

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
ICRA

Quantização Bohmiana do Big Rip

Diego Moraes Pantoja

Dissertação de Mestrado
Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto
Rio de Janeiro
2008

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
ICRA

Quantização Bohmiana do Big Rip

Diego Moraes Pantoja

Banca Examinadora:

Dissertação de Mestrado
Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto
Rio de Janeiro
2008

Resumo

Este trabalho consiste em estudar possíveis configurações futuras para o universo dominado por um campo fantasma, que é uma espécie particular de matéria com o qual violaria a condição de energia forte e se explicaria a expansão acelerada supondo uma equação barotrópica de estado $p = \omega\rho$ com $\omega < -1$, e que faria surgir uma singularidade futura chamada de Big Rip, para o qual tanto o fator de escala quanto a densidade de energia divergiriam em um tempo futuro finito. Nossa abordagem verificará, ao quantizar o modelo de Friedmann-Robertson-Walker pelo procedimento de Dirac-Wheeler-DeWitt e através da interpretação de David Bohm da mecânica quântica, que efeitos quânticos podem evitar claramente a singularidade Big Rip.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por todo tipo de ajuda nas horas difíceis e por todas as conquistas alcançadas.
- Agradeço aos meus pais Carlos Alberto e Maria Do Carmo, que conseguiram com toda dificuldade me proporcionar uma ótima educação, a minha esposa Nilma Alaíde por toda sua paciência e sua ajuda nos momentos em que estava fazendo esta dissertação, aos meus irmãos Danilo e Dayane por sempre torcerem por mim e ao restante da minha família por sempre me apoiar.
- Agradeço ao professor Nelson Pinto Neto pela forma clara que conduziu a orientação deste trabalho.
- Agradeço a oportunidade de expressar a enorme gratidão aos amigos: Nadja e Paulo por toda ajuda, Leonardo, Fábio dos reis, Wilson, Marlon, Cláudio, Márcio e Manuel Eleutério.
- Agradeço ao meu amigo Fábio Alex Pereira dos Santos pelas boas discussões sobre física.
- Agradeço aos meus amigos de sala Marcela, Stella, Felipe e Martin por todo o companheirismo.
- Agradeço ao CNPQ pela bolsa de estudos.
- Agradeço a todos os funcionários e professores do ICRA por o todo apoio.

Sumário

1	Introdução	3
2	Aceleração do Universo e o Big Rip	7
2.1	O Universo Acelerado	8
2.2	Cosmologia Fantasma Clássica	11
2.3	O Big Rip	12
3	Quantização de Dirac-Wheeler-DeWitt	16
3.1	Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral . . .	16
3.2	Quantização	20
3.3	Minisuperespaço	21
3.4	Aproximação WKB	23
4	Trajetórias Bohmianas e o Big Rip	28
4.1	Mecânica quântica de Bohm-de Broglie	28
4.2	Interpretação de Bohm-de Broglie da Cosmologia Quântica	32
4.3	Evitando o Big-Rip	34
5	Conclusões	54

Capítulo 1

Introdução

O desejo de descrever o universo é bastante antigo, então por que não poderíamos fazê-lo com o auxílio da ciência? Uma das primeiras pessoas a tentar isto foi Kepler(1571-1630), que continuou as observações celestes de Tycho Brahe(1546-1601) e descobriu três leis empíricas, de onde podemos destacar a terceira devido a sua natureza tanto descritiva quanto preditiva, e enunciada da seguinte forma: “Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos de suas distâncias médias ao Sol”, podendo ser equacionada como

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \quad (1.1)$$

Esta foi a primeira forma eficaz de descrição matemática da gravitação. Posteriormente, surge a célebre personalidade de Newton(1642-1727) que conseguiu estabelecer em três leis a descrição da dinâmica de um corpo e sintetizar na expressão

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}, \quad (1.2)$$

a lei da gravitação universal, estabelecendo assim o paradigma Newtoniano que durou aproximadamente 250 anos. Durante o período entre Newton e o início do séc.XX houve muitos avanços na física e na observação celeste proporcionando um conhecimento maior acerca do universo. Em 1905, preocupado com a covariância das equações de Maxwell, Albert Einstein (1879-1955) publica um artigo [1] denominado “Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”, no qual tratava da relatividade especial. Tendo a ajuda

do seu amigo Marcel Grossmann (1878-1936), Einstein publicou em 1915 a teoria da relatividade geral [2] e calculou o efeito da deflexão da luz ao passar por um corpo de grande massa, efeito este confirmado em 1919. Em 1917, Einstein inseriu a “constante cosmológica” nas suas equações de campo, o que permitiu que ele encontrasse uma solução estática para o universo [3]. Já no início dos anos de 1920, Alexander Friedmann (1888-1934), George Lemaître (1894-1966) e Willem de Sitter (1872-1934) encontraram independentemente soluções cosmológicas não estáticas para as equações de campo da relatividade geral. E em 1929, o astrônomo norte-americano Edwin P. Hubble (1889-1953), anunciou a descoberta de que o universo estava se expandindo [4], confirmando o modelo de Friedmann. Em meados dos anos de 1930, Edward Milne (1896-1950) estabeleceu o denominado “princípio cosmológico”, segundo o qual todos os observadores, que estejam participando da expansão cosmológica, devem perceber o universo da mesma forma.

Considerando que o universo está em expansão, seria natural pensar que em um passado muito remoto ele deveria ser muito pequeno, muito quente e muito denso, o que levaria a uma singularidade inicial. Então, em 1946, o físico George Gamow (1904-1968) publicou um artigo [5] na qual começou a elaborar o seu famoso modelo de universo a partir de uma “explosão” inicial denominada de Big Bang, e em 1948, juntamente com os físicos Asher Alpher (1921-2007) e Hans Albrecht Bethe (1906-2005) publicaram um artigo [6] no qual apresentavam a idéia de que um “ovo cósmico” formado de nêutrons, que no instante do Big Bang, se desintegrou em prótons e elétrons em um processo que também foi formando os núcleos mais pesados da tabela periódica, processo denominado nucleossíntese. Nesse mesmo ano, Alpher e o físico Robert C. Hermann (1914-1997) fizeram a notável previsão de que uma radiação do início do Big Bang, ainda presente nos dias de hoje, deveria ter uma temperatura de aproximadamente 5K [7], o que foi confirmado [8] acidentalmente por Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-) em 1965, conferindo uma forte evidência da existência do Big Bang. Entretanto, um sério problema para o Big Bang é o chamado “problema do horizonte”. A observação do fundo de microondas mostrou um grau de homogeneidade muito elevado: regiões suficientemente afastadas não poderiam ter tido um contato causal antes da época em que a

radiação se desacoplou da matéria e dar origem à distribuição tão isotrópica do fundo de radiação que observamos hoje. Este e outros problemas, tais como a planeza, podem ser resolvidos com o modelo da inflação proposto inicialmente em 1981 por Alan Guth(1947-) [9].

Chegamos então à cosmologia quântica¹, objeto de nosso estudo, a qual nasceu para preencher uma lacuna inicial deixada pela inflação, que seria a de responder quais eram as condições iniciais tão propícias que fizeram com que ela surgisse e, também, como um possível laboratório teórico para a gravitação quântica. Modelos de quantização da gravitação apresentam dificuldades de interpretação. A interpretação da mecânica quântica que é utilizada de uma maneira padrão é a de Copenhague [10]. Nela há a necessidade de um observador pertencente a um mundo clássico que dê suporte às medidas dos efeitos quânticos, o que mostra a sua inviabilidade no contexto cosmológico, haja visto que queremos tratar o universo como um todo. Com isso, é necessário considerar alternativas para a interpretação de Copenhague e aquela com o qual nos ocuparemos é a interpretação causal da mecânica quântica de Bohm (1917-1992) e de Broglie (1892-1987)[11, 12].

Um grande problema inesperado surge quando em 1998 e 1999 dois grupos, chefiados por Adam G. Riess e Saul Perlmutter, anunciaram que o universo está em uma fase de expansão acelerada[13, 14] contrariando o ideário comum entre os físicos, pois todos esperavam que esta expansão fosse desacelerada devido à ação atratora da gravidade. Com a chegada deste fato muitas outras questões naturais aparecem, dentre elas seria que ao aceitar a relatividade geral como a teoria que descreve a gravitação, precisaríamos encontrar um campo material que desse suporte para esta aceleração. As observações parecem permitir que a densidade de energia ρ e a pressão p podem ser relacionadas tanto por $\rho + 3p < 0$ quanto por $\rho + p < 0$, onde a primeira leva a uma descrição de matéria denominada de quintessência [38]. A segunda equação leva a um campo fantasma [15, 16], uma forma estranha de matéria, descrita por um potencial exponencial e com a característica de fazer surgir uma singularidade chamada de Big Rip [15, 16, 17], caracterizada

¹Para ter uma boa compreensão a respeito deste assunto, o leitor é convidado a ler o livro “Quantum Cosmology and Baby Universes”[18].

pela divergência do fator de escala $a(t)$ e da densidade energia $\rho(t)$ para um tempo futuro finito. Então, mediante estas informações, podemos estabelecer o objetivo desta dissertação: descobrir se efeitos quânticos, utilizando a interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica, poderiam de alguma maneira evitar o Big Rip.

Para poder chegar a uma conclusão a respeito deste objetivo, nós desenvolveremos no capítulo 2 as bases da cosmologia clássica moderna para um campo fantasma e descreveremos como o Big Rip pode surgir através de soluções das equações cosmológicas. No capítulo 3, discutiremos aspectos da cosmologia quântica para um modelo de minisuperespaço através da construção do formalismo hamiltoniano da relatividade geral e do procedimento de quantização canônica de Dirac-Wheeler-DeWitt [19, 20, 21]. Já no capítulo 4, estudaremos a interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica com o intuito de poder aplicar seus conceitos para a cosmologia quântica no caso de um minisuperespaço construído no capítulo 3 e, desta forma, encontrar através de superposições gaussianas das soluções, um resultado que mostre ou não o surgimento do Big Rip.

Capítulo 2

Aceleração do Universo e o Big Rip

O mecanismo para se estabelecer as configurações para o universo é a observação e, por longos anos os únicos instrumentos foram os nossos olhos, influenciando nossas conclusões. Podemos perceber que grandes pensadores da antiguidade, tais como Platão e Aristóteles, imaginavam uma natureza eterna e imutável devido a este fato. Esta idéia de universo perdurou por muito tempo, chegando a ser defendida por célebres pessoas tais com Galileu, Newton e Einstein, este último por um período de sua vida.

Porém, as observações de Edwin Hubble mostraram que, ao contrário do que todos imaginavam, o universo estava em expansão.

Com isto surge a seguinte questão: essa expansão se dá de maneira acelerada, constante ou desacelerada? O mais normal seria que esta expansão fosse desacelerada devido à ação atrativa da gravidade, porém dados observacionais [13, 14] mostram que o universo está atualmente acelerado. Sendo assim, que entidade seria o condutor o universo? O que acontecerá com o universo no futuro? Para podermos abordar estas questões, vamos investigar os princípios básicos da cosmologia moderna.

2.1 O Universo Acelerado

Queremos estudar um modelo de universo homogêneo, isotrópico e em expansão para grandes escalas de distâncias no qual a ação aglutinadora da gravidade local não seja relevante, e em que todos os observadores são comóveis no sentido de que suas coordenadas permanecem invariáveis. Para isto, iremos admitir a teoria da relatividade geral de Einstein como a teoria que descreve a gravitação. Então, podemos identificar a equação que rege a dinâmica sem a constante cosmológica como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k^2T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde os índices $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$, $R_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor métrico, R é o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia e k^2 é a constante de Einstein da gravitação.

Tendo em mente estas características descritas acima para o universo, podemos encontrar a métrica de Friedmann-Robertson-Walker¹ com elemento de linha escrito desta forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.2)$$

sendo a velocidade da luz $c = 1$, r, θ, φ as coordenadas comóveis, $a(t)$ o fator de escala com dimensão de comprimento, t o tempo próprio e K a constante de curvatura que pode assumir valores $+1, -1, 0$. Escrevendo as eqs.(2.1) com a métrica estabelecida a partir da eq.(2.2) para um fluido perfeito com tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde ρ e p são a densidade de energia e pressão para este fluido e U_μ são as componentes de um quadri vetor velocidade do tipo tempo, encontramos que o fator de escala $a(t)$ satisfaz as equações de Friedmann:

$$3\frac{\dot{a}^2 + K}{a^2} = \kappa^2\rho, \quad (2.4)$$

¹Uma dedução simples da métrica de Friedmann-Robertson-Walker pode ser vista no livro de J. N. Islam [23].

$$\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K}{a^2} = -\kappa^2 p. \quad (2.5)$$

Por outro lado a derivada do fator de escala $a(t)$ é encontrada na Lei Hubble, que foi descoberta pela primeira vez em (1929), podendo ser enunciada da seguinte forma: “A velocidade de um observador B em relação a A é proporcional a distância que os separa”, podendo ser equacionada como

$$\vec{V}_{BA} = H(t)\vec{r}_{BA}, \quad (2.6)$$

onde $H(t)$ é conhecido como parâmetro de Hubble e tem dimensão de inverso do tempo e dado por

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.7)$$

O valor de $H(t)$ hoje pertence ao intervalo $65 - 80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Podemos verificar que esta lei está de acordo com as características do modelo se partirmos da definição de distância cosmológica ² a partir da eq.(2.2)

$$d_P = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{(1 - Kr'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.8)$$

sendo d_P a distância própria medida por observadores desde de um ponto P até um ponto P_0 no tempo t .

Como estamos interessados em estudar objetos luminosos que estão em movimento, esperamos encontrar um padrão de deslocamento para o vermelho $\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'}$, que mede o deslocamento da posição das linhas espectrais das fontes em relação às medidas dessas mesmas linhas obtidas no laboratório.

É interessante escrever as equações de Friedmann em termos do parâmetro de densidade Ω dado por

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \quad (2.9)$$

²Para mais detalhes ver o livro de Peter Coles e Francesco Lucchin [24].

onde $\rho_c(t)$ é a densidade de energia crítica calculada para o caso em que a constante de curvatura é $K = 0$ na eq.(2.4). Sendo assim,

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{k^2}. \quad (2.10)$$

As expressões para o parâmetro de densidade e para as equações de Friedmann calculadas no instante t_0 são

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}, \quad (2.11)$$

$$\ddot{a}_0 = -\frac{k^2}{6} (\rho + 3p)_0 a_0, \quad (2.12)$$

onde o subscrito “0” significa calculado no tempo t_0 . A última equação é uma combinação das equações de Friedmann no instante t_0 . Fazendo uma expansão do fator de escala no tempo (t) em torno do tempo (t_0) obtemos

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right], \quad (2.13)$$

onde q_0 é denominado de parâmetro de desaceleração, que é definido por

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a_0 H_0^2}. \quad (2.14)$$

Utilizando a eq.(2.9), a eq.(2.11), a eq.(2.12) e combinando com a eq.(2.14), encontramos uma importante expressão que relaciona o parâmetro de desaceleração com o parâmetro de densidade dada por

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} \left(1 + 3\frac{p}{\rho} \right)_0, \quad (2.15)$$

e se o fluido satisfizer uma equação barotrópica de estado com constante w e da forma

$$p = \omega\rho, \quad (2.16)$$

podemos rescrever a eq.(2.15) como

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} (1 + 3w). \quad (2.17)$$

Devido aos resultados observacionais [13, 14] que indicam que o universo está em uma fase atual de expansão acelerada e considerando que a densidade de energia é positiva, chegamos à conclusão de que a constante barotrópica de estado é $w < -1/3$.

2.2 Cosmologia Fantasma Clássica

Vamos nos perguntar que entidade está fazendo o universo acelerar. Muitos esforços estão sendo feitos para responder a esta pergunta, os quais podemos dividir em dois tipos: o abandono ou modificação da Relatividade Geral de Einstein como teoria da gravitação ou a hipótese da existência de novos tipos de “matéria” com propriedades não muito usuais tais como a constante cosmológica, quintessência e campo fantasma.

Já que alguns resultados observacionais indicam que a constante barotrópica de estado pode assumir valores $w < -1$ [25, 26], devemos examinar consequências de se ter o campo fantasma [15, 16] como o condutor da aceleração. Como o nome indica, este campo possui propriedades estranhas, tais como possuir uma equação de estado com pressão negativa, violar a condição de energia nula $\rho + p > 0$ ou possuir termo cinético negativo na lagrangiana que o descreve em relação à lagrangiana gravitacional R .

Para o modelo em questão, utilizaremos o campo fantasma como sendo um campo escalar homogêneo e isotrópico, cuja a lagrangiana pode ser escrita sob a forma

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.18)$$

onde g é o determinante da métrica. Variando esta equação acima em relação às componentes contravariantes da métrica $g^{\mu\nu}$ e utilizando a definição

$$\frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

encontramos para as componentes covariantes do tensor momento energia:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) - \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (2.20)$$

Comparando com a eq.(2.3) para o tensor momento energia de um fluido perfeito, lembrando que o campo ϕ é homogêneo e isotrópico e para um particular campo de velocidade U^μ unitário, descobrimos que a densidade de energia e pressão são dadas por

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.21)$$

$$p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.22)$$

Retomando neste momento as equações de Friedmann, com a diferenciação da eq.(2.4), encontramos uma equação de segunda ordem para o fator de escala $a(t)$ sob a forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k^2}{3} \left[-\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] = 0. \quad (2.23)$$

A conservação do tensor $T_{\mu\nu}$ implica

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.24)$$

de tal maneira que se escrevermos a densidade de energia e a pressão em termos do campo, vamos obter:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - V'(\phi) = 0, \quad (2.25)$$

que é simplesmente a equação de Klein-Gordon homogênea e isotrópica, onde a linha significa uma diferenciação em relação a ϕ . Na próxima seção iremos especificar um potencial para o campo fantasma e mostrar uma solução para as equações de Friedmann.

2.3 O Big Rip

Estamos interessados em um potencial que possibilite a expansão acelerada. Para isto iremos utilizar um potencial exponencial, já que tais potenciais para campos escalares podem surgir no contexto de teorias de Kaluza-Klein [27], gravidade de ordem superior [28], supergravidade [29] e teorias de supercordas [30]. Porém, tais potenciais apresentam problemas de instabilidades nas soluções das equações cosmológicas, que podem ser resolvidas utilizando-se de valores específicos para os parâmetros em questão [31]. Uma outra

característica do campo fantasma é o surgimento de uma singularidade denominada Big Rip, que nada mais seria do que a divergência do fator de escala juntamente com a densidade de energia em um tempo futuro finito. Escreveremos nosso potencial na forma [31, 32]

$$V = V_0 e^{-\lambda k \phi}, \quad (2.26)$$

onde k está relacionado com a constante de Einstein da gravitação já definida anteriormente como k^2 e λ é um parâmetro adimensional. Considerando o caso de um universo plano ($K = 0$) e que as eqs.(2.23) e (2.25) podem ser transformadas em um sistema dinâmico, com a eq.(2.4) considerada como um vínculo [31, 32, 33, 34], pode-se encontrar uma solução atratora [36] para o sistema sob a forma

$$\phi(t) = \frac{2}{\lambda k} \ln \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} H_0 (t - t_0) \right], \quad (2.27)$$

$$\alpha(t) = -\frac{2}{\lambda^2} \ln \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} H_0 (t - t_0) \right]. \quad (2.28)$$

onde foi definida uma nova variável $\alpha(t)$ como

$$\alpha(t) \equiv \ln a(t). \quad (2.29)$$

Das últimas equações, podemos retirar uma importante relação:

$$\phi = -\frac{\lambda}{k} \alpha. \quad (2.30)$$

Da primeira equação de Friedmann eq.(2.4), podemos associar as energias cinética e potencial para o campo fantasma, com $-E_{cin} + E_{pot} = 1$, em termos dos parâmetros encontrados sob a seguinte forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \equiv H^2 = \frac{k^2}{3} \rho = -\frac{k^2}{6} \dot{\phi}^2 + \frac{k^2}{3} V, \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{k^2}{6H^2} \dot{\phi}^2 + \frac{k^2}{3H^2} V, \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow E_{cin} \equiv \frac{k^2}{6H^2} \dot{\phi}^2 = \frac{k^2}{6H^2} \left(\frac{d\phi}{d\alpha} \right)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2. \quad (2.33)$$

como $\frac{d\phi}{d\alpha} = -\frac{\lambda}{k}$ e $\frac{d\alpha}{dt} = H$, temos:

$$E_{cin} = \frac{\lambda^2}{6} \quad (2.34)$$

Uma vez encontrada a energia cinética constante, podemos encontrar a energia potencial para o campo fantasma também constante

$$E_{pot} = \frac{k^2}{3H^2} V = 1 + \frac{\lambda^2}{6}. \quad (2.35)$$

Lembrando das soluções encontradas para $\alpha(t)$ e $\phi(t)$, e utilizando as eq.(2.33) e eq.(2.34), temos que

$$k^2 \left(\frac{a}{\dot{a}}\right)^2 \dot{\phi}^2 = \lambda^2, \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow \omega = -1 - \frac{\lambda^2}{3}. \quad (2.37)$$

Podemos perceber a partir da relação eq.(2.30) que tanto a nova variável $\alpha(t)$ quanto o campo $\phi(t)$ podem assumir valores que vão de $-\infty$ até $+\infty$, desse modo vamos investigar o que acontece fisicamente com o fator de escala $a(t)$ e a densidade de energia ρ . Primeiramente, das equações (2.16), (2.24) e (2.37) temos que

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \omega\rho) = \frac{\dot{a}}{a}\lambda^2\rho, \\ \Rightarrow \rho &= \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

E para o fator de escala, fazendo o limite da equação (2.28) com

$$t \rightarrow t_{Rip} = t_0 + \frac{2}{\lambda^2 H_0}, \quad (2.39)$$

descobrimos que

$$\lim_{t \rightarrow t_{Rip}} \frac{a}{a_0} = \lim_{t \rightarrow t_{Rip}} \left[1 - \frac{\lambda^2 H_0}{2} (t_{Rip} - t_0) \right]^{-\frac{2}{\lambda^2}} \rightarrow \infty \quad (2.40)$$

de onde temos que de eq.(2.40) em eq.(2.38) encontramos

$$\rho \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Portanto, esta configuração indica que o universo terá uma singularidade chamada de Big Rip para um tempo futuro finito t_{Rip} , onde todas as estruturas tais como galáxias, sistemas planetários, moléculas e até átomos deixarão de existir como tais [16]. Para

finalizar o capítulo, vamos calcular de maneira aproximada e um tanto grosseiramente, quanto vale o tempo t_{Rip} com este modelo. Para isto utilizaremos o inverso do parâmetro de Hubble definido como o nosso tempo t_0 , com o valor de $H_0 = 72 \text{Km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ [37], utilizaremos também a eq.(2.39) e a liberdade de poder atribuir a λ o valor $\lambda^2 = 6$ [32], Assim

$$t_{Rip} \approx 13,60.10^9 + \frac{2}{6}13,60.10^9 = 18,1 \text{ bilhões de anos.} \quad (2.42)$$

Restando aproximadamente 4,5 bilhões de anos para o Big Rip.

Capítulo 3

Quantização de Dirac-Wheeler-DeWitt

Terminamos o capítulo anterior prevendo um final para o universo caso sua aceleração esteja sendo governada por um campo fantasma. A existência de singularidades em uma teoria indica que ela não seria a mais apropriada neste regime. Considerando que as escalas de energia próximo ao Big Rip são comparáveis à escala de Planck, conclui-se sobre a necessidade de se levar em conta aspectos quânticos da gravidade. Nosso objetivo neste capítulo é chegar à equação de Wheeler-DeWitt da geometrodinâmica quântica [21] e apresentar as equações clássicas que podem ser retiradas desta equação.

3.1 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

Queremos construir o formalismo hamiltoniano da relatividade geral, então iremos estabelecer o espaço como sendo foliado por hipersuperfícies do tipo espaço Σ , imersas em uma quadri-variedade M dotada de uma métrica $g_{\mu\nu}$ ¹. Esta imersão é descrita pela forma padrão (3+1) de elemento de linha

$$ds^2 = - (N^2 - N^i N_i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

¹Este formalismo foi desenvolvido por R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner em 1962 [39].

de tal maneira que a métrica pode ser escrita em termos de uma matriz $(g_{\mu\nu})$ sob a forma

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2 + N^k N_k & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

com inversa

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde N é a função lapso, N^i é o vetor deslocamento e h_{ij} é a 3-métrica da hipersuperfície. A ação de Einstein-Hilbert acoplada minimamente ao campo de matéria é dada por

$$S = \frac{1}{k^2} \left(\int_M d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial M} d^3x h^{\frac{1}{2}} K \right) + S_{mat}, \quad (3.4)$$

onde S_{mat} é o termo de matéria dado através da lagrangiana (2.18), de tal forma que

$$S_{mat} = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.5)$$

com h sendo o determinante da 3-métrica h_{ij} e K o traço da curvatura extrínseca K_{ij} , sendo que

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(D_i N_j + D_j N_i - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right). \quad (3.6)$$

onde os índices latinos ($i, j = 1, 2, 3$). O aparecimento da curvatura extrínseca na ação é devido a termos de derivadas normais não se anularem no contorno ∂M . O símbolo D_i significa a i -ésima componente da derivada covariante na hipersuperfície. Escrevendo a ação eq.(3.4) em termos das variáveis (3+1) com

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}, \quad (3.7)$$

encontramos

$$S = \frac{1}{k^2} \int d^3x dt N \sqrt{h} (K^{ij} K_{ij} - K^2 + {}^3R) + S_{mat}, \quad (3.8)$$

onde 3R é o escalar de Ricci na Hipersuperfície espacial. Escrevendo a métrica de DeWitt dada por

$$G_{ijkl} = \frac{2}{\sqrt{h}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}), \quad (3.9)$$

cuja inversa é

$$G^{ijkl} = \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} (h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk}) - h^{ij}h^{kl} \right], \quad (3.10)$$

podemos identificar a partir da ação eq.(3.8)

$$L = \frac{1}{k^2} N \left(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + {}^3R \sqrt{h} \right) + N \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.11)$$

Calculando os momentos canonicamente conjugados a N , N_i , h_{ij} e ϕ , denotados por π^0 , π^i , π^{ij} e π_ϕ respectivamente, a partir da equação acima, obtemos

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (3.12)$$

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = 0, \quad (3.13)$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}} \quad (3.14)$$

$$= \frac{2N}{k^2} G^{klmn} K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \quad (3.15)$$

$$= -\frac{G^{ijkl}}{k^2} K_{kl}, \quad (3.16)$$

e

$$\pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (3.17)$$

$$= -\frac{\sqrt{h}}{N} \left(\dot{\phi} - N^i \partial_i \phi \right), \quad (3.18)$$

onde as equações (3.12) e (3.13) são conhecidas como vínculos primários. Podemos obter a densidade hamiltoniana de uma maneira canônica

através de:

$$\begin{aligned}
H &= \pi_0 \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i + \pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \pi_\phi \dot{\phi} - L \\
&= \pi^{ij} (D_i N_j + D_j N_i - 2N K_{ij}) \\
&\quad + \pi_\phi \left(-\frac{N \pi_\phi}{\sqrt{h}} + N^i \partial_i \phi \right) - \frac{N}{k^2} \left(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + {}^3R \sqrt{h} \right) \\
&\quad - N \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + g^{0i} \partial_0 \phi \partial_i \phi + \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - V(\phi) \right] \\
&= 2\pi^{ij} D_i N_j - 2N \pi^{ij} K_{ij} \\
&\quad - \frac{N}{\sqrt{h}} \pi_\phi^2 + N^i \pi_\phi \partial_i \phi - \frac{N}{k^2} \left(k^4 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} + {}^3R \sqrt{h} \right) \\
&\quad - N \sqrt{h} \left[-\frac{\dot{\phi}^2}{2N} + \frac{N^i}{N^2} \dot{\phi} \partial_i \phi + \frac{1}{2} \left(h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \right) \partial_i \phi \partial_j \phi - V(\phi) \right] \\
&= N \left(k^2 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{{}^3R \sqrt{h}}{k^2} - \frac{\pi_\phi^2}{2\sqrt{h}} - \sqrt{h} \frac{h^{ij}}{2} \partial_i \phi \partial_j \phi + \sqrt{h} V(\phi) \right) \\
&\quad + N^j (-2D_i \pi_j^i + \pi_\phi \partial_j \phi),
\end{aligned}$$

em que foram utilizadas as expressões eq.(3.12) a eq.(3.18) e o fato de que

$$G_{ijkl} G^{klmn} = \delta_{ij}^{mn}, \quad (3.19)$$

$$\int D_i (\pi^{ij} N_j) d^3x = \int (\pi^{ij} D_i N_j + N_j D_i \pi^{ij}) d^3x = 0 \quad (3.20)$$

$$N_j (D_i \pi^{ij}) = N_j (D_i h^{lj}) \pi_l^i - N_j h^{lj} (D_i \pi_l^i), \quad (3.21)$$

$$= N^j D_i \pi_j^i. \quad (3.22)$$

Escrevendo a densidade hamiltoniana sob a forma

$$H = N H_0 + N^j H_j, \quad (3.23)$$

temos que

$$\begin{aligned}
H_0 &= k^2 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{{}^3R \sqrt{h}}{k^2} - \frac{\pi_\phi^2}{2\sqrt{h}} \\
&\quad - \sqrt{h} \frac{h^{ij}}{2} \partial_i \phi \partial_j \phi + \sqrt{h} V(\phi), \quad (3.24)
\end{aligned}$$

e

$$H_j = -2D_i \pi_j^i + \pi_\phi \partial_j \phi. \quad (3.25)$$

Tendo em mente que as derivadas em relação a t de π^0 e π^i devem se anular por eq.(3.12) e eq.(3.13), ou seja, $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_0\} = 0$ e $\dot{\pi}^j = \{\pi^j, H_j\} = 0$, encontramos

$$H_0 = 0, \quad (3.26)$$

$$H_j = 0, \quad (3.27)$$

chamados de vínculos secundários. O primeiro chamaremos de *vínculo hamiltoniano* e o segundo de *vínculo do momento*, os quais desempenharão um papel importante no procedimento de quantização.

3.2 Quantização

Todo este formalismo desenvolvido na seção anterior foi para tornar o procedimento de quantização mais imediato. Dessa forma, iremos representar o estado quântico do sistema por um funcional de onda $\psi(h_{ij}, \phi)$ no superspaço, que descreve o espaço de todas as configurações possíveis (h_{ij}, ϕ) na hipersuperfície espacial e com a importante característica de não depender explicitamente do parâmetro de tempo t .

De acordo com procedimento de quantização de Dirac, a função de onda é aniquilada pelos operadores associados aos vínculos clássicos, onde não nos preocuparemos com o problema de ordenamento por hora. Representaremos a quantização, para efeito de cálculo, através da identificação dos momenta π^{ij} e π_ϕ com os operadores $\hat{\pi}^{ij}$ e $\hat{\pi}_\phi$ definidos por

$$\pi^{ij} \rightarrow \hat{\pi}^{ij} = -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ij}}, \quad (3.28)$$

e

$$\pi_\phi \rightarrow \hat{\pi}_\phi = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \phi}, \quad (3.29)$$

de tal forma que encontramos para o vínculo do momento

$$\hat{H}_i \psi(h_{ij}, \phi) = 0, \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow -2h_{ki} D_j \frac{\delta \psi(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{kj}} + \frac{\delta \psi(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (3.31)$$

e para o vínculo hamiltoniano

$$\hat{H}_0 \psi(h_{ij}, \phi) = 0, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\hbar^2 \left(k^2 G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} - \frac{1}{2\sqrt{\hbar}} \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} \right) \psi(h_{ij}, \phi) \\ & + \sqrt{\hbar} \left(-\frac{{}^3R}{k^2} - \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + V(\phi) \right) \psi(h_{ij}, \phi) = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

O vínculo do momento implica que a função de onda é invariante sob transformações de coordenadas espaciais. Já o vínculo hamiltoniano dá origem à equação de Wheeler-DeWitt eq.(3.33), que é uma equação diferencial funcional que descreve a evolução dinâmica do funcional de onda no superspaço. Sendo assim, podemos estabelecer uma interpretação do funcional $\psi(h_{ij}, \phi)$ como relacionado a probabilidade de encontrar a hipersuperfície espacial com uma dada configuração (h_{ij}, ϕ) .

3.3 Minisuperespaço

Trabalhar no superspaço dimensionalmente infinito da cosmologia quântica ficaria muito difícil na prática. Seria interessante considerar simetrias para poder diminuir consideravelmente os graus de liberdade do sistema. Desta forma, conduziremos nosso trabalho em modelos conhecidos como minisuperespaço, que são caracterizados pelo fato de sua configuração espacial ser dimensionalmente finita, de tal maneira que não nos preocuparemos com o fato de tal construção ser considerada apenas como uma aproximação de uma teoria mais completa.

Um modelo simples feito nos mesmos moldes das seções anteriores será construído para o minisuperespaço. Para isto, restringiremos a métrica e o campo de matéria a se tornarem homogêneos e isotrópicos. Um minisuperespaço mais geral envolveria as seguintes grandezas: a 3-métrica h_{ij} homogênea descrita por um número finito de funções de t e $q^\alpha(t)$, onde $\alpha = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ com n sendo a dimensão do espaço, a função deslocamento nula $N^i = 0$, e a função lapso sendo homogênea $N = N(t)$, conduzindo ao elemento de linha:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + h_{ij}(q^\alpha, t) dx^i dx^j. \quad (3.34)$$

Porém, estamos interessados no modelo de Friedmann-Robertson-Walker para o universo espacialmente plano, ou seja, de constante

de curvatura $K = 0$. Sendo assim, a 3-métrica será escrita como

$$h_{ij}(q^\alpha, t) dx^i dx^j = a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.35)$$

onde $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$. Retomando neste momento a densidade lagrangiana (3.11) com o campo fantasma homogêneo e istrópico, obtemos

$$L = \frac{N}{k^2} \left(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + {}^3 R \sqrt{h} \right) - N \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}(t)^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.36)$$

Utilizando as equações (3.6) e (3.10), e o fato de que

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = -\frac{1}{3} h_{ij} h_{kl} \frac{\partial h^{kl}}{\partial t}, \quad (3.37)$$

podemos expressar a lagrangiana anterior sob a forma

$$L = \sqrt{h} \left(-\frac{1}{6Nk^2} h_{ij} h_{kl} \dot{h}^{ij} \dot{h}^{kl} + \frac{N}{k^2} {}^3 R \right) - N \sqrt{h} \left[\frac{1}{2N^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.38)$$

Como estamos interessados no modelo de minisuperespaço descrito acima, verificamos que o único grau de liberdade de h_{ij} é o fator de escala $a(t)$. Então, para o tempo cósmico t com $N = 1$ e o fato de que

$$\dot{h}^{ij} = -2 \frac{\dot{a}}{a^3} \delta^{ij}, \quad (3.39)$$

a lagrangiana eq.(3.38) assume a forma

$$L = -\frac{3}{k^2} \dot{a}^2 a - \frac{1}{2} a^3 \dot{\phi}^2 - a^3 V(\phi), \quad (3.40)$$

onde o determinante da 3-métrica $h = a^6$ e a curvatura intrínseca ${}^3 R = 0$. Os momentos canonicamente conjugados aos graus de liberdade (a, ϕ) são, respectivamente,

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \quad (3.41)$$

$$= -\frac{6}{k^2} \dot{a} a, \quad (3.42)$$

e

$$\pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (3.43)$$

$$= -a^3 \dot{\phi}. \quad (3.44)$$

A hamiltoniana é dada por

$$H = \dot{a}\pi_a + \dot{\phi}\pi_\phi - L \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow H = -\frac{k^2}{12a}\pi_a^2 - \frac{1}{2a^3}\pi_\phi^2 + a^3V(\phi), \quad (3.46)$$

que está vinculada a ser nula. Assim, para $k^2 = 6$ e multiplicando ambos os membros da equação acima por a^3 , temos:

$$H = -\frac{a^2}{2}\pi_a^2 - \frac{1}{2}\pi_\phi^2 + a^6V(\phi) = 0. \quad (3.47)$$

Esta será a equação que servirá de base para a quantização na próxima seção.

3.4 Aproximação WKB

Nesta seção, nos preocuparemos com a aproximação WKB do minisuperespaço quantizado para podermos descobrir o comportamento clássico do sistema quântico. Desta maneira, iremos fazer a identificação das coordenadas e momentos clássicos com os respectivos operadores. Sendo assim, utilizando o fator de ordenamento de Laplace-Beltrami² de tal forma que

$$p^2 \rightarrow -\hbar^2 q^{-\eta} \left(\frac{\partial}{\partial q} q^\eta \frac{\partial}{\partial q} \right), \quad (3.48)$$

onde η é o fator de ordenamento, resulta que o operador do hamiltoniano correspondente a (3.47) aplicado ao funcional de onda do minisuperespaço $\psi(a, \phi)$ dá

$$\left[\frac{\hbar^2}{2} a \frac{\partial}{\partial a} a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + a^6 V(\phi) \right] \psi(a, \phi) = 0. \quad (3.49)$$

Utilizando a transformação (2.29) e o potencial para o campo fantasma (2.26) na equação acima com

$$a = e^\alpha, \quad (3.50)$$

²Para maiores detalhes sobre fator de ordenamento ver “Factor ordering in standard quantum cosmology” [22].

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (3.51)$$

obtemos

$$\left[\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + V_0 e^{6\alpha - \lambda\sqrt{6}\phi} \right] \psi(\alpha, \phi) = 0, \quad (3.52)$$

que é a equação de Wheeler-DeWitt para este modelo de minisuperespaço. Uma transformação conveniente das coordenadas (α, ϕ) que deixa a equação acima mais simples é [36]

$$u(\alpha, \phi) \equiv \frac{\sqrt{2V_0}}{3} \frac{e^{3\alpha - \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi}}{1 + \frac{\lambda^2}{6}} \left[\cos(\gamma) + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \operatorname{sen}(\gamma) \right], \quad (3.53)$$

$$v(\alpha, \phi) \equiv \frac{\sqrt{2V_0}}{3} \frac{e^{3\alpha - \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi}}{1 + \frac{\lambda^2}{6}} \left[\operatorname{sen}(\gamma) - \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \cos(\gamma) \right], \quad (3.54)$$

onde $\gamma = 3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha$. Fazendo então esta transformação e substituindo na (3.52), encontra-se:

$$\hbar^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \psi = 0. \quad (3.55)$$

Desta forma, iremos proceder com a aproximação WKB através da identificação de $\psi = C e^{\frac{i}{\hbar} S}$, onde S é uma função de u e v . Inserindo esta identificação na equação acima e obtendo-se a equação de mais baixa ordem em \hbar , encontramos

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial v} \right)^2 = 1, \quad (3.56)$$

que é a equação clássica de Hamilton-Jacobi. Esta equação pode ser resolvida via separação de variáveis com solução dada sob a forma [36]

$$S_{0z} = zu - \sqrt{(1 - z^2)v}, \quad (3.57)$$

onde z é uma constante. Substituindo as equações (3.53) e (3.54) na solução acima, encontramos que a ação clássica S_{0z} pode ser escrita em termos das coordenadas (α, ϕ) , o que nos convida a identificar os momentos através de

$$\pi_\alpha = \frac{\partial S_{0z}}{\partial \alpha}, \quad (3.58)$$

e

$$\pi_\phi = \frac{\partial S_{0z}}{\partial \phi}. \quad (3.59)$$

Escrevendo os momentos (3.42) e (3.44) em termos da coordenada α com a constante de Einstein da gravitação $k^2 = 6$, temos

$$\pi_\alpha = -e^{3\alpha} \dot{\alpha}, \quad (3.60)$$

e

$$\pi_\phi = -e^{3\alpha} \dot{\phi}. \quad (3.61)$$

De onde podemos obter

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha} \left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{0z}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \quad (3.62)$$

e

$$\dot{\phi} = -e^{-3\alpha} \left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial S_{0z}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right). \quad (3.63)$$

Então, calculando as expressões acima para as variáveis (3.53) e (3.54) e para a ação (3.57), obtemos

$$\dot{\alpha} = \sqrt{2V_0} e^{-\frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi} \left[\sqrt{1-z^2} \operatorname{sen} \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) - z \cos \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) \right], \quad (3.64)$$

e

$$\dot{\phi} = \sqrt{2V_0} e^{-\frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi} \left[z \operatorname{sen} \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) + \sqrt{1-z^2} \cos \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) \right]. \quad (3.65)$$

Podemos perceber, através de um cálculo direto, que as equações acima satisfazem as equações clássicas cosmológicas de Friedmann eq.(2.23), de conservação do campo eq.(2.25) e do vínculo eq.(3.47), o que mostra que as expressões eq.(3.64) e eq.(3.65) são as equações clássicas. Sendo assim, verificamos que o conjunto de trajetórias fig.(3.1), fig.(3.2) e fig.(3.3) no plano $\alpha\phi$ são possíveis soluções das mesmas equações clássicas (2.23), (2.25) e (3.47).

É importante ressaltar que inspecionando as equações (2.27) e (2.28) e levando em conta (2.38), perceberemos que a região em que $\alpha \rightarrow +\infty$ e $\phi \rightarrow -\infty$ é reconhecidamente a região de Big Rip, evidenciando mais uma vez o surgimento desta singularidade neste modelo são atratoras.

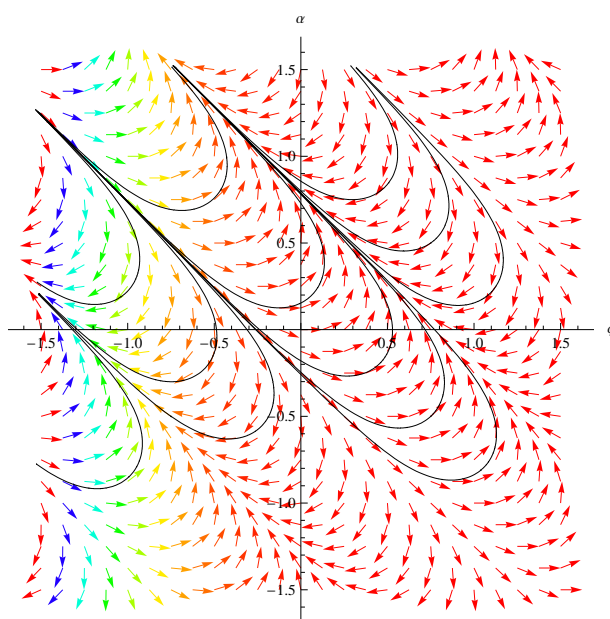


Figura 3.1: Gráfico das trajetórias e do campo de orientações no retrato de fase para o sistema (3.64)-(3.65) com $z = 0$, $V_0 = 1/2$ e $\lambda = \sqrt{6}$.

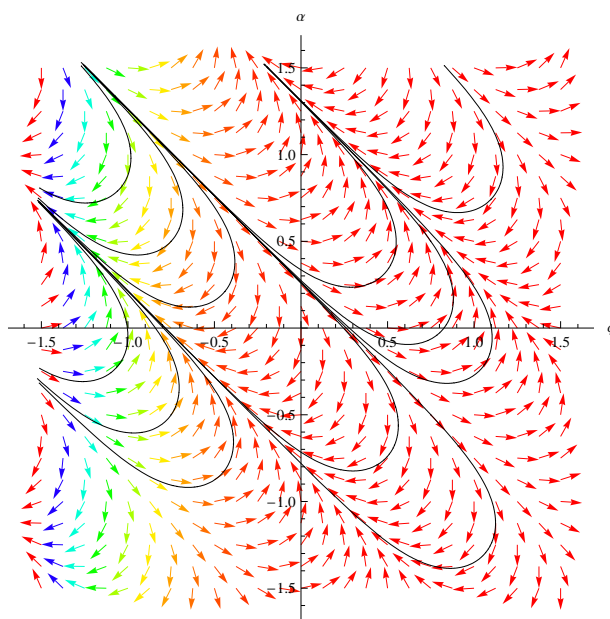


Figura 3.2: Gráfico das trajetórias e do campo de orientações no retrato de fase para o sistema (3.64)-(3.65) com $z = 1$, $V_0 = 1/2$ e $\lambda = \sqrt{6}$.

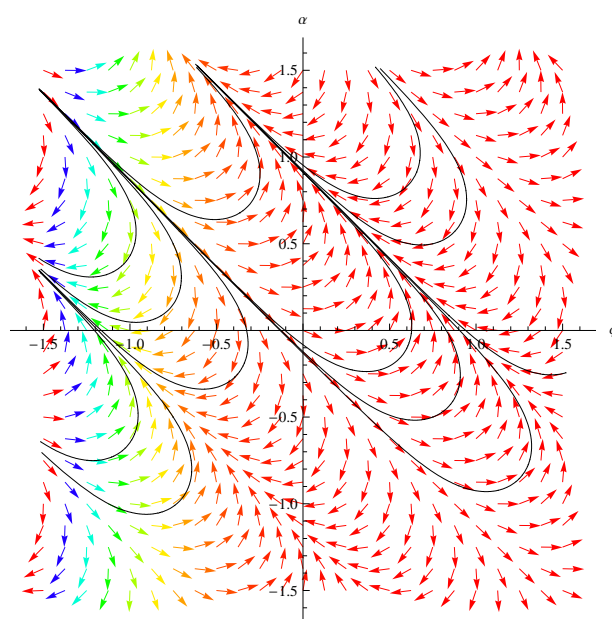


Figura 3.3: Gráfico das trajetórias e do campo de orientações no retrato de fase para o sistema (3.64)-(3.65) com $z = 0.5$, $V_0 = 1/2$ e $\lambda = \sqrt{6}$.

Capítulo 4

Trajетórias Bohmianas e o Big Rip

O surgimento de interpretações alternativas da mecânica quântica padrão se deve ao fato de tal construção, conhecida como interpretação de Copenhague, provocar uma certa inquietude quanto aos seus pilares básicos. Uma das principais representações históricas que refletem este sentimento foi a célebre frase de Einstein “Deus não joga dados”, mostrando sua contrariedade quanto à perda do determinismo para o mundo quântico. É fato estabelecido que a descrição do muito pequeno é diferente das leis que descrevem o mundo clássico, mas isto não quer dizer que a teoria não deva ser descrita por princípios filosóficos básicos. Desta maneira, sem querer alongar os vários questionamentos que permeiam esta discussão, estaremos interessados neste capítulo na teoria causal da mecânica quântica, proposta por Louis de Broglie e pelo naturalizado brasileiro David Bohm [40, 41, 42]. Posteriormente, iremos aplicar tal interpretação à cosmologia quântica obtendo as trajetórias bohmianas para o caso do campo fantasma.

4.1 Mecânica quântica de Bohm-de Broglie

A interpretação de Bohm-de Broglie¹ é conhecida como uma teoria quântica do movimento de ondas e partículas que coexistem, cuja interpretação é *ontológica*, ou seja, os processos físicos ocorrem

¹Para uma abordagem mais completa com várias aplicações, o leitor é convidado a ler o livro do Peter R. Holland [12]

independentemente de qualquer observador ou processo externo ao sistema em estudo. Podemos resumir a natureza desta interpretação para um sistema simples nos seguintes postulados básicos:

(1) O sistema físico é composto por uma função de onda $\psi(\vec{x}, t)$ e por uma partícula, que segue uma trajetória contínua, bem definida $\vec{x}(t)$ e guiada pela função de onda.

(2) A dinâmica da função de onda é dada pela equação de Schroedinger.

(3) A probabilidade de que uma partícula esteja entre os pontos \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ em um dado tempo t é dado por

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x. \quad (4.1)$$

Através do postulado (1), percebemos que a função de onda existe como uma entidade constituinte da realidade, assim como a partícula que segue uma trajetória bem definida. O postulado (2) mostra que a dinâmica ainda se dá através da equação quântica de Schroedinger. Já o postulado (3) deve ser pensado como uma probabilidade de ocorrência das condições iniciais para o sistema e portanto uma condição subsidiária na teoria causal do movimento.

Para começar a construir esta interpretação, iremos escrever a equação de Schroedinger sob a forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \nabla^2 + V \right) \psi, \quad (4.2)$$

onde \mathcal{M} é a massa inercial e V a energia potencial clássica. Escreveremos a função de onda sob a forma polar

$$\psi = R e^{i\frac{S}{\hbar}}, \quad (4.3)$$

com R e S funções de valores reais do espaço e do tempo. Inserindo na eq.(4.2) e separando a parte real da parte imaginária obtem-se as seguintes equações para R e S

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}} - \frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \frac{(\nabla R)^2}{R} + V = 0, \quad (4.4)$$

que é a equação para a parte real e

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{R^2 \nabla S}{\mathcal{M}} \right) = 0, \quad (4.5)$$

para a parte imaginária, a qual pode ser pensada como uma equação de conservação de probabilidade, pois

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 = |R(\vec{x}, t)|^2. \quad (4.6)$$

Podemos identificar a densidade de probabilidade e o fluxo de probabilidade respectivamente por

$$\rho(\vec{x}, t) = R^2(\vec{x}, t), \quad (4.7)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\mathcal{M}} \nabla S, \quad (4.8)$$

e reescrever a eq.(4.5) de uma maneira mais usual como uma equação de conservação

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.9)$$

A grande idéia de Bohm foi reescrever a equação (4.4) como uma equação clássica de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}} + Q + V = 0, \quad (4.10)$$

onde ele imaginou Q como um potencial quântico, dado sob a forma

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (4.11)$$

Com isto, uma importante característica desta interpretação é ganha quando assumimos o limite clássico da aproximação WKB e o comprimento de onda do pacote fica muito maior do que o comprimento de onda individual e portanto o termo $-\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \frac{(\nabla R)^2}{R}$ muito menor do que $\frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}}$. Assim, negligenciando-se estes termos pequenos, a eq.(4.4) torna-se a equação clássica de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}} + V = 0. \quad (4.12)$$

O ganho é entender então que ao anular o potencial quântico Q conseguimos um limite clássico claro e único na interpretação de

Bohm-de Broglie. Uma outra importante característica é que por mais que o potencial clássico V seja nulo, o sistema não poderá ser considerado como livre pois forças no sentido Newtoniano dadas por $-\nabla Q$ ainda agirão no sistema. Tendo identificado a eq.(4.10) como a de Hamilton-Jacobi, somos compelidos a escrever a velocidade e o momento da partícula em termos da fase s como

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \nabla S(\vec{x}, t), \quad (4.13)$$

e

$$\vec{p}(\vec{x}, t) = \nabla S(\vec{x}, t). \quad (4.14)$$

Podemos notar que esta última equação define rigorosamente o momento $\vec{p}(\vec{x}, t)$, do qual temos assim uma trajetória bem definida e denominada como trajetória bohmiana. É instrutivo estabelecer um algoritmo facilitando a aplicação da interpretação nos moldes dados abaixo:

1. Resolver a equação de Schroedinger, obtendo-se a função de onda $\psi(\vec{x}, t)$.
2. Escrever a função de onda em termos das variáveis reais $R(\vec{x}, t)$ e $S(\vec{x}, t)$ como $\psi(\vec{x}, t) = R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}$.
3. Calcular as trajetórias a partir de $\dot{\vec{x}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \nabla S(\vec{x}, t)$. Podemos observar que uma vez que se conhece $\psi(\vec{x}, t)$, as trajetórias são univocamente determinadas pelas condições iniciais, através de uma equação diferencial de primeira ordem.
4. Calcular R^2 e se necessário o potencial quântico Q , que pode ser útil na interpretação dos resultados e na obtenção do limite clássico.

Nesta teoria, o princípio da incerteza de Heisenberg não possui o caracter fundamental que lhe é atribuído na interpretação usual. O princípio apenas se refere sobre a maneira como medimos os observáveis, ou seja, ao que podemos medir, não ao que existe. Para finalizar esta seção, a interpretação de Bohm-de Broglie tem sido chamada de causal pois, uma vez definidas as condições iniciais, está determinada a trajetória da partícula e, neste sentido, a interpretação causal é uma versão realista da mecânica quântica.

4.2 Interpretação de Bohm-de Broglie da Cosmologia Quântica

A interpretação de Copenhagem da mecânica quântica pressupõe necessariamente um mundo clássico que dê suporte às medições dos observáveis do mundo quântico [43] e pressupõe ainda o chamado colapso da função de onda, onde o fato de medir interfere completamente na história do sistema analisado. Desta maneira, se quisermos estudar aspectos quânticos do universo como um todo, não seria possível aplicar a interpretação padrão, uma vez dados os argumentos acima.

Sendo assim, queremos utilizar a interpretação de Bohm-de Broglie na cosmologia quântica [44, 45, 46, 47, 48], por não possuir problemas de aplicação da teoria para o universo, já que não é necessário a divisão do que é observado e do que é medido.

Iremos aplicar a interpretação de Bohm-de Broglie via substituição do funcional de onda por $\psi(h_{ij}, \phi) = Re^{iS/\hbar}$ na eq.(3.31) separando a parte real da imaginária,

$$-2h_{ki}D_j \frac{\delta R(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{kj}} + \frac{\delta R(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (4.15)$$

$$-2h_{ki}D_j \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{kj}} + \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (4.16)$$

de onde podemos perceber que as funções R e S são invariantes sob transformações de coordenadas espaciais. Substituindo também na equação de Wheeler-DeWitt eq.(3.33) e fazendo uma escolha conveniente do fator de ordenamento, obtemos novamente para as partes real e imaginária

$$k^2 G_{ijkl} \left(\frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right) \left(\frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\hbar}} \left(\frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + \sqrt{\hbar} \left(-\frac{{}^3R}{k^2} - \frac{h^{ij}}{2} \partial_i \phi \partial_j \phi + V(\phi) \right) + Q = 0, \quad (4.17)$$

e

$$k^2 G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left(R^2 \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\hbar}} \frac{\delta}{\delta \phi} \left(R^2 \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) = 0, \quad (4.18)$$

onde Q é o potencial quântico que para este caso é dado sob a forma

$$Q = -\frac{\hbar^2}{R} \left(k^2 G_{ijkl} \frac{\delta^2 R}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} - \frac{1}{2\sqrt{\hbar}} \frac{\delta^2 R}{\delta \phi^2} \right). \quad (4.19)$$

A primeira eq.(4.17) é a equação de Hamilton-Jacobi para a relatividade geral com a adição do potencial quântico. Contudo, a segunda eq.(4.18) não pode ser relacionada com uma equação de conservação para a probabilidade, como fizemos na seção anterior. Isto é devido a natureza hiperbólica da métrica de DeWitt G_{ijkl} ². Uma vez relacionado este sistema com a equação de Hamilton-Jacobi, esperando que a 3-métrica, o campo escalar fantasma e seus momentos canônicos sempre existam, somos novamente convidados a identificar as trajetórias através das relações de orientação

$$\pi^{ij} = \frac{\delta S(h_{kl}, \phi)}{\delta h_{ij}}, \quad (4.20)$$

$$\pi_\phi = \frac{\delta S(h_{kl}, \phi)}{\delta \phi}. \quad (4.21)$$

Assim, podemos relacionar a primeira equação com o momento eq.(3.16) e a curvatura extrínseca eq.(3.6) para encontrar a velocidade \dot{h}_{ij} como

$$\dot{h}_{ij} = 2Nk^2 G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + D_i N_j + D_j N_i, \quad (4.22)$$

e relacionar também o momento π_ϕ dado acima com o momento eq.(3.18) para encontrar a velocidade $\dot{\phi}$ como

$$\dot{\phi} = N^i \partial_i \phi - \frac{N}{\sqrt{\hbar}} \frac{\delta S}{\delta \phi}. \quad (4.23)$$

Com isto, as equações (4.22) e (4.23) formariam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que, garantindo a existência de solução, definiriam um conjunto de trajetórias no superespaço para este modelo. Para finalizar esta seção, queremos ressaltar mais vez a característica da interpretação quanto ao seu claro limite clássico quando o potencial quântico $Q \rightarrow 0$ e o seu caráter causal que, uma vez que as relações de orientação fossem estabelecidas com as condições iniciais dadas, as trajetórias do sistema poderiam ser encontradas.

²Para uma abordagem mais completa da interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica no superespaço ver Pinto-Neto [48].

4.3 Evitando o Big-Rip

Sabemos das seções anteriores que num modelo contendo um fluido com $\omega < -1$, o universo clássico está indo ao encontro de uma singularidade chamada de Big Rip, onde a divergência do fator de escala e da densidade de energia são dadas para um tempo futuro finito. Porém, esperamos que efeitos quânticos possam agir nesta região e afetar o futuro do universo. Sendo assim, iremos aplicar a interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica para modelos de minisuperespaço com o campo material dado através de um campo escalar fantasma. Desta forma, faremos o uso direto do algoritmo descrito no final da seção (4.1) e tentaremos interpretar os resultados obtidos.

Partiremos da equação de Wheeler-DeWitt para o minisuperespaço de Friedmann-Robertson-Walker dada pela eq.(3.52) sob a forma

$$\left[\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + V_0 e^{6\alpha - \lambda\sqrt{6}\phi} \right] \psi(\alpha, \phi) = 0. \quad (4.24)$$

Uma solução pode ser obtida percebendo que a ação clássica (3.57) satisfaz exatamente a equação acima [36]. Assim, o funcional de onda pode ser escrito como

$$\psi(u, v) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} [zu - \sqrt{(1-z^2)}v]} + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} [zu - \sqrt{(1-z^2)}v]}, \quad (4.25)$$

onde as coordenadas (u,v) são funções de (α, ϕ) dadas através de eq.(3.53) e eq.(3.54). Estamos interessados em soluções sob a forma de uma superposição gaussiana da solução eq.(4.25). Assim escreveremos $\psi(u, v)$ como

$$\psi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} dz A(z) \left\{ C_1 e^{\frac{i}{\hbar} [zu - \sqrt{(1-z^2)}v]} + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} [zu - \sqrt{(1-z^2)}v]} \right\}, \quad (4.26)$$

onde $A(z)$ é a amplitude da gaussiana que é escrita em termos da largura σ e do valor médio \bar{z} através de

$$A(z) = \frac{\hbar}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2} \hbar^2}. \quad (4.27)$$

Precisamos encontrar uma expressão analítica para o funcional de onda ψ . Para isto temos de resolver a integral eq.(4.26). Contudo,

uma solução para esta integral não pode ser encontrada nas tabelas conhecidas. Sendo assim, faremos a seguinte consideração: vamos imaginar que o pacote esteja bastante concentrado em torno do valor médio \bar{z} , ou seja, a largura σ seja suficientemente pequena. Desta forma, podemos fazer uma expansão em Taylor do argumento S_{0z} nos arredores de \bar{z} onde

$$S_{0z} = zu - \sqrt{(1-z^2)}v. \quad (4.28)$$

Assim, a expansão fica

$$S_{0z} \approx S_{0z}(\bar{z}) + S'_{0z}(\bar{z})(z - \bar{z}) + S''_{0z}(\bar{z})\frac{(z - \bar{z})^2}{2} + O[(z - \bar{z})^3], \quad (4.29)$$

onde a linha denota diferenciação em relação a z . Chamando $S_{0z}(\bar{z}) = S_0$ e substituindo a expressão acima na eq.(4.26) para o caso em que a constante $C_2 = 0$ e desprezando termos de terceira ordem, obtemos

$$\psi = C_1 \frac{\hbar}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2} \hbar^2 + \frac{i}{\hbar} S_0 + S'_{0z}(z-\bar{z}) + S''_{0z} \frac{(z-\bar{z})^2}{2}}. \quad (4.30)$$

fazendo $z - \bar{z} = y$ e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\psi = C_1 \frac{\hbar}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\left[\left(\frac{1-i\sigma^2\hbar S''_0}{2\sigma^2\hbar^2} \right) y^2 - \frac{iS'_0}{\hbar} y - \frac{iS_0}{\hbar} \right]}. \quad (4.31)$$

Esta integral é da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(Ay^2 + By + C)} dy = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2 - 4AC}{4A}}, \quad (4.32)$$

com

$$\mathcal{A} = \frac{1 - i\sigma^2\hbar S''_0}{2\sigma^2\hbar^2}, \mathcal{B} = -\frac{iS'_0}{\hbar}, \mathcal{C} = -\frac{iS_0}{\hbar}. \quad (4.33)$$

Então, substituindo as últimas expressões (4.32) e (4.33) na integral para o funcional de onda (4.31) encontra-se que [36]

$$\psi = C_1 \hbar^2 \sqrt{\frac{1}{1 - i\sigma^2\hbar S''_0}} \exp \left[\frac{iS_0}{\hbar} - \frac{S'^2_0}{2(\sigma^{-2} - i\hbar S''_0)} \right]. \quad (4.34)$$

Com uma expressão analítica para o funcional em mãos, podemos agora indentificá-lo com $\psi(u, v) = R(u, v) e^{i\frac{S(u, v)}{\hbar}}$. Para isto, colocaremos o funcional (4.34) em uma forma polar. Desta maneira,

eliminando-se os números complexos nos denominadores em $\psi(u, v)$ dado acima, obtemos

$$\psi = \tilde{C}_1 \exp \left[i \frac{S_0}{\hbar} - \frac{S_0'^2 \sigma^{-2}}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} - \frac{i \hbar S_0'^2 S_0''}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} \right], \quad (4.35)$$

onde

$$\tilde{C}_1 = C_1 \hbar^2 \sqrt{\frac{1}{1 + \sigma^4 \hbar^2 S_0''^2}} \sqrt{1 + i \sigma^2 \hbar S_0''}. \quad (4.36)$$

Notando que

$$\sqrt{1 + i \sigma^2 \hbar S_0''} = \left(1 + \sigma^4 \hbar^2 S_0''^2\right)^{1/4} \exp \left[\frac{i}{2} \arctan \left(\sigma^2 \hbar S_0'' \right) \right], \quad (4.37)$$

encontramos que o funcional de onda já pode ser escrito em sua forma polar $\psi = R e^{i \frac{S}{\hbar}}$ com

$$R = \frac{C_1 \hbar^2}{(1 + \sigma^4 \hbar^2 S_0''^2)^{1/4}} \exp \left[- \frac{S_0'^2 \sigma^{-2}}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} \right], \quad (4.38)$$

e

$$S = S_0 - \frac{\hbar^2 S_0'^2 S_0''}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} + \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\sigma^2 \hbar S_0'' \right). \quad (4.39)$$

Usando a equação (4.28), podemos calcular S_0 , S_0' e S_0'' , chamando \bar{z} de z e obtendo

$$S_0 = zu - \sqrt{(1 - z^2)}v, \quad (4.40)$$

$$S_0' = u + \frac{z}{\sqrt{(1 - z^2)}}v, \quad (4.41)$$

$$S_0'' = \frac{v}{(1 - z^2)^{3/2}}. \quad (4.42)$$

De posse das expressões acima, podemos substituí-las na fase (4.39) e escrevê-la em termos dos parâmetros u e v . Assim

$$S(u, v) = zu - \frac{v}{\sqrt{m}} - \frac{m^{3/2} \hbar^2 u^2 v + m^{5/2} \hbar^2 z^2 v^3 + 2m^2 \hbar^2 z u v^2}{2(\sigma^{-4} + m^3 \hbar^2 v^2)} + \frac{\hbar}{2} \arctan \left(m^{3/2} \sigma^2 \hbar v \right), \quad (4.43)$$

onde $m = (1 - z^2)^{-1}$. De uma maneira análoga à feita na seção (3.4), os momentos e as velocidades conjugadas às coordenadas α e ϕ podem ser calculados através de

$$\begin{aligned}\pi_\alpha &= \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ &= \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi_\phi &= \frac{\partial S}{\partial \phi}, \\ &= \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial S}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

Calculando separadamente $\frac{\partial S}{\partial u}$ e $\frac{\partial S}{\partial v}$ a partir da eq.(4.43), encontramos que

$$\frac{\partial S}{\partial u} = z - \frac{2m^{3/2}\sigma^4\hbar^2 uv + 2m^2\sigma^4\hbar^2 zv^2}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)}, \quad (4.44)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{m^{3/2}\sigma^4\hbar^2 u^2 + 3m^{5/2}\sigma^4\hbar^2 z^2 v^2 + 4m^2\sigma^4\hbar^2 zuv}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \\ &+ \frac{2m^{9/2}\sigma^8\hbar^4 u^2 v^2 + 2m^{11/2}\sigma^8\hbar^4 z^2 v^4 + 4m^5\sigma^8\hbar^4 zuv^3}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)^2} \\ &+ \frac{m^{3/2}\sigma^2\hbar^2}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)}.\end{aligned} \quad (4.45)$$

Lembrando que u e v se escrevem em termos de α e ϕ como

$$\begin{aligned}u &= \frac{\sqrt{2V_0}}{3} \frac{e^\xi}{1 + \frac{\lambda^2}{6}} \left[\cos(\gamma) + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \text{sen}(\gamma) \right], \\ v &= \frac{\sqrt{2V_0}}{3} \frac{e^\xi}{1 + \frac{\lambda^2}{6}} \left[\text{sen}(\gamma) - \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \cos(\gamma) \right]\end{aligned}$$

onde $\xi = 3\alpha - \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi$ e $\gamma = 3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha$, então podemos encontrar as quantidades

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \sqrt{2V_0} e^\xi \cos(\gamma), \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \sqrt{2V_0} e^\xi \text{sen}(\gamma), \quad (4.47)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = -\sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma), \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = \sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma). \quad (4.49)$$

Substituindo nos momentos π_α e π_ϕ , obtemos

$$\begin{aligned} \pi_\alpha = & \left[z - \frac{2m^{3/2}\sigma^4\hbar^2 uv + 2m^2\sigma^4\hbar^2 zv^2}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \right] \sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) \\ & + \left[-\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{m^{3/2}\sigma^4\hbar^2 u^2 + 3m^{5/2}\sigma^4\hbar^2 z^2 v^2 + 4m^2\sigma^4\hbar^2 zuv}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \right. \\ & + \frac{2m^{9/2}\sigma^8\hbar^4 u^2 v^2 + 2m^{11/2}\sigma^8\hbar^4 z^2 v^4 + 4m^5\sigma^8\hbar^4 zuv^3}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)^2} \\ & \left. + \frac{m^{3/2}\sigma^2\hbar^2}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \right] \sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma). \end{aligned} \quad (4.50)$$

e

$$\begin{aligned} \pi_\phi = & - \left[z - \frac{2m^{3/2}\sigma^4\hbar^2 uv + 2m^2\sigma^4\hbar^2 zv^2}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \right] \sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma) \\ & + \left[-\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{m^{3/2}\sigma^4\hbar^2 u^2 + 3m^{5/2}\sigma^4\hbar^2 z^2 v^2 + 4m^2\sigma^4\hbar^2 zuv}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \right. \\ & + \frac{2m^{9/2}\sigma^8\hbar^4 u^2 v^2 + 2m^{11/2}\sigma^8\hbar^4 z^2 v^4 + 4m^5\sigma^8\hbar^4 zuv^3}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)^2} \\ & \left. + \frac{m^{3/2}\sigma^2\hbar^2}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \right] \sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Escrevendo os momentos de uma maneira conveniente como

$$\begin{aligned} \pi_\alpha = & z\sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma) \\ & + \sigma^2\hbar^2 \left[-\frac{2m^{3/2}\sigma^2 uv + 2m^2\sigma^2 zv^2}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) \right. \\ & - \frac{m^{3/2}\sigma^2 u^2 + 3m^{5/2}\sigma^2 z^2 v^2 + 4m^2\sigma^2 zuv}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)} \sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma) \\ & \left. + \frac{2m^{9/2}\sigma^6\hbar^2 u^2 v^2 + 2m^{11/2}\sigma^6\hbar^2 z^2 v^4 + 4m^5\sigma^6\hbar^2 zuv^3}{2(1+m^3\sigma^4\hbar^2 v^2)^2} \sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{m^{3/2}}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2v^2)} \sqrt{2V_0} e^\xi \text{sen}(\gamma) \Big], \quad (4.52)$$

e

$$\begin{aligned} \pi_\phi = & -z\sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) \\ & + \sigma^2\hbar^2 \left[\frac{2m^{3/2}\sigma^2uv + 2m^2\sigma^2zv^2}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2v^2)} \sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma) \right. \\ & - \frac{m^{3/2}\sigma^2u^2 + 3m^{5/2}\sigma^2z^2v^2 + 4m^2\sigma^2zuv}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2v^2)} \sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) \\ & + \frac{2m^{9/2}\sigma^6\hbar^2u^2v^2 + 2m^{11/2}\sigma^6\hbar^2z^2v^4 + 4m^5\sigma^6\hbar^2zuv^3}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2v^2)^2} \sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) \\ & \left. + \frac{m^{3/2}}{2(1 + m^3\sigma^4\hbar^2v^2)} \sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) \right], \quad (4.53) \end{aligned}$$

e fazendo $\sigma \rightarrow 0$, encontramos

$$\pi_\alpha = z\sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma), \quad (4.54)$$

$$\pi_\phi = -z\sqrt{2V_0}e^\xi \text{sen}(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{2V_0}e^\xi \text{cos}(\gamma). \quad (4.55)$$

Sendo que as velocidades se relacionam com os momentos por

$$\pi_\alpha = -e^{3\alpha}\dot{\alpha}, \quad (4.56)$$

$$\pi_\phi = -e^{3\alpha}\dot{\phi}, \quad (4.57)$$

então, podemos encontrar para as velocidades as expressões

$$\dot{\alpha} = \sqrt{2V_0}e^{-\frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi} \left[\sqrt{1 - z^2} \text{sen} \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) - z \text{cos} \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) \right], \quad (4.58)$$

e

$$\dot{\phi} = \sqrt{2V_0}e^{-\frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi} \left[z \text{sen} \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) + \sqrt{1 - z^2} \text{cos} \left(3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) \right], \quad (4.59)$$

que são idênticas as expressões clássicas eq.(3.64) e eq.(3.65). Isto tem o importante significado de que o limite clássico é atingido claramente quando anulamos a largura do pacote σ . É interessante notar

que isso está consistente com a interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica pois o potencial quântico Q , dado através de segundas derivadas de R , anula-se quando fazemos

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} R = C_1 \hbar^2, \quad (4.60)$$

na eq.(4.38).

Tendo encontrado o limite clássico, continuaremos a estudar o caso quântico arrumando as equações (4.51) e (4.52) em termos semelhantes a u e v e suas potências ; assim, fazendo $\hbar = 1$ e $V_0 = 1/2$, temos para os momentos

$$\begin{aligned} \pi_\alpha = & \left[\frac{(2z) + (4m^3\sigma^4z - 2m^2\sigma^4z)v^2 - (2m^{3/2}\sigma^4)uv}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(2m^6\sigma^8z - 2m^5\sigma^8z)v^4 - (2m^{9/2}\sigma^8)uv^3}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right] e^\xi \cos(\gamma) \\ & - \left[\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{m}} - m^{3/2}\sigma^2\right) + (4m^{5/2}\sigma^4 + 3m^{5/2}\sigma^4z^2 - m^{9/2}\sigma^6)v^2}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(m^{3/2}\sigma^4)u^2 + (4m^2\sigma^4z)uv + (2m^{11/2}\sigma^8 + m^{11/2}\sigma^8z^2)v^4}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(m^{9/2}\sigma^8)u^2v^2}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right] e^\xi \sin(\gamma), \end{aligned} \quad (4.61)$$

e

$$\begin{aligned} \pi_\phi = & - \left[\frac{(2z) + (4m^3\sigma^4z - 2m^2\sigma^4z)v^2 - (2m^{3/2}\sigma^4)uv}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(2m^6\sigma^8z - 2m^5\sigma^8z)v^4 - (2m^{9/2}\sigma^8)uv^3}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right] e^\xi \sin(\gamma) \\ & - \left[\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{m}} - m^{3/2}\sigma^2\right) + (4m^{5/2}\sigma^4 + 3m^{5/2}\sigma^4z^2 - m^{9/2}\sigma^6)v^2}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(m^{3/2}\sigma^4)u^2 + (4m^2\sigma^4z)uv + (2m^{11/2}\sigma^8 + m^{11/2}\sigma^8z^2)v^4}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(m^{9/2}\sigma^8)u^2v^2}{2(1 + m^3\sigma^4v^2)^2} \right] e^\xi \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Como as quantidades z , m e σ são consideradas constantes, renomearemos os termos multiplicativos a u , a v e as potências de u e v . Assim $a = (2z)$, $b = (4m^3\sigma^4z - 2m^2\sigma^4z)$, $c = (2m^{3/2}\sigma^4)$, $d = (2m^6\sigma^8z - 2m^5\sigma^8z)$, $q = (2m^{9/2}\sigma^8)$, $f = \left(\frac{2}{\sqrt{m}} - m^{3/2}\sigma^2\right)$, $g = (4m^{5/2}\sigma^4 + 3m^{5/2}\sigma^4z^2 - m^{9/2}\sigma^6)$, $h = (m^{3/2}\sigma^4)$, $i = (4m^2\sigma^4k)$, $j = (2m^{11/2}\sigma^8 + m^{11/2}\sigma^8z^2)$ e $p = (m^{9/2}\sigma^8)$. Neste momento, calcularemos as potências de u e v estabelecidas nos momentos acima, em termos das coordenadas α e ϕ , então dado que

$$u = \frac{e^\xi}{6} [\cos(\gamma) + \text{sen}(\gamma)], \quad (4.63)$$

$$v = \frac{e^\xi}{6} [\text{sen}(\gamma) - \cos(\gamma)], \quad (4.64)$$

onde foi assumido que $\lambda = \sqrt{6}$, encontramos

$$\begin{aligned} uv &= \frac{e^{2\xi}}{36} [\text{sen}^2(\gamma) - \cos^2(\gamma)], \\ u^2 &= \frac{e^{2\xi}}{36} [1 + 2\text{sen}(\gamma)\cos(\gamma)], \\ v^2 &= \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - 2\text{sen}(\gamma)\cos(\gamma)], \\ u^2v^2 &= \frac{e^{4\xi}}{1296} [1 - 4\text{sen}^2(\gamma)\cos^2(\gamma)], \\ v^4 &= \frac{e^{4\xi}}{1296} [1 + 4\text{sen}^2(\gamma)\cos^2(\gamma) - 4\text{sen}(\gamma)\cos(\gamma)], \\ uv^3 &= \frac{e^{4\xi}}{1296} [-1 + 2\text{sen}^2(\gamma) - 2\text{sen}^3(\gamma)\cos(\gamma) + 2\text{sen}(\gamma)\cos^3(\gamma)]. \end{aligned}$$

Com isto, utilizando-se das últimas considerações e resultados, aplicando-os nas equações (4.61) e (4.62), distribuindo-se os termos e posteriormente agrupando-se os semelhantes, encontramos que

$$\begin{aligned} \pi_\alpha &= e^\xi \frac{a\cos(\gamma) - f\text{sen}(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3\sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \text{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\ &+ \frac{e^{3\xi}}{36} \left\{ \frac{b\cos(\gamma) - (g+h)\text{sen}(\gamma) + (-2b+i)\text{sen}(\gamma)\cos^2(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3\sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \text{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left. - (c - 2g + 2h) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma) + c \cos^3(\gamma) - i \operatorname{sen}^3(\gamma) \right\}}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\
& + \frac{e^{5\xi} \left\{ \frac{(d + q) \cos(\gamma) - (j - p) \operatorname{sen}(\gamma) + 4d \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos^3(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\
& + \frac{-4d \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma) + (-2q + 4j) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\
& \left. + \frac{(2q - 4j - 4p) \operatorname{sen}^3(\gamma) \cos^2(\gamma) - 2q \operatorname{sen}(\gamma) \cos^4(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\}, \quad (4.65)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\pi_\phi = & -e^\xi \frac{a \operatorname{sen}(\gamma) + f \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\
& - \frac{e^{3\xi} \left\{ \frac{b \operatorname{sen}(\gamma) + (g + h) \cos(\gamma) + (-2b + i) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\
& + \frac{\left. + (c - 2g + 2h) \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma) - c \operatorname{sen}^3(\gamma) - i \cos^3(\gamma) \right\}}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\
& - \frac{e^{5\xi} \left\{ \frac{(d - q) \operatorname{sen}(\gamma) + (j - p) \cos(\gamma) + 4d \operatorname{sen}^3(\gamma) \cos^2(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\
& + \frac{-4d \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma) + (2q - 4j) \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\
& \left. + \frac{(-2q + 4j + 4p) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos^3(\gamma) + 2q \operatorname{sen}^4(\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\} \quad (4.66)
\end{aligned}$$

onde, na última expressão foi utilizado a seguinte identidade trigonométrica

$$-2q \operatorname{sen}^3(\gamma) - 4j \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma) = (2q - 4j) \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma) - 2q \operatorname{sen}(\gamma).$$

Então, lembrando que os momentos se relacionam com as velocidades através de

$$\pi_\alpha = -e^{3\alpha} \dot{\alpha},$$

e

$$\pi_\phi = -e^{3\alpha}\dot{\phi},$$

podemos encontrar que as velocidades $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$ são

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & e^{-3\phi} \frac{f \operatorname{sen}(\gamma) - a \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\ & + \frac{e^{6\alpha-9\phi}}{36} \left\{ \frac{-b \cos(\gamma) + (g+h) \operatorname{sen}(\gamma) - (-2b+i) \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\ & + \left. \frac{(c-2g+2h) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma) - c \cos^3(\gamma) + i \operatorname{sen}^3(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\} \\ & + \frac{e^{12\alpha-15\phi}}{1296} \left\{ \frac{-(d+q) \cos(\gamma) + (j-p) \operatorname{sen}(\gamma) - 4d \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos^3(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\ & + \frac{4d \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma) - (-2q+4j) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\ & + \left. \frac{-(2q-4j-4p) \operatorname{sen}^3(\gamma) \cos^2(\gamma) + 2q \operatorname{sen}(\gamma) \cos^4(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\}, \quad (4.67) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & e^{-3\phi} \frac{a \operatorname{sen}(\gamma) + f \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\ & + \frac{e^{6\alpha-9\phi}}{36} \left\{ \frac{b \operatorname{sen}(\gamma) + (g+h) \cos(\gamma) + (-2b+i) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\ & + \left. \frac{(c-2g+2h) \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma) - c \operatorname{sen}^3(\gamma) - i \cos^3(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\} \\ & + \frac{e^{12\alpha-15\phi}}{1296} \left\{ \frac{(d-q) \operatorname{sen}(\gamma) + (j-p) \cos(\gamma) + 4d \operatorname{sen}^3(\gamma) \cos^2(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\ & + \left. \frac{-4d \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos(\gamma) + (2q-4j) \operatorname{sen}(\gamma) \cos^2(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(-2q + 4j + 4p) \operatorname{sen}^2(\gamma) \cos^3(\gamma) + 2q \operatorname{sen}^4(\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + m^3 \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2}, \quad (4.68)$$

onde $\gamma = 3\alpha + 3\phi$, $m^{-1} = 1 - z^2$ e todas as letras latinas são constantes escritas em termos do valor médio de z . Seria interessante encontrar uma solução exata para o sistema de equações diferenciais acima. Porém isto não pode ser feito. Vamos então analisar numericamente os casos $z = 1, 1/2, 0$ e compará-los com os resultados clássicos da seção 3.

Para o caso $z = 1$, percebemos um comportamento divergente para as velocidades $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$. Deste modo, recorreremos as funções amplitude R e fase S para obter informações a respeito deste caso. Fazendo o limite de R eq.(4.38) para $z \rightarrow 1$, obtemos

$$\lim_{z \rightarrow 1} R = 0, \quad (4.69)$$

o que significa que o potencial quântico Q se anula, mostrando não haver efeitos quânticos para $z \rightarrow 1$. Calculando $z \rightarrow 1$ para a fase eq.(4.39) descobrimos que

$$\lim_{z \rightarrow 1} S = u + \frac{\hbar\pi}{4}, \quad (4.70)$$

onde u é dado pela eq.(3.53); desta forma, se fizermos um cálculo direto com a expressão acima, poderemos descobrir que as velocidades encontradas são

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\phi} \cos(3\phi + 3\alpha), \quad (4.71)$$

e

$$\dot{\phi} = e^{-3\phi} \operatorname{sen}(3\phi + 3\alpha), \quad (4.72)$$

exatamente iguais às expressões clássicas (3.64) e (3.65) para $\lambda = \sqrt{6}$, $V_0 = 1/2$ e $z = 1$, mostrando que está em concordância com o fato de o potencial quântico ser nulo e reproduzindo a fig.(3.2).

Para o caso $z = 0.5$, teremos que substituir este valor em todas as constantes nas equações (4.67) e (4.68) encontrando $a = 1$, $b = \frac{80}{27}\sigma^4$, $c = \frac{16\sqrt{3}}{9}\sigma^4$, $d = \frac{1024}{729}\sigma^8$, $q = \frac{1024}{243}\sigma^8$, $f = \sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{9}\sigma^2$, $g = \frac{152\sqrt{3}}{27}\sigma^4 - \frac{512\sqrt{3}}{243}\sigma^6$, $h = \frac{8\sqrt{3}}{9}\sigma^4$, $i = \frac{32}{9}\sigma^4$, $j = \frac{4608\sqrt{3}}{729}\sigma^8$ e

$p = \frac{512\sqrt{3}}{243}\sigma^8$. Então, procedendo com a substituição destas constantes, encontraremos para as velocidades $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$ as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} = & e^{-3\phi} \frac{\left(1 - \frac{8}{9}\sigma^2\right) \sqrt{3} \operatorname{sen}(\gamma) - \cos(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \\
& + \frac{e^{6\alpha-9\phi}}{36} \left\{ \frac{-\left(\frac{80+48\sqrt{3}}{27}\right) \sigma^4 \cos(\gamma) + \left(\frac{176\sqrt{3}+96}{27}\sigma^4 - \frac{512\sqrt{3}}{243}\sigma^6\right) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right. \\
& \left. + \frac{-\frac{16}{27}\sigma^4 \operatorname{sen}(2\gamma) \cos(\gamma) + \left(-\frac{80\sqrt{3}}{27}\sigma^4 + \frac{512\sqrt{3}}{243}\sigma^6\right) \operatorname{sen}(2\gamma) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right\} \\
& + \frac{e^{12\alpha-15\phi}}{1296} \left\{ \frac{-\frac{4096}{729}\sigma^8 \cos(\gamma) + \frac{5120}{729}\sigma^8 \operatorname{sen}(2\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right. \\
& \left. + \frac{-\frac{1024}{729}\sigma^8 \operatorname{sen}^2(2\gamma) \cos(\gamma) + \left(\frac{3072-9216\sqrt{3}}{729}\right) \sigma^8 \operatorname{sen}(2\gamma) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{3072}{729}\sigma^8 \operatorname{sen}(\gamma) + \left(\frac{-3072+6144\sqrt{3}}{729}\right) \sigma^8 \operatorname{sen}^2(2\gamma) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right\}, \quad (4.73)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} = & e^{-3\phi} \frac{\left(1 - \frac{8}{9}\sigma^2\right) \sqrt{3} \cos(\gamma) + \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \\
& + \frac{e^{6\alpha-9\phi}}{36} \left\{ \frac{\left(\frac{80-48\sqrt{3}}{27}\right) \sigma^4 \operatorname{sen}(\gamma) + \left(\frac{176\sqrt{3}-96}{27}\sigma^4 - \frac{512\sqrt{3}}{243}\sigma^6\right) \cos(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{16}{27}\sigma^4 \operatorname{sen}(2\gamma) \operatorname{sen}(\gamma) + \left(-\frac{80\sqrt{3}}{27}\sigma^4 + \frac{512\sqrt{3}}{243}\sigma^6\right) \operatorname{sen}(2\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right\} \\
& + \frac{e^{12\alpha-15\phi}}{1296} \left\{ \frac{-\frac{2048}{729}\sigma^8 \operatorname{sen}(\gamma) - \frac{1024}{729}\sigma^8 \operatorname{sen}(2\gamma) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)]\right\}^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{1024}{729} \sigma^8 \operatorname{sen}^2(2\gamma) \operatorname{sen}(\gamma) + \left(\frac{3072-9216\sqrt{3}}{729}\right) \sigma^8 \operatorname{sen}(2\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\
& + \frac{\frac{3072}{729} \sqrt{3} \sigma^8 \cos(\gamma) + \left(\frac{-3072+6144\sqrt{3}}{729}\right) \sigma^8 \operatorname{sen}^2(2\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{64}{27} \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \Bigg\}, \quad (4.74)
\end{aligned}$$

onde, além da substituição, houve transformações trigonométricas que deixaram as expressões mais resumidas. Assim, podemos construir um gráfico do campo de velocidades para este sistema, fig.(4.1), e descobrir que regiões de Big Rip ($\alpha \rightarrow \infty$ e $\phi \rightarrow -\infty$) podem ser evitadas com o retorno das setas. Outra informação importante é a respeito do parâmetro σ , reconhecido anteriormente como o fator que leva o sistema para o limite clássico. O interessante é que cada vez que diminuimos o seu valor, o ponto de retorno, com as setas formando um circuito fechado mostrado na fig.(4.1), tende a subir mais e mais. Desta forma, se fizermos $\sigma \rightarrow 0$, perceberemos que este ponto de retorno irá para regiões muito altas, restando apenas o gráfico clássico fig.(3.3).

O caso mais interessante e com efeitos quânticos mais visíveis é aquele em que $z = 0$. Utilizando esse valor no sistema (4.67)-(4.68) e fazendo algumas transformações trigonométricas, encontramos para as velocidades

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= e^{-3\phi} \frac{(2 - \sigma^2) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\
&+ \frac{e^{6\alpha-9\phi}}{36} \left\{ \frac{-2\sigma^4 \cos(\gamma) + (5\sigma^4 - \sigma^6) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\
&+ \left. \frac{(\sigma^6 - \sigma^4) \operatorname{sen}(2\gamma) \operatorname{sen}(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\} \\
&+ \frac{e^{12\alpha-15\phi}}{1296} \left\{ \frac{-2\sigma^8 \cos(\gamma) + \sigma^8 \operatorname{sen}(\gamma) + 2\sigma^8 \operatorname{sen}(2\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\}
\end{aligned}$$

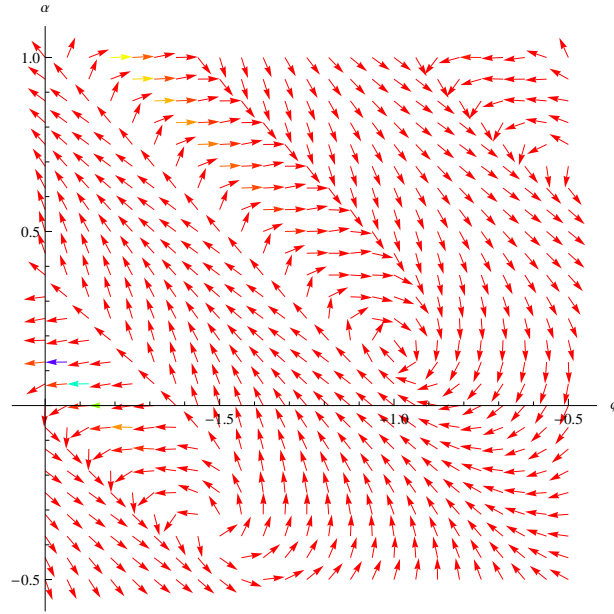


Figura 4.1: Gráfico do campo de orientações para o sistema (4.73)-(4.74) com $\sigma = 0.5$, $V_0 = 1/2$ e $\lambda = \sqrt{6}$.

$$+ \frac{-2\sigma^8 \text{sen}(2\gamma) \text{sen}(\gamma) + \sigma^8 \text{sen}^2(2\gamma) \text{sen}(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \text{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \Bigg\}, \quad (4.75)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & e^{-3\phi} \frac{(2 - \sigma^2) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \text{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \\ & + \frac{e^{6\alpha - 9\phi}}{36} \left\{ \frac{-2\sigma^4 \text{sen}(\gamma) + (5\sigma^4 - \sigma^6) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \text{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \\ & \left. + \frac{(\sigma^6 - \sigma^4) \text{sen}(2\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \text{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right\} \\ & + \frac{e^{12\alpha - 15\phi}}{1296} \left\{ \frac{-2\sigma^8 \text{sen}(\gamma) + \sigma^8 \cos(\gamma) + 2\sigma^8 \text{sen}(2\gamma) \text{sen}(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \text{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{-2\sigma^8 \operatorname{sen}(2\gamma) \cos(\gamma) + \sigma^8 \operatorname{sen}^2(2\gamma) \cos(\gamma)}{2 \left\{ 1 + \sigma^4 \frac{e^{2\xi}}{36} [1 - \operatorname{sen}(2\gamma)] \right\}^2} \}, \quad (4.76)$$

de onde podemos construir a fig.(4.2). Podemos perceber claramente que as setas que deveriam subir para regiões de Big Rip retornam, fazendo um circuito fechado identificado pela trajetória. Da mesma maneira anterior, quando fazemos $\sigma \rightarrow 0$, o ponto de retorno tende para regiões muito altas e restando apenas a fig.(3.1) o que evidencia graficamente o limite clássico mais uma vez.

Para nos certificarmos de que o Big Rip está sendo evitado real-

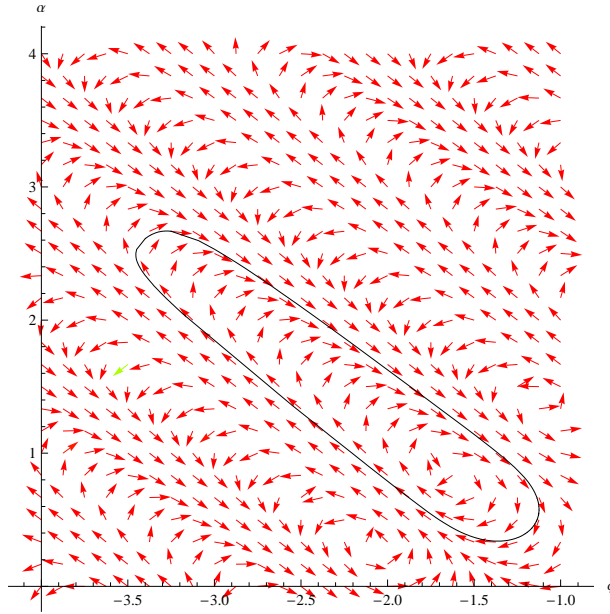


Figura 4.2: Gráfico de uma possível trajetória com o campo de orientações para o sistema (4.75)-(4.76) com $\sigma = 0.1$, $V_0 = 1/2$ e $\lambda = \sqrt{6}$.

mente, iremos fazer uma aproximação de $\phi \rightarrow -\infty$ para este caso $z = 0$ através da fase eq.(4.39). Posteriormente analisaremos o gráfico resultante e estudaremos a estabilidade das trajetórias. Assim, se tomarmos o valor $z = 0$ na equação (4.39) encontraremos

$$S = -v - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\sigma^4 v u^2}{1 + \sigma^4 \hbar^2 v^2} + \frac{\hbar}{2} \arctan(\sigma^2 \hbar v). \quad (4.77)$$

Calculando as quantidades $\frac{\partial S}{\partial u}$ e $\frac{\partial S}{\partial v}$, obtemos

$$\frac{\partial S}{\partial u} = -\frac{\hbar^2 uv}{\sigma^{-4} + \hbar^2 v^2} \quad (4.78)$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial v} = -1 - \frac{\hbar^2 u^2}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 v^2)} + \frac{\hbar^4 u^2 v^2}{(\sigma^{-4} + \hbar^2 v^2)^2} + \frac{\sigma^{-2} \hbar^2}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 v^2)}. \quad (4.79)$$

Fazendo o limite de $\phi \rightarrow -\infty$ na duas expressões acima, encontramos que

$$\lim_{\phi \rightarrow -\infty} \frac{\partial S}{\partial u} = -\frac{u}{v}, \quad (4.80)$$

e

$$\lim_{\phi \rightarrow -\infty} \frac{\partial S}{\partial v} = -1 + \frac{u^2}{2v^2}. \quad (4.81)$$

É importante notar que esta aproximação é independente do parâmetro σ . Então, utilizando-se dos resultados acima e calculando-se as velocidades $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$ da mesma maneira padrão já realizada, encontramos

$$\dot{\alpha}|_{\lim \phi \rightarrow -\infty} = e^{-3\phi} \frac{2\cos^3(3\alpha + 3\phi) + \text{sen}(3\alpha + 3\phi) - 4\cos(3\alpha + 3\phi)}{2 - 2\text{sen}(6\alpha + 6\phi)}, \quad (4.82)$$

e

$$\dot{\phi}|_{\lim \phi \rightarrow -\infty} = e^{-3\phi} \frac{2\text{sen}^3(3\alpha + 3\phi) + \cos(3\alpha + 3\phi) - 4\text{sen}(3\alpha + 3\phi)}{2 - 2\text{sen}(6\alpha + 6\phi)}, \quad (4.83)$$

onde foram atribuídos os valores $V_0 = 1/2$, $\lambda = \sqrt{6}$ e $\hbar = 1$. Então, construindo um gráfico de trajetórias e campo de orientações, resultando na fig.(4.3), perceberemos que todas as trajetórias retornam, evidenciando que o Big Rip tende a ser evitado. Então, para saber como isto acontece, estudaremos a estabilidade do sistema eqs.(4.82)-(4.83). Sendo assim, dividindo as equações acima, encontramos

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = \frac{2\cos^3(3\alpha + 3\phi) + \text{sen}(3\alpha + 3\phi) - 4\cos(3\alpha + 3\phi)}{2\text{sen}^3(3\alpha + 3\phi) + \cos(3\alpha + 3\phi) - 4\text{sen}(3\alpha + 3\phi)}, \quad (4.84)$$

e se levarmos em conta que a solução clássica pode ser posta na forma $3\alpha + 3\phi = c$, onde c é uma constante qualquer, podemos concluir

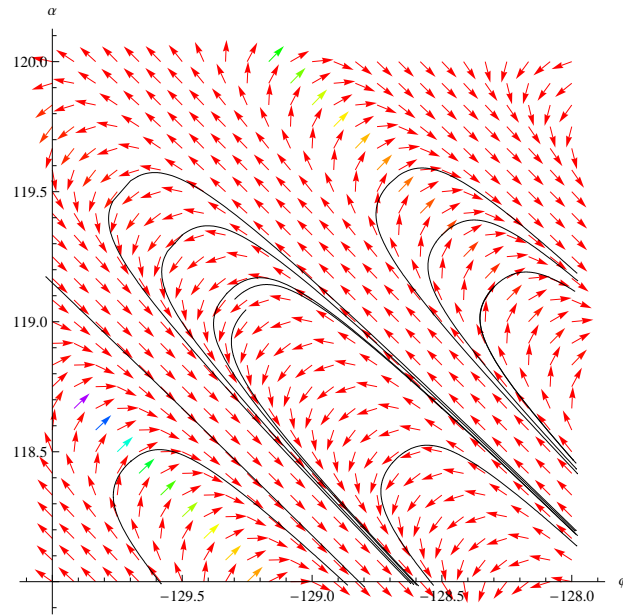


Figura 4.3: Gráfico das trajetórias e do campo de orientações para o sistema (4.82)-(4.83).

que $\frac{d\alpha}{d\phi} = -1$. Colocando estas duas últimas informações na equação acima e fazendo transformações trigonométricas, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}(c) - 2\operatorname{sen}^2(c)\cos(c) - 2\cos(c)}{\cos(c) - 2\cos^2(c)\operatorname{sen}(c) - 2\operatorname{sen}(c)} = -1. \quad (4.85)$$

A solução desta equação trigonométrica é $c = \left\{-\frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. Sendo assim, cada valor de c define uma reta $3\alpha + 3\phi = c$. Então, se supusermos um valor $c > 0$, por exemplo $c = 3\pi/4$, nas equações (4.82) e (4.83), perceberemos que

$$\dot{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, \quad (4.86)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 0. \quad (4.87)$$

Isto tem o significado de que nesta reta, α é crescente e ϕ é decrescente. Assim, podemos dizer que retas com $c = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ sempre terão uma orientação de subida o que pode ser percebido na fig.(4.4). Já para $c < 0$, por exemplo $c = -\pi/4$, nas equações (4.82)

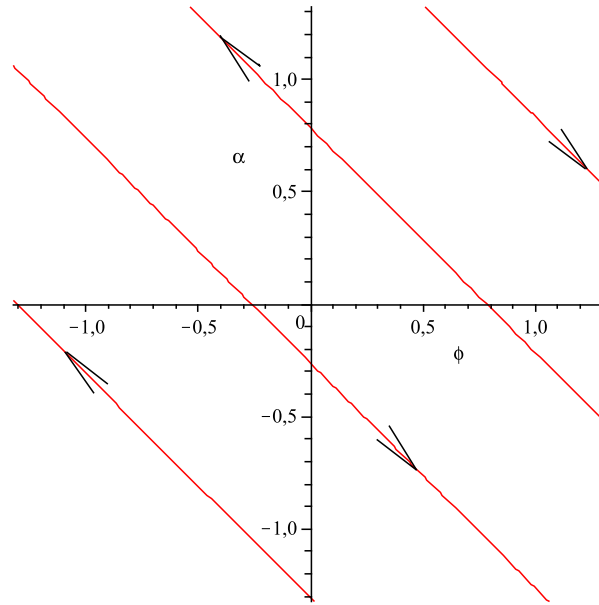


Figura 4.4: Gráfico das trajetórias para as retas $3\alpha + 3\phi = c$ com os valores de $c = \{-\frac{\pi}{4} + n\pi/n \in \mathbb{Z}\}$ e com as respectivas orientações.

e (4.83), obteremos que

$$\dot{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 0, \quad (4.88)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, \quad (4.89)$$

com o significado de que nesta reta α é decrescente e ϕ é crescente, e da mesma forma, retas com $c = \{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi|n \in \mathbb{Z}\}$ sempre terão uma orientação de descida o qual podemos verificar na fig.(4.4).

Queremos saber então se pequenas perturbações nessas retas tendem a resultar em curvas que se aproximam, evidenciando uma estabilidade dessas soluções, ou em curvas que se afastam delas, evidenciando uma instabilidade das mesmas. Assim, perturbaremos a expressão

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = \frac{\text{sen}(c) - 2\text{sen}^2(c)\cos(c) - 2\cos(c)}{\cos(c) - 2\cos^2(c)\text{sen}(c) - 2\text{sen}(c)}, \quad (4.90)$$

em série de Taylor para $c + \epsilon$ e $c - \epsilon$ até a ordem mais baixa que

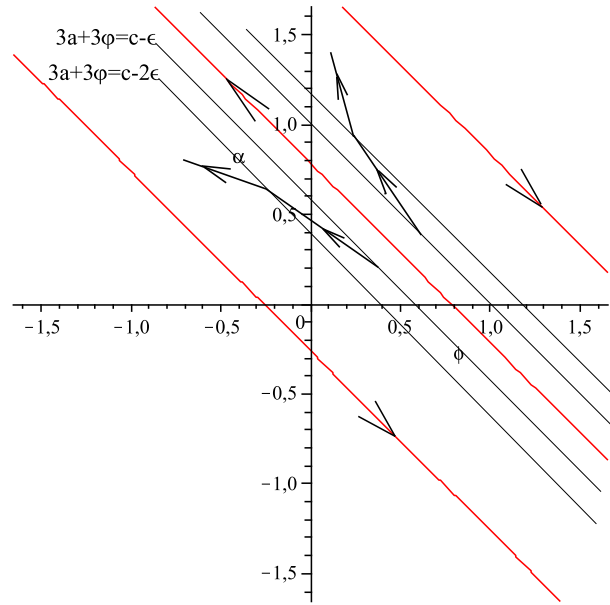


Figura 4.5: Gráfico com uma visão ampliada das trajetórias das retas perturbadas acima e abaixo da reta original $c = 3\pi/4$.

resulte em uma expressão não nula, desta forma encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\phi} = & \frac{\text{sen}(c) - 2\text{sen}^2(c)\cos(c) - 2\cos(c)}{\cos(c) - 2\cos^2(c)\text{sen}(c) - 2\text{sen}(c)} \\ & + \frac{-4\text{sen}(c)\cos(c)[40\text{sen}(c)\cos(c) - 4]}{[2\text{sen}^3(c) + \cos(c) - 4\text{sen}(c)]^2} \epsilon^3, \end{aligned} \quad (4.91)$$

para $c + \epsilon$ e

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\phi} = & \frac{\text{sen}(c) - 2\text{sen}^2(c)\cos(c) - 2\cos(c)}{\cos(c) - 2\cos^2(c)\text{sen}(c) - 2\text{sen}(c)} \\ & - \frac{-4\text{sen}(c)\cos(c)[40\text{sen}(c)\cos(c) - 4]}{[2\text{sen}^3(c) + \cos(c) - 4\text{sen}(c)]^2} \epsilon^3, \end{aligned} \quad (4.92)$$

para $c - \epsilon$. Assim, atribuindo o valor de $c = 3\pi/4$ nestas equações acima, obteremos respectivamente

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -1 - \epsilon^3, \quad (4.93)$$

e

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -1 + \epsilon^3. \quad (4.94)$$

Isto tem o seguinte significado: se escolhermos a reta $c = 3\pi/4$ e fizermos uma perturbação de ϵ para abaixo dela, resultando em uma nova curva $c - \epsilon$, descobriremos que a inclinação desta nova curva será menor do que a da reta original. Além disso, perturbações para valores menores $c - 2\epsilon, c - 3\epsilon, \dots$ gerarão curvas com inclinações menores ainda, o qual pode ser verificado graficamente na fig.(4.5). A mesma análise é feita para perturbações acima da reta original, resultando em curvas com inclinações maiores. Assim as curvas tendem a se afastar da reta do Big Rip $\alpha = -\phi$. Com todos estes resultados, podemos argumentar então que o universo permeado pelo campo fantasma e seguindo com sua dinâmica clássica dada pela reta $3\alpha + 3\phi = c$, mudará a sua história uma vez que efeitos quânticos comecem a se tornar relevantes. Desta forma, podemos dizer que a singularidade Big Rip será evitada neste modelo, especialmente para o caso em que o $z = 0$.

Capítulo 5

Conclusões

Apresentamos no capítulo 2 o surgimento da singularidade Big Rip para um cenário de universo de FRW clássico, sendo permeado por um campo fantasma descrito por um tipo de potencial exponencial e encontramos que seus efeitos podem começar a aparecer daqui a aproximadamente 4,5 Bilhões de anos. No capítulo 3, mostramos uma maneira de quantizar as grandezas envolvidas na descrição do universo via procedimento de Dirac-Wheeler-DeWitt e encontramos, através de gráficos, que ao fazer uma aproximação WKB para o minisuperespaço de FRW e tomar o limite clássico, o Big Rip é um atrator clássico. No capítulo 4 apresentamos a interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica e da cosmologia quântica. Assim, encontramos que em um modelo de superposições gaussianas do funcional de onda, funcional este obtido por uma solução da equação de Wheeler-Dewitt apresentado no capítulo 3, e utilizando a interpretação causal de Bohm-de Broglie da mecânica quântica, a singularidade futura Big Rip pode ser evitada. Isto foi evidenciado através das trajetórias Bohmianas para os casos em que o valor médio \bar{z} , posteriormente denotado apenas por z , assumisse valores de “0.5 e 0” nas equações que descreveram as velocidades $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$. Em ambos os casos verifica-se que o Big Rip pode ser evitado. Mostrou-se também que o caso $z = 1$ reduz-se ao caso clássico. Demos uma atenção maior para o caso $z = 0$ pois as contas são mais simples, onde verificamos numérica e analiticamente que o Big Rip é evitado. Note que a trajetória fechada dada pela fig.(4.2) poderia representar uma configuração cíclica eterna. Porém, esta idéia é errônea uma vez que efeitos do campo fantasma na história do universo [16] só podem

ser levado em conta muito tempo depois do “Big Bang”. Podemos ressaltar ainda a clareza com que encontramos o limite clássico para as equações quânticas. Nosso resultado apresenta um resultado diferente do artigo [49], porém temos de levar em conta que a natureza da nossa abordagem não foi a mesma, o que nos leva a investigar futuramente o porquê desta diferença. Um mesmo resultado foi obtido pelo artigo [36], base para nosso trabalho. Contudo, pensamos que o nosso resultado dá origem a uma forma mais conclusiva comparado à argumentação qualitativa de que o Big Rip é suavizado quando os pacotes de onda se dispersam, e portanto a evolução clássica termina, restando um estado quântico estacionário. Com tudo isto, concluímos que a interpretação de Bohm permite entender melhor o que está acontecendo.

Referências Bibliográficas

- [1] Einstein, A., *Ann. Physik* **17**, 891 (1905).
- [2] Einstein, A., *A. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, 844 (1915).
- [3] Einstein, A., *A. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, 142 (1917).
- [4] Hubble, E., *Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.)* **15**, 168 (1929).
- [5] Gamow, G., *Phys. Rev.* **70**, 572 (1946).
- [6] Alpher, R. A., Bethe, H. A. e Gamow, G., *Phys. Rev.* **73**, 80 (1948).
- [7] Alpher, R. A. e Hermann, R. C., *Nature* **162**, 774 (1948).
- [8] Penzias, A. A. e Wilson, R. W., *Ap. j.* **142**, 419 (1965).
- [9] Guth, A. H., *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981).
- [10] Bohr, N., *Física Atômica e Conhecimento Humano*, Contraponto (1996).
- [11] Bohm, D., Hiley, B. J., *The undivided universe: an ontological interpretation of quantum theory*, Routledge (1993).
- [12] Holland, P. R., *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge, (1993).
- [13] Riess, A. G. *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [14] Perlmutter, S. *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1998).
- [15] Caldwell, R. R., *Phys. Lett.* **545**, 23 (2002).
- [16] Caldwell, R. R., Kamionkowski, M. e Weinberg, N. N., *Phys. Rev.Lett.* **91**, 071301 (2003).

- [17] Starobinsky, A. A., *Grav. Cosmol.* **6**, 157 (2000).
- [18] Halliwell, J. J., *Quantum Cosmology and Baby Universes ed. por S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran e S. Weinberg*, World Scientific, (1991).
- [19] Dirac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **246**, (1958).
- [20] Wheeler, J. A., *Annals Phys.* **2**, 604 (1957).
- [21] DeWitt, B. S., *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [22] Steigl R. e Hinterleitner F., *Class. Quant. Grav.* **23**, 3879 (2006).
- [23] Islam, J. N., *An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge, segunda edição, 37-42 (2004).
- [24] Coles, P. e Lucchin, F. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley, segunda edição, 13-15 (2002).
- [25] Tonry, J. L. *et al. Astroph. J.* **594**, 1 (2003).
- [26] Tegmark, M. *et al. Phys. Rev.* **D69**, 103501 (2004).
- [27] Halliwell, J. J., *Nucl. Phys.* **B266**, 228 (1986).
- [28] Barrow, J. e Cotsakis, C., *Phys. Lett.* **B214**, 515 (1988).
- [29] Halliwell, J. J., *Phys. Lett.* **B185**, 341 (1987).
- [30] Yokoyama, J. e Maeda, K., *Phys. Lett.* **B207**, 31 (1988).
- [31] Hao, J. G. and Li, X. Z., *Phys. Rev.* **D70**, 043529 (2004).
- [32] Hao, J. G. and Li, X. Z., *Phys. Rev.* **D67**, 107303 (2003).
- [33] Copeland, E. J., Liddle A. R. e Wands D., *Phys. Rev. D* **57**, 4686 (1998).
- [34] Ferreira, P. G. e Joyce, M., *Phys. Rev.* **D37**, 033503 (1998).
- [35] Chimento, L. P. e Lazkoz, R., *Phys. Lett.* **91**, 211301 (2003).
- [36] Dabrowski, M. P., Kiefer, C. e Sandhofer, B., *Phys. Rev.* **D74**, 044022 (2006).
- [37] Freedman *et al.*, *ApJ* **553**, 47 (2001).

- [38] Aguirregabiria, J. M., Chimento, L. P. e Lazkoz, R., *Phys. Lett* **B631**, 93 (2005).
- [39] Arnowitt R., Deser, S. e Misner, C.W.; *Gravitation: an Introduction to Current Research*, editado por Witten L., Joun Wiley, New York (1962).
- [40] Bohm D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, (1951).
- [41] Bohm D., *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952).
- [42] de Broglie L., *J. de Phys.* **8**, 225 (1927).
- [43] Omnès, R., *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1994).
- [44] Valentini, A., *Phys. Lett.* **A156**, 5 (1991).
- [45] Vink, J. C., *Nucl. Phys.* **B369**, 707 (1992).
- [46] Shtanov, Y. V., *Phys. Rev.* **D54**, 2564 (1996).
- [47] Valentini, A., *Phys. Lett.* **A158**, 1 (1991).
- [48] Pinto-Neto, N., *Found. Phys.* **35**, 577 (2005).
- [49] Barboza, E. M. e Lemos, N. A., *Gen. Rel. Grav.* **38**, 1609 (2006).