Dissertação de

Mestrado

O Possível Papel de Bósons Escalares de Gauge na Formação de Vórtices em Cenários Supersimétricos

Alfredo Andres Vargas Paredes

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, 21 de Fevereiro de 2008

Dedicatória

Em memória de meu pai Hugo Jack Vargas Vasquez.

Agradecimentos

Agradeço aos Profs. Antonio Isaias Rivasplata Mendoza, José A. Helayël-Neto, Cristine Nunes Ferreira e Álvaro Luis Martins de Almeida Nogueira por toda a sua dedicação, companheirismo, estímulo, paciência e pelos ensinamentos.

Agradeço ao amor da minha vida Claudia Isabel Azucena del Pilar Rivasplata Paz que me forneceu estabilidade emocional para estudar, me acompanhou nos momentos difcies e fez de mim uma pessoa melhor.

A minha família, em especial a minha mãe que morre de saudade de me ver, por todo o amor e por todo o apoio econômico que me permitiou chegar até aqui.

Agradeço à Capes pelo financiamento do meu mestrado, sem o qual dificilmente o teria completado, e ao CBPF pela oportunidade oferecida e por todo o apoio.

Não poderia deixar de agradecer a meus amigos Marcus Vinicius, Carlos Hernanski e Rafael Nardi pela amizade e pelas correções ortográficas na elaboração deste trabalho.

Resumo

Mostra-se que a 2-forma de gauge no Modelo de Kalb-Ramond acopla-se não minimamente com a matéria, devido ao fato de a corrente associada a 2-forma de gauge ser de natureza estritamente topológica. Estuda-se o mecanismo de formação de vórtices magnéticos em teorias de gauge Abelianas onde bósons de gauge escalares acoplam-se não-minimamente à matéria. Considerando-se a possibilidade de se introduzir supersimetria no sistema, conclui-se que a formação de condensados fermiônicos pode ser crucial para o aparecimento dos vórtices e a sustentação do fluxo magnético a estes associado.

Abstract

One probes the mechanism for magnetic vortex formation in the framework of Abelian gauge theories with scalar gauge bosons non-minimally coupled to matter. By contemplating the possibility to make the system supersymmetric, one concludes that fermion condensation may be of crucial importance for the appearance of the vortices and for the stabilisation of their magnetic flux.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução Geral

O estudo das simetrias foram e continuam sendo de muita importância em Física especialmente na descrição das partículas elementares e nas teorias de grande unificação GUT, as quais valendo-se das simetrias pretendem descrever uma ampla variedade de fenômenos num único modelo. Como exemplo pode-se citar o Modelo Padrão das Partículas Elementares (MP) cuja simetria $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, descreve conjuntamente três tipos de interação. Não obstante o grande sucesso deste Modelo, existem, ainda perguntas de grande importância que o MP não consegue explicar satisfatoriamente (seja por falta de formulação teórica ou por falta de evidência experimental). Dentro destas perguntas, encontra-se o mecanismo de geração de massas das distintas partículas. O MP formula que a geração de massas é descrita através do bóson de Higgs, no entanto desta última não se tem ainda nenhuma evidência experimental. O mecanismo de geração de massas através do bóson de Higgs está baseado na quebra espontânea da simetria. Muitas vezes, esta quebra é feita sob configurações de vácuo não trivial, e o estudo destas são de peculiar importância, as quais em geral recebem o nome de defeitos topológicos.

Dentro das configurações não-triviais que podem aparecer em teorias de gauge, domain walls, vórtices, e monopólos magnéticos são os mais relevantes quando estudamos as interações eletrofracas. Incorporar estas estruturas topológicas num contexto supersimétrico é pertinente porque a supersimetria é considerada como uma das simetrias fundamentais nos primórdios do universo justamente quando este tipo de configurações topológicas aparecem simultaneamente com as quebras de simetria nos cenários de grande unificação [1]. Este último é de relevância na procura de vórtices com supersimetria exata, o que reforça a idéia destes defeitos serem formados num cenário dominado pela supersimetria.

Nos últimos anos, tensores anti-simétricos têm sido aplicados em Física Teórica, especialmente quando estes tensores são identificados com uma 2-forma de gauge. Entre as aplicações destes tensores, podemos mencionar primeiro que 2-formas de gauge aparecem naturalmente como uma possível generalização da conhecida 1-forma de gauge usada no Eletromagnetismo. Também se, a 2-forma de gauge em 4D possui simetria de gauge Abeliana e o espaço-tempo é simplesmente conexo, então esta 2-forma é equivalente a um campo escalar real; portanto, está relacionado com o estudo de partículas mediadoras com spin zero[17]. Esta relação entre o campo escalar e a 2-forma de gauge permite discutir o Modelo de Goldstone ou mecanismo de quebra espontânea da simetria em termos de uma 2-forma de gauge[6]. Outra peculiaridade deste campo anti-simétrico, é que a generalização da simetria de gauge para o caso não-Abeliano permite estabelecer uma equivalência com o modelo-sigma não-linear quiral[18]. Estes modelos-sigma têm relevância no estudo das interações de objetos estendidos.

O uso de campos tensoriais anti-simétricos em teorias com supersimetria e modelos com supergravidade é devido ao fato destes aparecerem nos multipletes dos supercampos. De fato, a redução dimensional de 11 para 10 dimensões leva-nos a considerar supersimetrias estendidas com N=8 ou N=4, onde estes campos aparecem naturalmente. Neste trabalho, discute-se a possibilidade de estabelecer a simetria responsável pela conservação da corrente associada ao campo de Kalb-Ramond e analisam-se algumas de suas características principais no que diz respeito à formação de defeitos topológicos, especificamente vórtices magnéticos. Também, introduzindo supersimetria nós estudaremos as excitações fermiônicas que são parceiros da 2-forma de gauge e tentaremos discutir possíveis conseqüências fenomenológicas na formação da matéria escura.

A presente tese está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentam-se alguns resultados essenciais sobre o Modelo de Cremer-Scherk-Kalb-Ramond [2], [3], e discute-se a forma da simetria responsável pela conservação da corrente do Modelo. Prosseguindo-se, no Capítulo 3, formulam-se os ingredientes básicos no estudo de vórtices magnéticos, entre eles a idéia de quebra espontânea da simetria, bósons de Goldstone, teorema de Derrick e a estabilidade topológica no estudo de configurações do tipo-vórtice. No Capítulo 4, introduz-se brevemente o Modelo Supersimétrico a ser estudado e a forma como é obtida a supersimetria N=2-D=3 por redução dimensional. Em seguida, no Capítulo 5, baseando-se no Modelo Supersimétrico, estuda-se o setor bosônico e introduz-se o termo de Fayet-Illiopoulos [4], obtendo-se assim a quebra da simetria para o estudo de vórtices. Finalmente, no Capítulo de Conclusões e Perspectivas, apresentam-se os resultados gerais, são feitas algumas considerações de caráter físico e apresentam-se as propostas encaminhadas de prosseguimento dos trabalhos desenvolvidos a partir desta tese.

Capítulo 2

Natureza da Corrente no Modelo Cremer-Scherk-Kalb-Ramond

Um dos problemas atuais no âmbito da Física é encontrar a simetria responsável pela conservação da corrente de um campo tensorial anti-simétrico de rank-dois (2-forma de gauge). O propósito deste capítulo é mostrar que a corrente que se acopla a este campo é de natureza estritamente topológica.

2.1 O Modelo CSKR

O presente Modelo [2], [3] é descrito por uma 2-forma, $B_{\mu\nu}$ e uma corrente tensorial, $J_{\mu\nu}$, de rank dois, com densidade de Lagrangeano dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} G_{\mu\nu\kappa} G^{\mu\nu\kappa} + J^{\nu\kappa} B_{\nu\kappa}, \tag{2.1}$$

onde $G_{\mu\nu\kappa}$ é o tensor intensidade de campo:

$$G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

A Eq. (2.2) é invariante frente à seguinte transformação de gauge:

$$B'_{\nu\kappa} = B_{\nu\kappa} + \partial_\nu \xi_\kappa - \partial_\kappa \xi_\nu. \tag{2.3}$$

A divêrgencia da 2-forma na transformação é dada por:

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu B'^{\nu\kappa} &= \partial_\nu B^{\nu\kappa} + \Box\xi^\kappa - \partial_\nu\partial^\kappa\xi^\nu; \\
\partial_\nu B'^{\nu\kappa} &= \partial_\nu B^{\nu\kappa} + \Box\left(\frac{\delta^\kappa_\nu - \partial_\nu\partial^\kappa}{\Box}\right)\xi^\nu; \\
\partial_\nu B'^{\nu\kappa} &= \partial_\nu B^{\nu\kappa} + \Box\theta^\kappa_\nu\xi_\nu; \\
\partial_\nu B'^{\nu\kappa} &= \partial_\nu B^{\nu\kappa} + \Box\xi^T_\nu. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

A parte transversa do parâmetro de gauge, $\xi^T_\nu = \theta^\kappa_\nu\xi_\kappa$, na equação (2.4), nos permite fazer a divergência de $B'^{\nu\kappa}$ igual a zero,

$$\xi^T_\nu = -\Box^{-1}\left(\partial^\mu B_{\mu\nu}\right).$$

Trocando a linha na transformação de gauge $B'^{\nu\kappa} \leftrightarrows B^{\nu\kappa}$, e valendo-se da arbitrariedade no parâmetro ξ^T_ν fazemos a seguinte fixação de gauge:

$$\partial_\nu B^{\nu\kappa} = 0. \qquad (2.5)$$

A equação de movimento decorrente de (2.1) é

$$\partial_\mu\partial^\mu B^{\nu\kappa} = J^{\nu\kappa}. \qquad (2.6)$$

Como poderá ser visto na seção seguinte, a 2-forma de gauge carrega só um grau de liberdade sendo equivalente ao campo escalar. Pode-se entender melhor este ponto escrevendo o Lagrangeano do campo escalar e, mediante uma transformação de Legendre, chega-se ao Lagrangeano do campo de Kalb-Ramond. Seja o lagrangeano do campo escalar real dado por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\varphi) &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)\left(\partial^\mu\varphi\right); \qquad (2.7) \\
&= \frac{1}{2}\pi_\varphi\left(\partial_t\alpha\right) - H\left(\pi_\varphi,\varphi\right). \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Todo Lagrangeano deixa a ação invariante quando se soma a ele uma derivada total. Esta derivada total será o nosso gerador da transformação canônica $(\pi_\varphi, \varphi) \to (\pi_{\mu\nu}, B_{\mu\nu})$:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\nu\lambda} \partial_\rho \varphi\right). \tag{2.9}$$

O Lagrangeano do campo escalar transformado é escrito da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(\varphi) &= \frac{1}{2}\pi_\varphi(\partial_t\varphi) - H(\pi_\varphi, \varphi) + \partial_\mu \left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\nu\lambda}\partial_\rho\varphi\right); \\
&= \frac{1}{2}\pi_\varphi(\partial_t\varphi) - H(\pi_\varphi, \varphi) + \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left(\partial_\mu B_{\nu\lambda}\right)\left(\partial_\rho\varphi\right); \qquad (2.10)\\
&= \frac{1}{2}\pi_\varphi(\partial_t\varphi) - H(\pi_\varphi, \varphi) + \varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}(\partial_t\varphi) + \left(\left(\partial_t B_{ij}\right)\varepsilon^{ijk}\partial_k\varphi\right). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Logo, o Hamiltoniano associado a este Lagrangeano é:

$$H(\pi_\varphi, \varphi) = \frac{1}{2}\pi_\varphi(\partial_t\varphi) - \mathcal{L}'(\varphi) + \varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}(\partial_t\varphi) + \left(\partial_t B_{ij}\right)\varepsilon^{ijk}\partial_k\varphi. \tag{2.12}$$

Agora, podemos também escrever o Hamiltoniano associado ao campo de Kalb-Ramond:

$$H(\pi_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\pi_{\mu\nu}(\partial_t B^{\mu\nu}) - \mathcal{L}'(B_{\mu\nu}). \tag{2.13}$$

Devido à Eq.(2.9) não ter dependência explícita no tempo, os Hamiltonianos (2.12) e (2.13) podem ser igualados,

$$\begin{aligned}
H(\pi_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}) &= H(\pi_\varphi, \varphi); \\
\frac{1}{2}\pi_{\mu\nu}(\partial_t B^{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\pi_\varphi(\partial_t\varphi) + \varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}(\partial_t\varphi) + \left(\partial_t B_{ij}\right)\varepsilon^{ijk}\partial_k\varphi; \\
\frac{1}{2}\pi_{0i}(\partial_t B^{0i}) + \frac{1}{2}\pi_{ij}(\partial_t B^{ij}) &= \frac{1}{2}\pi_\varphi(\partial_t\varphi) + \varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}(\partial_t\varphi) + \left(\partial_t B_{ij}\right)\varepsilon^{ijk}\partial_k\varphi. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Da Eq.(2.14) concluimos,

$$\begin{aligned}
\pi_\varphi &= -\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}; \\
\pi_{ij} &= \varepsilon^{ijk}\partial_k\varphi; \qquad (2.15)\\
\pi_{0\mu} &= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo as relações (2.15) em (2.11) obtemos:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{6} G^{\mu\nu\kappa} G_{\mu\nu\kappa}.$$

Deste modo, conclui-se que a diferença entre o Lagrangeano de um campo escalar livre e o campo de Kalb-Ramond livre é dada pela função geratriz (2.9). Portanto a 2-forma de gauge 'on-shell' só propaga um grau de liberdade físico.

2.2 Equação de movimento no espaço dos momenta

Antes de se provar que a corrente de Kalb Ramond é estritamente topológica, é importante escrever a equação de movimento, no espaço dos momenta, utilizando uma base que possa distinguir as componentes longitudinais e transversais na direção de propagação do campo de gauge $B_{\mu\nu}$. A transformada de Fourier da 2-forma é:

$$B_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{B}_{\mu\nu}(k) e^{ikx} d^4k, \tag{2.16}$$

e a nossa base no espaço dos momenta é[1]:

$$\begin{aligned} k^\mu &= (k^0, \overrightarrow{k}); \\ \overline{k}^\mu &= (k^0, -\overrightarrow{k}); \\ e_I^\mu &= (0, \overrightarrow{e}_I), \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde $\overrightarrow{e}_I . \overrightarrow{k} = 0$, com $I = 1, 2$.

Expandindo o campo e o parâmetro de gauge na base escolhida, temos:

$$\widetilde{B}^{\mu\nu} = \alpha k^\mu k^\nu + \beta_I k^\mu e_I^\nu + \gamma_I \overline{k}^\mu e_I^\nu + \delta_{IJ} e_I^\mu e_J^\nu; \tag{2.18}$$

$$\widetilde{\xi}^\nu = a k^\nu + b \overline{k}^\nu + c_I e_I^\nu. \tag{2.19}$$

[1]Nós escolhemos uma base não ortogonal, $k^\mu \overline{k}_\mu \neq 0$.

Introduzindo Eqs. (2.18) e (2.19) em (2.3),

$$\widetilde{B}'^{\mu\nu} = \alpha k^\mu k^\nu + \beta_I k^\mu e_I^\nu + \gamma_I \overline{k}^\mu e_I^\nu + \delta_{IJ} e_I^\mu e_J^\nu + 2k^{[\mu}(ak^{\nu]} + b\overline{k}^{\nu]} + c_I e_I^{\nu]}),$$

onde fez-se a escolha,

$$\begin{aligned} a &= -\alpha; \\ b &= 0; \\ c_I &= -\beta_I. \end{aligned} \tag{2.20}$$

As componentes independentes do tensor $\widetilde{B}^{\mu\nu}$ são reduzidas de 6 para 3 componentes. Como é conhecido, a 2-forma só carrega um grau de liberdade físico, sendo equivalente ao campo escalar [6]. Logo, é possível eliminar mais 2 graus de liberdade físicos baseados na fixação de gauge (2.5),

$$k_\mu \widetilde{B}^{\mu\nu} = k_\mu(\gamma_I \overline{k}^\mu e_I^\nu + \delta_{IJ} e_I^\mu e_J^\nu) = 0.$$

Veja que a fixação de gauge demanda que $\gamma_I = 0$, deixando o tensor $B^{\mu\nu}$ com um grau de liberdade físico:

$$\widetilde{B}^{\mu\nu} = \delta_{IJ} e_I^\mu e_J^\nu. \tag{2.21}$$

Analisando as Eqs.(2.21) e (2.17) notamos que,

$$e_I^i e_J^j \propto \varepsilon^{ijk} k_k.$$

Introduzindo este último resultado na Eq.(2.6), temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{J}^{ij} &= k^2 \delta_{IJ} e_I^i e_J^j; \\ \widetilde{J}^{ij} &= n\varepsilon^{ijk} k_k, \end{aligned}$$

onde $n = k^2 \delta_{IJ}$.,

Se no espaço dos momenta, a corrente da 2-forma de gauge é proporcional ao momento, no espaço de configurações é proporcional à derivada,

$$J^{ij} = n\varepsilon^{ijk} \partial_k j_0. \tag{2.22}$$

Este último resultado explica o fato de que a corrente da 2-forma é geralmente tomada como derivada de um outro campo [5]. Finalmente terminamos escrevendo a nossa corrente anti-simétrica como:

$$J^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\partial_\kappa j_\lambda. \tag{2.23}$$

2.3 Discussões sobre a corrente topológica

Se a conservação da corrente para a 2-forma de gauge está associada ao seu caráter topológico, então ela não é uma corrente de Noether no sentido de não existir transformação de simetria associada que a deixe invariante.

Recentes trabalhos [7] mostram que, considerando o acoplamento do campo de Kalb-Ramond com o campo escalar, é possível ter uma transformação de simetria associada ao setor de matéria. No entanto, a corrente obtida no final continua sendo topológica.

Outra abordagem ao problema da simetria de gauge para a 2-forma [8] consiste em escrever uma transformação de gauge no setor de matéria como uma fase. Esta última é feita colocando-se num dublete um campo escalar e um campo vetorial, onde estes se transformam da seguinte maneira:

$$\delta \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_\mu \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \alpha & \xi^\mu \\ \xi_\mu & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_\mu \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

onde α é um parâmetro escalar.

Resumindo, o sistema acima contém dois parâmetros de gauge, porém descreve duas transformações de gauge concomitantes, uma com parâmetro α e a outra correspondente à 2-forma com parâmetro ξ_μ. No final a corrente conservada obtida contém uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica, sendo que somente a soma de ambas é conservada. O acoplamento da corrente com o campo de Kalb-Ramond Eq.(2.1), garante que esta seja puramente antisimétrica. Portanto o resultado da corrente da 2-forma ser estritamente topológica não está em contradição com a referência acima mencionada.

Nas equações de Maxwell, para se obter a simetria responsável pela conservação da corrente eletromagnética é necessário levar em consideração as transformações de gauge no setor de matéria como fases globais. De acordo com as teorias de Yang-Mills, as transformações de gauge no setor de matéria são feitas através de fases locais, obrigando a definir uma derivada covariante de forma a deixar o Lagrangeano invariante de gauge. É importante notar que a derivada covariante camufla a interação entre os campos. O fato da corrente de Kalb-Ramond ser topológica nos leva a pensar que não existe um análogo às transformações de fase globais ou locais no setor de matéria, portanto não há necesidade de introduzirmos uma derivada covariante. Em outras palavras, a 2-forma de gauge não media interações no setor de matéria, de onde conclui-se que utilizar a prescrição de Yang-Mills para o campo de Kalb-Ramond não é mais possível [9].

Capítulo 3

Fundamentos da Formação de Vórtices

3.1 Introdução

Configurações de vácuo não-triviais em teoria de campos estão fortemente ligadas à formação de defeitos topológicos [10]. Estes defeitos, tais como sólitons, vórtices, monopólos, ínstantons, mérons e texturas são soluções de campo sobre configurações de vácuo não-nulas e com topologia não-trivial. Em outras palavras, se nosso modelo em estudo tem grupo de simetria G, e o valor esperado no vácuo pertence a uma órbita de G, então pode-se identificar um subgrupo H de G, no qual os valores do vácuo permanecem invariantes. Logo, o espaço quociente pode ser definido,

$$M = \frac{G}{H}, \tag{3.1}$$

que é conhecido como a variedade associada ao vácuo degenerado. Como veremos, são justamente as propriedades topológicas de M, especificamente os grupos de homotopia desta variedade, que nos dá a informação do tipo de defeito a ser encontrado e também garantem a estabilidade na solução.

3.2 Quebra espontânea da simetria e configurações do vácuo não-triviais

Um dos modelos mais simples a descrever as características da quebra espontânea é o de Goldstone [12]. O modelo é descrito pelo seguinte Lagrangeano,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{4}\lambda\left(\varphi^*\varphi - \eta^2\right)^2. \tag{3.2}$$

Os valores positivos de λ e η garantem a quebra espontânea da simetria na qual as configurações do potencial adquirem a forma do chapéu mexicano.

A solução do campo φ no vácuo tem a forma:

$$\langle\varphi\rangle = \eta e^{i\theta}, \tag{3.3}$$

onde θ é uma fase nas transformações de gauge do tipo $\varphi' = e^{i(\alpha+\theta)}\varphi$, sendo α o parâmetro da transformação.

Nota-se que o Lagrangeano (3.2) é invariante frente às transformações globais do grupo de simetria $U(1)$, mas o valor esperado no vácuo não é, então são as configurações de mínima energia que quebram a simetria. Para evidenciar melhor as características do modelo é possível reescrever os campos na forma,

$$\varphi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \tag{3.4}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são reais e tem valor esperado de vácuo nulo. Esta última parametrização é possível graças às propriedades dos campos, na quebra da simetria, serem independentes do valor θ, portanto a equação (3.4) é tomada para $(\theta = 0)$. Introduzindo a Eq. (3.4) em (3.2) obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2. \tag{3.5}$$

Então, vemos que o modelo descreve uma partícula escalar massiva para ϕ_1 e uma partícula escalar sem massa, ϕ_2. Esta última é chamada de bóson de Goldstone.

Agora, se introduzimos no Lagrangeano (3.2) um campo de gauge abeliano, obtemos um modelo descrevendo a eletrodinâmica escalar que é invariante frente a transformações locais do grupo de simetria $U(1)$.

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \lambda \left(\varphi^* \varphi - \eta^2\right)^2 , \tag{3.6}$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

Para o estudo das propriedades da quebra espontânea da simetria e usando o gauge no qual o campo φ é real temos:

$$\varphi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1. \tag{3.7}$$

Então, a Eq. (3.6) fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2} \left(\lambda \eta^2\right) \phi_1^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} e \eta\right) A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} \lambda \left(\varphi^* \varphi - \eta^2\right)^2 + O\left(\phi^n\right), \tag{3.8}$$

onde o último termo é $O\left(\phi^n\right) = -\frac{\lambda}{2} \sqrt{2} \eta \phi_1^3 - \frac{\lambda}{4} \phi_1^4$.

É importante notar, como o boson de Goldstone da massa para o campo de gauge. Este modelo é a versão relativista do modelo de Landau-Ginzburg para descrever super-conductores.

3.3 O teorema de Derrick e a formação de vórtices

O teorema de Derrick [11] estabelece que não existem soluções estáveis que independem do tempo para a equação (3.2) em dimensões superiores ou iguais a dois. Para exemplificar o teorema de Derrick usaremos a equação (3.2) em duas dimensões espaciais e calcularemos o valor de mínima energia. Para isto, reescreveremos o campo escalar complexo, φ, da seguinte maneira:

$$\varphi = \phi_1 + i\phi_2, \tag{3.9}$$

$$\overrightarrow{\varphi} = \binom{\phi_1}{\phi_2}. \tag{3.10}$$

A equação (3.10) é um vetor do isoespaço associado ao grupo de simetria $U\left(1\right)$.

No infinito, o campo φ tem o seguinte comportamento assintótico:

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow \overrightarrow{\varphi} \rightarrow \eta \frac{\overrightarrow{x}}{|x|}. \tag{3.11}$$

A Eq. (3.11) combina as componentes espaciais com as componentes do isovetor (3.10).

O valor da energia para sistemas, tipo Eq. (3.2), que independem do tempo é:

$$E = \int d^2x \left(\partial_i \varphi_j \partial^i \varphi_j^* + \frac{1}{4} \lambda \left(\varphi^* \varphi - \eta^2 \right)^2 \right). \tag{3.12}$$

Calculando o rotor de φ no infinito:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi_j &= \frac{\eta}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right); \\ (\partial_i \varphi_j)^2 &= \frac{\eta^2}{|x|^2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Introduzindo Eq.(3.13) em (3.12) obtemos que a energia para configurações no vácuo é logaritmicamente divergente:

$$E = \int d^2x \left(\partial_i \varphi_j \partial^i \varphi_j^* \right) = 2\pi \int_0^\infty |x| \, d\,|x| \, \frac{\eta^2}{|x|^2} = 2\pi \eta^2 \log \left(|x| \right)_0^\infty . \tag{3.14}$$

Uma solução para o problema é fazer o Lagrangeano (3.2) invariante local frente ao grupo $U\left(1\right)$. Em outras palavras, o modelo em estudo é idêntico ao da equação (3.6). O fato de introduzir a derivada covariante $D_\mu \varphi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu \right) \varphi$, faz com que o termo cinético seja diminuido pelo campo de gauge A_μ, tendo assim, a possibilidade de obter uma configuração de energia finita.

Sabendo que $\langle \varphi \rangle = \eta e^{i\theta}$, então, no infinito, a configuração do campo de gauge A_μ deve ter só a componente em θ. O ansatz no qual o campo, A_μ, zera a derivada covariante, é:

$$A_i = \frac{1}{ie} \varphi^{-1} \partial_i \varphi. \tag{3.15}$$

Para mostrar que, $D_i \varphi = 0$, utilizaremos, φ, como:

$$\varphi = e^{i\theta} \eta = \Omega \left(\overrightarrow{x} \right) \eta, \tag{3.16}$$

então,

$$A_i = -\frac{1}{ie}\Omega\partial_i\Omega^{-1}. \tag{3.17}$$

A derivada covariante no infinito é nula:

$$\begin{aligned} D_i\varphi &= \partial_i\varphi + \Omega\left(\partial_i\Omega^{-1}\right)\varphi; \\ &= \partial_i\left(\Omega^{-1}\Omega\right)\varphi = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

A equação (3.18) garante uma configuração de energia finita para φ.

É importante observar que a forma mais geral da Eq. (3.15) é:

$$A_i = -\frac{1}{ie}\epsilon_{ij}\frac{x_j}{r^2}. \tag{3.19}$$

Esta última se lê em coordenadas polares como:

$$\begin{aligned} A_r &= 0; \\ A_\theta &= \frac{1}{er} = \frac{1}{e}\partial_\theta\varphi. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Equação (3.20), nos diz que o campo é um gauge puro no infinito, mas é singular na origem. Temos um fluxo magnético na análise assintótica,

$$\Phi = \int_S Bd\sigma = \int_{C=\partial S} \overrightarrow{A}.d\overrightarrow{x} = \frac{n2\pi}{e} = ng_m. \tag{3.21}$$

onde $g_m = \frac{2\pi}{e}$.

O valor, n, corresponde ao número de voltas da integração na variável angular, φ, em outras palavras, $n \in Z$, isto deixa o fluxo magnético quantizado.

3.4 Descrição Topológica

As propriedades topológicas da equação (3.1) nos dá informação do tipo de defeito a ser encontrado. O modelo sob consideração (3.6), tem simetria local $U(1)$, mas nas configurações de mínima energia a escolha:

$$\langle|\varphi|\rangle = \eta, \tag{3.22}$$

quebra a simetria de $U(1)$ para $\mathbf{1}$, sendo $\mathbf{1}$ a identidade.

Agora, em nosso caso, o primeiro grupo de homotopia são todos os mapeamentos da simetria inicial ao espaço quociente:

$$\Lambda : U(1) \quad \rightarrow \quad \frac{U(1)}{\mathbf{1}} \equiv U(1). \tag{3.23}$$

Comparando a equação (3.23) com (3.1), observamos que $M = U(1)$. A importância do primero grupo de homotopia, ou grupo fundamental, é que, quando aplicado a M, mede a não-contratibilidade desta variedade. Um resultado conhecido é que a variedade associada ao grupo de simetria $U(1)$ é S^1, logo:

$$\pi_1\left(S^1\right) = Z, \tag{3.24}$$

onde Z é um grupo frente à operação da adição e é Abeliano. Cada número está associado à existência de um vórtice. Além disso, pelo fato da variedade S^1 ser singular no vórtice, não existe transformação contínua de uma solução para outra; este é o critério de estabilidade nas soluções dos vórtices.

3.5 A corda de Abrikosov-Nielsen-Olesen

Baseados no Lagrangeano (3.6), estudaremos as possíveis soluções decorrentes das equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi\left(\varphi\varphi^* - \eta^2\right) = 0; \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = 2eIm\left[\varphi^*\left(\partial^\nu - ieA^\nu\right)\varphi\right]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para que se tenha configuração de vórtice utiliza-se o potencial:

$$V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda\left(|\varphi|^2 - \eta^2\right)^2,$$

cuja condição de extremo estabelece que:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\varphi} &= \lambda\varphi\left(|\varphi|^2 - \eta^2\right) = 0; \\ \varphi &= 0, \qquad \varphi = \eta e^{in\theta}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

A segunda derivada do potencial, avaliada nos valores críticos (3.26), permite estabelecer se temos máximos ou mínimos.

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = -\lambda\eta^2 < 0; \tag{3.27}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\eta} = 2\lambda\eta^2 > 0, \tag{3.28}$$

onde (3.27) corresponde a um máximo e (3.28) corresponde a um mínimo

As Eqs. (3.26), (3.16) e (3.19) motivam o seguinte "ansatz" com simetria cilíndrica para o campo φ e o campo A_μ:

$$\varphi = e^{i\theta} f(r); \tag{3.29}$$

$$A_i = -\epsilon_{ij} x_j \frac{n}{er^2} \alpha(r), \tag{3.30}$$

com condições de contorno:

$$\begin{aligned} f(r) &= \eta \ ; \quad r \to \infty; \\ \alpha(r) &= 1 \ ; \quad r \to \infty; \\ f(0) &= \alpha(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Os "ansätze" (3.29) e (3.30), conjuntamente com os limites assintóticos (3.31) descrevem a chamada corda de Abrikosov-Nielsen-Olesen. Embora as equações (3.25) sejam simplificadas no regime estático, não se conhecem soluções exatas. Não obstante, é possível obter aproximações assintóticas das soluções.

Segundo a topologia, as soluções decorrentes de (3.25) e (3.30) descrevem vórtices com grupo de homotopia Z. Este último tem a adição como regra de composição, portanto, é abeliano. Isto permite que os fluxos magnéticos sejam estáveis sob a soma. Outra característica desde tipo de defeitos, é que as soluções por estarem sobre as singularidades da variedade associada ao vácuo degenerado, não é possível estabelecer uma transformação contínua entre duas soluções. Este último ponto é o critério de estabilidade topológica dos vórtices.

Suponha que o sistema em estudo tenha grupo de simetria inicial G, a qual é espontaneamente quebrada para uma simetria H. Se o grupo fundamental do espaço quociente $\pi_1\left(\frac{G}{H}\right) = G^*$ é não trivial, então em geral a regra de composição de G^* pode ou não ser abeliana. O que quer dizer que a interação entre dois vórtices é possível mediante um terceiro vórtice, este tipo de configurações recebem o nome de cordas de Alice.

Capítulo 4

Supersimetria e a formação de defeitos topológicos

4.1 Introdução

O fato de estender a simetria de nosso sistema em estudo abre novas possibilidades na formação de defeitos topológicos. Por exemplo, é um resultado conhecido o fato de não existirem monopólos magnéticos no setor eletrofraco do Moldelo Padrão (MP) de partículas elementares.

O primeiro grupo de homotopia do setor eletrofraco é:

$$\pi_1 \left(SU\left(2\right)_I \times U\left(1\right)_Y \right) = Z; \tag{4.1}$$

portanto o número quântico associado aos vortices é aditivo. Em outras palavras: para que dois vórtices que se encontram, o fluxo magnético total sempre vai ser a soma de cada um dos vórtices. Sabendo que o monopólo pode ser descrito como um vórtice com linhas de fluxo sempre orientadas para fora mas no interior sem fluxo magnético nenhum, então vórtices com número quântico aditivo nunca vão adquirir a configuração de um monopólo magnético.

A situação muda se consideramos vórtices com número quântico multiplicativo, pois têm a chance de adquirir uma configuração tipo monopólo magnético [13]. Soluções tipo monopólo existem em Teorias de Grande Unificação (GUTs), as quais, geralmente contemplam simetrias além do Modelo Padrão na qual este último é imerso numa simetria maior $SU(5)$.

O estudo de defeitos topológicos num contexto supersimétrico é interessante pelo fato de considerar simetrias além do MP, mas também é devido às escalas de energia da formação de defeitos e dos modelos supersimétricos estarem próximas.

4.2 Convenções no Modelo Supersimétrico

A principal idéia de supersimetria é estabelecer uma simetria entre partículas com spin semi-inteiro e partículas com spin inteiro. Isto é feito estendendo a álgebra de Poincaré para incluir não só comutadores, mas também os anticomutadores dos geradores de supersimetria. Embora a supersimetria seja inicialmente formulada em componentes, optou-se pelo formalismo de superespaço e supercampos, o qual foi introduzido por Salam e Strathdee [14], onde as convenções e notação, encontram-se em detalhe na referência [15]:

$$\begin{aligned} D_a &= \partial_a - i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu; \\ \overline{D}_{\dot{a}} &= -\partial_{\dot{a}} + i\theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_\mu. \end{aligned}$$

A ação, formulada no superespaço é escrita como segue:

$$S_{4D} = \int d^4x d^2\theta \left[-\frac{1}{8}W^a W_a + d^2\overline{\theta}\left(-\frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}mVY + \frac{1}{16}\overline{\Phi}e^{2hV}\Phi e^{4gY} \right) \right], \qquad (4.2)$$

onde:

$$
\begin{aligned}
\Phi &= e^{-i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\partial_{\mu}}\left(\varphi+\theta^{a}\chi_{a}+\theta^{2}S\right);\ \overline{D}_{\dot{a}}\Phi=0 && \text{Supercampo escalar quiral}\\
V &= \theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}A_{\mu}+\theta^{2}\overline{\theta\lambda}+\overline{\theta}^{2}\theta\overline{\lambda}+\theta^{2}\overline{\theta}^{2}\Delta && \text{Supercampo vetorial (Wess-Zumino)}\\
\Sigma_{a} &= e^{-i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\partial_{\mu}}\left(\psi_{a}+\theta^{b}\Omega_{ba}+\theta^{2}\xi_{a}\right);\overline{D}_{\dot{a}}\Sigma_{a}=0 && \text{Supercampo fermiônico quiral}\\
W^{a} &= -\frac{1}{4}\overline{D}^{2}D^{a}V && \text{Super-intensidade de campo para } V\\
Y &= \frac{i}{8}\left(D^{a}\Sigma_{a}-\overline{D}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right) && \text{Super-intensidade de campo para } \Sigma_{a}
\end{aligned}
$$

O campo de Kalb Ramond é colocado no tensor Ω_{ba} da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\Omega_{ba} &= \epsilon_{ba}\rho+(\sigma^{\mu\nu})_{ba}\mathbf{B}_{\mu\nu};\\
\rho &= P+iM;\\
\mathbf{B}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\left[B_{\mu\nu}-i\widetilde{B}_{\mu\nu}\right];\\
\widetilde{B}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Pode ser observado na ação Eq. (4.2) que a 2-forma de gauge é colocada como um acoplamento não mínimo, porque só apareceram derivadas do supermultiplete Σ_a que contém o campo de gauge anti-simétrico. O porquê do acoplamento não mínimo já foi esclarecido no primeiro capítulo.

Integrando a ação Eq.(4.2) nas variáveis grassmannianas $d^2\theta d^2\overline{\theta}$, temos:

$$
\begin{aligned}
S_{4D} = \int d^{4}x\{ & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{3!}G_{\mu\alpha\beta}G^{\mu\alpha\beta}+m\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_{\mu}\partial_{\nu}B_{\alpha\beta}+2\Delta^{2}+\\
& +\frac{i}{2}\overline{\Lambda}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda+\partial_{\mu}M\partial^{\mu}M+\frac{i}{4}\overline{\Xi}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Xi+im\overline{\Lambda}\Gamma_{5}\Xi-4mM\Delta+\\
& +e^{-2gM}[\nabla_{\mu}\varphi\nabla^{\mu}\varphi^{*}+\frac{i}{4}\overline{X}\Gamma^{\mu}\nabla_{\mu5}X-\frac{g^{2}}{2}\partial_{\mu}M\left(\overline{X}\Gamma_{L}\Gamma^{\mu}\Xi\varphi^{*}+\overline{\Xi}\Gamma_{L}\Gamma^{\mu}X\varphi\right)+\\
& +\frac{g}{2}\left(\overline{\Xi}\Gamma^{\mu}\Gamma_{R}X\nabla_{\mu}\varphi+\overline{X}\Gamma_{L}\Gamma^{\mu}\Xi\nabla_{\mu}\varphi^{*}\right)-i\frac{g^{2}}{4}\varphi^{*}\varphi\overline{\Xi}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Xi-\frac{g^{2}}{4h}\overline{\Xi}\Gamma_{5}\Gamma^{\mu}J_{\mu}\Xi+\\
& +\varphi\varphi^{*}\left(2h\Delta+igh\overline{\Lambda}\Gamma_{5}\Xi-g^{2}\partial_{\mu}M\partial^{\mu}M\right)-h\left(\varphi\overline{\Lambda}\Gamma_{R}X+\varphi^{*}\overline{\Lambda}\Gamma_{L}X\right)+\\
& +\left(S-\frac{ig}{2}\overline{X}\Gamma_{L}\Xi+\frac{g^{2}}{2}\overline{\Xi}\Gamma_{L}\Xi\varphi\right)\left(S^{*}+\frac{ig}{2}\overline{X}\Gamma_{R}\Xi+\frac{g^{2}}{2}\overline{\Xi}\Gamma_{R}\Xi\varphi^{*}\right)]\},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

onde se adota a representação de Weyl para as matrizes-gamma. As derivadas covariantes, a corrente e os campos fermiônicos são dados por:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\mu} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{a\dot{b}}, \\ \overline{\sigma}^{\mu a\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}; \\
J_{\mu} &= -\frac{ih}{2}\left(\varphi^{*}\nabla_{\mu}\varphi - \varphi\nabla_{\mu}\varphi^{*}\right); \\
\nabla_{\mu}\varphi &= \left(\partial_{\mu} + ihA_{\mu} + ig\widetilde{G}_{\mu}\right)\varphi; \\
\nabla_{\mu 5}X &= \left(\partial_{\mu} - ihA_{\mu}\Gamma_{5} - ig\widetilde{G}_{\mu}\Gamma_{5}\right)X; \\
\Xi &\equiv \begin{pmatrix} \xi^{a} \\ \overline{\xi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad X \equiv \begin{pmatrix} \chi^{a} \\ \overline{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda^{a} \\ \overline{\lambda}^{\dot{a}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

É conhecido que o calibre de Wess-Zumino não mantém manifestas as transformações de SUSY. Logo, as transformações na Eq. (4.3), que restauram o calibre da transformação de SUSY, são:

$$
\begin{aligned}
\delta\varphi &= \varepsilon^{a}\chi_{a}; \\
\delta\chi_{a} &= 2\varepsilon_{a}S - 2i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\varepsilon}^{\dot{a}}D_{\mu}\varphi; \\
\delta S &= -i\overline{\varepsilon}_{\dot{a}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}D_{\mu}\chi_{a} + 2h\overline{\lambda}_{\dot{a}}\overline{\varepsilon}^{\dot{a}}\varphi;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{2}\overline{\varepsilon}_{\dot{a}}\overline{\xi}^{\dot{a}} - \frac{i}{2}\varepsilon^{a}\xi_{a}; \\
\delta\xi_{a} &= 2\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\varepsilon}^{\dot{a}}\left(\partial_{\mu}M - i\widetilde{G}_{\mu}\right); \\
\delta\widetilde{G}^{\mu} &= \frac{i}{2}\varepsilon^{b}(\sigma^{\mu\nu})_{b}{}^{a}\partial_{\nu}\xi_{a} + \frac{i}{2}\overline{\varepsilon}_{\dot{b}}(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\partial_{\nu}\overline{\xi}^{\dot{a}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta A^{\mu} &= \varepsilon^{a}\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\lambda}^{\dot{a}} - \overline{\varepsilon}_{\dot{a}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\lambda_{a}; \\
\delta\lambda_{a} &= 2\varepsilon_{a}\Delta + \frac{i}{2}\sigma^{\nu}_{a\dot{b}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{b}b}\varepsilon_{b}F_{\mu\nu}; \\
\delta\Delta &= -\frac{i}{2}\varepsilon^{a}\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_{\mu}\overline{\lambda}_{\dot{a}} - \frac{i}{2}\overline{\varepsilon}_{\dot{a}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\partial_{\mu}\lambda_{a}.
\end{aligned}
$$

As expressões $\delta\chi_a$, $\delta\xi_a$ e $\delta\lambda_a$ são de especial importância porque são as exitações fermiônicas geradas no nível fundamental bosônico do vórtice ou monopólo que podem aparecer quando qualquer modelo em particular é adotado.

4.3 A redução dimensional de D=4 a D=3

Escolhendo a prescrição ∂_3(todos os campos) $= 0$, pode-se identificar,

$$
\begin{aligned}
A^{\widehat{\mu}}\,(\widehat{\mu} \equiv 0,1,2) &\equiv A^{\mu}, \qquad N \equiv A^3, \qquad B^{3\mu} \equiv B^{\mu}, \qquad B^{\mu\nu} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho} Z_{\rho}; \\
\partial_{\mu} Z^{\mu} &= -\widetilde{G}^3, \quad \partial^{\mu} B^{\nu} - \partial^{\nu} B^{\mu} = G^{\mu\nu}, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho 3};
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

e colocando $\widehat{\mu}= 0,1,2,3$, e $\mu = 0,1,2$, podem-se obter,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{6} G_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}} G^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}} &\longmapsto -\frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \partial_{\mu} Z^{\mu} \partial_{\nu} Z^{\nu}; \\
-\frac{1}{4} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &\longmapsto -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} N \partial^{\mu} N; \\
m\varepsilon_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}\widehat{\lambda}} A^{\widehat{\mu}} \partial^{\widehat{\nu}} B^{\widehat{\rho}\widehat{\lambda}} &\longmapsto m\varepsilon_{\mu\nu\rho} A^{\mu} \partial^{\nu} B^{\rho} + 2mN\partial_{\mu} Z^{\mu}; \\
\nabla_{\widehat{\mu}} \phi^* \nabla^{\widehat{\mu}} \phi &\longmapsto \nabla_{\mu} \phi^* \nabla^{\mu} \phi - (hN - g\partial_{\mu} Z^{\mu})^2 \left|\varphi\right|^2 .
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

A redução dimensional no setor fermiônico pode ser feita escolhendo uma representação apropriada da álgebra de Clifford; neste caso, uma representação puramente imaginária: $\gamma^0 = \sigma_y$, $\gamma^1 = i\sigma_x$, $\gamma^2 = i\sigma_z$

$$
\Gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu} & \\ & -\gamma^{\mu} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};
$$

$$
\Gamma_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.
$$

Em 3D, os campos fermiônicos podem ser rearranjados da seguinte maneira:

$$X_{\pm} = \chi \pm iw;$$

$$\Xi_{\pm} = \xi \pm i\zeta;$$

$$\Lambda_{\pm} = \lambda \pm i\eta.$$

Preservando a mesma notação, o parâmetro infinitesimal de SUSY pode ser dissociado em duas espécies espinoriais:

$$\varepsilon \mapsto \varepsilon, \delta \to \varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm i\delta.$$

4.4 O Modelo N=2 - D=3 sem identificação de campos

Aproveitando a diferença de dimensionalidade do espaço espinorial na redução de D=4 para D=3, pode-se escrever a ação em componentes de uma supersimetria N=2-D=3 como:

$$
\begin{aligned}
S_{3D} = \int d^3x\{ & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + 2m\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu B_\alpha + 2\Delta^2 + (\partial_\mu Z^\mu)^2 + \\
& + \frac{i}{2}\overline{\Lambda}_-\Gamma^\mu\partial_\mu\Lambda_- + \frac{i}{4}\overline{\Xi}_-\Gamma^\mu\partial_\mu\Xi_- + \frac{i}{2}m\left(\overline{\Lambda}_+\Xi_- - \overline{\Lambda}_-\Xi_+\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu N\partial^\mu N + \\
& -4mM\Delta + 2mN\partial_\mu Z^\mu + \partial_\mu M\partial^\mu M + e^{-2gM}[\nabla_\mu\varphi(\nabla^\mu\varphi)^* + \\
& -\left(hN - g\partial_\mu Z^\mu\right)^2|\varphi|^2 + \frac{1}{4}\left(hN - g\partial_\mu Z^\mu\right)\overline{X}_+X_+ + \frac{i}{8}\left(\overline{X}_-\gamma^\mu\nabla_\mu X_- + \overline{X}_+\gamma^\mu\nabla_\mu X_+\right) + \\
& + \frac{g}{4}[\left(\overline{X}_-\gamma^\mu\Xi_- + \overline{\Xi}_+\gamma^\mu X_+\right)(\nabla_\mu\varphi)^* + \frac{g}{4}[\left(\overline{\Xi}_-\gamma^\mu X_- + \overline{X}_+\gamma^\mu\Xi_+\right)\nabla_\mu\varphi + \\
& -i\left(\overline{\Xi}_-X_-\varphi - \overline{X}_-\Xi_-\varphi^*\right)\left(hN - g\partial_\mu Z^\mu\right)] - \frac{g^2}{4}\partial_\mu M\left(\overline{X}_-\gamma^\mu\Xi_-\varphi^* + \overline{\Xi}_-\gamma^\mu X_-\varphi\right) \\
& -i\frac{g^2}{8}|\varphi|^2\left(\overline{\Xi}_-\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_- + \overline{\Xi}_+\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_+\right) + \frac{g^2}{4h}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{\Xi}_-\gamma^\mu J_\mu\Xi_- - \overline{\Xi}_+\gamma^\mu J_\mu\Xi_+\right)\right) \\
& + \overline{\Xi}_-\Xi_-h\left(hN - g\partial_\mu Z^\mu\right)|\varphi|^2 + |\varphi|^2\left(2h\Delta + \frac{igh}{2}\left(\overline{\Lambda}_+\Xi_- - \overline{\Xi}_-\Lambda_+\right) - g^2\partial_\mu M\partial^\mu M\right) \\
& -\frac{h}{2}\left(\varphi\overline{\Lambda}_+X_- + \varphi^*\overline{X}_-\Lambda_+\right) + \left|S - \frac{ig}{4}\overline{X}_-\Xi_+ + \frac{g^2}{8}\varphi\overline{\Xi}_-\Xi_+\right|^2]\}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

As transformações de SUSY para $X_\pm, \Lambda_\pm,\ \Xi_\pm$ e $\partial_\mu Z^\mu$ são escritas abaixo:

$$\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm i\delta;$$

$$\delta X_+ = 2S\varepsilon_+ + 2\left(hN\varphi - i\gamma^\mu D_\mu\varphi\right)\varepsilon_-; \tag{4.8}$$

$$\delta X_- = 2S^*\varepsilon_- + 2\left(hN\varphi^* - i\gamma^\mu D_\mu\varphi^*\right)\varepsilon_+; \tag{4.9}$$

$$\delta\Lambda_\pm = \left(2\Delta + i\gamma^\mu\partial_\mu N\right)\varepsilon_\pm \pm \gamma_\mu\widetilde{F}^\mu\varepsilon_\pm; \tag{4.10}$$

$$\delta\Xi_\pm = \pm 2\left(\gamma^\mu\partial_\mu M + i\partial_\mu Z^\mu\right)\varepsilon_\mp - 2i\gamma^\mu\widetilde{G}_\mu\varepsilon_\mp; \tag{4.11}$$

$$\delta\left(\partial_\mu Z^\mu\right) = \frac{1}{4}\left(\overline{\varepsilon}_+\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_- - \overline{\varepsilon}_-\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_+\right). \tag{4.12}$$

O campo Z^μ, que em 3D é o dual da 2-forma de gauge e que propaga só sua componente longitudinal, conjuntamente com o segundo campo de gauge B_μ, são os campos mais relevantes para nosso estudo de vórtices. Também, as excitações fermiônicas $\delta X_\pm, \delta\Lambda_\pm$, e $\delta\Xi_\pm$, que se propagam no fundo bosônico correspondente ao vórtice, podem ser estudados em conexão com a fenomenologia da matéria escura.

Capítulo 5

2-forma de gauge e sua contribuição na formação de vórtices supersimétricos

Neste capítulo, analisa-se, num contexto supersimétrico, a 2-forma de gauge e suas características na formação de vórtices. O modelo está baseado no trabalho [15]. Os fatos essenciais deste Modelo foram apresentados no Capítulo 4. É importante ressaltar que a 2-forma de gauge é alocada num supercampo espinorial com acoplamento não-mínimo. Logo, mediante uma redução dimensional, e aproveitando-se a diferença de dimensionalidades dos espaços espinorais em 4D e 3D, é possível se chegar a uma supersimetria N=2. É justamente neste contexto que as configurações tipo-vórtice podem ser estudadas. São tomados os campos que vêm da redução dimensional da 2-forma, pois, entre eles, estão os campos com simetria de gauge $U(1)$ com acoplamento mínimo e não-mínimo, assim como o campo Z^{μ}, que é o dual da 2-forma de gauge em 3D.

5.1 Vórtices no Modelo N=2-D=3

Esta seção é destinada ao estudo da parte bosônica da Eq.(4.7), procurando uma quebra espontânea da simetria. Para isto, introduz-se no Lagrangeano o termo de Fayet-Iliopoulos:

$$S_{3D(bosonico)} = \int d^2x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + 2m\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu B_\alpha + (\partial_\mu Z^\mu)^2 +$$
$$\frac{1}{2}(\partial_\mu N)(\partial^\mu N) + 2mN\partial_\mu Z^\mu + (\partial_\mu M)(\partial^\mu M) + 2\Delta^2 - 4mM\Delta + e^{-2gM}[\nabla_\mu\varphi(\nabla^\mu\varphi)^* +$$
$$-\left(hN - g\partial_\mu Z^\mu\right)^2 |\varphi|^2 + |\varphi|^2\left(2h\Delta - g^2\partial_\mu M\partial^\mu M\right)] + \eta\Delta\}, \qquad (5.1)$$

onde $\eta\Delta$, é o termo de Fayet-Iliopoulos, e a derivada covariante com os acoplamentos mínimo e não mínimo é $\nabla_\mu\varphi = \left(\partial_\mu - ihA_\mu - igG_\mu\right)\varphi$. Também, utiliza-se a notação:

$$\begin{aligned} F^\mu &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa}F_{\nu\kappa} \equiv \begin{pmatrix} B \\ E_i \end{pmatrix}, \\ G^\mu &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa}G_{\nu\kappa} \equiv \begin{pmatrix} b \\ e_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando que $\phi = e^{-gM}\varphi$, M sendo escalar real, calcula-se a equação de movimento para o campo auxiliar:

$$\Delta = mM - \frac{h}{2}|\phi|^2 - \frac{\eta}{4}; \qquad (5.2)$$

e inserindo-se a Eq.(5.2) em (5.1), a ação assume a forma:

$$S_{3D(bos\hat{o}nico)} = \int d^2x \left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + 2m\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu B_\alpha + (\partial_\mu Z^\mu)^2 + \right. \qquad (5.3)$$
$$+\frac{1}{2}(\partial_\mu N)(\partial^\mu N) + 2mN\partial_\mu Z^\mu + (\partial_\mu M)(\partial^\mu M) + e^{-2gM}\nabla_\mu\varphi(\nabla^\mu\varphi)^* +$$
$$\left. + |\phi|^2\left(2ghN\partial_\mu Z^\mu - g^2(\partial_\mu Z^\mu)^2 - g^2\partial_\mu M\partial^\mu M\right) - U \right\},$$

onde o potencial U é:

$$U = \frac{h^2}{2}\left(\frac{2m}{h}M - |\phi|^2 + v^2\right)^2 + h^2N^2\,|\phi|^2\,. \tag{5.4}$$

É importante notar que $-2hv^2 = \eta$, e o sistema adquire um extremo quando $\phi = 0$ e $M = \frac{-hv^2}{2m}$, e outro quando $|\phi| = v$, $M = N = 0$.

A partir do Lagrangeano (5.3), obtemos as equações de movimento para Z^μ, N, B^μ e A^μ, que são:

$$\partial_\nu\left((1-g^2\,|\phi|^2)(\partial_\mu Z^\mu) + (m + gh\,|\phi|^2\,N)\right) = 0; \tag{5.5}$$

$$\left(\Box + 2h^2\,|\phi|^2\right)N - 2\partial_\mu Z^\mu\left(m + gh\,|\phi|^2\right) = 0; \tag{5.6}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + 2mG^\nu + J^\nu = 0; \tag{5.7}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} + \frac{m}{2}F^\nu + \frac{g}{2h}\varepsilon^{\mu\kappa\nu}\partial_\mu J_\kappa = 0, \tag{5.8}$$

onde a corrente é dada por:

$$J_\mu \;=\; ih\left(\phi^*\nabla_\mu\phi - \phi\left(\nabla_\mu\phi\right)^*\right).$$

É importante observar que a carga e o fluxo associados ao vórtice são:

$$\int J^0 d^2x = -2m\int G^0 d^2x = -2m\int b d^2x = Q_{v\acute{o}rtice}; \tag{5.9}$$

$$\int B d^2x = -\frac{2}{m}\int \partial_i G^{i0} d^2x = -\frac{2}{m}\int_S \overrightarrow{e}.d\overrightarrow{S} = \Phi_{v\acute{o}rtice}, \tag{5.10}$$

onde as contribuições $\partial_i E_i$ na integração são desprezadas e a circulação de corrente é nula no infinito.

As equações (5.7) e (5.8) dão as informações sobre o setor vetorial da formação do defeito topológico, e correspondem ao campo com acoplamento mínimo no Lagrangeano, A_μ, e ao campo com acoplamento não-mínimo, B_μ. Estas equações podem ser devidamente desacopladas, derivando-se cada uma delas e introduzindo uma na outra:

$$\left(\Box + m^2\right)F^\nu + \left(\frac{mg}{h} + 1\right)\varepsilon^{\mu\kappa\nu}\partial_\mu J_\kappa = 0; \tag{5.11}$$

$$\left(\Box + m^2\right)G^\nu - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{h}\Box - m\right)J^\nu = 0. \tag{5.12}$$

Na Eq. (5.11), pode-se ver claramente que o rotor da corrente de matéria, J_μ, gera um fluxo magnético constante no meio. Agora, o campo G_μ na Eq. (5.12), que vem da redução dimensional da 2-forma em 4-D, contribui para a formação do vórtice ao longo da corrente J_μ. Pode-se simplificar as equações escolhendo o valor de $g = \frac{-h}{m}$. Logo, estas duas últimas equações ficam:

$$\left(\Box + m^2\right) F^\nu = 0; \tag{5.13}$$

$$\left(\Box + m^2\right) \left(G^\nu + \frac{1}{2m} J^\nu\right) = 0. \tag{5.14}$$

O valor de $g = \frac{-h}{m}$ é análogo ao acoplamento magnético crítico escolhido na referência [15], que simplifica o sistema, e estabelece uma relação linear entre F_μ e J_μ. É importante mencionar que, com este valor de g, é obtida também a supersimetria N=2 da referência [16] . No caso estudado nesta tese, tomando-se uma solução particular da Eq. (5.14), pode-se obter uma relação linear entre a corrente J_μ e o campo G_μ.

$$G^\mu = \frac{-1}{2m} J^\mu. \tag{5.15}$$

Não obstante, a relação linear entre G_μ e J_μ não parece ser factível, pelo fato de não ser consistente com as Eqs. (5.7) e (5.8). Segundo estas equações, a relação de dispersão para A_μ é massiva, mas para valores de G^μ proporcionais J^μ fica sem massa.

5.2 A Cota de Bogomol'nyi para a Energia

No cálculo do tensor energia-momento para a Eq. (5.1), não foram considerados os termos proporcionais a $\varepsilon^{\mu\nu\kappa}$, por serem independentes da métrica; então:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu &\to D_\mu - ihA_\mu; \\ -\frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} &\to -\frac{1}{2} G G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}; \\ 2m\varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu B_\alpha &\to 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

onde, $G = 1 - g^2 \left|\phi\right|^2$.

O tensor energia-momento é dado por:

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta\left(\sqrt{g}\mathcal{L}\right)}{\delta g^{\mu\nu}}, \\
g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \\
\sqrt{g} &= 1 + \frac{1}{2}h^{\kappa\lambda}\eta_{\kappa\lambda}.
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

Considerando as Eqs. (5.16) e (5.17), calculamos $T_{\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = {} & G\delta_{\mu\nu}(\partial_\alpha Z^\alpha)^2 + e^{-2gM}\left(2(D_\mu\varphi)(D_\nu\varphi)^* - \eta_{\mu\nu}(D_\alpha\varphi)(D^\alpha\varphi)^*\right) + \\
& + G\left(2(\partial_\mu M)(\partial_\nu M) - \eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha M)(\partial^\alpha M)\right) + (\partial_\mu N)\left(\partial_\mu N\right) + \\
& - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha N)(\partial^\alpha N) + \left(2\partial_\mu Z_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha Z^\alpha\right)\left(2mN + 2gh\left|\phi\right|^2\right) + \\
& + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^\alpha_\mu F_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}G_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} - 2G^\alpha_\mu G_{\alpha\nu} + \eta_{\mu\nu}U.
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

A energia pode ser calculada integrando-se a componente temporal do tensor energia-momento, $E = \int d^2xT_{00}$:

$$
\begin{aligned}
E = \int d^2x \Big\{ & \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{E}^2 + B^2\right) + G\left(\overrightarrow{e}^2 + b^2\right) + G(\partial_\alpha Z^\alpha)^2 + e^{-2gM}(D_0\varphi)(D_0\varphi)^* + \\
& + e^{-2gM}(D_i\varphi)(D_i\varphi)^* + G[(\partial_0 M)(\partial_0 M) + (\partial_i M)(\partial_i M)] + \frac{1}{2}[(\partial_0 N)^2 + (\partial_i N)^2] + \\
& \left(2mN + 2gh\left|\phi\right|^2\right)\left(\partial_0 Z_0 - \partial_i Z^i\right) + U \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

Completando-se quadrados, a equação acima pode ser conduzida à seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
E = \int d^2x \Bigg\{ & \frac{1}{2}\left(B \mp h\left(\frac{2mM}{h} - |\phi|^2 + v^2\right)\right)^2 \pm Bh\left(\frac{2mM}{h} - |\phi|^2 + v^2\right) + \\
& + \frac{1}{2}\left(E_i \pm \partial_i N\right)^2 \mp E_i\partial_i N + G\left(b \pm \partial_0 M\right)^2 \mp 2Gb\partial_0 M + G\left(e_i \pm \partial_i M\right)^2 \mp 2Ge_i\partial_i M + \\
& + G\left(\partial_\mu Z^\mu\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_0 N\right)^2 + e^{-2gM}\left(\left|D_0\varphi \mp ihN\varphi\right|^2 \pm 2NH_0 + \left|\left(D_1 \mp iD_2\right)\varphi\right|^2\right) + \\
& \pm e^{-2gM}\left(\frac{1}{h}\varepsilon_{ij}\partial_i H_j + hB\left|\varphi\right|^2\right) + \left(2mN + 2gh\left|\phi\right|^2\right)\left(\partial_\mu Z^\mu\right) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

onde definimos a corrente H_μ como segue:

$$
H_\mu = -\frac{ih}{2}\left(\varphi^* D_\mu\varphi - \varphi\left(D_\mu\varphi\right)^*\right).
$$

Logo, as equações de movimento auto-duais são:

$$
\begin{aligned}
B \mp h\left(\frac{2m}{h}M - |\phi|^2 + v^2\right) &= 0; \\
E_i \pm \partial_i N &= 0; \\
b \pm \partial_0 M &= 0; \\
e_i \pm \partial_i M &= 0; \\
\partial_\mu Z^\mu \pm \frac{\partial_0 N}{\sqrt{2}} &= 0; \\
D_0\varphi \mp ihN\varphi &= 0; \\
D_1\varphi \pm iD_2\varphi &= 0.
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

No estudo de configurações estáticas, obtém-se:

$$B \mp h\left(\frac{2m}{h}M - |\phi|^2 + v^2\right) = 0; \tag{5.22}$$

$$E_i \pm \partial_i N = 0; \tag{5.23}$$

$$b = 0; \tag{5.24}$$

$$e_i \pm \partial_i M = 0; \tag{5.25}$$

$$\partial_\mu Z^\mu = 0; \tag{5.26}$$

$$A_0 \mp N = 0; \tag{5.27}$$

$$\left(D_1 \pm iD_2\right)\varphi = 0. \tag{5.28}$$

Combinando-se as Eqs. (5.25) e (5.28):

$$\left(\nabla_1 \pm i\nabla_2\right)\phi = 0. \tag{5.29}$$

A cota inferior para energia toma a forma:

$$
\begin{aligned}
E = \int d^2x \Bigg\{ &\pm Bh\left(\frac{2m}{h}M - |\phi|^2 + v^2\right) \mp E_i\partial_i N \mp 2Ge_i\partial_i M + \\
&\pm e^{-2gM}\left(2NH_0 + \frac{1}{h}\varepsilon_{ij}\partial_i H_j\right) \mp hB\,|\phi|^2 \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

5.3 Soluções para as equações de campo

O Lagrangeano (5.3) contém dois campos vetoriais; a quebra da simetria é implementada no campo de gauge A_μ, devido a seu acoplamento ser mínimo. Portanto, as soluções tipo-vórtice deste campo de gauge com simetria cilíndrica são:

$$A_\theta = \frac{1}{hr}\left[a\left(r\right) - n\right]; \tag{5.31}$$

$$\phi = vR\left(r\right)e^{in\theta}. \tag{5.32}$$

O interesse aqui é procurar soluções para o valor do acoplamento crítico $g = -\frac{h}{m}$, porém, é importante reescrever as equações (5.13), (5.14) e (5.29) para o estudo de configurações estáticas.

$$\left(-\nabla^2 + m^2\right)\left(\frac{1}{hr}\frac{da}{dr}\right) = 0; \tag{5.33}$$

$$\left(-\nabla^2 + m^2\right)\left(G^i + \frac{1}{m}J^i\right) = 0; \tag{5.34}$$

$$\left(\nabla_1 \pm i\nabla_2\right)\phi = 0. \tag{5.35}$$

A solução para $a(r)$ é:

$$a\left(r\right) = c_1 + c_2 r I_1\left(mr\right) + c_3 r K_1\left(mr\right) \tag{5.36}$$

onde $I_1\left(mr\right)$ e $K_1\left(mr\right)$ são as funções de Bessel Modificadas de primeira e segunda espécies respectivamente. Também, $F_i = G_i + \frac{1}{m}J_i$, onde F_i é solução da Eq. de Helmholtz (5.34). Usando as formas propostas para ϕ e A_θ, podem-se analisar os limites assintóticos para o campo G_i:

$$F_i = G_i + \frac{ih}{m}\left[\left(\phi^*\partial_i\phi - \phi\partial_i\phi^*\right) - ihA_i\left|\phi\right|^2 - igG_i\left|\phi\right|^2\right]. \tag{5.37}$$

Escrevendo a Eq. (5.37) em coordenadas polares, e tendo em conta as identidades:

$$\partial_1 = \cos\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta,$$
$$\partial_2 = \sin\theta\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\partial_\theta,$$

$$G_1\left(1+\frac{hg}{m}v^2R^2\right) + \frac{2hn}{mr}v^2R^2\sin\theta + \frac{hv^2R^2}{mr}(n-a)\sin\theta = c_1e^{-r(c_2\cos\theta+c_3\sin\theta)}, \quad (5.38)$$

onde c_1e c_2, são constantes de integração e $c_3 = \sqrt{m^2 - c_2^2}$.

No limite $r \to \infty$:

$$G_1\left(1+\frac{hg}{m}v^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \; G_1 \to 0. \quad (5.39)$$

Substituindo as equações (5.24) e (5.39) em (5.9) e (5.10), respectivamente conclui-se, então, que:

$$Q_{vórtice} = 0;$$

$$\Phi_{vórtice} = 0.$$

Estes últimos resultados podem significar a ausência de vórtices topológicos para o valor do acoplamento crítico, $g = -\frac{h}{m}$.

A possibilidade de se obter soluções tipo-vórtice com fluxo não-trivial para um valor da constante de acoplamento g arbitrário continua em estudo; as soluções gerais para os campos de A_μ e B_μ e ϕ formam um sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas.

Outra alternativa para se encontrar soluções tipo-vórtice é considerar contribuições do setor fermiônico da ação (4.7) para as equações de movimento (5.7) e (5.8) para os campos de gauge A_μ e o campo B_μ, da seguinte maneira:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + 2mG^\nu + \hat{J}^\nu \;=\; 0, \quad (5.40)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} + \frac{m}{2}F^\nu + \frac{g}{2h}\varepsilon^{\mu\kappa\nu}\partial_\mu\hat{J}_\kappa \;=\; 0, \quad (5.41)$$

onde se define a corrente $\hat{J}_\mu$ como:

$$\hat{J}_\mu = J_\mu + J_\mu^{férmions},$$

sendo,

$$J_\mu^{férmions} = \frac{i}{8}e^{-2gM}\left(\overline{X}_-\gamma_\mu X_- + \overline{X}_+\gamma_\mu X_+\right) + \frac{g}{4}e^{-gM}\left[\phi\left(\Xi_-\gamma_\mu X_- + \overline{X}_+\gamma_\mu \Xi_+\right)\right.$$
$$\left. +\phi^*\left(\Xi_-\gamma_\mu X_- + \Xi_+\gamma_\mu X_+\right)\right].$$

O fluxo do vórtice, definido pela equação (5.10), depende do limite assintótico:

$$\lim_{r\to\infty}\left(J_i^{férmions}\right). \tag{5.42}$$

Na próxima seção, analisar-se-ão os limites assintóticos para os férmions, respeitando as tranformações de supersimetria (4.8)-(4.12), as relações de Bogomol'nyi e as equações de movimento (5.5)-(5.8).

5.4 Parceiros Fermiônicos dos Bósons de Gauge

O objetivo aqui é procurar os parceiros fermiônicos do setor bosônico que possam se condensar com valor esperado no vácuo distinto de zero. Para isto, analisamos os campos relevantes na formação do vórtice. Entre eles, estão os campos de gauge: A_μ, G_μ e o campo escalar ϕ. As transformações de supersimetria que descrevem a relação destes campos com seus parceiros são as equações (4.8)-(4.12). Embora se tenha uma grande quantidade de parceiros fermiônicos, só a simetria de gauge $U(1)$ em relação ao campo A_μ é quebrada espontaneamente na configuração de mínima energia.

Aplicando-se uma transformação de SUSY sobre esta configuração de mínima energia, geramos um férmion com valor esperado no vácuo distinto de zero. Neste modelo, como pode ser analisado pelas, Eqs. (4.8)-(4.11) mostra-se que há quatro excitações fermiônicas não-triviais geradas a partir do fundo bosônico:

$$\begin{aligned}
\langle\delta X_+\rangle &= 2h\langle N\varphi\rangle\varepsilon_- - i\gamma^\mu\langle D_\mu\varphi\rangle\varepsilon_-,;\\
\langle\delta X_-\rangle &= 2h\langle N\varphi^*\rangle\varepsilon_+ - i\gamma^\mu\langle D_\mu\varphi^*\rangle\varepsilon_+;\\
\langle\delta\Lambda_\pm\rangle &= 2\langle\Delta\rangle\varepsilon_\pm + i\gamma^\mu\langle\partial_\mu N\rangle\varepsilon_\pm \pm \gamma_\mu\left\langle\widetilde{F}^\mu\right\rangle\varepsilon_\pm;\\
\langle\delta\Xi_\pm\rangle &= \pm 2\gamma^\mu\langle\partial_\mu M\rangle\varepsilon_\mp \pm 2i\langle\partial_\mu Z^\mu\rangle\varepsilon_\mp - 2i\gamma^\mu\widetilde{G}_\mu.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Considerando-se configurações estáticas e as relações de Bogomol'nyi, as Eqs. (5.43) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\langle \delta X_+ \rangle &= 2h \langle N\varphi \rangle \varepsilon_- - i\gamma^i \langle D_i\varphi \rangle \varepsilon_-; \\
\langle \delta X_- \rangle &= 2h \langle N\varphi^* \rangle \varepsilon_+ - i\gamma^i \langle D_i\varphi^* \rangle \varepsilon_+; \\
\langle \delta \Lambda_\pm \rangle &= 2 \langle \Delta \rangle \varepsilon_\pm + i\gamma^i \langle \partial_i N \rangle \varepsilon_\pm \pm \gamma^i \left\langle \widetilde{F}_i \right\rangle \varepsilon_\pm; \\
\langle \delta \Xi_\pm \rangle &= \pm 2\gamma^i \langle \partial_i M \rangle \varepsilon_\mp - 2i\gamma^i \left\langle \widetilde{G}_i \right\rangle \varepsilon_\mp.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Considerando o limite assintótico e as relações de Bogomol'nyi quando $r \to \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned}
D_i\varphi &\to 0; \\
E_i &\to 0; \\
G_i &\to 0; \\
N &= \text{const}; \\
M &= \text{const}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Adotando $N \neq 0$, e $M = 0$, só resta uma das equações das eqs. (5.44) que é:

$$\langle \delta X_+ \rangle = 2hN \langle \phi \rangle \varepsilon_-. \tag{5.46}$$

Pode se notar que (5.46) é compatível com a equação de movimento (5.5) para N. Verifica-se então, que depois de uma transformação de supersimetria o valor esperado para a variação do férmion X_+ no infinito toma o seguinte valor:

$$\delta \langle X_+ \rangle = 2hv\varepsilon_-. \tag{5.47}$$

Isto significa que o condensado $\overline{X}_+\gamma_\mu X_+$ pode se materializar para gerar uma contribuição não-trivial à corrente fermiônica.

A equação (5.47) tem relevância na formação de vórtices por fazer com que o limite (5.42) seja não-trivial; portanto, o fluxo associado ao vórtice adquire o seguinte valor:

$$\Phi_{vórtice} = -\frac{g}{mh} \int \varepsilon^{ij} \partial_i J_j^{férmions}. \tag{5.48}$$

Se supomos a existência de vórtices para valores da constante de acoplamento g diferente do acoplamento crítico, então as equações (5.43) descrevem as possíveis partículas fermiônicas que acompanham a formação deste defeito. Note-se que, se acoplamos o modelo N=2-D=3 com o campo gravitacional, é natural que se obtenham cordas cósmicas. É justamente neste ambiente que a parceria fermiônica pode ter relevância na formação da matéria escura. Esta relevância é ainda motivo de pesquisa e é tema de um trabalho em andamento.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

No desenvolvimento deste trabalho, o Segundo, Terceiro e Quarto Capítulos são revisão e discussão de modelos utilizados. Os resultados originais ficaram no Primeiro e Quinto Capítulos, e o assunto recorrente deste trabalho, foi o campo de Kalb-Ramond ou 2-forma de gauge. Um dos problemas em aberto é a possibilidade de escrever um grupo de simetria associado à transformação de calibre do campo. Concluímos, no Primeiro Capítulo, que tal grupo de simetria não existe e que o acoplamento deste campo com a matéria é feito sempre não-minimamente, portanto, a generalização da simetria de gauge para o caso não-Abeliano não parece ser factível. Este último é conhecido na literatura através de um teorema "no-go" apresentado na referência [9].

Também se estudou a função da 2-forma de gauge na formação de vórtices num modelo supersimétrico, depois de uma redução dimensional (N=1-D=4 para N=2-D=3). Verificou-se, então, que se ganha um campo com simetria de gauge $U(1)$ e um campo com propagação longitudinal Z^{μ}. A contribuição do primeiro, pelo fato de ter acoplamento não-mínimo é ao longo da corrente; já, no caso do campo Z^{μ}, este não contribui para configuração do vórtice, porque no funcional de energia, E, aparece num quadrado perfeito, sendo, portanto, identicamente nulo como resultado das relações de Bogomol'nyi. Destas relações, obtêm-se equações diferenciais de primeira ordem. Uma destas equações implica que no regime estático ($G_0 = 0$), a carga do vórtice é nula $\int G_0 d^2x = Q_{vórtice} = 0$.

Investigou-se também as possíveis soluções para os campos de gauge no regime de acoplamento crítico, $g = -\frac{h}{m}$, e um possível ansatz para o campo G_i neste regime. Os resultados mostram que no acoplamento crítico o campo $G_i \to 0$ quando $r \to \infty$, implicando que o fluxo do vórtice é zero: $\int \partial_i G_i d^2x = \Phi_{vórtice} = 0$. O resultado de fluxo nulo contrasta com a referência [15], em que no regime de acoplamento crítico soluções do tipo vórtice são obtidas depois de uma apropriada identificação dos campos, reduzindo consequentemente o espaço funcional. Concluímos também que, embora a carga topológica sempre seja nula, é possível ter configurações tipo-vórtice com fluxo não-nulo no regime de acoplamento crítico $\left(g = -\frac{h}{m}\right)$. Este último é possível quando consideramos contribuições do setor fermiônico acoplado aos campos de gauge A_μ e B_μ.

Em prosseguimento a este trabalho de tese, pretende-se introduzir o Modelo de C.S.K.R acoplado com a gravitação para se reconsiderar a possibilidade de se obter um grupo de simetria associado à conservação da corrente da 2-forma de gauge. Espera-se, devido à presença da gravitação, gerar mecanismos de relaxamento das condições muito restritivas que levam ao teorema no-go apresentado na referência [9]. Outra proposta encaminhada a partir desta tese é o estudo de possíveis soluções para o setor bosônico no Modelo Supersimétrico N=2-D=3 para um valor de g arbitrário. A solução do problema pode ajudarnos a elucidar como o campo de gauge com simetria de gauge $U(1)$ e acoplamento não-mínimo contribui na formação de vórtices. A presença do campo B^μ enfraquece as linhas de campo responsáveis pelo vórtice na situação em A^μ e B^μ são identificados. Tomando-se A^μ e B^μ distintos, o vórtice parece se sustentar somente às custas de condensações no setor fermiônico. Esta questão também será devidamente aprofundada no trabalho que estamos desenvolvendo.

Bibliografia

[1] • M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, Rept. Prog. Phys. **58** (1995) 477 [arXiv:hep-ph/9411342].

[2] • E.Cremmer, J. Scherk, Nucl. Phys. **B72** (1974)117.

[3] • M. Kalb, P. Ramond, Phys. Rev. **D9** (1974) 2273.

[4] • M.F. Sohnius, Phys. Rep. **128** (1985) 39.

[5] • W.A. Moura-Melo, N. Panza, J.A. Helayel-Neto, hep-th/9812069.

• P. Ramond, "Field Theory: A modern Primer", Addisson-Wesley (1990).

[6] • R. L. Davis and E. P. S. Shellard, Phys. Lett. B **214** (1988) 219.

[7] • E. Di Grezia, S. Esposito, hep-th/0304058.

[8] • M.B.Cantcheff, Int. J. Mod. Phys. **B214**, (1988) 2 ;

[9] • M. Henneaux, V.E.R. Lemes, C.A.G. Sasaki, S.P. Sorella, O.S. Ventura, L.C.Q. Vilar, Phys. Lett. **B410** (1997) 195.

[10] • T.W.B. Kibble, J. Phys. **A9**, (1976) 8.

[11] • G. H. Derrick, J. Math. Phys. **5** (1964) 1252.

[12] • J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, (1962) 965.

[13] • G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79** (1974) 276. (2003);

[14] • A. Salam, J.Sathdee, Phys. Rev. **D11**, (1975) 1521.

[15] • H. R. Christiansen, M. S. Cunha, J. A. Helayel-Neto, L. R. U. Manssur and A. L. M. Nogueira, Int. J. Mod. Phys. A **14** (1999) 1721 [arXiv:hep-th/9805128].

[16] • P. Navratil, Phys. Lett. B **365** (1996) 119.

[17] • D. Francia and C. M. Hull, arXiv:hep-th/0501236.

[18] • D. Z. Freedman and P. K. Townsend, Nucl. Phys. B **177** (1981) 282.