



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica

Tese de Doutorado

A teoria geométrica-escalar da gravitação e sua aplicação à cosmologia

Júnior Diniz Toniato

Orientador: Mário Novello

Rio de Janeiro

2014

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica

JÚNIOR DINIZ TONIATO

**A TEORIA GEOMÉTRICA-ESCALAR DA GRAVITAÇÃO E SUA
APLICAÇÃO À COSMOLOGIA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.

Orientador: Mário Novello

Rio de Janeiro
2014

*Dedico este trabalho aos meus pais que sempre confiaram
em mim e estiveram ao meu lado.*

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Mário Novello, por toda a sua dedicação na minha formação como cientista. É incontestável o quanto pude aprender sendo seu aluno.

Aos demais pesquisadores e estudantes do ICRA/CBPF que sempre se mostraram dispostos a discutir física, constantemente fazendo parte do processo de aprendizado que passei nesses quatro anos de doutorando.

Esta tese é fruto de um longo estudo científico no qual devo agradecer a participação direta dos pesquisadores Érico Goulart, Felipe Tovar Falciano, Eduardo Bittencourt, José Martins Salim, Ugo Moschella e Nathalie Deruelle.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.



GOONIES NEVER SAY DIE

Resumo

As antigas teorias gravitacionais que utilizam um campo escalar para representar o campo gravitacional sofrem de uma série de problemas dentre os quais podemos evidenciar dois principais: a fonte do campo gravitacional é o traço do tensor de energia momento e a métrica gravitacional é conformalmente plana. Essas duas características não possibilita o acoplamento entre gravitação e eletromagnetismo e prevê a existência de sistemas de referências preferenciais.

Esta tese apresenta uma nova teoria escalar da gravitação baseada na hipótese Einsteniana de que a gravitação é uma manifestação da estrutura geométrica do espaço-tempo. Na teoria geométrica-escalar toda forma de matéria e energia interage com o campo gravitacional somente através de uma estrutura métrica que surge naturalmente na dinâmica não linear de um campo escalar. Essa propriedade nos permite superar os problemas das antigas teorias escalares e construir uma teoria da gravitação que está de acordo com os principais dados observacionais.

Investiga-se também um modelo cosmológico baseado na gravitação geométrica-escalar. Veremos como as questões sobre a singularidade inicial e expansão acelerada do universo podem ser respondidas de maneira simples, sem que seja necessário o uso de fluidos estranhos como usualmente é feito no modelo cosmológico de Friedmann na relatividade geral.

Abstract

One of the main problems of the ancient proposals for scalar gravity theories comes from the fact that the source of the gravitational field is the trace of the energy-momentum tensor and the metric is conformally flat. These two properties does not allows a coupling between gravity and electromagnetic fields and predicts existence of a preferred referential frame.

The present thesis introduces a new scalar theory of gravity based on the Einstein's assumption that gravitation is an expression of the geometrical estructure of the spacetime. In the geometric scalar theory of gravity all kind of matter and energy interacts with the gravitational field only through a metric structure that naturally arises with the non linear dynamics of a scalar field. This allows us to overcome the problems from the previous scalar theories and construct a gravitational theory which is in accordance with the main observational data.

It is also investigated a cosmological model inside the geometric scalar gravity. We will see how the issues about initial singularity and accelerated expansion of the universe can be answered without make use of strange fluids, as usually is done in the Friedmann cosmological model in general relativity.

Sumário

1	Introdução	1
2	Da relatividade restrita à geral: uma breve revisão	5
2.1	Generalização da mecânica newtoniana	7
2.2	As teorias escalares de Nordström	9
2.2.1	Segunda teoria de Nordström	11
2.2.2	Reformulação de Einstein-Fokker	13
2.3	A proposta de Einstein	14
2.3.1	Fundamentos da relatividade geral	15
2.3.2	Equações de campo e limite Newtoniano	18
2.3.3	Testes da relatividade geral	20
2.4	Teorias escalares pós -relatividade geral	23
2.5	Os problemas das teorias escalares da gravitação	25
3	Geometrização de uma teoria escalar não linear	27
3.1	Geometrias efetivas	28
3.2	Geometrização da dinâmica de um campo	30
4	Teoria geométrica-escalar da gravitação	35
4.1	Fundamentos da gravitação geométrica-escalar	35

4.2	Equações de campo	38
4.3	Solução estática e esfericamente simétrica	42
4.4	Limite Newtoniano	44
4.5	Recapitulação	45
5	Cosmologia na gravitação geométrica-escalar	47
5.1	Métrica de Robertson-Walker	48
5.2	Conteúdo material do universo	50
5.3	Equação dinâmica	51
5.4	Universo com um único fluido material	53
5.4.1	Universo vazio	54
5.4.2	Matéria não relativística	54
5.4.3	Radiação	57
5.4.4	Energia escura	58
5.5	Escalar de curvatura	62
5.6	Constante Cosmológica	62
6	Perturbações cosmológicas	65
6.1	Perturbações do potencial gravitacional	65
6.2	Perturbação da dinâmica	67
6.3	Transformações de calibre	72
6.4	Solução das equações dinâmicas perturbadas	74
7	Considerações finais	79
Apêndices		
A	Testes da relatividade geral	85
A.1	Desvio para o vermelho gravitacional	85

A.2	O avanço no periélio de Mercúrio	87
A.3	Desvio da luz	91
A.4	O atraso no tempo de propagação da luz	92
B	Cosmologia na relatividade geral	95
B.1	Métrica de Robertson-Walker	95
B.1.1	Distância própria	96
B.1.2	Desvio para o vermelho cosmológico	97
B.2	Conteúdo material do universo	98
B.3	Equação de Friedmann	100
B.4	Universo com um único fluido material	102
B.4.1	Universo vazio	102
B.4.2	Matéria não relativística	104
B.4.3	Radiação	105
B.4.4	Constante cosmológica	105
B.5	Universo com múltiplas componentes materiais	107
B.6	Cosmologia não singular	108
	Referências Bibliográficas	111

Capítulo 1

Introdução

A relatividade geral de Einstein é considerada atualmente a teoria física padrão que descreve os fenômenos gravitacionais. Essa posição privilegiada de hoje, quase cem anos após sua criação, está respaldada no grande êxito que a teoria tem obtido ao longo desses anos, não só no campo matemático como na confirmação de muitas de suas previsões teóricas. Já em 1919, quatro anos após a publicação do trabalho de Einstein, a teoria já havia sido bem estabelecida com uma correta verificação do avanço do periélio de Mercúrio, além da confirmação de sua previsão para o desvio da luz quando propagando-se sob influência do campo gravitacional solar.

Embora esse reconhecimento atual seja merecido, a relatividade geral, assim como qualquer outra teoria física, possui limitações que inviabiliza sua aplicação na descrição de certos sistemas físicos, ou força-nos a introduzir conceitos exóticos na tentativa de contornar certas discrepâncias entre teoria e observação. Um claro exemplo desse último caso está representado no conceito de *energia escura*. As observações de supernovas distantes sugerem que o universo expande-se de uma forma acelerada e os modelos cosmológicos elaborados a partir da teoria de Einstein só conseguem gerar um cenário evolutivo desse tipo se adicionarmos ao conteúdo material que compõe o universo uma forma esdrúxula de fluido, totalmente desconhecido e que teria a estranha propriedade de se repelir gravitacionalmente.

A busca por respostas mais convencionais à problemas como o citado acima tem levado os cientistas a desenvolverem teorias gravitacionais alternativas à relatividade geral. As opções são variadas, acoplamento não mínimo, torção, teorias tensoriais-escalares, entre outras. Muitas delas se baseiam em variações dentro da própria

formulação da teoria de Einstein. As teorias $f(R)$ por exemplo, que acrescentam à lagrangiana de Einstein-Hilbert novas potências do escalar de curvatura R , proporcionam uma modificação efetiva da teoria somente em regimes onde os efeitos gravitacionais são intensos o suficiente que escapariam do domínio da relatividade geral, tal como a cosmologia. Em uma situação limite adequada, a teoria de Einstein seria devidamente recuperada, englobando os seus sucessos a essa nova formulação teórica.

Uma modificação dessa maneira não abrange totalmente a ideia de que se elabora uma teoria nova, ao menos no sentido em que Ernst Mach considera em sua crítica epistemológica [1]. Seguindo seu raciocínio, a maneira natural a que devemos nos ater quando se realiza uma modificação em uma teoria paradigmática é retornar às suas origens e reexaminar, dentro de um contexto histórico, o caminho percorrido até sua consolidação atual. Embora isso não garanta sucesso à nova proposta, esse pensamento pode nos levar a encontrar uma descrição física realmente alternativa ao modelo anterior. A própria relatividade geral de Einstein surgiu a partir de profundas modificações conceituais existentes na gravitação universal de Newton e representou uma revolução na física teórica.

A passagem da teoria de Newton para a de Einstein não se deu de forma imediata, nem sequer de modo simples. Com o surgimento da relatividade especial em 1905, pensava-se que a incorporação da gravitação ao conceito relativista naturalmente ocorreria através da substituição do potencial tridimensional Newtoniano por uma função escalar definida no espaço-tempo de Minkowski. Apresentando dificuldades inesperadas, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional, este processo culminou em uma longa discussão científica que acabou levando Einstein à desistência de uma formulação escalar da gravitação para dar lugar à conhecida interpretação geométrica dos fenômenos gravitacionais estabelecido com a relatividade geral.

As chamadas teorias escalares da gravitação, mesmo com o crescente sucesso da relatividade geral, se mantiveram ainda frequentes nas pautas de estudos da comunidade científica até meados dos anos de 1970. Embora fosse incapaz de se elaborar um teoria escalar realista, que pudesse descrever fenômenos considerados básicos, como o desvio gravitacional da luz ou o avanço do periélio de Mercúrio, essas formulações muito servem como laboratório teórico para confrontar o conhecimento dos fenômenos gravitacionais. Entender as razões dos fracassos e sucessos de uma teoria muitas vezes pode nos fazer enxergar através de uma outra ótica fenômenos

físicos previamente conhecidos.

No entanto, o papel do potencial gravitacional escalar pode não estar totalmente determinado, e é isso o que esta tese irá mostrar. É possível estabelecer uma descrição geométrica dos fenômenos gravitacionais, tal como a relatividade geral propõe, a partir de um único campo escalar. Esse resultado fornece uma nova ferramenta teórica de investigação de sistemas gravitacionais que possibilitará olharmos de maneira diferente para questões em aberto na área. Por isso não nos limitamos a introduzir uma nova teoria gravitacional, mostrando sua capacidade de reproduzir os efeitos gravitacionais locais conhecidos e assim descrever satisfatoriamente todo o nosso sistema solar. Este trabalho busca também desenvolver um modelo cosmológico que esteja de acordo com o que se conhece hoje do universo e que possa elucidar os pontos não bem compreendidos pela comunidade de cosmólogos. Veremos como a gravitação geométrica-escalar naturalmente contorna as dificuldades existentes no modelo cosmológico padrão atual, como, por exemplo, a singularidade inicial. Estes e outros tópicos serão discutidos ao longo do desenvolvimento desta tese.

Seguindo esta introdução, o próximo capítulo faz um breve resumo acerca da física e a história das teorias escalares que foram desenvolvidas nos anos entre o advento da relatividade especial até a elaboração da relatividade geral. Entenderemos a origem dos principais problemas das antigas teorias escalares da gravitação e como a teoria de Einstein resolve essas dificuldades.

O capítulo 3 contém um desenvolvimento matemático que mostra como se dá o chamado processo de geometrização nas teorias de campos escalares, um método fundamental para a elaboração da teoria geométrica-escalar. Embora este capítulo desvie um pouco do tema principal da tese, julgamos indispensável ressaltar esse estudo que faz parte da evolução do raciocínio físico que proporcionou a criação da gravitação geométrica-escalar.

O capítulo 4 apresentará a teoria geométrica-escalar da gravitação, seus fundamentos e propriedades básicas. Mostraremos como nossa formulação não apresenta os problemas das antigas teorias escalares e, em particular, como é possível obter as mesmas previsões que a relatividade geral dos chamados testes clássicos da gravitação.

O modelo cosmológico será desenvolvido no capítulo 5 com uma análise de algumas das principais componentes materiais que é fonte de estudo hoje, matéria

não relativística, radiação e energia escura. Também estudaremos a possibilidades de introdução de uma constante cosmológica ao modelo e a análise da formação de estruturas do universo, através de perturbações lineares, será feita no capítulo 6.

O último capítulo resume e discute os resultados apresentados anteriormente e traça perspectivas futuras para essa pesquisa.

A tese também contém dois apêndices que fornecem uma revisão teórica sobre os testes clássicos da gravitação e o modelo cosmológico de Friedmann. Este último serve como um comparativo entre a teoria geométrica-escalar e a relatividade geral.

Capítulo 2

Da relatividade restrita à geral: uma breve revisão

Nos anos que se seguiram a apresentação da teoria da relatividade especial, não se imaginava encontrar uma maior dificuldade para adaptar a gravitação newtoniana aos conceitos revolucionários que a relatividade restrita trazia consigo. A teoria de Newton, baseada em ações instantâneas a distâncias, está em desacordo com a ideia relativista de que nada se movimenta mais rápido que a velocidade da luz e, a solução desta incompatibilidade mostrou-se mais complexa do que se esperava, devido à necessidade de se estabelecer uma generalização do princípio de equivalência de Galileo (também conhecido como o princípio de equivalência fraco) que fosse condizente com o princípio da relatividade. A afirmação Galileana de que, na ausência de forças externas, todos os corpos caem com a mesma aceleração (igualdade entre as massas inerciais e gravitacionais), foi então reformulada por Einstein no que hoje conhecemos como o princípio de equivalência forte, tornando-se uma hipótese heurística necessária para a elaboração do que viria a ser a teoria geral da relatividade.

O princípio de equivalência forte assegura que não é possível distinguirmos entre um referencial acelerado uniformemente e um outro sob a influência de um campo gravitacional homogêneo e estático. Ele automaticamente inclui o princípio de equivalência fraco. Esse princípio revelou consequências que foram importantes na busca por uma teoria relativística da gravitação, tais como o desvio da luz quando se propagando em um campo gravitacional [2]. Mais ainda, exclui-se os sistemas de referências preferenciais, como aqueles englobados pelo espaço-tempo de Minkowski

no caso da relatividade especial, onde assume-se ausência completa da gravitação. Essa ideia é frequentemente referenciada como o princípio geral da relatividade e estabelece uma necessária invariância da teoria segundo transformações entre sistemas de referências arbitrários¹.

Hoje temos um entendimento muito mais claro desses princípios que fundamentam a teoria da relatividade geral mas, historicamente, as consequências do princípio de equivalência se deram de forma não linear. Somente através da solução dos diversos impasses físicos e matemáticos, técnicos e conceituais, que surgiram com as diversas tentativas de formular uma teoria gravitacional relativística, que foi possível esclarecer as implicações do princípio de equivalência.

Outros princípios, provenientes dos conhecimentos físicos da época e pré-relativísticos, também serviram como guias para a busca de uma teoria que descrevesse adequadamente os fenômenos gravitacionais. O princípio da conservação da energia deveria não só ser satisfeito como levar em consideração o conceito unificado de massa/energia e momento, estabelecido pela relatividade especial e o tensor de energia-momento, $T_{\mu\nu}$. Esse princípio exige que a fonte do campo gravitacional seja uma estrutura derivada a partir do tensor de energia-momento e que sua equação dinâmica deve satisfazer a conservação da energia levando-se em conta também a energia produzida pelo campo gravitacional. Essa última questão, como sabemos, não é contemplada satisfatoriamente pela relatividade geral [5–7].

Por fim, o princípio da correspondência requer que a nova teoria da gravitação incorpore a gravitação Newtoniana em uma certa situação limite (baixas velocidades e campos gravitacionais fracos). Essa condição se faz plausível de ser respeitada dado o comprovado sucesso experimental da teoria de Newton ao lidar com os fenômenos gravitacionais nas proximidades da Terra. Assim, vemos que a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi_N = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_N = 4\pi G \rho, \quad (2.1)$$

serve como um ponto de referência para uma nova teoria da gravitação. Como é bem conhecido, ρ representa a densidade de massa e G é a constante gravitacional de Newton, enquanto que iremos utilizar Φ_N para representar o potencial gravitacional Newtoniano. A expressão (2.1) pode ser vista como um modelo estrutural para as

¹Há na literatura excelentes discussões sobre as interpretações do princípio de equivalência, veja por exemplo as referências [3, 4].

equações de campo de uma teoria gravitacional. A dinâmica do potencial gravitacional, tal como a equação acima, deve estabelecer uma relação entre a fonte material (lado direito da igualdade) e as derivadas primeira e segunda do campo (lado esquerdo).

Assim como o princípio da equivalência e o princípio geral da relatividade, a conservação da energia e a correspondência Newtoniana não agiram como hipóteses ou axiomas isolados e bem definidos como apresentados aqui, eram mais um aglomerado de afirmações que afetavam as propostas de teorias como uma variedade de considerações. Nesse sentido, esses princípios como hoje os conhecemos, foram construídos paralelamente à própria relatividade geral durante os anos entre 1907 e 1915 [8,9].

Iremos brevemente revisar os pontos mais importantes dessa interessante história e assim expormos as principais dificuldades encontradas nas teorias escalares da gravitação e como a relatividade geral de Einstein contorna esses problemas, sendo ainda hoje, a única versão de uma teoria gravitacional que sustenta as principais observações experimentais já realizadas. Revisar tais questões irá contextualizar a construção da teoria geométrica-escalar da gravitação que propomos nessa tese.

2.1 Generalização da mecânica newtoniana

Em 1907 Einstein registrou as suas primeiras especulações acerca da possibilidade de estender sua teoria da relatividade especial a movimentos acelerados [10]. Sua descrição é simples e breve, mas suas ideias sobre o tema podem ser reconstruídas facilmente [11].

A proposta naturalmente surge com uma generalização da força Newtoniana ao formalismo quadridimensional da relatividade restrita,

$$\frac{d}{d\tau} \left(M \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = F^\mu, \quad (2.2)$$

onde τ representa o tempo próprio, M é a massa do objeto que sofre ação da força F^μ , e x^μ indica a sua posição no espaço-tempo. Os índices gregos assumem sempre valores 0, 1, 2, 3 ². Esta definição é feita no espaço-tempo de Minkowski, onde a constância da velocidade da luz, indicada pela letra c , implica na condição de normalização da

²Durante toda esta tese usaremos essa notação para os índices gregos enquanto os índices latim assumirão valores de 1 a 3.

velocidade das partículas,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2, \quad (2.3)$$

com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ sendo a métrica de Minkowski. Junto com isso, a invariância da massa da partícula implica

$$\eta_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.4)$$

Essa última expressão nos permite ver claramente como o eletromagnetismo de Maxwell se ajusta naturalmente à relatividade restrita. A força eletromagnética é dada por,

$$F_{em}^\mu = F^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (2.5)$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu, \quad (2.6)$$

é o tensor de Maxwell do eletromagnetismo [12], e $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. Devido ao caráter antissimétrico de $F^{\mu\nu}$, a expressão (2.4) é automaticamente satisfeita.

No caso gravitacional, podemos definir uma quadri-força F_g^μ nos moldes como define-se a força Newtoniana a partir do divergente do potencial gravitacional Φ . No domínio da relatividade restrita escrevemos

$$F_g^\mu = mc^2 \partial^\mu \Phi. \quad (2.7)$$

No entanto, o campo gravitacional deve satisfazer uma equação dinâmica que seja invariante segundo as transformações de Lorentz. Para isso, o operador de Poisson é substituído pelo operador de d'Alembert, e o campo Φ tem sua dinâmica dada por

$$\square \Phi \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \Phi = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho, \quad (2.8)$$

para um sistemas de coordenadas $x^\mu = (ct, x, y, z)$ e com a variável ρ representando a densidade de massa de repouso da fonte do campo gravitacional. Nessa formulação que apresentamos o campo escalar Φ é adimensional.

Essa generalização satisfaz o princípio da correspondência, mas a condição (2.4),

junto com a força gravitacional definida em (2.7), implicam que,

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = 0. \quad (2.9)$$

Em outras palavras, o potencial gravitacional deve permanecer constante ao longo da trajetória da partícula, ou seja, a força gravitacional deve ser nula na partícula.

Além disso, uma análise um pouco mais detalhada mostra que uma teoria como proposta acima falha em cumprir o princípio de equivalência fraco. Essa inconsistência física leva Einstein a abandonar a formulação de uma teoria da gravitação invariante de Lorentz e o faz repensar nesse princípio de equivalência para estabelecer as relações entre um campo gravitacional e uma aceleração correspondente [8]. Mas antes que ele voltasse a publicar sobre o assunto, o físico finlandês Gunnar Nordström propôs algumas variações nessa formulação para escapar dos problemas acima citados.

2.2 As teorias escalares de Nordström

Buscando contornar o problema da adaptação da mecânica newtoniana à relatividade restrita, Nordström primeiramente manteve a generalização da equação dinâmica do campo gravitacional (2.8), como proposta por Einstein. Todavia, sua contribuição relevante veio no tratamento da quadri-força para tornar sua definição compatível com a constância da velocidade da luz. Propôs então que a massa de um corpo dependesse do campo gravitacional [13, 14].

A equação (2.7), é então reescrita como

$$M \frac{dv_\mu}{d\tau} + v_\mu \frac{dM}{d\tau} = M c^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}, \quad (2.10)$$

e o termo de derivada da massa impede o surgimento da condição (2.9). Contrariamente, a contração dessa última expressão com v^μ nos leva a uma equação diferencial facilmente integrável que indica a dependência da massa com o campo gravitacional, a saber

$$M(\Phi) = M_0 e^\Phi, \quad (2.11)$$

com M_0 sendo uma constante de integração. Usando este resultado na equação (2.10),

obtém-se a equação de movimento para uma partícula teste,

$$c^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{dv_\mu}{d\tau} + v_\mu \frac{d\Phi}{d\tau}. \quad (2.12)$$

Nordström afirmava que a equação dinâmica de sua teoria, sendo independente da massa, era um reflexo da igualdade entre as massas gravitacional e inercial. A aceleração de diferentes partículas em um campo gravitacional não depende de suas respectivas massas, implicando que a teoria contém o princípio de equivalência fraco. Porém, essa teoria possui problemas ao descrever o movimento de uma partícula teste em queda livre por exemplo. Considere um campo gravitacional estático, $\partial\Phi/\partial t = 0$, e assumamos que este campo atue somente no sentido da queda da partícula, por exemplo $\Phi = \Phi(z)$. As equações (2.12) são escritas como

$$\frac{dv_\mu}{d\tau} = -v_\mu \frac{d\Phi}{d\tau}, \quad \mu \neq 3, \quad (2.13)$$

$$c^2 \frac{d\Phi}{dz} = \frac{dv_3}{d\tau} + v_3 \frac{d\Phi}{d\tau}. \quad (2.14)$$

Escrevendo as velocidades da partícula em termos do tempo local t , teremos

$$v_0 = c \frac{dt}{d\tau}, \quad v_i = \frac{v_0}{c} V_i, \quad \text{com } V_i \equiv \frac{dx^i}{dt}. \quad (2.15)$$

Substituindo isso nas equações de movimento, verifica-se que

$$\frac{dV_z}{dt} = -c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{d\Phi}{dz}, \quad \frac{dV_x}{dt} = 0, \quad \frac{dV_y}{dt} = 0. \quad (2.16)$$

onde definimos $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$. Esse resultado diz que corpos que possuam velocidades horizontais caem mais lentamente que aqueles que não as possuam, ou seja, corpos girantes em queda livre serão acelerados mais lentamente que os não girantes [15].

Outra questão problemática está relacionada com a determinação da fonte do campo gravitacional. A densidade de massa, como se sabe, é dada em termos da projeção do tensor de energia-momento na direção do observador que se move com velocidade v^μ ,

$$\rho = T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (2.17)$$

Assim, utilizar este parâmetro como a fonte do campo gravitacional resulta em uma

dinâmica do campo que depende da escolha do observador. Além disso, dos estudos conduzidos por Laue [16], sobre a influência da relatividade restrita na teoria de corpos deformáveis, já se sabia que certas propriedades inerciais desses fluidos materiais não poderiam ser reduzidas àquelas apresentadas pelas partículas que compõe este fluido. Foi o trabalho de Laue que generalizou o conceito do tensor de energia do eletromagnetismo apresentado por Minkowski em 1908 no tratamento quadridimensional dado à relatividade restrita. Seus estudos introduziram a noção geral do tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ da matéria. Einstein então sugeriu que a única quantidade escalar que poderia ser fonte do campo gravitacional era o traço do tensor de energia-momento da matéria,

$$T = T_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Isso levou Nordström à formulação de uma segunda teoria gravitacional, no qual acatava as críticas de Einstein.

2.2.1 Segunda teoria de Nordström

Como dito na seção anterior, em sua segunda teoria gravitacional [17], Nordström modifica a fonte do campo escalar da densidade de energia ρ para o traço do tensor de energia-momento, T . Isso implica em considerar que, assim como o campo eletromagnético possui uma energia própria, o campo gravitacional deve conter uma energia, o que leva à uma não linearidade na teoria, já que a relatividade especial afirma que qualquer forma de energia é equivalente à uma massa e assim deve gerar um campo gravitacional. Nordström incluiu essa não linearidade através da adição de um fator gravitacional na fonte do campo e na definição da quadri-força gravitacional, a saber

$$\square \Phi = -\frac{4\pi G}{c^4} \frac{T}{\Phi}, \quad (2.19)$$

e a força gravitacional (2.7) se torna

$$F_g^\mu = \frac{Mc^2}{\Phi} \partial^\mu \Phi. \quad (2.20)$$

Novamente estamos trabalhando com uma formulação onde o campo escalar é adimensional.

A equação de movimento resultante dessa modificação é tal que

$$c^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \Phi \frac{dv_\mu}{d\tau} + v_\mu \frac{d\Phi}{d\tau}, \quad (2.21)$$

com a dependência da massa sendo agora dada de forma linear,

$$M(\Phi) = M_0 \Phi. \quad (2.22)$$

Para analisarmos a conservação da energia, fica mais fácil utilizarmos a maneira pelo qual Einstein apresentou esta teoria de Nordström em 1913 [18]. O tensor de energia-momento da matéria em um sistema fechado é tal que,

$$T^{\mu\nu} = \rho \Phi v^\mu v^\nu. \quad (2.23)$$

Já a contribuição do próprio campo gravitacional será dado por,

$$t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{4\pi G} \left(\partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} w \right), \quad (2.24)$$

com $w \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$. Sob essas definições, o tensor de energia-momento total, $T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$, se conservará. Basta ver que,

$$\partial_\nu t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{4\pi G} \partial^\mu \Phi \square \Phi = -\frac{T}{\Phi} \partial^\mu \Phi, \quad (2.25)$$

onde utilizamos a equação (2.19) e,

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{T}{\Phi} \partial^\mu \Phi, \quad (2.26)$$

considerando-se a conservação da massa, expressa como $\partial_\mu(\rho v^\mu) = 0$. Portanto, estas duas últimas equações mostram que a divergência do tensor de energia-momento total é nula, garantindo a conservação da energia.

Essa teoria chamou a atenção de Einstein, que a qualificou como a única teoria gravitacional satisfatória até o momento. Tanto que pouco tempo depois, publicou uma reformulação geométrica para ela como veremos a seguir.

2.2.2 Reformulação de Einstein-Fokker

Em 1914, Einstein e Fokker publicaram um trabalho no qual aplicam a teoria do cálculo diferencial aos últimos resultados de Nordström [19]. Mostra-se então que a equação de movimento (2.21) consiste em uma geodésica em um espaço curvo descrito pela métrica

$$g_{\mu\nu} = \Phi^2 \eta_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Mais do que isso, o escalar de curvatura pode ser descrito em termos do d'Alambertiano de Φ ,

$$R = -\frac{6}{\Phi^3} \square \Phi. \quad (2.28)$$

Como a métrica $g_{\mu\nu}$ nada mais é que uma transformação conforme de $\eta_{\mu\nu}$, o tensor de energia-momento se transforma como

$$T \rightarrow \frac{T}{\Phi^4}. \quad (2.29)$$

Assim, facilmente vemos que a equação dinâmica (2.19) pode ser reescrita como

$$R = \frac{24\pi G}{c^4} T. \quad (2.30)$$

Essa formulação descreve o campo gravitacional de uma forma covariante em termos de variáveis geométricas, assim, o princípio de equivalência forte está garantido. Um ponto interessante é que a massa não precisa mais ser dependente do campo escalar.

Embora esta teoria escalar da gravitação tenha sido bem aceita, hoje podemos evidenciar problemas que à época não eram tão claros ou careciam de evidências experimentais para confirmá-los. Por um lado, a teoria de Nordström satisfaz os princípios básicos de equivalência, conservação e correspondência. Por outro, ao utilizar o traço do tensor de energia-momento como fonte do campo gravitacional, não se acopla o eletromagnetismo à gravitação e, conseqüentemente, não é previsto o desvio da luz. Isso porque, para electromagnetismo, $T = 0$. Além disso, não podemos interpretar a equação (2.30) de forma plena devido à restrição existente na definição da geometria do espaço-tempo. Essa equação só se reduz à teoria de Nordström no caso de um sistema de coordenadas conformalmente Cartesiano. Na métrica (2.27), somente o fator conforme tem um dinâmica devidamente determinada pelo conteúdo material

de um sistema, ou seja, sua estrutura não pode ser mudada apenas modificando-se a distribuição de matéria desse sistema.

Ainda assim, a teoria de Nordström desempenhou um papel importantíssimo para Einstein na sua busca pela teoria geral da relatividade, mostrando-o todo o potencial do ferramental matemático do cálculo diferencial, indicando o caminho a ser seguido. Trataremos desse assunto na próxima seção.

2.3 A proposta de Einstein

No ano de 1913, um trabalho de Einstein se tornou um marco inicial na busca por uma satisfatória descrição dos fenômenos gravitacionais. Publicado em conjunto com seu amigo matemático Marcel Grossmann, o artigo conhecido como *Entwurf* [20] contém a primeira descrição métrica do campo gravitacional, através de um tensor de dois índices. Foram os indícios provenientes de suas tentativas passadas, para formular uma teoria para um campo gravitacional estático [21], que levou a essa significativa modificação na representação do potencial gravitacional.

A relatividade restrita, faz uma generalização do princípio de inércia Newtoniano ao descrever a trajetória de partículas livres segundo geodésicas no espaço quadridimensional de Minkowski. Isso nada mais é do que o princípio de Hamilton da mínima ação, a dinâmica de uma partícula teste é obtida a partir do princípio variacional,

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = 0, \quad (2.31)$$

onde a segunda igualdade representa o caso da relatividade restrita. Einstein então, utilizando os avanços do cálculo diferencial da época, propõe que no caso de campos gravitacionais gerais, a métrica plana de Minkowski deve ser substituída por uma estrutura mais completa,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.32)$$

Partículas livres seguirão geodésicas na métrica $g_{\mu\nu}$ e o campo gravitacional será representado por suas dez componentes [22].

Essa interpretação dos fenômenos gravitacionais abdica do conceito de força da mecânica Newtoniana (e também da ideia inicial de Nordström) para entender a gravitação como uma manifestação da geometria do espaço-tempo. Contudo, assim

como na gravitação Newtoniana, o princípio da mínima ação apenas determina o movimento de uma partícula teste sujeita ao campo gravitacional. Era preciso ainda estabelecer as equações dinâmicas para $g_{\mu\nu}$. Essa foi uma busca árdua, com uma história interessante onde muito se discute sobre os fundamentos da relatividade geral. Houve um momento onde Einstein e Grossmann equivocadamente descreditaram da ideia de que as equações de campo da teoria deveria ser covariante. Somente com a reformulação geométrica da teoria de Nordström foi que Einstein retomou esse caminho que culminou com a formulação de sua equação de campo e a teoria da relatividade geral em 1915,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

onde κ é uma constante que iremos definir quando tratarmos do limite Newtoniano. Para uma discussão mais detalhada desse processo veja as referências [9, 23–25].

Note que a equação de Einstein acima mantém-se nos moldes da equação de Poisson. O lado direito representa o conteúdo de matéria/energia que é fonte do potencial gravitacional, enquanto o lado esquerdo é uma quantidade construída com o campo $g_{\mu\nu}$ e suas primeira e segunda derivadas porém, de forma nada trivial, a saber,

$$G^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \left\{ \frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon} (g_{\alpha\epsilon,\beta\lambda} + g_{\beta\epsilon,\alpha\lambda} - g_{\alpha\beta,\epsilon\lambda} - g_{\lambda\epsilon,\alpha\beta}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon}{}_{,\lambda} (g_{\alpha\epsilon,\beta} + g_{\beta\epsilon,\alpha} - g_{\alpha\beta,\epsilon}) - \frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon}{}_{,\beta} g_{\lambda\epsilon,\alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} g^{\sigma\epsilon} g^{\lambda\gamma} \left[(g_{\epsilon\lambda,\alpha} + g_{\alpha\epsilon,\lambda} - g_{\lambda\alpha,\epsilon}) (g_{\sigma\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\sigma} - g_{\beta\sigma,\gamma}) \right. \right. \\ \left. \left. - g_{\lambda\gamma,\sigma} (g_{\alpha\epsilon,\beta} + g_{\beta\epsilon,\sigma} - g_{\alpha\beta,\epsilon}) \right] \right\},$$

onde a vírgula indica uma derivada simples.

Para o propósito do presente trabalho, é pertinente lembrarmos as propriedades básicas da relatividade geral e como essa teoria soluciona os problemas apresentados com a teoria escalar da gravitação.

2.3.1 Fundamentos da relatividade geral

A métrica arbitrária utilizada na teoria da relatividade geral para descrever os fenômenos gravitacionais pode sempre ser decomposta em uma soma entre a métrica

plana de Minkowski mais uma perturbação (não necessariamente pequena),

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Assim, a teoria de Einstein possui uma formulação de campo onde interpretamos o campo gravitacional como um campo de spin 2 propagando-se em um fundo plano descrito pela métrica de Minkowski. Embora a expressão acima seja exata, sua equivalente covariante é na verdade um série infinita [26],

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}h^{\alpha}_{\nu} - \dots \quad (2.35)$$

Seguindo essa descrição podemos citar as principais hipóteses fundamentais que cercam a relatividade geral.

Propriedades da relatividade geral:

- A interação gravitacional é descrita por um tensor de dois índices $h_{\mu\nu}$ que satisfaz uma equação dinâmica não linear;
- A teoria satisfaz o princípio geral da covariância, em outras palavras, o campo $h_{\mu\nu}$ não está restrito ao domínio da relatividade especial;
- Reproduz a gravitação Newtoniana em uma aproximação de campo fraco onde $h_{\mu\nu}$ se relaciona não trivialmente com o potencial gravitacional de Newton;
- Toda forma de matéria e energia interagem com o campo gravitacional somente através da métrica $g_{\mu\nu}$, dessa forma, a métrica de Minkowski não é um observável.
- Partículas testes e ondas eletromagnéticas se movem seguindo geodésicas no espaço curvo descrito por $g_{\mu\nu}$;
- A métrica $g_{\mu\nu}$ interage universalmente com todos os campos da natureza através do princípio do acoplamento mínimo³.

Neste último item vemos que, ao estabelecer o campo gravitacional como uma propriedade geométrica do espaço-tempo ele se torna universal, garantindo que a luz

³É bem sabido que muitos estudos sugerem um acoplamento não mínimo entre a métrica gravitacional e os demais campos existentes na natureza. Isso representa abordagens alternativas à relatividade geral e não fazem parte do escopo dessa tese.

também esteja sujeita à sua influência. Dessa forma, o campo eletromagnético, quando na presença de um campo gravitacional, é descrito pela ação,

$$S_E = -\frac{1}{16\pi c} \int F \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.36)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ e F é o invariante construído com o tensor eletromagnético de Maxwell,

$$F = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (2.37)$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}, \quad (2.38)$$

sendo o vetor A_μ o potencial eletromagnético. O ponto e vírgula refere-se à derivada covariante em relação à $g_{\mu\nu}$. A ação (2.36), quando variada em relação ao potencial vetorial, retorna as equações de Maxwell, que no caso do vácuo são descritas como

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.39)$$

Como dito anteriormente, a equação da geodésica que partículas testes seguirão nessa teoria pode ser obtida através da extremização do elemento de linha (2.31). Após proceder com este cálculo a equação resultante é

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (2.40)$$

onde o termo $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ é a conexão métrica definida como

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (2.41)$$

A conexão métrica não é um tensor e é simétrica em seus índices α e β . Além do mais, a sua definição como apresentada acima tem como consequência a anulação da derivada covariante da métrica, ou seja,

$$g_{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0. \quad (2.42)$$

A diferença entre a geodésica seguida por uma partícula teste massiva e uma onda eletromagnética (fóton) se dá apenas através do parâmetro utilizado para descrever

as suas trajetórias. Uma vez que para os fótons $ds = 0$, não podemos utilizar mais o tempo próprio τ como o parâmetro ao longo da curva, entretanto, é sempre possível encontrar um certo parâmetro λ tal que

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = c^2, \quad (2.43)$$

e a equação geodésica equivalente seja a mesma que (2.40) apenas trocando-se τ por λ .

2.3.2 Equações de campo e limite Newtoniano

Originalmente, Einstein postulou as equações de movimento da teoria da relatividade geral utilizando a equação de Poisson da gravitação Newtoniana como um modelo, como já temos falado aqui. Uma vez que se assume a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ como sendo o potencial gravitacional verifica-se que, a única quantidade construída com no máximo segundas derivadas da métrica e que seja totalmente covariante, é a combinação

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - n R g_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

As quantidades $R_{\mu\nu}$ e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ são respectivamente o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, que são construídos com a métrica segundo as expressões

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu, \beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta, \nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}, \quad (2.45)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\beta\nu} \delta^\beta_\alpha. \quad (2.46)$$

A constante n é escolhida de tal forma que a conservação da energia permaneça válida. Como o lado direito da equação dinâmica contém o tensor de energia-momento [cf. (2.33)] cujo o divergente é nulo, $n = 1/2$ é a única escolha que satisfaz $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. Portanto a equação que determina a dinâmica do potencial gravitacional na teoria da relatividade geral é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.47)$$

onde κ é uma constante que será determinada mais adiante quando obtermos o limite Newtoniano da teoria.

Ainda assim, na mesma época que Einstein propôs sua equação de campo da teoria, Hilbert obteve o mesmo resultado porém de uma forma mais elegante, utilizando um princípio variacional. Para reproduzirmos a equação (2.47) tomamos a ação do campo gravitacional como sendo

$$S_g = -\frac{1}{2\kappa c} \int \sqrt{-g} R d^4x. \quad (2.48)$$

Após um cálculo extenso mas direto a variação dessa ação com respeito ao campo gravitacional retornará

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\kappa c} \int (\delta\sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R) d^4x = -\frac{1}{2\kappa c} \int \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.49)$$

A matéria deve se acoplar minimamente à gravitação, ou seja, a densidade lagrangiana L_m é tal que a ação correspondente seja simplesmente

$$S_m = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} L_m d^4x. \quad (2.50)$$

O tensor de energia-momento é definido como

$$\frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

o que garante a conservação da energia [30]. Dessa maneira, o princípio variacional para a ação total, $S_g + S_m$, reproduzirá exatamente a equação (2.47).

Com a equação de campo definida podemos verificar se num limite de um fraco campo gravitacional estático e de baixas velocidades de propagação a gravitação Newtoniana é recuperada. Dentro desse regime o movimento de uma partícula teste deve ser igual à dinâmica fornecida pela teoria de Newton. Em outras palavras, a equação da geodésica,

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i, \quad (2.52)$$

deve ser identificada com a definição da força Newtoniana a partir de seu potencial gravitacional escalar,

$$F^i = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi_N}{\partial x^j}, \quad (2.53)$$

onde Φ_N é o potencial de Newton. A aproximação de campo fraco e estático pode ser representada como uma pequena perturbação da métrica plana de Minkowski, ou

seja, seguindo a expressão (2.34), tomamos $h_{\mu\nu} \ll 1$ de modo que a componente da conexão que aparece na equação dinâmica será,

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,j} . \quad (2.54)$$

Neste caso estamos desconsiderando termos de ordem quadrática em $h_{\mu\nu}$. Podemos então identificar o potencial Newtoniano com a componente h_{00} de tal forma que a métrica gravitacional terá a componente puramente temporal dada por

$$g_{00} = 1 + 2 \frac{\Phi_N}{c^2} . \quad (2.55)$$

Nesse limite podemos escrever o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu} \approx \rho v^\mu v^\nu$, com a quadri-velocidade sendo aproximada como $v^\mu \approx (c, 0)$. Vemos então que o traço da equação (2.47) resulta que $R \approx -\kappa \rho c^2$. Na equação de campo a única componente que não se anula identicamente é aquela onde $\mu = \nu = 0$, que mostra que

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2} \rho c^2 . \quad (2.56)$$

Para o cálculo de R_{00} note que produtos de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ são de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$ e os termos contendo derivadas em relação a x^0 são desprezíveis em comparação a derivadas em relação a coordenadas espaciais por conterem uma potência extra de $1/c$. Assim,

$$R_{00} \approx \Gamma_{00,\alpha}^\alpha \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi_N . \quad (2.57)$$

Portanto, a equação dinâmica da teoria se reduz a

$$\nabla^2 \Phi_N = \frac{\kappa}{2} \rho c^4 , \quad (2.58)$$

com $\kappa = 8\pi G/c^4$ para que possamos corretamente identificar a equação acima com a de Poisson [cf. (2.1)].

2.3.3 Testes da relatividade geral

Embora a teoria de Einstein fosse já de princípio conceitualmente consistente, assim como deve ser para qualquer teoria física, a comprovação experimental de suas previsões é que a consolida efetivamente. Os testes clássicos, obtidos dentro do regime

do fraco campo gravitacional do nosso sistema solar, foram os primeiros experimentos elaborados para verificar a consistência dos resultados provenientes da relatividade geral e podem ser todos desenvolvidos satisfatoriamente até no máximo a segunda ordem de aproximação da solução esférica e estática das equações de Einstein.

Apesar de a relatividade geral ter se mostrado inicialmente consistente com essas observações, outras áreas, como a cosmologia, posteriormente levantaram inúmeras questões acerca de sua validade, abrindo caminho para diversas teorias alternativas. Com o passar dos anos e a evolução tecnológica, viu-se um aprimoramento dos testes gravitacionais, que se mantiveram importantes para confrontar essas diversas teorias propostas. Juntamente com este avanço experimental se desenvolveu uma forma de parametrizar as predições de diferentes teorias, as chamadas métricas pós-Newtonianas parametrizadas (PPN para a sigla em inglês) relacionam cada um dos testes clássicos da gravitação com parâmetros que definem, até a segunda ordem de aproximação, os coeficientes das estruturas métricas previstas por diferentes propostas.

Toda teoria que, assim como a relatividade geral, representa a gravitação como um fenômeno métrico onde a matéria curva o espaço-tempo ao seu redor, irá descrever a configuração geométrica do nosso sistema solar através de uma métrica estática e esféricamente simétrica que pode ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = A(r)c^2 dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.59)$$

Aceitando que o limite Newtoniano deve manter-se válido na teoria, os resultados que obtivemos anteriormente mostram que, em uma primeira ordem de aproximação temos

$$A(r) \approx 1 - \frac{2m}{r} + \dots, \quad \text{e} \quad B \approx 1 + \dots \quad (2.60)$$

onde estamos utilizando a chamada *massa geométrica* $m \equiv GM/c^2$, que se relacionan com o potencial gravitacional Newtoniano como $\Phi_N/c^2 = -m/r$. Assim, para introduzirmos na métrica as correções pós-newtonianas de uma teoria, mantemos a expansão adicionando pelo menos mais um termo em cada uma das funções acima,

$$A(r) = 1 - 2\alpha \frac{m}{r} - 2\beta \left(\frac{m}{r}\right)^2 + \dots, \quad (2.61)$$

$$B(r) = 1 + 2\gamma \frac{m}{r} + \dots, \quad (2.62)$$

onde α , identificado como sendo igual à 1 através do limite Newtoniano, também está ligado com o desvio para o vermelho gravitacional. Os demais coeficientes β e γ estão diretamente relacionados com as medições do avanço no periélio de Mercúrio, o desvio e o atraso temporal de propagação da luz no campo gravitacional do Sol.

Para o desvio angular que a luz sofre quando se propaga em um campo gravitacional, calcula-se

$$\Delta\phi_{\text{desv}} \approx \frac{1}{2} (1 + \gamma) \frac{4m}{d}, \quad (2.63)$$

sendo d a distância mais próxima que a trajetória passa do centro de massa do sistema. No caso da precessão do periélio da órbita dos planetas, a cada revolução completada sua posição sofre um deslocamento cujo ângulo equivalente é

$$\Delta\phi_{\text{per}} \approx \frac{1}{3} (2 + 2\gamma - \beta) \frac{6\pi m^2 c^2}{L^2}, \quad (2.64)$$

onde L é o momento angular por unidade de massa do planeta. Por fim, o atraso no tempo de viagem da luz através de um campo gravitacional é dado por

$$\Delta t \approx \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \frac{2m}{c} \ln \left(\frac{4x_1 x_2}{d^2} \right), \quad (2.65)$$

sendo x_1 e x_2 os pontos inicial e final da propagação.

Para a relatividade geral, a métrica estática e esfericamente simétrica é dada pela solução de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.66)$$

Expandindo os seus termos g_{00} e g_{11} tal como foi feito anteriormente, escrevemos

$$A_{Sch} \approx 1 - 2 \frac{m}{r} - 2 \left(\frac{m}{r} \right)^2 + \dots, \quad (2.67)$$

$$B_{Sch} \approx 1 + 2 \frac{m}{r} + \dots \quad (2.68)$$

de onde podemos inferir que os parâmetros PPN para a relatividade geral são dados por

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \text{e} \quad \gamma = 1. \quad (2.69)$$

Estes valores satisfatoriamente concordam com as observações [31] (para maiores

detalhes sobre a dedução desses efeitos na relatividade geral consulte o Apêndice A).

Vemos então que as observações experimentais mais importantes da gravitação contemplam somente até o termo quadrático de m/r . Isso é importante pois, qualquer teoria que se proponha descrever os fenômenos gravitacionais, deve estar de acordo com a solução de Schwarzschild pelo menos até a segunda ordem de aproximação.

2.4 Teorias escalares pós-relatividade geral

Desde a sua formulação até os dias atuais a teoria da relatividade geral de Einstein tem se mantido coerente com todos os testes experimentais já realizados [33]. No entanto, ao longo desses anos todos, sempre houveram questões em aberto que levaram os físicos a buscarem caminhos alternativos na descrição dos fenômenos gravitacionais. Dentre os muitos temas que levam a comunidade científica a buscar nessas teorias respostas mais claras e sensatas que aquelas fornecidas pela relatividade geral, destacam-se as questões envolvendo problemas com energia e matéria escura por exemplo.

A teorias alternativas da gravitação existem em grande número e nas mais diversas formulações, sendo que, aquelas que seguem os caminhos de Einstein, optando por descrever a gravitação como um fenômeno métrico, são as que obtiveram maior sucesso. Dentro desse extenso grupo, as chamadas teorias escalares-tensoriais e as teorias $f(R)$ são as que mais se destacam atualmente [32].

Na classe de teorias métricas puramente escalares, ou seja, onde o campo gravitacional é representado por uma ou mais funções escalares que auxiliam na geração de uma métrica gravitacional, muito foi feito até meados dos anos 1970, mas todas as formulações falharam em estar de acordo com os testes clássicos da gravitação. Já em 1972, Wei-Tou Ni escrevia um compêndio de teorias métricas contendo uma extensa revisão e análise (segundo o recentemente elaborado método dos parâmetros PPN) das teorias escalares da gravitação [34].

Seguindo Ni, essas diversas propostas de teorias escalares da gravitação têm a propriedade comum de serem conformalmente planas, tendo suas métricas gravitacionais a forma geral

$$g_{\mu\nu} = e^{-2f(\Phi)} \eta_{\mu\nu}, \quad (2.70)$$

onde Φ é o potencial gravitacional. As equações de campo dessas teorias também podem ser sumarizadas na expressão

$$\square \Phi \propto k(\Phi) T, \quad (2.71)$$

sendo T o traço do tensor de energia-momento. As funções f e k possuem expressões distintas de acordo com a teoria que se quer representar. A tabela abaixo mostra as diferentes teorias escalares de acordo com a forma dessas funções e seus autores (incluindo as duas teorias de Nordström pré-relatividade geral, que já foram discutidas nesse capítulo).

<i>Teorias Escalares da Gravitação</i>	
Autor (ano)	Funções bases
Nordström (1912)	$f = \Phi$ $k = 1$
Nordström (1913-14)	$f = -\ln \Phi$ $k = \Phi$
Littlewood (1953) Bergmann (1956)	$f = -2 \ln(1 - \Phi)$ $k = 1$

Tabela 2.1: Diferentes propostas para teorias escalares da gravitação segundo os parâmetros definidos nas equações (2.70) e (2.71).

O fato dessas teorias serem conformalmente planas é o principal problema delas não conseguirem acoplar o eletromagnetismo à gravitação, uma vez que as equações de Maxwell são conformalmente invariantes. Portanto, nenhuma das teorias mostradas na Tabela 2.1 estão de acordo com a medição do desvio da luz. Mais ainda, essas teorias falham em fornecer a correta precessão do periélio de Mercúrio [35]. No entanto, o artigo de Ni não cita a teoria proposta por Dowker em 1965 que não prevê o desvio da luz mas também não apresenta problemas quanto o avanço do periélio de Mercúrio [36].

A revisão de Ni também fala das teorias escalares com velocidade da luz variável. Essas teorias surgem a partir dos trabalhos de Whitrow e Morduch [37, 38], que

mostram que só é possível conciliar as teorias escalares conformalmente planas com o desvio da luz e o atraso no tempo de propagação da luz se admitir-se que a luz dependa do campo gravitacional Φ ⁴. Entretanto, todas as propostas acabam falhando em algum outro teste da gravitação (para maiores informações veja os artigos de Ni [34] e Page [35]).

2.5 Os problemas das teorias escalares da gravitação

Vimos nas seções anteriores que, mesmo após o surgimento da relatividade geral, e com todo o sucesso experimental que ela mantém, muitas teorias gravitacionais escalares foram sendo propostas ao longo dos anos. Porém, podemos listar os seus principais problemas a partir de duas hipóteses básicas sob as quais tais teorias são construídas:

1. *A fonte do campo gravitacional é o traço do tensor de energia-momento;*
Como os campos eletromagnéticos possuem $T = 0$, é impossível acoplar tais campos à gravitação.
2. *A métrica é conformalmente plana;*
Sendo a métrica física conforme ao espaço plano de Minkowski, a teoria prevê a existência de sistemas de coordenadas preferências.

Ainda assim, as teorias escalares são frequentemente revisitadas na literatura, onde, indiferentemente de suas limitações perante as observações, variados estudos discutem suas diversas propriedades. A teoria de Nordström por exemplo, é alvo de estudos sobre um modelo cosmológico [41], transformações conformes [39] e princípio de equivalência [40]. Ravndal faz uma discussão sobre a gravitação escalar e dimensões extras [42] e Giulini aborda as razões teóricas que levou Einstein a abandonar o campo escalar como fonte da gravitação, demonstrando que tais argumentos não estavam tão corretos [44]. Esses são alguns exemplos que evidenciam como as teorias escalares continuam sendo alvo de constante estudo até hoje, mas nada foi efetivamente feito na direção de solucionar os problemas básicos citados nos itens acima.

Com a relatividade geral de Einstein, vemos que o grande diferencial é o tratamento geométrico que a gravitação recebe, dando origem a uma teoria que

⁴Einstein já havia considerado essa hipótese em 1912, mas da maneira como ele formulou essa teoria ela não previa nem o avanço no periélio de mercúrio, nem o desvio da luz.

contorna os problemas acima citados. Surge então uma questão para as teorias escalares da gravitação. Seria possível descrevermos a interação gravitacional como uma modificação da estrutura métrica do espaço-tempo que não seja simplesmente conformalmente plana e seja mediada por um campo escalar?

No próximo capítulo veremos que, se consideramos uma teoria escalar não linear, ela naturalmente gera uma métrica, não conformalmente plana, que governa a propagação do campo. Essa notável propriedade, recentemente descoberta, é que tornará possível a elaboração de uma nova teoria escalar da gravitação que tenha um caráter métrico como Einstein propôs.

Capítulo 3

Geometrização de uma teoria escalar não linear

Nas últimas décadas, as teorias de campos não lineares tem sido alvo de extensos estudos sob a perspectiva dos chamados modelos análogos de gravitação. Tais sistemas físicos, de origem não gravitacional, imitam certos aspectos da gravitação descrevendo processos distintos através de uma modificação efetiva da estrutura métrica do espaço de fundo sob o qual a teoria é formulada. Diversas são as origens desses modelos, mas todos se baseiam em uma propriedade característica das teorias não lineares: a propagação de uma perturbação do campo é governada por uma *métrica efetiva*. Mais precisamente, as partículas associadas às perturbações em torno de uma solução da teoria não seguem geodésicas na métrica de fundo, mas sim em uma geometria curva que emerge com as não-linearidades dessas teorias. Existe uma gama enorme de trabalhos nessa área, para mais detalhes veja [46–50] e suas referências.

Essa geometrização obtida através do conceito da métrica efetiva abrange somente aspectos perturbativos de um sistema físico. Porém, dois recentes estudos [51, 52] conseguem ir além dessa formulação para o caso de uma teoria escalar não linear. Desenvolvem um meio de se estabelecer toda a dinâmica dessa teoria através de uma interação entre o campo e uma métrica associada à ele. Dessa forma, não só as perturbações da teoria, mas também a própria dinâmica do campo é descrita nesta nova geometria. Dizemos então que a teoria é completamente geometrizada. Essa ferramenta matemática possibilitou a idealização da gravitação geométrica-escalar apresentada nesta tese.

Neste capítulo iremos rever o conceito de geometrias efetivas que é um passo inicial importante para entendermos como se dá a geometrização completa de uma teoria escalar não linear. Dessa forma estaremos aptos para explicitar a maneira pela qual surge a propriedade geométrica da teoria escalar da gravitação que esta tese apresenta.

3.1 Geometrias efetivas

Primeiramente iremos fazer uma breve revisão acerca das técnicas de descrição geométrica no estudo de propagações de perturbações em teorias de campos. Para o intuito deste trabalho é suficiente nos atermos somente a teorias escalares. Considere então um campo escalar relativístico Φ propagando-se, com dinâmica não linear, no espaço-tempo de Minkowski. A ação que o descreve é tal que

$$S = \int L(\Phi, w) \sqrt{-\gamma} d^4x, \quad (3.1)$$

onde γ representa o determinante da métrica de Minkowski, $\gamma_{\mu\nu}$, para um sistema de coordenadas arbitrárias e,

$$w \equiv \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi, \quad (3.2)$$

é o invariante cinético da teoria. A notação ∂_μ indica a derivada simples em relação à coordenada x^μ . Variando a ação com relação ao campo escalar Φ , obtemos

$$\delta S = -2 \int \left[\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\gamma} L_w \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) - \frac{1}{2} L_\Phi \right] \delta \Phi \sqrt{-\gamma} d^4x, \quad (3.3)$$

com L_X representando uma derivada em termos da variável X . Utilizando-se do princípio da mínima ação obtemos a equação de movimento da teoria,

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\gamma} L_w \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) = \frac{1}{2} L_\Phi, \quad (3.4)$$

Essa é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que pode ser posta na seguinte forma [53],

$$\hat{g}^{\mu\nu}(x, \Phi, \partial\Phi) \partial_\mu \partial_\nu \Phi + G(x, \Phi, \partial\Phi) = 0, \quad (3.5)$$

onde a função G depende somente das coordenadas, do campo escalar e suas primeiras

derivadas. Facilmente se mostra que o termo multiplicando a derivada segunda de Φ pode ser escrito como

$$\hat{g}^{\mu\nu} \equiv L_w \gamma^{\mu\nu} + 2L_{ww} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi, \quad (3.6)$$

e a questão básica na qual se atêm os modelos análogos é a associação do objeto $\hat{g}^{\mu\nu}$ à componentes contravariantes da métrica de um espaço-tempo efetivo Riemanniano. Essa associação pode ser feita de duas formas, complementares entre si.

Propagação de raios

Na óptica geométrica, para se estudar as superfícies características da teoria, considera-se uma solução contínua Φ_0 da equação (3.4) e uma família de soluções aproximadas do tipo onda, assim

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \epsilon f(x) e^{(iS(x)/\epsilon)}, \quad (3.7)$$

onde ϵ é um parâmetro real, $i \equiv \sqrt{-1}$ e, tanto a amplitude $f(x)$ da onda quanto sua fase $S(x)$, são funções contínuas. Assumindo que ambos Φ_0 e $\Phi(x)$ são soluções da equação de movimento (3.4), no limite onde há uma rápida variação de fase, ou seja, $\epsilon \rightarrow 0$, encontramos a seguinte relação de dispersão [50],

$$\hat{g}^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0, \quad (3.8)$$

com $k_\mu \equiv \partial_\mu S$ sendo o vetor de onda. Nesse caso, $\hat{g}^{\mu\nu}$ é calculado em termos da solução de fundo Φ_0 . Esta é a conhecida equação Eikonal, que determina toda a estrutura causal da teoria [54].

Construindo uma inversa para a matriz $\hat{g}^{\mu\nu}$, de acordo com a relação $\hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$, e definindo uma estrutura afim de tal forma que $\hat{g}_{\mu\nu||\alpha} = 0$ (o símbolo $||$ representa a derivada covariante em relação à $\hat{g}_{\mu\nu}$), obtemos a seguinte equação,

$$\hat{g}^{\mu\nu} k_{\alpha||\mu} k_\nu = 0 \quad . \quad (3.9)$$

A expressão acima mostra que os raios que descrevem as perturbações do campo escalar se propagam seguindo geodésicas nulas na métrica efetiva $\hat{g}_{\mu\nu}$. Em outras palavras, é a métrica efetiva quem determina a estrutura causal das excitações de um campo escalar não linear.

Propagação de ondas

A segunda analogia com a gravitação é construída ao estudarmos a dinâmica de uma perturbação de primeira ordem do campo. Considerando uma solução contínua Φ_0 da equação de movimento, procuramos a equação que governa a evolução das perturbações $\delta\Phi$ em torno dessa solução de fundo. Escrevemos,

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi, \quad \text{com} \quad \delta\Phi^2 \ll \delta\Phi. \quad (3.10)$$

Substituindo na equação dinâmica do campo escalar, um cálculo direto mostra que as perturbações obedecem uma equação do tipo Klein-Gordon em um espaço-tempo efetivo, no qual a métrica $\hat{f}^{\mu\nu}$ é determinada pelas quantidades não perturbadas Φ_0 , [55,56]. Podemos escrever a equação de movimento dessas perturbações como

$$\square_{\hat{f}} \delta\Phi + \hat{m} \delta\Phi = 0, \quad (3.11)$$

onde o símbolo \square_X refere-se ao operador d'Alambertiano construído com a métrica indicada em seu subíndice, ou seja,

$$\square_{\hat{f}} \equiv \frac{1}{\sqrt{-\hat{f}}} \left[\sqrt{-\hat{f}} \hat{f}^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta\Phi) \right], \quad (3.12)$$

sendo a métrica $\hat{f}^{\mu\nu}$ e a massa efetiva \hat{m} dados por

$$\hat{f}^{\mu\nu} = \frac{\hat{g}^{\mu\nu}}{L_w^2 \sqrt{1 + 2L_{ww} w/L_w}} \Big|_{\Phi = \Phi_0}, \quad (3.13)$$

$$\hat{m}^2 \equiv \frac{1}{L_w^2 \sqrt{1 + 2L_{ww} w/L_w}} \left[L_{\Phi\Phi w} w - \frac{1}{2} L_{\Phi\Phi} + \frac{\partial \hat{g}^{\alpha\beta}}{\partial \Phi} (\partial_\alpha \Phi)_{||\beta} \right]_{\Phi = \Phi_0}. \quad (3.14)$$

Portanto, as perturbações se propagam como um campo escalar linear massivo em um espaço-tempo emergente gerado pela configuração de fundo do campo.

3.2 Geometrização da dinâmica de um campo

Os processos de geometrização tratados na seção anterior lida somente com aspectos perturbativos de uma teoria. As métricas efetivas apresentadas acima são

percebidas somente pelas perturbações do campo, elas nada interferem na dinâmica do fundo. Iremos agora mostrar como é possível geometrizar a dinâmica do próprio campo Φ , de modo que possamos representá-lo como que imerso em um espaço-tempo curvo gerado por ele mesmo. Em outras palavras, buscamos uma descrição geométrica, para a dinâmica de um campo escalar não linear, onde tal campo possa ser visto como que interagindo minimamente com uma métrica construída a partir de funções do próprio campo escalar.

Voltemos então à variação (3.3) e definimos a quantidade

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\gamma} L_w \partial_\nu \Phi \gamma^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} L_\Phi, \quad (3.15)$$

que consiste basicamente no lado esquerdo da equação de campo de Φ . Introduzimos o tensor métrico contravariante $q^{\mu\nu}$ através do tensor binomial

$$q^{\mu\nu} = \alpha \gamma^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi, \quad (3.16)$$

com α e β sendo funcionais de Φ e w . A expressão covariante correspondente, definida por $q^{\mu\alpha} q_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$, é dada por

$$q_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \gamma_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi. \quad (3.17)$$

O determinante da métrica, $q = \det(q_{\mu\nu})$, pode ser relacionado com o determinante da métrica auxiliar $\gamma^{\mu\nu}$, a saber

$$\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{\alpha \sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}. \quad (3.18)$$

Com isso, uma substituição direta na equação (3.15) mostra que

$$\mathcal{I} = \frac{L_w}{\alpha + \beta} \left[\square_q \Phi + \frac{(\alpha + \beta)^{3/2}}{\alpha^{3/2} L_w} \partial_\mu \left(\frac{\alpha^{3/2} L_w}{\sqrt{\alpha + \beta}} \right) \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi - \frac{L_\Phi}{2 L_w} (\alpha + \beta) \right]. \quad (3.19)$$

Como vimos na seção anterior, a ideia básica do processo geometrização é estabelecer a métrica introduzida como o elemento principal da equação dinâmica do campo, ou seja, aquele que irá determinar a estrutura causal da teoria. Portanto, neste caso vemos que para isso é preciso que o segundo termo entre colchetes na expressão acima não contenha derivadas segunda de Φ . A maneira mais simples de satisfazer

isso consiste na imposição

$$\frac{\alpha^{3/2} L_w}{\sqrt{\alpha + \beta}} = C, \quad (3.20)$$

com C sendo uma constante arbitrária. Sob esta condição nos coeficientes da métrica $q^{\mu\nu}$, a dinâmica do campo ($\mathcal{I} = 0$) é descrita como

$$\square_q \Phi = j(\Phi, \partial\Phi), \quad (3.21)$$

onde definimos que

$$j(\Phi, \partial\Phi) \equiv \frac{\alpha^3}{2C} L_\Phi L_w. \quad (3.22)$$

Note que as equações (3.4) e (3.21) são equivalentes, de modo que podemos interpretar a dinâmica do campo Φ como (i) não linear no espaço-tempo de Minkowski ou (ii) uma propagação “linear”, com fonte $j(\Phi, \partial\Phi)$, na métrica $q^{\mu\nu}$. Importante enfatizar que o uso da palavra “linear” é feito apenas de maneira metafórica, dado que, uma vez que a métrica $q^{\mu\nu}$ depende de Φ , a dinâmica do campo permanece sendo altamente não linear.

Uma segunda possibilidade de geometrização consiste em relaxar a condição (3.20), trocando a constante C por uma função somente de Φ ,

$$\frac{\alpha^{3/2} L_w}{\sqrt{\alpha + \beta}} = F(\Phi). \quad (3.23)$$

Substituindo isso na expressão (3.19) obtemos,

$$\mathcal{I} = \frac{L_w}{\alpha + \beta} \left[\square_q \Phi + (\alpha + \beta) \left(\frac{F_\Phi}{F} w - \frac{L_\Phi}{2L_w} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Esse método nos permite, através da função F , escrever a dinâmica do campo na espaço-tempo determinado pela métrica $q_{\mu\nu}$ como um campo se propagando sem fonte, ou seja,

$$\square_q \Phi = 0. \quad (3.25)$$

e a função $F(\Phi)$ satisfaz a condição

$$\frac{F_\Phi}{F} w - \frac{L_\Phi}{2L_w} = 0. \quad (3.26)$$

Portanto, neste caso, o campo Φ propaga-se “livremente”¹ na métrica $q^{\mu\nu}$. Note que os dois caminhos de geometrização que tratamos coincidem quando $L_\Phi = 0$.

Esses resultados nos mostram que há uma relação entre a equação de movimento de um campo escalar não linear e a propagação de ondas em uma geometria curva. Para qualquer teoria com função Lagrangeana $L(\Phi, w)$, existe sempre um espaço-tempo, descrito por uma métrica como $q^{\mu\nu}$, tal que essas dinâmicas mencionadas acima são equivalentes.

Na relatividade geral, a matéria/energia curva o espaço-tempo onde ela mesmo se propaga e é nesse sentido que entendemos como a estrutura métrica $q^{\mu\nu}$ é associada, matematicamente, a processos gravitacionais através da geometrização mostrada neste capítulo. No entanto, a pergunta que surge é a seguinte: é possível atribuir à métrica $q^{\mu\nu}$ uma interpretação física, no sentido de que ela desempenhe um papel mais fundamental? A resposta à essa questão é positiva e consiste na base da teoria geométrica-escalar da gravitação, que desenvolveremos no próximo capítulo.

¹Novamente, fazemos um uso metafórico para a palavra “livremente”

Capítulo 4

Teoria geométrica-escalar da gravitação

Com os resultados do capítulo anterior, passamos a interpretar uma teoria escalar não linear da seguinte forma. A auto-interação do campo Φ é tal que o espaço-tempo à sua volta curva-se e, como uma estrutura universal, passa a influenciar a propagação do próprio campo Φ . A partir daí podemos nos perguntar até que ponto o caráter universal da métrica $q_{\mu\nu}$ se mantém válido. De outra forma, qual o papel dessa métrica quando o campo Φ interage com outros campos? Veremos que é possível atribuir à esse campo escalar as características de um potencial gravitacional mantendo uma das hipóteses principais da relatividade geral: a gravitação é um fenômeno métrico. Assim, a estrutura $q_{\mu\nu}$ representará a métrica gravitacional do espaço-tempo. Essa proposta foi apresentada recentemente no artigo [57] e constitui a base deste capítulo.

4.1 Fundamentos da gravitação geométrica-escalar

Para descrever os processos gravitacionais a partir de um potencial gravitacional que seja uma função escalar, seguiremos as principais ideias contidas nas hipóteses básicas que são tomadas pela relatividade geral. Dessa forma, assim como descrevemos os fundamentos da teoria de Einstein na seção 2.3.1, podemos fazer o mesmo para a gravitação geométrica-escalar.

Propriedades da gravitação geométrica-escalar:

- A interação gravitacional é descrita por um campo escalar Φ que satisfaz uma dinâmica não linear;
- A teoria satisfaz o princípio geral da covariância, em outras palavras, o campo Φ não está restrito ao domínio da relatividade especial;
- Reproduz a gravitação Newtoniana em uma aproximação de campo fraco onde Φ se relaciona não trivialmente com o potencial gravitacional de Newton;
- Toda forma de matéria e energia interagem com o campo gravitacional somente através da estrutura métrica dada por

$$q^{\mu\nu} = \alpha(\Phi) \gamma^{\mu\nu} + \frac{\beta(\Phi)}{w} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi, \quad (4.1)$$

e dessa forma a métrica de Minkowski não é um observável.;

- Partículas testes e ondas eletromagnéticas se movem seguindo geodésicas no espaço curvo descrito por $q_{\mu\nu}$;
- A métrica $q_{\mu\nu}$ interage universalmente com todos os campos existentes na natureza através do acoplamento mínimo.

De imediato, assim como ocorre na relatividade geral, o acoplamento entre a gravitação e o eletromagnetismo na teoria geométrica-escalar está garantido. O campo de Maxwell, sob a influência de um campo gravitacional, será descrito pela ação,

$$S_E = - \frac{1}{16\pi c} \int F \sqrt{-q} d^4x. \quad (4.2)$$

Obviamente, a variação dessa ação em relação ao potencial vetorial A_μ retornará precisamente as equações de Maxwell em um espaço curvo, neste caso, $q_{\mu\nu}$.

De acordo com os itens 3 e 5 acima, em um regime de baixas velocidades, com um campo fraco e estático, as equações de movimento de uma partícula teste são descritas como,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^i = -\partial^i \Phi_N, \quad (4.3)$$

com Φ_N sendo o potencial gravitacional de Newton. A conexão métrica $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ deve ser construída com a métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$, assim

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2} \partial^i (\ln \alpha), \quad (4.4)$$

portanto,

$$\frac{\Phi_N}{c^2} \approx -\frac{1}{2} \ln(\alpha). \quad (4.5)$$

Com isso, podemos obter, dentro dessa aproximação, a relação entre a componente puramente temporal da métrica e o potencial Φ_N ,

$$q_{00} = \frac{1}{\alpha} \approx 1 + 2 \frac{\Phi_N}{c^2}. \quad (4.6)$$

A expressão acima também nos mostra a relação entre o coeficiente α da métrica gravitacional e o campo Φ até a primeira ordem de aproximação. Contudo, para o desenvolvimento da gravitação geométrica-escalar iremos extrapolar essa relação, considerando uma expressão mais geral, a saber

$$\alpha = e^{-2\Phi}. \quad (4.7)$$

Pode-se ver claramente que esta escolha está em acordo com os resultados aproximativos acima.

Para estabelecermos completamente a teoria geométrica-escalar ainda é preciso determinar a equação dinâmica do potencial gravitacional Φ , bem como a dependência funcional do coeficiente β da métrica. Neste capítulo nos ocuparemos desta tarefa, a dinâmica será estabelecida a partir da técnica de geometrização que apresentamos no capítulo anterior e a função β será determinada de tal forma que as soluções da teoria estejam de acordo com os dados observacionais. Veremos que a fonte do potencial gravitacional não se resume somente ao traço do tensor de energia-momento, evidenciando a diferença da gravitação geométrica-escalar em relação às teorias escalares anteriores.

Antes disso, é importante deixar claro algumas notações para evitar erros de interpretações das equações matemáticas. Como na gravitação geométrica-escalar a única métrica relevante é a métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$, abdicaremos dos sub-índices que utilizamos para representar o operador de d'Alambert no capítulo anterior. Assim, o símbolo matemático \square será construído sempre com a métrica gravitacional. De forma

semelhante, a derivadas covariantes, usualmente representadas pelo símbolo “ ; ”, estarão sempre sendo tomadas em relação à métrica gravitacional.

4.2 Equações de campo

Considere a seguinte função Lagrangeana para o campo escalar Φ ,

$$L = V(\Phi) w. \quad (4.8)$$

A dinâmica resultante do princípio variacional será não linear devido ao fato de que o termo cinético w está reescalado pela função $V(\Phi)$. Seguindo o que foi dito no capítulo anterior, sobre as técnicas de geometrização, optemos pelo segundo modo onde os coeficientes da métrica $q_{\mu\nu}$ satisfazem as relações (3.23) e (3.26). Usando a Lagrangeana acima, um cálculo simples e direto mostra que essas relações se reduzem à condição

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V(\Phi), \quad (4.9)$$

que, uma vez que o coeficiente α já está determinado [cf. (4.7)], estabelece uma relação entre β e V , ou seja, a Lagrangeana do campo escalar. Como já foi mostrado, a equação de movimento dessa teoria, na ausência de outros campos, será então escrita como

$$\square \Phi = 0. \quad (4.10)$$

A condição (4.9) permite escrever a métrica gravitacional toda em termos do coeficiente α e da função $V(\Phi)$ que fixa a dinâmica do campo escalar. De acordo com as equações (3.16), (3.17) e (3.18), teremos

$$q^{\mu\nu} = \alpha \gamma^{\mu\nu} + \alpha \frac{(\alpha^2 V - 1)}{w} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi, \quad (4.11)$$

$$q_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \gamma_{\mu\nu} - \frac{(\alpha^2 V - 1)}{\alpha^3 V w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi, \quad (4.12)$$

$$\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{\alpha^3 \sqrt{V}}. \quad (4.13)$$

Com essas expressões em mãos, estamos aptos a desenvolver um princípio variacional para a teoria geométrica-escalar e estabelecer sua equação dinâmica quando na presença de matéria e energia.

A ação que descreve a dinâmica do campo Φ no espaço-tempo gravitacional é então dada por

$$S_{\Phi} = \frac{1}{\kappa c} \int \sqrt{-q} \Omega \sqrt{V} d^4x, \quad (4.14)$$

onde definimos o termo cinético construído com a métrica gravitacional como,

$$\Omega \equiv q^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \Phi = (\alpha + \beta) w. \quad (4.15)$$

É mais prático trabalhar com o campo escalar sendo adimensional uma vez que os coeficientes da métrica, as funções α e β , devem ser adimensionais também. Assim, a constante de acoplamento κ deve ter dimensões de comprimento por energia para garantir que S_{Φ} tenha dimensões de energia vezes tempo.

O processo de variação de S_{Φ} é mais facilmente calculado se trabalharmos no espaço-tempo auxiliar de Minkowski. Assim, usando (3.3) e (3.15), obtemos

$$\delta S_{\Phi} = -\frac{2}{\kappa c} \int \mathcal{I} \delta \Phi \sqrt{-\gamma} d^4x = \int \mathcal{I} \alpha^3 \sqrt{V} \delta \Phi \sqrt{-q} d^4x. \quad (4.16)$$

Com a Lagrangeana dada em (4.8) e a condição (4.9), escrevemos [cf. (3.24)]

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\alpha^3} \square \Phi, \quad (4.17)$$

e assim,

$$\delta S_{\Phi} = -\frac{2}{\kappa c} \int \sqrt{V} \square \Phi \delta \Phi \sqrt{-q} d^4x. \quad (4.18)$$

que trivialmente mostra que na ausência de outros campos o princípio da mínima ação se reduz à equação (4.10) como era de se esperar.

Na presença de matéria, segundo o princípio do acoplamento mínimo, adicionamos uma densidade Lagrangeana correspondente L_m à ação total S , ou seja,

$$S = S_{\Phi} + S_m, \quad (4.19)$$

com

$$S_m = \frac{1}{c} \int \sqrt{-q} L_m d^4x, \quad (4.20)$$

De forma usual, escrevemos a variação da ação de matéria em termos do tensor de

energia-momento correspondente,

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-q} T^{\mu\nu} \delta q_{\mu\nu} d^4x, \quad (4.21)$$

onde defini-se,

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-q}} \frac{\delta(\sqrt{-q} L_m)}{\delta q^{\mu\nu}}, \quad (4.22)$$

de forma que a conservação da energia está garantida pelo princípio da covariância geral.

Contudo, na gravitação geométrica-escalar, a quantidade fundamental é o campo escalar Φ , e não a métrica $q_{\mu\nu}$. Devemos continuar o processo de variação utilizando a maneira pela qual a métrica gravitacional depende do campo escalar, descrita em (4.12), ou seja

$$\begin{aligned} \delta q_{\mu\nu} &= \delta \left[\frac{1}{\alpha} \gamma_{\mu\nu} - \frac{(\alpha^2 V - 1)}{\alpha^3 V w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right] \\ &= \left[2q_{\mu\nu} + \left(4 - \frac{V'}{V} \right) \frac{\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi}{\Omega} \right] \delta\Phi + \\ &\quad + \frac{(\alpha^2 V - 1)}{\Omega} \left[2 \frac{\alpha^3 V}{\Omega} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \partial^\lambda \Phi \partial_\lambda (\delta\Phi) - \delta (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para calcular a expressão acima já utilizamos (4.7) e também temos definido $V' \equiv dV/d\Phi$. O integrando da ação variada, δS_m , pode ser escrito como

$$T^{\mu\nu} \delta q_{\mu\nu} = \left[2T + \left(4 - \frac{V'}{V} \right) E \right] \delta\Phi - 2C^\lambda \delta\Phi_{,\lambda}, \quad (4.24)$$

onde definimos as quantidades

$$E \equiv \frac{T^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi}{\Omega}, \quad (4.25)$$

e

$$C^\lambda \equiv \frac{(\alpha^2 V - 1)}{\Omega} \left(T^{\lambda\mu} - E q^{\lambda\mu} \right) \partial_\mu \Phi. \quad (4.26)$$

O traço do tensor de energia-momento que aparece em (4.24) é construído como na

forma usual com a métrica gravitacional,

$$T = T^{\mu\nu} q_{\mu\nu}. \quad (4.27)$$

Substituindo em δS_m e eliminando os termos de integrais de superfícies teremos,

$$\delta S_m = -\frac{1}{c} \int \left[T + \left(2 - \frac{V'}{2V} \right) E + C^{\lambda}_{;\lambda} \right] \delta\Phi \sqrt{-q} d^4x, \quad (4.28)$$

Finalmente, assumindo o princípio variacional para a ação total, a equação dinâmica geral do potencial gravitacional Φ toma a seguinte forma,

$$\sqrt{V} \square \Phi = \kappa \chi, \quad (4.29)$$

onde simplificamos a notação escrevendo

$$\chi = -\frac{1}{2} \left[T + \left(2 - \frac{V'}{2V} \right) E + C^{\lambda}_{;\lambda} \right]. \quad (4.30)$$

Vemos então que, na gravitação geométrica-escalar, a fonte do campo gravitacional não se resume somente ao traço do tensor de energia-momento, outras contrações do $T^{\mu\nu}$ com as derivadas do campo Φ surgem para dar origem a uma fonte material mais complexa, caracterizada pelo termo χ . Isso deixa evidente o acoplamento entre o campo gravitacional e o eletromagnetismo. Nota-se que, mesmo com a anulação do traço do tensor de energia-momento do eletromagnetismo, sobram os termos E e $C^{\lambda}_{;\lambda}$.

Por fim, note que a teoria que estamos formulando possui três funções que precisam ser determinadas, são elas α , β e V . A primeira delas fixamos através do limite de baixas velocidades e campo fraco [cf. (4.7)], enquanto a segunda pode ser entendida como estando determinada pela condição de geometrização (4.9) assim que estabelecermos $V(\Phi)$, que é basicamente a Lagrangiana do campo escalar [cf. (4.8)]. Na próxima seção desenvolveremos um raciocínio para tal objetivo, e assim fixarmos completamente a teoria.

4.3 Solução estática e esfericamente simétrica

O formato da Lagrangeana escolhido para o campo escalar restringe bastante a dinâmica da teoria, no entanto, com a indefinição da função $V(\Phi)$, uma infinidade de possibilidades ainda resta para a determinação da teoria geométrica-escalar da gravitação. Para selecionarmos uma entre tantas possibilidades de Lagrangeanas na forma (4.8), olhamos para a solução estática e esfericamente simétrica que deve satisfatoriamente descrever o nosso sistema solar.

Iniciamos escrevendo a métrica auxiliar de Minkowski em coordenadas esféricas,

$$ds_M^2 = c^2 dt^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (4.31)$$

Como estamos procurando por uma solução estática e com simetria esférica, assumimos que o campo gravitacional dependa somente da coordenada radial, $\Phi = \Phi(R)$. A métrica gravitacional (4.12) assume a seguinte forma,

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} c^2 dt^2 - \frac{1}{\alpha^3 V} dR^2 - \frac{R^2}{\alpha} d\Omega^2, \quad (4.32)$$

e, transformando a coordenada radial segundo $R = \sqrt{\alpha} r$, teremos que

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} c^2 dt^2 - B dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (4.33)$$

onde definimos,

$$B \equiv \frac{1}{\alpha^2 V} \left(\frac{r}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} + 1 \right)^2. \quad (4.34)$$

Note que a componente q_{00} do elemento de linha (4.33), na aproximação de campo fraco, escreve-se como,

$$q_{00} = \frac{1}{\alpha} \approx 1 - \frac{2\Phi_N}{c^2} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (4.35)$$

Relembrando o que foi dito sobre os testes gravitacionais em nosso sistema solar, verificamos que, para que a gravitação geométrica-escalar esteja de acordo com as observações, a função B desse mesmo elemento de linha deve se comportar tal que

$$q_{11} \approx -\alpha. \quad (4.36)$$

Novamente, iremos extrapolar este requerimento impondo uma condição mais geral onde

$$B = \alpha. \quad (4.37)$$

Substituindo isso na equação dinâmica da teoria (sem fonte material), (4.29), encontramos

$$e^{2\Phi} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\Phi_0}{r^2}. \quad (4.38)$$

Portanto,

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(2C - 2\frac{\Phi_0}{r} \right), \quad (4.39)$$

onde C e Φ_0 são constantes de integração. A definição dessas constantes é obtida a partir da análise do comportamento assintótico dessa solução, isso implica que $C = 1/2$ e $\Phi_0 = m$. Dessa forma,

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (4.40)$$

e o elemento de linha gravitacional da solução esfericamente simétrica será o mesmo que na relatividade geral, ou seja, o espaço-tempo de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.41)$$

Portanto, exatamente como na relatividade geral, a solução do vazio, estática e esfericamente simétrica da gravitação geométrica-escalar descreve satisfatoriamente o movimento dos planetas em torno do Sol e também a propagação da luz que seguem geodésicas na métrica $q_{\mu\nu}$.

Utilizando esta solução que encontramos, e a dependência pré-determinada do coeficiente α , encontramos a forma pelo qual a função V depende do campo escalar. Em termos do coeficiente da métrica, escrevemos

$$V = \frac{(3 - \alpha)^2}{4\alpha^3}. \quad (4.42)$$

Importante lembrar que este potencial é obtido a partir da extrapolação que fizemos ao impor que $q_{11} = \alpha$. Essa condição pode ser relaxada de tal maneira que ela ainda seja válida até a segunda ordem de aproximação, garantindo assim a concordância com os testes gravitacionais atuais. Assim, se novas observações surgirem e exigirem correções no elemento de linha de Schwarzschild, isso pode ser feito ajustando a forma

do $V(\Phi)$.

4.4 Limite Newtoniano

Como já foi discutido no primeiro capítulo, uma teoria da gravitação deve se reduzir à teoria newtoniana em um regime de campo fraco e estático. Basicamente precisamos recuperar a equação de Poisson para o campo escalar. Para verificarmos essa propriedade na gravitação geométrica-escalar fazemos as seguintes considerações,

$$\Phi \ll \Phi^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (4.43)$$

Sob estas condições, mantendo somente até a primeira ordem em Φ , obtemos

$$\frac{1}{\alpha} \approx 1 + 2\Phi, \quad V \approx 1 + 8\Phi. \quad (4.44)$$

A métrica gravitacional será

$$q_{\mu\nu} \approx (1 + 2\Phi) \gamma_{\mu\nu} + \frac{4\Phi}{w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi, \quad (4.45)$$

e seu determinante,

$$\sqrt{-q} \approx (1 + 2\Phi) \sqrt{-\gamma}. \quad (4.46)$$

Substituindo na equação dinâmica (4.29), verifica-se

$$\sqrt{V} \square \Phi \approx -\nabla^2 \Phi. \quad (4.47)$$

Para o conteúdo material que é fonte do potencial gravitacional, consideremos um fluido perfeito. Lembrando que, no regime Newtoniano, escrevemos

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2 v^\mu v^\nu, \quad v^\mu \approx (c, 0), \quad (4.48)$$

sendo o campo de velocidades definido na métrica gravitacional, ou seja, $q_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = c^2$. Assim, o único termo do lado direito da equação dinâmica que é de primeira ordem em Φ , é o traço do tensor de energia momento,

$$T \approx \rho c^2, \quad E \propto T^{ij} \approx 0 \quad \text{e} \quad C^\lambda \propto T^{ij} \approx 0. \quad (4.49)$$

Portanto, teremos

$$\chi \approx -\frac{\rho c^2}{2}. \quad (4.50)$$

Isso nos leva a uma equação de Poisson para o campo Φ ,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\kappa}{2} \rho c^2. \quad (4.51)$$

Esse resultado nos permite determinar a constante de acoplamento da matéria como sendo,

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (4.52)$$

e, como solução de (4.51), temos exatamente o que esperávamos

$$\Phi \approx \frac{\Phi_N}{c^2}. \quad (4.53)$$

4.5 Recapitulação

A teoria geométrica-escalar da gravitação é uma alternativa proposta para descrever os processos gravitacionais através de um campo escalar Φ . No entanto, toda forma de matéria e energia interage com este campo somente através da métrica gravitacional que é construída com as derivadas de Φ ,

$$q^{\mu\nu} = \alpha \gamma^{\mu\nu} - \frac{\beta}{w} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi. \quad (4.54)$$

Por se tratar de uma teoria geométrica, como o próprio nome indica, parte de premissas diferentes daquelas assumidas nas teorias escalares anteriores, naturalmente superando os problemas que cercam a gravitação escalar. Em particular, a fonte do potencial gravitacional não é somente o traço do tensor de energia-momento e a gravitação geométrica-escalar não é uma teoria gravitacional sob o domínio da relatividade especial. Em outras palavras, seguimos as principais ideias que fundamentam a relatividade geral para formular a gravitação geométrica-escalar, como foi mostrado no início deste capítulo.

Os passos seguidos para construir a teoria geométrica-escalar foram guiados pelos dados observacionais atuais que testam as teorias gravitacionais bem como a correspondência com a gravitação Newtoniana. A teoria gravitacional que

apresentamos aqui introduz um campo escalar com dinâmica não linear descrita pela Lagrangeana

$$L = V(\Phi) w, \quad (4.55)$$

onde a função V é identificada com os coeficientes da métrica segundo as expressões

$$V = \frac{(3 - \alpha)^2}{4\alpha^3}, \quad (4.56)$$

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V, \quad (4.57)$$

e o coeficiente α se relaciona com o potencial gravitacional tal que

$$\alpha = e^{-2\Phi}. \quad (4.58)$$

A equação que governa a dinâmica do potencial gravitacional Φ , na presença de uma fonte material, é então descrita como

$$\sqrt{V} \square \Phi = \kappa \chi, \quad (4.59)$$

com $\kappa = 8\pi G/c^4$, onde χ representa o conteúdo material,

$$\chi = -\frac{1}{2} \left[T + \left(2 - \frac{V'}{2V} \right) E + C^\lambda_{;\lambda} \right]. \quad (4.60)$$

Essas determinações acabam resultando em uma solução como a de Schwarzschild para a relatividade geral no caso vazio, estático e esfericamente simétrico. Dessa forma, a gravitação geométrica-escalar já se mostra de acordo com as principais observações gravitacionais que existem atualmente.

Antes de procedermos com o desenvolvimento de um modelo cosmológico previsto pela gravitação geométrica-escalar, é importante ressaltar uma característica distinta entre essa teoria e teoria gravitacional de Einstein. Enquanto a relatividade geral não é capaz de exibir um verdadeiro tensor para representar a energia gravitacional [6], a gravitação geométrica-escalar permite a construção de tal quantidade de modo que a conservação desse tensor retorna a equação dinâmica da teoria. Esse assunto foi abordado com detalhes em [58], e não será desenvolvido aqui por não se tratar de um tópico diretamente relacionado com o intuito desta tese.

Capítulo 5

Cosmologia na gravitação geométrica-escalar

A cosmologia é uma área da física que se propõe a estudar a estrutura dinâmica do universo como um todo. O seu desenvolvimento se deu somente após o advento da relatividade geral. Embora seja possível pensar na cosmologia a partir da teoria gravitacional de Newton, foi somente após a teoria de Einstein permitir a elaboração de um modelo dinâmico para o universo que a cosmologia Newtoniana foi estudada.

Os modelos cosmológicos são usualmente desenvolvidos em cima de três hipóteses básicas que funcionam como pilares para a sua construção. A primeira é o chamado *Princípio Cosmológico*, que afirma que o universo, quando observado de qualquer ponto, apresenta sempre os mesmos aspectos físicos. Matematicamente, assumimos que há um tempo cosmológico t e, para cada $t = \text{constante}$, a hipersuperfície espacial correspondente deve ser **homogênea**, não possuindo pontos privilegiados; e **isotrópica**, não tendo também qualquer direção preferencial para descrever o universo. Dessa forma, o princípio cosmológico implica que o espaço-tempo possa ser sempre foliado em hipersuperfícies do tipo espaço que são esféricamente simétricas. Observações, como a Radiação Cósmica de Fundo (CMB na sigla em inglês para Cosmic Microwave Background), fortemente sugerem a validação desse princípio. Contudo, muitos têm considerado modelos anisotrópicos e inhomogêneos para buscar respostas a algumas questões mal explicadas pelo modelo cosmológico padrão, como formações de estrutura ou o comportamento do universo primordial.

A segunda hipótese provém de um postulado formulado por Weyl para tratar o

problema conceitual da cosmologia na relatividade geral. Ele fez a seguinte pergunta: como a relatividade geral, uma teoria construída para lidar com as observações entre dois referenciais relativamente acelerados, poderia ser aplicada à um único sistema físico, como é o universo? Weyl argumentou que é sempre possível construir uma classe de observadores no universo que se movem junto com o movimento médio das galáxias. Assim, propõe-se a ideia de que o conteúdo material do universo se porta como um fluido tal que suas partículas constituintes seguem geodésicas tipo tempo divergindo de um ponto em um passado finito ou infinito. Há portanto somente uma geodésica passando por cada ponto do espaço-tempo e, conseqüentemente, a matéria possui em cada ponto uma velocidade única. Isso possibilita tomarmos o conteúdo material do universo como um **fluido perfeito**. Obviamente, as galáxias e aglomerados não seguem estritamente este movimento, mas as variações em relação a um movimento médio geral são menores que um centésimo da velocidade da luz [59].

A terceira e última hipótese consiste no uso da teoria da relatividade geral para a descrição matemática do universo. Claro está que muitos modelos cosmológicos tem sido elaborados a partir de propostas alternativas à relatividade geral, como as teorias $f(R)$, acoplamento não mínimo, entre outras [60, 62]. Obviamente, nosso modelo cosmológico substitui o conteúdo desta terceira hipótese básica assumindo a gravitação geométrica-escalar como a teoria física a descrever o universo.

5.1 Métrica de Robertson-Walker

Inicialmente, introduzimos um sistema de coordenadas com simetria esférica, $x^\mu = (T, r, \theta, \phi)$, tal que a métrica auxiliar de Minkowski é escrita como

$$ds_M^2 = dT^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.1)$$

Iremos utilizar um sistema de unidades onde $c = 1$.

Com base no princípio cosmológico, é razoável assumirmos que o potencial gravitacional deva variar somente com o passar do tempo, assim, impomos que o campo escalar seja somente uma função da coordenada temporal, ou seja, $\Phi = \Phi(T)$. As componentes não nulas da métrica gravitacional são obtidas através das definições

feitas no capítulo anterior, são elas

$$q^{00} = \frac{1}{\alpha^3 V}, \quad q^{11} = q^{22} = q^{33} = \frac{1}{\alpha}, \quad (5.2)$$

onde as funções α e V também serão dependentes somente da coordenada temporal T . Portanto, o elemento de linha gravitacional é escrito como

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^3 V} dT^2 - \frac{1}{\alpha} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.3)$$

Utilizando uma transformação de coordenadas tal que

$$dT = \sqrt{\alpha^3 V} dt, \quad (5.4)$$

podemos reescrever a métrica gravitacional acima exatamente como a conhecida métrica de Robertson-Walker no caso onde a curvatura do tri-espaco é nula,

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{A(t)}{A_0} \right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.5)$$

onde temos definido o *fator de escala* $A(t)$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} \equiv \left(\frac{A(t)}{A_0} \right)^2, \quad (5.6)$$

onde A_0 é uma constante arbitrária introduzida por motivos que ficarão claros mais adiante. O fator de escala descreve como as distâncias entre objetos em um universo homogêneo e isotrópico se expandem ou contraem. Na gravitação geométrica-escalar, o fator de escala cosmológico é diretamente relacionado com o campo escalar pois, sendo $\alpha = e^{-2\Phi}$, temos que

$$A(t) = A_0 e^{\Phi}. \quad (5.7)$$

Por motivos de simplicidade, iremos reduzir nossa notação escrevendo

$$a(t) \equiv \frac{A(t)}{A_0} = e^{\Phi}, \quad (5.8)$$

resultando no elemento de linha gravitacional dado por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.9)$$

Este último resultado mostra que, com a simples restrição na dependência do potencial gravitacional com a coordenada temporal, constrói-se uma métrica homogênea, isotrópica e espacialmente plana, sendo esta a mesma métrica utilizada na relatividade geral para descrever o universo.

Note que o problema da planeza (veja o Apêndice B) não é sequer posto na cosmologia da teoria geométrica-escalar pois a única geometria homogênea e isotrópica permitida pela teoria tem seção espacial com curvatura nula.

5.2 Conteúdo material do universo

A partir dos resultados obtidos na seção anterior passamos a descrever o conteúdo material do universo. De acordo com o postulado de Weyl, iremos descrever o tensor de energia-momento como um fluido perfeito, ou seja,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) v^\mu v^\nu - p q^{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

Essa formulação descreve o fluido material do universo do ponto de vista de um observador comóvel a ele, ou seja, $v^\mu = \delta_0^\mu$, que o decompõe em uma densidade de matéria ρ e pressão p . A classe de observadores v^μ obviamente é definida na métrica gravitacional, satisfazendo a condição de normalização

$$v^\mu v_\mu = q^{\mu\nu} v_\mu v_\nu = 1, \quad (5.11)$$

e o traço do tensor de energia-momento é o usual

$$T = \rho - 3p. \quad (5.12)$$

Um fluido perfeito é descrito por uma equação barotrópica onde a pressão depende somente da densidade de energia. Definimos essa dependência como

$$p = \lambda \rho, \quad (5.13)$$

sendo λ a constante de proporcionalidade. Dado que a métrica cosmológica que estamos trabalhando aqui é a mesma utilizada na relatividade geral considerando-se as seções espaciais como planas, os resultados serão os mesmos daqueles obtidos na

seção dos apêndices B.2. De acordo com a conservação do tensor de energia-momento (5.10), podemos determinar também a dependência da densidade de energia do fluido com o fator de escala, a saber

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+\lambda)}}, \quad (5.14)$$

onde ρ_0 é uma constante de integração.

Utilizando essa descrição para o conteúdo material do universo e as definições estabelecidas na seção anterior, verificamos que

$$E = \rho, \quad \text{e} \quad C^\lambda = 0. \quad (5.15)$$

Substituindo essas quantidades na expressão (4.60), obtemos

$$\chi = -\frac{1}{2} \left[(\rho - 3p) + \left(\frac{1 + 3a^2}{1 - 3a^2} \right) \rho \right], \quad (5.16)$$

onde utilizamos que, segundo a definição feita para o coeficiente α e da função $V(\Phi)$, escrevemos

$$V = \frac{a^2}{4} (3a^2 - 1)^2. \quad (5.17)$$

5.3 Equação dinâmica

Para desenvolver o lado esquerdo da equação dinâmica (4.29) em termos do fator de escala é preciso atentar para uma questão que até então não havia surgido nos casos tratados no capítulo anterior. Lembrando a fórmula geral que determina a raiz quadrada do determinante da métrica $q_{\mu\nu}$,

$$\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{\alpha^3 \sqrt{V}}, \quad (5.18)$$

vemos que o mesmo está diretamente relacionado com a raiz quadrada da função $V(\Phi)$ e, de acordo com a expressão (5.17), verifica-se que há uma singularidade nesse espaço-tempo no ponto $a^2 = 1/3 (\sqrt{-q} \rightarrow \infty)$, onde a própria dinâmica se torna indefinida. Este comportamento singular não apareça explicitamente na forma da métrica dada em (5.9) pois o termo contendo a raiz da função foi absorvido pela nova coordenada temporal na transformação (5.4). Esta singularidade divide a variedade métrica em duas regiões que não possuem nenhuma ligação entre si por estarem

separadas por uma singularidade. À essas regiões denominamos *Universo Pequeno* (SU na sigla em inglês para Small Universe) o caso onde o fator de escala está limitado entre os valores 0 e $1/\sqrt{3}$ e, *Universo Grande* (BU também na sigla em inglês para Big Universe) o caso onde $a > 1/\sqrt{3}$. Mais do que isso, é necessário impor $\sqrt{V} > 0$ para garantir a positividade da expressão (5.18). Isso nos leva à seguinte definição,

$$\sqrt{V} = \begin{cases} -\frac{a}{4}(3a^2 - 1), & \text{se } 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ +\frac{a}{4}(3a^2 - 1), & \text{se } a > \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \quad (5.19)$$

que resultará em dinâmicas diferentes para cada uma dessas duas regiões. Portanto, o modelo cosmológico da gravitação geométrica-escalar proporciona duas soluções distintas para a evolução do universo.

A parte que contém derivadas do campo provém do termo $\square \Phi$ que, com a dependência somente temporal, escreve-se como

$$\square \Phi = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (5.20)$$

onde definimos que $\dot{x} = dx/dt$ e utilizamos a relação $\dot{a} = \dot{\Phi} a$. Com isso, finalmente podemos escrever a equação dinâmica da cosmologia na gravitação geométrica-escalar que, após uma simples manipulação algébrica, resulta

$$a \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = -\kappa \rho_0 \frac{(2 - 3\lambda + 9\lambda a^2)}{a^{3(1+\lambda)}(3a^2 - 1)^2}, \quad \text{para } 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (5.21a)$$

$$a \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = +\kappa \rho_0 \frac{(2 - 3\lambda + 9\lambda a^2)}{a^{3(1+\lambda)}(3a^2 - 1)^2}, \quad \text{para } a > \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5.21b)$$

A primeira integral de cada uma dessas equações é facilmente obtidas usando-se uma redefinição de variáveis com

$$u = \dot{a}^2. \quad (5.22)$$

Dessa forma, verificamos que

$$\frac{du}{da} = 2\ddot{a}, \quad (5.23)$$

e, multiplicando ambos os lados das equações (5.21) por a^4 , as reescrevemos como

$$\frac{d}{da} (a^4 u) = -2 \kappa \rho_0 \frac{(2 - 3\lambda + 9\lambda a^2)}{a^{(3\lambda-1)}(3a^2 - 1)^2}, \quad \text{para } 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (5.24a)$$

$$\frac{d}{da} (a^4 u) = +2 \kappa \rho_0 \frac{(2 - 3\lambda + 9\lambda a^2)}{a^{(3\lambda-1)}(3a^2 - 1)^2}, \quad \text{para } a > \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5.24b)$$

A integração é simples e as expressões resultantes podem ser agrupadas com o uso de uma função modular,

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a^4} - 2\kappa\rho_0 \frac{a^{-2-3\lambda}}{|3a^2 - 1|}, \quad (5.25)$$

onde M é uma constante de integração que, sendo $\dot{a}^2 > 0$, deve ser estritamente positiva e não nula. Substituindo esta última equação nas expressões (5.21) é possível escrever a aceleração \ddot{a} em termos do próprio fator de escala,

$$\ddot{a} = \begin{cases} -2 \frac{M}{a^5} + \frac{\kappa\rho_0}{a^{3(1+\lambda)}} \left[\frac{2 + 3\lambda}{|3a^2 - 1|} - \frac{6a^2}{(3a^2 - 1)^2} \right], & \text{no SU,} \quad (5.26a) \\ -2 \frac{M}{a^5} + \frac{\kappa\rho_0}{a^{3(1+\lambda)}} \left[\frac{2 + 3\lambda}{|3a^2 - 1|} + \frac{6a^2}{(3a^2 - 1)^2} \right], & \text{no BU.} \quad (5.26b) \end{cases}$$

Integrar a equação (5.25) é mais complicado e, embora seja possível obter uma solução analítica através de programas computacionais, resultando em uma série de funções elípticas, pode-se extrair informações sobre o comportamento do SU e BU a partir desse primeiro resultado. Nas próximas seções iremos descrever essas propriedades para os valores de λ específicos.

5.4 Universo com um único fluido material

Espera-se que o comportamento do universo possa ser modelado com no mínimo duas componentes constituindo o seu fluido material, poeira (matéria não relativística com pressão nula) e radiação (fótons). Entretanto, buscando compreender melhor a dinâmica do modelo cosmológico na gravitação geométrica-escalar, vamos inicialmente estudar separadamente cada uma dessas componentes que se mostram mais relevantes

para compor o conteúdo material do universo. Consideraremos também o caso da energia escura, para uma comparação com o modelo cosmológico de Friedmann.

5.4.1 Universo vazio

A primeira solução mais simples que podemos encontrar é a de uma situação não muito realística onde o universo está completamente vazio, ou seja, $\rho_0 = 0$. Para este cenário a equação (5.25) toma a seguinte forma,

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a^4}. \quad (5.27)$$

A solução que se mostra mais adequada fisicamente é a de um universo estático, visto que não há qualquer forma de matéria ou energia preenchendo a variedade. Assim, teríamos $M = 0$ e $\dot{a} = 0$. Neste caso só há uma única variedade como solução e ela é descrita por uma métrica de Minkowski.

Ainda assim, a equação (5.27) admite outra solução onde há uma expansão ou contração do universo com o fator de escala sendo do tipo,

$$a(t) = \pm a_0 t^{1/3}, \quad (5.28)$$

onde a_0 é uma constante de integração positiva. Portanto, temos um universo, com curvatura espacial nula, vazio e dinâmico. Na relatividade geral uma solução desse tipo só é possível se a curvatura da tri-seção espacial for negativa.

5.4.2 Matéria não relativística

No caso da matéria ordinária, não considera-se que a pressão seja um fator determinante, de modo que assumimos $\lambda = 0$. Com isso, a equação (5.25) evidencia que o fator de escala $a(t)$ possui dois pontos extremos ($\dot{a} = 0$), um situado no SU e outro no BU. Calculando tais pontos e substituindo nas devidas expressões em (5.26), para sabermos o sinal da aceleração em cada caso, nota-se que no SU obtém-se um máximo,

$$a_{SU} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2\kappa\rho_0}{3M}\right)^{-1}}, \quad (5.29)$$

enquanto o BU possui um mínimo,

$$a_{BU} \geq \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{2\kappa\rho_0}{3M}\right)^{-1}}. \quad (5.30)$$

Isso mostra que nenhuma das duas soluções, SU ou BU, possuem um comportamento singular em $a^2 = 1/3$, devido à estes pontos extremos impedirem que o fator de escala atinja o valor singular. O SU ainda possui um valor singular inicial quando $a = 0$.

Note que no BU, devemos limitar inferiormente o valor da constante M para garantirmos que o fator de escala não assuma valores imaginários. Dessa forma, para que $a_{BU}^2 > 0$, teremos

$$M > \frac{2}{3} \kappa\rho_0. \quad (5.31)$$

Independente do valor escolhido para a constante M vemos que a solução BU é um modelo cosmológico não singular. Esse é um resultado relevante, ainda mais pelo seu contraste com a relatividade geral, onde não é possível gerar aceleração positiva sem violar no mínimo alguma das condições de energia. Neste modelo com matéria sem pressão compondo o universo, vemos que não só geramos aceleração positiva (no BU) como também obtemos um ponto de ricochete que torna o universo não singular.

O ponto em que ocorre o ricochete é determinado fixando a constante M , sendo sempre maior que $1/\sqrt{3}$. Este seria um valor muito grande para o fator de escala mínimo do universo mas, lembrando a definição (5.8), vemos que a constante A_0 é quem irá estabelecer a verdadeira ordem de grandeza do fator de escala no momento do ricochete.

Para visualizarmos melhor o comportamento do SU e BU podemos traçar um diagrama de fases relacionando o parâmetro de Hubble $H(t) = \dot{a}/a$ (velocidade) e o fator de escala. Montamos um sistema de equações diferenciais com essas variáveis,

$$\dot{a} = H(t) a(t), \quad (5.32a)$$

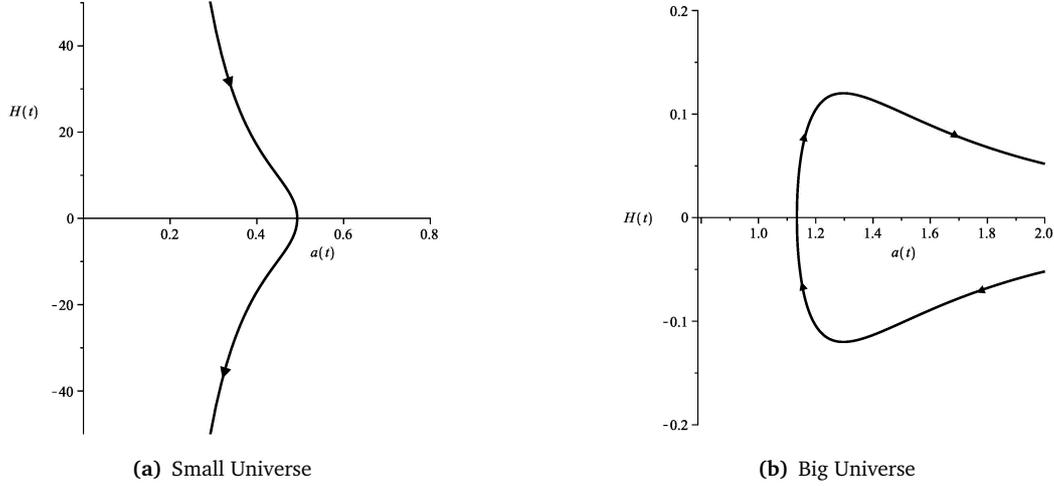


Figura 5.1: Diagramas de fase para um universo preenchido com matéria sem pressão. Utilizamos $M = 0.9 \kappa \rho_0$ para podemos definir numericamente os valores extremos do fator de escala. **(a)** A aceleração no SU é sempre negativa, além do que possui um comportamento singular quando $a = 0$. **(b)** No BU a aceleração é positiva na região em torno do ricochete, originando uma fase de expansão acelerada logo após a passagem pelo ponto de mínimo.

$$\dot{H} = \begin{cases} -3 H(t)^2 - \frac{2}{a(t)^4 (3 a(t)^2 - 1)^2}, & \text{para o SU,} \\ -3 H(t)^2 + \frac{2}{a(t)^4 (3 a(t)^2 - 1)^2}, & \text{para o BU,} \end{cases} \quad (5.32b)$$

onde o último par de equações nada mais é que a equação dinâmica com $\lambda = 0$ e o uso do parâmetro de Hubble, H , substituindo as derivadas do fator de escala. Para traçar a trajetória no diagramas de fases utilizamos o fato de que $H = 0$ quando $a = a_{max}$, ou $a = a_{min}$, como condição inicial.

As Figuras 5.1 mostram o comportamento dinâmico de cada uma das soluções possíveis, SU e BU. No primeiro caso [Figura 5.1(a)], o universo possui uma singularidade em $a = 0$. Ele se expande a partir desse ponto, atinge um máximo e passa a se contrair em direção à singularidade novamente. O mesmo diagrama nos permiti concluir que o SU não possui nenhuma fase de expansão acelerada. Tais características desfavorece a solução SU como candidato a descrever o universo real, a solução é singular e não apresenta aceleração positiva em nenhum instante. No diagrama 5.1(b) fica claro a existência de um ricochete no BU, como havíamos dito anteriormente. Obviamente, para apresentar um mínimo, o BU possui um regime de

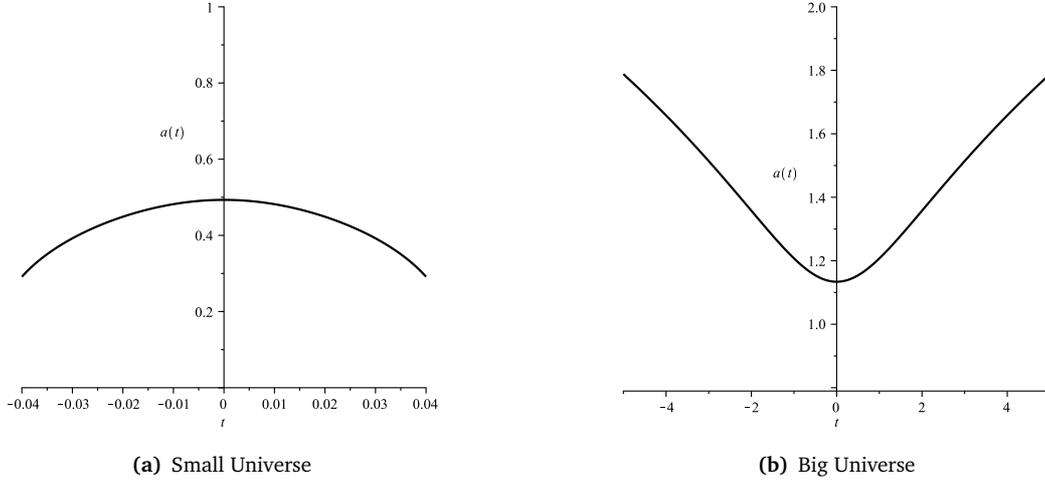


Figura 5.2: Fator de escala em função da coordenada temporal para cada uma das soluções SU e BU. **(a)** No SU o fator de escala evolui a partir de um ponto singular e depois colapsa em direção ao mesmo ponto. **(b)** O BU apresenta um universo infinito com o fator de escala tendo um mínimo não singular.

aceleração positiva que gera uma fase de expansão acelerada logo após o ricochete.

Também é possível plotar o próprio fator de escala em função da coordenada temporal, como está mostrado nas Figuras 5.2.

5.4.3 Radiação

No caso de o universo está preenchido somente com fótons assumimos $\lambda = 1/3$, e o valor máximo para o fator de escala no SU será,

$$a_{SU} \leq -\frac{\kappa\rho_0}{3M} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{\kappa\rho_0}{M}\right)^2 + 3}, \quad (5.33)$$

enquanto que no BU o fator de escala possui um mínimo dado por,

$$a_{BU} \geq \frac{\kappa\rho_0}{3M} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{\kappa\rho_0}{M}\right)^2 + 3}. \quad (5.34)$$

Note que nesse caso não há a possibilidade de o fator de escala atingir valores imaginários em qualquer um dos universos, não sendo necessário limitar a constante M .

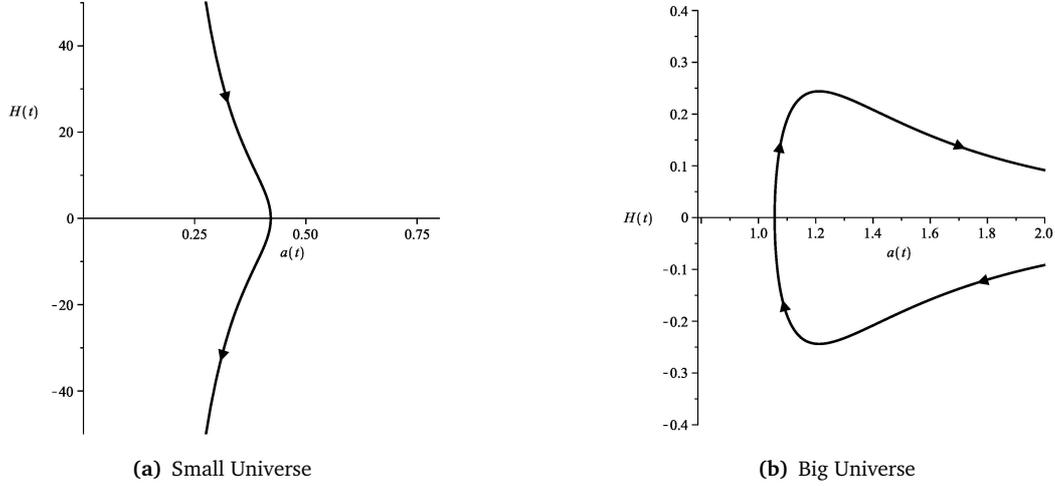


Figura 5.3: Diagrama de fase para um universo preenchido com radiação. Utilizamos $M = 0.9 \kappa \rho_0$ para podermos definir numericamente os valores extremos do fator de escala. As dinâmicas no caso da radiação são similares ao caso de poeira, mostrado nas Figuras 5.1.

As equações diferenciais bases para gerarmos o diagramas de fases serão

$$\dot{a} = H(t) a(t), \quad (5.35a)$$

$$\dot{H} = \begin{cases} -3 H(t)^2 - \frac{1 + 3a^2}{a(t)^5 (3a(t)^2 - 1)^2} & \text{para o SU} \\ -3 H(t)^2 + \frac{1 + 3a^2}{a(t)^5 (3a(t)^2 - 1)^2} & \text{para o BU,} \end{cases} \quad (5.35b)$$

e o resultado, muito similar ao caso anterior, é mostrado nas Figuras 5.3. Portanto, um universo dominado somente pela radiação também possui um ricochete (BU) e uma fase de expansão acelerada.

5.4.4 Energia escura

O caso de energia escura mais popular na literatura é o da constante cosmológica e refere-se ao fluido com equação de estado onde $\lambda = -1$. Como está mostrado no Apêndice B, essa constante cosmológica está diretamente ligada com a energia do

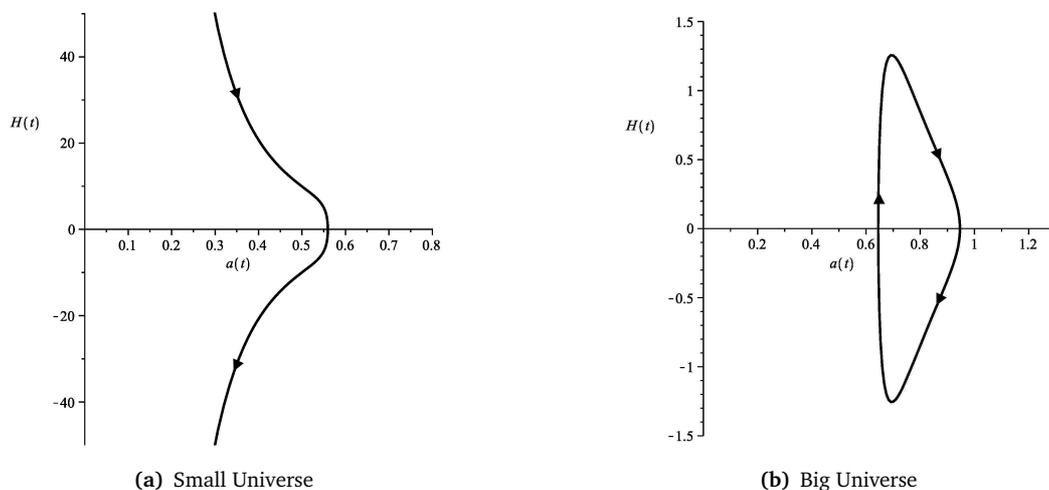


Figura 5.4: Diagrama de fase para um universo dominado por energia escura ($\lambda = -1$). Utilizamos $M = 0.9 \kappa \rho_0$ para podermos definir numericamente os valores extremos do fator de escala. **(a)** A solução SU apresenta-se como as anteriores (matéria sem pressão e radiação). **(b)** O BU é um universo eterno cíclico.

vácuo, no entanto, na gravitação geométrica-escalar não se deve fazer essa associação. Mais adiante iremos investigar a maneira pela qual é possível introduzirmos uma constante cosmológica na dinâmica da gravitação geométrica-escalar e entender o porquê da inexistência de uma conexão entre energia escura e constante cosmológica. Ainda assim, a energia escura representa uma solução distinta na gravitação geométrica-escalar como pode ser visto a seguir.

Ao analisarmos os pontos extremos desse caso vemos que a equação $\dot{a} = 0$ é um polinômio de quinto grau para o fator de escala,

$$2\kappa\rho_0 a^5 + 3M a^2 - M = 0, \quad \text{para o SU}, \quad (5.36a)$$

$$2\kappa\rho_0 a^5 - 3M a^2 + M = 0, \quad \text{para o BU}. \quad (5.36b)$$

Como é bem sabido, polinômios de ordem igual ou superior à 5 não possuem uma solução geral mas, se escolhermos um valor para a constante M , como por exemplo $M = 0.9 \kappa \rho_0$, que utilizamos nos casos anteriores, podemos calcular numericamente as raízes desse polinômio e produzir um diagrama de fases. As equações para o fator de escala e o parâmetro de Hubble para o caso da energia do vácuo estão relacionadas

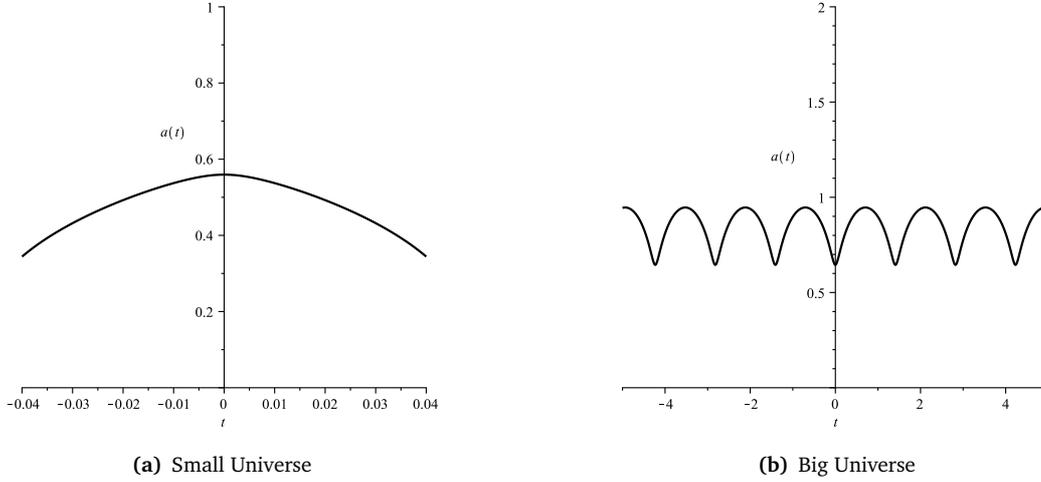


Figura 5.5: Gráficos para o fator de escala em função da coordenada temporal para o caso da energia escura.

abaixo,

$$\dot{a} = H(t) a(t), \quad (5.37a)$$

$$\dot{H} = \begin{cases} -3H(t)^2 - \frac{5 - 9a^2}{a(t)(3a(t)^2 - 1)^2} & \text{para o SU} \\ -3H(t)^2 + \frac{5 - 9a^2}{a(t)(3a(t)^2 - 1)^2} & \text{para o BU.} \end{cases} \quad (5.37b)$$

A Figura 5.4 mostra um resultado muito interessante para o BU, o universo não só é eterno e não singular como também é cíclico. No SU a dinâmica é muito similar aos casos anteriores também. A Figura 5.5 mostra os respectivos gráficos para o fator de escala em função do tempo.

Há uma forma de analisarmos se esse resultado ocorre sempre independente da escolha da constante M . Para isso, a partir das equações (5.25) e (5.26), escrevemos duas inequações segundo $\dot{a}^2 > 0$ e $\ddot{a} > 0$. Para o SU esse par de inequações será

$$\dot{a}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M}{\kappa\rho_0} > \frac{2a^5}{1 - 3a^2}, \quad (5.38a)$$

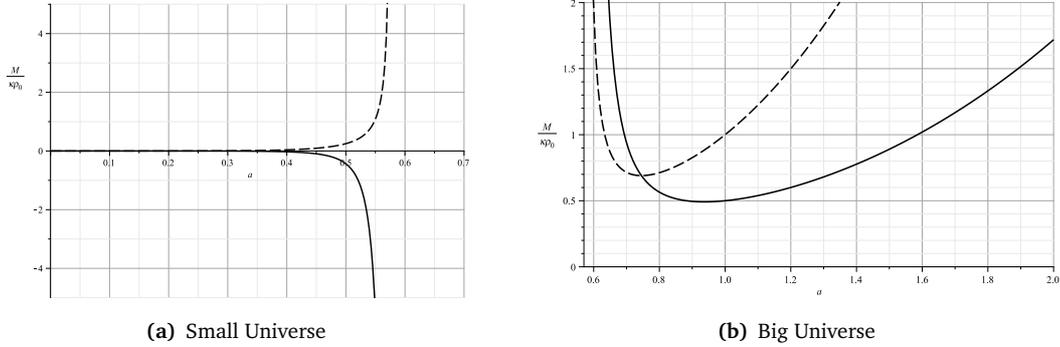


Figura 5.6: Valores extremos do fator de escala para o caso de energia escura com $\lambda = -1$.

$$\ddot{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M}{\kappa\rho_0} < -\frac{a^5}{2} \cdot \frac{1+3a^2}{(1-3a^2)^2}. \quad (5.38b)$$

Nota-se então que, independente do valor escolhido para a constante M , que deve ser sempre maior do que zero, o SU sempre terá uma aceleração negativa. Para o BU, teremos

$$\dot{a}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M}{\kappa\rho_0} > \frac{2a^5}{3a^2-1}, \quad (5.39a)$$

$$\ddot{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M}{\kappa\rho_0} < \frac{a^5}{2} \cdot \frac{1+3a^2}{(1-3a^2)^2}. \quad (5.39b)$$

Para mais facilmente visualizarmos as possibilidades de termos máximos ou mínimos no fator de escala traçamos um gráfico do lado direito desses pares de inequações, como mostrado na Figura 5.6. A linha tracejada equivale à inequação para $\dot{a}^2 > 0$, enquanto a linha sólida provém da inequação $\ddot{a} > 0$. Devemos ler estes gráficos da seguinte maneira. Escolhendo um valor específico para a constante M o mesmo equivale a uma linha horizontal no gráfico. Segundo as expressões em (5.38a) e (5.39a), os valores não imaginários do fator de escala são aqueles onde a linha tracejada encontra-se abaixo do limite horizontal delimitado pelo valor de M . A linha sólida, se estiver abaixo do valor de M representa uma aceleração negativa, e positiva no caso contrário. Os pontos onde a linha tracejada corta a linha horizontal do valor de M são os extremos do fator de escala.

Com isso, nota-se que, como foi dito antes, o SU possui aceleração negativa sempre,

existindo um valor máximo sempre, independente do valor escolhido para M . No BU vemos que $M \gtrsim 0.7 \kappa \rho_0$, caso contrário só haveria valores imaginários para o fator de escala. Acima desse valor, o BU é sempre um universo cíclico como o mostrado no diagrama de fases anterior.

5.5 Escalar de curvatura

Além dos modelos cosmológicos discutidos na seção anterior, onde fica evidente uma distinção entre a gravitação geométrica-escalar e a relatividade geral, há um outro fato que notoriamente colabora para essa diferença. Na relatividade geral o traço da equação dinâmica de Einstein relaciona o escalar de curvatura com o tensor de energia momento,

$$R = \kappa T = \kappa (1 - 3\lambda) \rho. \quad (5.40)$$

Portanto, o escalar de curvatura não pode mudar o seu sinal em um mesmo modelo de universo.

Na gravitação geométrica-escalar, a dinâmica não estabelece nenhuma relação entre a curvatura e o conteúdo material e, se calcularmos o escalar de Ricci diretamente da métrica cosmológica,

$$\frac{R}{6} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (5.41)$$

vemos que se a aceleração muda o seu sinal, o escalar de curvatura também pode passar de positivo para negativo, ou vice e versa. Portanto, nos modelos que vimos na seção anterior, o tensor de Ricci será positivo no entorno do ricochete e negativo no restante do universo.

5.6 Constante Cosmológica

A primeira vez que a constante cosmológica surgiu no contexto da relatividade geral foi quando Einstein, buscando uma descrição estática do universo, adicionou o termo Λ à sua lagrangeana original como uma correção geométrica para suas equações dinâmicas. Podemos interpretar essa constante de um outro ponto de vista, ao invés de uma modificação puramente geométrica da estrutura do espaço-tempo, ela pode ser colocada no lado direito das equações de Einstein para ser entendida como uma

componente do fluido fonte da gravitação, com densidade constante e pressão negativa ($p = -\rho$). Como já foi dito aqui, o papel da constante cosmológica hoje é bem diferente daquele pensado por Einstein, sendo fundamental para o entendimento da dinâmica do universo segundo a relatividade geral.

Na gravitação geométrica-escalar já vimos que não podemos associar nenhum fluido perfeito a uma constante cosmológica, isso devido à maneira pela qual a matéria se relaciona gravitacionalmente com a geometria do espaço-tempo nessa teoria. A menos que se use uma relação complicada entre pressão e densidade, não é possível obter a partir de um fluido material uma contribuição com um termo constante à expansão do universo, como ocorre na equação de Friedmann com o termo de constante cosmológica, onde

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.42)$$

Ainda assim, podemos alcançar um resultado como esse na cosmologia da gravitação geométrica-escalar através de uma modificação da estrutura lagrangeana do campo gravitacional escalar.

Considere a densidade lagrangeana original do campo Φ adicionada de um potencial,

$$L = V(\Phi)w + U(\Phi), \quad (5.43)$$

onde definimos

$$U = \frac{\Sigma}{3\alpha^3}, \quad (5.44)$$

sendo Σ uma constante. O princípio variacional, não considerando a presença de matéria, resulta na equação dinâmica

$$\square\Phi = \Sigma. \quad (5.45)$$

Se desenvolvermos essa dinâmica utilizando a geometria homogênea e isotrópica, ela se reduz à expressão

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}}{a} = \Sigma, \quad (5.46)$$

que pode ser facilmente integrada da mesma forma que fizemos na seção 5.3, obtendo

$$H^2 = \frac{\Sigma}{3}. \quad (5.47)$$

A partir daí, as consequências cosmológicas são as mesmas daquelas na relatividade

geral e podem ser encontradas no Apêndice B. O fator de escala terá uma dependência exponencial com o tempo. Note que optamos por utilizar uma letra grega diferente para a constante cosmológica na gravitação geométrica-escalar para evitar confusões conceituais, nessa teoria a constante cosmológica não pode ser associada a um fluido que represente a energia do vácuo como é feito na relatividade geral. Σ tem sua origem atrelada à natureza do campo gravitacional.

Embora a adição do potencial U à lagrangeana do campo gravitacional resulte em uma dinâmica exatamente igual àquela de Friedmann com constante cosmológica, suas consequências para um sistema estático e esfericamente simétrico não é o mesmo. Na relatividade geral com constante cosmológica a solução esférica do vácuo é conhecida como Schwarzschild-de Sitter, que modifica a componente g_{00} da métrica com a adição de um termo Λr^2 ,

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \Lambda r^2, \quad \text{e} \quad g_{11} = -\frac{1}{g_{00}}. \quad (5.48)$$

Na gravitação geométrica-escalar a condição $q_{00} = -1/q_{11}$ imposta sob a métrica esfericamente simétrica (4.33), junto com a equação dinâmica (5.45) só tem solução se $\Sigma = 0$. Na relatividade geral essa condição sobre as componentes temporais e radiais da métrica provém da própria equação de Einstein. No entanto, nós a usamos aqui como uma opção. Uma solução da equação (5.45) sem essa condição é teoricamente possível, mas ela teria um alto nível de complicação e não seria de interesse nosso a priori.

Capítulo 6

Perturbações cosmológicas

Até agora, para desenvolvermos um modelo cosmológico a partir da teoria geométrica-escalar da gravitação tomamos o universo como sendo homogêneo e isotrópico, respaldados pelo princípio cosmológico. Entretanto, um modelo compatível com o universo observado deve poder explicar como se deu a formação das estruturas que enxergamos hoje como galáxias e aglomerados de galáxias. Para entendermos como isso ocorre precisamos estudar a dinâmica de pequenas perturbações tanto do campo gravitacional quanto do conteúdo material do universo. Entendemos que, se houve pequenas flutuações na densidade de matéria/energia do universo primordial (próximo ao bounce), a instabilidade gravitacional poderia amplificar estas flutuações levando à formação das estruturas que observamos hoje. Neste capítulo iremos desenvolver esta análise proporcionando os primeiros passos para a elaboração de uma teoria de perturbações lineares gravitacionais na gravitação geométrica-escalar.

6.1 Perturbações do potencial gravitacional

As perturbações lineares do potencial gravitacional na gravitação geométrica-escalar correspondem à perturbações do campo escalar Φ . Considerando somente a primeira ordem, escrevemos

$$\Phi = \Phi_0(t) + \delta\Phi(t, \vec{x}), \quad (6.1)$$

onde $\Phi_0(t)$ é tomada como sendo uma solução exata das equações dinâmicas, chamada solução de fundo, e $\delta\Phi(t, \vec{x})$ representa uma pequena perturbação sob essa solução de fundo, com $\delta\Phi^2 \ll \delta\Phi$.

Consideremos o sistemas de coordenadas $\bar{x}^\mu = (T, r, \theta, \Phi)$ e a métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e, lembrando a definição da métrica gravitacional,

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi, \quad (6.2)$$

calculamos as componentes da métrica perturbada, a saber

$$\delta q^{00} = (\alpha + \beta)' \delta\Phi, \quad (6.3)$$

$$\delta q^{0i} = -\beta \left(\frac{d\Phi}{dT} \right)^{-1} \delta^{ij} \delta\Phi_{,j}, \quad (6.4)$$

$$\delta q^{ij} = -\alpha' \delta\Phi \delta^{ij}, \quad (6.5)$$

onde o símbolo ' representa uma derivada em relação ao campo escalar e todas as quantidades que não possuem um símbolo δ são calculadas no fundo. Usando as definições de α , β e da função V , simplificamos essas componentes como

$$\delta q^{00} = \alpha(3 - \alpha) \delta\Phi, \quad (6.6)$$

$$\delta q^{0i} = -\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 9)}{4} \left(\frac{d\Phi}{dT} \right)^{-1} \delta\Phi_{,j} \delta^{ij}, \quad (6.7)$$

$$\delta q^{ij} = 2\alpha \delta\Phi \delta^{ij}. \quad (6.8)$$

As relações entre as componentes contravariantes e covariantes da métrica podem ser obtidas ao perturbar-se a expressão

$$q^{\mu\alpha} q_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (6.9)$$

resultando

$$\delta q_{\mu\nu} = -q_{\mu\alpha} q_{\nu\beta} \delta q^{\alpha\beta}. \quad (6.10)$$

Usando essa expressão, mais a métrica do fundo (5.3), obtemos o elemento de linha total,

$$ds^2 = (q_{\mu\nu} + \delta q_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = \left[1 - \frac{4\alpha \delta\Phi}{(3-\alpha)} \right] \frac{dT^2}{\alpha^3 V} - \frac{(\alpha-1)(\alpha-9)}{2\alpha} \left(\frac{d\Phi}{dT} \right)^{-1} \frac{dT}{\alpha^3 V} \delta\Phi_{,i} dx^i - \frac{1}{\alpha} (1 + 2\delta\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (6.11)$$

Agora podemos aplicar a transformação de coordenadas (5.4) afim de obtermos uma métrica do fundo como a de Robertson-Walker. Introduzindo o tempo cósmico t , o elemento de linha total será

$$ds^2 = \left[1 - \frac{4\delta\Phi}{(3a^2-1)} \right] dt^2 - \frac{(a^2-1)(9a^2-1)}{2a^2 H} \delta\Phi_{,i} dx^i dt - a^2 (1 + 2\delta\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.12)$$

lembrando que $H = \dot{\Phi} = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Portanto, a perturbação gravitacional feita sob um universo homogêneo e isotrópico é dada pelas quantidades

$$\delta q_{00} = - \frac{4}{(3a^2-1)} \delta\Phi, \quad (6.13a)$$

$$\delta q_{0i} = - \frac{(a^2-1)(9a^2-1)}{4a^2 H} \delta\Phi_{,i} \quad (6.13b)$$

$$\delta q_{ij} = - 2a^2 \delta\Phi \delta_{ij}. \quad (6.13c)$$

Para efeitos de comparação com a relatividade geral notamos que, como era de se esperar, só há perturbações escalares, mesmo as componentes vetoriais são construídas a partir de gradientes de uma função escalar. Ainda assim, seria um tanto quanto precipitado deduzir limitações na teoria devido a este aspecto, dado a maneira diferente em que fenômenos como as ondas gravitacionais devem ser interpretados.

As expressões acima representam verdadeiras perturbações do campo gravitacional e não podem ser geradas por nenhuma transformação de coordenadas, iremos mostrar isso mais adiante. Por agora vamos obter a equação que governa a dinâmica dessas perturbações.

6.2 Perturbação da dinâmica

Com a métrica gravitacional perturbada já estabelecida passamos a obter a equação dinâmica perturbada. Faremos isso em partes, primeiro perturbando o lado esquerdo ($\sqrt{V}\square\Phi$) e depois o conteúdo material (χ).

Calcular a perturbação do termo $\square\Phi$ é mais fácil se utilizarmos o equivalente no

espaço de Minkowski,

$$\square\Phi = \alpha^3 V \left(\square_M \Phi + \frac{V'}{2V} w \right), \quad (6.14)$$

onde o operador \square_M é o d'Alembertiano calculado no espaço-tempo de Minkowski. Essa simplificação é útil somente se considerarmos o sistema de coordenadas $x^\mu = (T, x, y, z)$, onde a métrica de Minkowski assume a forma $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Assim, perturbando a equação acima e transformando para o tempo cósmico t , obtemos o seguinte resultado,

$$\delta(\square\Phi) = \delta\ddot{\Phi} + 2H \left(\frac{9a^2 - 2}{3a^2 - 1} \right) \delta\dot{\Phi} + \frac{4}{(3a^2 - 1)} \left(\frac{2\kappa\chi_0}{a} - 3\dot{a}^2 \right) \delta\Phi + \frac{(3a^2 - 1)^2}{4a^2} \nabla^2 \delta\Phi, \quad (6.15)$$

com χ_0 indicando o conteúdo material do fundo e $\nabla^2 \equiv q^{ij} \partial_i \partial_j$. Instituímos também a seguinte notação matemática

$$\delta\dot{\Phi} = \frac{d(\delta\Phi)}{dt} \quad \text{e} \quad \delta\ddot{\Phi} = \frac{d^2(\delta\Phi)}{dt^2}.$$

O lado esquerdo da equação dinâmica, dado por $\sqrt{V}\square\Phi$, fica sendo

$$\delta(\sqrt{V}\square\Phi) = \frac{a}{2}(3a^2 - 1)\delta\ddot{\Phi} + \dot{a}(9a^2 - 2)\delta\dot{\Phi} + \left[3\kappa\chi_0 \left(\frac{3a^2 + 1}{3a^2 - 1} \right) - \frac{6a\dot{a}^2}{(3a^2 - 1)} \right] \delta\Phi + \frac{(3a^2 - 1)^3}{8a} \nabla^2 \delta\Phi. \quad (6.16)$$

Para calcular a perturbação do termo de matéria vamos primeiro obter a perturbação do tensor de energia-momento utilizando a forma mista,

$$T_\mu^\nu = (\rho + p)v_\mu v^\nu - p\delta_\mu^\nu. \quad (6.17)$$

Assumindo que o fluido perturbado também é perfeito, obtemos

$$\delta T^0_0 = \delta\rho, \quad (6.18)$$

$$\delta T^0_i = (\rho + p)\delta v_i, \quad (6.19)$$

$$\delta T^i_0 = (\rho + p)\delta v^i, \quad (6.20)$$

$$\delta T^i_j = -\delta p \delta^i_j, \quad (6.21)$$

de onde é possível notar que $\delta T = \delta\rho - 3\delta p$ e $\delta E = \delta\rho$. A partir desses resultados

calculamos também a perturbação do termo C_λ . Lembremos que,

$$C_\lambda = \frac{(\alpha^2 V - 1)}{\Omega} [T_\lambda^\mu - E \delta_\lambda^\mu] \Phi_{,\mu}, \quad (6.22)$$

onde o termo entre colchetes é nulo no fundo. Logo,

$$\begin{aligned} \delta C_\lambda &= \frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^2 H^2} \delta ([T_\lambda^\mu - E \delta_\lambda^\mu] \Phi_{,\mu}), \\ \delta C_\lambda &= \frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^2 H^2} \left[\delta T_\lambda^0 \dot{\Phi} - \delta \rho \Phi_{,\lambda} + (\rho + p)(v_\lambda v^\mu - \delta_\lambda^\mu) \delta \Phi_{,\mu} \right], \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde também usamos o fato que $\Omega = H^2$. Podemos ver que,

$$\delta C_0 = 0 \quad \text{e} \quad \delta C_i = \frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^2 H^2} (\rho + p)(H \delta v_i - \delta \Phi_{,i}). \quad (6.24)$$

Como C_λ é nulo no fundo podemos escrever que $\delta C^\lambda = q^{\lambda\alpha} \delta C_\alpha$, e então teremos

$$\delta C^0 = 0 \quad \text{e} \quad \delta C^i = -\frac{\delta^{ij}}{a^2} \delta C_j. \quad (6.25)$$

A partir daí obtemos o divergente

$$\delta(C^\lambda{}_{;\lambda}) = (\delta C^\lambda)_{;\lambda} = -\frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^2 H^2} (\rho + p) [H q^{ij} \delta v_{i,j} - \nabla^2 \delta \Phi], \quad (6.26)$$

e, com estes resultados podemos construir a perturbação do lado direito da equação dinâmica. Lembrando que

$$\chi = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3a^2 + 1}{3a^2 - 1} \right) E - T - C^\lambda{}_{;\lambda} \right], \quad (6.27)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta \chi &= \frac{\rho}{2} \left[\frac{2}{(3a^2 - 1)} \delta + 3\lambda \delta - \frac{12a^2}{(3a^2 - 1)^2} \delta \Phi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^2 H^2} (1 + \lambda) (H q^{ij} \delta v_{i,j} - \nabla^2 \delta \Phi) \right], \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde temos definido a função contraste de densidade $\delta = \delta \rho / \rho$ e estamos assumindo também que o fluido mantém seu caráter perfeito, ou seja, $\delta p = \lambda \delta \rho$. Portanto, a

equação dinâmica perturbada será

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\Phi} + 2H \frac{(9a^2 - 2)}{(3a^2 - 1)} \delta\dot{\Phi} + \left[3\kappa \frac{\chi_0}{a} \frac{(3a^2 + 1)}{(3a^2 - 1)^2} - \frac{12a^2 H}{(3a^2 - 1)^2} \right] \delta\Phi + \frac{(3a^2 - 1)^2}{4a^2} \nabla^2 \delta\Phi = \\ = \frac{\kappa\rho_0 a^{-(4+3\lambda)}}{(3a^2 - 1)} \left[\frac{2}{(3a^2 - 1)} \delta + 3\lambda \delta - \frac{12a^2}{(3a^2 - 1)^2} \delta\Phi + \right. \\ \left. + \frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^2 H^2} (1 + \lambda) (H q^{ij} \delta v_{i,j} - \nabla^2 \delta\Phi) \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Também podemos perturbar as equações de conservação do tensor de energia-momento para obter informações da evolução do contraste de densidade. Note que

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = (\rho + p)_{;\nu} v^{\nu} v_{\mu} + (\rho + p) (v_{\mu;\nu} v^{\nu} + \theta v_{\mu}) - p_{;\mu} = 0, \quad (6.30)$$

onde $\theta \equiv v^{\mu}{}_{;\mu}$ é o fator de expansão do fluido. Calculando a perturbação dessa equação obtemos

$$\begin{aligned} (\delta\dot{\rho} + \delta\dot{p}) v_{\mu} + (\dot{\rho} + \dot{p})(\delta v^0 v_{\mu} + \delta v_{\mu}) + (\delta\rho + \delta p) \theta v_{\mu} + \\ + (\rho + p) \left[\delta(v_{\mu;\nu}) v^{\nu} + v_{\mu;\nu} \delta v^{\nu} + \theta \delta v_{\mu} + v_{\mu} \delta\theta \right] - p_{;\mu} = 0, \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde estamos usando a mesma notação adotada para o campo escalar, ou seja,

$$\delta\dot{X} \equiv \frac{\partial(\delta X)}{\partial t}. \quad (6.32)$$

Desenvolvendo a derivada covariante do campo de velocidade,

$$\delta(v_{\mu;\nu}) = \delta v_{\mu,\nu} - \delta\Gamma_{\mu\nu}^0 - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta v_{\lambda}, \quad (6.33)$$

a equação (6.31) é reescrita como

$$\begin{aligned} (\delta\dot{\rho} + \delta\dot{p}) v_{\mu} + (\dot{\rho} + \dot{p})(\delta v^0 v_{\mu} + \delta v_{\mu}) + (\delta\rho + \delta p) \theta v_{\mu} + \\ + (\rho + p) \left[\delta\dot{v}_{\mu} - \delta\Gamma_{\mu 0}^0 - \delta\Gamma_{\mu 0}^i \delta v_0 - \Gamma_{\mu 0}^i \delta v_i + \theta \delta v_{\mu} + v_{\mu} \delta\theta \right] - p_{;\mu} = 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Considerando a componente $\mu = 0$, teremos a perturbação da equação da

continuidade,

$$\delta\dot{\rho} + (1 + \lambda)(\theta\delta\rho + \rho\theta\delta v_0 + \rho\delta\theta) = 0, \quad (6.35)$$

onde levamos em consideração a conservação da norma do campo de velocidade, ou seja

$$\delta(v^\mu v_\mu) = 0, \quad (6.36)$$

o que implica nas relações abaixo que muito simplificam nossos cálculos,

$$\delta v^0 + \delta v_0 = 0 \quad \text{e} \quad \delta v^0 = -\frac{1}{2}\delta q_{00}. \quad (6.37)$$

A variação do fator de expansão pode ser desenvolvida como segue,

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \delta(v^\mu_{;\mu}) = \delta v^\mu_{;\mu} + \delta\Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \delta v^\lambda, \\ &= \delta\dot{v}^0 + \delta v^i_{;i} + \delta\Gamma^0_{00} + \delta\Gamma^i_{i0} + \Gamma^\mu_{\mu 0} \delta v^0 + \Gamma^\mu_{\mu i} \delta v^i, \end{aligned} \quad (6.38)$$

mas,

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^0_{00} &= -\delta\dot{v}^0, & \delta\Gamma^i_{k0} &= \delta\dot{\Phi} \delta^i_k, \\ \Gamma^\mu_{\mu 0} &= 3H = \theta, & \Gamma^\mu_{\mu i} &= 0. \end{aligned}$$

portanto,

$$\delta\theta = 3\delta\dot{\Phi} + \theta\delta v^0 + \delta v^i_{;i}, \quad (6.39)$$

e, substituindo estes resultados na equação (6.35) e utilizando a equação da continuidade no fundo, obtemos

$$\dot{\delta} + (1 + \lambda) \left[3\delta\dot{\Phi} + \delta v^i_{;i} \right] = 0. \quad (6.40)$$

Quando $\mu = i$ na equação (6.34) obtemos a perturbação da equação de Euler, a saber

$$(\rho + p) \left(\delta\dot{v}_i - \delta\Gamma^0_{i0} - \Gamma^j_{i0} \delta v_j - \Gamma^0_{ij} \delta v^j \right) + \dot{p} \delta v_i - \delta p_{;i} = 0, \quad (6.41)$$

e, usando que,

$$\delta\Gamma^0_{i0} = -H \delta q_{0i} + \frac{1}{2} \delta q_{00,i} \quad \text{e} \quad \Gamma^j_{i0} \delta v_j + \Gamma^0_{ij} \delta v^j = H \delta q_{0i}, \quad (6.42)$$

podemos escrever que

$$(1 + \lambda) \left[\delta \dot{v}_i - \frac{2 \delta \Phi_{,i}}{(3a^2 - 1)} \right] - \lambda (\lambda + 1) \theta \delta v_i - \lambda \delta_{,i} = 0. \quad (6.43)$$

Portanto, temos quatro variáveis, $\delta \rho$ e δv_i , e quatro equações, (6.40) e (6.43) que, juntas com a equação dinâmica de $\delta \Phi$ (6.29) formam um sistema dinâmico fechado. No entanto, antes de buscarmos soluções para este sistema vamos abordar a questão das transformações de calibre nas perturbações cosmológicas da gravitação geométrica-escalar.

6.3 Transformações de calibre

Na relatividade geral a covariância da teoria implica em uma liberdade na escolha de coordenadas que, no estudo das perturbações do campo gravitacional, exige a necessidade de se trabalhar com variáveis que sejam invariantes segundo transformações de coordenadas infinitesimais, as chamadas transformações de calibre. Isso porque uma transformação desse tipo,

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad \text{com } |\xi| \ll 1, \quad (6.44)$$

infere uma modificação na métrica devido a forma pela qual um tensor de dois índices se transforma, a saber

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu,\alpha} \xi^\alpha - g_{\mu\alpha} \xi^\alpha_{,\nu} - g_{\alpha\nu} \xi^\alpha_{,\mu}, \quad (6.45)$$

onde as métricas que aparecem no lado direito da equação acima representam a geometria do fundo não perturbado, calculadas com as coordenadas x^μ [61]. Portanto, se não trabalharmos com quantidades invariantes de calibre para representar as componentes perturbadas da métrica as mesmas carecerão de um significado físico claro. Nunca saberíamos dizer se tal perturbação é uma verdadeira instabilidade gravitacional ou uma simples transformação de coordenada.

O mesmo pode ser esperado da teoria geométrica-escalar por ser ela também covariante. No entanto, observamos que a forma particular pela qual a métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$ é construída em termos do campo escalar, equação (6.2), implica que

as perturbações provenientes de uma transformação de calibre como a (6.44) devem ser tais que mantenha as formas obtidas na seção 6.1. Da equação (6.45), deduzimos que

$$\delta q_{\mu\nu} \equiv \tilde{q}_{\mu\nu}(x) - q_{\mu\nu}(x) = -q_{\mu\nu,\alpha} \xi^\alpha - q_{\mu\alpha} \xi^\alpha{}_{,\nu} - q_{\alpha\nu} \xi^\alpha{}_{,\mu}, \quad (6.46)$$

é a correção adicionada à métrica de fundo após uma transformação de calibre.¹ Assim, devemos comparar esta última expressão com as componentes da métrica perturbada em (6.13), resultando

$$\dot{\xi}^0 = \frac{2\delta\Phi}{(3a^2 - 1)}, \quad (6.47a)$$

$$a^2 \dot{\xi}^i - \xi^0 = -\frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^2 H} \delta\Phi_{,i}, \quad (6.47b)$$

$$2a^2 H \xi^0 \delta_{ij} + a^2 (\xi^i{}_{,j} + \xi^j{}_{,i}) = -2a^2 \delta\Phi \delta_{ij}. \quad (6.47c)$$

Mas a transformação de calibre também gera uma perturbação no campo escalar dada por

$$\delta\Phi = \tilde{\Phi}(x) - \Phi(x) = -\xi^\alpha \Phi_{,\alpha} = -H \xi^0, \quad (6.48)$$

o que reduz as equações (6.47) à

$$\frac{(\delta\Phi/H)'}{\delta\Phi/H} = -\frac{2H}{(3a^2 - 1)}, \quad (6.49a)$$

$$\dot{\xi}^i = -\frac{(3a^2 - 1)^2}{4a^4 H} \delta\Phi_{,i}, \quad (6.49b)$$

$$\xi^i{}_{,j} + \xi^j{}_{,i} = 0. \quad (6.49c)$$

A primeira dessas equações dá a dependência temporal da perturbação do campo gravitacional gerada pela transformação de calibre,

$$\delta\Phi(t, \vec{x}) = \frac{a^2 H}{3a^2 - 1} e^{g(\vec{x})}, \quad (6.50)$$

com $g(\vec{x})$ sendo uma função arbitrária dependente somente das coordenadas espaciais.

¹Podemos simplesmente trocar a notação $g_{\mu\nu}$, costumeiramente utilizada na relatividade geral para indicar a métrica gravitacional, pela $q_{\mu\nu}$ devido ao fato de que (6.45) é um resultado geral para qualquer tensor de dois índices.

Substituindo isso nas equações (6.49b) e (6.49c) encontramos as componentes espaciais de ξ^μ . Entretanto, um cálculo direto mostra que a perturbação (6.50) é incompatível com as equações dinâmicas (6.29), (6.40) e (6.43).

O ponto crucial é que, no processo de perturbação da métrica gravitacional realizado na seção 6.1 assumimos que somente funções explícitas do campo escalar é que sofrem variações, ou seja, $\delta\gamma^{\mu\nu} = 0$ (em qualquer sistema de coordenadas). Isso se faz necessário pois qualquer variação na estrutura auxiliar de Minkowski só pode ser causada por um efeito de calibre, de forma que essa condição exclui esses efeitos. O que ficou mostrado mais acima foi que, se conduzirmos uma transformação de coordenada tal que $\delta\gamma^{\mu\nu} = 0$, as perturbações introduzidas na métrica ficam completamente determinadas (dependência temporal) e não satisfazem as equações dinâmicas da teoria, não podendo assim serem interpretadas como verdadeiras perturbações do campo gravitacional.

6.4 Solução das equações dinâmicas perturbadas

Para solucionarmos o sistema dinâmico é mais conveniente expandirmos as perturbações em um conjunto completo de autofunções do operador de Laplace,

$$\delta^{ij} Q_{,ij} = k^2 Q_k, \quad (6.51)$$

que na nossa tri-seção espacial plana são simplesmente ondas planas com vetor de onda \vec{k} , onde $k^2 \equiv \delta^{ij} k_i k_j$. Os coeficientes da expansão dependerão somente da coordenada temporal, assim

$$\delta\Phi \rightarrow \delta\Phi_k(t)Q_k(\vec{x}), \quad \delta \rightarrow \delta_k(t)Q_k(\vec{x}), \quad \delta v_i \rightarrow \delta v_k(t)Q_{k,i}(x). \quad (6.52)$$

Simplificaremos a notação omitindo o subíndice k dos coeficientes. Aplicando isso nas equações (6.29), (6.40) e (6.43), segue um sistema acoplado de três equações diferenciais ordinárias,

$$\delta\dot{v} + \frac{2\delta\Phi}{(3a^2 - 1)} - \frac{\lambda\delta}{(1 + \lambda)} - 3\lambda H\delta v = 0, \quad (6.53a)$$

$$\dot{\delta} + (1 + \lambda) \left\{ 3 \delta \dot{\Phi} + \left[\frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^4 H} \delta \Phi + \frac{\delta v}{a^2} \right] k^2 \right\} = 0, \quad (6.53b)$$

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\Phi} + 2H \frac{(9a^2 - 2)}{(3a^2 - 1)} \delta \dot{\Phi} + \left[6\kappa \frac{\chi_0}{a} \frac{(3a^2 + 1)}{(3a^2 - 1)^2} - \frac{12a^2 H}{(3a^2 - 1)^2} + \frac{(3a^2 - 1)^2 k^2}{4a^4} \right] \delta \Phi = \\ = \frac{\kappa \rho_0 a^{-(4+3\lambda)}}{(3a^2 - 1)} \left[\frac{2\delta}{3a^2 - 1} + 3\lambda \delta - \frac{12a^2 \delta \Phi}{(3a^2 - 1)^2} - \right. \\ \left. - (1 + \lambda) \frac{(a^2 - 1)(9a^2 - 1)}{4a^4 H^2} (H\delta v - \delta \Phi) k^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.53c)$$

Para seguir adiante com o estudos das perturbações e obter uma descrição de como evolui o contraste de densidade de matéria δ é indispensável que tenhamos uma forma explícita do fator de escala. Por isso vamos considerar uma situação limite onde $a \gg 1$. A equação (6.53c) se resume a

$$\delta \ddot{\Phi} + 6H\delta \dot{\Phi} + \frac{9k^2}{4} \delta \Phi = 0. \quad (6.54)$$

De acordo com a expressão (5.25), considerando somente o Big Universe e o caso onde $\lambda > 0$, temos que, quando o fator de escala é muito grande, $a(t) \propto t^{1/3}$ e $H \propto 1/t$, e com isso podemos resolver a equação a cima, obtendo

$$\delta \Phi = \frac{\delta \Phi_0}{t} \sin \left(\frac{3}{2} kt \right), \quad (6.55)$$

onde $\delta \Phi_0$ é uma constante arbitrária. Substituindo este resultado em (6.53a) e (6.53b) obtemos,

$$\delta v = \delta v_0 - \frac{2}{3} \delta \Phi_0 \int \frac{\sin(\frac{3}{2} kt)}{t^{5/3}} dt, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \delta = \delta_0 - (3k^2 \delta v_0) t^{1/3} + \frac{9}{2} k^2 \delta \Phi_0 \cos \left(\frac{3}{2} kt \right) - 3 \delta \Phi_0 \frac{\sin(\frac{3}{2} kt)}{t} + \\ + \frac{2k^2 \delta \Phi_0}{3 t^{2/3}} \int dt \int^t \frac{\sin(\frac{3}{2} kt')}{t'^{5/3}} dt', \end{aligned} \quad (6.57)$$

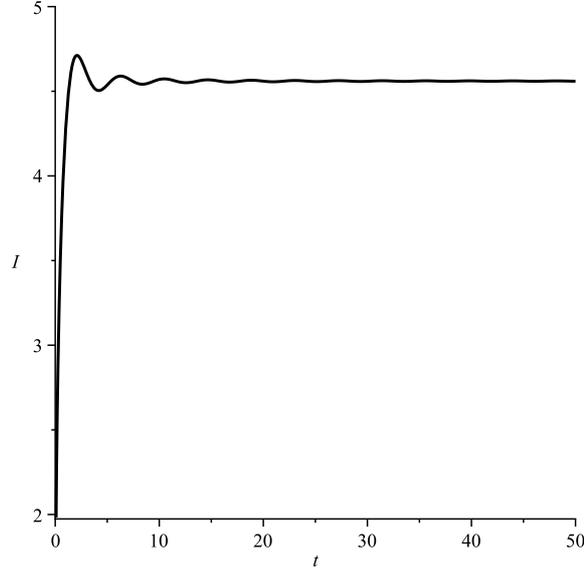


Figura 6.1: Gráfico ilustrativo da integral $I(t)$ para $k = 1$. Para grandes valores de t vemos que I tende a uma constante não nula.

com δv_0 e δ_0 sendo constantes de integração.

Note que, o raio de Hubble é proporcional ao tempo cósmico, $d_H \propto t$, fazendo com que o argumento das funções trigonométricas acima sejam dados pela razão d_H/λ , onde $\lambda = 1/k$ é o comprimento de onda das perturbações. Assim, se $kt \gg 1$, este modo está dentro do raio de Hubble e consiste de uma perturbação que gera um contraste de densidade observável. Por outro lado, se $kt \ll 1$, o modo está além do universo observável.

Para grande escalas ($kt \ll 1$) a perturbação do campo escalar permanece constante, $\delta\Phi \approx \delta\Phi_i(k)$, e a a perturbação na velocidade cresce tal que

$$\delta v \approx \delta v_0 - \delta\Phi_i(k) a(t).$$

O crescimento do contraste de densidade depende justamente da parte constante acima, a saber

$$\delta \approx \delta_0 - k^2 \delta v_0 a(t). \quad (6.58)$$

Para pequenas escalas ($kt \gg 1$) $\delta\Phi$ tem um comportamento oscilatório que decresce rapidamente e perturbação da velocidade permanece praticamente constante com

uma pequena oscilação proveniente da integral no lado direito da equação (6.56). Definindo $I \equiv \int t^{-5/3} \sin(\frac{3}{2} kt) dt$, podemos ver que essa integral possui uma amplitude constante com uma oscilação muito pequena (Figura 6.1). Por outro lado, o contraste de densidade possui um modo crescente,

$$\delta \approx k^2 (2\delta\Phi_0 I - 3\delta v_0) a(t). \quad (6.59)$$

Os outros termos na equação (6.57) não contribuem nesse regime.

Vemos então que o contraste de densidade possuem modos crescente que podem dar origem às estruturas do universo. Estes resultados são diferentes dos obtidos na relatividade geral o que significa que a cosmologia na gravitação geométrica-escalar pode ser testada separadamente a partir de uma análise de dados propícia.

Capítulo 7

Considerações finais

Essa tese apresenta uma nova teoria da gravitação utilizando um único campo escalar para descrever o potencial gravitacional. A teoria geométrica-escalar baseia-se em uma das hipóteses fundamentais utilizada na relatividade geral: a gravitação é um fenômeno que se manifesta universalmente como uma modificação da estrutura geométrica do espaço-tempo. Desenvolver este conceito dentro de uma teoria escalar foi possível devido a um estudo recente onde mostra-se que teorias de campo envolvendo funções escalares cuja dinâmica é não linear podem ser re-interpretadas como uma interação entre o campo escalar e uma métrica associada à ele, como foi mostrado no capítulo 3. Estabelecer a maneira pela qual esta métrica interage com os demais campos existentes na natureza permitiu a elaboração de uma teoria escalar da gravitação que não contém os problemas que antigas versões de teorias escalares apresentavam.

As propostas anteriores para teorias escalares da gravitação mostram-se problemáticas principalmente por duas propriedades que possuem, a saber, o traço do tensor de energia-momento é fonte do potencial gravitacional e a métrica é conformalmente plana. Sendo a métrica física conforme ao espaço plano de Minkowski, essas teorias preveem a existência de sistemas de coordenadas preferenciais. Ademais, o traço do tensor de energia-momento do eletromagnetismo é nulo, impossibilitando um acoplamento com a gravitação. Como vimos no capítulo 4, a teoria geométrica-escalar estabelece a interação do potencial gravitacional Φ com a matéria/energia através do acoplamento mínimo com a métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$, resultando uma fonte material que envolve não só o traço do tensor de energia-momento como também

contrações entre $T^{\mu\nu}$ e o divergente do campo escalar [cf. (4.60)]. Além disso, a métrica de Minkowski não é um observável na teoria geométrica-escalar e a métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$ não é conformalmente plana, como pode ser visto em (4.54).

Na verdade, a teoria geométrica-escalar é um método pelo qual pode se construir teorias gravitacionais escalares que possuam uma descrição métrica como foi mostrado. As funções $\alpha(\Phi)$ e $V(\Phi)$, ligadas à métrica $q_{\mu\nu}$ e à dinâmica do campo escalar Φ , são, a priori, funções livres¹. Diferentes escolhas de α e V levarão a distintas formulações da teoria geométrica-escalar, que podem ser alvo de estudos em um momento futuro. No entanto, as observações provenientes do nosso sistema solar, os chamados testes clássicos da gravitação, mostram como deve ser o comportamento das funções α e V , até a segunda ordem de aproximação do termo m/r , para que a teoria esteja de acordo esses dados. No presente trabalho, utiliza-se específicas formas para α e V , satisfazendo as condições provenientes das observações que falamos, que acabam resultando que um sistema vazio, estático e esfericamente simétrico é descrito pela métrica de Schwarzschild.

Apresenta-se também um modelo cosmológico para a gravitação geométrica-escalar onde pode-se notar diversos comportamentos diferentes dos que ocorrem no modelo de Friedmann da relatividade geral. Inicialmente, a teoria prevê duas soluções de universos distintos devido a forma escolhida da função V , que está diretamente ligada com a dinâmica do campo escalar Φ . Separadas por uma singularidade, estas soluções são desconexas, em outras palavras, deve-se trabalhar com somente uma delas para descrever o universo. Nesse sentido, a solução do *Big Universe* (BU) [cf. (5.24b)] é a que se mostra mais realista e não apresenta três problemas que marcam a cosmologia padrão atual: a singularidade inicial, planeza e a aceleração do universo, apresentados no apêndice B. Na teoria geométrica-escalar a dinâmica do fator de escala para a radiação e matéria sem pressão contém não somente um regime de expansão acelerado como um ricochete que configura um universo eterno e não-singular. Não é necessário utilizar fluidos exóticos como a energia escura para gerar uma aceleração positiva à expansão do universo. Além disso, a teoria estabelece a métrica homogênea e isotrópica sem permitir a existência de curvaturas espaciais não nulas, em outras palavras, o problema da planeza nem sequer existe na teoria geométrica-escalar.

Devido ao importante papel que a constante cosmológica desempenha atualmente na cosmologia, mostramos que é possível introduzir uma constante Σ na dinâmica

¹A função β é dada em termos de α e V de acordo com a relação (4.57).

do fator de escala na gravitação geométrica-escalar através de uma modificação da lagrangiana do potencial gravitacional [cf. (5.43)], mesmo que isso não seja necessário à teoria geométrica-escalar. Com essa modificação o comportamento do fator de escala em um universo vazio é exatamente aquele que define o universo de de Sitter, com $a(t) \propto e^{\Sigma t/3}$. Ainda assim, há uma diferença na definição da constante cosmológica na teoria geométrica-escalar, Σ não está relacionada com a energia do vácuo, como ocorre com Λ na relatividade geral (veja apêndice B).

Uma análise das perturbações cosmológicas mostrou simplicidade no tratamento dessas inhomogeneidades. Devido a forma particular com a qual a métrica gravitacional é construída, perturbações do campo escalar dão origem a correções na métrica homogênea e isotrópica que não podem ser geradas por transformações de calibre. Com efeito, não se faz necessário construir variáveis invariantes de calibre para estudar as perturbações gravitacionais na cosmologia da gravitação geométrica-escalar.

O contraste de densidade, que determina a maneira pela qual se formam as estruturas contidas no universo (galáxias e aglomerados de galáxias), foi obtido no regime de expansão desacelerada de um universo dominado pela matéria (grandes valores do fator de escala) e possui modos crescentes que são diretamente proporcionais ao fator de escala $a(t)$. Portanto, instabilidades gravitacionais são possíveis na teoria geométrica-escalar e são ligeiramente distintas do que se obtém na relatividade geral, o que significa que a cosmologia da gravitação geométrica-escalar pode ser testada separadamente se apropriadamente interpretarmos os dados dentro desta nova teoria.

A continuidade desse trabalho de pesquisa será dada conduzindo um estudo mais detalhado das perturbações lineares na teoria geométrica-escalar da gravitação. É preciso buscar estabelecer vínculos da teoria com os dados observacionais para se ter uma estimativa melhor das previsões teóricas do modelo cosmológico apresentado nesta tese. Além disso, o conceito de ondas gravitacionais, muito discutido na cosmologia padrão atual, deve ser elaborado na gravitação geométrica-escalar também. Esta questão estará diretamente ligada ao fato de as perturbações na teoria geométrica-escalar possuírem todas as suas grandezas vetoriais e tensoriais construídas a partir de funções escalares.

Apêndices

Apêndice A

Testes da relatividade geral

Neste capítulo iremos mostrar os cálculos básicos dos testes experimentais da relatividade geral. O propósito é evidenciar como a teoria de Einstein está em acordo com os dados observacionais provenientes dos ditos testes clássicos gravitacionais, como é o caso do avanço do periélio de Mercúrio e o desvio da luz devido ao campo gravitacional do Sol. Uma teoria gravitacional que esteja de acordo com estes testes se mostra satisfatória como uma descrição da física do nosso sistema solar.

Ainda assim, a relatividade geral possui outros testes significantes por irem além do regime clássico da teoria. O movimento orbital de um pulsar binário é uma indireta, porém precisa indicação da existência de uma radiação gravitacional. Enquanto as observações proveniente dos modelos cosmológicos provavelmente são as mais conclusivas. Entretanto, não abordaremos neste capítulo esta classe de testes.

A.1 Desvio para o vermelho gravitacional

O primeiro teste que iremos abordar não é uma verificação direta da teoria da relatividade geral, por se tratar de uma consequência do princípio de equivalência. O chamado desvio para o vermelho gravitacional é um fenômeno que prevê a variação da energia de fóton quando este se propaga em um campo gravitacional. Para exemplificarmos tal situação considere um campo gravitacional estático, um observador em repouso com coordenadas espaciais x_A^i e outro observador também em repouso cuja coordenadas espaciais são x_B^i . O observador A emite um fóton cuja

frequência ν_A define um período de tempo próprio, $d\tau_A$, tal que

$$(d\tau_A)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(x_A^i) dt_A^2. \quad (\text{A.1})$$

Já o observador B receberá este mesmo fóton e o identificará a uma frequência ν_B caracterizada em um intervalo de tempo $d\tau_B$, tal que

$$(d\tau_B)^2 = g_{00}(x_B^i) dt_B^2 \quad (\text{A.2})$$

Como estamos assumindo um espaço-tempo estático, as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ não dependerão da coordenada temporal, e portanto

$$dt_A = dt_B. \quad (\text{A.3})$$

A relação entre os intervalos de tempo próprio para cada observador será então

$$\left(\frac{d\tau_A}{d\tau_B}\right)^2 = \left(\frac{g_{00}(x_A^i)}{g_{00}(x_B^i)}\right), \quad (\text{A.4})$$

e isso nos permite obter a relação entre as diferentes frequências atribuídas ao fóton por cada um dos observadores,

$$\nu_B = \nu_A \left(\frac{g_{00}(x_A^i)}{g_{00}(x_B^i)}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.5})$$

Se considerarmos que o posicionamento dos observadores é tal que o campo gravitacional é mais fraco para A , a frequência medida por B será menor que a emitida, em outras palavras, a frequência do fóton sofre um desvio para a região do vermelho.

Note que nós obtemos essa dedução sem qualquer uso das equações dinâmicas da relatividade geral, de tal forma que sua verificação experimental não é um teste direto para a teoria de Einstein, mas sim uma verificação do princípio de equivalência. Ainda assim, a relatividade geral calcula este efeito apenas considerando-se o limite Newtoniano onde, $g_{00} \approx 1 + GM/c^2 r$.

A.2 O avanço no periélio de Mercúrio

O primeiro teste diretamente ligado com as soluções da relatividade geral vem do estudo do movimento de um planeta em órbita. No nosso sistema solar, devido as diferenças nas ordens de grandeza da massa central e os planetas orbitantes, a solução estática e esfericamente simétrica de Schwarzschild satisfatoriamente descreve o campo gravitacional do Sol. Mais que isso, os planetas podem ser tratados como partículas testes neste sistema, de modo que a descrição de seus movimentos é feita através de geodésicas tipo tempo na métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{A.6})$$

onde $m \equiv MG/c^2$, e M refere-se à massa da estrela que gera o campo gravitacional, no caso específico do nosso sistema solar, o Sol. O fato dessa métrica ser estática e esfericamente simétrica nos permite associar à ela respectivos vetores de Killing [27],

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (\text{A.7})$$

$$\eta^\mu = (0, 0, 0, 1), \quad (\text{A.8})$$

que definem quantidades que permanecem constantes ao longo do movimento de partículas testes. Se definirmos a quadri-velocidade de uma partícula como sendo u^μ , essas constantes de movimento podem ser definidas como

$$\xi^\alpha u_\alpha, \quad \text{e} \quad \eta^\alpha u_\alpha, \quad (\text{A.9})$$

para as simetrias temporal e azimutal respectivamente. Utilizando $g_{\mu\nu}$ para representar a métrica do elemento de linha (A.6), escrevemos

$$g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = g_{00} u^0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c}, \quad (\text{A.10})$$

com E uma constante. Se considerarmos uma partícula de massa unitária, u^μ é o seu quadri-momento. Portanto, a equação (A.10) representa a conservação da componente temporal do quadri-momento, isto é, a conservação da energia. A quantidade E então, é a energia relativística por unidade de massa da partícula. Analogamente para a

simetria na direção azimutal, teremos

$$g_{\mu\nu} \eta^\mu u^\nu = g_{33} u^3 = -r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = -L, \quad (\text{A.11})$$

com L sendo também uma constante também. De forma semelhante, interpretamos a conservação da componente ϕ do quadri-momento como a conservação do momento angular por unidade de massa da partícula, L .

A conservação do momento angular implica que a órbita está contida em um único plano e para simplificar as contas escolhemos uma órbita no plano equatorial, onde $\theta = \pi/2$, e com isso $d\theta = 0$ e $\text{sen } \theta = 1$. Dividindo então a equação (A.6) por $d\tau^2$ teremos

$$c^2 = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2, \quad (\text{A.12})$$

e, utilizando as equações (A.10) e (A.11) escrevemos

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (\text{A.13})$$

No entanto, para calcularmos a forma como se comporta o periélio de um planeta precisamos encontrar a variação de ϕ com a coordenada radial r . Assim, reescrevemos a equação acima como

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left[(E^2 - c^2) + \frac{2mc^2}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2mL^2}{r^3} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Para resolvermos esta equação vamos primeiramente introduzir uma nova variável

$$y = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.15})$$

e substituí-la na equação anterior obtendo

$$\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 - y \left(\frac{2mc^2}{L^2} - y + 2my^2\right) = \frac{E^2 - c^2}{L^2}. \quad (\text{A.16})$$

Derivando esta expressão escrevemos

$$\frac{d^2y}{d\phi^2} + y = \frac{mc^2}{L^2} + 3my^2. \quad (\text{A.17})$$

O último termo do lado direito dessa expressão é muito pequeno para o caso das órbitas planetárias do nosso sistema solar. Se considerarmos a razão dos dois últimos termos,

$$\frac{3my^2}{mc^2/L^2} = \frac{3L^2}{c^2r^2}, \quad (\text{A.18})$$

vemos que, para a órbita de Mercúrio por exemplo, onde $L \approx 2,8 \cdot 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$ e $r \approx 5,8 \cdot 10^{10} \text{ m}$, essa razão é da ordem de 10^{-8} . Portanto, podemos satisfatoriamente resolver a equação diferencial acima através de uma aproximação expandindo a função y em termos do parâmetro adimensional m^2c^2/L^2 ,

$$y \approx y_0 + \frac{m^2c^2}{L^2} y_1. \quad (\text{A.19})$$

Substituindo isso na equação diferencial (A.17), teremos

$$\frac{d^2y_0}{d\phi^2} + y_0 - \frac{mc^2}{L^2} + \frac{m^2c^2}{L^2} \left(\frac{d^2y_1}{d\phi^2} + y_1 - \frac{3L^2}{mc^2} y_0^2 \right) \approx 0, \quad (\text{A.20})$$

onde temos desprezados os termos de ordem superior a m^2c^2/L^2 . A solução para a ordem zero dessa equação é tal que

$$y_0 = \frac{mc^2}{L^2} (1 + \epsilon \cos \phi). \quad (\text{A.21})$$

Esta é a típica equação polar de uma seção cônica onde ϵ representa sua excentricidade. Se $0 < \epsilon < 1$, então sua forma é uma elipse e o ponto de máxima aproximação da origem é o que chamamos de periélio. Note que esta solução de ordem zero não apresenta qualquer anomalia quanto ao período orbital de um planeta, $T = 2\pi$. Utilizando este último resultado escrevemos a equação de ordem 1,

$$\frac{d^2y_1}{d\phi^2} + y_1 \approx \frac{3mc^2}{L^2} (1 + 2\epsilon \cos \phi), \quad (\text{A.22})$$

onde desprezamos também os termos de ordem ϵ^2 . Se admitirmos uma solução particular do tipo

$$y_1 = C_1 + C_2 \phi \sin \phi, \quad (\text{A.23})$$

facilmente encontramos que

$$C_1 = \frac{3mc^2}{L^2}, \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{mc^2\epsilon}{L^2}, \quad (\text{A.24})$$

resultando na solução geral,

$$y \approx \frac{mc^2}{L^2} (1 + \epsilon \cos \phi + \epsilon \delta \sigma \phi \sin \phi) \quad (\text{A.25})$$

com

$$\delta \sigma \equiv 3 \left(\frac{mc}{L} \right)^2 \ll 1. \quad (\text{A.26})$$

Note que, como $\delta \sigma$ é muito pequeno, também podemos escrever,

$$\cos \phi + \delta \sigma \phi \sin \phi \approx \cos[\phi (1 - \delta \sigma)]. \quad (\text{A.27})$$

Portanto,

$$y \approx \frac{mc^2}{L^2} [1 + \epsilon \cos(\phi \sigma)], \quad (\text{A.28})$$

com $\sigma = 1 - \delta \sigma$.

Vemos então que, diferente da mecânica Newtoniana, as órbitas das partículas testes na métrica de Schwarzschild têm a forma elíptica mas possuem um período orbital cuja a variação angular percorrida é maior que 2π . Na verdade, até uma primeira ordem de aproximação, podemos estimar essa distância angular em

$$\Delta \phi \approx \frac{2\pi}{(1 - \delta \sigma)} \approx 2\pi \left[1 + 3 \left(\frac{mc}{L} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.29})$$

Este fenômeno é conhecido como precessão do periélio orbital. Os planetas em órbitas descrevem uma trajetória elíptica mas com o seu eixo rotacionando por uma quantidade de $2\pi\delta\sigma$ cada vez que ele passa pelo ponto de maior proximidade com o Sol. Mercúrio é o planeta que tem o menor período orbital, cerca de 415 anos solares por cada século passado na Terra, ocasionando em um momento angular L pequeno o suficiente para que sua precessão de seu periélio seja observado com boa precisão. Com o resultado que calculamos na equação (A.29), quando utilizado os dados astronômicos atuais, obtém-se um valor de aproximadamente 43,03 segundos de arco por século para a órbita de Mercúrio. Os dados observacionais apontam para um valor de $(43,11 \pm 0,45)''/\text{século}$, o que evidencia um excelente acordo entre a previsão teórica e as observações [66].

A.3 Desvio da luz

O próximo teste gravitacional que iremos considerar consiste no estudo da propagação de raios luminosos na métrica de Schwarzschild. Este caso se diferencia do anterior apenas pelo fato de que a luz deve seguir geodésicas nulas, ou seja, $ds = 0$, o que nos obriga a utilizar um parâmetro afim, λ , diferente do tempo próprio para descrever a quadri-velocidade dos fótons,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad \text{tal que} \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0. \quad (\text{A.30})$$

Como as constantes de movimento que definimos anteriormente se mantêm neste caso (uma vez que são propriedades das simetrias do espaço-tempo), o processo de obtenção da equação diferencial de segunda ordem para $y = 1/r$ é o mesmo, resultando

$$\frac{d^2 y}{d\phi^2} + y = 3m y^2. \quad (\text{A.31})$$

O procedimento de solução dessa equação é mesmo método aproximativo que utilizamos no caso de partículas massivas. Porém, analisando a ordem de grandeza do lado direito dessa equação em relação à y , vemos que podemos aproximar a solução geral a partir da seguinte forma,

$$y = y_0 + \epsilon y_1, \quad (\text{A.32})$$

onde ϵ é um parâmetro adimensional da mesma ordem de grandeza de m . Portanto, a equação de ordem zero será,

$$\frac{d^2 y_0}{d\phi^2} + y_0 = 0, \quad (\text{A.33})$$

tal que a solução é

$$y_0 = \frac{1}{R} \sin \phi. \quad (\text{A.34})$$

Esta expressão representa a equação de uma linha reta cujo ponto de maior proximidade com a origem é dado pela constante R . A correção de primeira ordem provém da equação,

$$\frac{d^2 y_1}{d\phi^2} + y_1 = \frac{3m}{R^2} (1 - \cos^2 \phi) = \frac{3m}{2R^2} [1 - \cos(2\phi)], \quad (\text{A.35})$$

o qual tem como solução a expressão

$$y_1 = \frac{3m}{2R^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right]. \quad (\text{A.36})$$

Dessa forma, a solução geral será dada por,

$$y = \frac{1}{R} \sin \phi + \frac{3m}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right). \quad (\text{A.37})$$

Isso mostra que um raio de luz passando próximo a uma massa gravitacional sofrerá um desvio em sua trajetória retilínea original. Esse desvio é observado através da diferença angular entre a posição aparente da fonte luminosa (aquela que um observador mede) e a sua posição original. Para calcularmos essa quantidade, considere o limite $r \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow 0$) quando o ângulo ϕ é muito pequeno. Usando isso na solução acima teremos

$$\phi \approx \frac{2m}{R}, \quad (\text{A.38})$$

e, por simetria, a deflexão total será o dobro desta, ou seja,

$$\Delta\phi \approx \frac{4m}{R}. \quad (\text{A.39})$$

Essa quantidade pode ser medida experimentalmente e consiste em um dos mais antigos testes da relatividade geral, sendo que foi primeiramente medido em 1919 nas famosas experiências realizadas em Sobral, no Ceará, e na Ilha do Príncipe, no continente africano. Atualmente estes dados são obtidos mais precisamente e medem um desvio de cerca de $(1,76 \pm 0,02)''$. De acordo com o resultado que obtemos aqui, a previsão teórica da teoria de Einstein é de aproximadamente $1,75''$, mostrando-se em acordo com as observações.

A.4 O atraso no tempo de propagação da luz

O último dos testes clássicos gravitacionais a ser considerado foi proposto pelo físico americano Irwin Ira Shapiro e consiste em medir o tempo de viagem de um feixe de luz propagando-se entre a Terra e Vênus, sob a influência do campo gravitacional do Sol.

Para deduzirmos os efeitos da curvatura do espaço-tempo neste fenômeno iremos

novamente considerar a métrica de Schwarzschild, mas agora sob sua forma isotrópica, que a torna independente da direção de propagação da luz [2],

$$ds^2 = \frac{(1 - m/2\rho)^2}{(1 + m/2\rho)^2} c^2 dt^2 - (1 + m/2\rho)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (\text{A.40})$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Considere um feixe de luz passando a uma distância R do Sol onde podemos aproximar a sua trajetória como sendo tal que $z = 0$ e $y = R$. Portanto, até a primeira ordem de aproximação em m/r , escrevemos

$$c dt \approx \left(1 + \frac{2m}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) dx. \quad (\text{A.41})$$

Integrando esta equação e considerando que $R^2/x^2 \ll 1$ obtemos,

$$ct \approx x + 2m \ln \left(\frac{2x}{R} \right), \quad (\text{A.42})$$

e, como o feixe viaja até Vênus a uma distância x_1 , sendo então refletido de volta à Terra percorrendo uma distância x_2 , o intervalo total de tempo dessa viagem é

$$t \approx \frac{1}{c} \left[x_1 + x_2 + 2m \ln \left(\frac{4x_1 x_2}{R^2} \right) \right]. \quad (\text{A.43})$$

O termo logarítmico da expressão acima é quem fornece a correção de primeira ordem do resultado que seria obtido utilizando-se uma métrica plana (primeiro termo do lado direito) e tem sido medido com uma precisão de 0.1% desde 1979. Seu resultado também está em completo acordo com a previsão teórica da relatividade geral.

Apêndice B

Cosmologia na relatividade geral

Neste capítulo, iremos fazer uma simples e breve revisão acerca do desenvolvimento teórico da cosmologia na relatividade geral. Em outras palavras, elaboraremos um modelo cosmológico a partir do *princípio cosmológico*, *hipótese de Weyl* e da *relatividade geral*, para contrastar com os resultados obtidos no Capítulo 5.

B.1 Métrica de Robertson-Walker

Na teoria geométrica-escalar vimos que a condição de homogeneidade e isotropia do universo é satisfeita ao restringir a dependência do campo gravitacional escalar somente com a coordenada temporal, resultando na métrica plana de Robertson-Walker [cf. (5.9)]. Já na relatividade geral há uma liberdade maior para descrevermos uma variedade métrica homogênea e isotrópica que adiciona duas geometrias a mais, uma com uma curvatura espacial positiva e outra negativa. As três métricas possíveis são descritas como ¹

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (\text{B.1})$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{B.2})$$

O número k é conhecido como *constante de curvatura* e assume valores que distingue as possíveis geometrias tridimensionalmente homogêneas e isotrópicas. Entretanto, é

¹Assim como no capítulo 5 vamos trabalhar neste apêndice com $c = 1$.

possível normalizar essa quantidade de modo que ele assuma somente três valores. O caso onde $k = 0$ é simples de ver que o universo tem um tri-seção espacial plana. Quando $k = +1$ o espaço-tempo possui uma curvatura positiva e, quando $k = -1$, a curvatura é negativa. A função $a(t)$, como antes, representa o fator de escala que descreve como as distâncias se escalonam à medida que o universo expande ou contrai.

A coordenada t na métrica de Robertson-Walker é o tempo próprio cosmológico e representa o tempo medido por um observador que vê o universo se expandir/contrair uniformemente ao seu redor. Já as coordenadas espaciais (r, θ, ϕ) são as chamadas coordenadas comóveis que, se o universo se expande ou contrai uniformemente, elas permanecem constantes ao longo do tempo.

B.1.1 Distância própria

O significado físico do fator de escala $a(t)$ pode ser melhor entendido quando analisamos a maneira pela qual calculamos a distância própria em um tempo t entre um observador na origem e um objeto comóvel à uma distância r . Essa distância é igual ao comprimento da geodésica que liga esses dois pontos,

$$d_p(t) = \int ds. \quad (\text{B.3})$$

Como o ângulo ao longo da geodésica é constante, assim como o intervalo de tempo, utilizando a métrica (B.1), temos que

$$d_p(t) = a(t) \int \frac{dr}{\sqrt{1 - k r^2}} = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r, & k = +1 \\ r, & k = 0 \\ \sinh^{-1} r, & k = -1 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Como não há observadores privilegiados no universo, concluímos que a distância própria entre quaisquer dois objetos comóveis deve ser proporcional à $a(t)$, e a taxa com a qual essa distância muda com o tempo é

$$\dot{d}_p = \frac{\dot{a}}{a} d_p. \quad (\text{B.5})$$

Se considerarmos que t_0 representa o tempo atual, vemos que há uma relação linear entre a distância dos objetos e a velocidade com a qual eles se movimentam,

$$v_p(t) = H(t) d_p(t), \quad (\text{B.6})$$

onde

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (\text{B.7})$$

A equação (B.6) expressa a famosa Lei de Hubble que diz como varia a distância entre dois objetos no universo à medida que o espaço se expande ou contrai. No tempo atual, usualmente representado por t_0 , o valor desse parâmetro é conhecido,

$$H_0 \approx 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}. \quad (\text{B.8})$$

O parsec (pc) é uma unidade de medida de distâncias cosmológica, sendo que, $1 \text{ pc} \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

B.1.2 Desvio para o vermelho cosmológico

Quando medimos um objeto no universo, como estrelas ou galáxias, sabemos precisar a sua posição angular mas não a sua distância. Mas podemos medir o desvio para o vermelho que a luz que recebemos desse objeto sofre. Essa quantidade estará relacionada com o fator de escala e então pode ser usado para determinar a distância própria de um objeto.

Considere uma galáxia distante cuja a luz emitida em um instante de tempo t_e chega até nós (observador na origem) no tempo t_0 . Portanto, ao longo da geodésica nula que a luz segue, temos que

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr'}{\sqrt{1 - k r'^2}}. \quad (\text{B.9})$$

Como as coordenadas comóveis são independentes do tempo, podemos concluir que a variação temporal entre dois sinais de luz subsequentes emitidos e recebidos se relacionam como

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}, \quad (\text{B.10})$$

pois a variação do fator de escala é negligenciável nessa escala de tempo. Se pensarmos

nesses sinais de luz como sendo dados pelo comprimento de onda da luz emitida e recebida, a frequência correspondente a cada um desses sinais será $\nu = 1/\delta t$, assim

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}. \quad (\text{B.11})$$

Usando a definição usual do desvio para o vermelho gravitacional, $z = (\nu_e - \nu_0)/\nu_0$, encontramos que a relação entre o desvio para o vermelho da luz emitida por uma galáxia distante e fator de escala é dado por

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (\text{B.12})$$

Estritamente falando, quando $z < 0$, esta quantidade é chamada de *desvio para o azul*, por indicar que a mudança na frequência original da luz emitida se aproxima da região do azul, e não do vermelho. No entanto, as observações atuais indicam que o universo está em expansão, ou seja, para qualquer objeto que olhamos, $a(t_0) > a(t_e)$ indicando que $z > 0$.

B.2 Conteúdo material do universo

Para o caso de um fluido perfeito, o tensor de energia-momento é decomposto unicamente, em relação à um observador que se move com velocidade $v^\mu = \delta_0^\mu$, da forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) v^\mu v^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.13})$$

onde ρ representa a densidade de matéria do fluido e p sua pressão. As equações de conservação da energia e momento são dadas pela divergência nula desse tensor,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (\text{B.14})$$

e descrevem como o conteúdo material evolui no tempo. Essas expressões podem ser divididas em uma equação paralela ao observador v^μ e outras três perpendiculares à ele [67]. Utilizando a decomposição (B.13) e a métrica de Robertson-Walker, essas equações são escritas como

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (\text{B.15a})$$

$$\partial_\nu p (\delta_\mu^\nu - v^\nu v_\mu) = 0. \quad (\text{B.15b})$$

A informação que falta para integrarmos estas equações provém da equação de estado que relaciona pressão e densidade. Essas quantidades são relacionadas através de uma equação de estado barotrópica do tipo $p = p(\rho)$. Para o caso de um fluido perfeito ela é tipicamente tomada como sendo

$$p = \lambda \rho, \quad (\text{B.16})$$

sendo λ uma constante. Utilizando essa equação de estado podemos em fim resolver as equações (B.15), resultando

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^{3(1+\lambda)}}. \quad (\text{B.17a})$$

$$\partial_i \rho = 0. \quad (\text{B.17b})$$

A priori, considera-se o universo como sendo constituído somente de matéria bariônica não relativística (estrelas, galáxias e etc) e da radiação proveniente dos fótons que se propagam livremente. A primeira componente é representada por um gás de partículas massivas não relativísticas cuja equação de estado é satisfeita para $\lambda = 0$. Dessa forma, a densidade de matéria no universo se comporta como

$$\rho_m(t) = \frac{\rho_0}{a^3}, \quad (\text{B.18})$$

sendo ρ_0 uma constante e o sub-índice m refere-se à matéria. A radiação eletromagnética, é descrita por uma gás de fótons, onde $\lambda = 1/3$, resultando em

$$\rho_r(t) = \frac{\rho_0}{a^4}, \quad (\text{B.19})$$

com o sub-índice r atenta para radiação.

Outros tipos de fluido possuem um particular interesse por gerar uma aceleração positiva à expansão do universo, fato este que é fortemente indicado pelas observações. Esses fluidos são caracterizados pela equação de estado com $\lambda < -1/3$, e conhecidos na literatura como *energia escura*, devido o seu caráter misterioso de pressão negativa, gerando um efeito gravitacional repulsivo. Além disso, esse fluido aparentemente não possui qualquer interação com a matéria ordinária que conhecemos. Um modelo de energia escura muito trabalhado na literatura é descrito pela relação $p = -\rho$ que, como podemos ver através da equação (B.17a), resulta em uma densidade de matéria

constante.

Devido a essa propriedade de constância na densidade, o tensor de energia-momento desse fluido é descrito como [cf.(B.13)]

$$T_{\Lambda}^{\mu\nu} = -\Lambda g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.20})$$

onde Λ é uma constante. Ou seja, a famosa *constante cosmológica* de Einstein pode ser adicionada às equações dinâmicas da relatividade geral através da inserção de um fluido cuja equação de estado contém $\lambda = -1$. A constante cosmológica possui uma outra característica notória por ser o único fluido com equação de estado (B.16) que mantém seu tensor de energia-momento invariante sob uma mudança de observador. Em outras palavras, cada observador possui uma decomposição particular do $T^{\mu\nu}$, descrevendo unicamente o fluido em questão através de uma densidade e uma pressão específica. Mudando-se o observador, muda-se essa descrição. A única exceção é para o fluido com $p = -\rho$, que é decomposta de forma idêntica independente do observador escolhido. Por isso, associa-se a constante cosmológica à energia do vácuo, já que o vácuo deve ser um fenômeno físico que se manifesta igualmente para todo e qualquer observador no universo.

B.3 Equação de Friedmann

As equações dinâmicas cosmológicas são obtidas resolvendo-se as equações de Einstein da relatividade geral (2.47) utilizando-se a métrica homogênea e isotrópica de Robertson-Walker, equação (B.1). O conteúdo material do universo é considerado como sendo um fluido perfeito. O desenvolvimento das equações de Einstein pode ser encontrado em diversos livros textos da área (por exemplo [64, 68]) e resultam na conhecida equação de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (\text{B.21})$$

Como vimos na seção anterior, a constante cosmológica, rotineiramente utilizada nas equações de Einstein, pode ser introduzida à dinâmica através de um fluido específico, a energia escura. Deixaremos então este elemento como sendo uma das componentes possíveis que fazem parte do conteúdo material do universo, estando ela contida

implicitamente na densidade $\rho(t)$.

O lado esquerdo da equação (B.21), como vimos na seção B.1, é conhecido como *parâmetro de Hubble*, e a equação de Friedmann é costumeiramente escrita na forma

$$H(t)^2 = \frac{\kappa}{3} \rho(t) - \frac{k}{a^2}. \quad (\text{B.22})$$

Substituindo o resultado geral da conservação de energia-momento, (B.17a), obtemos

$$H^2 = \frac{\kappa \rho_0}{3a^{3(1+\lambda)}} - \frac{k}{a^2}. \quad (\text{B.23})$$

A equação de Friedmann traz informações sobre a evolução do fator de escala que caracteriza a geometria do universo. Se a derivarmos, é possível obter mais detalhes sobre como se dá essa evolução através da aceleração do fator de escala,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa \rho_0}{6a^{3(1+\lambda)}} (1 + 3\lambda). \quad (\text{B.24})$$

Note que esta expressão corrobora com a afirmação que fizemos na última seção. Somente fluidos que possuam $\lambda < -1/3$ podem gerar uma aceleração positiva no universo.

Considere agora o caso da curvatura espacial ser nula, a equação de Friedmann define o que chamamos de *densidade crítica do universo*,

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H(t)^2}{\kappa}. \quad (\text{B.25})$$

Se a densidade $\rho(t)$ for maior que a densidade crítica o universo possui uma curvatura espacial positiva ($k = 1$), caso contrário o universo é negativamente curvado ($k = -1$). A densidade crítica é usada para definir o *parâmetro de densidade*,

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \quad (\text{B.26})$$

que é frequentemente usado pelos cosmólogos, ao invés da densidade de matéria absoluta. Utilizando o parâmetro de densidade atual $\Omega_0 = \rho_0/\rho_c(t_0)$, a equação de Friedmann (B.23) é reescrita como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^{3(1+\lambda)}} - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (\text{B.27})$$

Observações atuais fortemente sugerem que o lado esquerdo dessa equação, quando calculado atualmente, é aproximadamente zero. Isso mostra que a curvatura espacial atual deve ser muito próxima do zero também. Lembrando que, devido a normalização utilizada na constante de curvatura, quando se diz que k pode ser igual à $+1$ ou -1 isso equivale a dizer que a curvatura pode assumir qualquer valor positivo ou negativo, respectivamente. A exceção é para $k = 0$, que indica um único caso onde a curvatura espacial é nula. Isso dá origem ao famoso *problema da planeza*. Dentro da infinidade de valores possíveis, porque o universo apresenta uma curvatura espacial tão específica, sendo que não há nenhuma razão física que exclua as demais possibilidades? Uma discussão mais detalhada desse assunto pode ser encontrado em [69] e [70].

B.4 Universo com um único fluido material

Uma vez que as equações de conservação já foram resolvidas, com ajuda de uma equação de estado para o fluido que compõe o universo, resta-nos obter as soluções da equação de Friedmann, que nos fornecerá informações sobre a dinâmica do universo. Inicialmente faremos isso para cada uma das componentes que compõe o fluido material cósmico separadamente; matéria, radiação e também a constante cosmológica. Como o intuito deste capítulo é resumir a base da teoria cosmológica na relatividade geral e estabelecer um parâmetro de comparação com o modelo desenvolvido na gravitação geométrica-escalar, consideraremos somente o caso onde a geometria do espaço-tempo possui seção espacial plana, ou seja, $k = 0$.

B.4.1 Universo vazio

Antes mesmo de introduzirmos uma componente material do universo é interessante olharmos para a solução completamente vazia da equação de Friedmann. No caso onde há curvatura mas nenhuma manifestação de matéria ou energia, a equação (B.23) se resume a

$$\dot{a}^2 = -k. \quad (\text{B.28})$$

Se considerarmos o universo como sendo espacialmente plano, a única solução possível é que ele seja estático, com o fator de escala sendo uma constante sempre. Este tipo de solução tem uma geometria descrita pela métrica de Minkowski onde todas as transformações da relatividade espacial se mantêm válidas.

Quando consideramos um universo que possua curvatura, a equação (B.28) nos diz que a única possibilidade é que essa curvatura seja negativa. Nesse tipo de solução o universo pode estar se contraindo ou expandindo segundo uma dependência temporal linear do fator de escala que, com uma normalização apropriada,

$$a(t) = \pm \frac{t}{t_0}, \quad (\text{B.29})$$

tal que t_0 é o tempo hoje. Sabendo a dependência temporal do fator de escala, podemos inferir qual seria a idade do universo. Basta ver que, como $H = \dot{a}/a$, temos que

$$t = \frac{1}{H}, \quad (\text{B.30})$$

de modo que a idade do universo vazio com curvatura negativa, em uma rudimentar estimativa, é

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \approx 14 \text{ bilhões de anos}. \quad (\text{B.31})$$

As equações (B.4) e (B.9), mostram que a luz emitida em um tempo t_e por um objeto distante de nós, percorre uma distância própria $d_p(t_0)$ até ser observada por nós hoje. Essa distância é tal que

$$d_p(t_0) = c a(t_0) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{B.32})$$

onde adicionamos a velocidade da luz para corrigir as unidades. Note que esta equação é válida para qualquer universo determinado pela métrica de Robertson-Walker. O objeto mais distante que podemos observar é aquele cuja a luz foi emitida no instante de tempo $t_e = 0$. A distância própria obtida nesse caso configura o *horizonte visível* do universo. Qualquer objeto situado a uma distância maior que esta não pode ser visto porque a luz não teria tido tempo de chegar até nós. Em outras palavras, o universo visível consiste em todos os pontos que estão conectados casualmente com o observador. Para o universo vazio em expansão, o horizonte visível é tal que

$$d_h(t_0) = \frac{c}{H_0} \int_0^{t_0} \frac{dt}{t} \rightarrow \infty. \quad (\text{B.33})$$

Em outras palavras, em um universo vazio poderíamos enxergar ilimitadamente.

Um universo completamente vazio e dinâmico pode ser visto apenas como uma

curiosidade matemática da teoria de Einstein. No entanto, se um universo possui uma densidade de energia muito menor que a densidade crítica, então a solução acima pode ser uma boa aproximação.

B.4.2 Matéria não relativística

Para o caso de um universo espacialmente plano ($k = 0$), preenchido somente com matéria bariônica não relativística, $\lambda = 0$, a equação de Friedmann reduz a [cf. (B.23)],

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa \rho_0}{3a}. \quad (\text{B.34})$$

A integração dessa expressão é imediata, retornando um fator de escala

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (\text{B.35})$$

onde t_0 indica o tempo atual dado por

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \approx 9,5 \text{ bilhões de anos}. \quad (\text{B.36})$$

Esse valor é pequeno se comparado com a idade de algumas estrelas que conhecemos. Essa solução da equação de Friedmann prevê o universo possuindo um “início”. Apesar dele se expandir indefinidamente à medida que o tempo evolui, o universo teria uma singularidade inicial caracterizada por $a(0) = 0$. Esta é uma singularidade física pois a densidade de matéria e energia se tornam infinitas nesse instante. A esta singularidade dá-se o nome de *big bang*, um instante de tempo no passado no qual toda forma de energia esteve concentrada em um único ponto. Mais do que isso, os modelos de big bang sugerem que tudo o que há hoje no universo passou a existir instantaneamente em um volume infinitamente pequeno e que desde então esse volume se expande indefinidamente. O problema da singularidade inicial cosmológica consiste em uma importante questão científica que será tratada mais adiante neste capítulo.

Em um universo dominado por matéria bariônica, a distância própria para um objeto observado hoje é [cf. (B.32)],

$$d_p(t_0) = 2ct_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} \right] = 2 \frac{c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]. \quad (\text{B.37})$$

Enquanto o horizonte visível nesse universo de poeira cósmica é dado por,

$$d_h(t_0) = 2 \frac{c}{H_0}. \quad (\text{B.38})$$

B.4.3 Radiação

Um universo composto por fótons ($\lambda = 1/3$), considerando-se a seção espacial como sendo plana, tem a equação de Friedmann descrita por

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa \rho_0}{3 a^2}, \quad (\text{B.39})$$

que resulta em um fator de escala tal que

$$a(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}}. \quad (\text{B.40})$$

A idade desse universo será

$$t_0 = \frac{1}{2 H_0}, \quad (\text{B.41})$$

o que é menor ainda que o universo de matéria. Note que o modelo de um universo dominado pela radiação também possui uma singularidade inicial, ou big bang.

A distância própria de um objeto observado hoje é

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}, \quad (\text{B.42})$$

enquanto o horizonte visível é dado por,

$$d_h(t_0) = \frac{c}{H_0}. \quad (\text{B.43})$$

B.4.4 Constante cosmológica

No caso de um universo espacialmente plano contendo somente energia escura na forma de uma constante cosmológica, onde $\lambda = -1$, a equação de Friedmann assume a forma

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa \rho_0}{3} a^2. \quad (\text{B.44})$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$\dot{a} = H_0 a, \quad (\text{B.45})$$

com

$$H_0 = \sqrt{\frac{\kappa \rho_0}{3}}, \quad (\text{B.46})$$

e a solução para o caso de um universo em expansão é tal que

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (\text{B.47})$$

Um universo que possui somente a constante cosmológica como fonte material é eterno e possui um horizonte visível infinito. Se há uma singularidade, isso não é muito claro. O fator de escala tende a zero somente quando o tempo tende ao infinito negativo, mas a densidade de energia permanece constante. Esse modelo cosmológico, espacialmente plano e com o fator de escala dependendo exponencialmente do tempo, é conhecido também como *universo de de Sitter*.

Dentro desse universo, se observarmos um objeto luminoso à uma distância cujo o desvio para o vermelho é z , a distância própria até esse objeto, no momento em que o observamos será

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} z. \quad (\text{B.48})$$

No limite quando $z \gg 1$, a distância própria tende ao infinito mas, note que, até que a luz emitida pelo objeto observado chegasse até nós, o mesmo se distanciou ainda mais devido a expansão do espaço-tempo. No momento em que emitiu o sinal luminoso que observamos em $t = t_0$, este objeto se encontrava a uma distância menor por um fator de $a(t_e) = 1/(1+z)$, ou seja,

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}. \quad (\text{B.49})$$

Assim, quando o desvio para o vermelho é muito maior que a unidade, $d_p(t_e) \rightarrow c/H_0$. Em outras palavras, objetos situados a uma distância muito longa são vistos como se eles tivessem acabado de atingir a distância própria c/H_0 . Como objetos acima dessa distância têm velocidade de recessão maior que a da luz,² nem mesmo os fótons

²Note que é o espaço que está se movendo e não o objeto propriamente. Isso não viola a lei relativística de que nenhuma partícula se movimenta mais rápido que a velocidade da luz pois o espaço-tempo em si não é uma partícula.

emitidos por essas fontes podem chegar até nós.

B.5 Universo com múltiplas componentes materiais

Sabemos que o nosso universo é composto por matéria bariônica ($\lambda = 0$) e radiação ($\lambda = 1/3$). Além disso, evidências observacionais indicam a presença de uma terceira componente material no universo caracterizada pela constante cosmológica ($\lambda = -1$). Considerando a contribuição dessas três componentes, a equação de Friedmann pode ser escrita como [cf. (B.23)]

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_\Lambda, \quad (\text{B.50})$$

onde estamos considerando a seção espacial plana e o parâmetro de densidade foi decomposto em radiação Ω_r , matéria bariônica (Ω_m) e constante cosmológica Ω_Λ , e foi utilizado as respectivas dinâmicas obtidas a partir da conservação da energia e momento. Como o universo é plano teremos $\Omega_0 = \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_\Lambda = 1$. Multiplicando essa última equação por a^2 pode-se obter o tempo cósmico t em função do fator de escala através da integração

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r0}/a^2 + \Omega_{m0}/a + \Omega_\Lambda a^2}}. \quad (\text{B.51})$$

Obviamente que esta não é uma integração fácil de se calcular analiticamente mas, para valores fornecidos dos parâmetros de densidades, é possível resolvê-la numericamente.

De acordo com os vários dados observacionais que a cosmologia possui hoje, o universo é melhor descrito por um modelo como este, de múltiplas componentes. Os dados de supernovas, que sugerem que o nosso universo se expande aceleradamente, inferem uma quantidade de matéria não relativística presente no universo correspondente a aproximadamente $\Omega_{m0} \approx 0.3$. O parâmetro de densidade de radiação, previsto de acordo com a densidade de energia da radiação cósmica de fundo, é bem menor do que a fração de matéria, sendo estimado em cerca de $\Omega_{r0} \approx 8,4 \cdot 10^{-5}$. A maior parte do conteúdo material do universo seria composto de energia escura, na forma de uma constante cosmológica, com $\Omega_\Lambda \approx 0.7$.

B.6 Cosmologia não singular

Vimos nas seções anteriores como a relatividade geral produz um modelo cosmológico que possui uma singularidade inicial. Na verdade, é possível mostrar através de uma série de teoremas que a singularidade é inevitável nos modelos cosmológicos baseados na teoria de Einstein se a matéria não viola as condições de energia [71]. Portanto, para contornar o problema da singularidade cosmológica é preciso introduzir um tipo de fluido material não convencional, como a energia escura, ou alterar a maneira pela qual representamos a interação gravitacional, estabelecendo uma teoria alternativa à relatividade geral como as teorias $f(R)$ por exemplo.

Evitar a singularidade cosmológica significa estabelecer um valor mínimo para o fator de escala, ou seja, $\dot{a}_b = 0$ e $\ddot{a}_b > 0$. O sub-índice b atenta para que estas condições sejam satisfeitas exatamente no momento do *ricochete*³. Mas, como já dissemos anteriormente, a condição para ter uma aceleração positiva do fator de escala, em qualquer instante, só pode ser satisfeita se considerarmos o universo como sendo composto de fluidos cuja equação de estado corresponde à $\lambda < -1/3$.

Muitos modelos cosmológicos não singulares foram elaborados desde o desenvolvimento da primeira proposta na década de 1970 [72], e um extenso resumo pode ser encontrado em [73]. Estes modelos se mostram atrativos não só por apresentarem uma resposta ao problema da singularidade inicial, mas por irem mais além e fornecer alternativas à outras questões que cercam os modelos de big bang, como o já citado problema da planeza. Em um modelo cosmológico de Friedmann é preciso ter um ajuste fino muito preciso das condições iniciais para que se explique o estado de planeza hoje. Na cosmologia com ricochete a planeza é explicada apenas considerando-se que uma quantidade de tempo maior do que medimos do ponto mínimo até hoje deve ter-se passado anteriormente ao ricochete.

Nos modelos de big bang também não há explicação para o problema de causalidade estabelecido pela isotropia média observada na radiação cósmica de fundo. A origem dos fótons da CMB aconteceu em um tempo muito anterior à hoje, naquela época regiões do universos separadas por alguns graus angulares não estavam conectados casualmente entre si, o que não sustenta a isotropia observada na CMB. Como fótons separados casualmente podem estar em equilíbrio hoje? Os modelos não

³Nome usualmente utilizado no meio científico para referir-se ao ponto de mínimo do fator de escala em um universo não singular.

singulares respondem à esta questão com o fato de que o universo neste caso é eterno. Em outras palavras, nos modelos ricochetes, toda hipersuperfície espacial do instante de produção da CMB está dentro do horizonte visível de hoje.

Os problemas dos modelo de big bang citados acima também podem ser explicados com o uso de cenários inflacionários. No entanto, o problema da singularidade inicial ainda persiste mesmo com a inflação.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Musil, *On Mach's Theories*. Washington, D.C.: Catholic University of America Press (1982).
- [2] W. Rindler, *Relativity - Special, General, and Cosmological*, 2nd ed. New York: Oxford University Press (2006).
- [3] J. Norton, "What Was Einstein's Principle of Equivalence?". In: D. Howard and J. Stachel (Eds.), *Einstein studies, volume 1 - Einstein and the history of general relativity*. Boston: Birkhäuser, 5-47 (1989).
- [4] J. B. Barbour, "Einstein and Mach's principle". In: Eisenstaed, J. and Kox, A. J. (Eds.). *Studies in the history of general relativity - Einstein studies*, vol 3. Boston: Birkhäuser, 125-153 (1992).
- [5] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity*. Cambridge: Cambridge University Press (1923).
- [6] Yu. Baryshev, "Energy-momentum of the gravitational field: crucial point for gravitational physics and cosmology". In: Y. V. Baryshev et al (Eds.) *Practical Cosmology: Proceedings of the International Conference "Problems of Practical Cosmology", Held at Russian Geographical Society, 23-27 June 2008, Saint Petersburg, Russia*. ArXiv: gr-qc/0809.2323v1.
- [7] E. Curiel, *On concomitants and the non-existence of a gravitational stress-energy tensor*. ArXiv: gr-qc/0908.3322v3.
- [8] J. D. Norton, "Einstein, Nordström and the early demise of scalar, Lorentz covariant theories of gravitation". *Archive for History of Exact Science*, vol 45, issue 1, p. 17-94 (1992).

- [9] J. Renn, and T. Sauer, "Pathways out of classical physics - Einstein's double strategy in his search for the gravitational field equations". In: Renn, J. (Ed). *The genesis of general relativity*, vol 1. Dordrecht: Springer (2007). <http://www.hss.caltech.edu/~tilman/Pathways.pdf>
- [10] A. Einstein, *Jahrb. Rad. Elek.* **4**, 411-462 (1907).
- [11] C. H. Brans, *Gravity and the Tenacious scalar field*, gr-qc/9705069v1.
- [12] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics*. New York: Academic Press (1967).
- [13] G. Nordström, *Phys. Zeit.* **13**, 1126 (1912).
- [14] G. Nordström, *Ann. Phys.* **40**, 856 (1913).
- [15] J. Norton, "Einstein and Nordström: Some Lesser Known Thought Experiments in Gravitation". In: J. Earman et al (Eds.), *The Attraction of Gravitation: New Studies in History of General Relativity*. Boston: Birkhäuser (1993). Disponível online: <http://www.pitt.edu/~jdnorton/papers/einstein-nordstroem-HGR3.pdf>.
- [16] M. Laue, *Ann. Phys* **35**, 524-542 (1911).
- [17] G. Nordström, *Ann. Phys.* **42**, 533 (1913).
- [18] A. Einstein, *Phys. Zeit.* **14**, 1249-1262 (1913).
- [19] A. Einstein, and A. D. Fokker, *Ann. Phys.* **44**, 321-328 (1914).
- [20] A. Einstein and M. Grossmann, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. Leipzig: Teubner (1913). Reimpresso em: M. J. Klein et al. (Eds), *The collected papers of Albert Einstein, volume 4, The Swiss Years: Writings, 1912-1914*. Princeton: Princeton University Press (1995).
- [21] A. Einstein, *Ann. Phys.* **38**, 443-458. Reimpresso em: M. J. Klein et al. (Eds), *The collected papers of Albert Einstein, volume 4, The Swiss Years: Writings, 1912-1914*. Princeton: Princeton University Press (1995).
- [22] D. Lehmkuhl, "Why Einstein did not believe that general relativity geometrizes gravity", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* (2014). <http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2013.08.002i>.

- [23] J. Stachel, “Einstein’s search for general covariance, 1912-1915”. In: D. Howard and J. Stachel (Eds.), *Einstein studies, volume 1 - Einstein and the history of general relativity*. Boston: Birkhäuser, 63-100 (1989).
- [24] J. Norton, “How Einstein found his field equation, 1912-1915”. In: D. Howard and J. Stachel (Eds.), *Einstein studies, volume 1 - Einstein and the history of general relativity*. Boston: Birkhäuser, 101 -159 (1989).
- [25] M. Janssen and J. Renn. “Untying the knot: How Einstein found his way back to field equations discarded in the Zurich notebook”. In: J. Renn (Ed.), *The genesis of general relativity*, vol 2. Dordrecht: Springer (2007). <http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Preprints/P264.PDF>
- [26] R. P. Feynman, F. B. Moringo and W. G. Wagner, *Feynman lectures on gravitaion*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [27] James B. Hartle, *Gravity: an introduction to Einstein’s general relativity*. San Francisco: Addison-Wesley (2003);
- [28] K. Schwarzschild, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.), 189-196, (1916). arXiv: physics/9905030v1;
- [29] K. Schwarzschild, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.), 424-434, (1916), arXiv:physics/9912033v1;
- [30] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. Cambridge: Addison-Wesley (1951)
- [31] Clifford M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment”, *Living Rev. Relativity* **9**, 3 (2006).
- [32] T. Clifton, *Alternative Theories of Gravity*. Tese de Doutorado. Cambridge University (2006).
- [33] S.G. Turyshev, *Phys. Usp.* **52**, 1-27 (2009).
- [34] Wei-Tou Ni, *Astrophis. J.* **176**, 769-796 (1972).
- [35] C. Page e B.O.J Tupper, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **138**, 67-72 (1968).
- [36] J. S. Dowker, *Proc. Phys. Soc.* **85**, 595-600 (1965).

- [37] G.J. Whitrow e G.E. Morduch, *Nature* **188**, 790 (1960).
- [38] G.J. Whitrow e G.E. Morduch, *Vistas in Astronomy* **6**, 1 (1965).
- [39] N. Derruele, *Gen. Rel. Grav.* **43**, 3337-3354 (2011).
- [40] N. Deruelle, and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **190**, 143-154 (2011).
- [41] S. S. D. Willenbrock, *Am. J. Phys.* **50**, No. 3 (1981).
- [42] F. Ravndal, *Scalar Gravitation and Extra Dimensions*, arXiv:gr-qc/0405030v1.
- [43] M. Wellner, and G. Sandri, *Am. J. Phys.* **32**, 36 (1964).
- [44] D. Giulini, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **32**, 154-180 (2008).
- [45] R. U. Sexl, *Fortschritte der Physik* **15**, 269-307 (1967).
- [46] C. Barceló, S. Liberati and M. Visser, “Analogue Gravity”, *Living Rev. Relativity* **14**, 3 (2011). Artigo online acessado em 16/04/2014: <http://www.livingreviews.org/lrr-2011-3>.
- [47] M. Novello, M. Visser and G. Volovik (Eds.), *Artificial Black Holes*. Singapore: World Scientific (2002).
- [48] M. Novello and S. E. P. Bergliaffa, “Effective Geometry”. In: M. Novello et al (Eds.), *Proceedings of the Xth Brazilian School of Cosmology and Gravitation*. New York: AIP Conference Proceedings, 288-300 (2003). ArXiv: gr-qc/0302052.
- [49] E. Goulart and S. E. P. Bergliaffa, *Class. Quant. Grav.* **26**, 135015 (2009).
- [50] E. Goulart, and S. E. P. Bergliaffa, *Phys. Rev. D* **84**, 105207 (2011). *Os mesmos resultados podem ser alcançados através do método de propagação das descontinuidades de Hadamard, nesse caso consulte Novello, M.; Makler, M.; Werneck L. S. and Romero, C. A. Phys. Rev. D* **71**, 043515 (2005).
- [51] M. Novello, and E. Goulart, *Class. Quant. Grav.* **28**, 145022 (2011).
- [52] E. Goulart, M. Novello, F. Falciano, and J. D. Toniato, *Class. Quant. Grav.* **28**, 245008 (2011).

- [53] R. Courant, and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* volume 2, New York: Wiley-Interscience (1989).
- [54] A. Jeffrey, and T. Taniutti, *Nonlinear Wave Propagation*, New York: Academic (1964).
- [55] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **18**, 3595-3610 (2001).
- [56] E. Babichev, V. Mukhanov, and A. Vikman, *J. High Energy Phys.*, JHEP02(2008)101.
- [57] M. Novello, E. Bittencourt, U. Moschella, E. Goulart, J.M. Salim and J.D. Toniato, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, JCAP06(2013)014.
- [58] M. Novello and E. Bittencourt, *The gravitational energy*. ArXiv: gr-qc/1311.6984.
- [59] R.A. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. New York: Oxford University Press (1992).
- [60] A. Guarnizo, “Modelos cosmológicos en teorías de gravedad modificada $f(r)$ ”. ArXiv: gr-qc/1211.2444.
- [61] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. New York: Cambridge University Press (2005)
- [62] L.G. Jaime, L. Patino e M. Salgado, “ $f(R)$ Cosmology revisited”. ArXiv: gr-qc/1206.1642.
- [63] B.S. Ryden, *Introduction to Cosmology*. San Francisco: Addison-Wesley (2003).
- [64] M. Novello, *Cosmologia*. São Paulo: Editora Livraria da Física (2010).
- [65] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge: Cambridge University Press (2010).
- [66] M. Blau, *Lecture notes on general relativity*. Disponível em <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>
- [67] G.F.R. Ellis, *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 581-660 (2009).
- [68] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. San Diego: Academic Press (2003).
- [69] S. Weinberg, *Cosmology*. New York: Oxford University Press (2008).

-
- [70] J. Plebański e A. Kresziński, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. New York: Cambridge University Press (2006).
- [71] S.W, Hawking e G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge: Cambridge University Press (1973).
- [72] M. Novello e J.M. Salim, *Phys. Rev. D* **20**, 377 (1979).
- [73] M. Novello e S.E. Perez Bergliaffa, *Phys. Rept* **463**, 127 (2008).