_1 \dots | k_0 k_1 \dots \rangle_v = \int dq' {}_v \langle m_0 m_1 \dots | q' \rangle \langle q' | k_0 k_1 \dots \rangle_v,$$

onde a medida de integração $dq' = \prod_{\nu=0}^N dq'_\nu$ se relaciona com a medida $dQ = \prod_{\mu=0}^N dQ_\mu$ pelo Jacobiano $|\partial q' / \partial Q|$, ou seja,

$$dq' = dQ \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right|, \tag{D.9}$$

com isso temos:

$$\begin{aligned}
{}_v \langle m_0 m_1 \dots | k_0 k_1 \dots \rangle_v &= \int dQ \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right| {}_v \langle m_0 m_1 \dots | q' \rangle \langle q' | k_0 k_1 \dots \rangle_v \\
&= \int dQ {}_v \langle m_0 m_1 \dots | Q \rangle \langle Q | k_0 k_1 \dots \rangle_v.
\end{aligned} \tag{D.10}$$

A quantidade $|\partial q' / \partial Q|$ está associada à transformação $q'_\mu \rightarrow Q_r$. De (D.10) chegamos à relação,

$$\langle Q | k_0 k_1 \dots \rangle_v = \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right|^{1/2} \langle q' | k_0 k_1 \dots \rangle_v; \tag{D.11}$$

com isso temos o vetor ket e seu correspondente dual definidos como:

$$\begin{aligned} |Q\rangle &= \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right|^{1/2} |q'\rangle, \\ \langle Q| &= \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right|^{1/2} \langle q'|. \end{aligned}$$

O coeficiente definido em (D.8), com o uso da relação (D.11), torna-se:

$$\begin{aligned} T_{k_0 k_1 \dots}^{n_0 n_1 \dots} &= \int dQ \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right|^{1/2} {}_c \langle n_0 n_1 \dots | Q \rangle \langle q' | k_0 k_1 \dots \rangle_v \\ &= \int dQ \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right|^{1/2} \phi_{n_0 n_1 \dots}^*(Q) \psi_{k_0 k_1 \dots}(q'). \end{aligned}$$

Vamos considerar a função de onda $\psi_{00\dots N(\mu)}(q')$, que indica o μ - ésimo modo no N - ésimo nível excitado (seja do campo ou do átomo), enquanto os demais modos estão no estado fundamental; neste caso, a função de onda para o estado vestido é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_{k_0 k_1 \dots}(q', t) &= \prod_{\mu=0}^N \psi_{k_\mu}(q'), \\ \psi_{k_\mu}(q') &= \left(\frac{\bar{\omega}_\mu}{\pi} \right)^{1/4} (2^{k_\mu} k_\mu!)^{-1/2} H_{k_\mu}(\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu) \Gamma_0(q') \end{aligned}$$

com

$$\Gamma_0(q') = e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^N \bar{\omega}_\mu (q'_\mu)^2},$$

para $k_\mu = N$, e $\bar{\omega}_\mu = \{\bar{\omega}, \omega_i\}$ obtêm-se:

$$\psi_{00\dots N(\mu)}(q') = \prod_{\mu=0}^N \left(\frac{\bar{\omega}_\mu}{\pi} \right)^{1/4} (2^N N!)^{-1/2} H_N(\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu) \Gamma_0(q'). \quad (\text{D.12})$$

A função Γ_0 , de acordo com (5.37), foi construída de modo que o autoestado de vácuo seja um autoestado estável, ou seja,

$$\sum_{\mu=0}^N \bar{\omega}_\mu (q'_\mu)^2 = \sum_{r=0}^N \Omega_r Q_r^2. \quad (\text{D.13})$$

Calcularemos assim o coeficiente

$$T_{00N(\mu)\dots}^{n_0 n_1 \dots} = \int dQ \left| \frac{\partial q'}{\partial Q} \right|^{1/2} \phi_{n_0 n_1 \dots}^*(Q) \psi_{00\dots N(\mu)}(q'); \quad (\text{D.14})$$

substituímos então (D.12) e (5.33) em (D.14) e obtemos,

$$T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} = \int dQ \left| \frac{\partial Q}{\partial q'} \right|^{1/2} \prod_{\mu=0}^N \left(\frac{\bar{\omega}_\mu}{\pi} \right)^{1/4} \tilde{\psi}_N(q') \prod_{s=0} \phi_{n_s}(Q_s)$$

onde

$$\tilde{\psi}_N(q') = (2^N N!)^{-1/2} H_N(\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu) \Gamma_0(q').$$

Usando a relação de transformação entre as coordenadas vestidas e as coordenadas normais,

$$\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu = \sum_l t_\mu^l \sqrt{\Omega_l} Q_l,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} &= \int dQ \left| \frac{\partial Q}{\partial q'} \right|^{1/2} (2^N N!)^{-1/2} H_N \left(\sum_l t_\mu^l \sqrt{\Omega_l} Q_l \right) \prod_{\mu=0}^N \left(\frac{\omega_\mu}{\pi} \right)^{1/4} \Gamma_0(q') \times \\ &\quad \prod_{s=0} \left(\frac{\Omega_s}{\pi} \right)^{1/4} \frac{H_{n_s}(\sqrt{\Omega_s} Q_s)}{\sqrt{2^{n_s} n_s!}} \Gamma_0(Q), \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

então, usando a seguinte identidade

$$\begin{aligned} H_n \left(\sum_{r=0}^N t_\mu^r \sqrt{\Omega_r / \omega_\mu} Q_r \right) &= n! \sum_{s_0+s_1+\dots+s_N=n} \frac{(t_\mu^0)^{s_0}}{s_0!} \frac{(t_\mu^1)^{s_1}}{s_1!} \dots \frac{(t_\mu^N)^{s_N}}{s_N!} \times \\ &\quad H_{s_0}(\sqrt{\Omega_0} Q_0) H_{s_1}(\sqrt{\Omega_1} Q_1) \dots H_{s_N}(\sqrt{\Omega_N} Q_N), \end{aligned}$$

em (D.15) e organizando os termos, temos

$$\begin{aligned} T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} &= \int dQ \left| \frac{\partial Q}{\partial q'} \right|^{1/2} \left[\prod_{\mu=0}^N \left(\frac{\omega_\mu}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \Omega_\mu Q_\mu^2} \right] \times \\ &\quad \left[\frac{N!}{\sqrt{2^N N!}} \sum_{l_0+l_1+\dots+l_N=N} \prod_\nu \frac{(t_\nu^l)^{l_\nu}}{l_\nu!} H_{l_\nu}(\sqrt{\Omega_\nu} Q_\nu) \right] \left[\prod_{s=0} (\Omega_s)^{1/4} \frac{H_{n_s}(\sqrt{\Omega_s} Q_s) e^{-\frac{1}{2} \Omega_s Q_s^2}}{\sqrt{2^{n_s} n_s!} \sqrt{\pi}} \right] \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} &= (2^N)^{-1/2} \sqrt{N!} \sum_{l_0+l_1+\dots+l_N=N} \int dQ \left| \frac{\partial Q}{\partial q'} \right|^{1/2} \prod_{\mu=0}^N \omega_\mu^{1/4} \prod_{\nu,s=0}^N \Omega_s^{1/4} \sqrt{\frac{2^{l_\nu}}{l_\nu!}} (t_\nu^l)^{l_\nu} \times \\ &\quad \left[\frac{H_{l_\nu}(\sqrt{\Omega_\nu} Q_\nu) e^{-\frac{1}{2} \Omega_\nu Q_\nu^2}}{\sqrt{2^{l_\nu} l_\nu!} \sqrt{\pi}} \frac{H_{n_s}(\sqrt{\Omega_s} Q_s) e^{-\frac{1}{2} \Omega_s Q_s^2}}{\sqrt{2^{n_s} n_s!} \sqrt{\pi}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Usando a relação [82]:

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial q'} \right|^{1/2} = \prod_{r,\mu} \left(\frac{\Omega_r}{\omega_\mu} \right)^{1/4},$$

organizamos os termos em (D.16):

$$T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} = \sqrt{N!} \sum_{l_0+l_1+\dots=N} \int dQ \prod_{\nu} (l_\nu!)^{-1/2} (t_\mu^\nu)^{l_\nu} \left[(\Omega_\nu)^{1/4} \frac{H_{l_\nu}(\sqrt{\Omega_\nu} Q_\nu) e^{-\frac{1}{2}\Omega_\nu Q_\nu^2}}{\sqrt{2^{l_\nu} l_\nu! \sqrt{\pi}}} \right] \times \left[\prod_{s=0}^N (\Omega_s)^{1/4} \frac{H_{n_s}(\sqrt{\Omega_s} Q_s) e^{-\frac{1}{2}\Omega_s Q_s^2}}{\sqrt{2^{n_s} n_s! \sqrt{\pi}}} \right].$$

Desta forma identificamos cada uma das autofunções que são autoestados da Hamiltoniana diagonalizada, de modo que os coeficientes $T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots}$ são dados por:

$$T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} = \sqrt{N!} \sum_{l_0+l_1+\dots=N} \prod_{\nu, s=0}^N \frac{(t_\mu^\nu)^{l_\nu}}{\sqrt{l_\nu!}} \left[\int dQ \phi_{l_\nu}(Q) \phi_{n_s}^*(Q) \right]$$

e usando a condição de ortogonalidade das autofunções chegamos ao resultado,

$$T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} = \sqrt{N!} \sum_{l_0+l_1+\dots=N} \prod_{\nu, s=0}^N \frac{(t_\mu^\nu)^{l_\nu}}{\sqrt{l_\nu!}} \delta_{l_\nu n_s}. \quad (\text{D.17})$$

Se entre os modos do campo apenas um deles está excitado e os demais no estado fundamental contamos com uma das possibilidades para a combinação $l_0 + l_1 + \dots + = N$; $l_\mu = N$, e $l_{\nu \neq \mu} = 0$, ou seja, o μ -ésimo oscilador está excitado no N -ésimo nível e os demais no estado fundamental. Neste caso os coeficientes $T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots}$ tornam-se:

$$T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} = \sqrt{N!} \frac{(t_\mu^0)^N}{\sqrt{N!}} \delta_{N n_0} \delta_{0 n_1} \delta_{0 n_2} \dots + \sqrt{N!} \frac{(t_\mu^1)^N}{\sqrt{N!}} \delta_{N n_1} \delta_{0 n_0} \delta_{0 n_2} \dots + \dots$$

O estado vestido particular do campo $|\Gamma_1^{(\mu)}(t)\rangle$, que representa μ -ésimo modo no primeiro nível excitado e os demais modos no estado fundamental, é obtido escrevendo (D.1) na forma,

$$|\Gamma_{100\dots}^\mu(t)\rangle \equiv |00\dots 1_{(\mu)}; t\rangle;$$

com isso a equação em (D.6) torna-se:

$$|\Gamma_{100\dots}^\mu(t)\rangle = \sum_{n_0 n_1 \dots} \exp\left(-i \frac{E_{n_0 n_1 \dots}}{\hbar} t\right) T_{00N_\mu 0\dots}^{n_0 n_1 \dots} |n_0 n_1 \dots\rangle_c.$$

Se a situação em particular considerada for: o μ -ésimo oscilador no primeiro nível excitado, ou seja, $N = 1$, então

$$\begin{aligned} |\Gamma_{100\dots}^\mu(t)\rangle &= \sum_r (t_\mu^r) \sum_{n_0 n_1 \dots} \exp\left(-i \frac{E_{n_0 n_1 \dots}}{\hbar} t\right) \delta_{1n_r} \prod_{\lambda \neq r} \delta_{0n_\lambda} |n_0 n_1 \dots\rangle \\ &= \sum_r (t_\mu^r) \sum_{n_0 n_1 \dots} \exp\left(-i \frac{E_{n_0 n_1 \dots}}{\hbar} t\right) [\delta^{rs}] \delta_{1n_s} \prod_{\lambda \neq s} \delta_{0n_\lambda} |n_0 n_1 \dots\rangle \end{aligned}$$

segundo a condição de ortogonalidade entre os elementos de matrizes t_μ^r

$$\begin{aligned} |\Gamma_{100\dots}^\mu(t)\rangle &= \sum_r (t_\mu^r) \sum_{n_0 n_1 \dots} e^{-iE_{n_0 n_1 \dots} t} \left[\sum_\nu t_\nu^r t_\nu^s \right] \delta_{1n_s} \prod_{\lambda \neq s} \delta_{0n_\lambda} |n_0 n_1 \dots\rangle \\ &= \sum_\nu \left[\sum_r t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t} \right] \left[\sum_{s=0} (t_\nu^s) \delta_{1n_s} \prod_{\lambda \neq s} \delta_{0n_\lambda} \right] |n_0 n_1 \dots\rangle. \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\sum_{s=0} (t_\nu^s) \delta_{1n_s} \prod_{\lambda \neq s} \delta_{0n_\lambda} = \langle n_0 n_1 \dots | \Gamma_{100\dots}^\nu(0) \rangle$$

e

$$|\Gamma_{100\dots}^\mu(t)\rangle = \sum_\nu \left[\sum_r t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t} \right] \sum_{n_0 n_1 \dots} \langle n_0 n_1 \dots | \Gamma_{100\dots}^\nu(0) \rangle |n_0 n_1 \dots\rangle, \quad (\text{D.18})$$

usando a relação de completeza entre os autoestados da Hamiltoniana diagonalizada (D.4), escrevemos a evolução do estado vestido $|\Gamma_{100\dots}^\mu(t)\rangle$ como:

$$|\Gamma_{100\dots}^\mu(t)\rangle = \sum_\nu f_{\mu\nu}(t) |\Gamma_{100\dots}^\nu(0)\rangle,$$

onde $|\Gamma_{100\dots}^\nu(0)\rangle$ representa o ν -ésimo modo do sistema átomo-campo excitado no primeiro nível, e a função $f_{\mu\nu}(t)$ é dada por:

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_r t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t}.$$

Vamos mostrar que $\sum_\nu |f_{\mu\nu}(t)|^2 = 1$, calculando

$$\begin{aligned} \sum_\mu f_{r\mu}^*(t) f_{\mu s}(t) &= \sum_z \sum_w t_r^z \left(\sum_\mu t_\mu^z t_\mu^w \right) t_s^w e^{+i\Omega_z t} e^{-i\Omega_w t} \\ &= \sum_z \sum_w \delta^{zw} t_r^z t_s^w e^{+i\Omega_z t} e^{-i\Omega_w t} \\ &= \sum_w t_r^w t_s^w = \delta_{rs}. \end{aligned}$$

Fazendo $r = s$, temos:

$$\sum_{\mu} |f_{\mu r}(t)|^2 = 1.$$

Apêndice E

Concorrência e Negatividade

E.1 Demonstração da fórmula para a Concorrência

Discutiremos neste apêndice a demonstração das grandezas que são a principal medida de emaranhamento de estados misturados, a Concorrência e a Negatividade. Vamos começar por demonstrar a fórmula (5.120) para a Concorrência. Em nosso sistema admitimos dois tipos de estados: um estado puro $|\Psi(t)\rangle$, que nada mais é do que a combinação de dois tipos de estados puros do sistema $|\Gamma_{1(A)00\dots;0(B)00\dots}^{(AB)}(t)\rangle$ e $|\Gamma_{0(A)00\dots;1(B)00\dots}^{(AB)}(t)\rangle$, descritos pela matriz densidade $\rho_{AB}(t)$ (5.66) e outro estado considerado um estado misturado $|\Xi_{AB}(t)\rangle$ representado pela matriz densidade $\tilde{\rho}_{AB}(t)$, esta matriz difere da última no sentido em que é uma matriz que descreve a mistura dos estados isolados dos átomos A e B, pois os modos vestidos dos campos próprios dos dois átomos foram “absorvidos” quando tomamos o traço destes modos, em outras palavras, se o estado do campo pode ser escrito como:

$$|\Psi_{AB}(t)\rangle = |\Gamma_{\text{átomo,campo}}^A\rangle \otimes |\Gamma_{\text{átomo,campo}}^B\rangle, \quad (\text{E.1})$$

a matriz densidade que representa o estado misturado $|\Xi_{AB}(t)\rangle$ é dada então por:

$$\tilde{\rho}_{AB}(t) = \text{Tr}_{\text{campo}} [|\Psi_{AB}(t)\rangle\langle\Psi_{AB}(t)|] = |\Xi_{AB}(t)\rangle\langle\Xi_{AB}(t)|. \quad (\text{E.2})$$

Admitimos que este estado esteja maximamente misturado e de acordo com [130] por ser um sistema 2×2 é melhor caracterizado pela função chamada de Concorrência [131] definida como:

$$C_\rho = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, \right\}, \quad (\text{E.3})$$

onde λ_i são os autovalores da matrix \mathbf{A} , arranjados em ordem decrescente,

$$\mathbf{A} = \varrho \mathbf{S} \varrho^* \mathbf{S}, \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbf{S} = \sigma_y \otimes \sigma_y, \quad (\text{E.5})$$

onde ϱ é a matriz densidade e a matriz σ_y é a matriz de Pauli $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Para o nosso sistema a matriz densidade $\tilde{\rho}_{AB}$ que representa o estado misturado, é:

$$\tilde{\rho}_{AB}(t) = \begin{bmatrix} \xi \sum_i |f_{Ai}|^2 + (1 - \xi) \sum_i |f_{Bi}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \xi) |f_{BB}|^2 & \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\theta} f_{AA} \bar{f}_{BB} & 0 \\ 0 & \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\theta} \bar{f}_{AA} f_{BB} & \xi |f_{AA}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

Desta forma temos que \mathbf{A} torna-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1 - \xi) \xi |f_{BB}|^4 & 2[\xi(1 - \xi)]^{3/2} e^{-i\theta} f_{AA} \bar{f}_{BB} & 0 \\ 0 & [\xi(1 - \xi)]^{3/2} e^{i\theta} \bar{f}_{AA} f_{BB} & 2(1 - \xi) \xi |f_{BB}|^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.7})$$

Os autovalores de \mathbf{A} são quase todos nulos com exceção de um, que podemos julgar que seja positivo sabendo que $0 < \xi < 1$, $|f_{BB}(t)| > 0$ e $|f_{AA}(t)| > 0$. Simplificamos ainda para a situação em que os átomos são idênticos, ou seja, $f_{AA}(t) = f_{BB}(t)$ e deste modo o único autovalor não nulo da matriz \mathbf{A} é escrito como:

$$\lambda_1 = 4\xi(1 - \xi)|f_{BB}|^4. \quad (\text{E.8})$$

Substituindo (E.8) em (E.3) e assumindo por conveniência $A \equiv B \equiv 0$ obtemos a fórmula para a Concorrência:

$$C_{\tilde{\rho}_{AB}}(t) = 2\sqrt{\xi(1 - \xi)}|f_{00}(t)|^2. \quad (\text{E.9})$$

Demonstrando com isso a equação (5.120).

E.2 Demonstração da fórmula para a Negatividade

O conceito da Negatividade do estado está intimamente relacionado ao critério de Peres para a separabilidade do estado [132]. Se um estado é separável (não-emaranhado), então a transposta parcial deste estado é positiva ($\rho^{TA} > 0$), do contrário a transposta parcial da matriz densidade de um estado não-separável possui autovalores negativos e portanto o estado é considerado emaranhado. A *negatividade* é uma outra medida de emaranhamento que pode ser definida matematicamente como [123]:

$$N_{\varrho}(t) = \frac{\|\varrho^{TA}\| - 1}{2}, \quad (\text{E.10})$$

onde $\|\dots\|$ denota a norma do traço, ou seja, a soma dos autovalores negativos. Uma forma mais fácil de se entender a expressão (E.10) é ver que $N(\varrho)$ corresponde ao valor absoluto da soma dos autovalores negativos de ρ^{TA} transposta parcial matriz densidade. Em outras palavras, a negatividade mede o quanto ϱ^{TA} falha em ser positivo. A *negatividade* é uma medida de emaranhamento muito popular e seu conceito e aplicabilidade aparecem muito constantemente na literatura em outras situações [123, 130, 133].

O critério da separabilidade de Peres [132], também conhecido como critério PPT ¹ enunciado em [123], é resumido aqui; para tanto a matriz densidade (5.75) do sistema bipartite pode ser escrita como:

$$\tilde{\rho}_{n_A n_B}^{m_A m_B}(t) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

onde os coeficientes da matriz são dados por:

$$a = \xi \sum_i |f_{Ai}|^2 + (1 - \xi) \sum_i |f_{Bi}|^2, \quad (\text{E.12})$$

$$b = (1 - \xi) |f_{BB}|^2, \quad (\text{E.13})$$

$$c = \xi |f_{AA}|^2 \quad (\text{E.14})$$

$$z = \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\theta} f_{AA} \bar{f}_{BB}. \quad (\text{E.15})$$

¹sigla em inglês para Positive Partial Transpose

Para falar do critério PPT definimos outra matriz que é a transposta parcial da matriz densidade (E.11), dada por:

$$\sigma_{n_A n_B}^{m_A m_B}(t) = \tilde{\rho}_{m_A n_B}^{n_A m_B}(t), \quad (\text{E.16})$$

a transposição parcial é tomada em relação ao subsistema A. Podemos notar que a transposição parcial está relacionada a transposição usual como $\varrho^T = (\varrho^{T_A})^{T_B}$ e $\varrho^{T_B} = (\varrho^{T_A})^T$. Dizemos que a matriz ϱ tem uma *transposta parcial positiva* (TPP ou PPT em inglês) se esta transposição parcial tem autovalores não-negativos, isto é, a matriz é dita positiva semidefinida [123]:

$$\varrho^{T_A} \geq 0 \Leftrightarrow \varrho^{T_B} \geq 0.$$

Se a matriz é não TPP dizemos que ela é TPN (Transposta Parcial Negativa) e com isso está formado o critério TPP, também conhecido como critério Pères-Horodecki apresentado inicialmente em [132]. Desta forma a matriz $\tilde{\sigma}$ (E.16) pode ser escrita como:

$$\sigma_{AB}(t) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & z \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ z^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.17})$$

Em seguida calculamos os autovalores da matriz σ_{AB} , temos:

$$\sigma_1 = c, \quad (\text{E.18})$$

$$\sigma_2 = b, \quad (\text{E.19})$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 4|z|^2} \right), \quad (\text{E.20})$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 + 4|z|^2} \right). \quad (\text{E.21})$$

Analisando os valores de cada um dos autovalores podemos dizer que o único valor possivelmente negativo é a raiz σ_4 . Admitindo que os átomos sejam idênticos, $f_{AA}(t) = f_{BB}(t) = f_{00}(t)$, podemos mostrar que $a = 1 - |f_{00}(t)|^2$. A raiz σ_4 é considerada negativa sabendo que ξ e $|f_{00}(t)|^2$ obedecem as seguintes relações: $0 < \xi < 1$ e $|f_{00}(t)|^2 \leq 1$. Outro modo também muito usado frequentemente para definir a Negatividade, com sendo menos duas vezes a soma dos autovalores negativos, pode ser encontrado em [130], e com isso

obtemos:

$$N_{\rho_{AB}}(t) = 1 - |f_{00}(t)|^2 - \sqrt{(1 - |f_{00}(t)|^2)^2 + 4\xi(1 - \xi)|f_{00}(t)|^4}. \quad (\text{E.22})$$

Com isso fica demonstrada as relações de medidas que foram usadas para determinar o emaranhamento dados pelas equações (5.120) e (5.121).

Bibliografia

- [1] D. T. Alves, E. R. Granhen and M. G. Lima, Phys. Rev. D **77**, 125001 (2008).
- [2] D. T. Alves and E. R. Granhen, Phys. Rev. A **77**, 015808 (2008).
- [3] D. T. Alves, E. R. Granhen, M. G. Lima and A. L. C. Rego, J. Phys.: Conf. Ser. **161** 012033 (2009).
- [4] D. T. Alves, E. R. Granhen, M. G. Lima, H. O. Silva and A. L. C. Rego, J. Phys.: Conf. Ser. **161** 012032 (2009).
- [5] D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima, Phys. Rev. D **81**, 025016 (2010).
- [6] D. T. Alves, E. R. Granhen, J. F. Medeiros Neto and S. Perez, Phys. Lett. A **374**, 2113 (2010).
- [7] D. T. Alves, E. R. Granhen, H. O. Silva and M. G. Lima, Phys. Lett. A **374**, 3899 (2010).
- [8] D. T. Alves, E. R. Granhen, and W. P. Pires, Phys. Rev. D **82**, 045028 (2010).
- [9] D. T. Alves e E. R. Granhen, artigo em fase de submissão em Comp. Phys. Comm. (2011).
- [10] E. R. Granhen, C. A. Linhares, A. P. Malbouisson and J. M. C. Malbouisson, Phys. Rev. A **81**, 053820 (2010).
- [11] Y. Takahashi e H. Umezawa, Nuovo Cimento **6**, 1324 (1957); Y. Takahashi e H. Umezawa, Nuovo Cimento **6**, 1384 (1957);

- [12] L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968); L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969);
L. Parker, Phys. Rev. D **3**, 346 (1971).
- [13] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [14] G. T. Moore, J. Math. Phys. **11** (1970) 2679-2691.
- [15] B. S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975);
- [16] S. A. Fulling and P. C. W. Davies, Proc. R. Soc. London, **A 348**, 393 (1976).
- [17] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, *Proc. R. Soc. London* **A 354** 59 (1977)
- [18] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London, **A 356**, 237 (1977).
- [19] P. W. C. Davies, Rep. Prog. Phys., **41** (1978).
- [20] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [21] D. A. R. Dalvit and P. A. Maia Neto, Phys. Rev. Lett **84**, 798 (2000).
- [22] V. V. Dodonov, M. A. Andreata, and S. S. Mizrahi, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S468 (2005).
- [23] M. A. Andreata and V. V. Dodonov, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S11 (2005).
- [24] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, and G. E. A. Matsas, Rev. Mod. Phys. **80**, 787 (2008).
- [25] *Artificial Black Holes*, edited by M. Novello, M. Visser, G. Volovik (Editors) (World Scientific, River Edge, 2002); P. O. Fedichev, U.R. Fischer, Phys. Rev. Lett. **91**, 240407 (2003).
- [26] V. V. Dodonov, J. Phys.: Conf. Ser. **161**, 012027 (2009).
- [27] V. V. Dodonov, Phys. Scr. **82**, 038105 (2010).
- [28] H. O. Silva, *Efeito Casimir Dinâmico em 1+1 dimensões*, Dissertação de Mestrado, UFPA (2011).

- [29] C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, A. Lombardi, A. Palmeri, G. Ruoso e D. Zanello, *Rev. Sci. Instrum.* **75**, 4967 (2004); C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, C. Del Noce, G. Galeazzi, A. Lombardi, A. Palmieri, G. Ruoso e D. Zanello, *Europhys. Lett.* **70**, 754 (2005); A. Agnesi, C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, G. Galeazzi, F. Pirzio, G. Reali, G. Ruoso e D. Zanello, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 164024-1-164024-7 (2008); A. Agnesi, C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, F. Della Valle, G. Galeazzi, G. Messineo, F. Pirzio, G. Reali, G. Ruoso, D. Scarpa e D. Zanello, *J. Phys: Conf. Ser.* **161**, 012028 (2009).
- [30] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 147003-1-147003-4.
- [31] W. J. Kim, J. H. Brownell e R. Onofrio, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 200402 (2006); W. J. Kim, J. H. Brownell e R. Onofrio, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 089902 (2007); E. M. Sarkisyan, K. G. Petrosyan, K. B. Oganessian, A. A. Hakobyan, V. A. Saakyan, S. G. Gevorkian, N. Sh. Izmailyan e C. K. Hu, *Laser Physics* **18**, 621 (2008); M. Uhlmann, G. Plunien, R. Schutzhold e G. Soff, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 193601 (2004); M. Croce, D. A. R. Dalvit, F. Lombardo e F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev. A* **70**, 033811 (2004); W. Naylor, S. Matsuki, T. Nishimura e Y. Kido, *Phys. Rev. A* **80**, 043835 (2008); F. X. Dezael e A. Lambrecht, *Europhys. Lett.* **89**, 14001 (2010).
- [32] verificar na tese de Hector.
- [33] A. I. Vesnitskii, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz.* **14**, 1432 (1971).
- [34] L. H. Ford and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **25**, 2569 (1982).
- [35] C. K. Law, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1931 (1994).
- [36] Y. Wu, K. W. Chan, M. C. Chu, and P. T. Leung, *Phys. Rev. A* **59**, 1662 (1999); P. Wegrzyn, *J. Phys. B* **40**, 2621 (2007).
- [37] C.K. Cole and W.C. Schieve, *Phys. Rev. A* **52**, 4405 (1995).
- [38] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and D. E. Nikonov, *J. Math. Phys.* **34**, 2742 (1993).
- [39] D. A. R. Dalvit and F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev. A* **57**, 2113 (1998).

- [40] P. A. Maia Neto and L. A. S. Machado, Phys. Rev. A **54**, 3420 (1996).
- [41] M. Razavy and J. Terning, Phys. Rev. D **31**, 307 (1985); G. Calucci, J. Phys. A **25**, 3873 (1992); C. K. Law, Phys. Rev. A **49**, 433 (1994); C. K. Law, Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995);
- [42] D. F. Mundarain and P. A. Maia Neto, Phys. Rev. A **57**, 1379 (1998).
- [43] V. V. Dodonov, in *Modern Nonlinear Optics* (Adv. Chem. Phys. Series, vol. 119, part 1), Second Edition, edited by M. W. Evans (John Wiley & Sons, Inc., 2001), 309-394.; V. V. Dodonov, J. Phys.: Conf. Ser. **161**, 012027 (2009)
- [44] J. Y. Ji, H. H. Jung and K. S. Soh, Phys. Rev. A **57**, 4952 (1998).
- [45] L. A. S. Machado and P. A. Maia Neto, Phys. Rev. D **65**, 125005 (2002).
- [46] A. Lambrecht, M. T. Jaekel, and S. Reynaud, Phys. Rev. Lett. **77**, 615 (1996).
- [47] J. Y. Ji, K. S. Soh, R. G. Cai and S. P. Kim, J. Phys. A **31**, L457 (1998); R. Schützhold, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A **57**, 2311 (1998); P. Wegrzyn, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, 4895 (2006); F. Pascoal, L. C. Celeri, S. S. Mizrahi and M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **78**, 032521 (2008); C. Yuce and Z. Ozcakmakli, J. Phys. A **41**, 265401 (2008).
- [48] D. A. R. Dalvit and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **59**, 3049 (1999).
- [49] A. Lambrecht, M. T. Jaekel, and S. Reynaud, Eur. Phys. J. D **3**, 95 (1998).
- [50] L. Li and B. Z. Li, Phys. Lett. A **300**, 27-32 (2002); L. Li, B. Z. Li, Chin. Phys. Lett. **19**, 1061 (2002).
- [51] L. Li and B. Z. Li, Acta. Phys. Sin. **52**, 2762 (2003).
- [52] M. T. Jaekel and S. Reynaud, J. Phys. I (France) **3**, 339 (1993).
- [53] M. T. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A **172**, 319 (1993);
- [54] G. Plunien, R. Schutzhold and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **84**, 1882 (2000).

- [55] L. A. S. Machado, P. A. Maia Neto and C. Farina, Phys. Rev. D **66**, 105016 (2002).
- [56] J. Hui, S. Qing-Yun, and W. Jian-Sheng, Phys. Lett. A **268**, 174 (2000); G. Schaller, R. Schutzhold, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A **66**, 023812 (2002).
- [57] R. Schutzhold, G. Plunien and G. Soff, Phys. Rev. A **65**, 043820 (2002).
- [58] A. Lambrecht, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7** S3 (2005).
- [59] J. Hui, S. Qing-Yun, and W. Jian-Sheng, Phys. Lett. A **268**, 174 (2000).
- [60] D. T. Alves, C. Farina and P. A. Maia Neto, J. Phys. A **36**, 11333 (2003).
- [61] M. A. Andreata and V. V. Dodonov, J. Phys. A **33**, 3209 (2000).
- [62] V. V. Dodonov, J. Phys. A **31**, 9835 (1998).
- [63] V. V. Dodonov, A. Klimov, and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **149**, 225 (1990).
- [64] F. C. Santos, A. Tenorio and A. C. Tort, Phys. Rev. D **60**, 105022 (1999); J. C. da Silva, A. M. Neto, H.Q. Placido, M. Revzen M, A. E. Santana, Physica A **292**, 411 (2001); I. Klich, A. Mann and M. Revzen, Phys. Rev. D **65**, 045005 (2002); O. Kenneth, I. Klich, A. Mann and M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **89**, 033001 (2002); S. C. Lim and L. P. Teo, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 3455 (2009).
- [65] T. H. Boyer, Am. J. Phys. **71**, 990 (2003).
- [66] S. A. Fulling, L. Kaplan and J. H. Wilson, Phys. Rev. A **76**, 012118 (2007); X. H. Zhai and X. Z. Li, Phys. Rev. D **76**, 047704 (2007).
- [67] Dalvit, D. A. R., Mazzitelli, F. D. and Millán, O. 2006 *J. Phys. A* **39** 6261
- [68] M. Montazeri and M. F. Miri, Phys. Rev. A **71**, 063814 (2005); B. Mintz, C. Farina, P. A. M. Neto and R. B. Rodrigues, *ibid.* **39**, 6559 (2006); J. Sarabadani and M. F. Miri, *ibid.* **75**, 055802 (2007).
- [69] M. Crocce, D. A. R. Dalvit and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **64**, 013808 (2001).
- [70] M. Ruser, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S100 (2005).

- [71] M. Ruser J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6711 (2006).
- [72] M. Ruser, *Dynamical Casimir effect : from photon creation in dynamical cavities to graviton production in braneworlds*, Thèse de doctorat : Univ. Genève, 2007. - Sc. 3903. - 2007/10/12 (disponível no site: <http://archive-ouverte.unige.ch/unige:51>).
- [73] M. Ruser, Phys. Rev. A **73**, 043811 (2006).
- [74] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson e F. Nori, Phys. Rev. A **82**, 052509 (2010).
- [75] W. G. Unruh, and W. H. Zurek, Phys. Rev. D **40**, 1071 (1989).
- [76] B. L. Hu, J. P. Paz and Y. Zhang, Phys. Rev. D **45**, 2843 (1992).
- [77] H. Morawitz, Phys. Rev. A **7**, 1148 (1973).
- [78] P. Milonni, P. Knight, Opt. Comm. **9**, 119 (1973).
- [79] D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **47**, 233 (1981).
- [80] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson and Y.W. Milla, Phys. Rev. A **65**, 063414 (2002).
- [81] A. P. C. Malbouisson, Phys. Lett. A, **296**, 65 (2002).
- [82] G. Flores-Hidalgo and A. P. C. Malbouisson, Phys. Rev. A **66**, 042118 (2002).
- [83] G. Flores-Hidalgo and A. P. C. Malbouisson, Phys. Lett. A **337**, 37 (2005).
- [84] G. Flores-Hidalgo, C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson and J. M. C. Malbouisson, J. Phys. A **41**, 075404 (2008).
- [85] N. P. Andion, A. P. C. Malbouisson and A. Mattos Neto, J. Phys. A **34**, 3735 (2001).
- [86] W. Jhe, A. Anderson, E. A. Hinds, D. Meschede, L. Moi and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **58**, 666 (1987).
- [87] R. G. Hulet, E. S. Hilfer and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **55**, 2137 (1985).

- [88] P. Ullersma, *Physica (Utrecht)* **32**, 27 (1966); **32**, 56; 74 (1966); **32**, 90 (1966).
- [89] F. Haake and R. Reibold, *Phys. Rev. A* **32**, 2462 (1982).
- [90] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Ann. Phys.* **149**, 374 (1983).
- [91] H. Grabert, P. Schramm and G.-L. Ingold, *Phys. Rep.* **168**, 115 (1988).
- [92] C. Cohen-Tannoudji, *Atoms in Electromagnetic Fields* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [93] T. Petrosky, G. Ordonez and I. Prigogine, *Phys. Rev. A* **68**, 022107 (2003).
- [94] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1965).
- [95] J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum mechanics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).
- [96] C. Bennett and S. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).
- [97] C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, C. Del Noce, G. Galeazzi, A. Lombardi, A. Palmieri, G. Ruoso and D. Zanello, *Europhys. Lett.*, **70**, 754 (2005).
- [98] V. L. Granatstein, P. Sprangle, R. K. Parker, J. Pasour, M. Herndon and S. P. Schlesinger, *Phys. Rev. A* **14**, 1194 (1976); M. Lampe, E. Ott and J. Walker, *Phys. Fluids* **21**, 42 (1978).
- [99] W. R. Walker and P. C. W. Davies, *J. Phys. A* **15**, L477 (1982).
- [100] C.K. Cole and W.C. Schieve, *Phys. Rev. A* **64**, 023813 (2001).
- [101] J. Haro *J. Phys. A* **38**, L307 (2005)
- [102] D. T. Alves, C. Farina and E. R. Granhen, *Phys. Rev. A* **73**, 063818 (2006).
- [103] V. V. Dodonov and A. B. Klimov, *Phys. Rev. A*, **56**, 2664 (1996).
- [104] V. Hushwater, *Am. J. Phys.* **65**, 381 (1997).
- [105] www.maplesoft.com

- [106] M. G. Lima, *Densidade de energia e força de radiação sobre fronteiras em movimento para estados arbitrários do campo: aplicação ao estado coerente*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará (2008).
- [107] T. H. Boyer, Phys. Rev. A **9**, 2078 (1974).
- [108] P. Candelas and D.J. Raine, J. Math. Phys. (N. Y.) **17**, 2101 (1976);
- [109] P. Candelas and D.J. Raine, Proc. R. Soc. London, **A 354**, 79 (1977).
- [110] E. Buks and M. L. Roukes, Nature (London) **419**, 119 (2002); D. Iannuzzi and F. Capasso, Phys. Rev. Lett. **91**, 029101 (2003); O. Kenneth, I. Klich, A. Mann and M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **91**, 029102 (2003).
- [111] P. A. Maia Neto, J. Phys. A **27**, 2167 (1994);
- [112] N. P. Andion, A. P. C. Malbouisson and A. Mattos Neto, J. Phys. A **34**, 3735 (2001); A. P. C. Malbouisson, Report Instituto Balseiro/CAB Bariloche, CAB/1971/13 (unpublished).
- [113] A. P. C. Malbouisson, Ann. Phys. **308**, 373 (2003).
- [114] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of the Field & Particles*, Dover Publications Inc. (ed.), New York, EUA (1964).
- [115] Likhoded, A. K. and Pronko, G. P., Int. J. Theor. Phys. **36** 2335 (1997)
- [116] W. Thirring and F. Schwabl, Ergeb. Exakt. Naturw. **36**, 219 (1964).
- [117] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rose, Phys. Rev. **47** 777 (1935).
- [118] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807 (1935).
- [119] C. H. Bennett et al, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [120] M. B. Plenio and V. Vedral, Contemp. Phys. **39**, 431 (1998).
- [121] A. E. Santana, F. C. Khanna, M. Revzen, Phys. Rev. A **65**, 032119 (2002).

- [122] F. C. Khanna, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, E. S. Santos, Phys. Rev. A **76**, 022109 (2007).
- [123] Otfried Gühne, Géza Tóth, Phys. Rep. **474**, 1-75 (2009).
- [124] William K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998); G. Vidal and R. F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002); Koenraad Audenaert, Frank Verstraete, Tijl De Bie, Bart De Moor, quant-ph./0012074.
- [125] A. V. Lebedev, G.B. Lesovik and G. Blatter, Phys. Rev. B **71**, 045306 (2005).
- [126] J. Dajka, M. Mierzejewski and J. Luczka, Phys. Rev A **77**, 042316 (2008).
- [127] S. Chan, M. D. Reid and Z. Ficek, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **42**, 065507 (2008).
- [128] A. Sowa, Theor. Math. Phys. **159**, 654 (2009).
- [129] H. Häffner et al., Nature **438**, 643 (2005).
- [130] Frank Verstraete, Koenraad Audenaert e Bart De Moor, Phys. Rev. A **64** 012316 (2001).
- [131] Willian K. Wootters, Phys Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [132] Asher Peres, Phys Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [133] Ryszard Horodecki et al. Rev. of Mod. Phys. **81**, 865 (2009).