

TESE DE
DOUTORADO

Campos de Yang Mills e a Teoria de Einstein-Cartan: da Gravitação Quântica à Supercondutividade

ALFREDO A. VARGAS-PAREDES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, ABRIL DE 2012

Dedicatória

*À minha mãe, pelo amor e carinho camuflados na disciplina e rigidez, e a meu irmão,
que ingenuamente se orgulha de mim.*

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, que ficando viúva teve que cuidar sozinha de meus irmãos. Mui-tíssimo obrigado, mamãe.

Minha profunda gratidão ao professor José Abdala Helayël-Neto, pessoa muito inspiradora e motivadora, por ter acreditado em mim e pacientemente ter me orientado pelo escuro e sinuoso mundo da física.

Aos meus colegas, Victor Vasquez Otoyá, Marcus Vinicius Fonseca, Rafael Nardi, Bruno Pereira Dias, Cristine Nunes Ferreira e em especial a Carlos André Hernaski pelas acaloradas discussões de física.

Aos meus amigos brasileiros pela acolhida e carinho, pelo carnaval, pelos lindos dias de praia, pela caipirinha, pelo samba, pela bossa nova e o pagodão, pelos churrascos e o feijão.

Aos meus conterrâneos peruanos por compartilhar comigo os momentos de diversão e comida que fizeram a saudade ir embora.

Ao professor Mauro Melchíades Doria, que influenciou diretamente no final de meu doutorado, possibilitando em grande parte a realização desta tese.

Agradeço, por fim, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta tese, revisamos os fundamentos da teoria de Einstein-Cartan no formalismo de primeira ordem (como uma teoria de calibre) e discutimos muitas das suas aplicações como o estudo da unitariedade dos modelos de gravitação estendida, a formulação da teoria de defeitos na física do estado sólido e o uso deste formalismo na fenomenologia dos novos supercondutores. Propomos também uma nova energia livre, análoga à do modelo de Ginzburg-Landau com características geométricas, discutindo suas aplicações na descrição dos novos supercondutores de alta temperatura. Para realizar este programa, estudamos as equações do estado fundamental.

Abstract

In this thesis we review some of the basis of the Einstein-Cartan theory in the first order formalism (from the point of view of gauge theories) and discuss many of its applications, such as the study of unitarity of extended gravity models, the formulation of defect theory in solid state physics and the use of this formalism into the phenomenology of new superconductors. We also propose a new free energy, in analogy with the Ginzburg-Landau model with geometrical features, discussing its applications in the description of the new High T_c superconductors. To carry out this program, we study the ground state equations.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
1 Introdução, Justificativas e Contextualização	1
2 Auto-Interação das Teorias de Calibre	11
2.1 O Método de Noether e a Auto-Interação do Campo de Calibre	12
3 Fundamentos da Teoria de Einstein-Cartan e Aplicações	15
3.1 Teoria de Einstein-Cartan como uma Teoria de Calibre	16
3.2 Equações de Maurer-Cartan e Algumas Relações Importantes	18
3.3 Aplicações da Teoria de Einstein-Cartan	22
3.3.1 Extensão da Relatividade Geral	22
3.3.2 Teoria de Defeitos na Física do Estado Sólido	23
3.3.3 Geometrização do Modelo Fenomenológico de Ginzburg-Landau	25
4 Formalismo de Einstein-Cartan e Estudo da Unitariedade em Modelos de Gravitação Estendida	27
4.1 O Papel da Torção na Obtenção de Grávitons Massivos	27

4.2	Fechamento da Álgebra dos Operadores Usando <i>Cadabra</i>	29
5	Fundamentos da Teoria de Ginzburg-Landau e sua Aplicação à Supercondutividade	32
5.1	Transições de Fase de Segunda Ordem	32
5.2	Modelo de Ginzburg-Landau e as Equações do Estado Fundamental	35
5.3	As Equações do Estado Fundamental e o Método de Bogomol'nyi	37
6	Teoria de Einstein-Cartan Aplicada à Fenomenologia da Supercondutividade	40
6.1	Localidade e Correlações de Spin Através da Tetrada e Conexão de Spin .	41
6.2	Energia Livre para Dois Parâmetros de Ordem Espinoriais e as Equações de Movimento	43
6.3	A Fórmula de Lichnerowicz-Weitzenböck com Torção e as Novas Equações de Movimento	45
6.4	Análise das Equações do Estado Fundamental	47
6.4.1	Não-Interação e Não-Correlações de Spin	48
6.4.2	O Limite de Abrikosov	49
7	Conclusões Gerais, Perspectivas e Encaminhamentos	51
A	Alguns Aspectos do Modelo de Calibre $SU(2)$-$U(1)$ com Correlações de Spin	55
B	Transformação de Escala da Energia Livre	57

Capítulo 1

Introdução, Justificativas e Contextualização

A interação eletromagnética é, talvez, aquela que é melhor entendida pelos físicos. Sua forma, dada pelas equações de Maxwell, tem um enorme campo de abrangência que passa desde a eletrodinâmica quântica até a descrição do eletromagnetismo na escala cosmológica. Além disto, as equações de Maxwell contêm duas simetrias ocultas, a simetria de Lorentz e a simetria de calibre. Esta última simetria vem encontrando grande repercussão na física, não só no entendimento do acoplamento do eletromagnetismo com a matéria, mas também na formulação consistente com outras duas interações fundamentais da natureza (interações fraca e forte). Em outras palavras, conseguimos construir um modelo que descreve três das quatro interações fundamentais da natureza. Esta formulação é conhecida como Modelo Padrão das Partículas Elementares, cujas simetrias de calibre $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ representam o grupo de simetria interna da interação forte e eletrofraca, respectivamente. Contudo, a interação mais antiga conhecida pelo homem foi deixada de lado, embora existam muitas teorias e esforços para incluir a interação gravitacional dentro do marco das teorias de calibre. Dentre estas teorias, talvez a mais conhecida seja a formulação feita por Kibble e Utiyama [1, 2]. Esta formulação de calibre para a gravitação, chamada também de formalismo de Einstein-Cartan, foi

principalmente usada para a descrição da interação gravitacional na física de altas energias, onde os efeitos da torção podem ser relevantes. A formulação de Einstein-Cartan propõe torção propagante e está relacionada com muitas outras teorias que vão além do Modelo Padrão como, por exemplo, os cenários de Supergravidade (SUGRA) e de branas. É interessante ver como a Teoria de Einstein-Cartan nos ajuda também a classificar as lagrangeanas unitárias dentro do mar de modelos de gravitação estendida que existem (veja cap. 3 desta tese). É justamente este denominador comum (simetria de calibre) na descrição das diferentes interações da física (e, portanto, de diferentes áreas) que tem permitido uma interligação e retroalimentação entre estas áreas.

Esta interligação entre diferentes áreas da física tem sido muito interessante. Por exemplo, modelos e teorias usados na matéria condensada passaram a ser empregados para solucionar e abordar problemas na física de altas energias. Talvez o primeiro candidato a ser mencionado seja o mecanismo de quebra espontânea da simetria, que possibilitou uma descrição do Efeito Meissner e também ajudou na formulação de um modelo para explicar a geração das massas das partículas elementares. Discutiremos nesta tese (e esta é uma das nossas contribuições originais) a possibilidade de usar um formalismo oriundo da teoria de campos, a teoria de Seiberg-Witten, para postular e descrever uma energia livre, do tipo Ginzburg-Landau, que possa explicar a fenomenologia dos novos supercondutores.

O fenômeno da supercondutividade foi descoberto por Kammerlingh Onnes, ao liquefazer o Hélio para determinar a resistência elétrica do mercúrio (Hg), em 1911. Foram necessários quase cinquenta anos para que o entendimento da supercondutividade fosse plenamente alcançado através da teoria de Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS), publicada em 1957 [3]. Eles propuseram uma descrição da função de onda do estado supercondutor em termos de pares de elétrons, os chamados pares de Cooper. Esta teoria, que forneceu a explicação microscópica e quântica do fenômeno, teve algumas de suas previsões antecipadas pela teoria macroscópica de V.L. Ginzburg e L.D. Landau, proposta sem o conhecimento da constituição do estado supercondutor em termos de pares de

Cooper. A teoria de Ginzburg-Landau, publicada em 1950, possui validade restrita à vizinhança da temperatura crítica. Ela baseia-se na existência de um parâmetro de ordem, forçosamente complexo para permitir invariância de calibre e acoplamento mínimo ao potencial magnético local. A partir da teoria de Ginzburg-Landau, A.A. Abrikosov publicou, no mesmo ano da teoria BCS, um artigo prevendo a existência de vórtices nos supercondutores. Relevante para esta tese é a observação de que algumas previsões fundamentais da teoria macroscópica, incluindo a do próprio estado de vórtices, podem ser alcançadas por equações de primeira ordem, as chamadas equações de Bogomol'nyi. Elas são independentes da temperatura e fornecem um nível mais fundamental para o entendimento do parâmetro de ordem do que a própria teoria de Ginzburg-Landau.

Cem anos depois da descoberta da supercondutividade nos defrontamos com uma nova classe de supercondutores, cujas propriedades não podem ser explicadas com as teorias convencionais BCS (descrição microscópica) e Ginzburg-Landau (descrição fenomenológica) [4]. Em particular, a natureza da formação do emparelhamento eletrônico (se é em espaço de momento ou posição), a natureza planar da supercondutividade e a presença do entrelaçamento com uma outra ordem eletrônica mostram novos fenômenos que não se enquadram na visão tradicional da supercondutividade. O aparecimento de novas estruturas heterogêneas eletrônicas geometricamente entrelaçadas no interior, tais como as densidades de onda de carga (CDW) e de spin (SDW), fazem cogitar da existência de densidades de onda de pares (PDW). Portanto, as famílias de novos supercondutores, cupratos pnictídeos, alguns férmions pesados e orgânicos, são na verdade sistemas eletrônicos altamente correlacionados apresentando uma interligação entre os graus de liberdade de carga e de spin [5]. Portanto spin, carga e emparelhamento não só coexistem mas parecem estar interligados por estabilidade mútua [6, 7], resultando em vários tipos de estados heterogêneos que apresentam quebra da simetria rotacional e translacional [5, 8, 9]. O estado de *stripe*, observado há mais de uma década, seria uma manifestação desta coexistência, assim como as fases nemática e esmética, propostas em [10] e [11].

Para exemplificar a justaposição da fase supercondutora com este segundo estado de

ordenamento eletrônico e também a sua universalidade (ou seja, a sua independência das propriedades de um dado material e de suas características particulares) vamos considerar um modelo fenomenológico particular (veja fig. 1.1). Este modelo se baseia na suposição de que são comuns as interações microscópicas responsáveis pela fase supercondutora e pela formação do segundo estado de ordem, sem entrar em detalhes quanto à sua origem. Tudo se resume a supor que as temperaturas críticas destas duas fases estão relacionadas por uma simples relação algébrica do tipo $aT_c^2 + bT_0^2 = 1$, onde a e b são fatores de normalização [12]. A Figura 1.2 mostra que tal proposta produz uma explicação razoável para o comportamento destas duas temperaturas em função da dopagem. Tal proposta nos induz a pensar que deve existir um modelo por trás desta coexistência das fases, baseado numa teoria invariante por rotações $SU(2)$ para os novos supercondutores [13].

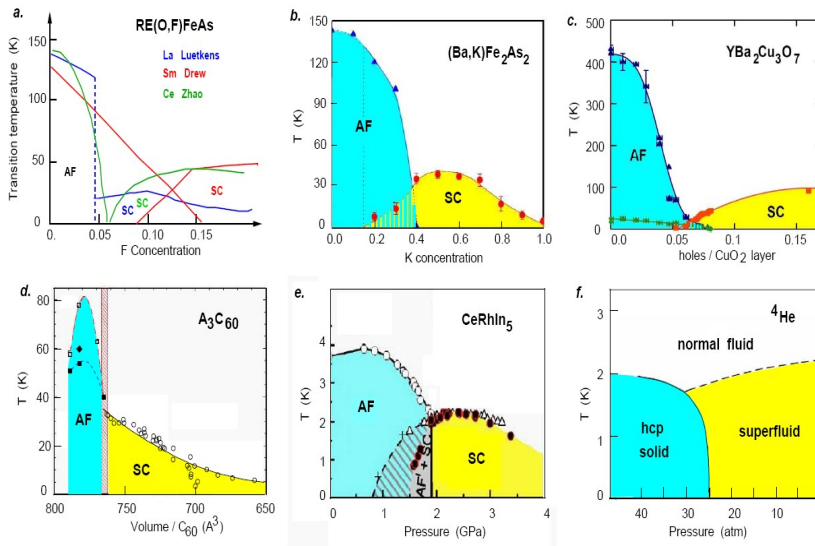


Figura 1.1: Coexistência da fase Supercondutora com outro estado de ordem

Uma vez em poder das informações acima podemos detalhar melhor nossos objetivos. Buscamos a descrição do estado supercondutor por um parâmetro de ordem (PO), mas não através de uma expansão da energia livre em termos deste PO, como ocorre na teoria de Ginzburg-Landau. Tentamos determinar o PO usando a condição do estado fundamental, abordagem introduzida por A. A. Abrikosov no seu trabalho seminal sobre

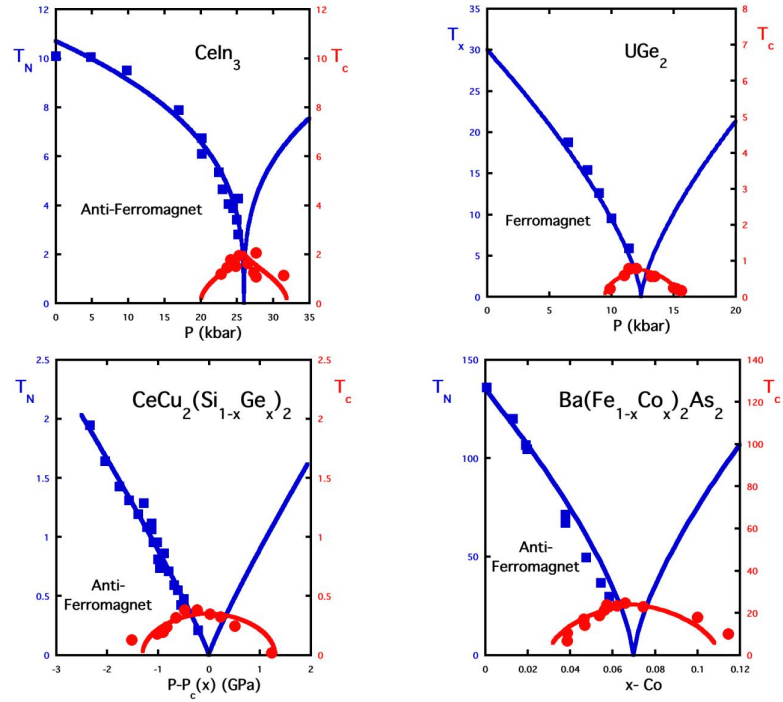


Figura 1.2: Universalidade no comportamento dos pontos quânticos críticos. Os pontos azuis e vermelhos são dados experimentais e a linha vermelha corresponde ao cálculo teórico [12]

a teoria de Ginzburg-Landau [14], embora esta condição seja independente da própria energia livre de Ginzburg-Landau. O estado fundamental, descrito por duas equações de primeira ordem acopladas, nos permite obter o PO e o campo magnético local. O aspecto mais significativo do estado fundamental é que ele relaciona a corrente supercondutora com a densidade supercondutora e fornece uma solução exata da lei de Ampère. Assim, os aspectos mais relevantes da abordagem fenomenológica, como a rede de vórtices e a sua magnetização, são obtidos sem a necessidade de introduzir uma expressão de energia livre. E. Bogomol'nyi [15] mostrou que estas equações do estado fundamental fornecem uma solução exata da teoria de Ginzburg-Landau para $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Nesta tese, no entanto, o ponto fundamental é que, para outros valores de κ , a solução da equação do estado fundamental dá uma excelente descrição da solução da teoria de Ginzburg-Landau em um extenso regime de campo aplicado, para valores muito abaixo do campo crítico superior [16].

Embora a condição do estado fundamental resida em um nível mais básico do que o da expansão da energia livre, ela não é um substituto para esta. Por exemplo, para o caso de uma componente, a condição do estado fundamental determina o estado de vários vórtices sem determinar sua simetria, a qual só pode ser determinada através de um processo de minimização da expansão da energia livre. Ressaltamos que a condição do estado fundamental está intimamente ligada à energia cinética do campo, mas não à energia do condensado. Isto faz com que a abordagem do estado fundamental seja independente da temperatura crítica, cujo valor é determinado pela energia do condensado, que não está presente em nossas considerações. Portanto, a condição do estado fundamental não está limitada de antemão a valores próximos ao da temperatura crítica [17].

Na presença de um campo aplicado, a densidade da energia cinética é uma grandeza experimentalmente acessível, dada pelo produto da magnetização pela indução magnética [18, 19, 20]. A condição do estado fundamental é usualmente derivada dentro de uma abordagem de campo médio. Porém, para um parâmetro de ordem de uma componente, é conhecido que esta condição é válida também na presença de flutuações térmicas [21]. As equações para o estado fundamental no caso de um PO de duas componentes (porém sem a presença de um fundo de spin-carga) foram encontradas em [22]. Lá já se mostra a possibilidade de descrever uma camada supercondutora com textura, isto é, com regiões distintas no plano, de tal modo que o parâmetro de ordem varia por uma diferença de fase de π .

Nesta tese, nosso propósito é estudar as equações do estado fundamental em presença de um fundo de spin-carga. O PO tem duas componentes e este fundo de spin-carga sofre mudanças severas de acordo com a dopagem [5, 9, 8], desde o regime baixamente dopado ao regime super-dopado. As equações do estado fundamental para todo os regimes de dopagem se baseiam na construção de operadores locais de momento e de spin assentados sobre este fundo de spin-carga (que não afeta a sua comutatividade) assemelhando-se, neste sentido, aos operadores de momento e spin de partículas livres. Desta maneira se adquire uma forma de analisar as quasi-partículas que transitam sobre o fundo de spin-

carga, analogamente à teoria de líquido de Fermi de Landau. Estes operadores permitem a construção da energia cinética do condensado supercondutor que se traduz no acoplamento mínimo ao fundo de spin-carga. A energia cinética do condensado adquire uma simetria de calibre não abeliana para o grupo das rotações. Aqui, tocamos num aspecto fundamental que merece uma ressalva histórica. Em 1950, Vitalii Ginzburg and Lev Landau publicaram sua teoria fenomenológica da supercondutividade baseada no princípio de invariância de calibre numa teoria geral de transições de fase de segunda ordem, a qual havia sido introduzida por Landau em 1937. Para conseguir isto o PO devia ser complexo, de modo a permitir o acoplamento mínimo com o campo magnético. Consequentemente, o efeito Meissner foi explicado pelo acoplamento mínimo. Semelhantemente, o formalismo usado neste projeto estende o uso do acoplamento mínimo para descrever as variações espaciais do PO, causados pelo fundo de spin-carga. Uma consequência deste fato é que o PO precisa residir numa representação espinorial do grupo $SU(2)$, embora outras representações maiores sejam possíveis. Note-se que uma representação mais simples, ou seja, a do campo escalar, não é possível por não ter acoplamento mínimo com este fundo de spin-carga. Assim, dentro da atual descrição, as heterogeneidades deste fundo de spin-carga induzem uma curvatura escalar de Riemann que se acopla com a densidade supercondutora, se comportando como uma distribuição local de temperaturas críticas. Como resultado, obtemos que a fase supercondutora também se torna heterogênea, com variações espaciais induzidas pelo fundo de spin-carga. Desta maneira, visualizamos as heterogeneidades do gap supercondutor que tem sido observadas, tais como mostradas na Figura 1.3.

As nossas equações do estado fundamental são uma versão tridimensional das equações de Seiberg-Witten [23], que originalmente foram propostas para uma variedade compacta em 4 dimensões. A teoria de Seiberg-Witten (SW) surgiu no estudo das teorias supersimétricas, especificamente, uma teoria de super Yang-Mills com $N = 2$ [23]. Ela tem chamado a atenção não só dos físicos mas também dos matemáticos, especialmente dos topologistas que estudam a construção dos invariantes de Seiberg-Witten e sua relação com

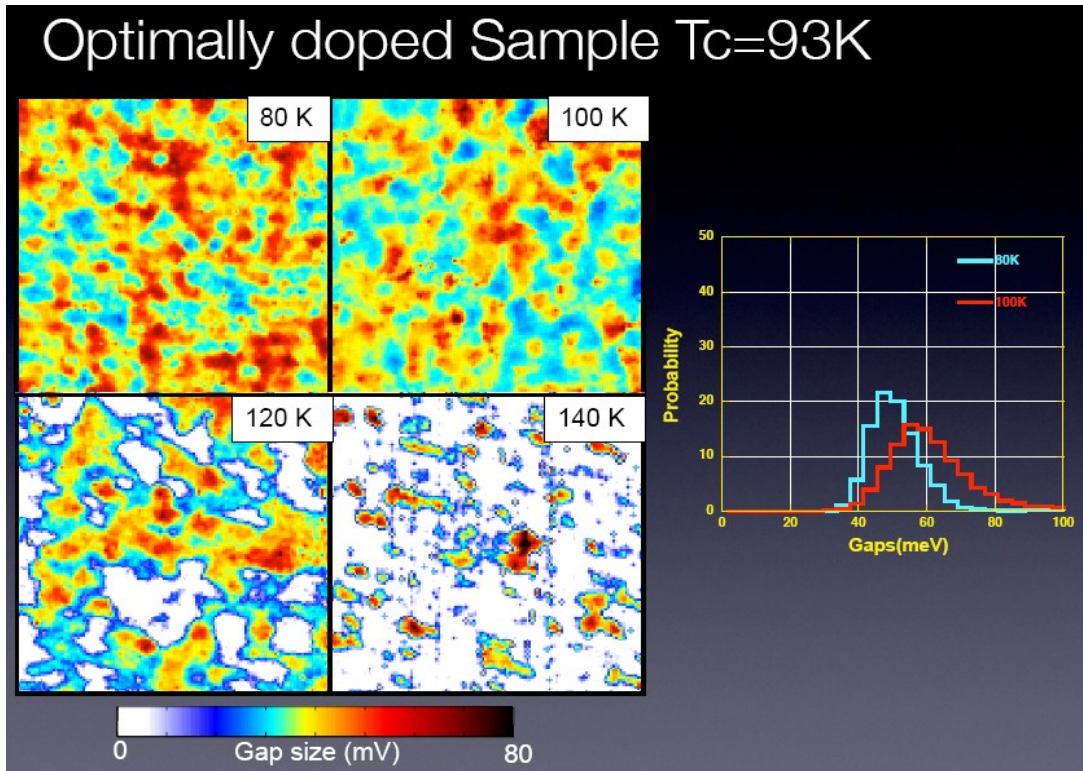


Figura 1.3: Não homogênedades no gap e presença de fases supercondutoras acima e abaixo de T_c

a teoria de Donaldson para a classificação das variedades em quatro dimensões. Por outro lado, a motivação para o uso destas teorias nesta tese é um pouco diferente. Chegaremos à teoria de SW desde uma perspectiva da matéria condensada, construindo um modelo fenomenológico (energia livre) para a descrição da supercondutividade e sua coexistência com um estado coletivo.

Mostraremos que a construção dos operadores locais de spin e momento (e consequentemente da energia cinética) é decorrente de um formalismo introduzido por Élie Cartan. Curiosamente este formalismo corresponde a uma visão do espaço curvo inspirada numa analogia com a mecânica dos meios elásticos. A abordagem de Cartan expressa uma teoria de espaço curvo, como a gravitação [24, 25], como uma teoria de calibre, ou seja, de Yang-Mills [1, 2], usada para descrever as simetrias internas da Física de partículas. Em síntese a simetria rotacional é promovida a uma simetria local [26], resultando numa teoria de calibre com espaço curvo.

Poucos anos antes do descobrimento do spin por Uhlenbeck e Goudsmith, Cartan introduziu a ideia de torção em relatividade geral, como uma propriedade intrínseca associada ao momento angular da matéria [2, 26]. Assim, para Cartan, o spin adquiriu importância igual à da massa, embora, no momento de sua proposta, o spin ainda não tivesse sido descoberto. Nós acreditamos que os novos supercondutores, por coexistirem com este fundo de spin-carga, são o verdadeiro sistema onde se aplica a teoria geométrica de Cartan.

O formalismo de Élie Cartan tem sido aplicado na física de sólidos para descrever um cristal com grande número de dislocações e disclinações, fazendo possível uma descrição via teoria de campo. Recentemente, dislocações em grafeno tem sido tratadas como efeitos da torção usando este formalismo [27]. Embora todas as teorias de defeitos tenham sido formuladas para arranjos cristalográficos de átomos, aplicaremos este formalismo para descrever um fundo eletrônico de spin carregado, como veremos no decorrer desta tese.

A organização desta tese é a seguinte: no Capítulo 2, introduzimos os fundamentos de uma teoria de Yang-Mills de uma forma pouco convencional, enfatizando a auto-interação do campo de calibre sem considerar o acoplamento deste com a matéria [28]. Em seguida, no Capítulo 3, estudaremos o formalismo de Einstein-Cartan como se fosse uma teoria de Yang-Mills. Na primeira seção deste capítulo revisaremos os fundamentos da teoria de Einstein-Cartan e definiremos a notação a ser usada no decorrer desta tese; na segunda seção introduziremos algumas relações e identidades importantes e, na terceira seção, discutiremos as diferentes aplicações deste formalismo (incluindo uma nova). Em seguida, no Capítulo 4, estudaremos modelos de gravitação estendida, classificando aqueles que sejam unitários. Os resultados deste capítulo representam em parte as contribuições originais desta tese e foram publicados em [24] e [29]. No Capítulo 5, revisaremos os fundamentos da teoria de Ginzburg-Landau e as soluções do estado fundamental baseados no método de Abrikosov [14]. No Capítulo 6, colocamos a outra parte das contribuições originais desta tese, postulando um modelo fenomenológico-geométrico que possa descrever os novos supercondutores. Um artigo referente a este capítulo está em revisão e outro já foi

publicado em *Modern Physics Letters B* [30]. Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos as considerações finais, perspectivas e encaminhamentos a serem tomados respeitando a linha de pesquisa abordada nesta tese.

Capítulo 2

Auto-Interação das Teorias de Calibre

O primeiro indício de uma simetria de calibre aparece oculto dentro das equações de Maxwell do eletromagnetismo. Porém, a primeira formulação de uma teoria de calibre, como hoje a conhecemos, só foi realizada no artigo de C.N. Yang e R. L. Mills (1954) [31], onde eles estudavam a simetria de isospin dentro das interações nucleares. No método de Yang-Mills adota-se a prescrição de acoplamento mínimo, que introduz uma derivada covariante capaz de fazer uma simetria de calibre global virar local quando o campo de calibre é acoplado com a matéria. O propósito deste capítulo é introduzir as teorias de calibre (com simetria local) independentemente do campo de calibre estar acoplado com a matéria, propiciando assim uma construção mais física destas teorias. O que pretendemos mostrar é que as teorias de Yang-Mills podem naturalmente ser construídas se buscamos uma descrição consistente (renormalizável e unitária) para campos de spin 1 em auto-interação. A auto-interação do campo de calibre naturalmente introduz a simetria de calibre local, tudo isto sem necessidade do acoplamento com a matéria. Esta forma de enxergar as teorias de calibre, enfatizando a auto-interação, foi formulada por S. Deser [28].

2.1 O Método de Noether e a Auto-Interação do Campo de Calibre

Em seguida, apresentaremos os ingredientes básicos de uma teoria de calibre com um grupo de simetria interna e a sua generalização simples para que ela seja auto-interagente, visando obter, ao final, uma simetria de calibre local do tipo Yang-Mills.

Seja a ação do eletromagnetismo com grupo de simetria interna $SU(2)$ ¹:

$$S_{liv} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (2.1)$$

onde $a = 1, 2, 3$ são os índices do grupo interno e $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor intensidade de campo definido como:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (2.2)$$

Os A_μ^a são campos de calibre, que se transformam pela representação adjunta de $SU(2)$. A lagrangeana é invariante sob rotações de $SU(2)$, com as rotações infinitesimais sendo dadas por

$$A_\mu^{\prime a}(x) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{cd}\Sigma_{cd}} \right)_b^a A_\mu^b(x), \quad (2.3)$$

$$A_\mu^{\prime a}(x) = \left(\delta_b^a + \frac{1}{2}\omega^{cd}(\Sigma_{cd})_b^a \right) A_\mu^b(x), \quad (2.4)$$

onde $(\Sigma_{cd})_b^a = \delta_c^a g_{db} - \delta_d^a g_{cb}$ são os geradores das rotações na sua representação adjunta e $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$, são os parâmetros das rotações,

$$A_\mu^{\prime a}(x) = \left(\delta_b^a + \omega_b^a \right) A_\mu^b(x). \quad (2.5)$$

Redefinindo os parâmetros das rotações $\omega^{ab} = \epsilon^{abc}\omega_c$, então

$$\delta A_\mu^a(x) = \epsilon^{abc}\omega^c A_\mu^b(x) = \vec{\omega} \times \vec{A}_\mu. \quad (2.6)$$

¹É possível generalizar para qualquer outro grupo de Lie conexo ou para sua componente conexa com a identidade.

Segundo o teorema de Noether a corrente associada a esta invariância de calibre é dada por

$$j_\mu = \frac{\delta S_{liv}}{\delta \partial^\mu \omega(x)} = F_{\mu\nu} \times A^\nu. \quad (2.7)$$

A existência desta corrente permite-nos redefinir nossa ação como

$$S' = S_{liv} + S_1, \quad (2.8)$$

onde

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu j^\mu = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^c F^{\mu\nu a} A_\nu^b \epsilon^{abc}. \quad (2.9)$$

A equação de movimento decorrente de $S_{liv} + S_1$, é dada por

$$\partial_\mu F_b^{\mu\nu} = (\vec{F}^{\mu\nu} \times \vec{A}_\mu)_b. \quad (2.10)$$

Nossa nova ação, dada por $S' = S_{liv} + S_1$, pode novamente possuir uma simetria de calibre. Ou seja, considerando a variação do campo eletromagnético sob rotações do grupo interno (2.6), voltamos a escrever uma nova corrente devida à variação da ação S'

$$\delta S' = \int d^4x \partial_\mu F_b^{\mu\nu} \delta A_\nu^b - (\vec{F}^{\mu\nu} \times \vec{A}_\mu)_b \delta A_\nu^b - \partial_\mu (\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu)_b \delta A_\nu^b. \quad (2.11)$$

Os dois primeiros termos da linha acima são cancelados devido à equação de movimento (2.10). O último termo depende de uma derivada. Portanto, obtemos uma nova corrente, dado que esta é calculada segundo o método de Noether (variação da ação com respeito à derivada do parâmetro da rotação mais o uso das equações de movimento)

$$\frac{\delta S'}{\delta \partial_\mu \omega_d} = (\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu)^a A_\nu^c \epsilon^{cda} = k_\mu. \quad (2.12)$$

Finalmente, escrevemos a ação total usando as correntes j_μ e k_μ . Este método de Noether para calcular iterativamente as correntes termina quando não aparecem mais derivadas dentro das correntes:

$$S'' = S' + \int d^4x A_\mu k^\mu, \quad (2.13)$$

$$S'' = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} A_{\mu a} F_b^{\mu\nu} A_{\nu c} \epsilon^{abc} + \frac{1}{4} (\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^a (\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu)_a \right\}. \quad (2.14)$$

É possível também definir uma derivada covariante e escrever a ação S'' como é escrita uma teoria de Yang-Mills usual,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{1}{2} A_\mu \times . \quad (2.15)$$

Portanto a ação S'' pode ser identificada como a ação de Yang-Mills com grupo de simetria interna $SU(2)$, usada na descrição das interações eletrofracas,

$$S'' = S_{YM} = \int d^4x (D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu) \cdot (D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu), \quad (2.16)$$

$$S_{YM} = \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu. \quad (2.18)$$

Assim, considerando a ação do eletromagnetismo com grupo de simetria interna e usando argumentos de auto-interação, em vez de invariância local de calibre no acoplamento com a matéria, chegamos à ação de Yang-Mills.

Todos os campos de spin 1 cuja propagação seja transversal podem ser tratados pelo método de Noether para a introdução da auto-interação. Também podemos aplicar o método para introduzir as equações de Einstein da gravitação, pensando que temos um campo de spin 2 com propagação transversal cujo grupo de simetria interna seja o grupo de Lorentz. Veremos, contudo, que teremos que usar alguns outros requerimentos físicos, como o princípio de equivalência e a invariância sob transformações gerais de coordenadas.

No próximo capítulo veremos a formulação de Yang-Mills da gravitação no formalismo de primeira ordem (Teorias de Einstein-Cartan).

Capítulo 3

Fundamentos da Teoria de Einstein-Cartan e Aplicações

A característica mais relevante da teoria de Einstein-Cartan em comparação com a relatividade geral é a presença da torção. Embora a torção careça de evidência experimental, muitas discussões sobre o surgimento e aplicabilidade desta têm aparecido, inclusive nos últimos anos. Por exemplo, no formalismo das teorias de calibre, a introdução de uma derivada covariante não pressupõe uma simetrização dos índices inferiores na conexão afim e, portanto, a torção não é necessariamente nula. Por outro lado, o princípio de equivalência e a causalidade podem resultar no vínculo de conexão afim simétrica e, portanto, de torção nula. Até hoje, o único vínculo derivado do princípio de equivalência sobre a torção impõe que esta seja totalmente anti-simétrica. Outra importante característica é que a inclusão da torção permite ter um acoplamento spin-torção além do já conhecido acoplamento energia-curvatura, para assim completar a prescrição de acoplamento matéria-geometria. Uma das maiores críticas à torção nas teorias gravitacionais diz respeito à falta de potencial preditivo: a constante de acoplamento gravitacional está vinculada à constante de acoplamento da torção, fazendo com que os efeitos da mesma somente sejam relevantes na escala de Planck. Isto nos leva a pensar na possibilidade de introduzir uma nova constante de acoplamento para a torção, diferente da constante da

gravitação, ou na possibilidade de introduzir modelos que usem a torção fora do contexto gravitacional. No final deste capítulo apresentaremos alguns destes modelos.

O objetivo deste capítulo é introduzir os fundamentos da teoria geométrica de Einstein-Cartan [1, 2, 26] e a notação a ser usada no decorrer desta tese. Também discutiremos as aplicações desta teoria em diferentes contextos físicos [32, 33, 34].

3.1 Teoria de Einstein-Cartan como uma Teoria de Calibre

Podemos estudar este formalismo começando pela construção de uma teoria de Yang-Mills para o grupo de Lorentz, $SO(1, 3)$, cujos geradores Σ_{ab} obedecem à seguinte algebra

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \eta_{ad}\Sigma_{bc} + \eta_{bc}\Sigma_{ad} - \eta_{ac}\Sigma_{bd} - \eta_{bd}\Sigma_{ac}, \quad (3.1)$$

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde η_{ab} é a métrica plana do espaço de Minkowski e $a, b, c, \dots, h = 0, 1, 2, 3$. representam os índices do espaço plano de Minkowski.

Neste contexto definimos uma derivada covariante usando a conexão de spin $\omega_{\mu}^{ab}(x)$ como campo de calibre do grupo de Lorentz:

$$D_{\mu} = \frac{1}{i}\partial_{\mu} - g\frac{1}{2}\omega_{\mu}^{ab}\Sigma_{ab}. \quad (3.3)$$

Esta conexão de spin é anti-simétrica nos índices do grupo interno $\omega_{\mu}^{ab} = -\omega_{\mu}^{ba}$. As letras gregas $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ representam os índices do espaço “curvo”. Eventualmente restringiremos os valores destes índices para 1, 2, 3 (componentes espaciais), e para isto usaremos as letras latinas $i, j, \dots, z = 1, 2, 3$ que não devem ser confundidos com os índices latinos a, b, c, \dots, h definidos anteriormente para a descrição do espaço de Lorentz local.

Este campo de calibre ω_μ se transforma, segundo as teorias de Yang-Mills não Abelianas, da seguinte forma

$$\omega_\mu = R\omega R^{-1} + \frac{i}{g}R(\partial_\mu R^{-1}), \quad (3.4)$$

onde R é um elemento do grupo de Lorentz.

O comutador das derivadas covariantes nos dá o tensor intensidade de campo que, por definição, é invariante de calibre e que definiremos por R_{ij}^{ab}

$$[D_\mu, D_\nu] = -\frac{1}{ig}R_{\mu\nu}^{ab}\Sigma_{ab}. \quad (3.5)$$

Segundo as teorias de Yang-Mills, sabemos que os campos de matéria veem as transformações de calibre como uma transformação de fase. Por exemplo, seja o campo Φ que pertence a uma representação do grupo de Lorentz ($\Phi \in SO(1,3)$). A transformação de calibre sobre este campo vem dada por

$$\Phi(x)' = e^{\frac{1}{2}\theta^{ab}\Sigma_{ab}}\Phi(x), \quad (3.6)$$

onde θ^{ab} são os parâmetros da transformação do grupo de Lorentz.

Para fechar esta seção sobre as teorias de Einstein-Cartan abordaremos a seguinte pergunta: qual é a ligação entre os índices do espaço de Lorentz local (grupo interno) e os índices do espaço “curvo” (chamados também de índices-mundo)? Para responder esta pergunta introduziremos a tetrada $e_\mu^a(x)$. Esta tetrada introduz uma transformação de coordenadas onde, para cada ponto do espaço-tempo, introduzimos o espaço de Minkowski como espaço interno.

$$e_\mu^a(x) = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_a}. \quad (3.7)$$

Se tomamos uma transformação de coordenadas do elemento de linha do espaço de Minkowski (espaço interno), então podemos obter uma relação entre a métrica plana e a métrica do espaço curvo da seguinte forma

$$(dS)^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b, \quad (3.8)$$

$$(dS)^2 = \eta_{ab}e_\mu^a dx^\mu e_\nu^b dx^\nu. \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

Então identificamos a métrica do espaço curvo como sendo

$$g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}^a(x)\eta_{ab}e_{\nu}^b(x). \quad (3.11)$$

Neste sentido podemos dizer que a tetrada é mais fundamental que a métrica já que, se conhecemos o mapeamento de todos os pontos da variedade curva com o hiper-plano tangente a esta (espaço $M^{1,3}$), então podemos construir a métrica do espaço curvo.

3.2 Equações de Maurer-Cartan e Algumas Relações Importantes

Vamos fazer algumas considerações importantes antes de começar a trabalhar com o formalismo de Einstein-Cartan. A primeira tem a ver com os coeficientes de não-holonomicidade. Estes coeficientes relacionam a não comutatividade das derivadas parciais, definidas no espaço de Minkowski $\partial_a\partial_b \neq \partial_b\partial_a$. Isto é contra-intuitivo, devido a que estamos acostumados com derivadas comutantes no espaço de Minkowski. Porém, com a introdução das tetradas, isto não é mais verdade

$$[\partial_a, \partial_b] = [e_a^{\mu}\partial_{\mu}, e_b^{\nu}\partial_{\nu}], \quad (3.12)$$

$$[\partial_a, \partial_b] = e_a^{\mu}(\partial_{\mu}e_b^{\nu})\partial_{\nu} - e_b^{\mu}(\partial_{\mu}e_a^{\nu})\partial_{\nu}, \quad (3.13)$$

$$[\partial_a, \partial_b] = \Omega_{ab}^c\partial_c, \quad (3.14)$$

onde

$$\Omega_{ab}^c = [e_a^{\mu}(\partial_{\mu}e_b^{\nu}) - e_b^{\mu}(\partial_{\mu}e_a^{\nu})]e_{\nu}^c \quad (3.15)$$

são os coeficientes de não holonomicidade, consequência da não comutatividade das derivadas parciais no espaço interno.

Outro ponto relevante é a definição do tensor intensidade de campo no espaço interno. Na seção anterior vimos que (3.5) define um tensor covariante de calibre no espaço curvo.

Porém, no espaço interno a situação é diferente:

$$[D_a, D_b] = e_a^\mu e_b^\nu [D_\mu, D_\nu] - (D_\mu e_\nu^c - D_\nu e_\mu^c) e_b^\nu e_a^\mu D_c, \quad (3.16)$$

$$[D_a, D_b] = e_a^\mu e_b^\nu \left(-\frac{1}{ig} R_{\mu\nu}^{cd} \Sigma_{cd} \right) - \left(\frac{1}{i} T_{\mu\nu}^c \right) e_b^\nu e_a^\mu D_c, \quad (3.17)$$

$$[D_a, D_b] = -\frac{1}{ig} R_{ab}^{cd} \Sigma_{cd} - \frac{1}{i} T_{ab}^c D_c, \quad (3.18)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^c - ig\omega_{\mu d}^c e_\nu^d - \partial_\nu e_\mu^c + ig\omega_{\nu d}^c e_\mu^d, \quad (3.19)$$

esta é uma nova grandeza física que chamaremos de torção, um elemento essencial da teoria de Einstein-Cartan, pois são os graus de liberdade que a torção carrega que fazem com que o formalismo de Einstein-Cartan seja mais completo que a relatividade geral (onde usualmente se considera esta nula). Veja que ela aparece como tensor intensidade de campo, cujo campo de calibre é a tetrada e_ν^c ,

$$D_\mu e_\nu^c - D_\nu e_\mu^c = \frac{1}{i} T_{\mu\nu}^c. \quad (3.20)$$

Agora, usando a equação acima, introduzimos a primeira equação de Maurer-Cartan na sua linguagem de formas diferenciais

$$de^a - \omega_b^a \wedge e^b = T^a, \quad (3.21)$$

que define o tensor intensidade de campo para o campo de calibre $e_\mu^a(x)$. Analogamente, introduzimos a segunda equação de Maurer-Cartan na sua linguagem de formas e na sua forma tensorial, decorrente da equação (3.5)

$$d\omega^{ab} - \omega_c^a \wedge \omega^{cb} = R^{ab}, \quad (3.22)$$

$$\partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} - \omega_{\mu c}^a \omega_\nu^{cb} + \omega_{\nu c}^a \omega_\mu^{cb} = R_{\mu\nu}^{ab}. \quad (3.23)$$

Posteriormente, usaremos a primeira e segunda equação de Maurer-Cartan para obter as identidades de Bianchi.

Na primeira equação de Maurer-Cartan, na sua linguagem de formas (3.21), usamos o ditado sobre a derivada exterior d “*be wise, apply them twice*” ($d^2 \equiv 0$). Assim,

$$d(de^a) - d(\omega_b^a \wedge e^b) = dT^a \quad (3.24)$$

$$-(d\omega_b^a) \wedge e^b + \omega_b^a \wedge (de^b) = dT^a. \quad (3.25)$$

Usando recorrentemente a primeira equação de Maurer-Cartan no segundo termo do lado esquerdo da equação acima, obtemos

$$-(d\omega_b^a) \wedge e^b + \omega_b^a \wedge (T^b + \omega_c^b \wedge e^c) = dT^a \quad (3.26)$$

$$-(d\omega_b^a) \wedge e^b + \omega_b^a \wedge \omega_c^b \wedge e^c + \omega_b^a \wedge T^b = dT^a, \quad (3.27)$$

$$-[(d\omega_b^a) \wedge e^b - \omega_b^a \wedge \omega_c^b \wedge e^c] = dT^a - \omega_b^a \wedge T^b. \quad (3.28)$$

Agora, usaremos a segunda equação de Maurer-Cartan,

$$-R_c^a \wedge e^c = DT^a, \quad (3.29)$$

$$D_{\langle \mu} T_{\nu \rho \rangle}^a + R_{\langle \mu \nu}^{ab} e_{\rho \rangle b} = 0. \quad (3.30)$$

Com isto, chegamos à primeira identidade de Bianchi na sua notação de formas diferenciais e em sua forma tensorial (os índices entre $\langle \dots \rangle$ são totalmente antissimetrizados). Se, ao aplicarmos a derivada exterior na primeira equação de Maurer-Cartan, obtemos a primeira identidade de Bianchi, aplicando a derivada exterior na segunda equação de Maurer-Cartan obtemos a segunda identidade de Bianchi

$$d^2 \omega^{ab} - d(\omega_c^a \wedge \omega^c b) = dR^{ab}, \quad (3.31)$$

$$-d(\omega_c^a) \wedge \omega^{cb} + \omega_c^a \wedge d\omega^{cb} = dR^{ab}, \quad (3.32)$$

$$dR^{ab} - d(\omega_c^a) \wedge \omega^{cb} + \omega_c^a \wedge d\omega^{cb} = 0. \quad (3.33)$$

Estes três termos são exatamente a derivada covariante $D_\mu R_{\nu\rho}^{ab}$. Assim, finalmente escrevemos a segunda identidade de Bianchi na sua linguagem de formas e sua notação tensorial.

$$DR^{ab} = 0, \quad (3.34)$$

$$D_{\langle \mu} R_{\nu \rho \rangle}^{ab} = 0. \quad (3.35)$$

Novamente os índices entre $\langle \dots \rangle$ são totalmente antisimetrizados ($\mu\nu\rho$).

Para finalizar esta seção analizaremos o limite de torção nula $T_{\mu\nu}^a = 0$. Este limite é de suma importância, pois coloca os graus de liberdade da conexão de spin ω_μ^{ab} totalmente em função dos graus de liberdade da tetrada e_μ^a e suas derivadas $\partial_\mu e_\nu^a$. Para ver isto, partimos do vínculo

$$T_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^a - g\omega_{\mu c}^a e_\nu^c - \partial_\nu e_\mu^a + g\omega_{\nu c}^a e_\mu^c = 0. \quad (3.36)$$

Agora, usando a notação para os coeficientes de não-holonomicidade, escrevemos o vínculo acima três vezes somente com índices do espaço interno e trocamos ciclicamente os índices da torção

$$\Omega_{a\langle cd\rangle} + \omega_{c\langle ad\rangle} - \omega_{d\langle ac\rangle} = T_{\langle cd\rangle a}, \quad (3.37)$$

$$\Omega_{c\langle da\rangle} + \omega_{d\langle ca\rangle} - \omega_{a\langle cd\rangle} = T_{\langle da\rangle c}, \quad (3.38)$$

$$\Omega_{a\langle cd\rangle} + \omega_{a\langle dc\rangle} - \omega_{c\langle da\rangle} = T_{\langle ac\rangle d}. \quad (3.39)$$

Somando (3.37) + (3.38) - (3.39), obtemos

$$\omega_{\mu ca} = -\frac{1}{2}e_\mu^d(\Omega_{acd} + \Omega_{cda} - \Omega_{dac}) + \frac{1}{2}e_\mu^d(T_{cda} + T_{dac} - T_{acd}), \quad (3.40)$$

$$\omega_{\mu ca} = -\frac{1}{2}e_\mu^d(\Omega_{acd} + \Omega_{cda} - \Omega_{dac}) + K_{\mu ca}, \quad (3.41)$$

onde $K_{\mu ca}$ é a contorção, definida como

$$K_{\mu ca} = \frac{1}{2}e_\mu^d(T_{cda} + T_{dac} - T_{acd}). \quad (3.42)$$

Então, o vínculo de torção nula permite reduzir e expressar todos os graus de liberdade da conexão de spin inteiramente em função da tetrada

$$\omega_{\mu ca} = -\frac{1}{2}e_\mu^d(\Omega_{acd} + \Omega_{cda} - \Omega_{dac}). \quad (3.43)$$

Antes de terminar esta seção e começar a discutir as aplicabilidades da teoria de Einstein-Cartan, lembremos um pouco sobre o que acabamos de ver. A Teoria de Einstein-Cartan aborda a gravitação desde uma perspectiva das simetrias de calibre, onde tanto as

transformações de Lorentz locais e as transformações gerais de coordenadas são introduzidas como requerimentos físicos para uma formulação consistente com a relatividade geral. Por outro lado, se usamos o formalismo geométrico de Einstein-Cartan num contexto físico além do gravitacional talvez não sejam necessárias todas as simetrias ou características que foram trazidas para a descrição desta interação. Por exemplo, aplicações deste formalismo na matéria condensada podem dispensar a simetria de Lorentz por tratar com sistemas essencialmente não-relativísticos e, portanto, o grupo de simetria interna ter que ser modificado de $SO(1,3)$ para $SO(3)$. Em outras palavras, o número de graus de liberdade da conexão de spin é restrito, ela não vai carregar os 24 graus de liberdade da conexão de spin que descreve o campo gravitacional, mas somente 9 devido a que abandonamos os “*boosts*” (empurrões) de Lorentz e somente consideramos a invariância sob rotações locais. Agora, que tipo de restrições podem ser aplicadas na tetrada? Esta é uma das perguntas a serem discutidas no decorrer desta tese.

3.3 Aplicações da Teoria de Einstein-Cartan

Agora vamos discutir alguns dos contextos físicos onde o ferramental do formalismo de Einstein-Cartan pode ser aplicado.

3.3.1 Extensão da Relatividade Geral

Esta talvez seja a aplicação mais direta do formalismo de Einstein-Cartan onde a extensão da teoria de Einstein-Hilbert acontece por considerarmos a torção não nula. É importante notar que, quando E. Cartan introduziu o conceito de torção em 1923, ele estava pensando em relacionar esta grandeza física com um momento angular intrínseco da matéria. Obviamente, ele não podia relacionar a torção com as densidades de spin, pois o conceito de spin introduzido por Uhlenbeck e Goudsmith só foi introduzido dois anos depois, em 1925 [26].

A construção da ação que vai descrever o campo de radiação gravitacional difere

das teorias de Yang-Mills usuais, onde a ação é construída como o quadrado do tensor intensidade de campo, obtendo-se, desta forma, uma lagrangeana invariante de calibre. No caso de Einstein-Cartan, existe uma forma mais simples de formar um invariante de calibre sem tomar o quadrado do tensor intensidade de campo. Isto é possível devido à contração da curvatura com tetradas

$$R_{\mu\nu}^{ab} e_a^\mu e_b^\nu = R, \quad (3.44)$$

que identificaremos como o escalar de curvatura. A ação que vai descrever o campo gravitacional, em analogia com o termo de Einstein-Hilbert, é escrita da seguinte forma

$$S = \int d^4x e R, \quad (3.45)$$

onde $e = \sqrt{-g}$ é o determinante da tetrada, resultado da equação (3.11). Temos dois campos independentes, tetrada $e_\mu^a(x)$ e conexão de spin $\omega_\mu^{ab}(x)$. Portanto, usando o princípio variacional, obtemos as seguintes equações de movimento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (3.46)$$

$$T_{\mu\nu}^\kappa = 0, \quad (3.47)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e R , o escalar de curvatura. Imediatamente reconhecemos a equação (3.46), como a equação de Einstein. A outra equação (3.47), nos dá um vínculo da relatividade geral (torção nula). Para nós, esta é uma consequência dinâmica e não uma condição arbitrária. Terminamos esta parte notando que a presença de matéria fermiônica ou termos de gravitação estendida possibilitam a presença da torção, inclusive fazendo com que esta se propague.

3.3.2 Teoria de Defeitos na Física do Estado Sólido

Conforme mencionado anteriormente, podemos usar o formalismo de Einstein-Cartan além do estudo da interação gravitacional como, por exemplo, no estudo da densidade de dislocações e disclinações presentes num material (sólidos ou líquidos de spin).

A ideia básica é aproveitar a estrutura geométrica que forma o arranjo dos átomos do material e fazer uma analogia com a noção do tecido espaço-temporal, introduzida por Einstein quando formulou a relatividade geral. Um espaço com torção e curvatura pode ser obtido diretamente do espaço Euclidiano, usando transformações de coordenadas singulares, fazendo com que a estrutura cristalina do sólido seja completamente equivalente a um cristal com disclinações e dislocações, como é descrito por H. Kleinert [32]. Recentemente, dislocações no grafeno foram tratadas como efeitos da torção, usando este formalismo [27].

Por outro lado temos uma formulação geométrica da teoria de defeitos onde a curvatura é associada com a densidade de superfície do vetor de Frank e a torção com a densidade de superfície do vetor de Burgers [33, 34]:

$$b^a = \int \int_S dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}^a, \quad (3.48)$$

$$\Omega^{ab} = \int \int dx^\mu \wedge dx^\nu R_{\mu\nu}^{ab}, \quad (3.49)$$

onde b^a é o vetor de Burgers e Ω^{ab} é o vetor de Frank. Veja as seguintes figuras:

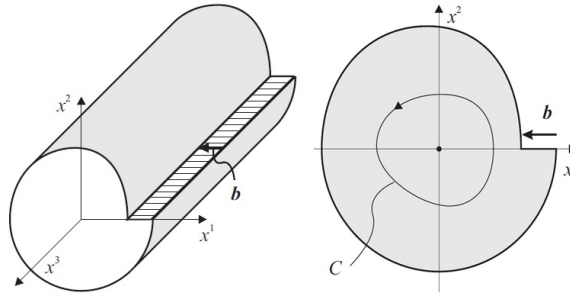


Figura 3.1: Densidade de superfície do vetor de Burgers é a torção

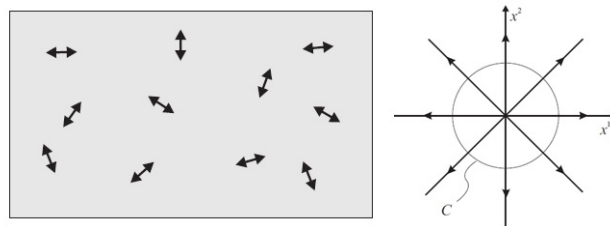


Figura 3.2: Densidade de superfície do vetor de Frank é a curvatura

No limite em que não temos dislocações ($T_{\mu\nu}^a = 0$) nem disclinações ($R_{\mu\nu}^{ab} = 0$) a teoria se reduz à teoria de deformações elásticas.

3.3.3 Geometrização do Modelo Fenomenológico de Ginzburg-Landau

Até agora, as aplicações da geometria de Einstein-Cartan na matéria condensada têm sido limitadas e formuladas para arranjos cristalográficos. Contudo (e é uma das contribuições originais desta tese) é possível propor um novo contexto físico do uso do ferramental geométrico de Einstein-Cartan para descrever um fundo eletrônico de spin carregado, presente em muitos materiais supercondutores.

Trataremos de aplicar a geometria de Einstein-Cartan para modelar fenomenologicamente os novos supercondutores de alta temperatura, onde têm aparecido várias indicações de que o formalismo de Einstein-Cartan é apropriado. Entre estas temos a presença de dois parâmetros de ordem, o tratamento de spin locais altamente correlacionados e a coexistência entre o estado supercondutor e um novo estado de ordem (magnético por exemplo).

As ideias básicas desta proposta são: a introdução de um novo parâmetro de ordem (PO) de caráter espinorial $\Psi_\alpha(x)$ (duas componentes), a consideração de um spin local $\sigma_i(x)$ e a definição de uma nova derivada covariante, que comute com o spin local. Todos estes novos ingredientes podem facilmente ser implementados se consideramos o ferramental de um espaço geométrico do tipo Einstein-Cartan.

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\sigma_i(x) = e_i^a \sigma_a, \quad (3.51)$$

$$[\nabla_i, \sigma_j] = 0, \quad (3.52)$$

onde podemos notar que é a tetrada que nos permite introduzir a noção de localidade de spin. A introdução de um spin local é altamente não trivial, pois não mexe somente

com o spin propriamente dito, mas também com a estrutura do espaço. Lembremos que o comutador dos operadores de spin formam a álgebra do grupo das rotações no espaço 3-dimensional e o anti-comutador está diretamente relacionado com a métrica do espaço: $\{\sigma_i(x), \sigma_j(x)\} = g_{ij}(x)$. A derivada covariante ∇_i é aquela definida em (3.3) com a adição do símbolo de Christoffel. Esta derivada covariante comutará efetivamente com as matrizes de Pauli locais, devido aos espaços de Riemman-Cartan obedecerem à condição de metricidade.

Todos estes argumentos serão explorados com mais detalhe no capítulo 5 quando estudaremos um modelo efetivo fenomenológico análogo ao de Ginzburg-Landau, com características geométricas do tipo Einstein-Cartan.

Capítulo 4

Formalismo de Einstein-Cartan e Estudo da Unitariedade em Modelos de Gravitação Estendida

O propósito deste capítulo é mencionar alguns aspectos interessantes do formalismo de Einstein-Cartan para testar a unitariedade no nível de árvore dos modelos de gravitação estendida (classificar os modelos fisicamente admissíveis). Vamos, também, estudar a viabilidade da obtenção de novos modos massivos propagantes no espectro de uma teoria de gravitação.

4.1 O Papel da Torção na Obtenção de Grávitons Massivos

Existem várias formas de propor ações de gravitação estendida. Uma delas é introduzir termos quadráticos no tensor de Riemann, Ricci ou escalar de curvatura, além de suas variantes na contração dos índices (por exemplo $R_{\mu\nu}R^{\nu\mu}$). Tudo com o objetivo de obter termos que possam dar indícios do que poderia ser uma teoria gravitacional quântica.

Sezgin e Nieuwenhuizen estudaram vários modelos de gravitação estendida do tipo R^2 com torção propagante e conseguiram classificar um conjunto de lagrangeanas livres de fantasmas usando o formalismo de Einstein-Cartan [35, 36, 37]. A vantagem de usar a tetrada e a conexão de spin para classificar os modelos livres de fantasmas com potências quadráticas em R vem do fato de evitar que trabalhemos com derivadas superiores que dificultariam a análise das relações de dispersão. Contudo, há um preço a pagar: trabalhar com um número maior de graus de liberdade.

Neste contexto, a gravitação massiva tem despertado o interesse de muitos físicos, especialmente aqueles que trabalham com temas relacionados à escala de TeV no LHC, às dimensões extras e aos cenários de branas [38, 39, 40, 41]. Por outro lado Nakasone e Oda [42] estudaram um modelo com termos do tipo R^2 , cuja lagrangeana é dada por

$$L = e(R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu a} R^{\mu a} + \gamma(R_{\mu\nu ab} R^{\mu\nu ab} - 4R_{\mu a} R^{\mu a} + R^2)). \quad (4.1)$$

Nakasone e Oda, mostraram que essa lagrangeana descreve grávitons massivos, sendo equivalente ao modelo de Pauli-Fierz no nível linear. Também mostraram que somente em três dimensões não existe propagação de fantasmas. Para dimensões superiores a três ($D = 3$), a presença de modos de spin-2 não unitários é inevitável. Tendo em vista este último modelo, nós investigamos se é possível uma generalização dos resultados de Nakasone e Oda com torção propagante para uma dimensão arbitrária. O que achamos foi bastante diferente: a introdução de novos graus de liberdade trazidos pelo formalismo de Einstein-Cartan proíbe a possibilidade de obter gráviton massivos no modelo (4.1). Os grávitons massivos reaparecem se consideramos termos explícitos de torção [24] ou ainda termos tipo Chern-Simons, que quebrem a paridade [29, 25]. Todos estes resultados foram discutidos e apresentados na tese de doutorado de Carlos André Hernaski [43].

4.2 Fechamento da Álgebra dos Operadores Usando

Cadabra

Na construção da álgebra dos operadores é necessário testar o seu fechamento. Embora o cálculo seja trivial, é muito extenso e exaustivo, podendo ocorrer um erro de sinal que seja vital para a classificação das teorias como unitárias (livre de fantasmas) ou não. Para evitar isso, usamos um programa de álgebra computacional para teoria de campos chamado *Cadabra* [44, 45].

Uma das vantagens de usar *Cadabra* é que o programa permite trabalhar em um ambiente com uma única linguagem: a entrada, o algoritmo e a saída são todas escritas em formato Latex, de modo que os resultados podem ser exportados diretamente para qualquer editor de Latex.

Voltando à questão de obter grávitons massivos no modelo (4.1), notamos que temos que adicionar termos com torção propagante. Os seguintes termos serão adicionados:

$$L' = e(\delta R_{abcd}R^{cdab} + \kappa R_{abcd}R^{acbd} + \lambda T_{abc}T^{abc} + \mu T_{abc}T^{bca} + \nu T_{ab}^b T_c^{ac}), \quad (4.2)$$

onde foram escritos todos os termos com torção propagante e sem derivadas superiores de segunda ordem.

Agora, tanto a conexão de spin como a tetrada, no setor de spin-2, possuem termos quadráticos. Estes termos formam uma matriz de massa para o gráviton que envolve a propagação da tetrada. Anteriormente, tínhamos apenas termos lineares na derivada da tetrada e nenhum do tipo $e_{ab}O^{abcd}e_{cd}$. Este problema agora foi resolvido.

O método para o cálculo dos projetores e a construção da sua álgebra nos leva a escrever a lagrangeana na forma campo-operador-campo:

$$L + L' = \sum_{\alpha,\beta} \Psi_\alpha \Theta_{\alpha\beta} \Psi_\beta, \quad (4.3)$$

onde o campo Ψ_α carrega as 40 componentes (24 da conexão de spin e 16 da tetrada). $\Theta_{\alpha\beta}$, são os operadores que acoplam os campos respeitando a paridade. Assim como o

spin, este termo contém também os mapeadores. Então (4.3) pode ser escrita da seguinte forma

$$L + L' = \sum_{\alpha, \beta, i, j, \psi, \lambda, J^P} \psi_\alpha a_{ij}^{\psi\lambda}(J^P) P_{ij}^{\psi\lambda}(J^P)_{\alpha\beta} \lambda_\beta, \quad (4.4)$$

onde os mapeadores e projetores obedecem as seguintes relações algébricas

$$\sum_{\beta} P_{ij}^{\psi\lambda}(I^P) P_{kl}^{\sigma\rho}(J^Q)_{\beta\gamma} = \delta_{jk} \delta^{\lambda\sigma} \delta^{IJ} \delta^{PQ} P_{il}^{\psi\rho}(I^P)_{\alpha\gamma}, \quad (4.5)$$

$$\sum_{i, J^P} P_{ii}(J^P)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.6)$$

Os operadores e mapeadores decorrentes de (4.3), são construídos heurísticamente usando como blocos básicos os operadores transversal e longitudinal para o spin transversal θ_{ij} e ω_{ij}

$$\omega_{ij} = \frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2}, \quad (4.7)$$

$$\theta_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2}, \quad (4.8)$$

O fechamento da álgebra obedece às relações (4.5) e (4.6) e é testado para cada produto do projetor-mapeador-projetor até chegar às matrizes dos projetores-mapeadores, para depois serem invertidas (antes de serem invertidas devem ser consideradas as degenerescências devido às simetrias do modelo) e depois, mediante o cálculo do determinante, as relações de dispersão são obtidas.

Cada projetor e mapeador é construído heurísticamente baseado nos “tijolos base” (4.7) e (4.8). Em seguida, apresentamos o algoritmo usado no *Cadabra* para a obtenção dos projetores e mapeadores através de um pequeno exemplo:

$$P_{21}^{\phi\omega}(2^+)_{ab;def} P_{12}^{\omega\phi}(2^+)_{def;pq} = ?$$

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, p, q, r ::$ Indices.

$\omega_{ab} ::$ Symmetric.

$\theta_{ab} ::$ Symmetric.

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \theta_{ad}\theta_{be}\partial_f + \theta_{ae}\theta_{bd}\partial_f - \frac{2}{3}\theta_{ab}\theta_{de}\partial_f + \\ -\theta_{ad}\theta_{bf}\partial_e - \theta_{af}\theta_{bd}\partial_e + \frac{1}{3}\theta_{ab}\theta_{df}\partial_e \end{pmatrix} \times$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \theta_{dp}\theta_{eq}\partial_f + \theta_{dq}\theta_{ep}\partial_f - \frac{1}{3}\theta_{de}\theta_{pq}\partial_f + \\ -\theta_{dp}\theta_{fq}\partial_e - \theta_{dq}\theta_{fp}\partial_e + \frac{2}{3}\theta_{df}\theta_{pq}\partial_e \end{pmatrix}$$

@distribute!(%);

@canonicalise!(%):

@substitute!(%)($\theta_{ab} * \theta_{bc} \rightarrow \theta_{ac}, \theta_{ac} * \theta_{ad} \rightarrow \theta_{cd}, \theta_{ac} * \theta_{bc} \rightarrow \theta_{ab}, \theta_{ab} * \theta_{ab} \rightarrow$
 $D - 1, \theta_{aa} \rightarrow D - 1$);

@substitute!(%)($\omega_{ab} * \omega_{bc} \rightarrow \omega_{ac}, \omega_{ac} * \omega_{ad} \rightarrow \omega_{cd}, \omega_{ac} * \omega_{bc} \rightarrow \omega_{ab}, \omega_{ab} * \omega_{ab} \rightarrow$
 $1, \omega_{aa} \rightarrow 1$);

@substitute!(%)($\omega_{ab} * \partial_b \rightarrow \partial_a, \omega_{ab} * \partial_a \rightarrow \partial_b, \theta_{ab} * \partial_a \rightarrow 0, \theta_{ab} * \partial_b \rightarrow 0, \partial_a * \partial_b \rightarrow \omega_{ab}$) :

@substitute!(%)($\omega_{ab} * \theta_{bc} \rightarrow 0, \omega_{ac} * \theta_{ad} \rightarrow 0, \omega_{ac} * \theta_{bc} \rightarrow 0, \omega_{ab} * \theta_{ab} \rightarrow 0$) :

@collect_terms!(%);

$$\frac{1}{2}\theta_{ap}\theta_{bq} + \frac{1}{2}\theta_{aq}\theta_{bp} - \frac{1}{D-1}\theta_{ab}\theta_{pq} = P_{22}^{\phi\phi}(2^+)_{ab;pq}$$

Este novo formalismo foi aplicado ao estudo do espectro de teorias de gravitação com torção dinâmica apresentado na tese de Carlos André Hernaski [43], realizada em nosso grupo de pesquisa. Com o auxílio do método aqui apresentado, fomos capazes de construir e discutir a consistência física de uma série de ações gravitacionais caracterizadas pela geração de grávitons massivos com massas na escala de TeV. Estes grávitons podem decair, segundo o que se espera ao acoplar a gravitação com o Modelo Padrão, emitindo jatos fermiônicos que poderão vir a ser detectados na colaboração ATLAS do LHC. Não reproduzimos estes resultados nesta tese, por já terem sido apresentados no trabalho acima citado.

Capítulo 5

Fundamentos da Teoria de Ginzburg-Landau e sua Aplicação à Supercondutividade

Neste capítulo vamos estudar os aspectos mais relevantes da Teoria de Ginzburg-Landau aplicada à supercondutividade, enfatizando a obtenção das equações do estado fundamental. Veremos como estas equações independem da forma do potencial, revelando-se mais fundamentais do que a forma total da energia livre.

5.1 Transições de Fase de Segunda Ordem

O modelo de Ginzburg-Landau (GL)[4] nasceu em 1937, no estudo das transições de fase de segunda ordem. Visava descrever a descontinuidade no calor específico, observada no estanho (Sn) por Keesom e Kok (1932), quando este alcança a temperatura de transição (T_c). Para isto, Landau introduziu o conceito de parâmetro de ordem (Ψ) e propôs uma função F para descrever uma transição de fase de segunda ordem perto de T_c . Este parâmetro de ordem mais tarde foi interpretado como uma função de onda macroscópica.

As características desta função F para que ela descreva transições de segunda ordem devem ser

$$\frac{\partial F}{\partial x} \rightarrow \text{contínua}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \rightarrow \text{descontínua}. \quad (5.2)$$

Esta descontinuidade na segunda derivada está associada com a descrição termodinâmica da função F , pois esta será identificada como a energia livre do sistema e, como veremos mais à frente, é justamente a segunda derivada da energia livre que nos dá o valor do calor específico. Para ver isto com maior clareza, considere a energia livre de Helmholtz em sua relação com a segunda lei da termodinâmica

$$dF = -sdT - pdv, \quad (5.3)$$

$$s = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_v ; \quad p = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T, \quad (5.4)$$

onde o calor específico é dado por

$$c_e = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_v. \quad (5.5)$$

Uma forma simples de descrever a energia livre, que satisfaz estes requerimentos perto da transição, é escrevê-la como uma série em função do parâmetro de ordem

$$F = F_0 + \alpha(T) |\Psi|^2 + \beta(T) |\Psi|^4, \quad (5.6)$$

onde T é a temperatura. A expansão acima é uma função par, pois não inclui o termo cúbico ou linear em Ψ . Posteriormente veremos que este é um requerimento físico, pois a simetria de calibre proíbe termos ímpares em Ψ .

Por outro lado, queremos que a energia livre descreva um mínimo não trivial com respeito ao parâmetro de ordem Ψ e apresente uma mudança para valores acima e abaixo de T_c . A proposta mais simples para isto é dada por

$$\alpha(T) \mapsto \alpha_0(T - T_c), \quad (5.7)$$

$$\beta(T) \mapsto \frac{\beta}{2} > 0. \quad (5.8)$$

A restrição de β para valores positivos garante a obtenção de um mínimo e, assim, a estabilidade do sistema. A forma linear de $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ em função da temperatura põe em evidência dois mínimos, um para a região normal e outro para a fase supercondutora como se mostra na figura 5.1:

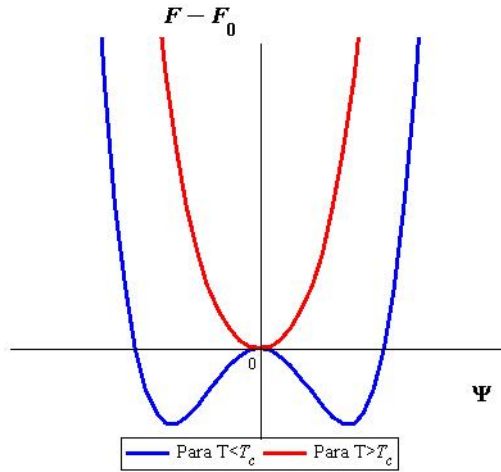


Figura 5.1: Energia livre em função do parâmetro de ordem (5.6). A linha azul corresponde à fase supercondutora e a linha vermelha à fase normal.

Como podemos ver, a fase normal apresenta um mínimo para $\Psi_0 = 0$. Por outro lado, após ter alcançado a temperatura crítica, temos dois mínimos

$$\Psi_0 = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_0(T - T_c)}{\beta}}. \quad (5.9)$$

Substituindo o valor acima na equação (5.6), obtemos

$$F_{min} = -\frac{(\alpha_0(T - T_c))^2}{2\beta}. \quad (5.10)$$

Então, a entropia e o calor específico são

$$s = -\frac{\partial F_{min}}{\partial T} = \frac{\alpha_0^2}{\beta}(T - T_c), \quad (5.11)$$

$$c_e = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_v = T \frac{\alpha_0^2}{\beta}. \quad (5.12)$$

Veja que a derivada da entropia é descontínua pois, para $T > T_c$, a energia livre $F_{min} = 0 \rightarrow s = 0$.

Com tudo isto, conseguiu-se explicar a descontinuidade no calor específico do estanho, conforme verificado experimentalmente por Keesom e Kok em 1932.

5.2 Modelo de Ginzburg-Landau e as Equações do Estado Fundamental

Na seção anterior, trabalhamos com um parâmetro de ordem (PO) real. Porém, quando acoplamos este com o campo eletromagnético, a prescrição de acoplamento mínimo nos pede que este PO seja complexo. Graças a isso, Landau conseguiu, em 1950, explicar as transições de fase de segunda ordem e também o efeito Meissner, dentro da teoria de London (no próximo capítulo veremos como o acoplamento com um fundo de spin-carga via conexão de spin e campo eletromagnético pede que o PO não só seja complexo, mas também um espinor).

Neste sentido, considerando a teoria das transições de fase de segunda ordem estudada na seção anterior, acoplamos o parâmetro de ordem minimamente com o eletromagnetismo. Chegamos, então, à seguinte energia livre:

$$F_{GL} = \int \frac{d^3x}{V} \left\{ \frac{1}{2m} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\partial} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \alpha_0 (T - T_c) |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{\vec{h}^2}{8\pi} \right\}, \quad (5.13)$$

onde $\vec{h} = \vec{\partial} \times \vec{A}$ é o campo magnético local.

As equações de Ginzburg-Landau e a lei de Ampère são

$$(D_i^2 + \alpha_0 (T - T_c) + \frac{\beta}{2} |\Psi|^2) \Psi = 0, \quad (5.14)$$

$$\vec{\partial} \times \vec{h} = \vec{J}, \quad (5.15)$$

onde a corrente \vec{J} é dada por

$$\vec{J} = \frac{q}{2m} [\Psi^\dagger D_i \Psi + c.c.]. \quad (5.16)$$

Observe que a equação (5.16), é análoga à equação de London quando Ψ é constante

$$\vec{J} = \frac{-q^2}{mc} |\Psi_{cte}|^2 \vec{A}. \quad (5.17)$$

Esta equação nos dá um indício de que o parâmetro de ordem Ψ_{cte} pode ser tratado como uma função de onda macroscópica.

Vamos agora procurar as equações do estado fundamental usando o método de Abrikosov [14]. Este método consiste em postular uma equação para o parâmetro de ordem Ψ da seguinte forma

$$(D_1 + iD_2)\Psi = 0. \quad (5.18)$$

Em princípio isto poderia ser considerado muito arbitrário. Porém, existe uma outra forma de chegar na equação (5.18). Esta forma consiste em aproximar linearmente o parâmetro de ordem Ψ na equação de Ginzburg-Landau (5.14), desprezando assim os termos com potências maiores ou iguais a dois como $|\Psi|^2$. Com isto, chegamos a

$$(D_1^2 + D_2^2)\Psi = -\alpha_0(T - T_c)\Psi. \quad (5.19)$$

A equação acima pode ser vista como se fosse a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico, onde $\alpha_0(T - T_c)$ representa os autovalores da energia. Além disso, os operadores D_1 e D_2 podem ser identificados como os operadores de posição e momento. Isso é possível quando o campo magnético é constante. Para entender isto, considere o comutador das derivadas covariantes

$$[D_1, D_2] = -\frac{q\hbar}{ic}h_3. \quad (5.20)$$

Se o campo magnético h_3 for constante, temos uma nova “constante de Planck” dada por $\frac{q}{c}h_3\hbar \rightarrow \hbar$. Desta forma, conseguimos mapear a equação de Ginzburg-Landau na sua aproximação linear e com campo magnético constante no problema do oscilador harmônico quântico, cujo estado fundamental é justamente dado pela equação (5.18) postulada por Abrikosov.

É possível exibir um gráfico da solução da equação (5.18) para Ψ_0 quando o campo magnético é constante e dado por

$$A_1 = -Hx_2, \quad A_2 = 0, \quad (5.21)$$

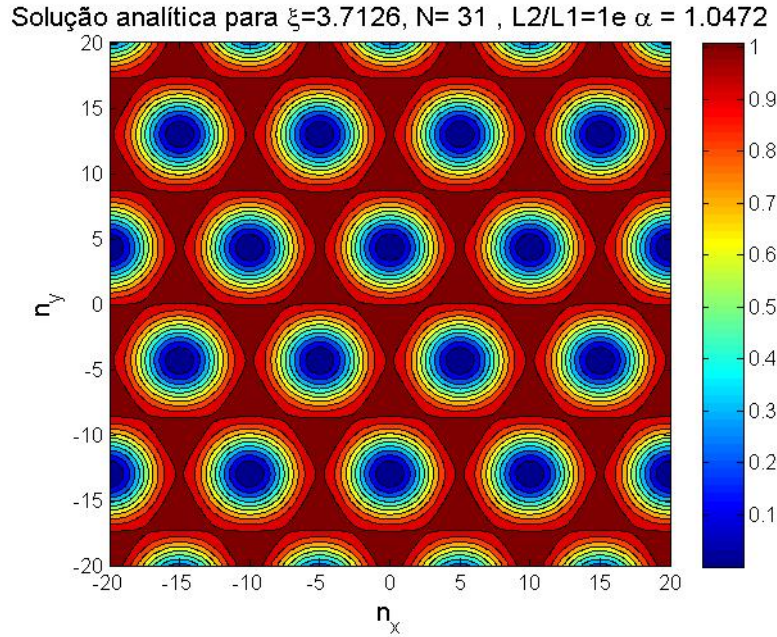


Figura 5.2: Densidade $|\Psi|^2$. A cor azul indica onde esta se anula em oposição à cor vermelha.

Esta figura (5.2) já nos indica o aparecimento de configurações topológicas de tipo vórtice e foi uma das maiores contribuições de Abrikosov no estudo da supercondutividade [14].

5.3 As Equações do Estado Fundamental e o Método de Bogomol'nyi

Vamos obter novamente as equações do estado fundamental da seção anterior usando um método diferente daquele de Abrikosov. Para começar, apresentamos uma fórmula muito útil para modificar a parte cinética de nossa energia livre. Esta fórmula é chamada de Lichnerowicz-Weitzenböck e é dada por

$$\int \frac{d^2x}{A} \left\{ \frac{|D_1\Psi|^2}{2m} + \frac{|D_2\Psi|^2}{2m} \right\} = \int \frac{d^2x}{A} \left\{ |D_+\Psi|^2 + \frac{\hbar q}{2mc} h_3 |\Psi|^2 \right\}. \quad (5.22)$$

Esta fórmula despreza os termos de superfície e, embora seja simples, sua generalização para um fundo de spin-carga muda consideravelmente, como veremos no próximo capítulo.

Usando a fórmula (5.22) na energia livre (5.13), obtemos

$$F_{GL} = \int \frac{d^3x}{V} \left\{ |D_+\Psi|^2 + \frac{\hbar q}{2mc} h_3 |\Psi|^2 + \alpha_0 (T - T_c) |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{\vec{h}^2}{8\pi} \right\}. \quad (5.23)$$

Agora, escrevemos a expressão acima usando a transformação de escala do Apêndice B. Isto vai permitir reduzir o número de parâmetros da teoria de Ginzburg-Landau a um (κ)

$$F_{GL} = \int \frac{d^3x}{V} \left\{ |D_+\Psi|^2 + \frac{1}{2} h_3 |\Psi|^2 + \alpha_0 (T - T_c) |\Psi|^2 + \frac{1}{2} |\Psi|^4 + (\kappa^2 - \frac{1}{2}) \vec{h}^2 \right\}. \quad (5.24)$$

A equação (5.24) pode ser escrita como a soma de dois quadrados perfeitos (se $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$F_{GL} = \int \frac{d^3x}{V} \left\{ |D_+\Psi|^2 + \frac{1}{2} (h_3 + \alpha_0 (T - T_c) + |\Psi|^2)^2 + (\kappa^2 - \frac{1}{2}) \vec{h}^2 - \frac{1}{2} \alpha_0 (T - T_c) h_3 \right\}. \quad (5.25)$$

Veja que o último termo é uma derivada total e corresponde à quantização do fluxo dos vórtices (não interagentes). Então, para $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ temos exatamente dois quadrados perfeitos. Isto quer dizer que o mínimo da energia é alcançado quando

$$D_+\Psi = 0, \quad (5.26)$$

$$h_3 = \alpha_0 (T_c - T) - |\Psi|^2. \quad (5.27)$$

Aparentemente, as equações (5.26) e (5.27) são válidas somente para $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vamos ver que isso não é totalmente verdade. Tirando as equações de movimento da energia livre na sua forma (5.23) (veja que κ não aparece), obtemos

$$(D_- D_+ + \frac{\hbar q}{2mc} h_3 + \alpha_0 (T - T_c) + \frac{\beta}{2} |\Psi|^2) \Psi = 0, \quad (5.28)$$

$$\vec{\partial} \times \vec{h} = \vec{j}, \quad (5.29)$$

onde

$$j_1 = \frac{q}{2m} [\Psi^\dagger D_+ \Psi + (D_+ \Psi)^\dagger \Psi] - \frac{\hbar q}{2m} \partial_2 |\Psi|^2, \quad (5.30)$$

$$j_2 = \frac{q}{2m} [\Psi^\dagger D_+ \Psi + (D_+ \Psi)^\dagger \Psi] - \frac{\hbar q}{2m} \partial_1 |\Psi|^2. \quad (5.31)$$

Se usamos a condição de Abrikosov (5.18) no parâmetro de ordem Ψ podemos reduzir as equações de movimento (5.28) e (5.29) à sua forma (5.26) e (5.27) (veja que em momento nenhum introduzimos o parâmetro κ).

As equações do estado fundamental, estudadas como resultado do método de Bogomol'nyi, são restritas pelo valor de κ . Contudo, se usamos a condição de Abrikosov, esta é suficiente para determinar a segunda equação do estado fundamental (5.27). Isto é possível devido a que a equação (5.27) é exatamente a lei de Ampère (5.29) (nenhuma aproximação foi usada, somente o vínculo de Abrikosov).

Capítulo 6

Teoria de Einstein-Cartan Aplicada à Fenomenologia da Supercondutividade

O entendimento da supercondutividade traz consigo muito fenômenos interessantes: a estrutura planar dos cupratos a alta temperatura (*high T_c*), a coexistência entre dois estados de ordem (por exemplo a fase supercondutora e uma ordem magnética), a presença de dois *gaps* (brechas) e a formação de configurações do tipo *stripes* (listras) numa interrelação entre spin e carga. Neste capítulo, propomos um modelo geométrico-fenomenológico para discutir alguns dos fenômenos mencionados anteriormente usando o formalismo de Einstein-Cartan e obtendo as equações do estado fundamental. Mostraremos que as duas equações do estado fundamental são condição suficiente para resolver as quatro equações de movimento do modelo a ser proposto, no limite de Bogomol'nyi $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou até além deste valor (veja a discussão do capítulo anterior). Também vamos discutir os diferentes limites das equações do estado fundamental.

6.1 Localidade e Correlações de Spin Através da Tetra e Conexão de Spin

O modelo de GL [4] explicou satisfatoriamente muitas características fenomenológicas da supercondutividade. Sua forma está baseada nas teorias de transição de fases de segunda ordem, no princípio de acoplamento mínimo com o eletromagnetismo e na presença de uma função de onda macroscópica que atua como parâmetro de ordem. Além disso, este modelo também descreve um mecanismo para a quebra espontânea de simetria das teorias de calibre e, com isso, consegue explicar o efeito Meissner.

A quebra espontânea da simetria tem inspirado físicos que a usaram para descrever um mecanismo de geração de massa na física de altas energias. A mesma ideia também é aplicada a teorias de Grande Unificação (GUTs - *Grand Unified Theories*) que tentam descrever uma física além do Modelo Padrão. Dentro destas teorias, há um modelo supersimétrico de Yang Mills com $N = 2$ que é equivalente à teoria de Donaldson [23]. Neste contexto, E. Witten propõe uma nova forma de calcular muitos resultados da teoria de Donaldson, usando o funcional de Seiberg-Witten, cujas equações duais resultaram ser as equações do estado fundamental usado em muitas teorias de calibre com quebra espontânea da simetria, incluindo o modelo de GL.

A explicação do efeito Meissner na física da matéria condensada nos levou a propor um mecanismo de quebra espontânea da simetria cuja aplicabilidade chegou à física de altas energias. Acreditamos, de forma inversa, que existe uma retribuição vinda das equações de Seiberg-Witten dentro da física de altas energias, que pode nos ajudar a entender os novos supercondutores na matéria condensada.

Cem anos se passaram desde o descobrimento da supercondutividade e ainda continuamos encontrando novos tipos de supercondutores, cujas propriedades não podem ser explicadas pela teoria microscópica BCS (Bardeen, Cooper e Schrieffer [3]) nem pela formulação fenomenológica do modelo de GL [4]. Por exemplo, a estrutura planar nos cupratos a alta temperatura, a presença de supercondutividade e coexistência com outro

estado de ordem, o surgimento de dois gaps e suas inhomogeneidades, a formação de novas estruturas eletrônico-geométricas, como as densidades de onda de carga e spin, CDW e SDW (*charge density wave, spin density wave*), são temas interessantes que vão além das teorias convencionais (BCS e GL). De fato, a interrelação entre carga e spin junto com a fase supercondutora não somente coexistem mas parece que se estabilizam mutuamente [5, 6, 12, 46]. Abordaremos esta coexistência introduzindo um acoplamento mínimo com os graus de liberdade de spin e carga (potencial eletromagnético $A_i(x)$ e conexão de spin ω_i^{ab}) com um parâmetro de ordem espinorial de duas componentes. A conexão de spin vai permitir acoplar o parâmetro de ordem aos graus de liberdade de spin e também promover uma simetria de rotações locais. Esta simetria rotacional parece ser importante para o entendimento da fase do *pseudogap* para os supercondutores de alta T_c [8]. A presença da conexão de spin será um dos ingredientes chave para a introdução de um fundo geométrico do tipo Einstein-Cartan.

Além do parâmetro de ordem espinorial de duas componentes Ψ_α e da conexão de spin ω_i^{ab} , também introduziremos um outro conjunto de campos, que chamaremos de correlações de spin $e_i^a(x)$ (tetradas). Este nome é devido a uma dependência na posição, introduzida nas matrizes de Pauli (operadores de spin) através da seguinte relação:

$$e_i^a(x)\sigma_a = \sigma_i(x). \quad (6.1)$$

A introdução de todos estes novos ingredientes tem motivação física desde a perspectiva da matéria condensada e da supercondutividade. Porém, neste ponto, também podemos analisar estes novos campos como se tivessem vindo de uma teoria gravitacional (lembre que estamos fortemente inspirados pelo funcional de Seiberg-Witten). Então, se supomos que a conexão de spin ω_i^{ab} é o campo de calibre das rotações de Lorentz e que as correlações de spin $e_i^a(x)$ são as tetradas responsáveis pela simetria sob transformações gerais de coordenadas, naturalmente chegamos a um cenário no qual a supercondutividade é estudada geometricamente. Este cenário é aquele descrito pela geometria de Einstein-Cartan [1, 2, 26].

Quando usamos a teoria de Einstein-Cartan para o estudo da supercondutividade, precisamos dar uma interpretação física para as novas grandezas (torção e curvatura) desde uma perspectiva da matéria condensada. Uma das interpretações mais comuns é relacionada com a teoria de calibre de defeitos na física do estado sólido [32, 33, 34] onde os efeitos de torção e curvatura podem ser vistos como inserções de densidades de dislocações e disclinações no arranjo dos átomos dentro do material.

No que se segue, vamos propor uma energia livre para estudar a supercondutividade desde uma perspectiva geométrica, considerando um parâmetro de ordem espinorial minimamente acoplado com um fundo de spin-carga e usando o formalismo de primeira ordem para introduzir um fundo geométrico do tipo Einstein-Cartan. Este mecanismo é conveniente porque é relacionado com a teoria de defeitos em sólidos. Todas as grandezas geométricas serão motivadas a partir de idéias requeridas no entendimento de supercondutores de alta T_c .

6.2 Energia Livre para Dois Parâmetros de Ordem Espinoriais e as Equações de Movimento

Nesta seção, propomos um modelo fenomenológico que considera as interações de spin e carga minimamente acopladas com um parâmetro espinorial de duas componentes Ψ_α , cujo estado fundamental contém vórtices de spin e vórtices magnéticos.

Considerando a teoria de transições de fase de segunda ordem [4], o fundo de spin-carga [5] e o princípio de acoplamento mínimo das teorias de calibre [31], propomos uma energia livre análoga à do modelo de GL:

$$F = \int d^3x e \left\{ \frac{1}{2m} (|\vec{D}\Psi|^2 - gR|\Psi|^2 - \epsilon^{ijl} \frac{T_{ij}^k}{2} [\Psi^\dagger \sigma_k (D_l \Psi) + (D_l \Psi)^\dagger \sigma_k \Psi]) \right. \quad (6.2)$$

$$\left. - \vec{\alpha} \cdot (\Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi) + \frac{\beta}{2m} |\Psi|^4 + \frac{\vec{h}^2}{8\pi} + \frac{|\vec{\alpha}|^2}{2\beta} \right\}, \quad (6.3)$$

onde, $\vec{\alpha}$ é um vetor constante e a derivada covariante é dada por

$$D_i \Psi_\alpha = \left[\frac{\hbar}{i} \delta_\alpha^\beta \partial_i - \frac{\hbar g}{2} \omega_i^{ab} (\Sigma_{ab})_\alpha^\beta - \frac{\hbar q}{c} \delta_\alpha^\beta A_i \right] \Psi_\beta. \quad (6.4)$$

Na equação acima, A_i e ω_i^{ab} são o campo eletromagnético e a conexão de spin respectivamente, responsáveis pelas simetrias locais $U(1)$ e $SU(2)$. O símbolo e indica o determinante do campo local e_i^a , que nos permite introduzir a noção de correlações de spin através da seguinte equação:

$$e_i^a(x) = \left\langle 0 \left| \frac{1}{2} \{ \sigma_i(x), \sigma^a \} \right| 0 \right\rangle, \quad (6.5)$$

onde σ_a são as matrizes de Pauli constantes.

As grandezas físicas R and T_{ij}^k estão relacionadas com os tensores intensidade de campo da simetria $SU(2)$ e com o campo de calibre das correlações de spin; \vec{h} é o campo magnético local, vindo da simetria $U(1)$ (veja o apêndice A).

O modelo (6.3) tem muitos parâmetros (\hbar, q, c, m, β, g). Vamos aplicar uma transformação de escala (unidades reduzidas) para reduzir o número deles (veja o apêndice B). Depois de aplicar a transformação, obtemos a seguinte energia livre

$$F = \int d^3x e \left\{ |\vec{D}\Psi|^2 - gR|\Psi|^2 - \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} T_{ij}^k [\Psi^\dagger \sigma_k (D_l \Psi) + (D_l \Psi)^\dagger \sigma_k \Psi] \right. \quad (6.6)$$

$$\left. + \frac{1}{2} |\Psi|^4 + \kappa^2 \vec{h}^2 - \hat{\alpha} \cdot (\Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi) + \frac{1}{2} \right\}, \quad (6.7)$$

Esta energia livre tem quatro conjuntos de campos independentes: o parâmetro de ordem $\Psi_\alpha(x)$, que obedece uma equação do tipo Ginzburg-Landau, o campo eletromagnético $A_i(x)$, a conexão de spin $\omega_i^{ab}(x)$, que descreve a interação entre o magnetismo e o spin minimamente acoplado com os outros parâmetros e a tetrada $e_i^a(x)$, que nos permite introduzir um fundo geométrico para estudar a energia livre [1, 2, 26]. A abordagem aqui usada é conhecida em teorias gravitacionais no formalismo de primeira ordem, para um espaço do tipo Einstein-Cartan. Além disso, tem sido usada também na teoria de defeitos na física do estado sólido [32, 33, 34]. Esta ultima abordagem, relacionada com a matéria condensada, é mais apropriada pelo fato de tratar com sistemas não relativísticos.

Agora, usando o princípio variacional, obtemos

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - gR - \hat{\alpha} \cdot \vec{\sigma} - T^l D_l - \nabla_l T^l + |\Psi|^2\right) \Psi = 0, \quad (6.8)$$

$$\partial_i(eF^{ij}) = \frac{e}{2\kappa^2} (\Psi^\dagger T^j \Psi - j^j), \quad (6.9)$$

$$g|\Psi|^2 \left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R\right) + \frac{1}{2}\nabla_k J_{ji}^k + T_{jm}^k J_{ik}^m = \Theta_{ij}, \quad (6.10)$$

$$(T_{ba}^i - e_{[b}^i \partial_{a]}) |\Psi|^2 + \Psi^\dagger T^i \Sigma_{ab} \Psi + \Psi^\dagger \Sigma_{ab} T^i \Psi = K_{ab}^i, \quad (6.11)$$

onde

$$T^l = \sigma_k \frac{1}{2} \epsilon^{ijl} T_{ij}^k, \quad (6.12)$$

$$j^j = \frac{1}{2} [\Psi^\dagger (D^j \Psi) + (D^j \Psi)^\dagger \Psi], \quad (6.13)$$

$$J_k^{ij} = \epsilon^{ijl} [\Psi^\dagger \sigma_k (D_l \Psi) + (D_l \Psi)^\dagger \sigma_k \Psi], \quad (6.14)$$

$$K_{ab}^i = \frac{1}{2} [\Psi^\dagger \Sigma_{ab} (D^i \Psi) + (D^i \Psi)^\dagger \Sigma_{ab} \Psi] + \frac{1}{4} J_{ab}^i. \quad (6.15)$$

O tensor energia-momento associado à nossa energia livre (6.7) é dado por

$$\Theta_{ij} = (D_i \Psi)^\dagger (D_j \Psi) - \hat{\alpha}_i (\Psi^\dagger \sigma_j \Psi) + \kappa^2 h_i h_j + \quad (6.16)$$

$$-\frac{1}{2} g_{ij} \left[(\vec{D} \Psi)^\dagger \cdot (\vec{D} \Psi) - \hat{\alpha} \cdot (\Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi) + \frac{1}{2} |\Psi|^4 + \kappa^2 \vec{h}^2 + \frac{1}{2} \right], \quad (6.17)$$

Apesar da complexidade das equações de movimento e do acoplamento entre elas, mostraremos na seção seguinte que, devido à fórmula de Lichnerowicz-Weitzenböck, estas quatro equações de movimento não são tão complicadas como aparentam. De fato, escolhendo apropriadamente o valor de κ , podemos reduzir estas quatro equações de movimento a somente duas equações diferenciais de primeira ordem.

6.3 A Fórmula de Lichnerowicz-Weitezenböck com Torção e as Novas Equações de Movimento

A fórmula de Lichnerowicz-Weitezenböck [47] é comumente usada quando desejamos obter as equações do estado fundamental que minimizam a energia de nosso sistema. Esta

fórmula é principalmente associada a espinores definidos numa variedade Riemanniana. Contudo, sua forma e idéia sempre são utilizadas quando estudamos configurações topológicas em teorias de calibre, como sólitons, vórtices ou monopólos. Usualmente, esta fórmula é aplicada a espaços com conexão afim simétrica (torção nula). Porém, nesta seção, faremos uma generalização para espaços com torção. Nesta situação, a fórmula se torna

$$\int d^3xe \left(|\vec{\sigma} \cdot \vec{D}\Psi|^2 + \Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi \cdot \vec{h} \right) = \int d^3xe \left[|\vec{D}\Psi|^2 - gR|\Psi|^2 - \Psi^\dagger T^i (D_i \Psi) - (D_i \Psi)^\dagger T^i \Psi \right] \quad (6.18)$$

A fórmula acima (6.18) é obtida desprezando os termos de superfície e usando a condição de metricidade

$$\nabla_i g_{jk}(x) = 0. \quad (6.19)$$

Esta condição é naturalmente definida em espaços pseudo-Riemannianos e significa que preservamos as distâncias (produto escalar) e ângulos. Sua definição na linguagem do formalismo de primeira ordem é dada por uma condição na tetrada:

$$\nabla_i e_j^a(x) = 0, \quad (6.20)$$

a qual nos permite obter a condição de Fock-Ivanenko

$$\nabla_i \sigma_j(x) = 0. \quad (6.21)$$

Uma dedução da condição de Fock-Ivanenko pode ser vista em [30]. Aplicando a fórmula (6.18) na energia livre (6.7) e completando alguns quadrados, temos que

$$F = \int d^3xe \left[|\vec{\sigma} \cdot \vec{D}\Psi|^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{h} + \Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi - \hat{\alpha} \right)^2 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{2} \right) \vec{h}^2 + \vec{h} \cdot \hat{\alpha} \right]. \quad (6.22)$$

Este mecanismo de obter as equações do estado fundamental foi primeiramente desenvolvido por Bogomol'nyi [15] e, neste caso particular em que $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, estas são

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{D})\Psi = 0, \quad (6.23)$$

$$\vec{h} = \hat{\alpha} - \Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi. \quad (6.24)$$

Não é imediato ver que estas duas equações de primeira ordem satisfazem às quatro equações de movimento (2.1-2.4). Para poder ver isto com mais clareza, voltamos a obter as equações de movimento para $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e, usando a expressão da energia livre dada por (6.22) em lugar de (6.7),

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\sigma} \cdot \vec{D}) \Psi + (\vec{h} - \hat{\alpha}) \cdot \vec{\sigma} \Psi + \Psi |\Psi|^2 = 0, \quad (6.25)$$

$$e (\vec{\sigma} \cdot \vec{D} \Psi) \sigma^k \Psi + \frac{1}{2} \partial_j [e \epsilon^{ijk} (h_i + \Psi^\dagger \sigma_i \Psi - \hat{\alpha}_i)] = 0, \quad (6.26)$$

$$\frac{1}{2} G_i G_j + (D_{ij} \Psi)^\dagger (D_k^k \Psi) + (D_k^k \Psi)^\dagger (D_{ij} \Psi) = \theta_{ij}, \quad (6.27)$$

$$\Psi^\dagger \Sigma_{ab} \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{D} \Psi) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{D} \Psi)^\dagger \Sigma_{ab} \Psi = 0, \quad (6.28)$$

onde

$$D_{ij} = \sigma_i D_j, \quad (6.29)$$

$$G_i = h_i - \Psi^\dagger \sigma_i \Psi - \hat{\alpha}_i, \quad (6.30)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \left(|D_k^k \Psi|^2 + \frac{1}{2} \vec{G}^2 \right). \quad (6.31)$$

Agora é mais evidente ver como estas duas equações diferenciais de primeira ordem (6.23, 6.24) são verdadeiramente soluções das quatro equações de movimento (6.8-6.11) e (6.25-6.28). Este limite é obtido para o valor específico de $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, contudo a validade das equações do estado fundamental pode ir além desse valor específico de κ [16].

6.4 Análise das Equações do Estado Fundamental

Nesta seção estudaremos as equações de Seiberg-Witten [23] (estados fundamentais) usando as ferramentas de uma geometria de Riemann-Cartan no formalismo de primeira ordem.

Estas equações (6.23, 6.24) tem a seguinte forma:

$$e_a^i \sigma^a (\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\gamma} \partial_i - \frac{1}{2} \omega_i^{ab} (\Sigma_{ab})_{\alpha\beta} - A_i \delta_{\alpha\beta}) \Psi_\beta = 0, \quad (6.32)$$

$$\hat{\alpha}_i - \Psi^\dagger e_i^a \sigma_a \Psi = h_i. \quad (6.33)$$

A equação (6.23) parece muito com uma equação de Dirac sem massa minimamente acoplada com o campo eletromagnético e com a conexão de spin. Contudo, nosso referencial

é não relativístico, o que faz com que sejamos cuidadosos com as analogias. Na próxima seção, discutiremos os diferentes limites das equações do estado fundamental.

6.4.1 Não–Interação e Não–Correlações de Spin

Este limite é obtido considerando

$$\omega_i^{ab} = 0, \quad (6.34)$$

$$A_i = 0, \quad (6.35)$$

$$e_i^a = \delta_i^a, \quad (6.36)$$

e é caracterizado por um confinamento planar [22] perpendicular a uma coordenada que cresce exponencialmente o valor do parâmetro de ordem Ψ_α . As soluções para as equações do estado fundamental, neste caso, têm a seguinte forma

$$\Psi \propto e^{-q_3} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \quad (6.37)$$

$$\hat{\alpha}_i \propto e^{-2q_3} \sigma_i. \quad (6.38)$$

Neste limite o vetor constante $\hat{\alpha}_i$ pode ser interpretado como o operador de spin restrito ao plano perpendicular à coordenada q_3 , devido a ele ser proporcional às matrizes de Pauli pelo fator e^{-2q_3} .

É importante mencionar que alguns supercondutores em altas temperaturas, especificamente os cupratos, apresentam camadas de CuO_2 que estão fracamente acopladas. Portanto, elas mostram uma estrutura planar [48]. A idéia é tentar simular este comportamento planar introduzindo um parâmetro de ordem de duas componentes Ψ_α [22], governado por uma equação do tipo Dirac em três dimensões.

6.4.2 O Limite de Abrikosov

Este é o limite onde obtemos os vórtices de Abrikosov [14]. Não consideramos correlações de spin, nem a conexão de spin:

$$A_i \neq 0, \quad (6.39)$$

$$\omega_i^{ab} = 0, \quad (6.40)$$

$$e_i^a = \delta_i^a. \quad (6.41)$$

Considere um espinor de duas componentes como nosso parâmetro de ordem

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Então, em notação matricial, as equações do estado fundamental são:

$$D_3\psi_1 + (D_1 - iD_2)\psi_2, \quad (6.43)$$

$$(D_1 + iD_2)\psi_1 - D_3\psi_2 = 0, \quad (6.44)$$

$$h_i = \alpha_i - \Psi^\dagger \sigma_i \Psi. \quad (6.45)$$

As equações acima estão fortemente acopladas uma à outra. Porém, se considerarmos uma interação eletromagnética fraca, podemos assumir um comportamento planar semelhante ao caso sem interação nenhuma. Agora as equações do estado fundamental são:

$$(D_1 - iD_2)\psi_2, \quad (6.46)$$

$$(D_1 + iD_2)\psi_1 = 0, \quad (6.47)$$

$$h_3 = \alpha_3 - \Psi^\dagger \sigma_3 \Psi. \quad (6.48)$$

Estas são as equações do estado fundamental de Abrikosov e contém soluções de tipo vórtice. Soluções tipo vórtice são construídas a partir do parâmetro ψ_1 e as tipo anti-vórtice, pelo parâmetro ψ_2 . Em outras palavras, as duas componentes de nosso parâmetro de ordem espinorial Ψ_α carregam independentemente ambas as soluções em uma única representação.

Se consideramos a interação via conexão de spin ($\vec{\omega}^{ab}$) e desligamos a eletromagnética, esperamos obter outro tipo de defeito topológico. De fato, o grupo de homotopia relacionado a uma simetria de calibre local cujo campo de calibre toma valores na álgebra do grupo $SU(2)$, nos leva a trabalhar com monopólos em lugar de vórtices. Isto é devido a que o grupo das rotações é não-Abeliano. Contudo, a condição de confinamento do parâmetro de ordem restringe as equações do estado fundamental a um plano, fazendo com que o grupo das rotações vire Abelian e trazendo assim vórtices de spin.

Propusemos um modelo fenomenológico-geométrico para o estudo da supercondutividade, relacionando muitos dos novos elementos com problemas atualmente relevantes a este fenômeno. Embora o modelo tenha ganho outros graus de liberdade não convencionais (curvatura e torção), discutimos a viabilidade de interpretar estas novas grandezas como densidades de defeitos na física do estado sólido (disclinações e dislocações). Além disso, a energia livre de nosso modelo obedece a equações do estado fundamental do tipo Abrikosov, que resultaram ser as equações de Seiberg-Witten. Demostramos que essas duas equações são suficientes para resolver, num limite em particular ($\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$), as quatro equações de movimento vindas de uma energia livre que descreve defeitos topológicos como vórtices magnéticos e vórtices de spin.

Capítulo 7

Conclusões Gerais, Perspectivas e Encaminhamentos

A coluna vertebral desta tese é a teoria de Einstein-Cartan no formalismo de primeira ordem. Vimos como podemos aplicar esta teoria em diversos contextos físicos, sendo o mais popular aquele relacionado com modelos de gravitação estendida. Neles, o surgimento da torção pode ser crucial para o entendimento da interação gravitacional, especialmente em cenários onde as densidades de spin são tão significativas quanto a densidade de matéria. Dentro dos modelos de gravitação estendida, vimos a importância da classificação das lagrangeanas do ponto de vista da unitariedade, especialmente quando procuramos um modelo de gravitação quântica. Generalizamos os resultados da gravitação massiva [42] para o caso de torção propagante e vimos a relevância de manter termos onde a torção se propague para obter grávitons massivos. Verificamos, também, como somente em três dimensões o modelo é livre de fantasmas. Concluimos que existe uma vantagem ao usar o formalismo de primeira ordem para o estudo da unitariedade, pois reduzimos o número de derivadas superiores no modelo. O preço a pagar é trabalhar com um número maior de graus de liberdade e com sistemas acoplados.

Na aplicação do formalismo de Einstein-Cartan a sistemas não relativísticos, vimos uma formulação para a teoria de defeitos na física do estado sólido baseada nas teorias

de calibre [32, 33, 34], onde o arranjo dos átomos dentro de um material pode ser visto em analogia com a relatividade geral e a noção de tecido espaço-temporal. As grandezas geométricas, curvatura e torção, são identificadas como as densidades de disclinações e dislocações dentro do material.

Inspirados pela aplicação na teoria de defeitos e motivados pelo funcional de Seiberg-Witten, analisamos também a possibilidade de descrever uma teoria fenomenológica do tipo Ginzburg Landau para supercondutividade. Fazemos isso usando a formalismo de Einstein-Cartan, identificando a tetrada como um campo que introduz a noção de spin local e as correlações de spin. A introdução do spin local quebra a comutatividade entre o operador de momento e o operador de spin. Porém, a conexão de spin entra como um campo de calibre e resolve o dilema, introduzindo simetria sob rotações locais e uma derivada covariante que comuta com o operador de spin local. Para poder introduzir esta conexão de spin não pudemos usar um parâmetro de ordem escalar complexo, como nas teorias de Ginzburg-Landau convencionais, mas sim um espinor. Esta abordagem nos permitiu fundamentar e viabilizar o uso do formalismo geométrico de Einstein-Cartan, sem mencionar nenhum aspecto físico da interação gravitacional (desprezível na fenomenologia dos supercondutores).

Também fizemos uma revisão dos fundamentos da teoria de Ginzburg-Landau, onde resgatamos a abordagem que Abrikosov usou para estudar as equações do estado fundamental. Tais equações foram obtidas por ele usando uma condição para o parâmetro de ordem e aplicando a lei de Ampère-Maxwell [14]. Neste sentido, elas são independentes da forma total da energia livre. Isso contrasta com o método de Bogomol'nyi, geralmente usado nas teorias de calibre e no estudo de estados de energia mínima, onde as equações do estado fundamental somente são válidas para o valor específico de $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Estudando a forma da energia livre (6.3) vimos que, embora o sistema seja complexo e carregue muito mais graus de liberdade que os modelos de Ginzburg-Landau usuais, as equações de movimento têm como solução duas equações de primeira ordem bem simples ((6.23) e (6.24)). Além disso, vimos como os vórtices de Abrikosov também são soluções

quando trabalhamos com um parâmetro de ordem espinorial. Dentro das características do modelo proposto (6.7) vimos que, devido à presença do escalar de curvatura R na energia livre, este pode ser interpretado como uma espécie de temperatura local, podendo assim descrever as inomogeneidades do *gap* dos supercondutores a altas temperaturas. Por outro lado, vimos que uma das soluções das equações do estado fundamental apresenta um comportamento planar para o parâmetro de ordem. Este resultado nos dá indícios de que este modelo pode descrever potencialmente a estrutura de camadas dos cupratos. É justamente este comportamento planar o que restringe a classificação de defeitos topológicos dentro das equações do estado fundamental, permitindo que o grupo não-Abeliano das rotações adquira um comportamento Abelianiano e descreva vórtices de spin. Acreditamos firmemente que todos estes novos ingredientes geométricos são relevantes para o entendimento dos novos supercondutores na sua descrição fenomenológica.

Finalmente comentaremos um pouco sobre as perspectivas desta tese de doutorado. Entre estas, temos o comportamento das tetradas dentro do modelo (6.3). As equações de movimento apresentam uma dinâmica para estes campos mas, na descrição do estado fundamental, as tetradas aparecem como campos de fundo, deixando certa liberdade na solução. Além disso, devido a estarmos desprezando a interação gravitacional e, com esta, também relaxando algumas simetrias (por exemplo, a simetria de Lorentz é restrita à simetria de rotações), procuramos entender que tipo de vínculos podem ser aplicados na simetria de transformações gerais de coordenadas, o que objetivamente seria propor um *ansatz* adequado para as tetradas. Visamos também obter soluções com ambos os campos de calibre ligados (eletromagnético e conexão de spin), para obter um maior entendimento da coexistência entre spin-carga [12], presente em muitos supercondutores. Esta questão pode também ser estendida a outros sistemas de baixas dimensionalidade como, por exemplo, o caso do grafeno, onde as deformações da planaridade são parametrizadas pelo campo escalar de Kekulé [49]. Com a formulação de primeira ordem aqui descrita, seria interessante emprendermos uma análise mais refinada das interações eletromagnéticas no grafeno e, para isto, propomos o cenário em que a geometria associada

às deformações seja descrita na formulação de Einstein-Cartan. Esta não é apenas uma questão de simplesmente se refazer o estudo pois a introdução da tetrada nesta descrição pode representar o aparecimento de novas excitações de spin 1 que se acoplem ao campo do fóton. Este é um problema em aberto, apontado na literatura, que a nossa metodologia de trabalho pode vir a elucidar.

Apêndice A

Alguns Aspectos do Modelo de Calibre $SU(2)$ - $U(1)$ com Correlações de Spin

Este modelo está baseado nas idéias geométricas de Einstein-Cartan, onde as correlações de spin $e_i^a(x)$ são identificadas com as tetradas, que introduzem a simetria sob transformações gerais de coordenadas como segue:

$$e_i^a(x) = \frac{\partial x_i}{\partial x_a}. \quad (\text{A.1})$$

Em nosso modelo, apresentado em (6.3), a noção de spins locais aparece através de $e_i^a(x)\sigma_a = \sigma_i(x)$ e não necessariamente devem ser identificados com uma transformação geral de coordenadas qualquer. Neste sentido, diferimos um pouco da abordagem da geometria de Einstein-Cartan. Esta geometria descreve um espaço pseudo-Riemanniano com torção [2, 1, 26], mas também pode ser interpretada como descrevendo o espaço interno a um material, onde a curvatura e a torção são as densidades de disclinações e dislocações respectivamente [32, 33, 34].

Os tensores intensidade de campo do modelo de calibre $SU(2)$ - $U(1)$ com correlações

de spin são dados por

$$R_{ij}^{ab} = \partial_i \omega_j^{ab} - \partial_j \omega_i^{ab} + g(\omega_{ic}^a \omega_j^{cb} - \omega_{jc}^a \omega_i^{cb}), \quad (\text{A.2})$$

$$T_{ij}^a = \partial_i e_j^a - \partial_j e_i^a + g(\omega_{ic}^a e_j^c - \omega_{jc}^a e_i^c), \quad (\text{A.3})$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \quad (\text{A.4})$$

A equação acima significa que o campo magnético local é dado por $h_i = 1/2\epsilon_{ijk}F^{jk}$.

Usando as tetradas, construímos a métrica

$$g_{ij}(x) = \eta_{ab} e_i^a(x) e_j^b(x), \quad (\text{A.5})$$

onde,

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Então, podemos usar tanto a métrica quanto as tetradas para subir, descer ou contrair índices. Os escalares de curvatura e torção na equação (6.3) são expressões contraídas dos tensores intensidades de campo (A.2) and (A.3)

$$R = e_b^i e_a^j R_{ij}^{ab} \quad (\text{A.7})$$

$$T_{ij}^k = e_a^k T_{ij}^a, \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Transformação de Escala da Energia Livre

Para reduzir o número de parâmetros da energia livre (6.3), fazemos a seguinte transformação de escala

$$\Psi = \sqrt{\frac{|\vec{\alpha}|}{\beta}} \Psi', \quad (\text{B.1})$$

$$x^i = \xi x'^i, \quad (\text{B.2})$$

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m|\vec{\alpha}|}, \quad (\text{B.3})$$

$$\phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{q}, \quad (\text{B.4})$$

$$D_i = \frac{\hbar}{\xi} D'_i, \quad (\text{B.5})$$

$$A_i = \frac{\phi_0}{2\pi\xi} A'_i, \quad (\text{B.6})$$

$$\omega_i^{ab} = \frac{1}{\xi} \omega_i'^{ab}, \quad (\text{B.7})$$

$$\kappa = \frac{mc}{\hbar q} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}. \quad (\text{B.8})$$

As expressões acima nos permitem reescrever a energia livre (6.3) na forma (6.7), onde ela é normalizada pelo seguinte fator

$$F' = \frac{\beta}{|\vec{\alpha}|^2} F. \quad (\text{B.9})$$

Portanto, ao final, ficamos somente com dois parâmetros g e κ . Este tipo de reescalonamento foi feito pela primeira vez por Abrikosov [14].

Bibliografia

- [1] T. Fukuyama, arXiv:0902.3283 [gr-qc].
- [2] T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 212.
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
- [4] Lev. D. Landau, Evgeny. M. Lifschitz, (1984).
- [5] Erez Berg and Eduardo Fradkin and Steven A. Kivelson and John Tranquada *New J. Phys.* **88** (2009) 115004.
- [6] Yoichi. Ando, Kouji. Segawa, and Seiki. Komiyama and A. N. Lavrov *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 137005.
- [7] Koutroulakis, G. and Stewart, M. D. and Mitrović, V. F. and Horvatić, M. and Berthier, C. and Lapertot, G. and Flouquet, J. *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 087001.
- [8] Daou, R. and Chang, J. and LeBoeuf, David and Cyr-Choiniere, Olivier and Lalliberte, Francis and Doiron-Leyraud, Nicolas and Ramshaw, B. J. and Liang, Ruixing and Bonn, D. A. and Hardy, W. N. and Taillefer, Louis *Nature* **463** (2010) 7280.
- [9] Yasushi Homma, *Advances in Physics* **58** (2009) 699.
- [10] Barci, Daniel G. and Fradkin, Eduardo *Phys. Rev. B* **83** (2011) 100509.
- [11] Eduardo Fradkin and Steven A. Kivelson and Michael J. Lawler and James P. Eisenstein and Andrew P. Mackenzie, *Annual Reviews of Condensed Matter Physics* **1** (2010) 153.

- [12] Manuel Núñez Regueiro, The universal behaviour of superconducting quantum critical points. private communication, (2011).
- [13] Demler, Eugene and Hanke, Werner and Zhang, Shou-Cheng Rev. Mod. Phys. **76** (2004) 909.
- [14] A. A. Abrikosov Soviet Physics JETP, **5** (1957) 1174.
- [15] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.
- [16] E. H. Brandt, Rep. Prog. Phys. **58** (1995) 11.
- [17] Doria, M. M. and Gubernatis, J. E. and Rainer, D. Phys. Rev. B **39** (1989) 9573.
- [18] Doria, Mauro M. and Brandt, Ernst Helmut and Peeters, F. M. Phys. Rev. B **78** (2008) 134527.
- [19] S. Salem-Sugui Jr and M. M. Doria and A. D. Alvarenga and V. N. Vieira and P. F. Farinas and J. P. Sinnecker, Phys. Rev. B **76** (2007) 132502.
- [20] Doria, Mauro M. and Brandt, Ernst Helmut and Peeters, F. M. Phys. Rev. B **78** (2008) 054407.
- [21] Rosenstein, Baruch and Li, Dingping Rev. Mod. Phys. **82** (2010) 109.
- [22] A. R. de C. Romaguera, M. M. Doria, and F. F. Peeters, [arxiv.org/abs/1009.4155].
- [23] E. Witten, Math. Res. Lett. **1** (1994) 769 [arXiv:hep-th/9411102].
- [24] C. A. Hernaski, A. A. Vargas-Paredes and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **80** (2009) 124012 [arXiv:0905.1068 [hep-th]].
- [25] J. A. Helayel-Neto, C. A. Hernaski, B. Pereira-Dias, A. A. Vargas-Paredes and V. J. Vasquez-Otoya, Phys. Rev. D **82** (2010) 064014 [arXiv:1005.3831 [hep-th]].
- [26] V. de Sabbata and M. Gasperini, "Introduction to Gravitation," *World Scientific* (1985)

- [27] F. de Juan, A. Cortijo and M. A. H. Vozmediano, Nucl. Phys. B **828** (2010) 625.
- [28] S. Deser, Gen. Rel. Grav. **1** (1970) 9 [arXiv:gr-qc/0411023].
- [29] C. A. Hernaski, B. Pereira-Dias and A. A. Vargas-Paredes, Phys. Lett. A **374** (2010) 3410 [arXiv:1001.2784 [hep-th]].
- [30] M. M. Doria, A. A. Vargas-Paredes and J. A. Helayel-Neto, Mod. Phys. Rev. B **26** 11(2012) 064014 [arXiv:1205.0765v1] [cond-mat.supr-con].
- [31] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance,” Phys. Rev. **96** (1954) 191.
- [32] H. Kleinert, “Gauge fields in condensed matter. Vol. 2: Stresses and defects. Differential geometry, crystal melting,” *Singapore, Singapore: World Scientific (1989) 744-1456*
- [33] M. O. Katanaev, “Geometric Theory of Defects,” Phys. Usp. **48** (2005) 675 [Usp. Fiz. Nauk **175** (2005) 705] [arXiv:cond-mat/0407469].
- [34] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, “Theory Of Defects In Solids And Three-Dimensional Gravity,” Annals Phys. **216** (1992) 1.
- [35] P. Van Nieuwenhuizen, “On Ghost-Free Tensor Lagrangians And Linearized Gravitation,” Nucl. Phys. B **60** (1973) 478.
- [36] E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, “New Ghost Free Gravity Lagrangians With Propagating Torsion,” Phys. Rev. D **21** (1980) 3269.
- [37] E. Sezgin, Phys. Rev. D **24** (1981) 1677.
- [38] K. Hagiwara, P. Konar, Q. Li, K. Mawatari and D. Zeppenfeld, JHEP **0804** (2008) 019 [arXiv:0801.1794 [hep-ph]].
- [39] Z. Ya-Jin, M. Wen-Gan, H. Liang and Z. Ren-You, Phys. Rev. D **76** (2007) 054003 [arXiv:0708.1195 [hep-ph]].

- [40] C. Cartier, R. Durrer and M. Ruser, Phys. Rev. D **72** (2005) 104018 [arXiv:hep-th/0510155].
- [41] P. Jain and S. Panda, JHEP **0403** (2004) 011 [arXiv:hep-ph/0401222].
- [42] M. Nakasone and I. Oda, Prog. Theor. Phys. **121** (2009) 1389 [arXiv:0902.3531 [hep-th]].
- [43] Carlos André Hernaski, Tese de Doutorado - CBPF - 23/03/2011
- [44] K. Peeters-Neto, Utrecht Univ. Jan (2007) [arXiv:0701238 [hep-th]].
- [45] Leo Brewin, Comp. Phys. Communication. number **3** volume **181** (2010) 489 [arXiv:1005.3831 [hep-th]].
- [46] Koutroulakis, G. and Stewart, M. D. and Mitrović, V. F. and Horvatić, M. and Berthier, C. and Lapertot, G. and Flouquet, J. Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 8.
- [47] Yasushi Homma (2003) [arXiv:0307022 [math]].
- [48] Kastner, M. A. and Birgeneau, R. J. and Shirane, G. and Endoh, Y. Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 3 pag. 897
- [49] E. M. C. Abreu, M. A. De Andrade, L. P. G. De Assis, J. A. Helayel-Neto, A. L. M. A. Nogueira and R. C. Paschoal, JHEP **1105** (2011) 001 [arXiv:1002.2660 [hep-th]].