

TEMPO DE TRÂNSITO DA RADIAÇÃO GAMA
EM CINTILADORES DE NaI(Tl)

TESE DE MESTRADO

a ser defendida

por

Alfonso Salazar Matarrita

no

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FISICAS

Orientador: *Prof. Alfredo Marques*

Rio de Janeiro
- 1976 -



539.47
M 425

T 67
M 425

425

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Alfredo Marques por ter sugerido e orientado o presente trabalho.

Aos Professores Donald Clarke Binns e Luiz Tauhata pelo suporte e discussão de idéias.

Aos Senhores Antonio Julio Lossio e Luiz Antonio dos Reis pela colaboração na programação.

À Senhora Guisella Castro de Salazar pelos desenhos.

À Senhorita Marlene Bonacossa Mello pela eficiência e cooperação na datilografia.

Às Instituições:

- Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
- Comissão Nacional de Energia Nuclear
- Agência Internacional de Energia Atômica
- Universidade de Costa Rica

pelas facilidades que, sob forma de assistência financeira e de uso de instalações, ofereceram para a realização do presente trabalho.

E a todos que prestaram a sua colaboração desinteressada e amigável.

RESUMO

Neste trabalho calcula-se a distribuição dos intervalos de tempo, em função da energia, decorridos entre a incidência de uma radiação gama na face de um cristal cintilador e a chegada da cintilação correspondente ao fotocatodo. Determina-se também a flutuação quadrática média destes intervalos de tempo, relacionando-a com a resolução do sistema detector.

Os cálculos são feitos para cristais cilíndricos de NaI(Tl) com a fonte radioativa colocada no eixo de simetria, em duas situações: a) incidência para-axial, e b) incidência oblíqua, indicando um bom ajuste com dados experimentais.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMO.....	-i-
I - INTRODUÇÃO.....	1
II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	6
1 - Mecanismos de Interação no Cristal.....	6
2 - Absorção da Radiação Gama.....	6
3 - Cintilação.....	7
4 - Reflexões.....	8
5 - Distribuição em Tempo de Chegada.....	14
III - MOMENTOS DA DISTRIBUIÇÃO EM TEMPOS DE CHEGADA.....	16
A) - APROXIMAÇÃO PARA-AXIAL.....	16
1 - Normalização.....	16
2 - Momentos.....	17
B) - CASO GERAL.....	19
1 - Normalização.....	21
2 - Momentos.....	22
IV - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	25
1 - Organização e crítica dos cálculos.....	25
2 - Conclusões.....	27
TABELAS.....	29
GRÁFICOS.....	40
APÊNDICES.....	58
1 - Forma Simplificada do Fator de Normalização.....	59

	Pág.
2 - Cálculo dos Momentos de Primeira e Segunda Ordem, Caso Para-axial.....	62
3 - Obtenção da Distribuição dos Tempos de Chegada: Caso Geral.....	68
4 - Obtenção da Distribuição dos Tempos de Chegada: Coeficiente de Absorção Infinito.....	81
5 - Fluxogramas.....	83
BIBLIOGRAFIA.....	87

I - INTRODUÇÃO

A medida dos intervalos de tempo em física, nuclear está limitada, no extremo dos curtos intervalos, pelo desempenho dos dispositivos de coincidência retardadas e pela eficiência dos métodos analíticos para se extrair a informação neles obtida.

O método consiste, em suas linhas gerais, em retardar, por intervalos de tempo precisamente controlados, os sinais elétricos contendo informação sobre a formação e a transformação de um estado nuclear, registrando a evolução correspondente no número de coincidências por unidade de tempo. Quando o intervalo médio de tempo entre aqueles sinais é muito curto em comparação com a resolução do dispositivo, a curva representando seus registros coincidentes em função dos retardos tem o aspecto de uma parábola (ordenadas em escala log.), o vértice para cima, cuja largura a meio máximo é uma medida da resolução em tempo do dispositivo. Esta curva é conhecida como "curva de resposta pronta". Quando o intervalo médio de tempo entre os sinais é longo comparado com a resolução, um dos ramos do paraboloide tem o aspecto de uma reta (caracterizando o decaimento exponencial) de cuja inclinação se extrai a vida média do estado definido por aqueles sinais. Quando o intervalo médio de tempo entre os sinais é da ordem de grandeza da resolução essa prática fica obstada pelas flutuações estatísticas, tornando-se indistinguível a reta de decaimento exponencial do ramo de paraboloide da curva de resposta pronta; entretanto, ainda assim se pode extrair informação sobre a vida média mediante o deslocamento do baricentro da curva resultante, com relação ao baricentro da curva de resposta pronta, este agindo como zero efetivo de tempo.

Este método vem sendo utilizado com sucesso há muitos anos para a determinação da vida média de estados nucleares populados e despopulados por emissão de radiação gama ou eletrons. Detetores de cintilação são empregados para a formação dos impulsos elétricos. Os limites extremos do método são as melhores resoluções atingidas em laboratório: de algumas dezenas de picosegundos, para cintiladores plásticos e de alguns décimos de nanosegundos, para cintiladores inorgânicos (NaI(Tl)).

Os limites na resolução são determinados principalmente pela interposição de componentes aleatórias no processo de formação do sinal, desde a passagem da radiação pelo cintilador à sua conversão em impulso elétrico no tubo fotomultiplicador. Essas componentes foram estudadas extensivamente, podendo o estágio presente de conhecimentos a respeito ser considerado bastante satisfatório.

Entretanto muito pouco tem sido feito em relação à presença de erros sistemáticos nessas medidas. Tais erros tem origem nas eventuais diferenças em tempo de processamento dos impulsos nos dois canais de coincidências; de particular importância são aqueles originados no tempo de trânsito das radiações no interior do cristal cintilador, dado que sua eliminação posterior só pode ser feita à luz de uma análise detalhada da distribuição dos retardos dos impulsos de cintilação. Esses erros afetam particularmente os resultados de medidas utilizando o método do deslocamento do baricentro da curva de resposta retardada e constituem de fato uma limitação muito forte para a sua extensão a intervalos mais curtos. O problema é mais agudo exatamente na situação mais comum, i.e., quando se deteta radiação gama nos dois canais do dispositivo de coincidências; o tempo de trânsito da radiação gama dentro do cristal cintilador, até sua primeira interação e conseqüente excitação do cristal, introduz retardos dependentes de sua energia. Assim, quando a curva de resposta pronta é levantada com raios gama de determinadas energias e é posteriormente comparada com

a curva de resposta retardada correspondendo a gamas de energias diferentes, um atraso sistemático se insere implicitamente entre os dois canais de coincidências, podendo invalidar completamente o resultado da medida.

O objetivo deste trabalho é determinar teoricamente a distribuição dos intervalos de tempo decorridos entre a chegada de um foton de radiação gama à face de entrada do cristal cintilador, e a chegada da frente de onda da luz de cintilação ao catodo do tubo fotomultiplicador (face oposta do cristal), em função da energia da radiação incidente. De posse dessa distribuição os atrasos médios correspondentes são calculados e apresentados em função da energia dos gama incidentes para efeitos de correção de erros sistemáticos nas medidas de tempo.

Calculou-se também, além disso, a flutuação quadrática média desses tempos. Esse parâmetro, além de ser um indicador eficiente do grau de concentração dos tempos médios, i.e., da resolução intrínseca em tempo, está diretamente relacionado com a resolução em energia do dispositivo detector, i.e., com as flutuações em intensidade da corrente de placa do tubo fotomultiplicador. Essa corrente depende obviamente do número total de fotoeletrons liberados no fotocatodo e do grau de concentração no tempo, ou de agrupamento, com que são emitidos. Esse problema tem sido recorrentemente tratado a partir de ideias colocadas originalmente por Post e Schiff, (5-10) segundo as quais se considera como relevantes apenas as componentes aleatórias do tempo de trânsito dos fotoeletrons no tubo fotomultiplicador, originadas no processo de multiplicação. Neste trabalho mostramos que a participação do cristal não pode ser desprezada; as principais feições da resolução em energia do dispositivo cristal-fotomultiplicador, obtidas experimentalmente, estão já contidas na dependência do tempo quadrático médio de trânsito no cristal com a energia da radiação gama incidente.

Também, acompanhando as ideias e resultados quantitativos deste trabalho, uma nova geometria para cristais cintiladores foi elaborada, visando a aperfeiçoar suas características de resolução. Trata-se de um cristal com face de entrada esférica, construído em nossos laboratórios por Donald C. Binns, em plástico NE-102. A superfície curva minimiza o número de reflexões da frente de onda de cintilação dentro do cristal, melhorando simultaneamente sua resolução em tempo e em energia através do incremento na quantidade de luz transmitida ao fotocátodo. O aumento da resolução em energia com relação ao cristal de faces planas tradicional já foi verificado, estando sob investigação os efeitos na resolução em tempo (Roberto Poledna).

Os cálculos aqui apresentados foram todos feitos para cintilador de NaI(Tl). Cintiladores orgânicos são sabidamente mais rápidos mas apresentam resolução mais pobre em energia. A grande maioria das observações, requerendo a separação entre gamas de energias vizinhas frequentemente simultâneas, leva à escolha do NaI(Tl) como meio cintilador pelo menos em um dos canais do dispositivo de coincidências. Os cristais considerados são cilíndricos, de bases planas (única geometria disponível comercialmente), com refletor de MgO na superfície lateral (coeficiente de reflexão na faixa de transmissão do cristal de 0,98) e com dimensões várias (alguns cálculos são apresentados apenas para cristais de dimensões 7,62 cm x 7,62 cm para o raio da base e altura respectivamente; estas são as dimensões recomendáveis quando se deseja otimizar simultaneamente as resoluções em tempo e energia). Os cristais são considerados 100% transparentes às frequências de sua própria cintilação, com fótons distribuídos isotropicamente no momento de sua produção; a propagação e reflexões na superfície lateral são tratadas em aproximação de óptica geométrica.

Os cálculos estão feitos de modo a cobrir as seguintes situações

experimentais:

- a) fonte sobre a linha do eixo de simetria do cristal, colimada de modo a garantir incidência para-axial sobre a face de entrada;
- b) fonte sobre a linha do eixo de simetria a uma distância da face de entrada comparável com as dimensões do cristal, de modo que o feixe incidente apresenta uma abertura angular não nula.

Os resultados foram limitados, no que diz respeito à energia da radiação incidente, à faixa que vai desde 90 KeV até 1 MeV, que cobre a grande maioria de gamas de origem nuclear.

A avaliação numérica dos resultados foi feita através de programação própria no computador do CBPF; os programas podem ser facilmente modificados de modo a cobrir outras situações não focalizadas no presente trabalho.

II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

1. *Mecanismos de Interação no Cristal*

O processo de detecção da radiação gama em cristais de NaI(Tl) é bem conhecido⁽¹⁻⁴⁾. A radiação incidente dissipa energia no meio através de um dos processos: Espalhamento Compton, Efeito Fotoelétrico, Criação de Pares Eletron-Positron. Os eletrons acompanhando esses processos excitam e ionizam átomos da rede cristalina; a energia assim acumulada é libertada posteriormente sob a forma de fons com uma distribuição de frequências que vai do visível ao ultravioleta próximo. Parte desses fons escapa pela face adjacente ao tubo fotomultiplicador, libertando alguns eletrons que são multiplicados e recolhidos no anodo, formando um impulso elétrico. Esse impulso contém toda a informação sobre o instante de chegada e a energia da radiação incidente no cristal.

A contribuição do tubo fotomultiplicador aos efeitos discutidos em I é muito importante mas escapa aos objetivos de nosso trabalho; aqui estaremos interessados tão somente nas contribuições que tem sede no cristal, isto é, aquelas nascidas no mecanismo de absorção da radiação incidente, no aparecimento dessa energia sob a forma de fons de cintilação e na progressão desses fons pelo cristal. Discutiremos a seguir, brevemente, cada um desses itens com ênfase naquelas características diretamente relacionadas com os retardos envolvidos no transporte da informação ao catodo do fotomultiplicador.

2. *Absorção da Radiação Gama*

Os mecanismos de absorção da radiação gama em meios materiais são bem conhecidos; para efeitos práticos pode-se definir um coeficiente de absorção total, μ , para a radiação gama, incorporando os três processos

acima referidos, em termos do qual a probabilidade de interação com qual -
quer transferência de energia para eletrons do meio é dada por :

$$dP_{\gamma} = e^{-\mu x} \mu dx \quad (1)$$

x sendo a profundidade penetrada.

3. Cintilação

No curso de sua passagem pelo cristal a radiação gama deixa um rastro de átomos ionizados e excitados, diretamente ou através das interações dos eletrons secundários que produz. Parte da energia acumulada nos átomos aparece como excitação da rede cristalina através de mecanismos semelhantes aos de luminescência⁽¹¹⁾, acompanhada de emissão de fons dentro de um tempo característico da rede (cerca de 300 nps para o NaI(Tl)). Esses fons apresentam-se com frequências desde o extremo visível ao ultravioleta. Dado que o alcance dos eletrons produzidos pela radiação gama é de regra muito pequeno em comparação com as dimensões do cristal (algumas dezenas de microns) pode-se considerar a excitação inicial da rede como localizada numa vizinhança de dimensões reduzidas em torno do ponto onde a interação gama se dá. Esta vizinhança é por sua vez a sede dos fons de desexcitação que se propagam isotropicamente com velocidade c/n , n sendo o índice de refração do cristal. De outro lado o tempo necessário para o freiamento completo dos eletrons acompanhando as interações da radiação gama é de regra muito curto (10^{-13} s - 10^{-14} s) de modo que se pode considerar o processo de desexcitação como imediatamente subsequente à interação gama no cristal. Nessas condições, a cintilação é bem localizada, podendo ser considerada como uma fonte puntiforme de onde emergem fons isotropicamente e a distribuição dos tempos de espera entre o instante em que se dá a interação gama e o primeiro fton emitido é dada por :

$$dP_f = e^{-\lambda \tau} \lambda d\tau \quad (2)$$

sendo $\tau = 0$ o instante em que se dá a interação primária e λ um parâmetro característico do cristal. (A hipótese de emissão isotrópica é consistente com a estrutura cristalina do NaI(Tl)).

4. Reflexões

O percurso dos ftons de cintilação, desde o local de sua emissão até a face do cristal adjacente ao catodo da fotomultiplicadora, é em geral acompanhado de um número de reflexões contra a superfície lateral do cristal; a distância total percorrida e o número de reflexões sofridas ficam unicamente determinados pela posição e pelo ângulo de emissão. Em cada reflexão os ftons correm uma chance $1-\alpha$ de serem absorvidos na superfície lateral, sendo α o coeficiente de reflexão; após N reflexões a probabilidade de emergência de ftons é α^N .

O comprimento total da trajetória desses ftons pode ser facilmente obtido quando o ponto de emissão se localiza sobre o eixo do cristal, por intermédio das leis da reflexão (figs. 1 e 2).

Em cada posição de reflexão o simétrico especular do raio refletido se encontra na direção do raio incidente; acrescentemos ao primeiro o segundo. O segmento soma está agora na direção do raio refletido na posição imediatamente precedente e seu simétrico especular estará na direção do raio incidente nesta nova posição. Repetindo esse procedimento desde a posição de reflexão mais próxima à face do cristal adjacente ao fotomultiplicador (oposta à face de entrada da radiação gama) até a primeira reflexão, alinhamos todos os segmentos da trajetória poligonal segundo uma reta cujo comprimento é obviamente o dessa trajetória.

Consideremos agora uma trajetória que contém $N + 1$ reflexões contra a superfície lateral, a última delas se encontrando em algum ponto da circunferência de interseção dessa superfície com a base do cilindro (fa-

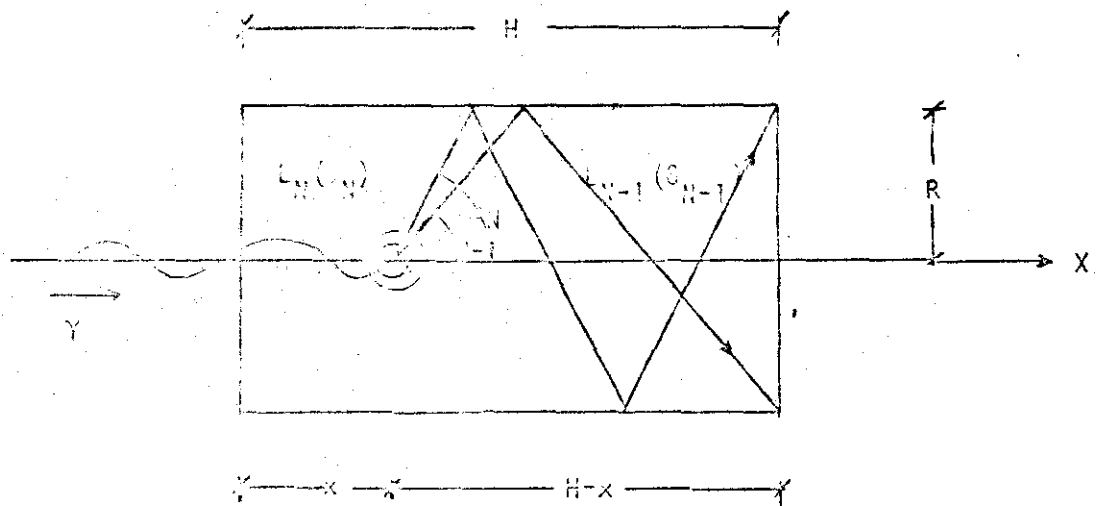


FIGURA 1

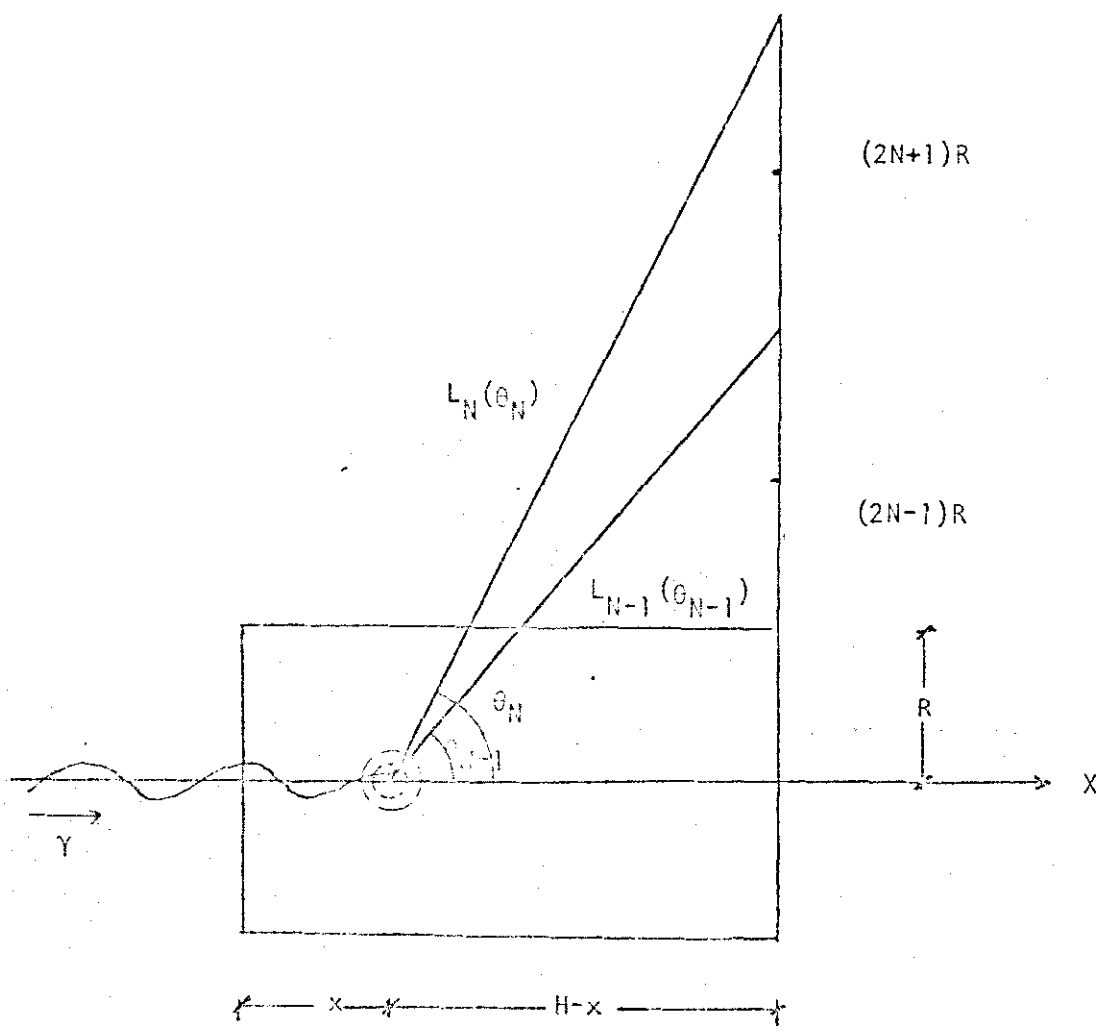


FIGURA 2

ce adjacente ao fotomultiplicador). A perpendicular ao eixo que passa por esse ponto encontra o segmento retificado da poligonal, determinado pela construção acima, num ponto a distância $(2N + 1)R$ do eixo, sendo R o raio da base do cristal. Suponhamos que essa trajetória é aquela seguida pelos fons emitidos de algum ponto do eixo do cilindro a um ângulo θ_N com ele; então o comprimento $L_N(\theta_N)$ da trajetória é dado por :

$$L_N(\theta_N) = [(2N + 1)^2 R^2 + (H - x)^2]^{1/2} \quad (3)$$

H sendo a altura do cristal.

A (3) dá o maior comprimento compatível com um número N de reflexões completas contra a superfície lateral (no sentido de que todos os raios refletidos percorrem o cristal de geratriz a geratriz); o menor comprimento se dará para um ângulo θ_{N-1} e tem o valor :

$$L_{N-1}(\theta_{N-1}) = [(2N-1)^2 R^2 + (H - x)^2]^{1/2} \quad (4)$$

Este é também o limite máximo para as trajetórias com $N-1$ reflexões completas. Todos os fons emitidos a ângulos $\theta_{N-1} < \theta < \theta_N$ atingirão o catodo com N reflexões e seus comprimentos estarão entre os valores fixados nas equações acima.

Da construção precedente também resulta que

$$\text{tg}\theta_N = (2N + 1)R / (H - x) \quad (5)$$

Dados esses argumentos é fácil computar a probabilidade de se encontrar trajetórias com N reflexões completas: para fons emitidos isotropicamente de um ponto x do eixo do cilindro será dada por :

$$P(\theta_N, \theta_{N-1}) = K\alpha^N \int_{\theta_{N-1}}^{\theta_N} d\Omega / 4\pi \quad (6)$$

onde α é o coeficiente de reflexão e K um coeficiente de normalização . Esta é também, obviamente, a probabilidade de que os comprimentos de trajetória estejam entre $L_N(\theta_N)$ e $L_{N-1}(\theta_{N-1})$.

É de interesse, para os objetivos deste trabalho, discutir este problema no caso em que a fonte das cintilações se encontra fora do eixo do cilindro; neste caso as trajetórias são poligonais no espaço, os vértices tocando geratrizes da superfície cilíndrica não coplanares com o eixo, e os segmentos não o interceptam necessariamente.

Consideremos uma tal trajetória, contendo N reflexões completas ; seja x a posição sobre um eixo paralelo ao do cristal, sede das cintilações, y a distância entre esses eixos, θ_N e \emptyset os ângulos polar e azimutal de emissão dos ftons (fig. 3).

Em princípio se pode aplicar a mesma construção para retificar a trajetória empregada no caso anterior. A trajetória retificada estará na direção do segmento inicial, precedendo a primeira reflexão, num plano inclinado de \emptyset com o plano que contém o ponto de emissão e o eixo do cristal. As relações métricas entre esse comprimento, sua projeção sobre o eixo e sobre a base do cilindro, necessárias para construir as análogas das equações (3-5), podem ser escritas mas são bastante complicadas e inconvenientes para posteriores manipulações.

O problema se simplifica apreciavelmente quando se observa que , fixado θ_N , uma rotação qualquer do primeiro segmento da poligonal em torno do eixo paralelo ao do cilindro passando pelo ponto de emissão, gira toda a figura do mesmo ângulo, deixando invariante o comprimento de cada segmento e, portanto, o comprimento total. Assim sendo a trajetória pode ser retificada na configuração simples correspondendo a $\emptyset = 0$, seu comprimento sendo o mesmo para qualquer outro valor do ângulo azimutal .

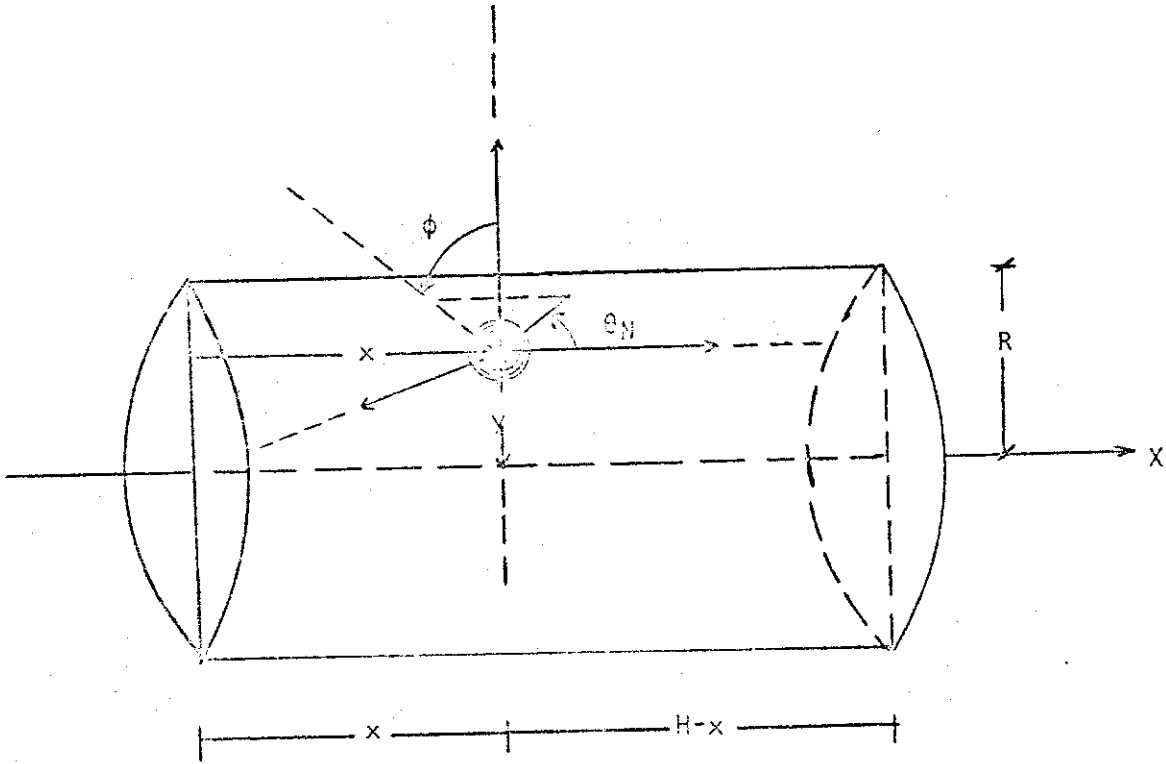


FIGURA 3

Nestas condições se obtêm, sem dificuldade :

$$L_N(\theta_N, y) = \{[(2N+1)R-y]^2 + (H-x)^2\}^{1/2} \quad (7)$$

que substitui a equação (3), com uma expressão semelhante para substituir a (4). Além disso a (5) fica :

$$\text{tg}\theta_N = [(2N+1)R-y]/(H-x) \quad (8)$$

(para cada N, apenas uma das poligonais obtidas por rotação, conforme a prescrição acima, toca a circunferência de base; usamos esta para definir o plano $\emptyset = 0$. A rigor devemos adaptar a linguagem neste caso, classificando as trajetórias como contendo N reflexões completas ou não. Essa circunstância não altera quantitativamente nossos resultados e será ignorada.

Vê-se da equação (8) que os limites angulares para emissão "fora do eixo" estão deslocados para ângulos menores com respeito à emissão "no eixo" (eq. (5)).

A probabilidade para encontrar trajetórias com N reflexões completas continua dada pela (6), apenas os limites angulares da integração ficam substituídos pelos valores dados pela (8).

Para finalizar esta discussão sobre a progressão da cintilação no cristal registramos uma simplificação adicional que será requerida mais adiante. Trata-se do cálculo dos momentos de ordem-k da distribuição de comprimentos, seja, de grandezas do tipo

$$M_k = \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\theta_{N-1}}^{\theta_N} L(\theta) [dP(\theta_N, \theta_{N-1})/d\Omega] d\Omega \quad (9)$$

Quando essas grandezas tem de ser calculadas "fora do eixo" as integrações podem ficar bastante complicadas. Entretanto, trocando os limites

"fora do eixo" por limites "no eixo" a soma fica inalterada.

5. Distribuição em Tempo de Chegada

O tempo de chegada é aqui entendido como o intervalo decorrido entre a passagem da radiação gama pela face de entrada do cristal e a chegada do primeiro foton de cintilação à face oposta. Esse tempo está sujeito a variações aleatórias impostas pelas flutuações estatísticas no: a) tempo de trânsito da radiação gama até produzir a primeira interação no cristal (t'); b) tempo de espera até que o cristal emita o primeiro foton de cintilação (τ); c) tempo de trânsito desses fotons até o catodo do fotomultiplicador (t''). O tempo de chegada, medido a partir do instante de penetração da radiação incidente, é dado por :

$$t = t' + \tau + t'' \quad (10)$$

e sua distribuição pode ser obtida combinando as probabilidades de ocorrência de cada um dos processos acima referidos, expressas em função do tempo. No que segue nos limitaremos à incidência para-axial mas a extensão dos argumentos ao caso geral é trivial.

O tempo de trânsito da radiação gama até a interação em x é obtido fazendo $x = ct'$, e sua distribuição é obtida da (1) introduzindo nela essa substituição:

$$dP_{\gamma}(t') = e^{-\mu ct'} \mu c dt' \quad (11)$$

com $0 < t' < H/c$.

O tempo de espera da cintilação está distribuído segundo a (2), onde $\tau = 0$ é contado a partir do instante em que a radiação incidente interage.

Finalmente o tempo de trânsito para fotons de cintilação está li-

gado ao comprimento $L(\theta)$ da trajetória por $t'' = L(\theta)/v$, ($v = c/n$), θ sendo o ângulo de emissão; a distribuição angular condicional, como vimos, a distribuição em comprimentos e, através desta, a distribuição em t'' , de modo que:

$$dP_R(t'') = - (\alpha^N / 2\pi) (d\Omega/dL) (dL/dt'') dt''$$

ou seja:

$$dP_R(t'') = \alpha^N (H - ct'') / (vt''^2) dt'' \quad (12)$$

Dado que esses processos são independentes e sucessivamente condicionantes a probabilidade total é o produto das probabilidades; como não estamos interessados em classificar os ftons chegando ao fotocatodo pelo número de reflexões sofridas, impõe-se ainda uma soma sobre N :

$$dP(t', \tau, t'') = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N dP(t') dP_f(\tau) dP_R t'' \quad (13)$$

com $t' + \tau + t'' = t$. A (13) define a distribuição em tempos de chegada.

Para finalizar estas considerações diremos que a (13) depende de um fator de normalização a ser calculado adiante. (O tempo de trânsito dos ftons de cintilação na eq. (12) foi normalizado tomando-se em consideração apenas metade do ângulo sólido de emissão. Essa prática exclui do trem de ondas luminosas os ftons emitidos "para trás", isto é, em direção à face de entrada da radiação gama; a maioria dos cristais possui uma camada refletora também nessa face de modo que os ftons serão reorientados em direção ao catodo, mas envolverão sempre um número maior de reflexões e ademais chegarão atrasados com respeito ao trem de ondas principal. Não foram por isso considerados, embora sua inclusão seja trivial).

III - MOMENTOS DA DISTRIBUIÇÃO EM TEMPOS DE CHEGADA

A) *Aproximação Para-Axial*

Aqui estamos interessados em discutir as fórmulas para o cálculo dos momentos de ordem 0,1 e 2 apenas, i.e., a área sob a distribuição, o centro ponderado dos tempos (tempo médio) e o tempo médio quadrático. A área sob a curva é necessária para o cálculo dos outros dois momentos, da do que é o fator de normalização da distribuição (13) e inclui fatores de pendentes da energia da radiação incidente; os outros dois parâmetros são necessários para a própria avaliação de dados experimentais, de acordo com os comentários apresentados no Cap. I.

1 - Normalização

A (13), levando em conta as formas explícitas para dP_γ , dP_f e dP_R , se escreve:

$$dP(t', \tau, t'') = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N \mu(E) c \frac{(H-ct')}{vt'^2} \lambda e^{-\mu(E)ct'} e^{-\lambda\tau} dt' d\tau dt'' \quad (14)$$

onde usamos notação que torna mais ostensiva a dependência do coeficiente de absorção com a energia incidente, E.

O momento de ordem zero é dado por :

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \int_a^b dt' \int_0^{\infty} d\tau \int_{c_N}^{d_N} dt'' \frac{dP(t', \tau, t'')}{dt' d\tau dt''} \quad (15)$$

onde os limites a,b,c_N, são dados por: a = 0; b = H/c; c_N = L_{N-1}(θ_{N-1})/v, e d_N = L_N(θ_N)/v, se N ≠ 0 e c_N = (H-ct')/v, e d_N = L₀(θ₀)/v, se N=0.

Pode-se mostrar (Apêndice 1) que a (15) se reduz a :

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b e^{-\mu(E)ct'} \left[1 - \frac{H-ct'}{L_N(\theta_N)} \right] \mu(E) c dt' \quad (16)$$

de onde se obtêm, pela substituição $H/c - t' = T$:

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left[1 - e^{-\mu(E)H} - I_1 \right] \quad (17)$$

com :

$$I_1 = \mu(E) c^2 e^{-\mu(E)H} \int_a^b \frac{T e^{\mu(E)cT}}{[(2N+1)^2 R^2 + c^2 T^2]^{1/2}} dT$$

A menos do corte na somatória em valor finito de N , as (17) constituem a forma efetivamente utilizada em nossos cálculos para o fator de normalização da distribuição em tempos de chegada.

2 - Momentos

O cálculo dos momentos de primeira e segunda ordem fica mais simples quando se toma como braço de momento a variável $t-\tau$, em lugar de t dado pela (10). Isto corresponde, no caso do primeiro momento, a tomar como centro de redução o centroide da distribuição de tempos de espera (2), i.e., $\langle \tau \rangle = 1/\lambda$, que só depende da estrutura cristalina. Nessas condições :

$$\begin{aligned} \langle t - \tau \rangle &= (1/A) \int (t'+t'') dP(t', \tau, t'') \\ \langle (t - \tau)^2 \rangle &= (1/A) \int (t'+t'')^2 dP(t', \tau, t'') \end{aligned}$$

Em ambos os casos a integral sobre τ é imediata, contribuindo com um fator unidade.

Tratando as integrações acima de maneira análoga à que foi utilizada no caso da normalização, pode-se mostrar que (Apêndice 2) :

$$\langle t - \tau \rangle = (1/A) \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left[(1-e^{-\mu H})/\mu c - \frac{H e^{-\mu H}}{c} - I_2 + I_3 \right] \quad (18)$$

com

$$I_2 = e^{-\mu H} \mu c^2 \int_0^b \frac{T(H/c-T) e^{\mu c T}}{[(2N+1)^2 R^2 + c^2 T^2]^{1/2}} dT \quad (19)$$

e

$$I_3 = \mu c n e^{-\mu H} \int_0^b T e^{\mu c T} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{c^2 T^2} + 1 \right] dt' \quad (20)$$

e, para o tempo médio quadrático :

$$\begin{aligned} \langle (t-\tau)^2 \rangle = (1/A) \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) & \left\{ e^{-\mu H} \left[\frac{-2H}{\mu c^2} - (H/c)^2 - \frac{2}{\mu^2 c^2} \right] + \frac{2}{\mu^2 c^2} + \right. \\ & \left. + n^2 \left[\frac{2e^{-\mu H}}{\mu^2 c^2} - (H/c)^2 + \frac{2H}{\mu c^2} + \frac{2}{\mu^2 c^2} \right] - I_4 + I_5 + I_6 \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

com :

$$I_4 = \mu c^2 e^{-\mu H} \int_0^b \frac{T(H/c-T) e^{\mu c T}}{[(2N+1)^2 R^2 + c^2 T^2]^{1/2}} dT \quad (22)$$

$$I_5 = n^2 \mu e^{-\mu H} \int_0^b T e^{\mu c T} [(2N+1)^2 R^2 + c^2 T^2]^{1/2} dT \quad (23)$$

e

$$I_6 = 2n \mu c e^{-\mu H} \int_0^b (H/c-T) T e^{\mu c T} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{c^2 T^2} + 1 \right] dT \quad (24)$$

B) *Caso Geral*

Os resultados acima, para incidência para-axial, estendem-se sem maiores dificuldades para o caso em que a excitação produzida pela radiação incidente localiza-se fora do eixo de simetria do cristal. É o que acontece, por exemplo, quando uma fonte não colimada é colocada sobre o eixo do cristal, a uma distância d da face de entrada (fig. 4).

Consideremos em mais detalhe esse caso. A radiação emitida ao redor do ângulo ζ com o eixo do cilindro atinge a face do cristal numa coroa circular de modo que a fração de raios que assim penetra no cilindro é $d\Omega_\gamma / 4\pi$. A fração que interage com o cristal após percorrer a distância r , em dr é:

$$d\Omega_\gamma(\zeta) / 4\pi e^{-\mu r} \mu dr$$

ou, tendo em vista que $x = r \cos \zeta$

$$d\Omega_\gamma(\zeta) / 4\pi e^{-\mu x / \cos \zeta} \mu dx / \cos \zeta$$

a expressão acima é proporcional à probabilidade para interação à profundidade x pela radiação que penetra no cristal segundo o ângulo sólido $d\Omega_\gamma(\zeta)$ e substitui a expressão para dP_γ dada na (1), no caso geral. É claro que o problema agora envolve uma integração a mais, seja, sobre o ângulo sólido $d\Omega_\gamma$.

A distribuição dos intervalos de tempo decorridos até a emissão

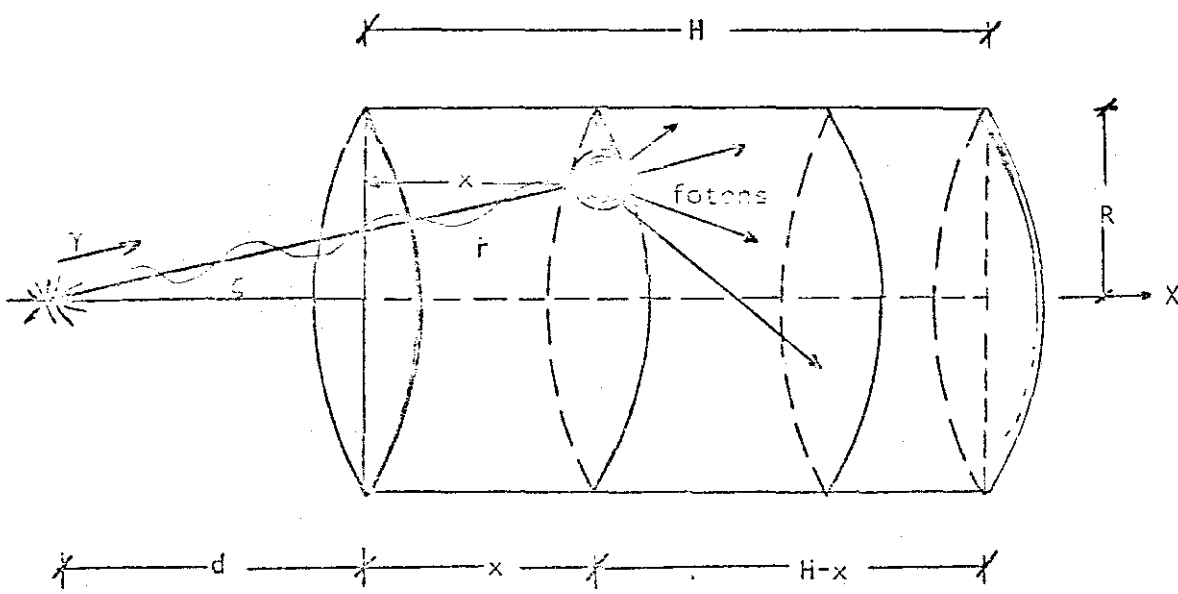


FIGURA 4

do primeiro foton da cintilação não muda: continua dada pela (2).

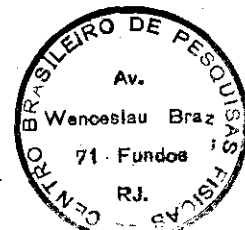
Quanto ao tempo de trânsito desses foton devemos agora lembrar que a desexcitação do cristal localiza-se a uma distância $y = x \operatorname{tg} \theta$ do eixo de simetria. Aplica-se ainda um tratamento inteiramente semelhante ao apresentado em II.5 para o caso para-axial, usando, porém, (7) e (8) em lugar de (3) e (5), com y dado acima.

A incorporação dessas modificações a distribuição dos tempos de chegada é simples mas o cálculo de seus momentos fica bem mais complicado que no caso axial. O tratamento simplifica-se bastante se introduzirmos na função de distribuição as modificações suscitadas pelo seguinte argumento: 1) as trajetórias fora do eixo tem o mesmo comprimento que as nascidas no eixo, à mesma distância da face de entrada e com o mesmo ângulo de emissão; 2) essas trajetórias diferem apenas, quando muito, pelo número de reflexões completas que contem; 3) como todos os resultados relevantes envolvem somas para todos os valores do número de reflexões, podemos tratar o problema fora do eixo com a mesma distribuição dP_R dada na (12) para o caso para-axial, desde que se some até um número suficientemente grande de reflexões.

Baseada nessas idéias a derivação da distribuição dos tempos de chegada no caso geral é apresentada no Apêndice 3, bem como o cálculo de seus momentos. Aqui transcrevemos apenas os resultados finais:

1. Normalização

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} \zeta [1 - e^{-\mu H / \cos \zeta}] - I_{N-1}(\zeta) \right] d\zeta + \int_f^e \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} \zeta \left[1 - e^{-\mu \left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)} \right] - I_{N-1}(\zeta) \right] d\zeta \right\} \quad (25)$$



onde :

$$e = \operatorname{tg}^{-1} R/d ; \quad f = \operatorname{tg}^{-1} R/(H+d)$$

$$IN_1(\zeta) = \frac{\mu c}{2} \int_0^a \frac{\operatorname{tg} \zeta (H-ct') e^{-\mu ct'/\cos \zeta}}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} dt' \quad (26)$$

$$IM_1(\zeta) = \frac{\mu c}{2} \int_0^g \frac{\operatorname{tg} \zeta (H-ct') e^{-\mu ct'/\cos \zeta}}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} dt'$$

onde $a = H/c$; $g = \frac{R/c}{\operatorname{tg} \zeta} - \frac{d}{c}$

2. Momentos

$$\begin{aligned} \langle t - r \rangle = (1/A) \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) & \left\{ \int_0^f \left[\frac{\operatorname{sen} \zeta}{2 \mu c} (1 - e^{-\mu H/\cos \zeta}) - \frac{H \operatorname{tg} \zeta}{2c} e^{-\mu H/\cos \zeta} - IN_2(\zeta) \right. \right. \\ & \left. \left. + IN_3(\zeta) \right] d\zeta + \right. \\ + \int_f^e & \left[\frac{\operatorname{sen} \zeta}{2 \mu c} (1 - e^{-\mu \left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)}) + \frac{1}{2c} (d \operatorname{tg} \zeta - R) e^{-\mu \left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)} - IM_2(\zeta) + \right. \\ & \left. \left. + IM_3(\zeta) \right] d\zeta \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

com

$$IN_2(\zeta) = \frac{\mu c}{2} \int_0^a \frac{t' (H-ct') e^{-\mu ct'/\cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2} \cos \zeta} dt' \quad (28)$$

$IM_2(\zeta)$ só difere de $IN_2(\zeta)$ pelo limite superior de integração (g em lugar de a)

$$IN_3(\zeta) = \frac{\mu n c}{4} \int_0^a e^{-\mu c t' / \cos \zeta} (H/c - t') \operatorname{tg} \zeta \ln \left[\frac{(2N+1)^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt' \quad (29)$$

$IM_3(\zeta)$ difere de $IN_3(\zeta)$ apenas pelo limite superior de integração (g em lugar de a).

Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle (t-\tau)^2 \rangle = & (1/A) \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \left[\frac{\operatorname{sen} \zeta}{\mu^2 c^2} - e^{-\mu H / \cos \zeta} \left(\frac{H^2 \operatorname{sen} \zeta}{2c^2 \cos^2 \zeta} + \frac{H \operatorname{tg} \zeta}{\mu c^2} + \right. \right. \right. \\ & + \left. \frac{\operatorname{sen} \zeta}{\mu^2 c^2} \right) - IN_4(\zeta) + IN_5(\zeta) - \frac{H n^2}{c^2} \left(-\frac{H}{2} + \frac{\cos \zeta \operatorname{sen} \zeta}{\mu} \right) - \\ & - \left. \frac{n^2 \operatorname{sen} \zeta \cos^2 \zeta}{\mu^2 c^2} (1 - e^{-\mu H / \cos \zeta}) + IN_6(\zeta) \right] d\zeta + \\ & + \int_f^e \left[\frac{\operatorname{sen} \zeta}{\mu^2 c^2} - e^{-\mu \left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)} \left[\frac{(R/\operatorname{tg} \zeta - d)^2}{2c^2 \cos^2 \zeta} \operatorname{sen} \zeta + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{(R/\operatorname{tg} \zeta - d)}{\mu c^2} \operatorname{tg} \zeta + \frac{\operatorname{sen} \zeta}{\mu c^2} \right] - IM_4(\zeta) + IM_5(\zeta) - \right. \\ & - \left. \frac{n^2 H^2 \operatorname{sen} \zeta}{2c^2} + \frac{n^2 H \operatorname{sen} \zeta \cos \zeta}{\mu c^2} - \frac{n^2 \cos^2 \zeta \operatorname{sen} \zeta}{\mu^2 c^2} + \right. \\ & + \left. e^{-\left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)} \left[\frac{n^2 (H+d - R/\operatorname{tg} \zeta)^2 \operatorname{sen} \zeta}{2c^2} - \frac{n^2 (H+d - R/\operatorname{tg} \zeta)}{\mu c^2} \right. \right. \\ & \left. \left. * \operatorname{sen} \zeta \cos \zeta + \frac{n^2 \cos^2 \zeta \operatorname{sen} \zeta}{\mu^2 c^2} \right] + IM_6(\zeta) \right] d\zeta \left. \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

onde

$$IN_4(\zeta) = \frac{\mu c}{2} \int_0^a \frac{t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} (H-ct')}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} \frac{\operatorname{tg} \zeta}{\cos^2 \zeta} d\zeta \quad (31)$$

$\mathbb{M}_4(\zeta)$ só difere de $\text{IN}_4(\zeta)$ pela troca do limite superior a por g .

$$\text{IN}_5(\zeta) = \frac{\mu n^2}{2} \int_0^a e^{-\mu c t' / \cos \zeta} (H/c-t') \text{tg} \zeta [(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2} dt' \quad (32)$$

$\mathbb{M}_5(\zeta)$ só difere de $\text{IN}_5(\zeta)$ pela substituição do limite superior a , por g .

$$\text{IN}_6(\zeta) = \frac{\mu c n}{2} \int_0^a t' (H/c-t') \frac{\text{tg} \zeta}{\cos \zeta} e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt \quad (33)$$

$\mathbb{M}_6(\zeta)$ só difere de $\text{IN}_6(\zeta)$ pela substituição do limite superior a por g .

IV - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

1. *Organização e crítica dos cálculos*

a) O cálculo dos momentos das distribuições focalizadas neste trabalho envolve numerosas integrações que não podem ser obtidas em forma fechada, dada a complexidade dos integrandos. Nesses casos os cálculos foram feitos no computador, pela Regra de Simpson^(12,13). Tanto no caso para-axial como no caso geral sub-rotinas específicas foram preparadas para o cálculo das seis integrais aparecendo em cada caso; apenas no primeiro, em vez de dá-las diretamente foi mais cômodo calcular integrais que se relacionam facilmente com aquelas de interesse. (Apêndice 5)

b) Uma questão importante envolvendo praticamente todos os cálculos é a relacionada com a necessidade de impor um corte finito ao somatório sobre o número de reflexões, por razões práticas. É claro das leis da reflexão óptica que maior o ângulo de emissão, θ , com o eixo do cilindro, maior o número de reflexões, maior a atenuação, i.e., a probabilidade de o foton ser absorvido numa delas, e maior o tempo de trânsito. Um corte num valor suficientemente elevado de N importa, portanto, em desprezar a cauda evanescente do trem de ondas, contendo naturalmente os ftons mais atrasados, porém muito atenuada com relação à componente principal. Conseqüentemente trata-se de uma aproximação bastante razoável para os somatórios.

A fixação do limite superior do número de reflexões através de um critério de convergência inserida nos programas revelou-se pouco prática em muitos casos, aumentando desmesuradamente o tempo de máquina.

Como uma alternativa, analisamos a curva do ângulo de emissão (θ) versus o número de reflexões (N) para o caso de ftons emitidos da inter-

seção do eixo com a face de entrada de um cristal com $H = 2R$; nesse caso a relação entre as duas grandezas é $\text{tg}\theta_N = N + 1/2$. O gráfico 1 representa essa relação. Por inspeção visual dessa figura fixamos em 60 o número máximo de reflexões. Esse número corresponde a um ângulo de emissão máximo de 89° , em $x=0$. Para posições intermediárias no cristal será ainda maior. Com essa opção parece-nos, estamos, na maioria dos casos, desprezando a cauda evanescente do trem de ondas.

c) Não obstante, há uma acumulação vertiginosa de valores de N nas vizinhanças de $\theta = \pi/2$. A fim de dar uma alternativa crítica para o valor dessa opção, o caso para-axial foi resolvido para o limite hipotético: $\mu = \infty$, os momentos das distribuições sendo calculados como função de N (máximo), (Apêndice 4), (Gráficos n^{os} 2,3).

No limite em que o coeficiente de absorção, μ , é muito grande, a probabilidade de sobrevivência à profundidade x , $e^{-\mu x}$, é desprezível, exceto para $x=0$. Neste caso a radiação incidente é absorvida logo na face de entrada e todo o atraso na chegada da informação à face oposta será devido às múltiplas reflexões (a menos, é claro, do tempo de espera da cintilação). Esse caso é portanto muito útil para se avaliar a contribuição das reflexões. Vê-se do Gráfico 2 que o tempo médio apresenta tendência a saturar com o aumento das reflexões, e que nesse caso a escolha $N = 60$ não está má. O tempo, médio quadrático (Gráfico 3), também revela características tão favoráveis, denunciando tendência a se estabilizar (notar que é necessário tomar a raiz quadrada do valor tabelado para tê-lo diretamente comparável com o tempo médio).

d) Um teste adicional foi feito sobre o acerto dos cálculos, a partir do seguinte argumento:

É bem conhecido que a resolução em energia de detetores inorgânicos de cintilação varia segundo uma lei empírica do tipo $A + \frac{B}{E}^{(1)}$.

Devemos esperar que as flutuações em amplitude do sinal elétrico resultante na placa do fotomultiplicador são ligadas às flutuações de corrente acompanhando cada impulso e estas, além de fatores intrínsecos, dependerão das flutuações nos tempos de chegada do trem de ondas de cintilação ao fotocátodo. Conseqüentemente, se estes últimos fatores forem importantes com respeito aos fatores intrínsecos ao fotomultiplicador, devemos esperar que o tempo médio quadrático apresente uma dependência semelhante com a energia de radiação- γ . Os resultados estão no gráfico 16, onde as linhas cheias são retas de mínimos quadrados sobre os pontos calculados, confirmando inteiramente essas expectativas.

e) Parâmetros numéricos relevantes para os cálculos foram escolhidos conforme a tabela abaixo:

TABELA

Velocidade da luz (c).....	2.9979×10^{10} cm/s
Coefficiente de absorção (μ).....	.090 - 1.00 MeV ⁽³⁾
Índice de refração de NaI(Tl) (n).....	1.7745 ⁽¹⁵⁾
Coefficiente de Reflexão do MgO (α).....	0.98 ⁽¹⁵⁾

2. Conclusões .

Nossas conclusões repousam sobre os gráficos apresentados mostrando o comportamento de cristais NaI(Tl) de diferentes tamanhos, para incidência para-axial e qualquer, em função de energia da radiação- γ incidente. Podem ser sistematizadas nas seguintes proposições:

a) O valor do tempo médio consignado nesses gráficos pode ser empregado com segurança para corrigir eventuais erros sistemáticos em medidas de vida média com o método do deslocamento do baricentro da curva de resposta pronta.

b) Cristais de dimensões maiores tendem a fornecer retardos maiores e mais dispersos em tempo; conseqüentemente as correções impostas no

caso anterior são maiores e acompanhadas de um desvio quadrático médio maior. Isto leva à escolha natural de cristais de pequenas dimensões para minimizar essas correções, mas nesse caso perde-se na resolução em energia, exceto às baixas energias; nessa região entretanto o desempenho nos tempos é mais pobre. Um compromisso envolvendo essas questões tem de ser feito em cada situação específica.

c) A distribuição em tempo de trânsito no cristal afeta a resolução em energia de um modo consistente com as observações experimentais. A participação do cristal nos tratamentos teóricos da resolução em energia desses sistemas não pode ser desprezada.

TABELAS ,

- 1 - Coeficiente de Absorção infinito. Resultados do Fator de Normalização, Tempo Médio e Tempo Médio Quadrático, por número máximo de reflexões. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm, (3"x3").
 - Fonte colimada no eixo de simetria. Resultados do Fator de Normalização, Tempo Médio e Tempo Médio Quadrático em função da energia do raio gama incidente, para:
- 2 - Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3")
- 3 - Cristal 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2")
- 4 - Cristal 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1")
 - Fonte não colimada a 10 cm do cristal. Resultados do Fator de Normalização, Tempo Médio, Tempo Médio Quadrático em função da energia do raio gama incidente, para :
- 5 - Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3")
- 6 - Cristal 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2")
- 7 - Cristal 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1")
- 8 - Fonte não colimada a 5 cm do cristal. Resultados do Fator de Normalização, Tempo Médio, Tempo Médio Quadrático em função da energia do raio gama incidente. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3").
 - Relação entre o Tempo Médio Quadrático e o inverso da energia do raio gama incidente. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"). Para:
- 9 - Fonte colimada no eixo de simetria.
- 10 - Fonte não colimada a 10 cm do cristal.

TABELA 1

Coefficiente de absorção infinito. Cristal 7.62 cm. x 7.62 cm. (3"x3").

NUM. DE REFLEXÕES.	NORMALIZAÇÃO	TEMPO MEDIO (10 ⁻¹⁰ SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR. (10 ⁻¹⁹ SEG. 2)
10	0.14069563	9.5452313	12.880741
20	0.27762401	11.379024	22.500223
30	0.39261788	12.511698	31.337804
40	0.48766023	13.309205	39.460221
50	0.56581026	13.907298	46.905756
60	0.62992173	14.372494	53.706331
70	0.68245155	14.742785	59.893170
80	0.72545981	15.042105	65.498601
90	0.76065552	15.286639	70.556322
100	0.78944826	15.487909	75.101242

TABELA 2

Fonte colimada no eixo de simetria. Cristal 7.62 cm. x 7.62 cm (3"x3")

ENERGIA (MEV.)	NORMALIZAÇÃO	TEMPO MEDIO (10^{-10} SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR. (10^{-19} SEG. 2)
0.090	0.56962162	26.651139	100.203790
0.100	0.59456718	20.768713	77.513466
0.120	0.61723083	15.871586	58.446382
0.140	0.62468189	14.390080	52.438925
0.160	0.62754941	13.878330	50.140752
0.180	0.62924415	13.606016	48.779304
0.200	0.63079607	13.359933	47.485916
0.300	0.63116872	12.422705	42.584217
0.400	0.61735052	11.792261	39.399489
0.500	0.59932798	11.427552	37.590098
0.600	0.58015853	11.170824	36.328656
0.700	0.56427687	11.006189	35.524678
0.800	0.55133212	10.892161	34.969962
1.000	0.52756184	10.714876	34.110902

TABELA 3

Fonte colimada no eixo de simetria. Cristal 5.08 cm. x 5.08 cm (2"x2").

ENERGIA (MEV.)	NORMALIZAÇÃO	TEMPO MEDIO (10^{-10} SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR. (10^{-19} SEG. 2)
0.090	0.60407001	12.441452	30.823967
0.100	0.61565769	10.797547	26.545748
0.120	0.62475520	9.584211	23.279904
0.140	0.62815136	9.186276	22.070312
0.160	0.63036585	8.953227	21.269336
0.180	0.63201398	8.756555	20.574215
0.200	0.63284409	8.543401	19.827197
0.300	0.61329275	7.794498	17.288141
0.400	0.57357502	7.399125	15.989228
0.500	0.53883410	7.196421	15.331917
0.600	0.50823486	7.061835	14.898408
0.700	0.48557395	6.978400	14.630757
0.800	0.46834171	6.921725	14.449431
1.000	0.43883473	6.835219	14.173392

TABELA 4

Fonte colimada no eixo de simetria. Cristal 2.54 cm. x 2.54 cm. (1'x1').

ENERGIA (MEV.)	NORMALIZAÇÃO	TEMPO MEDIO (10^{-10} SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR. (10^{-19} SEG. 2)
0.090	0.62445283	4.8111071	5.8469453
0.100	0.62696064	4.6593995	5.6236448
0.120	0.63017917	4.4865200	5.3347685
0.140	0.63265324	4.3189496	5.0392422
0.160	0.63134295	4.1472337	4.7423650
0.180	0.62402493	4.0016923	4.4961630
0.200	0.60910594	3.8672554	4.2723879
0.300	0.51167363	3.5377767	3.7356102
0.400	0.43344790	3.4103209	3.5517293
0.500	0.38486278	3.3512171	3.4378288
0.600	0.34890050	3.3136294	3.3783235
0.700	0.32495582	3.2908631	3.3423552
0.800	0.30791843	3.2756109	3.3182991
1.000	0.28063655	3.2526093	3.2820604



TABELA 5

Fonte não colimada a 10 cm. do cristal. Cristal 7.62 cm. x 7.62 cm. (3"x3").

ENERGIA (MEV.)	NORMALIZAÇÃO (10^{-1})	TEMPO MEDIO (10^{-10} SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR. (10^{-19} SEG. ²)
0.090	0.19075006	19.998689	74.594345
0.100	0.19396514	17.249526	63.948795
0.120	0.19493755	14.919592	54.785041
0.140	0.19242644	14.168349	51.636063
0.160	0.18877774	13.864809	50.193551
0.180	0.18511925	13.677643	49.216204
0.200	0.18106360	13.498773	48.250372
0.300	0.16471758	12.824504	44.646470
0.400	0.15173811	12.368340	42.287500
0.500	0.14241394	12.096231	40.904726
0.600	0.13465147	11.899723	39.915650
0.700	0.12901381	11.771288	39.273022
0.800	0.12475364	11.681107	38.823524
1.000	0.11747077	11.538883	38.117310

TABELA 6

Fonte não colimada a 10 cm. do cristal. Cristal 5.08 cm. x 5.08 cm. ($2'' \times 2''$).

ENERGIA (MEV.)	NORMALIZAÇÃO (10^{-2})	TEMPO MEDIO (10^{-10} SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR: (10^{-19} SEG. 2)
0.090	0.91986284	11.124075	27.435273
0.100	0.92477985	10.183323	24.966495
0.120	0.91847144	9.461720	22.980070
0.140	0.90260953	9.189697	22.116948
0.160	0.88392422	9.008509	21.478018
0.180	0.86582080	8.852556	20.917958
0.200	0.84547698	8.685161	20.322438
0.300	0.75402744	8.095739	18.290800
0.400	0.67626461	7.772065	17.208674
0.500	0.62198527	7.600873	16.643594
0.600	0.57851784	7.485008	16.263678
0.700	0.54796785	7.412235	16.026037
0.800	0.52543432	7.362388	15.863666
1.000	0.48795715	7.285627	15.614324

TABELA 7

Fonte não colimada a 10 cm. do cristal. Cristal 2.54 cm. x 2.54 cm. (1"x1").

ENERGIA (MEV.)	NORMALIZAÇÃO(10 ⁻²)	TEMPO MEDIO (10 ⁻¹⁰ SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR. (10 ⁻¹⁹ SEG. ²)
0.100	0.24201337	4.6466875	5.6106374
0.120	0.23890603	4.4992921	5.3596594
0.140	0.23447846	4.3521209	5.0978660
0.160	0.22871096	4.2023240	4.8366951
0.180	0.22186642	4.0749870	4.6193214
0.200	0.21293252	3.9561643	4.4196875
0.300	0.17180217	3.6573633	3.9282683
0.400	0.14332857	3.5382763	3.7359147
0.500	0.12637023	3.4823255	3.6461470
0.600	0.11405209	3.4464964	3.5888642
0.700	0.10593883	3.4247072	3.5540990
0.800	0.10020353	3.4100611	3.5307636
1.000	0.09107767	3.3879255	3.4955371

TABELA 8

Fonte não colimada a 5 cm. do cristal. Cristal 7.62 cm. x 7.62 cm. (3"x3").

ENERGIA (MEV.)	NORMALIZAÇÃO (10^{-1})	TEMPO MEDIO (10^{-10} SEG.)	TEMPO MEDIO QUADR. (10^{-19} SEG. ²)
0.100	0.60321536	16.400088	60.691044
0.120	0.60014132	14.703350	53.979921
0.140	0.58715876	14.142019	51.585663
0.160	0.57089288	13.900550	50.408254
0.180	0.55508830	13.744459	49.576714
0.200	0.53785741	13.593211	48.747582
0.300	0.47207251	13.027655	45.682472
0.400	0.42511467	12.645178	43.676112
0.500	0.39382901	12.414532	42.487140
0.600	0.36895040	12.246322	41.628270
0.700	0.35141036	12.135533	41.066043
0.800	0.33840481	12.057308	40.670601
1.000	0.31659670	11.933210	40.045600

TABELA 9

Tempo médio quadrático em função do inverso da energia. Fonte colimada no eixo de simetria.
 Cristal 7.62 cm. x 7.62 cm. ($3^{\circ} \times 3^{\circ}$).

ENERGIA (MEV.)	INVERSO ENERGIA (MEV ⁻¹)	VALOR DADO (10 ⁻¹⁹ SEG. ²)	VALOR CALCULADO (10 ⁻¹⁹ SEG. ²)	ERRO-%
0.100	10.000	77.5134583	68.9106903	11.09
0.120	8.333	58.4463654	62.0529633	8.33
0.140	8.993	52.4382782	57.1545715	7.14
0.160	6.661	50.1407471	53.4808044	6.66
0.180	5.555	48.7792969	50.6234311	3.78
0.200	5.000	47.4859009	48.3375092	1.79
0.300	3.333	42.5841980	41.4797821	2.54
0.400	2.500	39.3994751	38.0509186	3.42
0.500	2.000	37.5900879	35.9936066	4.24
0.600	1.666	36.3286438	34.6220551	4.69

TABELA 10.

Tempo médio quadrático em função do inverso da energia. Fonte não colimada a 10 cm. do cristal.
Cristal 7.62 cm. x 7.62 cm. (3"x3").

ENERGIA(MEV.)	INVERSO ENERGIA(MEV. ⁻¹)	VALOR DADO (10 ⁻¹⁹ SEG. ²)	VALOR CALCULADO (10 ⁻¹⁹ SEG. ²)	ERRO-%
0.100	10.000	77.9608154	74.2484151	4.76
0.120	8.333	66.9710388	69.0991974	4.17
0.140	7.142	63.1596680	65.4211731	3.58
0.160	6.250	61.3927917	62.6626740	2.06
0.180	5.555	60.1871796	60.5171661	0.54
0.200	5.000	58.9931946	58.8007507	0.32
0.300	3.333	54.5448761	53.6515350	1.63
0.400	2.500	51.6403961	51.0769348	1.09
0.500	2.000	49.9896820	49.5321655	0.81
0.600	1.666	48.7235260	48.5023193	0.45

GRÁFICOS

- 1 - Número Máximo de Reflexões em função do ângulo (ζ) de emissão da radiação gama.
- 2 - Tempo Médio (ordem de grandeza: 10^{-10} seg.) em função do número máximo de reflexões quando o coeficiente de absorção do cristal é infinito.
- 3 - Tempo Médio Quadrático (ordem de grandeza: 10^{-19} seg.²) em função do número máximo de reflexões quando o coeficiente de absorção do cristal é infinito.
- 4 - Fator de normalização em função da energia do raio gama incidente, entre 90 kev e 1.Mev, para o caso da radiação colimada no eixo de simetria. Para três cristais: (a) 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"); (b) 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2"); (c) 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1").
- 5 - Tempo Médio (ordem de grandeza: 10^{-10} seg.) em função da energia do gama incidente, entre 90 kev até 1.Mev, para o caso da radiação colimada no eixo de simetria. Para três cristais: (a) 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"); (b) 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2"); (c) 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1").
- 6 - Tempo Médio Quadrático (ordem de grandeza: 10^{-19} seg.²) em função da energia do raio gama incidente, entre 90 kev e 1.Mev, para o caso da radiação colimada no eixo de simetria. Para três cristais: (a) 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"); (b) 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2"); (c) 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1").
- 7 - Fator de normalização em função da energia do raio gama incidente entre 90 kev e 1.Mev para fonte não colimada a 10 cm do cristal. Para três cristais: (a) 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"); (b) 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2"); (c) 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1").
- 8 - Tempo Médio (ordem de grandeza: 10^{-10} seg.) em função da energia do raio gama incidente, entre 90 kev e 1.Mev, para fonte não colimada a 10 cm do cristal. Para três cristais: (a) 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"); (b) 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2"); (c) 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1").
- 9 - Tempo Médio Quadrático (ordem de grandeza: 10^{-19} seg.²) em função da energia do raio gama incidente, entre 90 kev e 1.Mev para fonte não colimada a 10 cm do cristal. Para três cristais: (a) 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"); (b) 5.08 cm x 5.08 cm (2"x2"); (c) 2.54 cm x 2.54 cm (1"x1").

- 10 - Fator de normalização em função da energia do raio gama incidente , entre 90 kev e 1.Mev. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3") para: (a) fonte não colimada a 10 cm do cristal; (b) fonte colimada no eixo de simetria.
- 11 - Tempo Médio (ordem de grandeza: 10^{-10} seg.) em função da energia do raio gama incidente, entre 90 kev e 1.Mev. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"). Para: (a) fonte não colimada a 10 cm do cristal; (b) fonte colimada no eixo de simetria.
- 12 - Tempo Médio Quadrático (ordem de magnitude: 10^{-19} seg.²) em função da energia do raio gama incidente, entre 90 kev e 1.Mev. Cristal - 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"). Para: (a) fonte não colimada a 10 cm do cristal; (b) fonte colimada no eixo de simetria.
- 13 - Fator de normalização em função da energia do raio gama incidente, entre 90 kev e 1.Mev. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"). Para: (a) fonte não colimada a 5 cm do cristal; e (b) fonte não colimada a 10 cm do cristal.
- 14 - Tempo Médio (ordem de grandeza: 10^{-10} seg.) em função da energia do raio gama incidente entre 90 kev e 1.Mev. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"). Para: (a) fonte não colimada a 5 cm do cristal; e (b) fonte não colimada a 10 cm do cristal.
- 15 - Tempo Médio Quadrático (ordem de grandeza: 10^{-19} seg.²) em função da energia do raio gama incidente entre 90 kev e 1.Mev. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"), Para: (a) fonte não colimada a 5 cm do cristal; e (b) fonte não colimada a 10 cm do cristal.
- 16 - Tempo Médio Quadrático (ordem de grandeza: 10^{-19} seg.²) em função do inverso da energia do raio gama incidente entre 90 kev e 1.Mev. Cristal 7.62 cm x 7.62 cm (3"x3"). Para: (a) fonte não colimada a 10 cm do cristal; e (b) fonte colimada no eixo de simetria.

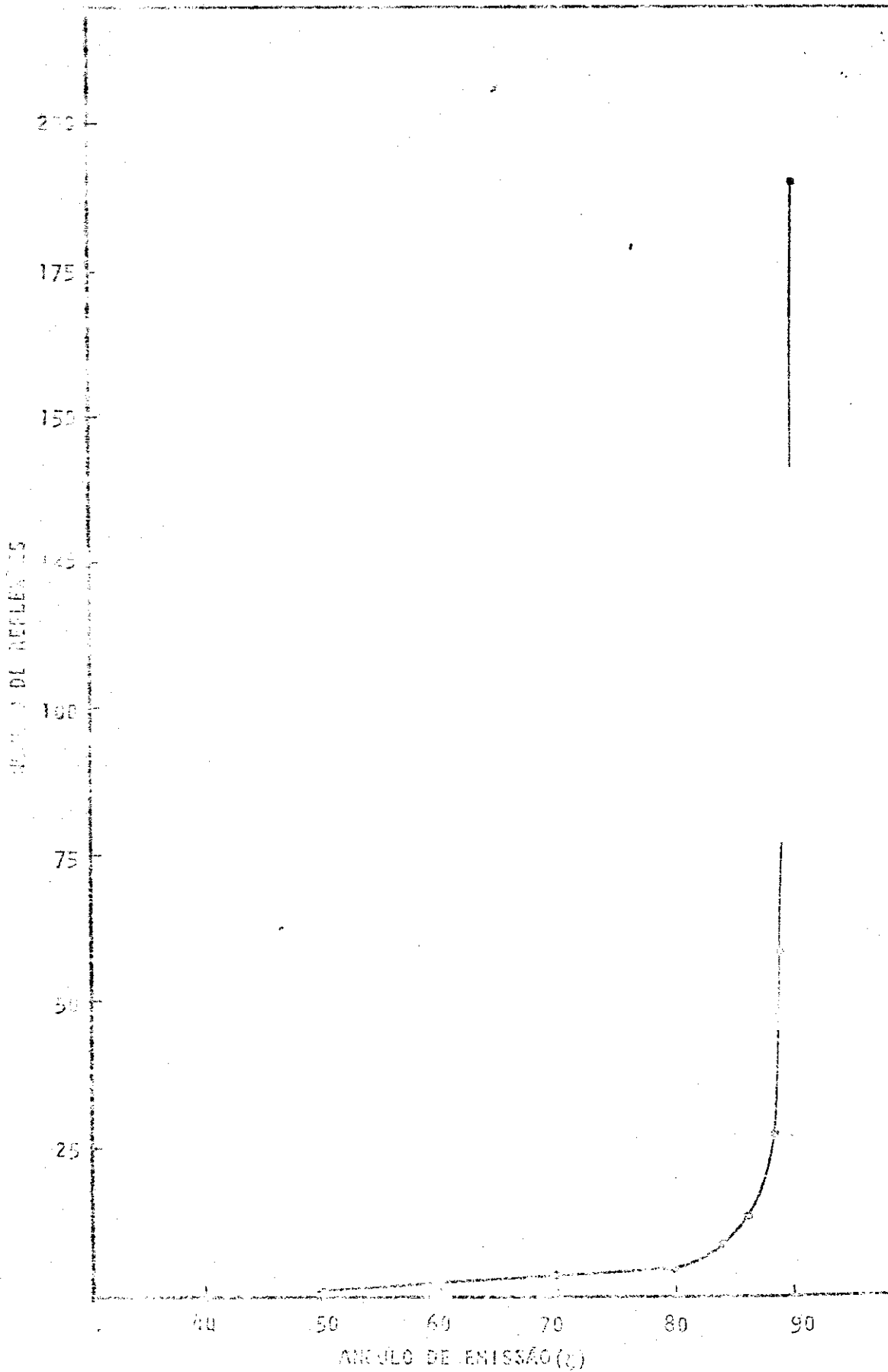
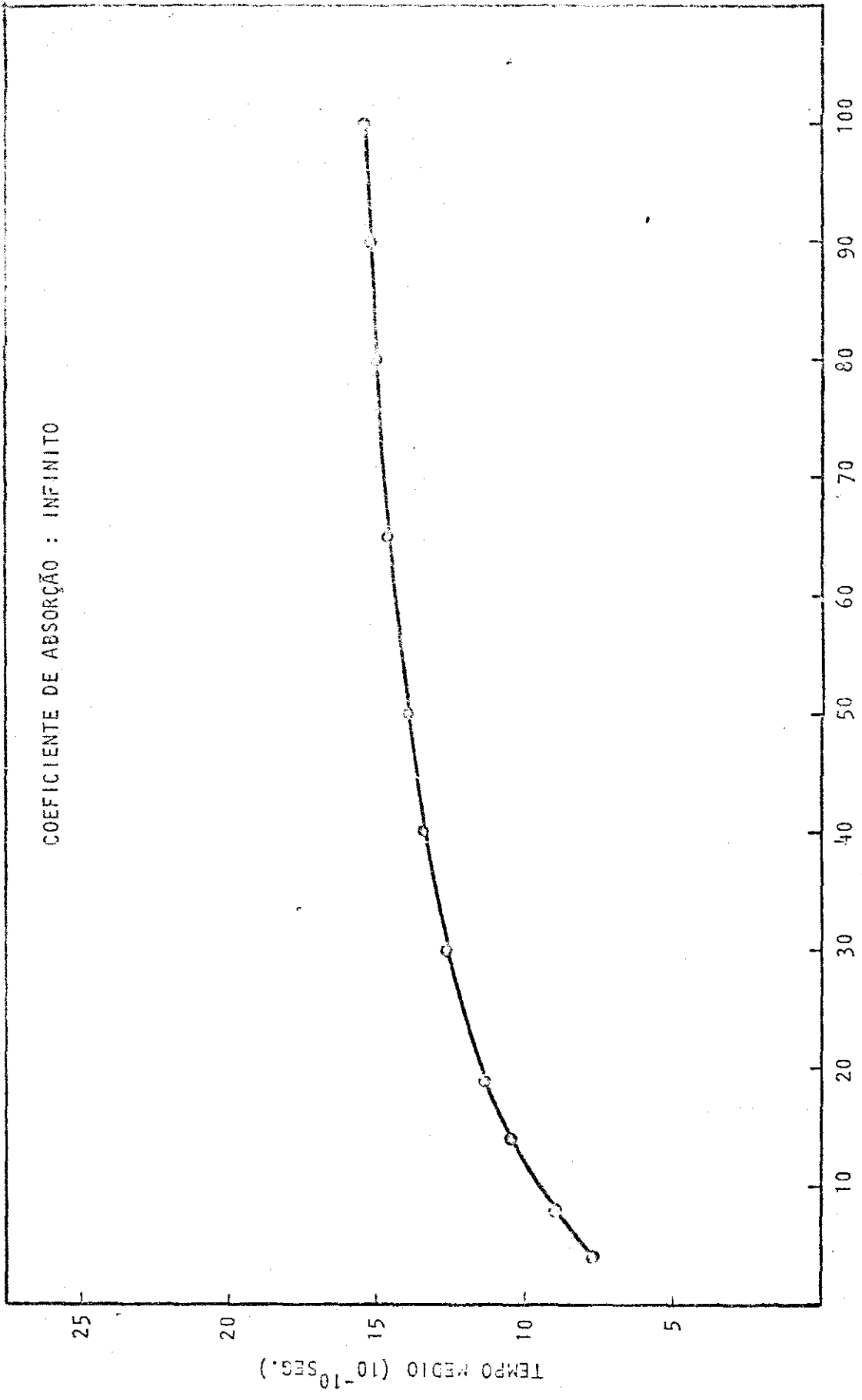


GRÁFICO 1



NUMERO DE REFLEXÕES

GRAFICO 2

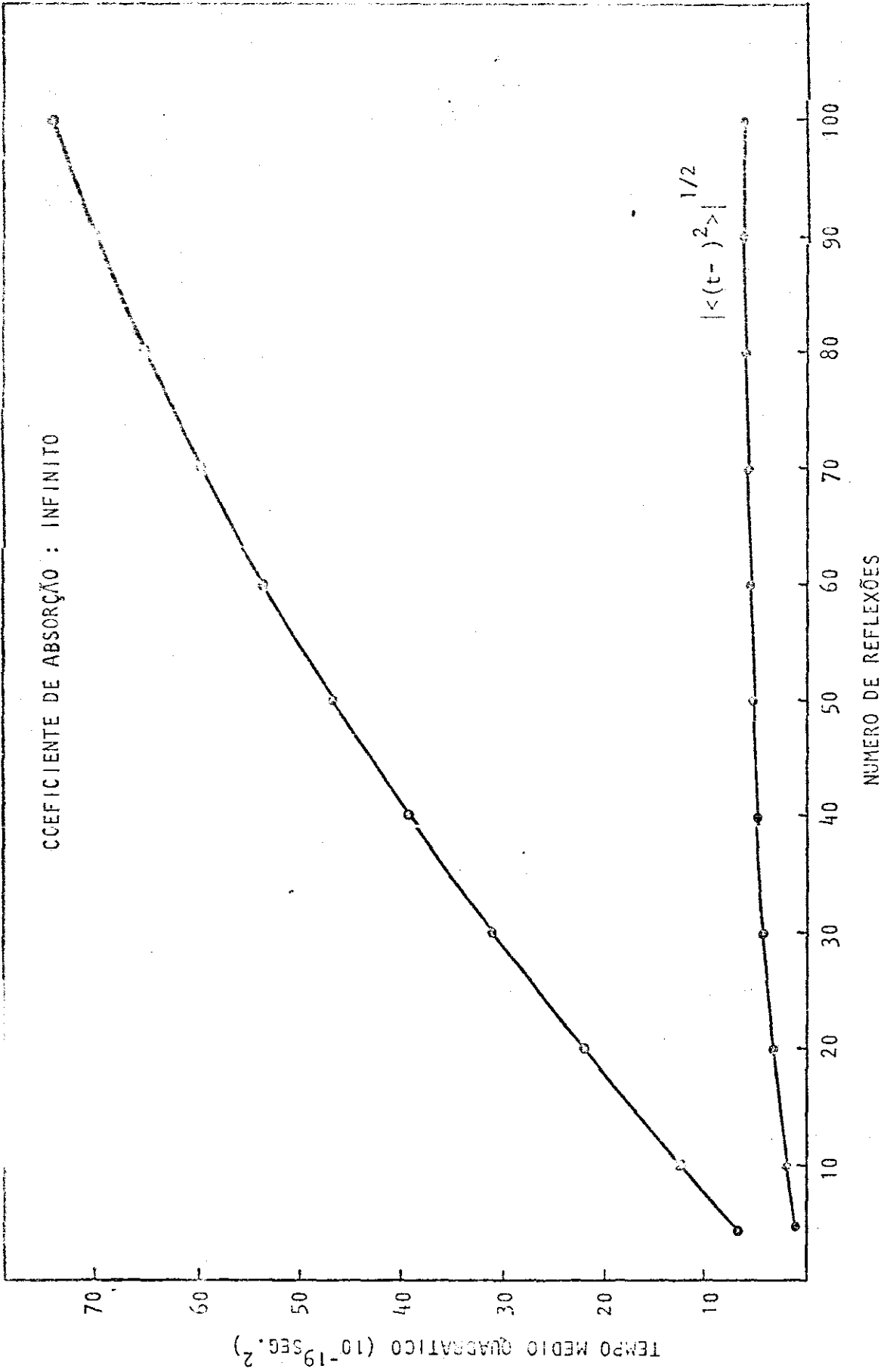


GRAFICO 3

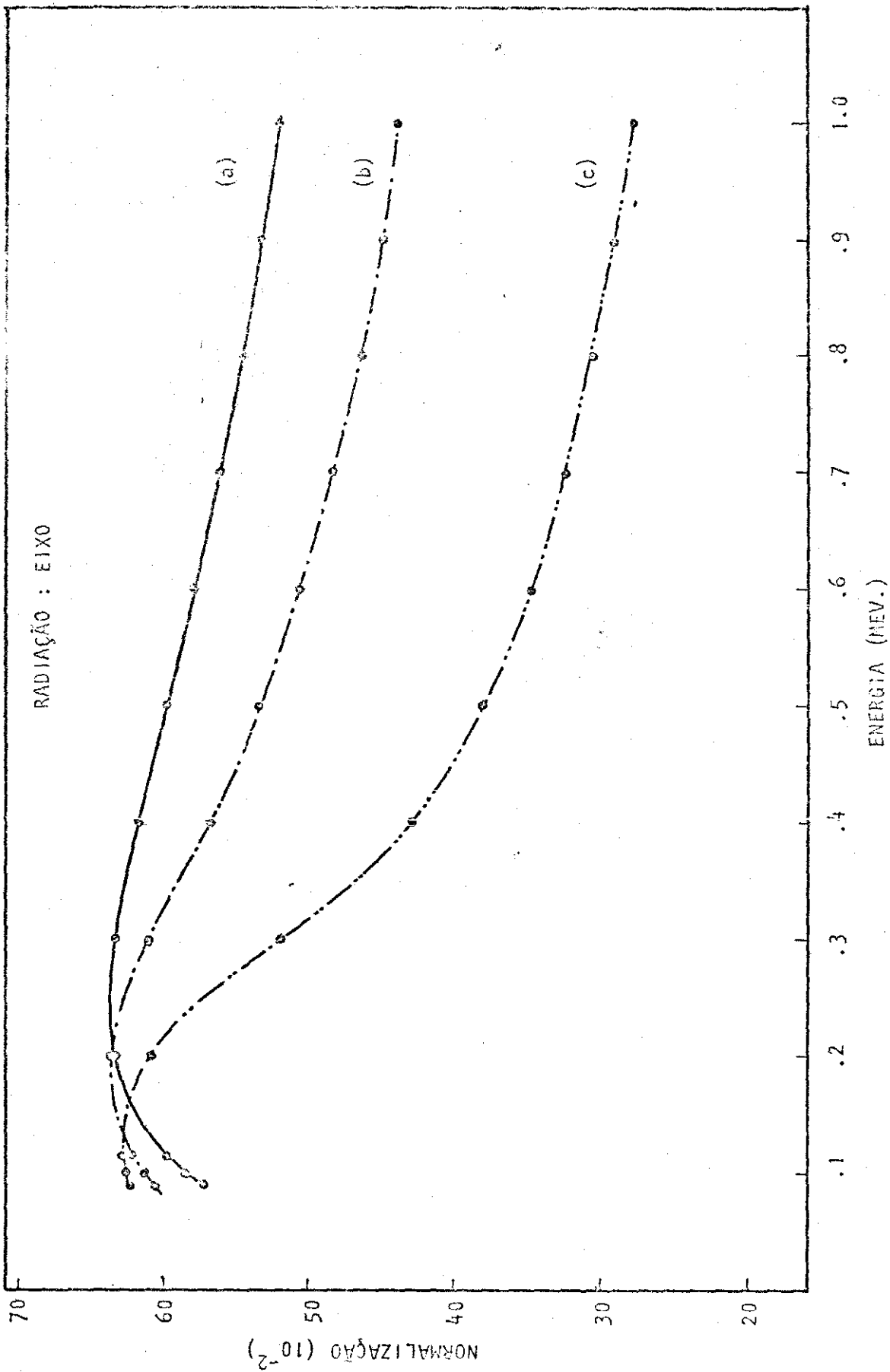


GRAFICO 4

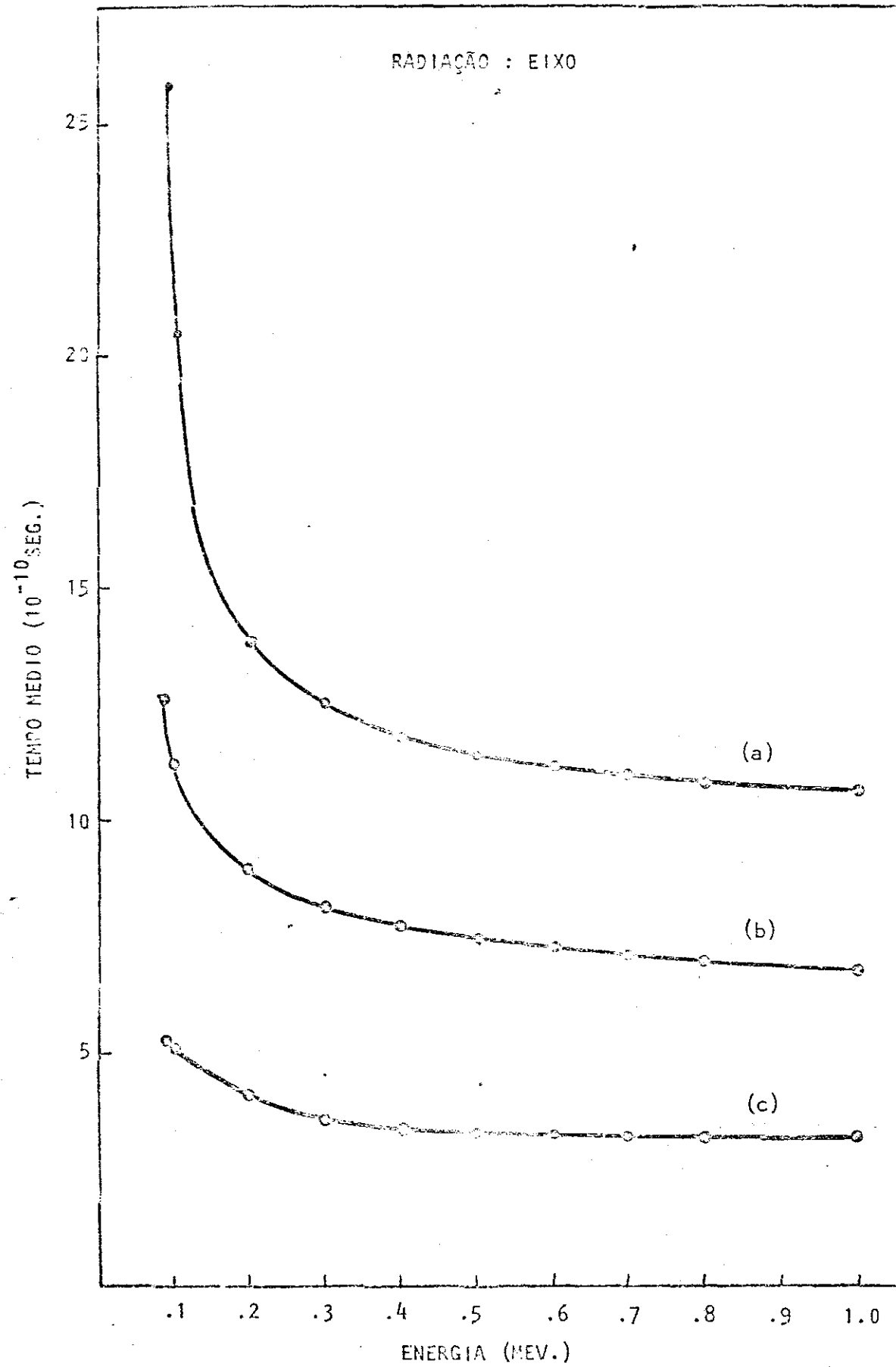


GRAFICO 5

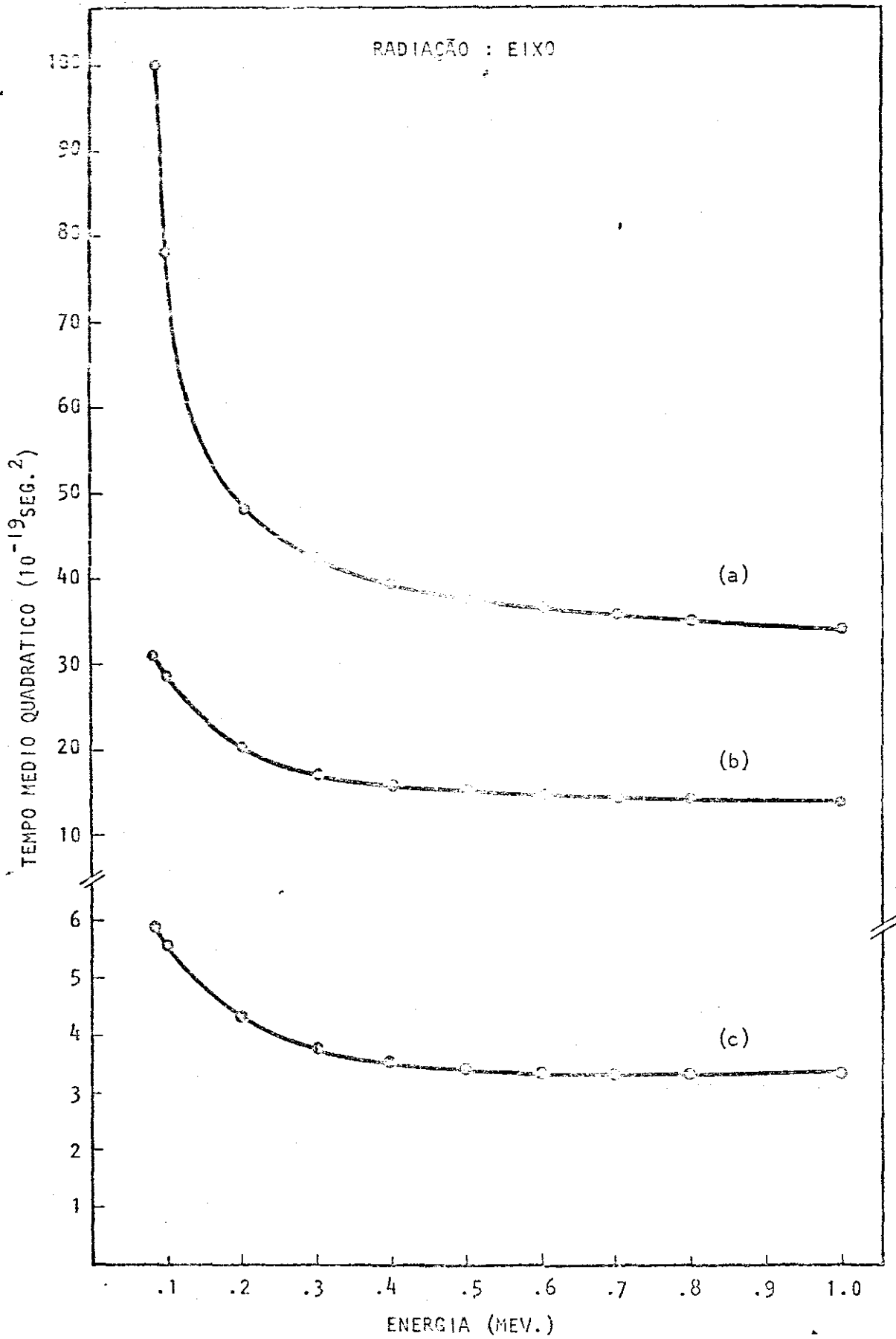
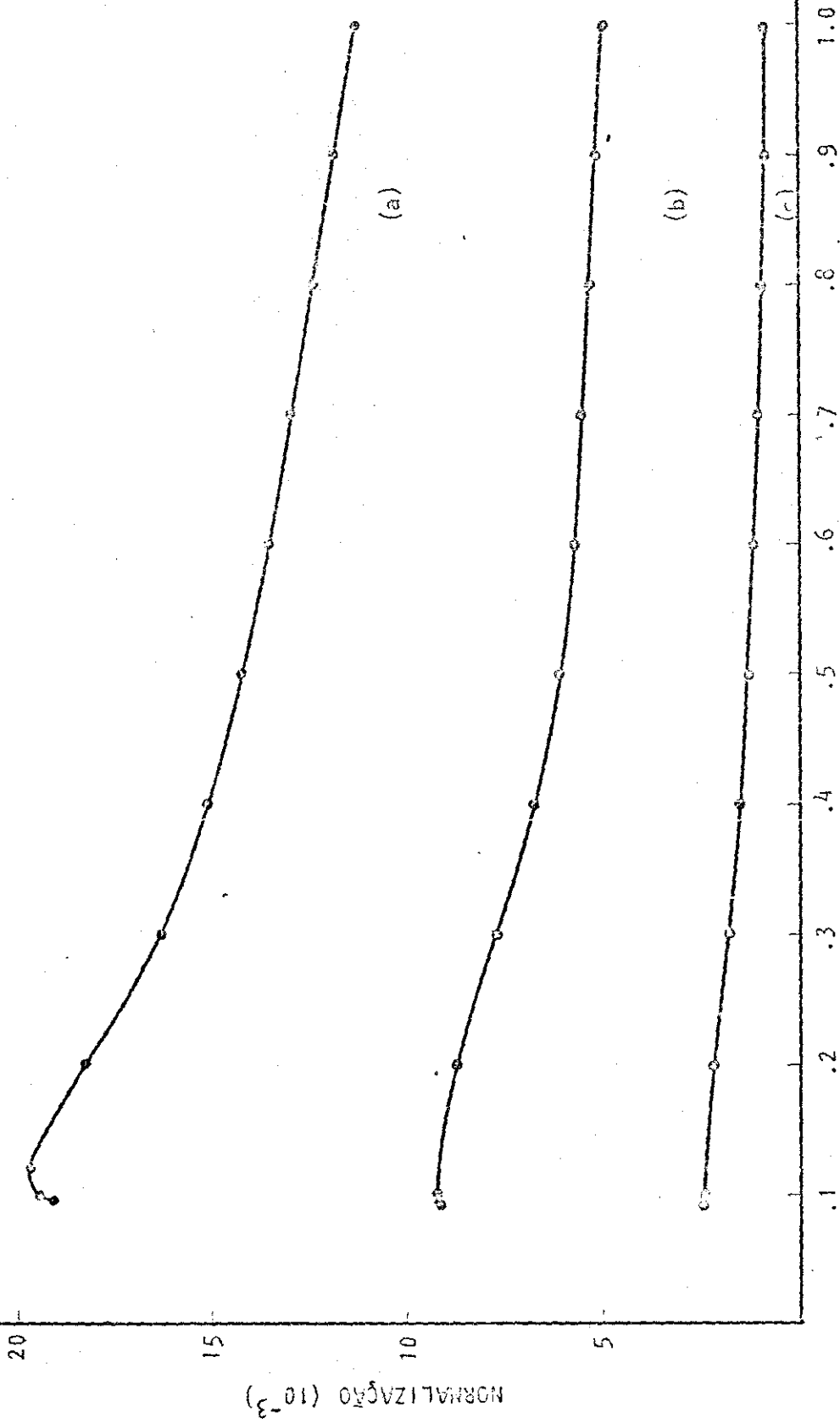


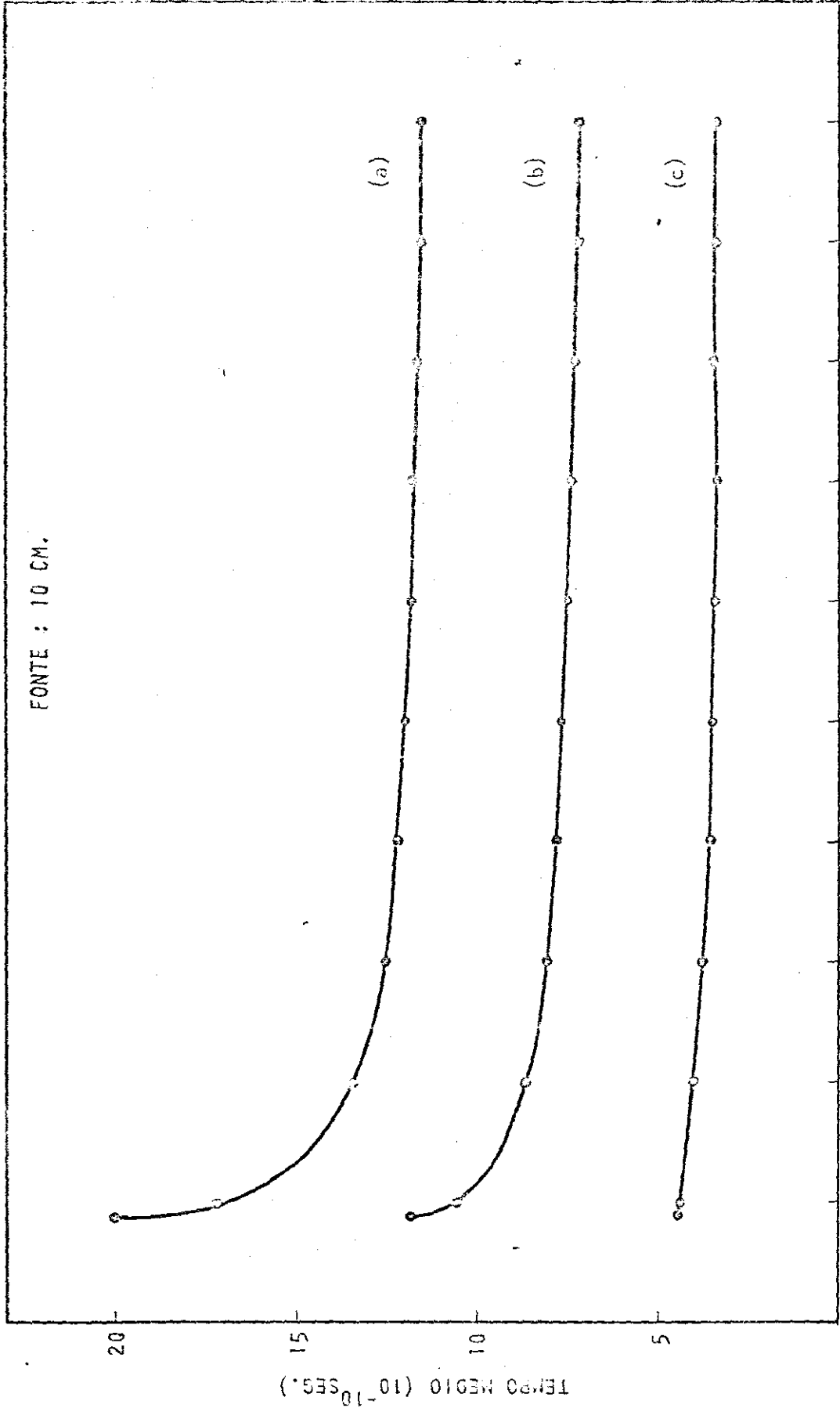
GRAFICO 6

FONTE : 10 CM.



ENERGIA (MEV.)

GRAFICO 7



FONTE : 10 CM.

ENERGIA (MEV.)

GRAFICO 8

TEMPO MEDIO (10^{-10} SECS.)

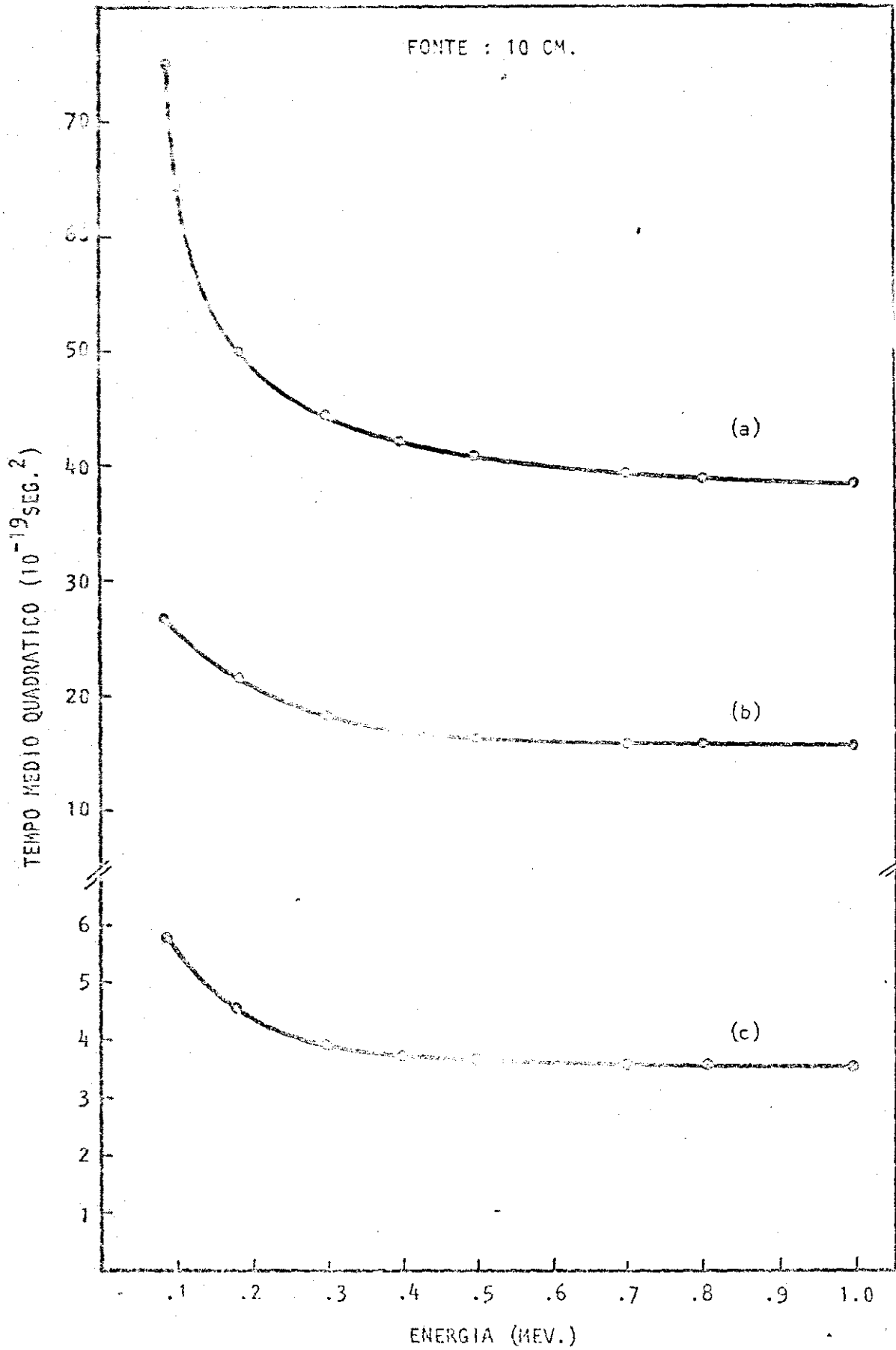


GRAFICO 9

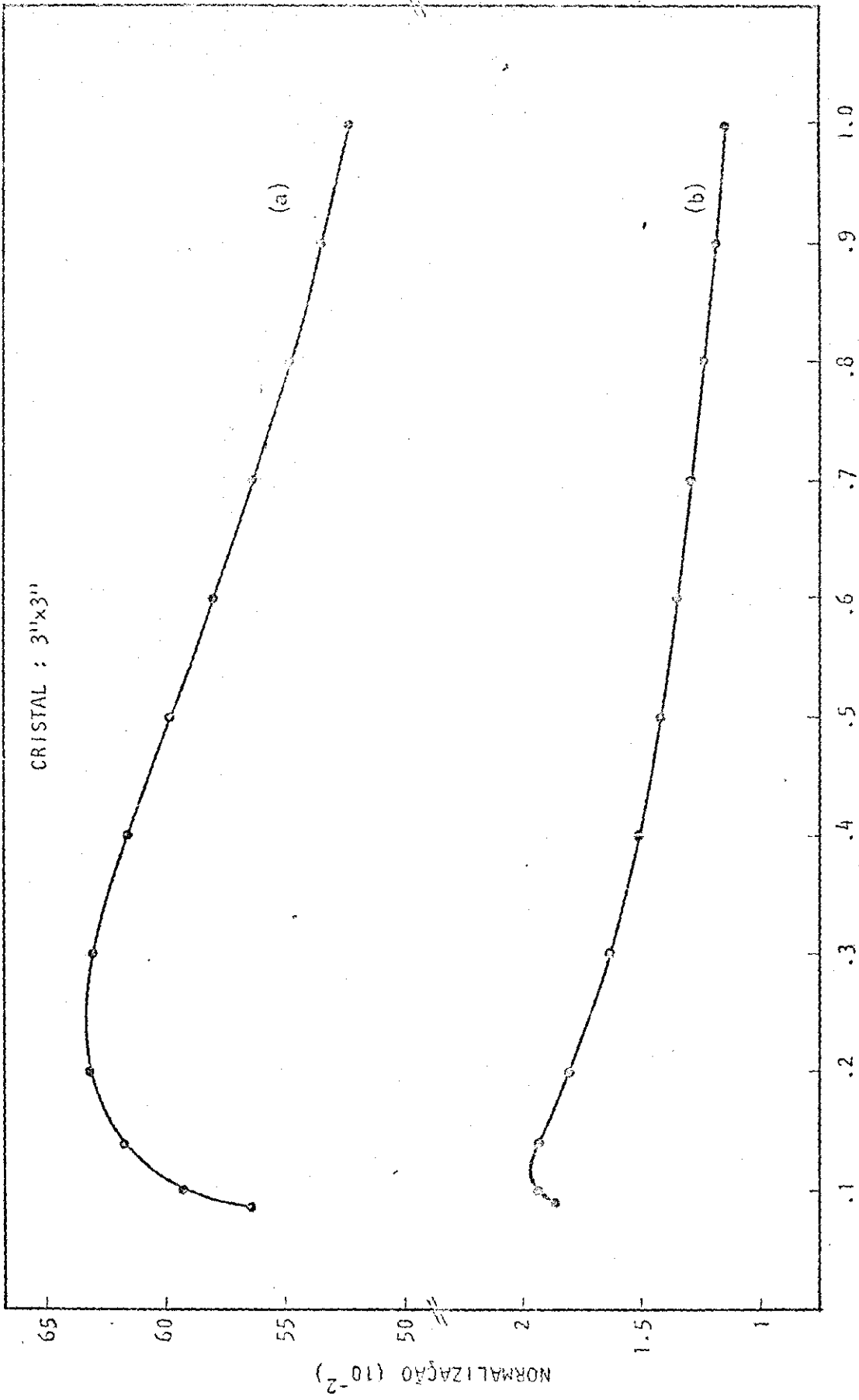


GRAFICO 10

CRISTAL : 3"X3"

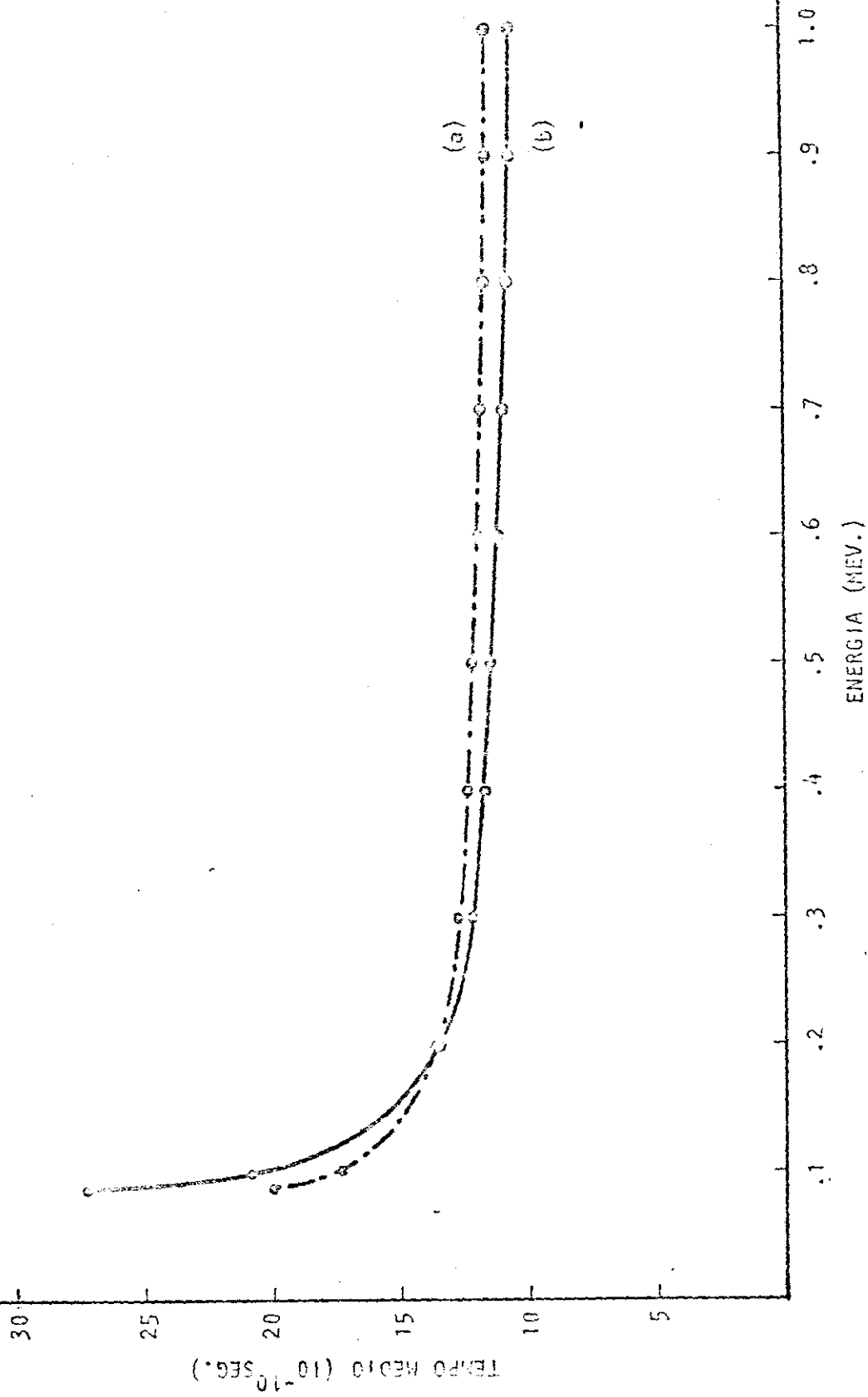
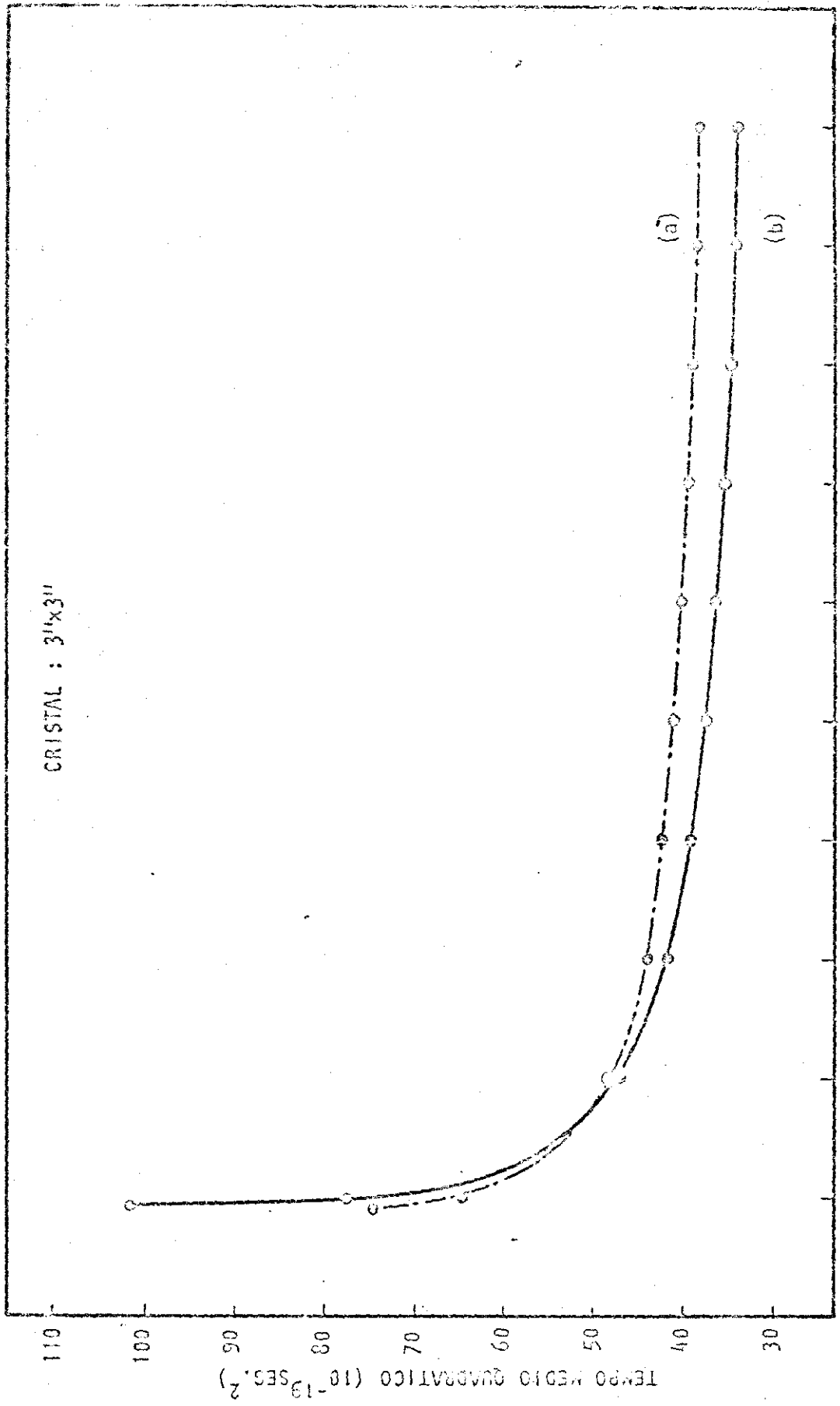


GRAFICO 11

CRISTAL : 3"x3"



ENERGIA (HEV.)

GRAFICO 12

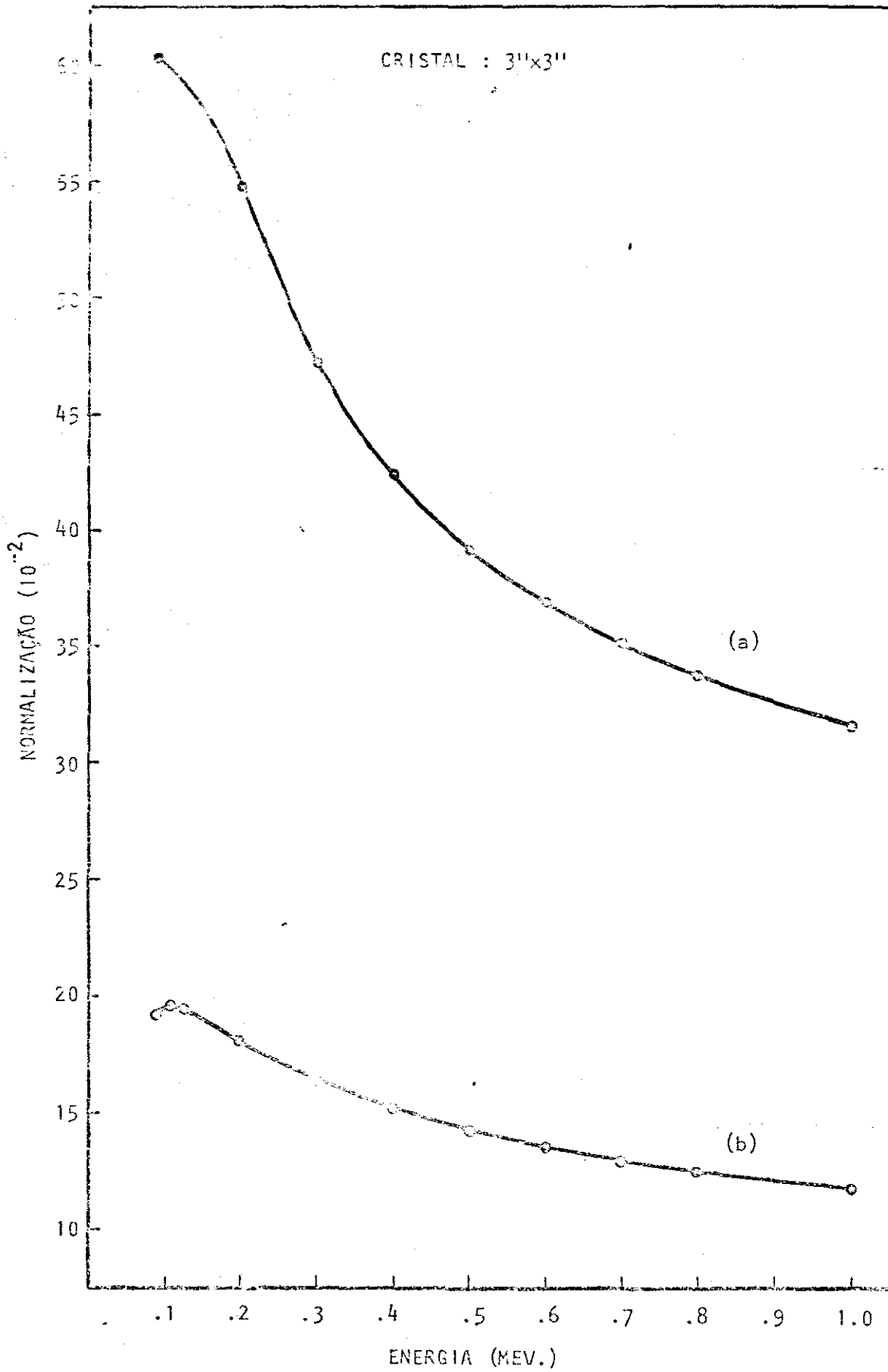
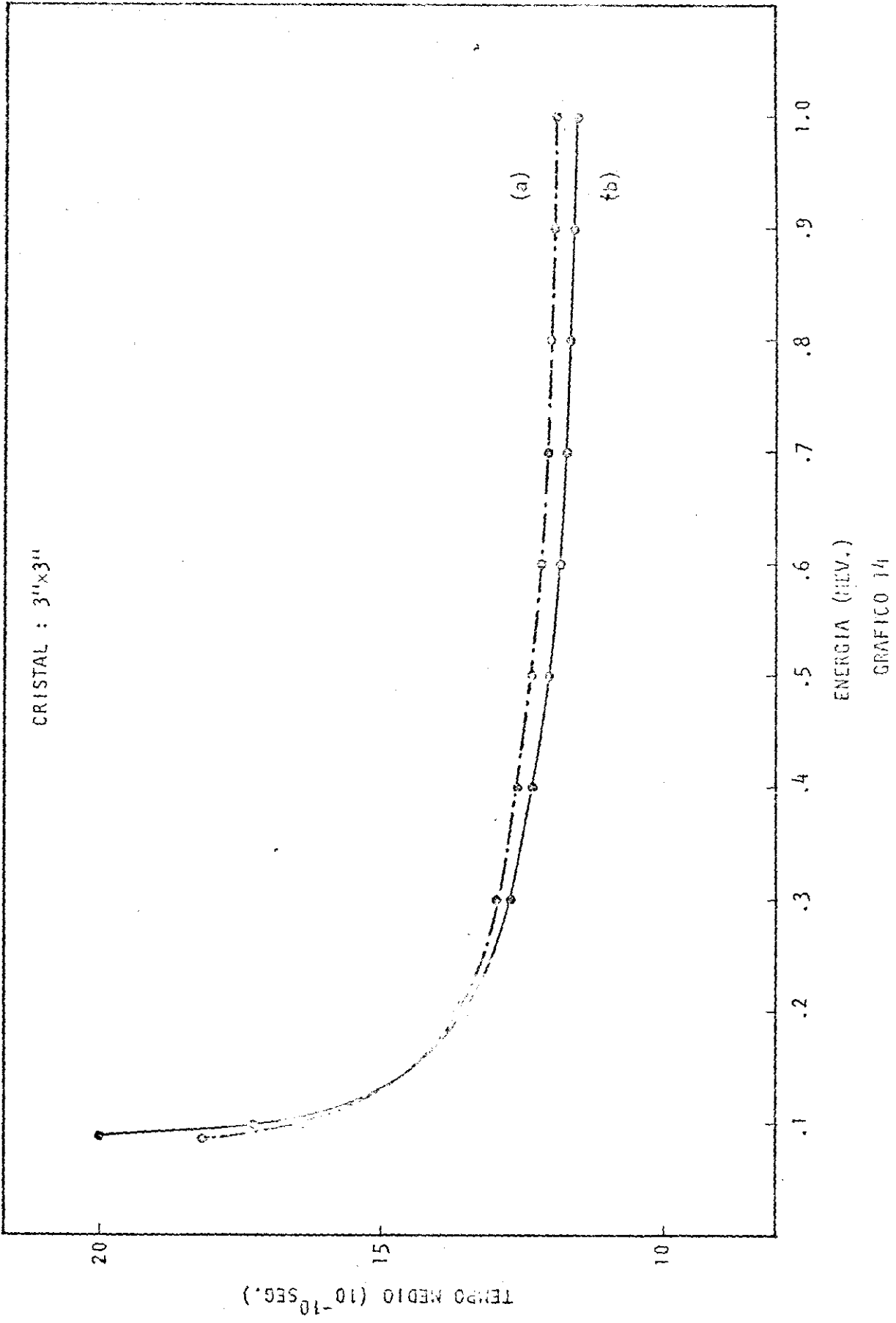
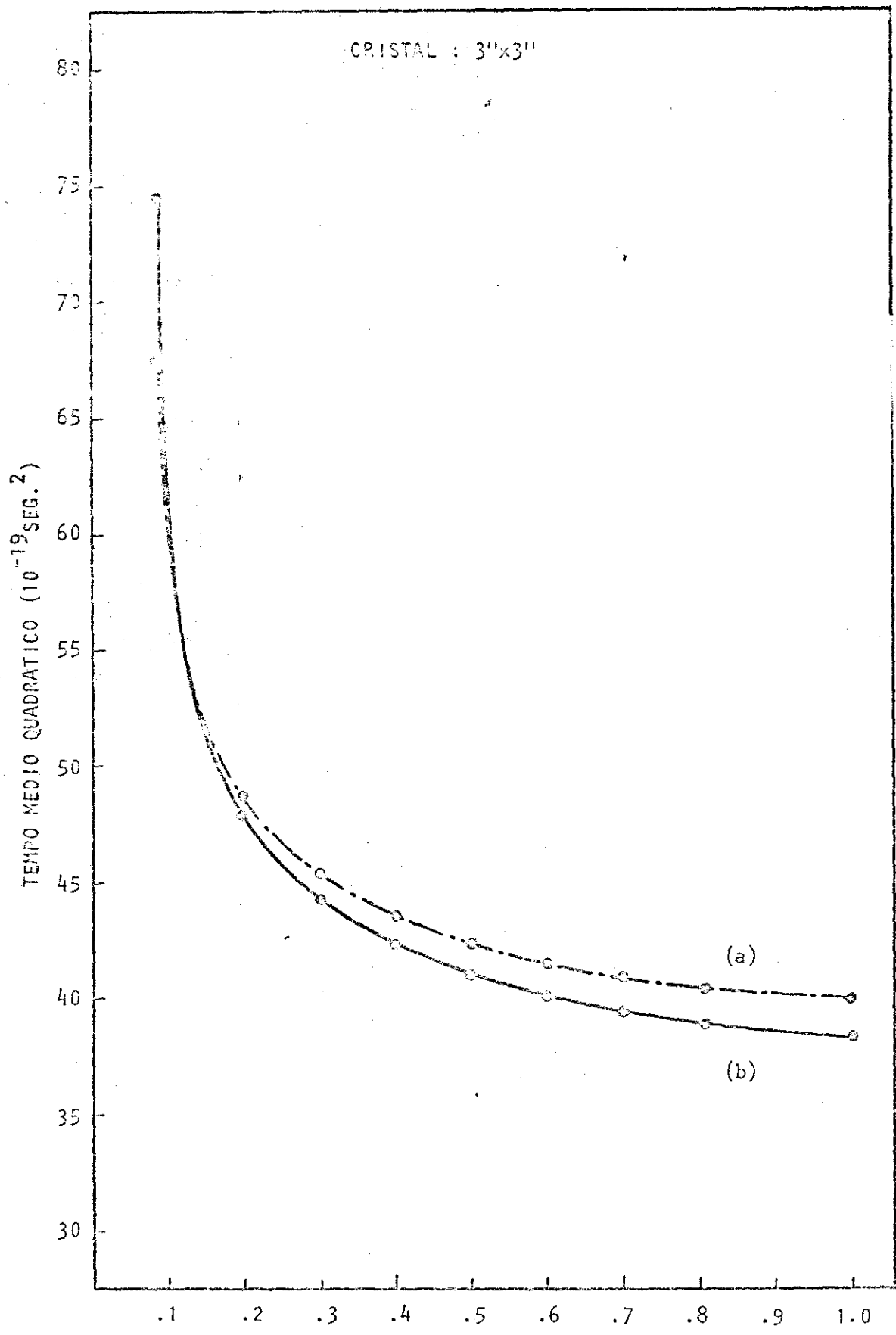


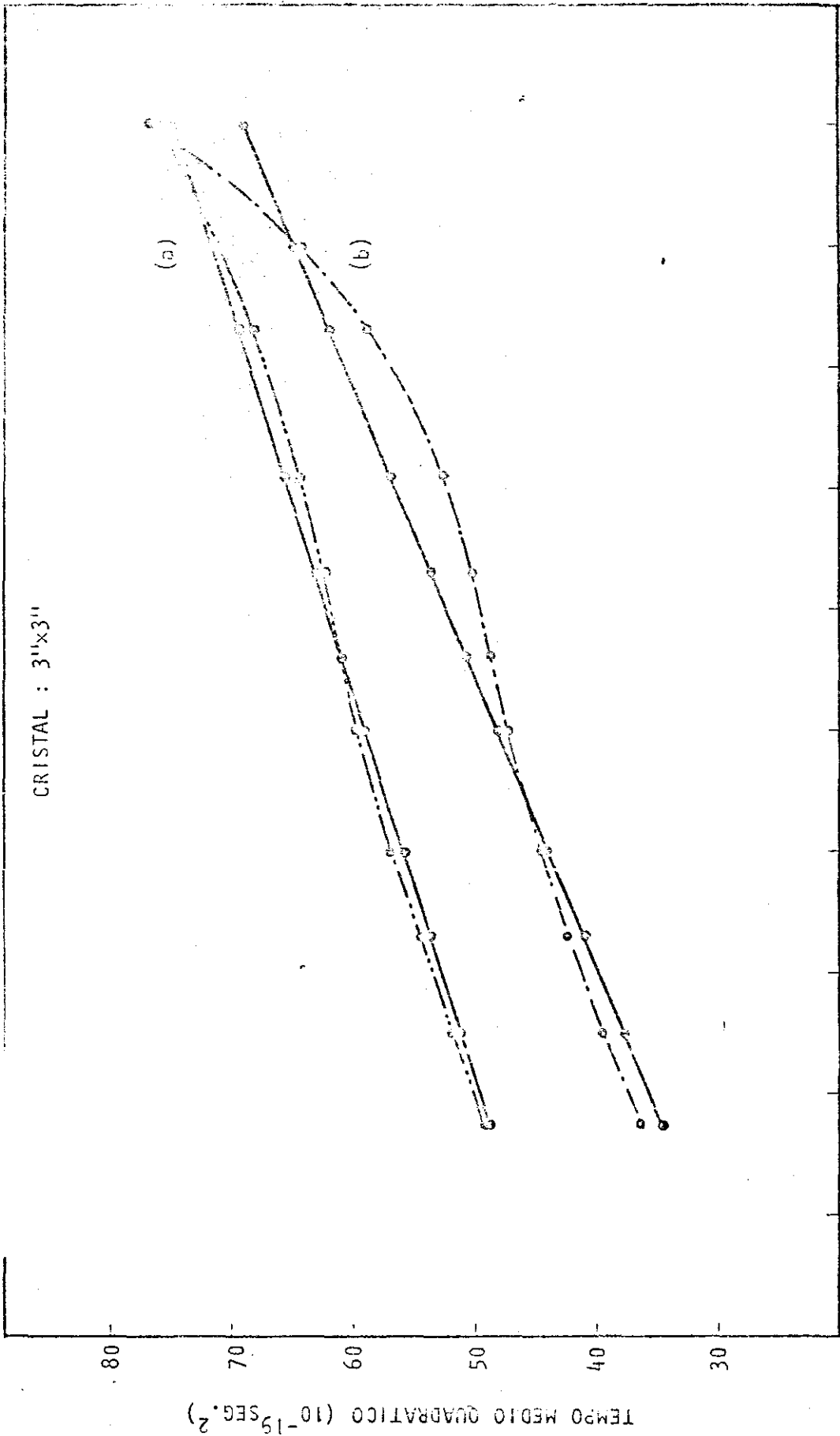
GRAFICO 13





ENERGIA (MEV.)

GRAFICO 15



INVERSO DA ENERGIA (MEV.⁻¹)
GRAFICO 16

APÊNDICES

1. - Forma Simplificada do Fator de Normalização. '
2. - Cálculo dos Momentos de Primeira e Segunda Ordem : caso para-axial.
3. - Obtenção da Distribuição dos Tempos de Chegada: caso geral.
4. - Obtenção da Distribuição dos Tempos de Chegada: Coeficiente de Absorção Infinito.
5. - Fluxogramas.

APÊNDICE 1

Forma Simplificada do Fator de Normalização

A solução da expressão (3.15), reduz-se a uma forma mais simplificada, integrando-a em (t'').

Partindo de :

$$A = \sum_{N=1}^{\infty} \alpha^N \int_a^b dt' \int_0^{\infty} d\tau \int_{c_N}^{d_N} dt'' \frac{dP(t', \tau, t'')}{dt' d\tau dt''} + \int_a^b dt' \int_0^{\infty} d\tau \int_{c_{N=0}}^{d_{N=0}} dt'' \frac{dP(t', \tau, t'')}{dt' d\tau dt''}$$

com limites: $a = 0$, $b = H/c$, $c_N = \frac{1}{v} [(2N-1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}$, $d_N = \frac{1}{v} [(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}$.

Após substituir a densidade de probabilidade $dP(t', \tau, t'')$, e integrar em (t'') obtêm-se :

$$A = \int_a^b \mu ce^{-\mu ct'} \frac{(H-ct')}{v} \left[\frac{v}{(H-ct')} - \frac{v}{[R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} \right] dt' +$$

$$+ \sum_{N=1}^{\infty} \alpha^N \int_a^b \mu ce^{-\mu ct'} \frac{(H-ct')}{v} \left[\frac{v}{[(2N-1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} - \frac{v}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} \right] dt'$$

Por simplicidade, define-se :

$$s(t', R_0) = \mu ce^{-\mu ct'}$$

$$s(t', R_1) = \mu ce^{-\mu ct'} \frac{(h-ct')}{[R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}}$$

$$s(t', R_{2N-1}) = \mu ce^{-\mu ct'} \frac{(h-ct')}{[(2N-1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}}$$

$$s(t', R_{2N+1}) = \mu e^{-\mu ct'} \frac{(H-ct')}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}}$$

assim :

$$A = \int_0^b \left[s(t', R_0) - s(t', R_1) + \sum_{N=1}^{\infty} \alpha^N [s(t', R_{2N-1}) - s(t', R_{2N+1})] \right] dt'$$

ao desenvolver a somatória:

$$A = \int_a^b \left[s(t', R_0) - s(t', R_1) + \alpha s(t', R_1) - \alpha s(t', R_3) + \alpha^2 s(t', R_3) - \right. \\ \left. - \alpha^2 s(t', R_5) + \alpha^3 s(t', R_5) - \alpha^3 s(t', R_7) + \alpha^4 s(t', R_7) - \right. \\ \left. - \alpha^4 s(t', R_9) + \alpha^5 s(t', R_9) - \dots \right] dt'$$

Associam-se os termos iguais em $s(t', R)$

$$A = \int_a^b \left[s(t', R_0) - (1-\alpha) s(t', R_1) - \alpha(1-\alpha) s(t', R_3) - \alpha^2(1-\alpha) s(t', R_5) + \dots \right] dt'$$

ou

$$A = \int_a^b \left[s(t', R_0) - \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) s(t', R_{2N+1}) \right] dt'$$

como o primeiro termo não depende do número de reflexões e $\sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N = \frac{1}{(1-\alpha)}$,

tem-se

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \left[s(t', R_0) - s(t', R_{2N+1}) \right] dt'$$

explicitamente

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \mu c e^{-\mu c t'} \left[1 - \frac{(H-ct')}{L_N(\theta_N)} \right] dt'$$

correspondendo a expressão (3.16), sendo $L_N(\theta_N) = \left[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2 \right]^{1/2}$

APÊNDICE 2

- Cálculo dos Momentos de primeira e segunda ordem : caso para-axial.

1. - Momento de Primeira Ordem ou Tempo Médio

$$\langle t - \tau \rangle = \frac{1}{A} \int (t' + t'') dP(t', \tau, t'')$$

$$\langle t - \tau \rangle = \frac{1}{A} \left\{ \int t' dP(t', \tau, t'') + \int t'' dP(t', \tau, t'') \right\} = \langle t' \rangle + \langle t'' \rangle$$

1a.) Solução do primeiro termo :

$$\langle t' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \int_{C_{N=0}}^{d_N} \mu c \frac{(H-ct')}{vt''^2} t' e^{-\mu ct'} dt'' dt'$$

com limites: $a = 0$, $b = H/c$, $C_{N=0} = \frac{(H-ct')}{v}$, $d_N = L_N(\theta_N)/v$.

Integrando em (t'') :

$$\langle t' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \frac{\mu c (H-ct') t' e^{-\mu ct'}}{v} \left[\frac{v}{(H-ct')} - \frac{v}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} \right] dt'$$

$$\langle t' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_a^b \mu c t' e^{-\mu ct'} dt' - \int_a^b \frac{\mu c (H-ct') t' e^{-\mu ct'} dt'}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} \right\}$$

Integrando em (t') a primeira integral, e substituindo $H/c - t' = T$, define-se:

$$I_2 = \mu c^2 \int_a^b \frac{T(H/C-T) e^{\mu c T}}{[(2N+1)^2 R^2 + C^2 T^2]^{1/2}} dT$$

e obtêm-se:

$$\langle t' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left[\frac{(1-e^{-\mu H})}{\mu c} - \frac{H e^{-\mu H}}{c} - I_2 \right]$$

1b.) Solução do segundo termo :

$$\langle t'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \int_{c_{N=0}}^{d_N} \frac{\mu c}{v} \frac{(H-ct')}{t''} e^{-\mu ct'} dt'' dt'$$

integrando em (t'')

$$\langle t'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b n_{\mu} (H-ct') e^{-\mu ct'} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right]^{1/2} dt'$$

substituindo $(H/c-t') = T$, os limites não sofrem alteração. Define-se :

$$I_3 = n_{\mu} \int_a^b (H-ct') e^{-\mu ct'} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt'$$

Associando-se este termo ao primeiro calculado, obtêm-se para o tempo médio :

$$\langle t - \tau \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left[\frac{(1 - e^{-\mu H})}{\mu c} - \frac{H}{c} e^{-\mu H} - I_2 + I_3 \right]$$

2. Momento de Segunda Ordem ou Tempo Médio Quadrático

$$\langle (t - \tau)^2 \rangle = \frac{1}{A} \int (t' - \tau + t'')^2 dP(t', \tau, t'')$$

$$\langle (t - \tau)^2 \rangle = \frac{1}{A} \left\{ \int t'^2 dP(t', \tau, t'') + \int t''^2 dP(t', \tau, t'') + 2 \int t' t'' dP(t', \tau, t'') \right\} = \langle t'^2 \rangle + \langle t''^2 \rangle + 2 \langle t' t'' \rangle$$

2a) - Cálculo do primeiro termo :

$$\langle t'^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \int_{c_{N=0}}^{d_N} \mu c \frac{(H-ct')}{vt''^2} t'^2 e^{-\mu ct'} dt'' dt'$$

integrando em (t''):

$$\langle t'^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \mu c \frac{(H-ct')}{v} t'^2 e^{-\mu ct'} \left[\frac{v}{(H-ct')} - \frac{v}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} \right] dt'$$

ou

$$\langle t'^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_a^b \mu c t'^2 e^{-\mu ct'} dt' - \int_a^b \frac{\mu c (H-ct') t'^2 e^{-\mu ct'} dt'}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} \right\}$$

sendo a primeira integral:

$$\int_a^b \mu c t'^2 e^{-\mu ct'} dt' = e^{-\mu H} \left[-\frac{2H}{\mu c^2} - \frac{H^2}{c^2} - \frac{2}{\mu^2 c^2} \right] + \frac{2}{\mu^2 c^2}$$

Na segunda integral, faz-se $H/c - t' = T$, definindo :

$$I_4 = \mu c^2 e^{-\mu H} \int_0^b \frac{T(H/c - T) e^{\mu c T}}{[(2N+1)^2 R^2 + c^2 T^2]^{1/2}} dT$$

Finalmente,

$$\langle t'^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left[e^{-\mu H} \left[-\frac{2H}{\mu c^2} - \frac{H^2}{c^2} - \frac{2}{\mu^2 c^2} \right] + \frac{2}{\mu^2 c^2} - I_4 \right]$$

2b) - Cálculo do Segundo Termo :

$$\langle t''^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \int_{c_{N=0}}^{d_N} \frac{\mu c}{v} (H - ct') e^{-\mu ct'} dt'' dt'$$

integrando em (t'')

$$\langle t''^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \frac{\mu c}{v} (H - ct') e^{-\mu ct'} \left[\frac{1}{v} [(2N+1)^2 R^2 + (H - ct')^2]^{1/2} - \frac{1}{v} (H - ct') \right] dt'$$

Substituindo $H/c - t' = T$

$$\langle t''^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left. \begin{aligned} & n^2 \mu e^{-\mu H} \left\{ \int_0^b T e^{\mu c T} [(2n+1)^2 R^2 + c^2 T^2]^{1/2} dt - \right. \\ & \left. - n^2 \mu c e^{-\mu H} \int_0^b T^2 e^{\mu c T} dT \right\} \end{aligned} \right\}$$

Define-se

$$I_5 = n^2 \mu e^{-\mu H} \int_0^b T e^{\mu c T} [(2n+1)^2 R^2 + c^2 T^2]^{1/2} dT$$

e integrando em (T) a segunda integral :

$$n^2 \mu c e^{-\mu H} \int_0^b T^2 e^{\mu c T} dT = -n^2 \left[\frac{2e^{-\mu H}}{\mu^2 c^2} - \frac{H^2}{c^2} + \frac{2H}{\mu c^2} + \frac{2}{\mu^2 c^2} \right]$$

Finalmente:

$$\langle t'^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ n^2 \left[\frac{2e^{-\mu H}}{\mu^2 c^2} - \frac{H^2}{c^2} + \frac{2H}{\mu c^2} + \frac{2}{\mu^2 c^2} \right] + I_5 \right\}$$

3b) - Cálculo do terceiro termo :

$$\langle 2t't'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \int_{c_{N=0}}^{d_N} 2\mu c \frac{(H-ct')}{vt''} t' e^{-\mu ct'} dt'' dt'$$

Integrando em (t'')

$$\langle 2t't'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_a^b \frac{2\mu c}{v} (H-ct') t' e^{-\mu ct'} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt'$$

substituindo $H/c - t' = T$, define-se :

$$I_6 = 2\mu c e^{-\mu H} \int_a^b (H/c-T) T e^{\mu c T} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{c^2 T^2} + 1 \right] dT$$

e juntando as expressões, de cada termo, obtêm-se para o momento de segunda ordem

$$\langle (t - \tau)^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ e^{-\mu H} \left[-\frac{2H}{\mu c^2} - \frac{H^2}{c^2} - \frac{2}{\mu^2 c^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\mu^2 c^2} + n^2 \left[\frac{2e^{-\mu H}}{\mu^2 c^2} - \frac{H^2}{c^2} + \frac{2H}{\mu c^2} + \frac{2}{\mu^2 c^2} \right] - I_4 + I_5 + I_6 \right\}$$

APÊNDICE 3

- Obtenção da Distribuição dos tempos de Chegada: Caso Geral.

1. - Cálculo do Momento de Ordem Zero ou Fator de Normalização, (A).

A densidade de probabilidade, no caso geral, é expressa por:

$$dP(t', \tau, t'', \zeta) = \alpha^N \mu c \lambda e^{-\mu c t' / \cos \zeta - \lambda \tau} \frac{(H - ct')}{2vt''^2} \operatorname{tg} \zeta dt'' d\tau dt' d\zeta$$

E o momento de Ordem Zero, será dado por:

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a dt' \int_0^{\infty} d\tau \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \frac{dP(t'', \tau, t', \zeta)}{dt'' d\tau dt' d\zeta} + \right. \\ \left. + \int_f^e d\zeta \int_0^g dt' \int_0^{\infty} d\tau \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \frac{dP(t'', \tau, t', \zeta)}{dt'' d\tau dt' d\zeta} \right\}$$

com limites: $a = H/c$, $c_{N=0} = \frac{1}{v}(H - ct')$, $d_N = \frac{1}{v} [(2N+1)^2 R^2 + (H - ct')^2]^{1/2}$

$e = \operatorname{tg}^{-1} R/d$, $f = \operatorname{tg}^{-1} R/(H+d)$, $g = R/\operatorname{ctg} \zeta - d/c$.

onde a variação do ângulo de saída dos raios gama (ζ) afeta os limites da variável (t').

Explicitamente:

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \int_0^a \int_{c_{N=0}}^{d_N} \mu c e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v t'^2} \operatorname{tg} \zeta dt' dt' dz + \right. \\ \left. + \int_f^e \int_0^g \int_{c_{N=0}}^{d_N} \mu c e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v t'^2} \operatorname{tg} \zeta dt' dt' dz \right\}$$

integrando em (t')

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \int_0^a \mu c e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v} \operatorname{tg} \zeta \left[\frac{v}{(H-ct')} - \right. \right. \\ \left. \left. - v [(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{-1/2} \right] dt' dz + \right. \\ \left. + \int_f^e \int_0^g \mu c e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v} \operatorname{tg} \zeta \left[\frac{v}{(H-ct')} - \right. \right. \\ \left. \left. - v [(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{-1/2} \right] dt' dz \right\}$$

definindo:

$$IN_1(\zeta) = \frac{\mu c}{2} \int_0^a \frac{\operatorname{tg} \zeta (H-ct') e^{-\mu c t' / \cos \zeta}}{[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2}} dt'$$

$IM_1(\zeta)$, só difere do $IN_1(\zeta)$ pelo limite superior de integração
(g em lugar de a)

Obtém-se :

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \left[\frac{\mu c}{2} \int_0^a e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta dt' - \operatorname{IN}_1(\zeta) \right] d\zeta \right. \\ \left. + \int_f^e \left[\frac{\mu c}{2} \int_0^g e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta dt' - \operatorname{IM}_1(\zeta) \right] d\zeta \right\}$$

integrando em (t') :

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} \zeta (1 - e^{-\mu H / \cos \zeta}) - \operatorname{IN}_1(\zeta) \right] d\zeta \right. \\ \left. + \int_f^e \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} \zeta \left[1 - e^{-\left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)} \right] - \operatorname{IM}_1(\zeta) \right] d\zeta \right\}$$

2. - Cálculo do Momento de Primeira Ordem ou Tempo Médio (t-τ) :

$$\langle t - \tau \rangle = \frac{1}{A} \int (\tau' + t'') dP(t', t'', \zeta)$$

sendo $\tau' = t' / \cos \zeta$

$$\langle t - \tau \rangle = \frac{1}{A} \int \tau' dP(t', t'', \zeta) + \frac{1}{A} \int t'' dP(t', t'', \zeta)$$

$$\langle t - \tau \rangle = \langle \tau' \rangle + \langle t'' \rangle$$

2a. - Cálculo do primeiro termo :

$$\langle \tau' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_0^f \int_0^a \int_{c_{N=0}}^{d_N} \mu c t' e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v t'^2 \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta dt'' dt' d\zeta$$

$$+ \int_f^e \int_0^g \int_{c_{N=0}}^{d_N} \mu c t' e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v t'^2 \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta dt'' dt' d\zeta$$

integrando em (t'') :

$$\langle \tau' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \int_0^a \mu c t' e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta \left[v(H-ct')^{-1} - \right. \right.$$

$$\left. -v \left[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2 \right]^{-1/2} \right] dt' d\zeta +$$

$$+ \int_f^e \int_0^g \mu c t' e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct')}{2v \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta \left[v(H-ct')^{-1} - \right.$$

$$\left. \left. -v \left[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2 \right]^{-1/2} \right] dt' d\zeta \right\}$$

definindo

$$IN_2(\zeta) = \frac{\mu c}{2} \int_0^a \frac{t' (H-ct') e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta}{\left[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2 \right]^{1/2} \cos \zeta} dt'$$

$IM_2(\zeta)$ sô difere do $IN_2(\zeta)$ pelo limite superior de integração (g em lugar de a).

tem-se :

$$\langle \tau' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \left[\frac{\mu c \operatorname{tg} \zeta}{2 \cos \zeta} \int_0^a t' e^{-\mu c t' / \cos \zeta} dt' - \operatorname{IN}_2(\zeta) \right] d\zeta + \int_f^e \left[\frac{\mu c \operatorname{tg} \zeta}{2 \cos \zeta} \int_0^g t' e^{-\mu c t' / \cos \zeta} dt' - \operatorname{IM}_2(\zeta) \right] d\zeta \right\}$$

integrando em (t') :

$$\langle \tau' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \left[\frac{\operatorname{sen} \zeta}{2\mu c} (1 - e^{-\mu H / \cos \zeta}) - \frac{H}{2c} \operatorname{tg} \zeta e^{-\mu H / \cos \zeta} - \operatorname{IN}_2(\zeta) \right] + \int_f^e \left[\frac{\operatorname{sen} \zeta}{2\mu c} \left[1 - e^{-\mu \left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)} \right] + e^{-\mu \left(\frac{R}{\operatorname{sen} \zeta} - \frac{d}{\cos \zeta} \right)} * \right. \right. \\ \left. \left. * \left[\frac{d}{2c} \operatorname{tg} \zeta - \frac{R}{2c} \right] - \operatorname{IM}_2(\zeta) \right] d\zeta \right\} \quad (3.1)$$

2b. - Cálculo do segundo termo :

$$\langle \tau'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \int_0^a \int_{c_{N=0}}^{d_N} \mu c e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H - c t')}{2v t''} \operatorname{tg} \zeta dt'' dt' d\zeta + \int_f^e \int_0^g \int_{c_{N=0}}^{d_N} \mu c e^{-c t' / \cos \zeta} \frac{(H - c t')}{2v t''} \operatorname{tg} \zeta dt'' dt' d\zeta \right\}$$

integrando em (t''):

$$\langle t'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \int_0^a \frac{\mu n}{4} e^{-\mu c t' / \cos \zeta} (H-ct') \operatorname{tg} \zeta * \right. \\ \left. * \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt' d\zeta + \right. \\ \left. + \int_f^e \int_0^g \frac{\mu n}{4} e^{-\mu c t' / \cos \zeta} (H-ct') \operatorname{tg} \zeta \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt' d\zeta \right\}$$

onde define-se:

$$IN_3(\zeta) = \frac{\mu n}{4} \int_0^a (H-ct') e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \operatorname{tg} \zeta \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt'$$

$IM_3(\zeta)$, só difere de $IN_3(\zeta)$ pelo limite superior de integração (g em lugar de a).

Obtem-se finalmente:

$$\langle t'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f IN_3(\zeta) d\zeta + \int_f^e IM_3(\zeta) d\zeta \right\} \quad (3.2)$$

O tempo médio é obtido pela expressão $\langle t-\tau \rangle = \langle \tau \rangle + \langle t'' \rangle$ onde $\langle \tau \rangle$ e $\langle t'' \rangle$ são dados pelas expressões (3.1) e (3.2) respectivamente.

3. Cálculo do Momento de Segunda Ordem ou Tempo Médio Quadrático.

$$\langle (t-\tau)^2 \rangle = \langle (\tau'+t'')^2 \rangle = \langle \tau'^2 \rangle + \langle t''^2 \rangle + \langle 2\tau't'' \rangle$$

3a. - Cálculo do primeiro termo:

$$\langle \tau'^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a dt' \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \mu c t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} * \right. \\ \left. * \frac{(H-ct') \operatorname{tg} \zeta}{2v t''^2 \cos^2 \zeta} + \int_f^e d\zeta \int_0^g dt' \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \mu c t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} * \right. \\ \left. * \frac{(H-ct') \operatorname{tg} \zeta}{2v t''^2 \cos^2 \zeta} \right\}$$

integrando em (t''):

$$\langle \tau'^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a dt' \mu c t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct') \operatorname{tg} \zeta}{2v \cos^2 \zeta} * \right. \\ \left. * \left[v(H-ct')^{-1} - v[(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{-1/2} \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_f^e d\zeta \int_0^g dt' \mu c t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H - c t') \operatorname{tg} \zeta}{2v \cos^2 \zeta} \left[v(H - c t')^{-1} - \right. \\
 & \left. - v|(2N+1)^2 R^2 + (H - c t')^2|^{-1/2} \right]
 \end{aligned}$$

definindo:

$$\operatorname{IN}_4(\zeta) = \frac{\mu c}{2} \int_0^a \frac{t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} (H - c t') \operatorname{tg} \zeta}{[(2N+1)^2 R^2 + (H - c t')^2]^{1/2} \cos^2 \zeta} dt'$$

$\operatorname{IM}_4(\zeta)$, só difere de $\operatorname{IN}_4(\zeta)$ pelo limite superior de integração (g em lugar de a).

Assim:

$$\begin{aligned}
 \langle \tau^2 \rangle &= \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a \mu c t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{\operatorname{tg} \zeta}{2 \cos^2 \zeta} dt' - \right. \\
 & \left. - \operatorname{IN}_4(\zeta) \right\} + \int_f^e d\zeta \int_0^g \mu c t'^2 e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{\operatorname{tg} \zeta}{2 \cos^2 \zeta} dt' - \\
 & \left. - \operatorname{IM}_4(\zeta) \right\}
 \end{aligned}$$

integrando em (t'):

$$\begin{aligned}
 \langle t'^2 \rangle = & \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \left[\frac{\text{sen}\zeta}{\mu^2 c^2} - e^{-\mu H / \cos\zeta} \left(\frac{H^2 \text{sen}\zeta}{2c^2 \cos^2\zeta} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{H \text{tg}\zeta}{\mu c^2} - \frac{\text{sen}\zeta}{\mu^2 c^2} \right) - \text{IN}_4(\zeta) \right] d\zeta - \\
 & - \int_f^e \left[\frac{\text{sen}\zeta}{\mu^2 c^2} - e^{-\mu(R/\text{sen}\zeta - d/\cos\zeta)} \left(\frac{(R/\text{tg}\zeta - d)^2 \text{sen}\zeta}{2c^2 \cos^2\zeta} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(R/\text{tg}\zeta - d)\text{tg}\zeta}{\mu c^2} + \frac{\text{sen}\zeta}{\mu^2 c^2} \right) - \text{IM}_4(\zeta) \right] d\zeta \right\} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

3b. -Cálculo do segundo termo:

$$\begin{aligned}
 \langle t'^2 \rangle = & \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a dt' \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \mu c e^{-\mu c t' / \cos\zeta} * \right. \\
 & * \frac{(H-ct') \text{tg}\zeta}{2v} + \left. \int_f^e d\zeta \int_0^g dt' \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \mu c e^{-\mu c t' / \cos\zeta} * \right. \\
 & * \left. \frac{(H-ct') \text{tg}\zeta}{2v} \right\}
 \end{aligned}$$

integrando em (t'):

$$\begin{aligned}
 \langle t'^2 \rangle &= \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a dt' \mu c e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct') \operatorname{tg} \zeta}{2v} * \right. \\
 &\quad * \left[\frac{1}{v} [(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2} - \frac{1}{v} (H-ct') \right] + \\
 &\quad + \left. \int_f^e d\zeta \int_0^g dt' \mu c e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \frac{(H-ct') \operatorname{tg} \zeta}{2v} * \right. \\
 &\quad * \left. \left[\frac{1}{v} [(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2} - \frac{1}{v} (H-ct') \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Define-se:

$$IN_5(\zeta) = \frac{\mu n^2}{2} \int_0^a e^{-\mu c t' / \cos \zeta} (H/c-t') \operatorname{tg} \zeta [(2N+1)^2 R^2 + (H-ct')^2]^{1/2} dt'$$

$IM_5(\zeta)$, só difere de $IN_5(\zeta)$ pelo limite superior de integração (g em lugar de a).

e substituindo $(H/c - t') = T$, na expressão resultante, obtem-se:

$$\langle t'^{i2} \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \left[\text{IN}_5(\zeta) - \frac{\mu c n^2}{2} e^{-\mu H / \cos \zeta} \right] \right. \\ \left. * \int_0^a T^2 e^{\mu c T} \text{tg} \zeta \, dT \right\} + \left\{ \int_f^e d\zeta \left[\text{IM}_5(\zeta) - \frac{\mu c n^2}{2} e^{-\mu H / \cos \zeta} \right] \right. \\ \left. * \int_{a-g}^a T^2 e^{\mu c T} \text{tg} \zeta \, dT \right\}$$

integrando em (T):

$$\langle t'^{i2} \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f \left[\text{IN}_5(\zeta) - \frac{H^2 n^2}{2c^2} - \frac{Hn^2}{\mu c^2} \cos \zeta \, \text{sen} \zeta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n^2 \text{sen} \zeta \cos^2 \zeta}{\mu^2 c^2} \left(1 - e^{-\mu H / \cos \zeta} \right) \right] d\zeta \right. \\ \left. + \int_f^e \left[\text{IM}_5(\zeta) - \frac{H^2 n^2}{2c^2} \text{sen} \zeta + \frac{Hn^2}{\mu c^2} \text{sen} \zeta \cos \zeta - \frac{n^2 \text{sen} \zeta \cos^2 \zeta}{\mu^2 c^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-\mu (R/\text{sen} \zeta - d/\cos \zeta)} \left(\frac{n^2}{2c^2} (H+d-R/\text{tg} \zeta)^2 \text{sen} \zeta - \right. \right. \right.$$

$$- \frac{n^2}{\mu c^2} (H+d-R/\operatorname{tg}\zeta) \operatorname{sen}\zeta \cos\zeta + \frac{n^2}{\mu^2 c^2} \operatorname{sen}\zeta \cos^2\zeta \Bigg) d\zeta \Bigg\} \quad (3.4)$$

3c. - Cálculo do terceiro termo:

$$\begin{aligned} \langle 2\tau't'' \rangle = & \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a dt' \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \mu ct' e^{-\mu ct'/\cos\zeta} * \right. \\ & * \frac{(H-ct') \operatorname{tg}\zeta}{vt'' \cos\zeta} + \left. \int_f^e d\zeta \int_0^g dt' \int_{c_{N=0}}^{d_N} dt'' \mu ct' e^{-\mu ct'/\cos\zeta} * \right. \\ & * \left. \frac{(H-ct') \operatorname{tg}\zeta}{vt'' \cos\zeta} \right\} \end{aligned}$$

integrando em (t''):

$$\begin{aligned} \langle 2\tau't'' \rangle = & \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f d\zeta \int_0^a dt' \frac{\mu ct' e^{-\mu ct'/\cos\zeta}}{2} \frac{(H-ct') \operatorname{tg}\zeta}{vt'' \cos\zeta} * \right. \\ & * \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] + \left. \int_f^e d\zeta \int_0^g dt' \frac{\mu ct' e^{-\mu ct'/\cos\zeta}}{2} * \right. \\ & * \left. \frac{(H-ct') \operatorname{tg}\zeta}{vt'' \cos\zeta} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

define-se:

$$IN_6(\zeta) = \frac{\mu c n}{2} \int_0^a t' (H/c-t') \frac{\operatorname{tg} \zeta}{\cos \zeta} e^{-\mu c t' / \cos \zeta} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{(H-ct')^2} + 1 \right] dt'$$

$IM_6(\zeta)$, só difere de $IN_6(\zeta)$ pelo limite superior de integração (g em lugar de a).

Obtem-se:

$$\langle 2\tau't'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left\{ \int_0^f IN_6(\zeta) d\zeta + \int_f^e IM_6(\zeta) d\zeta \right\} \quad (3.5)$$

O tempo médio quadratico é obtido pela expressão $\langle (t-\tau)^2 \rangle = \langle \tau'^2 \rangle + \langle t''^2 \rangle + \langle 2\tau't'' \rangle$, onde $\langle \tau'^2 \rangle$, $\langle t''^2 \rangle$ e $\langle 2\tau't'' \rangle$ são dados pelas expressões (3.3), (3.4) e (3.5) respectivamente.

APÊNDICE 4 .

- Obtenção da distribuição dos tempos de chegada; coeficiente de absorção infinito.

Sendo o cristal excitado na face de entrada, a densidade de probabilidade é dada por :

$$dP(\tau, t'') = \alpha^N \lambda e^{-\lambda \tau} \frac{H}{v t''^2} dt'' d\tau$$

no cálculo dos momentos, a probabilidade do tempo de espera ($dP(\tau)$) contribui com a unidade.

1. Cálculo do Momento de Ordem Zero.

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_B^D \frac{H dt''}{v t''^2}$$

com limites: $B = H/v$, $D = \frac{1}{v} [(2N+1)^2 R^2 + H^2]^{1/2}$, integrando em (t'') :

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \left[1 - \frac{H}{[(2N+1)^2 R^2 + H^2]^{1/2}} \right]$$

2. Cálculo do Momento de Primeira Ordem :

$$\langle t - \tau \rangle = \langle t'' \rangle$$

sendo :

$$\langle t'' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \int_B^D \frac{H dt''}{v t''^2}$$

integrando em (t'):

$$\langle t' \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \frac{H}{2V} \ln \left[\frac{(2N+1)^2 R^2}{H^2} + 1 \right],$$

expressão que corresponde ao tempo médio.

3. Cálculo do Momento de Segunda Ordem.

$$\langle (t-\tau)^2 \rangle = \langle t''^2 \rangle$$

$$\langle t''^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \frac{H}{V} \int_B^D dt''$$

integrando em (t''):

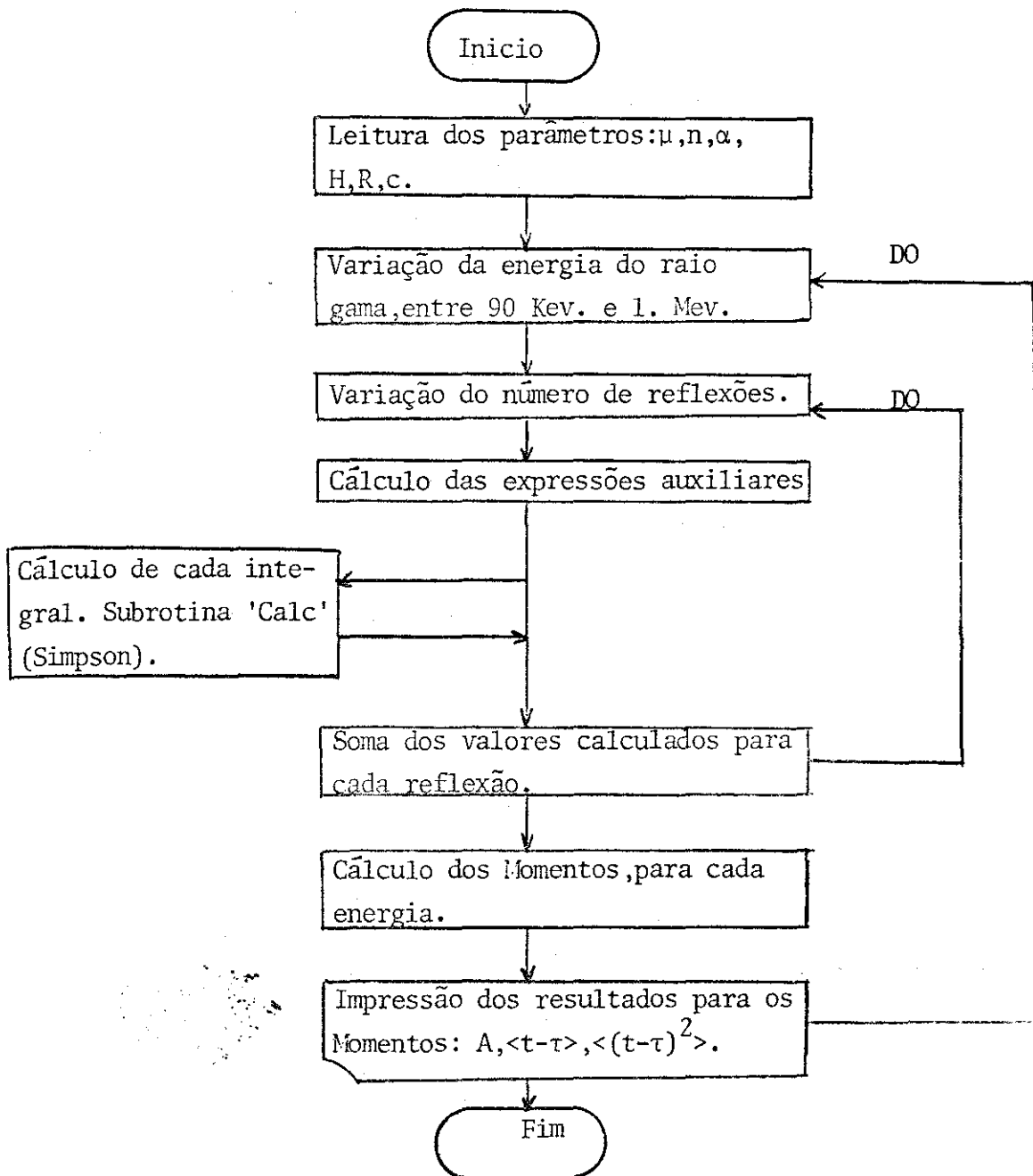
$$\langle t''^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^N (1-\alpha) \frac{H}{V^2} \left[[(2N+1)^2 R^2 + H^2]^{1/2} - H \right]$$

expressão que corresponde ao tempo médio quadrático.

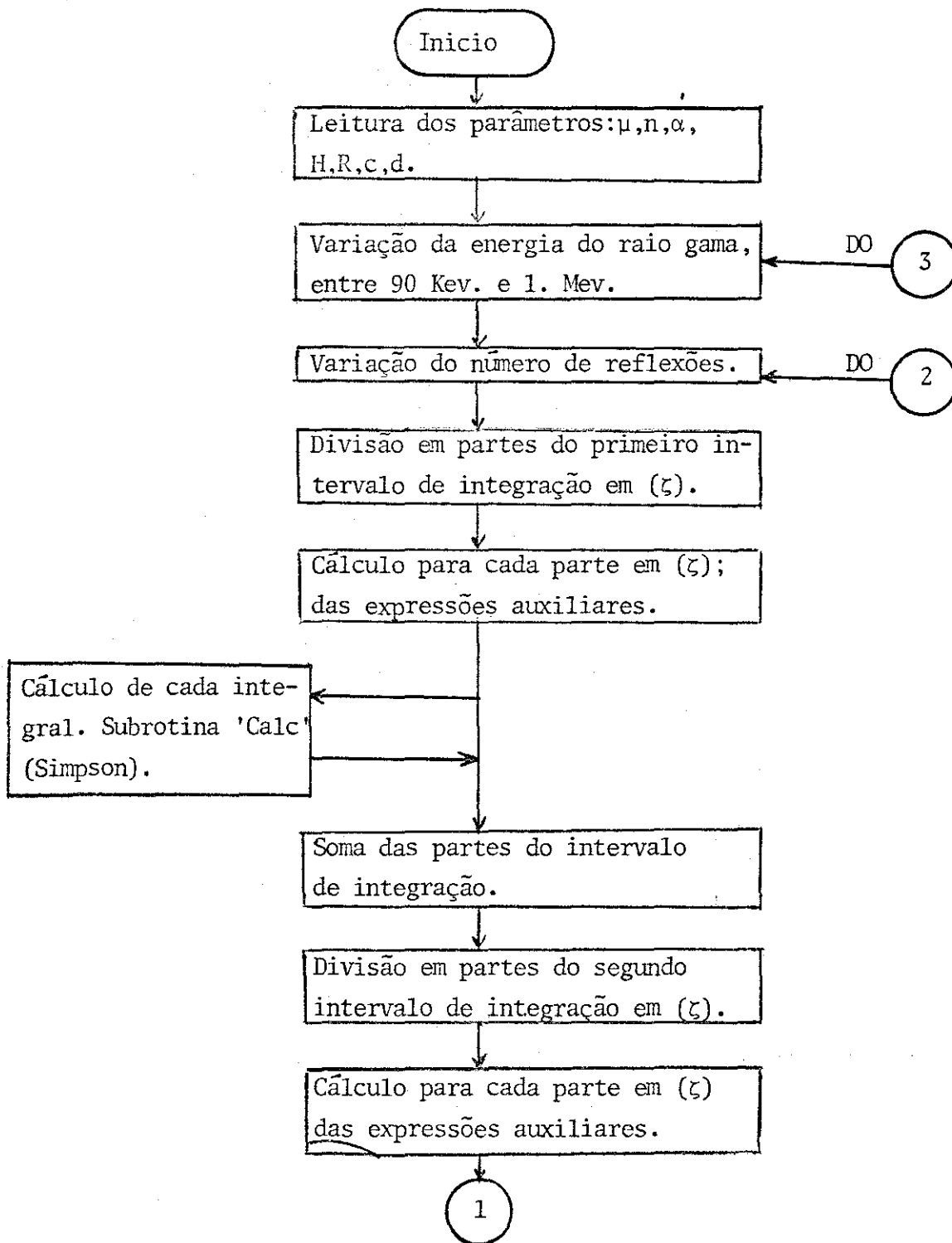
APÊNDICE 5

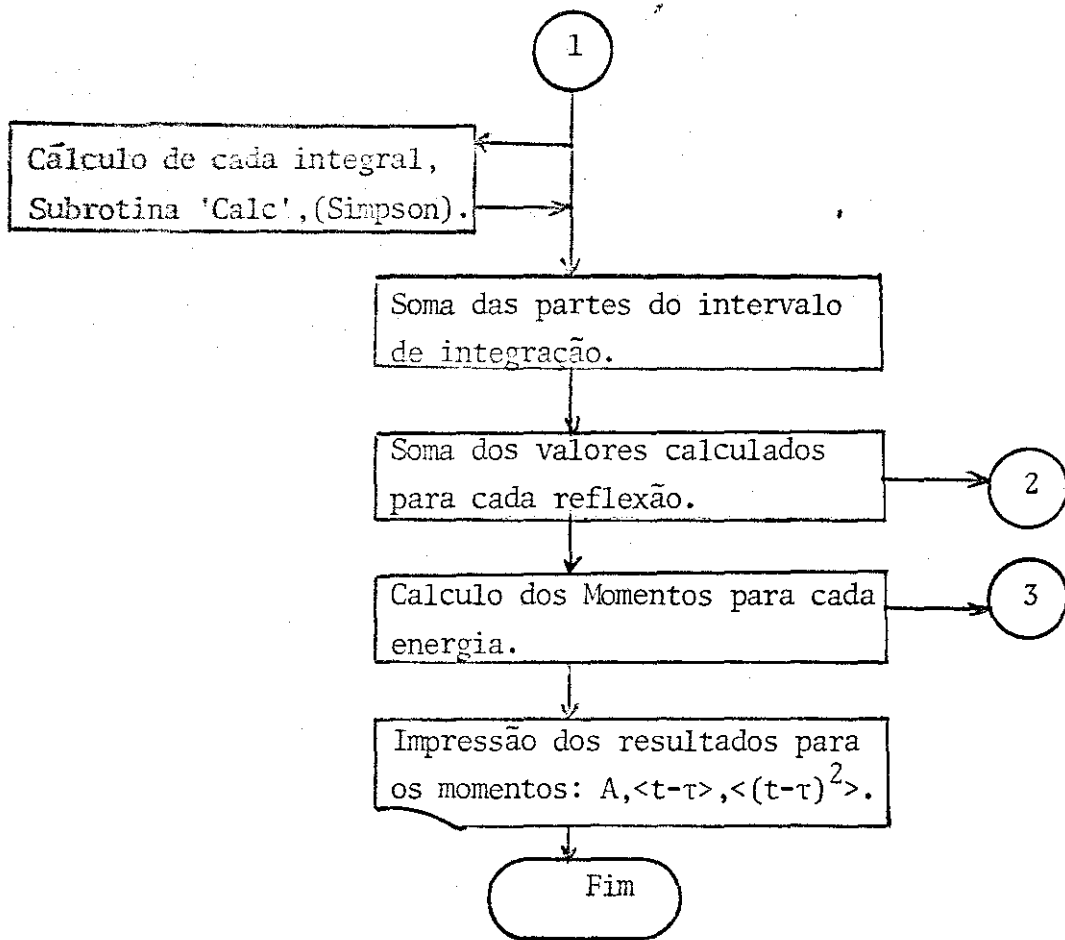
- Fluxogramas:

1.- Distribuição dos tempos de chegada. Caso Para-axial.

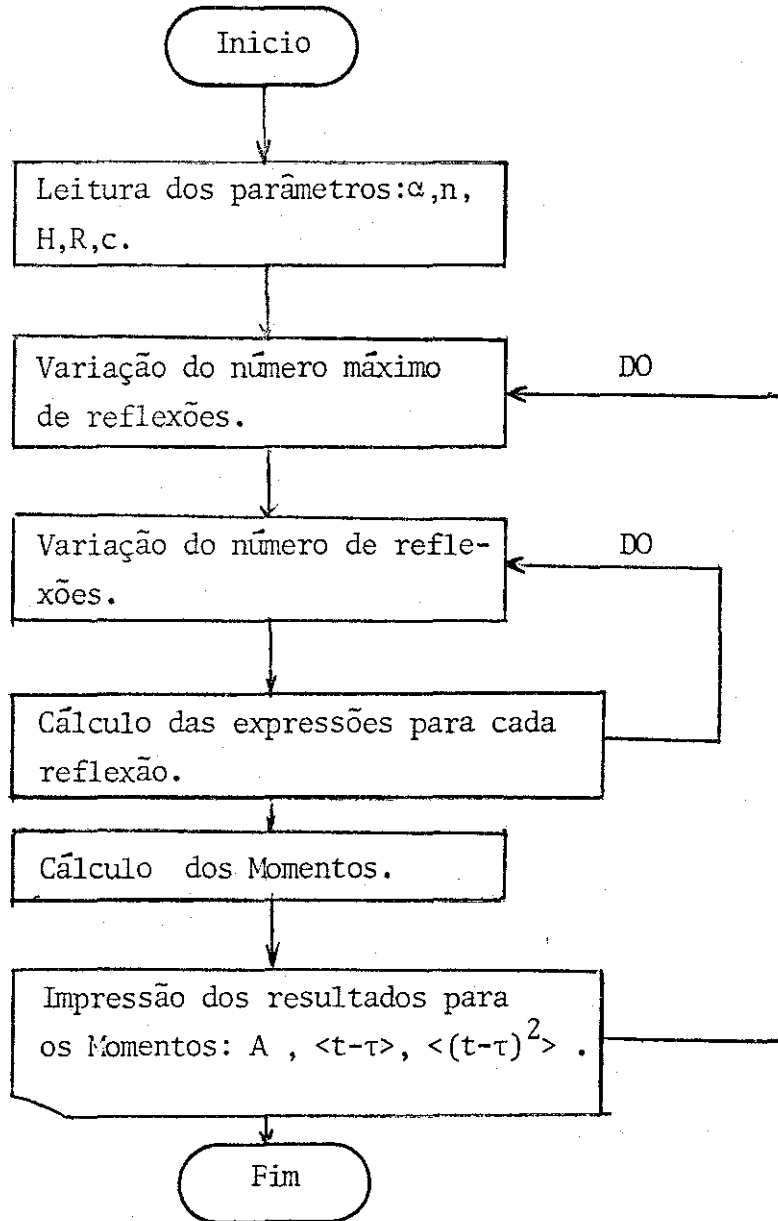


2. - Distribuição dos tempos de chegada: Caso Geral.





3. - Distribuição dos tempos de chegada. Coeficiente de absorção infinito.

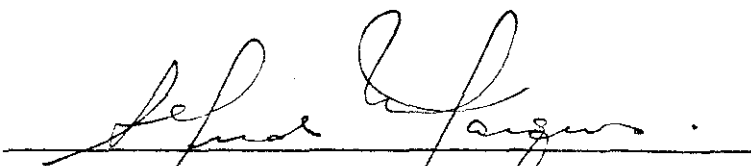


BIBLIOGRAFIA

1. "Scintillation Spectra Analysis", R. Van Lieshout, A. H. Wapstra, R. A. Ricci e R. K. Girgis, Alpha-Beta & Gamma-Ray Spectroscopy, Vol. 1 , (1965).
2. "Scintillation Spectrometer Statistics, Ernst Breitenberger, Progress in Nuclear Physics, Vol. 4, (1955).
3. "Scintillation Spectrometry", R.L. Heath, Gamma-Ray Spectrum Catalog , Vol. 1, (1965).
4. "Scintillation Counters", J.B. Birks, Pergamon Press Ltd. (1953).
5. "The effect of the Non-Proportional response of NaI(Tl) crystals to electrons upon resolution of gamma-rays, P. Iredale, Nucl. Instr. and Meth., 11 (1961) 340.
6. "Statistical Spread in pulse size of the Scintillation Spectrometer" , A. Bisi and L. Zappa, Nuclear Instruments 3 (1958) 17.
7. "Intrinsic Scintillator Resolution", G.G. Kelley, P.R. Bell, R.C. Davis and N.H. Lazar, Nucleonics, Vol. 14, N° 4 (1956) pg. 115.
8. "Statistical Limitations on the Resolving Time of a Scintillation Counter", R.F. Post and L.I. Schiff, Phys. Rev. 80 (1950) 1113.
9. "Intrinsic Line Broadening in NaI(Tl) gamma-ray Spectrometers", C. D. Zerby, A. Meyer and R.B. Murray, Nucl. Instr. and Meth., 12 (1961) 115.
10. "The Relationships between Light output and Energy Resolution in NaI(Tl) crystals, R. Hill and A.J.L. Collinson, Nucl. Instr. and Meth., 44 , (1966) 245.
11. "Nuclear Instruments and their uses", Snell, A.M., John Wiley and Sons, Vol. 1, 1962.
12. "Introduction to Fortran IV Programming", D. Dimitry and T. Mott, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.
13. "Numerical Methods for Science and Engineering", R. Stanton, Prentice-Hall, Inc., 1961.

14. "HARSHAW-Scintillation Phosphors", The Harshaw Chemical Co. 1966.
15. "Handbook of Chemistry and Physics", 55th Edition (1974-1975), pages E-228 e E-219, CRC Press.

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


(Presidente)
