

Tese de Doutorado

Novos Cenários Efetivos para Gravitação Quântica: Torção Dinâmica e Grávitons Massivos na Escala do LHC

Carlos André Hernaski

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, março de 2011

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais pelo apoio e confiança em todos os momentos da minha. Por suportarem minha ausência nestes anos, mesmo quando minha presença se fazia tão necessária. Minha mais profunda gratidão à vocês.

Agradeço também aos meus queridos irmãos e sobrinhos pela alegria e carinho. Espero que possamos passar por mais bons momentos com mais frequência.

Gostaria de expressar minha gratidão pelo meu orientador, Prof. José Abdalla Helayël-Neto. Uma pessoa por quem tenho muita admiração, não só pelos seus valiosos ensinamentos científicos, mas também por sua enorme paciência e compreensão.

Aos professores Sebastião Alves Dias e Antonio José Accioly, pela disponibilidade e paciência nas inúmeras discussões científicas. Muito desta tese se deve aos seus ensinamentos.

Aos meus amigos Lucas Cardoso, Marcus Fonseca, Alan Spinoza, Daniel Santos, Guilherme Bremm, Alfredo Vargas Paredes, Martha Monique e Rafael Nardi pela amizade e momentos de descontração.

Ao meu amigo Bruno Pereira Dias pela parceria científica e amizade. Sem dúvida, a elaboração desta tese não seria possível sem sua ajuda científica e pessoal.

À Cristiana Oliveira pela amizade e prontidão na solução de inúmeros problemas.

Agradeço também aos demais colegas e companheiros nestes anos de doutoramento, pelas conversas, cafés, etc.

Por fim, gostaria de agradecer ao CNPq e à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, retomamos o estudo de Gravitação vista como uma teoria de calibre para o grupo de Poincaré. Usando a interpretação de uma teoria efetiva, exploramos o papel que a torção propagante pode desempenhar na descrição de grávitons massivos em D -dimensões. No caso particular de 3D, fazemos um estudo específico, considerando o termo de Chern-Simons, uma vez que este também gera massa ao gráviton. Particularmente interessados na análise da consistência espectral, construímos bases ortonormais de operadores, convenientes para a obtenção dos propagadores contendo a conexão de spin e a vielbein como campos fundamentais. Na análise geral de D -dimensões, concluímos que torção propagante é imprescindível para propagação de grávitons massivos, usando este formalismo para a gravitação, e listamos as Lagrangeanas que descrevem grávitons massivos de maneira consistente no que concerne a unitariedade ao nível de árvore. Em 3D, concluímos que apesar de o termo de Chern-Simons não influenciar as condições de unitariedade, altera significativamente o espectro da teoria.

Abstract

In this work, we reaccess the study of Gravitation seen as a gauge theory for the Poincaré group. Using the interpretation of effective field theories, we explore the role played by propagating torsion in the description of massive gravitons in D-dimensions. In the particular case of 3D, we make an especific study, by considering the Chern-Simons term, since this term also can generate mass for the graviton. Once we are particularly interested in the analysis of spectral consistency, we build orthonormal basis of operators, suitable for the obtainment of propagators containing the spin connection and vielbein as the fundamental fields. In the general analysis of D-dimensions, we conclude that propagating torsion is mandatory for the propagation of massive gravitons in a consistent way which concerns the unitarity at tree-level. In 3D, we conclude that in spite of the Chern-Simons do not influence the unitarity conditions, it alters significantly the spectrum of the theory.

Sumário

1	Introdução	1
2	Unitariedade	5
2.1	Teorema Ótico	5
2.2	Representação Espectral de Källén-Lehmann	8
2.3	A Equação para o Maior Tempo	12
3	Obtenção do Propagador	21
3.1	Bases Ortonormais de Operadores	21
3.2	Operadores de Spin	23
3.3	Simetrias de Calibre	30
4	Gravitação ao nível linear	35
5	Grávitons Massivos	41
5.1	Descrição do Modelo	42
5.2	Obtenção de Grávitons Massivos	45
5.3	Conclusão	52
6	Gravitação em 3D com Termos de Chern-Simons, $(\text{Curvatura})^2$ e $(\text{Torção})^2$	54
6.1	Descrição do Modelo	55
6.2	Cálculo do Propagador	57
6.3	Análise da Consistência Espectral	59
6.3.1	Polos massivos	59
6.3.2	Polos não massivos	60
6.4	Conclusão	62
7	Considerações Finais	64
A	Projetores de Spin-Paridade em D-Dimensões	67

B Operadores de Spin em 3D e Relações Tensoriais	70
B.1 <i>Operadores para campos vetoriais: $A - A$</i>	70
B.2 Tensores simétricos de rank-2, $h - h$	71
C Matrizes Inversas da Seção 6.3	72

Capítulo 1

Introdução

A Gravitação é certamente a interação mais antiga conhecida pela humanidade. A teoria com maior sucesso para descrever a Gravitação é a Teoria da Relatividade Geral de Einstein (RG). Ao nível macroscópico, esta teoria tem passado por inúmeros testes experimentais. Apesar de não haver evidências experimentais do comportamento da Gravitação ao nível microscópico, espera-se que a RG tenha problemas para descrever estes efeitos. Isto se deve ao fato de a RG ser incompatível com os princípios da mecânica quântica, que é a teoria supostamente correta para descrever o mundo microscópico. Em outras palavras, as tentativas de descrição quântica da gravitação, tem falhado na missão de encontrar uma teoria unitária e renormalizável.

As demais interações podem ser consideradas como sendo descritas de modo unificado pelo princípio de invariância de calibre. Neste contexto, o espaço-tempo é considerado como sendo um palco para as interações e a Lagrangeana que descreve o modelo é invariante por um grupo de simetria unitário. Os campos de matéria pertencem à representação fundamental deste grupo e as partículas interagem umas com as outras por meio de uma troca de excitações pertencentes à representação adjunta do grupo de calibre. Por outro lado, na RG, a descrição do fenômeno gravitacional considera o espaço-tempo como um agente dinâmico. A distribuição de energia afeta a geometria do espaço-tempo e esta, por sua vez, altera a dinâmica das partículas presentes neste espaço.

O grande sucesso da quantização das teorias de calibre, sugeriu a muitos físicos procurar uma descrição similar para a gravitação. Uma maneira de compatibilizar os dois cenários seria considerar o grupo de simetria de calibre da gravitação como sendo o grupo de simetrias do próprio espaço-tempo, uma vez que é por meio deste que as partículas interagem gravitacionalmente. O espaço-tempo na ausência da interação gravitacional é o espaço de Minkowski e, portanto, possui como grupo de isometrias o grupo de Poincaré. Considerar este grupo como sendo um grupo de simetrias locais, faz emergir campos de calibre, e espera-se relacioná-los com os mediadores da interação gravitacional.

Sabe-se que as partículas podem ser definidas em Teoria Quântica dos Campos (TQC) como sendo as representações unitárias do grupo de Poincaré. Este grupo tem a propriedade de possuir 2 invariantes de Casimir. Logo, as partículas são caracterizadas por este par de cargas que podem ser

identificadas com massa e spin. Dessa maneira, a interação proveniente da localização do grupo de Poincaré, é resultante da interação entre as massas e os spins dessas partículas. Vemos portanto, que esta teoria não deve corresponder em geral à RG, onde apenas a distribuição de massas é importante. De fato, pode-se relacionar os graus de liberdade do tensor de torção aos graus de liberdade de spin. Nesta situação, a RG pode ainda se pensada como sendo um caso particular em que os graus de liberdade associados ao spin não possuem papel importante no efeito gravitacional. Porém, o mais importante seria explorar esses efeitos no nível microscópico, que é onde o spin tem papel importante.

As extensões da RG, considerando Lagrangeanas com potências da curvatura e torção, não se mostraram suficientes para resolver, simultaneamente, os problemas da renormalizabilidade e unitariedade da teoria. Sob este aspecto, mesmo incorporando a torção na descrição gravitacional, a teoria proveniente desta extensão não deve corresponder à teoria fundamental para a interação gravitacional, podendo ser vista no máximo como uma teoria efetiva. Neste contexto, um parâmetro de massa, M , comum a todos os termos de interação pode ser exibido no modelo e a renormalização é vista de outra forma. Uma teoria dita não-renormalizável exige um número infinito de contra termos para cancelar as divergências. No entanto, apenas um número finito de termos na Lagrangeana é suficiente para medir as contribuições em processos feitos num certo momento característico, $k \ll M$. Isto porque as demais interações são suprimidas por potências de $\frac{k}{M}$. Dessa forma, a teoria ainda pode ser preditiva quando restrita a processos onde $k \ll M$.

Uma vez que a torção possui um forte apelo teórico quando a gravitação é inserida no contexto das teorias de calibre, é interessante analisar o possível efeito da torção propagante nos modelos efetivos. No trabalho da Ref. [1], são analisados os possíveis efeitos fenomenológicos que a interação das partículas do Modelo-Padrão (MP) com a torção dinâmica poderia trazer. Notou-se que estes efeitos, mesmo considerando o modelo como efetivo, traz inconsistências, como violação da unitariedade, já nas primeiras correções de laços. Estes efeitos só podem ser desprezados se a massa característica dos termos de torção forem muito maiores que as massas das partículas do MP. Em geral a massa característica adotada na gravitação quântica é a massa de Planck, M_P . Na formulação efetiva estamos considerando as propriedades de uma teoria mais fundamental em baixas energias. Dessa maneira, para que efeitos de torção dinâmica estejam em conformidade com a fenomenologia do MP e que seja importante como efeitos de baixas energias, deve-se ter $M_{fermions} \ll M_t \ll M_P$.

Uma das teorias candidatas a teoria fundamental é a teoria das cordas (TC). Nos modelos efetivos de baixas energias provenientes da TC, tomados como uma expansão no parâmetro da ação das cordas, $\frac{1}{\alpha'}$, a torção aparece como associada ao campo de Kalb-Ramond e possui massa da ordem de $\frac{1}{\alpha'}$, que em geral é tomado como sendo da ordem de M_P . Logo, os graus de liberdade da torção deveriam ser descritos pela teoria fundamental. Além disso, também é mostrado em [1] que nos modelos com a torção induzida pela TC, somente termos de massa e de interação devem aparecer, fazendo com que torção propagante seja definitivamente proibida. Logo, efeitos de torção propagante podem ser decisivos para validar ou invalidar teorias mais fundamentais como TC e, além disso, podem servir como indícios para formulação destas teorias.

Assumindo a postura de tratar os modelos de gravitação com torção propagante como mo-

delos efetivos, investigamos nesta tese a possibilidade da propagação de grávitons massivos nas Lagrangeanas da gravitação.

Gravitação massiva tem sido um tema de particular interesse desde o início da tentativa de descrever uma Gravitação Quântica. Mais recentemente, em conexão com modelos baseados nos cenários de branas-mundo, a discussão de grávitons massivos tem despertado grande atenção em vista da possibilidade da sua produção no LHC e da viabilidade da detecção de efeitos da Gravitação Quântica na escala de energia dos TeV's [2]-[6]. Em quatro dimensões, teorias de gravitação massiva são motivadas pelo resultado notável que elas poderiam modificar convenientemente a RG na escala de grandes distâncias (na verdade, escalas cosmológicas), de tal maneira que apresentaria uma expansão acelerada de nosso universo sem necessitar da ideia de energia escura.

No cenário de branas, o gráviton adquire massa por meio de uma quebra espontânea da invariância por reparametrizações do sistema de coordenadas [7]. Entretanto, como é comum nos sistemas que apresentam o mecanismo de Higgs, é necessário na descrição um valor esperado no vácuo para um campo escalar extra.

Em três dimensões há um modo alternativo de gerar massa para o gráviton, como proposto por Jackiw, Deser, and Templeton [8]. Em [8], os autores propõem a adição de um termo topológico à ação de Einstein-Hilbert de modo a descrever a propagação de um gráviton massivo. A teoria final é também unitária. Um termo análogo pode ser proposto em $4D$ em conexão com as teorias com quebra da invariância de Lorentz.

Tendo em vista que os graus de liberdade da torção têm potencial para descrever grávitons massivos, investigamos nesta tese a consistência espectral de modelos de gravitação com torção propagante. Por consistência espectral, nos referimos às condições que devem ser impostas aos parâmetros da Lagrangeana para resultar num espectro livre de partículas fantasmas e taquiônicas.

A análise do espectro fica facilitada com a obtenção dos propagadores do modelo. Dessa maneira, dedicamos uma parte deste trabalho ao desenvolvimento de técnicas para obtenção dos propagadores. Em particular, nos focamos na construção de um método algébrico, baseado nos operadores de spin, em 3 e $4D$. A conveniência do uso destes operadores se mostra particularmente evidente no caso de simetrias de calibre, que é o caso das Lagrangianas da gravitação estudadas neste trabalho.

A organização desta tese é a seguinte: no Capítulo 2 apresentamos uma discussão sobre unitariedade em TQC de um modo geral. Na primeira seção deste capítulo é discutido o Teorema Ótico; na segunda seção estudamos as propriedades analíticas da função de Green de 2 pontos e definimos os elementos necessários para discutirmos a Equação para o Maior Tempo na terceira seção. Com esta discussão queremos mostrar explicitamente a relação entre unitariedade e a ausência de excitações fantasmas e taquiônicas nos modelos em TQC. Em seguida, no Capítulo 3, discutimos o método algébrico para obtenção dos propagadores nos casos com e sem simetrias de calibre. Construímos bases de operadores de spin que atuam sobre a conexão de spin e vielbein em 3 e $4D$. Os resultados deste capítulo representam em sua maior parte contribuições originais e foram publicados em parte na Ref. [9]. No Capítulo 4, discutimos sobre a expansão em campo fraco nos modelos de gravitação e como ela é usada para definir o modelo a ser quantizado. Em particular, nos interessamos na discussão das simetrias de calibre resultantes deste processo. Ao

que consta ao autor desta tese, a maneira como a discussão é apresentada neste capítulo, também constitui contribuição original. Com as discussões apresentadas nestes capítulos, nos concentramos no problema de encontrar Lagrangeanas em $4D$ que propaguem grávitons massivos de modo unitário. Isto é feito no Capítulo 5. No Capítulo 6, utilizamos a base de operadores de spin em $3D$ para analisarmos o espectro de uma Lagrangeana com termos de curvatura e torção, além do termo de Chern-Simons (CS) para Gravitação. Uma vez que a introdução do termo de CS em $3D$, já é uma maneira efetiva de originar massa ao gráviton, nossa proposta neste capítulo é entender como o mecanismo de geração de massa, via termos de torção, compete com este mecanismo já conhecido. Os trabalhos desses dois últimos capítulos, representam uma das partes principais desta tese e foram publicados nas Refs. [10, 11]. No Capítulo 7, apresentamos as considerações finais com uma visão geral do problema da gravitação quântica.

Capítulo 2

Unitariedade

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar como a condição sobre os resíduos dos propagadores assegura a unitariedade da matriz S , quando a Lagrangeana satisfaz certas propriedades. Dividimos a discussão em três seções. Na Seção 2.1, introduzimos os elementos de TQC, necessários para discutirmos o problema da unitariedade e mostramos um teorema conhecido como Teorema Ótico para vermos como a condição de unitariedade se repercute num caso particular, porém interessante, de espalhamento entre 2 partículas. Usamos a Ref. [12] como referência para esta seção. Na segunda seção, estudamos as propriedades analíticas da função de Green de 2 pontos, tendo em vista sua aplicação na Seção 2.3. Em seguida, demonstramos como a estrutura perturbativa das amplitudes de espalhamento reflete trivialmente a unitariedade da matriz S , quando a Lagrangeana do modelo satisfaz algumas condições simples. A discussão da Equação para o Maior Tempo culmina na condição suficiente que se deve impor sobre os resíduos dos propagadores para que o modelo seja consistente sob o ponto de vista da unitariedade. A abordagem da Seção 2.2 segue as linhas da Ref. [13], ao passo que na Seção 2.3, usamos como referência a Ref. [14].

2.1 Teorema Ótico

Para analisar um processo de espalhamento em TQC, começa-se com um estado no espaço de Hilbert que em $t \rightarrow -\infty$ as partículas são consideradas livres com momentos, cargas e spins bem definidos. A interação ocorre num intervalo de tempo, em torno de $t = 0$, desprezível em comparação com os intervalos característicos do processo de medida. A informação básica, necessária para o cálculo das quantidades físicas de interesse, é a amplitude de probabilidade de se medir em $t \rightarrow \infty$ o sistema num estado onde as partículas estão livres novamente. Esses estados, definidos assintoticamente, são conhecidos na literatura por estados *in* e *out*, respectivamente. A amplitude de probabilidade para um processo, conforme descrito, acontecer é, portanto, dada por:

$$\langle in|out \rangle. \tag{2.1}$$

Uma hipótese básica em TQC é que tanto os estados *in* quanto os estados *out* formam um conjunto ortonormal completo de estados. Dessa maneira, existe um isomorfismo entre os espaços

vetoriais formado com estes estados. O operador que estabelece este isomorfismo é denominado por operador S . Está contido neste operador toda a informação da interação que é estabelecida entre as partículas que participam do processo. Usando o operador S podemos escrever a amplitude (2.1) em termos dos elementos de matriz:

$$\langle in | S | in \rangle. \quad (2.2)$$

A propriedade de completeza das bases in e out e a existência do operador que estabelece o isomorfismo entre esses espaços implicam que o operador S é unitário. Para demonstrar tal fato, introduziremos a seguinte notação: além do rótulo que caracteriza a propriedade assintótica do estado, in ou out , denotaremos por uma letra latina todos os outros atributos que as partículas que constituem um dado estado possuem (ex.: carga, momento, spin, etc.). Quando fazemos uma soma sobre os estados, utilizamos um símbolo de soma discreta. No entanto, como alguns desses atributos que o índice coletivo descreve estão associados à uma variável contínua, deve-se entender que com isso estamos fazendo a soma sobre os índices discretos e integrando sobre os índices contínuos.

A propriedade de completeza é expressa por:

$$\sum_m |in, m\rangle \langle m, in| = \sum_m |out, m\rangle \langle m, out| = 1. \quad (2.3)$$

Pela ortonormalidade dos estados, temos:

$$\sum_m \langle r, out | in, m \rangle \langle m, in | out, s \rangle = \delta_{rs}. \quad (2.4)$$

Usando (2.1), (2.2) e (2.3) em (2.4), obtemos:

$$\sum_m S_{mr}^* S_{ms} = \delta_{rs}. \quad (2.5)$$

Em termos do operador S essa relação expressa-se por:

$$S^\dagger S = 1. \quad (2.6)$$

Pela sequência dos argumentos, como havíamos mencionado, vemos que a unitariedade do operador S é consequência direta da completeza das bases in e out . Notemos que essa propriedade da matriz S expressa a condição fundamental de que probabilidade total é conservada.

Num processo de espalhamento há sempre a possibilidade de as partículas simplesmente não interagirem. Para analisarmos o que a condição de unitariedade implica sobre as propriedades da interação, é conveniente definirmos a matriz de espalhamento T , que leva em conta somente as amplitudes de probabilidade para que ocorra algum espalhamento não trivial. Ou seja, T é definido pela relação:

$$S = 1 + iT, \quad (2.7)$$

onde o fator i é por conveniência.

Usando (2.7) em (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} (1 + iT)^\dagger (1 + iT) &= 1; \\ \implies i(T - T^\dagger) &= -T^\dagger T. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para entendermos as consequências dessa propriedade satisfeita pelo operador T , vamos tomar o elemento de matriz dessa expressão entre os estados de duas partículas $\langle p_1 p_2 |$ e $|k_1 k_2\rangle$:

$$i \langle p_1 p_2 | (T - T^\dagger) | k_1 k_2 \rangle = - \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \langle p_1 p_2 | T^\dagger | \{q_i\} \rangle \langle \{q_i\} | T | k_1 k_2 \rangle, \quad (2.9)$$

onde estamos omitindo o rótulo assintótico dos estados e inserimos um conjunto completo de estados no lado direito dessa expressão. Por simplicidade estamos considerando que o único atributo de interesse seja o momento da partícula e o índice coletivo $\{q_i\}$ indica um conjunto de n momentos, com $n = 1, 2, 3, \dots$

Fatorando uma função δ de conservação do momento total, definimos à partir do operador T , a matriz de espalhamento \mathcal{M} . Sendo assim, podemos escrever a equação (2.9) em termos da matriz de espalhamento \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} & i (\mathcal{M}(p_1 p_2, k_1 k_2) - \mathcal{M}^*(p_1 p_2, k_1 k_2)) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) = \\ & - \sum_{f=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^f \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \mathcal{M}(p_1 p_2, \{q_i\}) \mathcal{M}^*(\{q_i\}, k_1 k_2) (2\pi)^4 \\ & \times \delta^4(\{q_i\} - p_1 - p_2) (2\pi)^4 \delta^4(\{q_i\} - k_1 - k_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Esta expressão pode ser abreviada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 2 \mathcal{I}(\mathcal{M}(a \rightarrow b)) \delta^4(a \rightarrow b) &= \sum_{f=1}^{\infty} \int d\Pi_f \mathcal{M}(a \rightarrow f) \mathcal{M}^*(f \rightarrow b) \delta^4(a \rightarrow b) \delta^4(a \rightarrow f) \\ \implies \mathcal{I}(\mathcal{M}(a \rightarrow b)) &= \sum_{f=1}^{\infty} \int d\Pi_f \mathcal{M}(a \rightarrow f) \mathcal{M}^*(f \rightarrow b), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\text{com } d\Pi_f \equiv \prod_{i=1}^f \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i}.$$

No caso particular em que não há espalhamento, ou seja, $p_i = k_i$, temos a seguinte identidade:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_2)) = 2E_{cm} p_{cm} \sigma_{tot}(p_1, p_2 \rightarrow \text{qualquer possibilidade}). \quad (2.12)$$

Ou seja, chegamos ao importante resultado de que a parte imaginária da amplitude de probabilidade de não ocorrer espalhamento é proporcional à seção de choque total do espalhamento entre duas partículas. Apesar de nos restringirmos à análise da amplitude de espalhamento para duas partículas, a relação (2.8) tem implicações não triviais sobre a amplitude de espalhamento envolvendo um número arbitrário de partículas.

2.2 Representação Espectral de Källén-Lehmann

Dado um modelo em TQC, pode-se definir as funções de correlação. Essas estruturas, que são funções de pontos no espaço-tempo ou dos momentos (definidas pela transformada de Fourier das posições), são dadas pelo valor esperado no vácuo do produto de um número arbitrário de campos. Ou seja, chama-se função de Green de n pontos à seguinte expressão:

$$G_{i\dots k}(x_1; \dots; x_n) = \langle \Omega | \Phi_i(x_1) \dots \Phi_k(x_n) | \Omega \rangle, \quad (2.13)$$

onde $|\Omega\rangle$ é o vácuo quântico da teoria e os índices i, \dots, k estão associados à representação finita do grupo de Lorentz a qual os campos pertencem. Também pode-se definir a função de Green no espaço dos momentos tomando a transformada de Fourier em cada uma das coordenadas da função (2.13). Claramente esses momentos não podem corresponder à momentos físicos uma vez que não obedecem a relação de camada de massa.

A importância de se estudar a estrutura das funções de Green é que elas contém a informação necessária para a obtenção dos elementos de matriz S . A relação entre a matriz S e as funções de Green é dada por meio da fórmula de redução de LSZ. Pela fórmula de redução de LSZ, podemos expressar o elemento de matriz S , num processo envolvendo n partículas no estado inicial e m no estado final, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle p_1 a_1, \dots, p_n a_n | S | k_1 b_1, \dots, k_m b_m \rangle &= \prod_{r=1}^n \lim_{p_r^2 \rightarrow m_r^2} (p_r^2 - m_r^2) J_{i_r}^{a_r}(p_r) \prod_{s=1}^m \lim_{p_s^2 \rightarrow m_s^2} (k_s^2 - m_s^2) J_{i_s}^{b_s}(k_s) \times \\ &\times G_{i_1 \dots i_m}(p_1, \dots, p_n; -k_1, \dots, -k_m). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Os rótulos a e b dizem respeito à algum outro atributo das partículas além do momento (spin por exemplo). No decorrer desta seção, discutiremos melhor o significado dos J 's que aparecem em (2.14). Por ora, apenas é necessário dizer que são fontes que absorvem ou emitem uma partícula. O que a expressão (2.14) nos diz é que a amplitude de transição de um processo envolvendo $n + m$ partículas é obtida essencialmente ao impor que os momentos que aparecem na função de Green de $n + m$ pontos satisfaçam a condição de camada de massa. Pela análise da estrutura analítica das funções de Green, pode-se mostrar que elas apresentam polos quando os momentos são tomados na camada de massa. É o resíduo dessa singularidade simples que contribui para o elemento de matriz S .

Vamos nos ater com mais detalhes no estudo da função de Green de 2 pontos. Esta análise vai ser útil para definirmos precisamente as fontes que aparecem em (2.14), além de expor algumas das propriedades analíticas já mencionadas nas discussões anteriores.

A função de correlação de 2 pontos para um campo que pertence à uma representação finita do grupo de Lorentz (especificada aqui por um índice latino que acompanha o campo), é definida por:

$$G_{ij}(x, y) \equiv \left\langle \Omega \left| T \left(\Phi_i(x) \Phi_j^\dagger(y) \right) \right| \Omega \right\rangle. \quad (2.15)$$

Consideremos primeiro o caso em que $x_0 > y_0$. Tomemos:

$$\left\langle \Omega \left| \Phi_i(x) \Phi_j^\dagger(y) \right| \Omega \right\rangle. \quad (2.16)$$

Inserindo um conjunto completo de estados em (2.16), temos:

$$\left\langle \Omega \left| \Phi_i(x) \Phi_j^\dagger(y) \right| \Omega \right\rangle \equiv \sum_s \langle \Omega | \Phi_i(x) | s \rangle \langle s | \Phi_j^\dagger(y) | \Omega \rangle. \quad (2.17)$$

Os estados que formam o espaço de Hilbert, são obtidos pela implementação unitária do grupo de Poincaré no espaço de Hilbert. Em particular para as translações, temos:

$$\Phi_i(x) = e^{iP \cdot x} \Phi_i(0) e^{-iP \cdot x}, \quad (2.18)$$

onde P é o operador hermitiano gerador das translações no espaço de Hilbert que é associado ao observável momento. Usando (2.18) em (2.17) e assumindo a invariância translacional do vácuo, obtemos:

$$\left\langle \Omega \left| \Phi_i(x) \Phi_j^\dagger(y) \right| \Omega \right\rangle = \sum_s e^{-ip_s \cdot (x-y)} \langle \Omega | \Phi_i(0) | s \rangle \langle s | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle. \quad (2.19)$$

As energias das partículas que compõem o espectro da teoria são todas positivas. Dessa forma podemos definir a função espectral pela relação:

$$\frac{\rho_{ij}(p^2)\theta(p^0)}{(2\pi)^3} = \sum_s \delta(p_s - p) \langle \Omega | \Phi_i(0) | s \rangle \langle s | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle. \quad (2.20)$$

Com essa definição podemos escrever a expressão (2.19) como:

$$\left\langle \Omega \left| \Phi_i(x) \Phi_j^\dagger(y) \right| \Omega \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \rho_{ij}(p^2)\theta(p^0)e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.21)$$

Escrevemos

$$\rho_{ij}(p^2) = \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \delta(p^2 - a^2) \quad (2.22)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \Phi_i(x) \Phi_j^\dagger(y) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 - a^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \\
&= -i \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \Delta^+(x-y, a^2),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

com

$$\begin{aligned}
\Delta^+(x-y, a^2) &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 - a^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Para o caso em que $y_0 > x_0$, todo o desenvolvimento é análogo e chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \Phi_j^\dagger(y) \Phi_i(x) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 - a^2) e^{-ip \cdot (y-x)} \\
&= - \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(-p^0) \delta(p^2 - a^2) e^{-ip \cdot (x-y)}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$= i \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \Delta^-(x-y, a^2), \tag{2.26}$$

com

$$\begin{aligned}
\Delta^-(x-y, a^2) &= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(-p^0) \delta(p^2 - a^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \\
&= - \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Dessa maneira, para a função de Green de 2 pontos para um campo numa representação arbitrária do grupo de Lorentz, temos:

$$G_{ij}(x, y) = \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \Delta_F(x-y, a^2), \tag{2.28}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x-y, a^2) &= \theta(x_0 - y_0) \Delta^+(x-y, a^2) + \theta(y_0 - x_0) \Delta^-(x-y, a^2) \\
&= \theta(x_0 - y_0) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \theta(p^0) \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - a^2} - \theta(y_0 - x_0) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \theta(-p^0) \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - a^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - a^2 + i\epsilon}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

é o propagador de Feynman, Δ_F , para o campo escalar livre e Δ^+ e Δ^- são, respectivamente, suas partes de energia positiva e negativa.

No espaço dos momentos, podemos escrever:

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.30)$$

Consideremos agora a contribuição dos estados de uma partícula para a função espectral (2.20):

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_s}{2E_{\vec{p}_s}} \delta(E_{\vec{p}_s} - p_0) \delta^3(\vec{p}_s - \vec{p}) \langle \Omega | \Phi_i(0) | p_s, \lambda \rangle \langle p_s, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \delta(E_{\vec{p}_s} - p_0) \langle \Omega | \Phi_i(0) | p, \lambda \rangle \langle p, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle \\ &= \sum_{\lambda} \frac{\theta(p_0)}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \langle \Omega | \Phi_i(0) | p, \lambda \rangle \langle p, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde m é a massa da partícula e λ é um índice discreto que essa partícula possa ter (spin por exemplo). Comparando essa expressão com (2.20), chegamos à seguinte forma para a função espectral:

$$\rho_{ij}(p^2) = \delta(p^2 - m^2) \sum_{\lambda} \langle \Omega | \Phi_i(0) | p, \lambda \rangle \langle p, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle + \sigma_{ij}(p^2). \quad (2.32)$$

A função σ_{ij} é a contribuição de duas ou mais partículas para a função espectral. Em geral, no caso de campos que não pertencem à representação de Lorentz trivial (escalar), são necessárias várias funções espectrais invariantes para representar os estados de muitas partículas. No entanto, o resultado principal da expressão (2.32), de que existe uma contribuição isolada para o caso dos estados de uma partícula, não se altera. Ou seja, $\sigma_{ij}(p^2) = 0$ para $p^2 < 4m^2$.

Substituindo (2.32) em (2.28), temos:

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, y) &= \int_0^\infty da^2 \rho_{ij}(a^2) \delta(a^2 - m^2) \sum_{\lambda} \langle \Omega | \Phi_i(0) | p, \lambda \rangle \langle p, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - a^2 + i\epsilon} \\ &\quad + \text{contribuições de muitas partículas.} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda} \int d^4p \langle \Omega | \Phi_i(0) | p, \lambda \rangle \langle p, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto, temos a seguinte representação para a função de 2 pontos no espaço dos momentos:

$$G_{ij}(k) = \sum_{\lambda} \langle \Omega | \Phi_i(0) | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \quad (2.34)$$

Podemos dizer que a função de 2 pontos, para um campo numa representação do grupo de Lorentz qualquer, possui uma singularidade isolada no valor da massa de repouso da partícula que ele

representa e uma linha de corte começando nos estados de 2 partículas. A representação da função de 2 pontos dada em (2.28), com a função espectral (2.32), é chamada de representação espectral de Källén-Lehmann do propagador.

Em particular nos interessa as propriedades da função de Green quando avaliada no polo. Usaremos o símbolo \sim para simbolizar a contribuição no polo de uma determinada função. Dessa maneira, temos:

$$G_{ij}(k, k') \sim i\delta^4(k - k') \frac{k_{ij}(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{ij}(k) &= \sum_{\lambda} \langle \Omega | \Phi_i(0) | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | \Phi_j^\dagger(0) | \Omega \rangle \\ &= \sum_a \lambda^a(k) \frac{J_i^a(k) J_j^a(k)^*}{|J^a(k)|^2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

e λ^a é o autovalor associado ao autovetor J^a de k_{ij} . Os J 's definidos aqui estão associados às fontes de emissão de uma partícula que aparecem na fórmula de redução (2.14). Para definirmos essas fontes precisamente temos apenas que fixar a normalização dos J 's. Sendo assim, definimos as fontes que aparecem em (2.14), como sendo os autoestados da matriz de resíduos calculada no polo da função de Green de 2 pontos e que obedece à normalização:

$$\sum_{ij} J_i^a(-k)^* k_{ij}(k) J_j^a(k) = 1. \quad (2.37)$$

Estamos assumindo que os autovalores de k_{ij} são todos positivos. No caso de autovalores negativos a condição de normalização (2.37) deve ser definida com uma sinal negativo. Usando a condição (2.37) em (2.36), obtemos as componentes dos J 's na base dos próprios J 's:

$$J_i^a(k) = \frac{\delta_i^a}{\sqrt{\lambda^a}}. \quad (2.38)$$

Se algum dos autovalores for nulo, define-se a fonte associada a ele como nula também. Cabe ressaltar que as fontes J 's são definidas a menos de uma fase.

2.3 A Equação para o Maior Tempo

Nesta seção discutiremos a relação entre a unitariedade dos modelos em TQC com a condição imposta sobre os propagadores para a ausência de partículas fantasmas no espectro da teoria.

Para dar sequência à discussão, vamos definir as regras de Feynman para construção de diagramas que contribuem perturbativamente para os elementos de matriz S . Suponhamos que os modelos sejam descritos por uma função Lagrangeana e que esta, por sua vez, possa ser separada

num termo quadrático nos campos, que chamaremos de termo cinético, e termos que envolvem o produto de três ou mais campos, que chamaremos de termos de interação. Como é bem conhecido em TQC, as amplitudes de transição podem ser representadas graficamente pelos chamados diagramas de Feynman. Esses diagramas são constituídos basicamente de propagadores, vértices e fontes.

Para os nossos fins, consideremos uma Lagrangeana da forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_F, \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &= \psi_i^*(x) \mathcal{O}_{ij}^1 \psi_j(x) + \phi_i(x) \mathcal{O}_{ij}^2 \phi_j(x) \\ \mathcal{L}_I(x) &= \int d^4x_1 d^4x_2 \dots \alpha_{i_1 i_2 \dots}(x, x_1, x_2, \dots) \psi^*(x_{i_1}) \dots \psi(x_{i_m}) \dots \phi(x_{i_n}) \dots \\ \mathcal{L}_F(x) &= J^i \psi_i^* + J^{i*} \psi_i + K^i \phi_i. \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde $\psi_j(x)$ e $\phi_j(x)$ representam campos bosônicos complexos e reais, respectivamente. Nos limitaremos à análise no caso de campos bosônicos uma vez que cobre as questões levantadas nesta tese. Os coeficientes α 's podem conter operadores diferenciais que atuam sobre os ψ 's e ϕ 's e, se tiverem uma dependência não trivial nas variáveis de integração, a Lagrangeana é dita não-local. Todos os modelos discutidos nesta tese, nesse sentido, são locais. Basicamente os propagadores são dados pela transformada de Fourier da inversa do operador de onda \mathcal{O} e os vértices são dados pela transformada de Fourier dos coeficientes α 's.

Definimos as regras de Feynman:

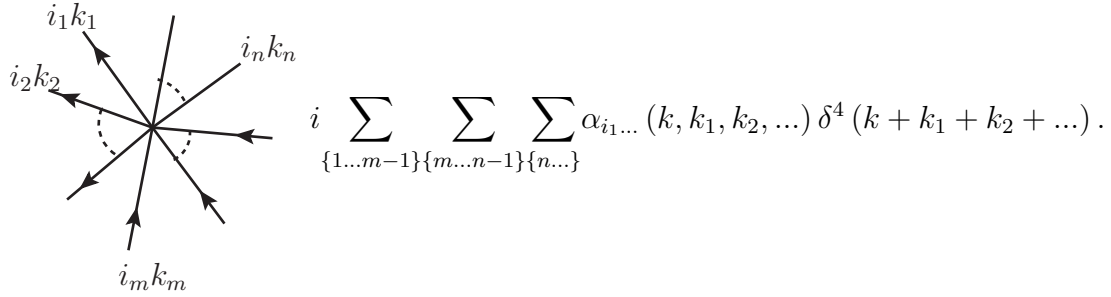
Propagador para um campo real:

$$\begin{array}{c} i \qquad \qquad j \\ \bullet \text{-----} \bullet \end{array} \quad \frac{k_{ij}^2(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i \left((\mathcal{O}^2)_{ij}^{-1}(k) + (\mathcal{O}^2)_{ji}^{-1}(-k) \right)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Propagador para um campo complexo:

$$\begin{array}{c} i \qquad \qquad j \\ \bullet \text{-----} \bullet \\ \leftarrow k \end{array} \quad \frac{k_{ij}^1(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = i \frac{(\mathcal{O}^1)_{ij}^{-1}(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Vértice:



$$i \sum_{\{1\dots m-1\}} \sum_{\{m\dots n-1\}} \sum_{\{n\dots\}} \alpha_{i_1\dots} (k, k_1, k_2, \dots) \delta^4(k + k_1 + k_2 + \dots).$$

As somas são sobre todas as permutações possíveis das linhas idênticas entre si. No caso em que os α 's são constantes esta soma resulta apenas num fator numérico chamado fator de simetria.

Fonte de emissão de uma partícula para um campo complexo:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \times \\ \xrightarrow{k} \end{array} \quad iJ^i(k) \quad (2.41)$$

Fonte absorção de uma partícula para um campo complexo:

$$\begin{array}{c} \times \longrightarrow \\ \xleftarrow{k} \end{array} \quad iJ^{*i}(-k) \quad (2.42)$$

Fonte para um campo real:

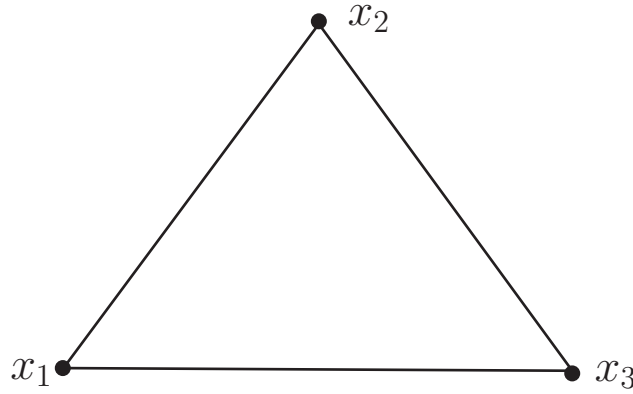
$$\begin{array}{c} \longrightarrow \times \\ \xrightarrow{k} \end{array} \quad iK^i(k) \quad (2.43)$$

Com essas regras estabelecidas, podemos calcular perturbativamente os elementos de matriz S para um dado processo.

A condição de unitariedade da matriz S traz implicações não triviais à matriz de espalhamento T definida em (2.7). Vimos, por exemplo, que ela impõe um vínculo à parte imaginária da matriz de espalhamento. Existem pelo menos duas questões importantes que devem ser levantadas. A primeira diz respeito à que tipo de modelos satisfazem esses vínculos, ou seja, que resulta numa matriz S unitária. A segunda é de como essas condições se traduzem ao nível perturbativo, uma

vez que é a maneira mais usual de se realizar cálculos em TQC. No decorrer desta seção tentaremos explorar essas questões.

Por simplicidade consideremos um modelo que contenha apenas um campo escalar real. Os gráficos de Feynman construídos com esse modelo, contém, como vimos, linhas internas, externas e fontes. Denotemos por $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um gráfico de Feynman com n pontos com suas linhas externas e fontes extraídas. Por exemplo, temos:



$$F(x_1, x_2, x_3) = (ig)^3 \Delta_{31} \Delta_{12} \Delta_{23}$$

A hipótese fundamental é a de que os propagadores satisfaçam à representação de Källén-Lehmann. Ou seja,

$$\Delta_F(x) = \theta(x_0) \Delta^+(x) + \theta(-x_0) \Delta^-(x). \quad (2.44)$$

Para a discussão que segue é necessário definirmos o que seria um gráfico com vértices circulados. Dado um gráfico representado por uma função F , definimos um gráfico análogo por uma função $F(x_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_j, \dots, x_n)$ com os vértices associados aos pontos x_i e x_j circulados. As regras para construção desses gráficos são as seguintes:

- Um propagador $\Delta_F(x_i - x_j)$ não muda se nem x_i e nem x_j estiverem sublinhados;
- Substituir $\Delta_F(x_i - x_j)$ por $\Delta^+(x_i - x_j)$ se x_j estiver sublinhado e x_i não estiver sublinhado;
- Substituir $\Delta_F(x_i - x_j)$ por $\Delta^-(x_i - x_j)$ se x_i estiver sublinhado e x_j não estiver sublinhado;
- Substituir $\Delta_F(x_i - x_j)$ por $\Delta^*(x_i - x_j)$ se x_i e x_j estiverem sublinhados;
- para cada x sublinhado trocar i por $-i$.

Com essas regras pode-se mostrar que se $x_i^0 > x_m^0$ para todo $i \neq m$, então:

$$F(x_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_j, \dots, x_n) = -F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n). \quad (2.45)$$

Ou seja, dado qualquer gráfico com alguns vértices circulados e entre eles o vértice associado ao ponto com o maior tempo entre todos os demais pontos, esse gráfico corresponde ao negativo do mesmo gráfico só que com o vértice associado ao maior tempo não sublinhado. Esta identidade segue do quinto ponto das regras acima.

Desta propriedade segue a seguinte identidade:

$$\sum_{\text{sublinhamentos}} F(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (2.46)$$

onde a soma é feita sobre todas as possibilidades de sublinhamentos dos argumentos de F . Para provar esta identidade basta assumirmos que um dos argumentos corresponde ao maior tempo, digamos x_i . Sendo assim, haverá um cancelamento por pareamento, onde um gráfico com x_i sublinhado se cancela com outro gráfico similar, mas com x_i não sublinhado.

Em geral estamos interessados nos gráficos de Feynman tendo como variáveis os momentos e não as posições. Isto se dá devido ao fato de que experimentalmente a preparação de um sistema para um processo de colisão se dá dessa forma. Sob este aspecto a equação (2.46) leva vantagem sobre (2.45), uma vez que a primeira não faz referência à uma coordenada particular e, portanto, continua sendo válida no espaço dos momentos.

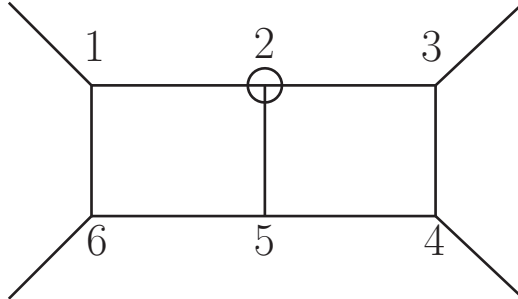
Podemos reescrever (2.46) no espaço dos momentos da seguinte forma:

$$F(k_1, \dots, k_n) + \hat{F}(k_1, \dots, k_n) = - \sum_{\text{sublinhamentos } 0, \text{ todos}} F_c(k_1, \dots, k_n), \quad (2.47)$$

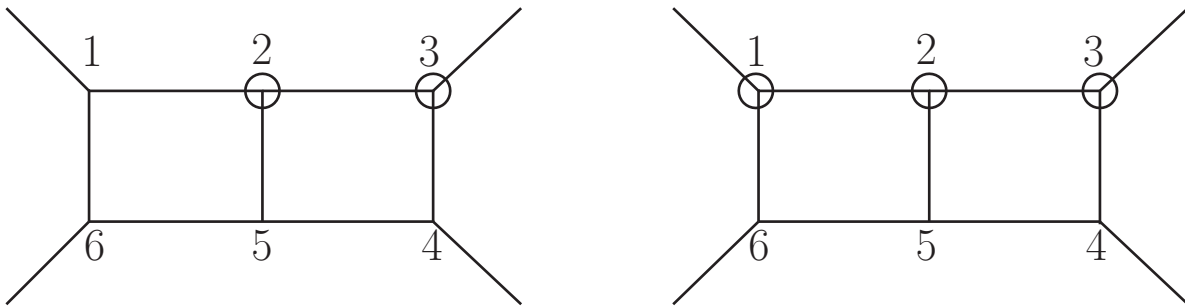
onde no lado esquerdo desta equação evidenciamos as transformadas de Fourier da função F com nenhuma e todas coordenadas sublinhadas respectivamente e, portanto, no lado direito a soma é feita sobre as transformadas de Fourier de F com todas as possibilidades de sublinhamento excluindo o caso em que nenhuma e todas as coordenadas estão sublinhadas.

Consideremos os gráficos que representam elementos de matriz S . Para isso, linhas externas e fontes devem ser acopladas aos gráficos amputados provenientes de (2.47). Adotemos a convenção na discussão que segue que as linhas externas à esquerda correspondem à partículas entrando num processo de espalhamento, ao passo que as linhas externas à direita correspondem à partículas saindo deste processo. Desta maneira o fluxo de energia se dá da esquerda para direita.

Os gráficos que contribuem em F_c têm alguns dos propagadores Δ_F substituídos por Δ^\pm ou Δ^* . A presença dos propagadores Δ^\pm obriga o fluxo de energia positiva ser no sentido do vértice não circulado para o vértice circulado. Se ambos os vértices de um propagador estão circulados não há restrição para o fluxo de energia. Além disso, também sabemos pelas regras de Feynman que energia e momento se conservam em cada vértice. Todos estes fatos juntos impõem restrições não triviais à forma que os gráficos que compõem F_c podem assumir. Em particular, alguns gráficos com certas distribuições dos vértices circulados não contribuem para F_c . Por exemplo:



A razão pela qual este gráfico não contribui pode ser vista diretamente do próprio gráfico. Vemos que a energia não se conserva no vértice 2, por exemplo. Vejamos agora gráficos que de fato contribuem:



Como pode ser visto, não há nenhuma contradição com a conservação da energia nos vértices. Dessa maneira, podemos representar os gráficos que contribuem através de certas regras de corte, onde uma linha corta um gráfico de Feynman de tal maneira que os vértices circulos formam regiões conexas com alguma linha externa de saída. Tal região é chamada de região sombreada. Podemos resumir as seguintes regras para construção de gráficos que pertencem à F_c :

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$-\frac{i}{k^2 - m^2 - i\epsilon}$$

$$2\pi\theta(k_0)\delta(k^2 - m^2)$$

Vértice na região não sombreada: ig
 Vértice na região sombreada: $-ig$

Para entendermos o significado físico da identidade (2.47), analisemos a definição de S^\dagger . Este operador pode ser definido por:

$$\langle \alpha | S^\dagger | \beta \rangle = \langle \beta | S | \alpha \rangle^*, \quad (2.48)$$

onde a operação de conjugação complexa implica também na substituição de $i\epsilon$ por $-i\epsilon$ na prescrição dos propagadores. No formalismo empregado usualmente em TQC, sabe-se que o operador S é completamente definido pela Lagrangeana clássica do modelo. Dessa maneira, pode-se mostrar que S^\dagger também pode ser escrito como:

$$\langle \alpha | S(\mathcal{L}, i)^\dagger | \beta \rangle = \langle \alpha | S(\mathcal{L}^\dagger, -i) | \beta \rangle. \quad (2.49)$$

Dessa maneira, o operador S^\dagger pode ser visto como sendo o operador S associado com a Lagrangeana \mathcal{L}^\dagger e com prescrição $-i\epsilon$ para os propagadores.

Não é difícil nos convenceremos que se \mathcal{L} é hermitiano, os gráficos para o operador S^\dagger serão os mesmos gráficos que aparecem na região sombreada em F_c (com a inclusão das linhas externas e das fontes).

Com estes fatos, vemos que à identidade (2.47) é muito semelhante a condição de unitariedade para a matriz de espalhamento T , dada em (2.8). De fato, é direta a construção dos gráficos de T a partir dos gráficos de F e, como discutido acima, dos gráficos de T^\dagger a partir dos gráficos de \hat{F} . Portanto, para mostrarmos a equivalência entre (2.47) e (2.8), basta mostrarmos que os gráficos que

representam F_c são os memos que representam $T^\dagger T$. Uma parte desta demonstração é consequência da identificação dos gráficos que representam F e F_c , respectivamente. Para completarmos a demonstração mostraremos que os propagadores cortados pela linha de corte correspondem à uma soma completa de estados inseridos entre T e T^\dagger .

Uma linha que liga a parte sombreada do gráfico à parte não sombreada corresponde, pelas regras (2.3), à matriz de resíduos $k_{ij}(k)$. Se inserirmos um conjunto completo de estados entre T^\dagger e T , teremos a seguinte contribuição para este gráfico:

$$\sum_a k_{il}^\dagger(-k) J_l^a(k) J_m^{(a)*}(-k) k_{mj}(k). \quad (2.50)$$

Além disso, sabemos que de (2.36) e (2.37):

$$k_{ij}^{-1}(k) = \sum_a J_i^a(k) J_j^{(a)*}(-k). \quad (2.51)$$

Usando este resultado em (2.50) e que $k_{il}^\dagger(-k) = k_{il}(k)$, que segue do fato de a Lagrangeana ser real, vemos que (2.50) equivale à substituição do propagador de Feynman pelo propagador na camada de massa que corresponde à linha que divide os gráficos correspondes à T e T^\dagger . Fica assim demonstrado que a identidade (2.47) equivale à condição de unitariedade da matriz S dada em (2.8).

Portanto, vemos que se iniciarmos com uma Lagrangeana real, a unitariedade da matriz S fica assegurada. Contudo, vimos que dependendo do sinal dos autovalores da matriz de resíduos do propagador k_{ij} as fontes devem obedecer uma normalização adequada. Por outro lado sabemos que a da matriz de resíduos está associada ao módulo da função de onda de uma partícula representada pelo campo. Dessa maneira, essa matriz deve ser positivo definida para que as quantidades físicas calculadas à partir dela, como seções de choque e taxas de decaimento, sejam também positivas. Partículas com normas negativas devem ser, portanto, evitadas a fim de não prejudicar a interpretação física da teoria. Essas partículas são chamadas em TQC de partículas fantasmas.

Aplicando a condição (2.47) à função de 2 pontos ao nível de árvore, obtemos:

$$\times \text{---} \times + (\times \text{---} \times)^* = - \times \text{---} \times - \times \text{---} \times$$

Notamos que o último gráfico ao lado direito se anula devido à condição $k_0 > 0$. Essa equação reafirma o fato de que a parte imaginária de um gráfico de Feynman é obtida ao colocar as partículas virtuais na camada de massa. Sendo assim, a equação de unitariedade aplicada ao propagador ao nível de árvore relaciona a parte imaginária do gráfico ao resíduo deste gráfico quando este propagador é calculado na camada de massa. Além disso, para se evitar a presença de partículas fantasmas, deve-se exigir a positividade dos autovalores da matriz de resíduos do propagador. Portanto, a condição de unitariedade pode ser assegurada impondo a condição de

ausência de partículas fantasmas no espectro da teoria. Da discussão precedente, vemos que essa condição se resume à:

$$\Im \text{Res}(\Pi|_{p^2=m^2}) > 0, \quad (2.52)$$

onde Π é a função de 2 pontos ao nível de árvore saturada com as fontes físicas (2.41) e (2.42). No decorrer dos capítulos seguintes, usaremos esta condição para assegurar a unitariedade dos modelos analisados ao nível de árvore.

Capítulo 3

Obtenção do Propagador

Vimos no capítulo anterior que a análise da unitariedade dos modelos em TQC se resume à análise dos autovalores da matriz de resíduos do propagador. Além disso, o estudo dos propagadores de um modelo é útil para se especificar o espectro de partículas que este modelo descreve. Uma vez que um dos nossos objetivos nesta tese é a análise da consistência espectral de modelos de gravitação, faremos uma discussão sobre um método algébrico de obtenção dos propagadores que se mostra muito conveniente do ponto de vista técnico e físico.

3.1 Bases Ortonormais de Operadores

A obtenção do propagador, como vimos pelas regras de Feynman do capítulo anterior, depende somente da Lagrangeana quadrática nos campos (termo cinético). Para um campo que pertence à uma representação arbitrária do grupo de Lorentz, podemos escrever a parte quadrática desta Lagrangeana da seguinte maneira:

$$(\mathcal{L})_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \lambda, \phi} \Psi_\alpha^\lambda \mathcal{O}_{\alpha\beta}^{\lambda\phi} \Psi_\beta^\phi, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ é o operador de onda, que pode conter métricas (η), tensores de Levi-Civita (ϵ) e derivadas, e Ψ representa um multiplete de campos. O índice superior que aparece em Ψ diz respeito ao campo componente contido no multiplete. O propagador saturado com as fontes físicas pode então ser escrito como

$$\Pi = i \sum_{\alpha, \beta, \lambda, \phi} \mathcal{S}_\alpha^{\lambda*} \left(\mathcal{O}_{\alpha\beta}^{\lambda\phi} \right)^{-1} \mathcal{S}_\beta^\phi. \quad (3.2)$$

O problema da obtenção do propagador é reduzido à inversão do operador de onda. No espaço dos momentos os campos podem ser entendidos como objetos que moram num espaço vetorial de dimensão finita para cada valor do momento. Uma vez que se tenha uma base definida nesse espaço vetorial, pode-se definir uma base para os operadores que atuam sobre ele. Pode-se, então,

expandir o operador de onda em termos dessa base completa de operadores e a inversão desse operador se torna uma tarefa direta, porém, em geral, trabalhosa.

Em princípio, qualquer base de operadores pode ser definida para a expansão do operador de onda. No entanto, essa tarefa pode ser mais ou menos complicada dependendo da escolha da base. Além disso, como a análise dos modos propagantes é um dos objetivos de se estudar os propagadores de um modelo, também se torna conveniente uma escolha com caráter físico bem definido. Algebricamente, a tarefa se torna significativamente mais simples se a base escolhida no espaço vetorial for uma base ortonormal e a partir dela a construção de uma base para o espaço vetorial dos operadores lineares se torna direta.

Sabe-se da álgebra linear que, dado um espaço vetorial V de dimensão n , a dimensão do espaço vetorial dos operadores lineares que atuam sobre V , $\mathcal{O} : V \rightarrow V$, é n^2 . Além disso, se $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ é uma base em V , então uma base para o espaço dos operadores lineares pode ser escolhida de tal maneira que seja constituída de projetores e operadores de mapeamento, P_{ij} , que satisfazem:

$$P_{ij}u_j = u_i, \quad (3.3a)$$

$$P_{ij}u_k = 0, \quad j \neq k. \quad (3.3b)$$

Pode-se mostrar que estes operadores satisfazem as seguintes relações:

$$P_{ij}P_{kl} = \delta_{jk}P_{il}, \quad (3.4)$$

$$\sum_i P_{ii} = 1. \quad (3.5)$$

Por uma questão de generalidade, supomos que o espaço vetorial V seja definido sobre o corpo dos números complexos. Com isso, podemos definir um produto interno neste espaço e escolher a base $\{u_i\}$ de tal maneira que seja ortonormal. Ou seja,

$$u_i \cdot u_j = u_i^\dagger u_j = \delta_{ij}. \quad (3.6)$$

Os operadores (3.3a) podem então ser escritos como

$$P_{ij} = u_i u_j^\dagger. \quad (3.7)$$

Estes fatos bem conhecidos em álgebra linear possibilitam uma estratégia simples para a obtenção de uma base completa e ortonormal, no sentido de (3.4) e (3.5), algebricamente conveniente para a inversão do operador de onda. Primeiramente define-se os vetores de base e então constrói-se os operadores de projeção e mapeamento. Além da propriedade de ortonormalidade, é interessante que os subespaços definidos por estes operadores tenham interpretação física clara a fim de facilitar a identificação dos modos propagantes do modelo.

3.2 Operadores de Spin

As partículas são definidas em TQC como sendo as representações unitárias e irredutíveis do grupo de Poincaré. Denotemos esse grupo em D dimensões como sendo $\mathcal{P}(1, D-1)$. Pode-se dividir esse grupo em classes de equivalência $\frac{\mathcal{P}(1, D-1)}{SO(1, D-1)}$, que são caracterizadas pelo sinal de p^2 . As classes de interesse físico são aquelas dadas por $p^2 > 0$ (partículas massivas) e $p^2 = 0$ (partículas sem massa). Os spins das partículas são definidos pelas representações unitárias do subgrupo do grupo de Lorentz que deixa invariante um representante da classe dos momentos a que estas partículas pertencem. Este grupo é denominado por grupo de isotropia. Para o caso de partículas massivas em D dimensões, podemos escolher um representante do momento da classe de equivalência por $p^\mu = (m, \vec{0})$. Logo, o grupo de isotropia é dado por $SO(D-1)$. Para o caso não massivo o momento característico pode ser $p^\mu = (k, 0, 0, \dots, k)$, de modo que o grupo de isotropia é essencialmente $SO(D-2)$.

Especialmente interessados em Gravitação em 3 e $4D$, faremos uma análise detalhada da construção dos operadores de spin nessas dimensões.

Em $4D$, para partículas massivas, o grupo de isotropia corresponde ao grupo $SO(3)$. Os spins das partículas são dados, dessa maneira, pelas representações irredutíveis de $SU(2)$, que corresponde ao grupo de cobertura de $SO(3)$. Além disso, a representação fundamental de $SU(2)$ é equivalente à sua complexo conjugada e, portanto, todas as representações de $SU(2)$ são reais. Segue desse fato que as representações irredutíveis de $SU(2)$ são equivalentes às representações de $SO(3)$. Sendo as Lagrangeanas invariantes de Lorentz, elas são também trivialmente invariantes por $SO(3)$. Dessa maneira, se o operador de onda é decomposto em operadores que projetam em representações irredutíveis bem definidas de $SO(3)$, eles serão automaticamente decompostos em operadores com spins bem definidos. Além disso, os únicos operadores de mapeamento que podem ser construídos, são aqueles associados ao mesmo spin, uma vez que a existência de operadores de mapeamento implica na existência de uma bijeção entre os espaços que, por sua vez, só é possível se estes espaços tiverem a mesma dimensão. Entretanto, a construção de operadores que mapeiam um espaço com spin bem definido num subespaço associado à outro spin, pode ser realizada decompondo o espaço de spin maior numa soma direta de subespaços definidos por vetores que preferenciam direções no espaço (como no caso de quebra de Lorentz).

Os projetores de spin em $4D$, que decompõem os campos vetoriais podem ser construídos explicitamente usando a métrica e derivadas do seguinte modo:

$$P(0^+)_{ab} = \omega_{ab} = \frac{\partial_a \partial_b}{\square}, \quad \square = \partial_a \partial^a, \quad (3.8a)$$

$$P(1^-)_{ab} = \theta_{ab} = \eta_{ab} - \omega_{ab}. \quad (3.8b)$$

Vemos, portanto, que o uso de projetores de spin e os mapeadores entre subespaços de mesmo spin devem formar uma base para operadores de onda construídos apenas com métrica e derivadas. Por outro lado, se vetores extras forem introduzidos na construção dos modelos, como no caso de quebra de Lorentz, os operadores com spins bem definidos não serão suficientes para formar uma

base. A construção explícita dos projetores de spin para tensores de rank arbitrário pode ser feita a partir do produto tensorial dos projetores que atuam sobre os vetores, seguindo as regras do produto de representações de grupos.

Um dos objetivos desta tese é estudar a consistência de modelos gravitacionais que possibilitem a descrição de grávitons massivos. Uma das possibilidades de se descrever grávitons massivos é trabalhar com a conexão de spin e vielbein como campos independentes.

No trabalho [15], Sezgin e Nieuwenhuizen se propuseram a estudar a consistência espectral de modelos gravitacionais em $4D$ no formalismo de primeira ordem. Nesse trabalho foi considerada a Lagrangeana mais geral com termos de curvatura e torção com até duas derivadas e que preserva invariância por paridade. Para a obtenção dos propagadores foi construída uma base completa de operadores para Lagrangianas invariantes por paridade e que contenham tensores de rank-2 e tensores de rank-3 anti-simétricos em 2 índices. Este conjunto de operadores possui a interessante propriedade de decompor os campos em subespaços com spin e paridade bem definidas. Além disso, podem ser escritos tendo os operadores transverso, θ , e longitudinal, ω , do caso vetorial, como blocos fundamentais. Estes operadores são uma extensão da base de operadores de Barnes-Rivers [16], que contempla só o caso de tensores de rank-2.

No Capítulo 5 faremos um estudo de uma Lagrangeana análoga àquela estudada em [15], porém em dimensão arbitrária. Sendo assim, generalizamos a base de operadores de spin-paridade proposta neste trabalho para uma dimensão qualquer. Como a generalização é direta, apenas listamos a base de operadores no Apêndice A.

Podemos ilustrar como fica a tarefa de obter o propagador no caso dessa base de operadores spin-paridade. Pode-se escrever o operador de onda dado em (3.1) como

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \sum_{J,ij} a_{ij}^{\varphi\theta} (J^P) P_{ij}^{\varphi\theta} (J^P)_{\alpha\beta}. \quad (3.9)$$

Os operadores diagonais $P_{ii}^{\varphi\varphi} (J^P)$ projetam a componente de spin J e paridade P (\pm) do campo φ , enquanto que os operadores $P_{ij}^{\varphi\theta} (J^P)$ (com $i \neq j$) são mapeadores entre os espaços de spin definidos pelos projetores $P_{ii}^{\varphi\varphi} (J^P)$ e $P_{jj}^{\theta\theta} (J^Q)$. Isto pode ser resumido nas seguintes relações algébricas:

$$\sum_{\beta} P_{ij}^{\Sigma\Psi} (I^P)_{\alpha\beta} P_{kl}^{\Lambda\Xi} (J^Q)_{\beta\gamma} = \delta_{jk} \delta^{\Psi\Lambda} \delta^{IJ} \delta^{PQ} P_{il}^{\Sigma\Xi} (I^P)_{\alpha\gamma}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{i,J^P} P_{ii} (J^P)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.11)$$

As matrizes $a_{ij}^{\Sigma\Lambda} (J^P)$ são os coeficientes da expansão do operador de onda em termos dos operadores de spin. Este arranjo matricial se deve à álgebra não trivial dos operadores, que se dá somente entre os operadores de mesmo spin e paridade, como pode ser visto em (3.10). Quando estas matrizes são inversíveis, o propagador saturado com as fontes (3.2) é dado por:

$$\Pi = i \sum_{\alpha, \beta, J^P} \mathcal{S}_\alpha^* a_{ij}^{-1\varphi\vartheta} (J) P_{ij}^{\varphi\vartheta} (J^P)_{\alpha\beta} \mathcal{S}_\beta. \quad (3.12)$$

Em $3D$, usando apenas métricas e derivadas, pode-se construir os operadores θ e ω em estrita analogia com $4D$, mas θ não deve corresponder a um operador de spin no sentido tridimensional. Isto ocorre porque, para o caso massivo, o spin em $3D$ corresponde às representações unitárias do grupo $SO(2)$, que são unidimensionais. Os operadores θ e ω separam o espaço tridimensional numa soma direta de 2 subespaços com dimensão 2 e 1, respectivamente. Sendo assim, somos forçados a concluir que θ não projeta num subespaço de spin. Se considerarmos somente modelos construídos com métricas e derivadas, a base de operadores dada Apêndice A, fazendo $D = 3$, é suficiente para lidar com a questão. No entanto, em $3D$, modelos com quebra de paridade desempenham um papel importante em TQC. A assinatura desses modelos é a presença do símbolo de Levi-Civita no operador de onda. No caso vetorial, a quebra de paridade define um bloco construtor independente de θ e ω . À saber,

$$S^{ab} = \epsilon^{abc} \partial_c. \quad (3.13)$$

Este operador é conhecido como o operador de Chern-Simons e sua independência pode ser verificada estabelecendo sua álgebra com os operadores θ e ω :

$$S\theta = \theta S = S, \quad (3.14a)$$

$$S\omega = \omega S = 0, \quad (3.14b)$$

$$S^2 = -\square\theta. \quad (3.14c)$$

Além disso, (3.14a) e (3.14b) mostra que S é um operador linear que mapeia um vetor arbitrário em outro vetor que vive no subespaço transversal ao tri-momento. Contudo, este vetor é independente do vetor obtido pela ação do operador θ . Isto é possível uma vez que o subespaço transversal em $3D$ é bidimensional.

As relações (3.14a)-(3.14c) nos permitem inverter um operador de onda, escrito em termos do conjunto $\{\theta, \omega, S\}$, por meio da solução de um sistema linear de equações. Entretanto, esse procedimento não é muito conveniente, uma vez que a álgebra que estes operadores satisfazem não é ortonormal e a interpretação física dos modos propagantes não é direta. Nosso ponto de vista é que uma escolha mais conveniente seria uma base de operadores associada aos spins das partículas em $3D$.

Conforme a discussão acima, podemos escolher o momento representativo da classe do grupo de Poincaré para partículas massivas em $3D$ como sendo $k = (m, 0, 0)$. Portanto, o grupo de isotropia deste momento representativo é o $SO(2)$, o qual pode ser representado de um modo unitário pelo grupo $U(1)$. No caso da representação vetorial, temos a seguinte relação entre os geradores do grupo $U(1)$ e os geradores do grupo de Lorentz associados às rotações espaciais, $SO(2)$:

$$\sum_{\sigma} u_a(\sigma) J_{\sigma\sigma'}^{(j)} = \sum_b \mathcal{J}_{ab} u_b(\sigma'), \quad (3.15)$$

onde $J^{(j)}$ é o gerador de $U(1)$ na representação j e \mathcal{J} é o gerador de $SO(2)$. O índice σ indica a estrutura matricial de J . Uma vez que estamos interessados nas representações irredutíveis de J , que são unidimensionais, o índice σ pode ser omitido. Então, a eq. (3.15) pode ser simplificada para

$$u_\mu J^{(j)} = \sum \mathcal{J}_{\mu\nu} u_\nu. \quad (3.16)$$

O gerador de rotação \mathcal{J} é dado por

$$\mathcal{J}_{0a} = \mathcal{J}_{a0} = 0, \quad (3.17a)$$

$$\mathcal{J}_{ij} = \epsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.17b)$$

Para cada componente da eq. (3.16), temos

$$u_0 J^{(j)} = s u_0 = 0, \quad (3.18a)$$

$$u_i J^{(j)} = s u_i = \epsilon_{ik} u_k. \quad (3.18b)$$

Usando recursivamente a relação (3.18b), obtemos:

$$s^2 u_i = \delta_{ik} u_k = u_i. \quad (3.19)$$

As relações (3.18a)-(3.19) nos permitem identificar o spin de cada componente:

$$u_0 : \quad s = 0 \quad (3.20a)$$

$$u_1 : \quad s = 1 \quad (3.20b)$$

$$u_2 : \quad s = -1. \quad (3.20c)$$

A condição (3.19) não especifica se o spin da componente u_i é $+1$ ou -1 . A escolha feita aqui é arbitrária, mas conveniente. Ou seja, em $3D$ a componente 0 de um campo vetorial pode ainda ser associada ao spin-0. No entanto, as duas componentes espaciais não formam mais as componentes de spin-1 (como acontece em $4D$), mas são associadas a dois spins distintos: $+1$ e -1 .

Em $4D$, a tarefa de identificar os projetores de spin é mais direta que em $3D$. Isto ocorre porque as representações unitárias de $SO(2)$, que correspondem às partículas em $3D$, são aquelas associadas ao grupo $U(1)$. Por sua vez, a representação fundamental de $U(1)$ não é equivalente à sua complexo conjugada. Como as representações de $SO(2)$ são todas reais, elas podem ser identificadas como a soma direta da representação fundamental de $U(1)$ com a sua complexo conjugada. Todas as representações irredutíveis de $SO(2)$ são bidimensionais e podem ser associadas as representações de $U(1)$ pela complexificação dos campos. Como exemplo, tomemos a representação vetorial de $SO(2)$. Uma transformação de $SO(2)$ sobre o vetor $A = (A_1, A_2)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Os auto-vetores normalizados desta transformação são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.22a)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (3.22b)$$

Então, podemos definir uma base para o espaço de Minkowski em $(1+2)D$, de tal modo que cada vetor expande um subespaço unidimensional, que são os auto-espaços das transformações de $U(1)$. Esta base é dada por:

$$e(0)_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23a)$$

$$e(+1)_a \equiv (e_1)_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.23b)$$

$$e(-1)_a \equiv (e_2)_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (3.23c)$$

onde pode-se ver prontamente que $e(0)$ é um vetor tipo-tempo, ao passo que e_1 e e_2 são vetores tipo-espaço.

Dessa maneira, sob uma mudança de base, por uma transformação unitária conveniente, um campo vetorial real se torna

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_1 + iA_2 \\ A_1 - iA_2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Nesta base, a transformação do vetor A' sob a rotação (3.21) é dada por

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Sendo assim, podemos fazer a identificação da representação vetorial de $SO(2)$, Δ , com a soma direta das representações fundamental, \square , e fundamental conjugada, \square^* de $U(1)$. Ou seja,

$$\Delta \sim \square \oplus \square^*. \quad (3.26)$$

O operador θ é a identidade no espaço de representação Δ . Podemos separar este espaço na soma direta de 2 subespaços unidimensionais. Entendendo como construir as representações de spins em $3D$, podemos associar aos vetores de base complexos e_1 e e_2 os seguintes projetores de spin:

$$\rho^{ab} = -e_1^a (e_1^b)^*, \quad (3.27a)$$

$$\sigma^{ab} = -e_2^a (e_2^b)^*. \quad (3.27b)$$

Nesta convenção, ρ é o operador de projeção associado ao espaço \square , enquanto que σ está associado com \square^* . Também verificamos que ρ e σ estão relacionados pela operação de conjugação complexa, $\rho^* = \sigma$, e são hermitianos (mas não simétricos):

$$\rho_{ab} = (e_1)_a (e_1)_b^* = (e_2)_b (e_2)_a^* = \sigma_{ba}. \quad (3.28)$$

Estas considerações estabelecem a identificação dos modos de spin para campos vetoriais. Também é importante expressar o operador de C-S em termos dos projetores de spin. Isto pode ser feito notando que $\varepsilon^{abc} e_a^1 e_b^2 \frac{k_c}{\sqrt{k^2}} = -i$, uma vez que e_1 , e_2 e $\frac{k_c}{\sqrt{k^2}}$ estão normalizados. Então, podemos escrever

$$S_{ab} = -\sqrt{k^2} (\rho_{ab} - \sigma_{ab}). \quad (3.29)$$

Poderíamos nos questionar sobre a possibilidade de se construir operadores de mapeamento entre os subespaços definidos pelos vetores k e e_1 ou k e e_2 . De fato, estes operadores de mapeamento não são necessários uma vez que estes operadores teriam que exibir explicitamente os vetores e_1 e e_2 , o que não pode ser o caso nos modelos que preservam Lorentz, onde o operador de onda é constituído apenas por η 's, ∂ 's e ϵ 's.

Para construirmos operadores de projeção de spin para tensores de rank-2, levamos em consideração a decomposição do campo vetorial nas representações de $U(1)$. Todas as representações irredutíveis de $U(1)$ são unidimensionais e, devido ao fato de $U(1)$ ser abeliano, os spins das representações obtidas pela multiplicação tensorial das representações básicas, $+1, -1$ e 0 , são dados simplesmente pela soma dos spins associados à estas representações. Para o tensor de rank-2, temos

$$(\underline{1} \oplus -\underline{1} \oplus \underline{0}) \otimes (\underline{1} \oplus -\underline{1} \oplus \underline{0}) = (3 \times \underline{0} \oplus 2 \times \underline{1} \oplus 2 \times -\underline{1} \oplus \underline{2} \oplus -\underline{2}), \quad (3.30)$$

onde os números sublinhados representam os spins e os números que não estão sublinhados representam a multiplicidade dos respectivos spins.

Para os nossos fins, um tensor geral de rank-2, T_{ab} , pode ser pensado como sendo o produto tensorial de dois vetores, digamos A_a e B_a ,

$$T_{ab} = A_a B_b. \quad (3.31)$$

Como discutido, um vetor pode ser decomposto em suas componentes de spin, $A_a \supset (1 \oplus -1 \oplus 0)$. Usando os projetores ρ , σ e ω , podemos escrever:

$$A_a = (\rho_{ac} + \sigma_{ac} + \omega_{ac}) A^c. \quad (3.32)$$

Dessa maneira, temos para o tensor de rank-2, T_{ab} :

$$T_{ab} = (\rho_{ac}\rho_{bd} + \rho_{ac}\sigma_{bd} + \rho_{ac}\omega_{bd} + \sigma_{ac}\rho_{bd} + \sigma_{ac}\sigma_{bd} + \sigma_{ac}\omega_{bd} + \omega_{ac}\rho_{bd} + \omega_{ac}\sigma_{bd} + \omega_{ac}\omega_{bd}) T^{cd}. \quad (3.33)$$

De acordo com nossa convenção, ρ , σ e ω estão associados aos spins $+1, -1$ e 0 , respectivamente. Então, $\rho\rho$, $\rho\omega$, $\omega\rho$, $\rho\sigma$, $\sigma\rho$, $\omega\omega$, $\sigma\omega$, $\omega\sigma$ e $\sigma\sigma$, estão associados aos spins $+2, +1, +1, 0, 0, 0, -1, -1$ e -2 , respectivamente.

Nosso interesse, no entanto, é estudar os modos de spin do campo do gráviton, que é um tensor simétrico de rank-2. Nesta situação, a simetrização dos operadores acima resultam nos operadores de projeção de spin para o campo do gráviton, que denotamos por h :

$$P^{hh} (+2)_{ab;cd} = \rho_{ac}\rho_{bd}, \quad (3.34a)$$

$$P^{hh} (-2)_{ab;cd} = \sigma_{ac}\sigma_{bd}, \quad (3.34b)$$

$$P^{hh} (+1)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\rho_{ac}\omega_{bd} + \rho_{bc}\omega_{ad} + \rho_{ad}\omega_{bc} + \rho_{bd}\omega_{ac}), \quad (3.34c)$$

$$P^{hh} (-1)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\sigma_{ac}\omega_{bd} + \sigma_{bc}\omega_{ad} + \sigma_{ad}\omega_{bc} + \sigma_{bd}\omega_{ac}), \quad (3.34d)$$

$$P^{hh} (0^\omega)_{ab;cd} = \omega_{ac}\omega_{bd}, \quad (3.34e)$$

$$P^{hh} (0^s)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\rho_{ac}\sigma_{bd} + \rho_{bc}\sigma_{ad} + \rho_{ad}\sigma_{bc} + \rho_{bd}\sigma_{ac}). \quad (3.34f)$$

Podemos notar que todos os operadores de projeção são hermitianos. Esta é uma consequência de um teorema em álgebra linear que diz que operadores de projeção associados com projeções ortogonais são hermitianos. Também pode-se notar que os projetores associados a spins não-triviais são complexos, ao passo que aqueles relacionados aos spins 0's são reais. Isto acontece devido ao fato de que spins não-triviais estão associados à representações não-triviais do grupo $U(1)$, que por sua vez são complexas.

Por outro lado, sabemos que a Lagrangeana é real. Conclui-se, portanto, que as estruturas complexas (3.34a)-(3.34f) não podem aparecer sozinhas na decomposição do operador de onda em termos dos operadores de projeção. Podemos assegurar, entretanto, que devido à invariância de Lorentz do modelo, aparecerão os projetores das representações irredutíveis de $SO(2)$. Tais operadores são os operadores de Barnes-Rivers [16] para $D = 3$ e, dessa forma, são escritos em termos de θ e ω . Usando a identidade $\theta = \rho + \sigma$, podemos decompor os operadores reais de Barnes-Rivers em termos dos operadores de spin (3.34a)-(3.34f). Uma vez que $\rho^* = \sigma$, o operador de onda continua sendo real.

Como exemplo, tomamos o projetor associado ao tensor de rank-2 simétrico e de traço nulo. Este operador projeta o tensor numa representação não trivial e irredutível de $SO(2)$ e, portanto, bidimensional. Tal projetor é dado por:

$$P^{hh} (2)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\theta_{ac}\theta_{bd} + \theta_{ad}\theta_{bc}) - \frac{1}{2}\theta_{ab}\theta_{cd}. \quad (3.35)$$

Substituindo $\theta = \rho + \sigma$ na expressão (3.35), obtemos dois projetores em termos de ρ and σ , um para cada grau de liberdade de spin:

$$P^{hh}(2)_{ab,cd} = \rho_{ac}\rho_{bd} + \sigma_{ac}\sigma_{bd}, \quad (3.36)$$

e reconhecemos imediatamente o operador de Barnes-Rivers, $P^{hh}(2)$, como uma soma de operadores de spin $+2$ e spin -2 (eqs. (3.34a)-(3.34b)). Este processo de decomposição pode ser repetido para todos os operadores necessários para esgotar as possibilidades de contração dos campos na Lagrangeana.

No Capítulo 6 faremos uma análise da consistência espectral de uma Lagrangeana contendo o termo de Chern-Simons gravitacional no formalismo de primeira ordem. A parte deste termo, que contribui para o operador de onda, pode ser escrita em termos dos operadores de spin, (3.34a)-(3.34f), da seguinte maneira:

$$S_{ab;cd} = -4i\sqrt{k^2} \left(P(+2)_{ab;cd} - P(-2)_{ab;cd} \right). \quad (3.37)$$

Todas as outras relações entre os operadores são dadas no Apêndice B.

3.3 Simetrias de Calibre

Até o momento a discussão feita não contempla o importante caso em que os modelos possuem simetrias de calibre. Neste capítulo discutiremos pormenorizadamente esta situação. Consideremos uma Lagrangeana composta com os termos quadráticos, \mathcal{L}_0 , e das fontes, \mathcal{L}_F , dados em (2.40). A equação de campo vinda dessa Lagrangeana é dada por:

$$\sum_{\beta,\lambda} \mathcal{O}_{\alpha\beta}^{\phi\lambda} \Psi_{\beta}^{\lambda} = J_{\alpha}^{\phi}, \quad (3.38)$$

onde Ψ_{α}^{λ} representa um multiplete de campos com o índice superior relacionado ao conteúdo de campos e o índice inferior às componentes espaço-temporais desses campos. Por uma transformação de calibre infinitesimal, tem-se a transformação dos campos:

$$\Psi' = \Psi + \delta\Psi, \quad (3.39)$$

com $\delta\Psi$ satisfazendo:

$$\sum_{j,\lambda} \mathcal{O}_{\alpha\beta}^{\phi\lambda} \delta\Psi_{\beta}^{\lambda} = 0. \quad (3.40)$$

Uma vez tendo uma base completa de operadores de spin, como descrito no capítulo anterior, o operador de onda pode ser dado em termos destes operadores e a equação (3.40) pode ser escrita como:

$$\sum_{i,j,\alpha,\lambda} a_{ij}^{\phi\lambda} (J^P) P_{ij}^{\phi\lambda} (J^P)_{\alpha\beta} \delta\Psi_{\beta}^{\lambda} = 0. \quad (3.41)$$

Contraindo esta expressão com $P_{kl}^{\chi\phi}(I^Q)_{\gamma\alpha}$ e usando (3.10) e (3.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,\alpha,\lambda} a_{ij}^{\phi\lambda}(J^P) P_{kl}^{\chi\phi}(I^Q)_{\gamma\alpha} P_{ij}^{\phi\lambda}(J^P)_{\alpha\beta} \delta\Psi_\beta^\lambda &= 0, \\ \implies \sum_{j,\alpha,\lambda} a_{ij}^{\phi\lambda}(J^P) P_{kj}^{\chi\lambda}(J^P)_{\gamma\beta} \delta\Psi_\beta^\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Logo, podemos identificar os autovetores associados aos autovalores nulos da matriz de coeficientes:

$$V_i^{(D,n)\psi}(J^P) f_\alpha(J^P) = P_{ki}^{\chi\psi}(J^P)_{\alpha\beta} \delta\Psi_\beta^\psi, \quad (3.43)$$

onde $V_i^{(D,n)\psi}$ é a componente ψ/i do enésimo autovetor pela direita associado ao autovalor nulo da matriz dos coeficientes e os $f_\alpha(J^P)$'s são funções arbitrárias dos momentos. Contraindo (3.43) com $P_{ik}^{\psi\lambda}(J^P)_{\gamma\beta}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_\alpha V_i^{(R,n)\psi}(J^P) P_{ik}^{\psi\lambda}(J^P)_{\gamma\alpha} f_\alpha(J^P) &= P_{ik}^{\psi\lambda}(J^P)_{\gamma\alpha} P_{ki}^{\chi\psi}(J^P)_{\alpha\beta} \delta\Psi_\beta^\psi, \\ \implies \sum_\alpha V_i^{(R,n)\psi}(J^P) P_{ik}^{\psi\lambda}(J^P)_{\gamma\alpha} f_\alpha(J^P) &= P_{ii}^{\psi\psi}(J^P)_{\gamma\beta} \delta\Psi_\beta^\psi. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Somando sobre i , ψ , J^P e usando (3.5), podemos relacionar a variação do campo por uma transformação de calibre com os autovetores associados aos autovalores nulos da matriz de coeficientes:

$$\delta\Psi_\gamma^\psi = \sum_{i,J^P,\alpha} V_i^{(R,n)\psi}(J^P) P_{ik}^{\psi\lambda}(J^P)_{\gamma\alpha} f_\alpha(J^P). \quad (3.45)$$

Essa expressão é válida para todo valor independente de k e n .

Podemos ver também de (3.38)-(3.41), que as fontes que se acoplam aos campos devem satisfazer vínculos para que a Lagrangeana seja invariante pela transformação de calibre dos campos. De fato, a invariância da Lagrangeana implica que:

$$\sum_{\beta,\psi} \delta\Psi_\beta^\psi J_\beta^\psi = 0. \quad (3.46)$$

Usando (3.45) em (3.46), temos:

$$\sum_{i,J^P,\alpha,\gamma,\psi} V_i^{(R,n)\psi}(J^P) P_{ik}^{\psi\lambda}(J^P)_{\gamma\alpha} f_\alpha(J^P) J_\gamma^\psi = 0. \quad (3.47)$$

Devido à arbitrariedade das funções f_α 's e da independência entre os graus de liberdade dos diferentes spins, essa equação se reduz à:

$$\sum_{i,\gamma} V_i^{(R,n)\psi} (J^P) P_{ik}^{\psi\lambda} (J^P)_{\gamma\alpha} J_\gamma^\psi = 0. \quad (3.48)$$

A realidade da Lagrangeana implica na hermiticidade do operador de onda que, por sua vez, implica também na hermiticidade das matrizes de coeficientes. No caso particular que estamos discutindo, onde os modelos são construídos com a base (3.10) e os campos são reais, os operadores de spin satisfazem à propriedade: $P_{ij}^{\psi\lambda} (J^P)_{\alpha\beta}^T = P_{ji}^{\lambda\psi} (J^P)_{\alpha\beta}$. Logo, a equação (3.48) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum_{i,\gamma} V_i^{(L,n)\psi} (J^P) P_{ki}^{\lambda\psi} (J^P)_{\alpha\gamma} J_\gamma^\psi = 0, \quad \forall k, J, n. \quad (3.49)$$

Para os casos mais gerais de campos complexos em dimensões diferentes de 4, a base de operadores de spin pode ser construída à partir de vetores de base complexos. Ainda assim os operadores de spin devem satisfazer à condição de hermiticidade: $P_{ij} (J)_{\alpha\beta}^\dagger = P_{ji} (J)_{\alpha\beta}$. Nesse caso a equação (3.49) se modifica apenas pela substituição de V^L por V^{L*} .

A presença de simetrias de calibre nos modelos Lagrangeanos traz algumas dificuldades à análise da consistência espectral do modelo. Uma delas é que, uma vez que uma classe de campos satisfazem à mesma equação de campo, o operador de onda não possui inversa, pois não é injetivo. Esta não inversibilidade do operador de onda é refletida nas matrizes de coeficientes definidas em (3.9), o que também pode ser visto na relação (3.45) entre a variação de calibre dos campos e os autovetores da matriz de coeficientes associados à autovalores nulos. Logo, a expressão para o propagador saturado (3.12) fica mal definida.

No caso de simetrias de calibre a expressão correta para o propagador saturado com as fontes físicas é dada por, conforme Ref. [18]:

$$\Pi = i \sum_{\alpha,\beta,J^P,m^2,i,j} J_\alpha^* A_{ij}^{-1\varphi^\vartheta} (J^P, m^2) P_{ij}^{\varphi^\vartheta} (J^P)_{\alpha\beta} J_\beta (p^2 - m^2)^{-1}, \quad (3.50)$$

onde $A_{ij}^{\varphi^\vartheta} (J^P, m^2)$ é a maior submatriz de $a_{ij}^{-1\varphi^\vartheta} (J^P)$, degenerada somente no polo $p^2 = m^2$ e com o mesmo sendo extraído do denominador.

Para mostrarmos essa afirmação, notamos primeiramente que a presença de simetrias de calibre implica que as matrizes de coeficientes possuem determinante nulo. Ou seja:

$$\begin{aligned} \det(a) &= \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} = 0; \\ \implies a_{i_1 j_1} (\epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

A expressão entre parênteses são os menores da matriz a . Podemos ver, portanto, que os autovetores associados aos autovalores nulos de a são proporcionais aos menores de a :

$$V_i \propto m_{ki} (a) \quad \forall k. \quad (3.52)$$

Por questões de simplicidade, consideremos que uma das matrizes de coeficientes possua apenas um autovetor nulo. Deletando uma linha e uma coluna, específicas, obtém-se uma matriz regular A_{IJ} com dimensão $(n-1) \times (n-1)$. Assumimos que A_{IJ} seja obtida deletando a última linha e coluna. Podemos então definir uma matriz \tilde{a}_{ij} que difere de a_{ij} apenas pelo seu elemento a_{nn} :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} &= a_{ij}, \quad i, j \neq n \\ \tilde{a}_{nn} &= a_{nn} + \alpha^2.\end{aligned}\tag{3.53}$$

A matriz \tilde{a} não é degenerada. Isto pode ser entendido como um processo de fixação de calibre. O determinante de \tilde{a} é dado por:

$$\det(\tilde{a}) = \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} (a_{i_1 j_1} + \alpha^2 \delta_{i_1 n} \delta_{j_1 n}) (a_{i_2 j_2} + \alpha^2 \delta_{i_2 n} \delta_{j_2 n}) \dots (a_{i_n j_n} + \alpha^2 \delta_{i_n n} \delta_{j_n n}).\tag{3.54}$$

Usando (3.51) e a definição da matriz A_{IJ} , obtemos:

$$\begin{aligned}\det(\tilde{a}) &= \frac{n}{n!} \alpha^2 \epsilon_{i_1 \dots i_{n-1} n} \epsilon_{j_1 \dots j_{n-1} n} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_{n-1} j_{n-1}}, \\ &= \alpha^2 \det(A).\end{aligned}\tag{3.55}$$

Da regra de Cramer podemos escrever para inversa de \tilde{a} a seguinte expressão:

$$\tilde{a}_{ij}^{-1} = \frac{\tilde{m}_{ij}}{\det(\tilde{a})},\tag{3.56}$$

onde \tilde{m}_{ij} é a matriz menor associada ao elemento a_{ij} . Então:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{i_1 j_1}^{-1} &= \frac{1}{\det(\tilde{a})} \frac{1}{(n-1)!} \epsilon_{i_2 \dots i_n} \epsilon_{j_2 \dots j_n} (a_{i_2 j_2} + \alpha^2 \delta_{i_2 n} \delta_{j_2 n}) \dots (a_{i_n j_n} + \alpha^2 \delta_{i_n n} \delta_{j_n n}) \\ &= \frac{m_{ij}}{\alpha^2 \det(A)} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \det(A)} \frac{n-1}{(n-1)!} \epsilon_{i_2 \dots i_{n-1} n} \epsilon_{j_2 \dots j_{n-1} n} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{n-1} j_{n-1}} \\ &= \frac{m_{ij}}{\alpha^2 \det(A)} + \frac{1}{\det(A)} \frac{1}{(n-2)!} \epsilon_{i_2 \dots i_{n-1} n} \epsilon_{j_2 \dots j_{n-1} n} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{n-1} j_{n-1}} \\ &= \frac{m_{ij}}{\alpha^2 \det(A)} + A_{IJ}^{-1},\end{aligned}\tag{3.57}$$

onde usamos (3.54) e o último termo toma valores somente nas primeiras $(n-1)$ linhas e colunas.

Com essa discussão vemos que se começarmos com as matrizes degeneradas podemos diagonalizá-las e inserir termos quadráticos de fixação de calibre nos lugares dos autovalores nulos. A inversa dessa matriz com o calibre fixado é dada por (3.57). Devido à relação entre os autovetores associados aos autovalores nulos de a e as suas matrizes menores dada em (3.52), vemos de (3.48) que,

se usarmos a matriz inversa com o gauge fixado (3.57) na definição do propagador saturado com as fontes físicas, o primeiro termo de (3.57) se anula e o resultado final é invariante de calibre e equivalente à definição (3.50) do propagador no caso de simetrias de calibre. É importante notar que, para o caso de simetrias de calibre não abelianas, ao se fazer cálculos de um ou mais laços das amplitudes de espalhamento, deve-se levar em conta as excitações fantasmas de Fadeev-Popov para se garantir a unitariedade da matriz S [17].

Capítulo 4

Gravitação ao nível linear

Todas as interações fundamentais que possuem um tratamento quântico consistente, são descritas em termos de campos pertencentes à alguma representação finita do grupo de Lorentz. Além disso, o palco onde essas interações ocorrem é o espaço de Minkowski. O processo de definição da teoria quântica da gravitação não é tão direto quanto nas demais interações. No formalismo de segunda ordem a teoria clássica da gravitação é descrita em termos da métrica, que é uma representação do grupo de difeomorfismos e não do grupo de Lorentz. Devido ao grande sucesso desta teoria ao nível clássico é interessante que qualquer alternativa à descrição do fenômeno gravitacional tenha como um certo limite a ação de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral. Como já discutido anteriormente, estamos interessados particularmente no papel que a torção possa desempenhar nas propriedades quânticas da teoria. A torção aparece naturalmente quando tratamos a gravitação como sendo uma teoria de calibre do grupo de Lorentz. Nessa formulação os campos fundamentais são a conexão de spin e a vielbein e a teoria é invariante tanto por difeomorfismos quanto por transformações de Lorentz locais. A ação tipo Einstein-Hilbert leva à RG, apesar de o conteúdo de campos fora da camada de massa ser diferente desta.

A torção também pode aparecer num contexto mais geométrico onde se considera uma conexão não simétrica para o fibrado tangente. No entanto, adotamos nesta tese a postura de construirmos os modelos gravitacionais por meio da localização do grupo de Lorentz com o intuito de estreitar a descrição da gravitação com as demais interações, onde um processo de localização de grupos unitários também pode ser usado para defini-las. Outra característica da interação gravitacional é que os modelos normalmente considerados não são da forma (2.39), dificultando a aplicação dos resultados derivados à partir desta hipótese. Uma possível maneira de se contornar esta dificuldade e definir, pelo menos em princípio, um sistema quântico é linearizando a ação gravitacional. Este processo é feito expandindo-se os campos fundamentais em torno de um fundo clássico não dinâmico. Dessa maneira, os campos quantizáveis são as perturbações em torno deste fundo clássico. A questão que se põe no final deste processo se refere às simetrias de calibre do modelo linearizado. Isto porque, como dito anteriormente, o modelo não linear possui invariâncias e é imprescindível que se tenha pleno domínio dos resquícios que estas invariâncias deixam no modelo linearizado. Além disso, a análise destas simetrias também é uma forma de aferir se o modelo linearizado está

bem definido. Ou seja, se preserva importantes características do modelo não linear (neste caso as simetrias).

Nesta seção, discutiremos esse processo e faremos a conexão dos modelos gravitacionais com o tratamento dos capítulos anteriores. Na formulação que nos é conveniente, a Lagrangeana que descreve o fenômeno gravitacional é dada por:

$$e\tilde{\mathcal{L}}(e_\mu^a; \omega_\mu^{ab}), \quad (4.1)$$

onde estamos denotando com índices latinos a representação do campo sob transformações de Lorentz locais e com índices gregos a representação destes campos por difeomorfismos. Além disso, e_μ^a é o objeto que estabelece o isomorfismo entre o espaço tangente à variedade de base e o espaço interno de simetria dos campos por transformações de Lorentz locais. A presença do determinante da vielbein, e , se faz necessária para a invariância da ação por difeomorfismos e ω_μ^{ab} é a conexão de calibre do grupo de Lorentz local. Sob transformações de difeomorfismos e Lorentz locais esses campos se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e'^a_\mu(x') &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a_\nu(x), \\ \omega'_{\mu}{}^{ab}(x') &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega'_{\nu}{}^{ab}(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} e'^a_\mu(x) &= \Lambda^a_b(x) e^b_\mu(x), \\ \omega'_{\mu}{}^{ab}(x) &= \Lambda^a_c(x) \Lambda^b_d(x) \omega_\nu{}^{cd}(x) - (\partial_\mu \Lambda^a_c(x)) \Lambda^{cb}(x), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde Λ é uma matriz pertencente à representação vetorial do grupo de Lorentz e as coordenadas x' e x relacionam-se pelo difeomorfismo:

$$x'^\mu = f^\mu(x^\nu, a^\alpha), \quad (4.4)$$

sendo os a^α 's parâmetros do grupo de difeomorfismos.

As transformações por difeomorfismos, (4.2), são de natureza um pouco diferente das transformações por Lorentz local, (4.3), devido ao fato de que nas primeiras não só a forma funcional dos campos se altera como também as coordenadas espaço-temporais. A densidade Lagrangeana, por exemplo, se transforma da seguinte maneira sob (4.2):

$$\mathcal{L}(e'^a_\mu(x'); \omega'_{\mu}{}^{ab}(x')) = J^{-1}(x) \mathcal{L}(e^a_\mu; \omega_\mu^{ab}), \quad (4.5)$$

onde $J(x)$ é o jacobiano da transformação (4.4). A presença de J^{-1} é devido ao fato de estarmos considerando o determinante da vielbein como fazendo parte da densidade Lagrangeana. Se considerarmos difeomorfismos infinitesimais, no entanto, é possível calcularmos explicitamente as

transformações funcionais dos campos:

$$\begin{aligned}
e'^a_\mu (x^\mu + \epsilon \xi^\mu + \epsilon^2 \lambda^\mu) &= \frac{\partial (x'^\nu - \epsilon \xi^\nu + \epsilon^2 (\lambda^\nu + \xi^\alpha \partial_\alpha \xi^\nu))}{\partial x'^\mu} e^a_\nu (x) \\
\implies e'^a_\mu (x) &= e^a_\mu (x) - \epsilon (\xi^\nu e^a_{\mu,\nu} (x) + \xi^\nu_{,\mu} e^a_\nu (x)) \\
&\quad + \epsilon^2 (-\lambda^\nu e^a_{\mu,\nu} (x) + \xi^\nu \xi^\alpha_{,\nu} e^a_{\mu,\alpha} + \lambda^\nu_{,\mu} e^a_\nu (x)) \\
&\quad + \epsilon^2 (\xi^\nu \xi^\alpha e^a_{\mu,\alpha,\nu} + \xi^\nu \xi^\alpha_{,\nu,\mu} e^a_\alpha (x) + \xi^\nu \xi^\alpha_{,\mu} e^a_{\alpha,\nu} (x)) \\
&\quad + \epsilon^2 \left(\xi^\alpha_{,\mu} \xi^\nu_{,\alpha} e^a_\nu (x) - \frac{1}{2} \xi^\nu \xi^\lambda e^a_{\mu,\nu,\lambda} (x) \right) \tag{4.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega'^{\mu ab} (x^\nu) &= \omega_\mu^{ab} (x^\nu) - \epsilon (\xi^\nu \omega_{\mu,\nu}^{ab} (x) + \xi^\nu_{,\mu} \omega_\nu^{ab} (x)) \\
&\quad + \epsilon^2 (-\lambda^\nu \omega_{\mu,\nu}^a (x) + \xi^\nu \xi^\alpha_{,\nu} \omega_{\mu,\alpha}^a + \lambda^\nu_{,\mu} \omega_\nu^a (x)) \\
&\quad + \epsilon^2 (\xi^\nu \xi^\alpha_{,\nu,\mu} \omega_\alpha^a (x) + \xi^\nu \xi^\alpha_{,\mu} \omega_{\alpha,\nu}^a (x)) \\
&\quad + \epsilon^2 \left(\xi^\alpha_{,\mu} \xi^\nu_{,\alpha} \omega_\nu^a (x) + \frac{1}{2} \xi^\nu \xi^\lambda \omega_{\mu,\nu,\lambda}^a (x) \right), \tag{4.7}
\end{aligned}$$

onde ξ^μ e λ^μ são funções arbitrárias das coordenadas espaço-temporais e ϵ é o parâmetro infinitesimal dos difeomorfismos.

Usando essas relações em (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(e'_\mu + \epsilon \xi^\alpha e_{\mu,\alpha} + \epsilon^2 \left(\lambda^\alpha e_{\mu,\alpha} - \xi^\alpha \left((\xi^\beta e_{\mu,\beta} + \xi_{,\mu}^\beta e_\beta)_{,\alpha} - \frac{1}{2} \xi^\beta e_{\mu,\alpha,\beta} \right) \right)); \\
&\omega'_\mu + \epsilon \xi^\nu \omega_{\mu,\nu} + \epsilon^2 \left(\lambda^\alpha \omega_{\mu,\alpha} - \xi^\alpha \left((\xi^\beta \omega_{\mu,\beta} + \xi_{,\mu}^\beta \omega_\beta)_{,\alpha} - \frac{1}{2} \xi^\beta e_{\mu,\alpha,\beta} \right) \right) \\
&= \left(1 - \epsilon \partial_\mu \xi^\mu + \epsilon^2 \left(\partial_\mu \lambda^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu + \partial_\mu \xi^\mu \partial_\nu \xi^\nu) \right) \right) \mathcal{L}(e'_\mu; \omega'_\mu)^{ab} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Usando (4.6) e (4.7) e expandindo funcionalmente o lado esquerdo desta equação em torno dos e 's e ω 's não transformados, podemos escrever esta expressão, considerando termos até segunda ordem no parâmetro ϵ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e'_\mu; \omega'_\mu) &= \mathcal{L}(e_\mu; \omega_\mu) - \epsilon \partial_\mu (\xi^\mu \mathcal{L}) + \epsilon^2 \partial_\mu \left(\partial_\nu \left(\frac{\xi^\mu \xi^\nu}{2} \mathcal{L} \right) - \lambda^\mu \mathcal{L} \right) \\
&\quad + \epsilon^2 \left(-\xi_{,\alpha}^\alpha \xi_{,\nu}^\beta \omega_\beta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_\nu} - \xi_{,\alpha}^\alpha \xi_{,\nu}^\beta e_\beta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\nu} + \xi_{,\alpha}^\alpha \xi_{,\beta}^\beta \mathcal{L} \right). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

O último termo se anula quando impomos que a Lagrangeana se transforma como (4.5).

Dessa maneira, vemos que as transformações por difeomorfismos (4.2) e (4.4) podem ser consideradas, quando truncamos a expansão em Taylor em (4.4), como sendo uma transformação de calibre mais termos de derivadas totais, que podem ser desprezados. Ou seja,

$$\mathcal{L}(e'_\mu; \omega'_\mu) = \mathcal{L}(e_\mu; \omega_\mu) - \epsilon \partial_\mu (\xi^\mu \mathcal{L}) + \epsilon^2 \partial_\mu \left(\partial_\nu \left(\frac{\xi^\mu \xi^\nu}{2} \mathcal{L} \right) - \lambda^\mu \mathcal{L} \right). \tag{4.10}$$

Com esta condição, podemos tratar as transformações (4.2) e (4.3) como sendo, essencialmente, do mesmo tipo.

Consideramos as transformações dos campos:

$$e'^a_\mu(x) = e^a_\mu(x) + \epsilon \Delta_1 e^a_\mu + \epsilon^2 \Delta_2 e^a_\mu, \quad (4.11a)$$

$$\omega'_{\mu}{}^{ab}(x) = \omega_{\mu}{}^{ab}(x) + \epsilon \Delta_1 \omega_{\mu}{}^{ab} + \epsilon^2 \Delta_2 \omega_{\mu}{}^{ab}, \quad (4.11b)$$

onde os termos de variação podem ser tanto devido aos difeomorfismos quanto às transformações de Lorentz local. Vejamos os vínculos que estas transformações impõem sobre a Lagrangeana (4.1). Partimos da condição de invariância da Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(e'^a_\mu(x); \omega'_{\mu}{}^{ab}(x)) = \mathcal{L}(e^a_\mu(x); \omega_{\mu}{}^{ab}(x)). \quad (4.12)$$

Usando (4.11a) e (4.11b) em (4.12), obtemos até segunda ordem em ϵ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(e^a_\mu + \epsilon \Delta_1 e^a_\mu + \epsilon^2 \Delta_2 e^a_\mu; \omega_{\mu}{}^{ab} + \epsilon \Delta_1 \omega_{\mu}{}^{ab} + \epsilon^2 \Delta_2 \omega_{\mu}{}^{ab}) = \mathcal{L}(e^a_\mu; \omega_{\mu}{}^{ab}); \\ \implies & \mathcal{L}(e^a_\mu; \omega_{\mu}{}^{ab}) + \epsilon \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu} \Delta_1 e^a_\mu + \epsilon^2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu} \Delta_2 e^a_\mu + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu \delta e^b_\nu} \Delta_1 e^a_\mu \Delta_1 e^b_\nu + \epsilon^2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu \delta \omega_{\nu}{}^{cd}} \Delta_1 e^a_\mu \Delta_1 \omega_{\nu}{}^{cd} \\ & + \epsilon \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab}} \Delta_1 \omega_{\mu}{}^{ab} + \epsilon^2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab}} \Delta_2 \omega_{\mu}{}^{ab} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab} \delta \omega_{\nu}{}^{cd}} \Delta_1 \omega_{\mu}{}^{ab} \Delta_1 \omega_{\nu}{}^{cd} = \mathcal{L}(e^a_\mu; \omega_{\mu}{}^{ab}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como dissemos no início desta seção, uma maneira de obtermos um modelo usual em TQC, com a Lagrangeana do tipo (2.39), é considerarmos os campos a serem quantizados como sendo perturbações em torno de um campo de fundo. Nesta tese consideraremos sempre o campo de fundo definindo um espaço de Minkowski. Além disso, supomos que essas perturbações são da mesma ordem que aquelas produzidas pela variação de calibre. Ou seja:

$$e^a_\mu = \delta^a_\mu + \epsilon \tilde{e}^a_\mu, \quad (4.14a)$$

$$\omega_{\mu}{}^{ab} = \epsilon \tilde{\omega}_{\mu}{}^{ab}. \quad (4.14b)$$

Substituindo (4.14a) e (4.14b) em (4.13), temos:

$$\begin{aligned} & \left(\epsilon \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu} \Big|_{e=\delta, \omega=0} + \epsilon^2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu \delta e^b_\nu} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}^b_\nu + \epsilon^2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu \delta \omega_{\nu}{}^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_{\nu}{}^{cd} \right) \left(\Delta_1 e^a_\mu \Big|_{e=\delta} + \epsilon \frac{\delta (\Delta_1 e^a_\mu)}{\delta e^b_\nu} \Big|_{e=\delta} \tilde{e}^b_\nu \right) \\ + & \epsilon^2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_2 e^a_\mu \Big|_{e=\delta} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu \delta e^b_\nu} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e^a_\mu \Big|_{e=\delta} \Delta_1 e^b_\nu \Big|_{e=\delta} + \epsilon^2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e^a_\mu \delta \omega_{\nu}{}^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e^a_\mu \Big|_{e=\delta} \Delta_1 \omega_{\nu}{}^{cd} \Big|_{\omega=0} \\ + & \left(\epsilon \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} + \epsilon^2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab} \delta \omega_{\nu}{}^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_{\nu}{}^{cd} + \epsilon^2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab} \delta e^c_\nu} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}^c_\nu \right) \left(\Delta_1 \omega_{\mu}{}^{ab} \Big|_{\omega=0} + \epsilon \frac{\delta (\Delta_1 \omega_{\mu}{}^{ab})}{\delta \omega_{\rho}{}^{fg}} \Big|_{\omega=0} \tilde{\omega}_{\rho}{}^{fg} \right) \\ + & \epsilon^2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_2 \omega_{\mu}{}^{ab} \Big|_{\omega=0} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab} \delta \omega_{\nu}{}^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 \omega_{\mu}{}^{ab} \Big|_{\omega=0} \Delta_1 \omega_{\nu}{}^{cd} \Big|_{\omega=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Vemos, portanto, que a invariância da Lagrangeana (4.12), juntamente com as hipóteses (4.14a)-(4.14b), leva aos seguintes vínculos, ordem à ordem em ϵ :

$$\left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a} \right|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a \Big|_{e=\delta} + \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 \omega_\mu^{ab} \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a} \right|_{e=\delta, \omega=0} \frac{\delta (\Delta_1 e_\mu^a)}{\delta e_\nu^b} \Big|_{e=\delta} \tilde{e}_\nu^b + \left(\left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta e_\nu^b} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\nu^b + \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta \omega_\nu^{cd}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_\nu^{cd} \right) \Delta_1 e_\mu^a \Big|_{e=\delta} \\ & + \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a} \right|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_2 e_\mu^a \Big|_{e=\delta} + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta e_\nu^b} \right|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a \Big|_{e=\delta} \Delta_1 e_\nu^b \Big|_{e=\delta} + \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta \omega_\nu^{cd}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a \Big|_{e=\delta} \Delta_1 \omega_\nu^{cd} \Big|_{\omega=0} \\ & + \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \frac{\delta (\Delta_1 \omega_\mu^{ab})}{\delta \omega_\nu^{fg}} \Big|_{\omega=0} \tilde{\omega}_\nu^{fg} + \left(\left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta \omega_\nu^{cd}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_\nu^{cd} + \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta e_\nu^c} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\nu^c \right) \Delta_1 \omega_\mu^{ab} \Big|_{\omega=0} \\ & + \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_2 \omega_\mu^{ab} \Big|_{\omega=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta \omega_\nu^{cd}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 \omega_\mu^{ab} \Big|_{\omega=0} \Delta_1 \omega_\nu^{cd} \Big|_{\omega=0} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Expandindo a Lagrangeana (4.1) em torno dos campos de fundo, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta_\mu^a + \epsilon \tilde{e}_\mu^a; \epsilon \tilde{\omega}_\mu^{ab}) &= \mathcal{L}(e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}) \Big|_{e=\delta, \omega=0} + \epsilon \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\mu^a + \\ & + \epsilon \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_\mu^{ab} + \frac{\epsilon^2}{2} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta e_\nu^b} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\mu^a \tilde{e}_\nu^b + \epsilon^2 \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta \omega_\nu^{cd}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\mu^a \tilde{\omega}_\nu^{cd} \\ & + \frac{\epsilon^2}{2} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta \omega_\nu^{cd}} \right|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_\mu^{ab} \tilde{\omega}_\nu^{cd}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Observando os vínculos que a Lagrangeana deve satisfazer ao nível não linear para que seja invariante por difeomorfismos ou Lorentz local, (4.16) e (4.17), notamos que a Lagrangeana linearizada (4.18) tem potencial para possuir uma simetria de calibre pela seguinte transformação dos campos:

$$\tilde{e}'_\mu{}^a(x) = \tilde{e}_\mu^a(x) + \Delta_1 e_\mu^a \Big|_{e=\delta}, \quad (4.19a)$$

$$\tilde{\omega}'_\mu{}^{ab}(x) = \tilde{\omega}_\mu^{ab}(x) + \Delta_1 \omega_\mu^{ab} \Big|_{\omega=0}. \quad (4.19b)$$

O efeito dessa transformação em (4.18) é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{lin}(\tilde{e}'_\mu{}^a; \tilde{\omega}'_\mu{}^{ab}) &= \mathcal{L}_{lin}(\tilde{e}_\mu{}^a; \tilde{\omega}_\mu{}^{ab}) + \epsilon \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 \omega_\mu^{ab} \right) + \\
&+ \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta e_\nu^b} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a \tilde{e}_\nu^b + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta e_\nu^b} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\mu^a \Delta_1 e_\nu^b + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta e_\nu^b} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a \Delta_1 e_\nu^b \right) \\
&+ \epsilon^2 \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a \tilde{\omega}_\nu^{cd} + \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\mu^a \Delta_1 \omega_\nu^{cd} \right) \\
&+ \epsilon^2 \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 e_\mu^a \Delta_1 \omega_\nu^{cd} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 \omega_\mu^{ab} \tilde{\omega}_\nu^{cd} + \right) \\
&+ \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_\mu^{ab} \Delta_1 \omega_\nu^{cd} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \Delta_1 \omega_\mu^{ab} \Delta_1 \omega_\nu^{cd} \right). \quad (4.20)
\end{aligned}$$

O termo proporcional à ϵ se anula devido à (4.16). O termo proporcional à ϵ^2 também se anula se os termos com apenas uma derivada funcional em relação aos campos em (4.17) forem nulos identicamente. Dessa forma, concluímos que a expansão (4.18) deve ser feita em torno de uma solução clássica do modelo Lagrangeano se quisermos que as simetrias da Lagrangeana não linear se repercutam no modelo linearizado. Supondo que esse seja o caso na expansão (4.18), obtemos a Lagrangeana linearizada à seguir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\tilde{e}_\mu{}^a; \tilde{\omega}_\mu{}^{ab}) &= \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta e_\nu^b} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\mu^a \tilde{e}_\nu^b + \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta e_\mu^a \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{e}_\mu^a \tilde{\omega}_\nu^{cd} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \omega_\mu^{ab} \delta \omega_\nu^{cd}} \Big|_{e=\delta, \omega=0} \tilde{\omega}_\mu^{ab} \tilde{\omega}_\nu^{cd}, \quad (4.21)
\end{aligned}$$

onde desprezamos o termo constante em (4.18), uma vez que este não afeta a dinâmica dos campos. Esta Lagrangeana possui as simetrias de calibre (4.19a) e (4.19b). Nos modelos específicos que discutiremos à seguir, adotaremos a postura de definir o modelo a ser quantizado pela Lagrangeana expandida em torno de campos que são soluções das equações de Euler-Lagrange, uma vez que pensamos ser esta a maneira correta de definir o modelo linearizado que preserve características fundamentais do modelo não-linear, como as simetrias. Sabemos, portanto, de antemão que trabalharemos com modelos com simetria de calibre e, nesse caso devemos usar o formalismo desenvolvido na seção (3.3) para analisarmos os propagadores dos modelos.

Capítulo 5

Grávitons Massivos

Tendo em vista a motivação que demos na Introdução sobre a consideração de modelos que propaguem grávitons massivos, consideraremos nesse capítulo o problema da geração de massa para o gráviton devido à termos de torção explícitos na Lagrangeana. Nossa motivação provém de um trabalho recente [19], onde os autores mostraram que uma ação particular com termos de R^2 , sem torção, é equivalente à gravitação massiva de Pauli-Fierz ao nível linear, como foi proposto em outros trabalhos [21]-[20]; além do mais, eles também descreveram como, somente em três dimensões, não há partículas fantasmas, de tal modo que o modelo preserva unitariedade. De fato, a questão da unitariedade nas teorias de gravitação massiva é um tópico de muita relevância na literatura [8], [19]-[23].

Especificamente, nós investigaremos se é possível uma generalização dos resultados de [19], ao considerarmos torção propagando-se em uma dimensão arbitrária. Consideraremos a vielbein e a conexão de spin como campos independentes. Nosso ponto de vista é que esta é uma descrição mais fundamental para a gravitação, uma vez que é baseada nas idéias fundamentais da descrição de Yang-Mills [24]-[25]. Como deve ficar claro na sequência, nós concluiremos que termos explícitos do campo de torção são necessários para descrever um gráviton massivo. Nós analisamos também a unitariedade do modelo, e para isso nós consideramos a Lagrangeana mais geral que preserva paridade sem termos com derivadas superiores em D dimensões. Nós obtemos um certo número de Lagrangeanas unitárias que propagam um gráviton massivo e as comparamos, quando restringimos para $D = 4$, com aquelas encontradas por Sezgin e Nieuwenhuizen [15]. Como nós consideramos apenas termos quadráticos na curvatura e torção na Lagrangeana, devido ao teorema de Gauss-Bonet, há um termo redundante entre as possibilidades para $D = 4$. Mas, para $D \neq 4$, este termo deve ser considerado, uma vez que o teorema de Gauss-Bonet não envolve termos quadráticos para $D \neq 4$. Então, estruturalmente, esta é diferença importante das Lagrangeanas consideradas em [15]. O resultado é que nós encontramos um conjunto de Lagrangeanas com um gráviton massivo que, no caso particular de $D = 4$, são reduzidas àquelas estudadas em [15]. Contudo, nós devemos mencionar que nós não temos nenhuma intenção de reproduzir todos os resultados de [15], onde há uma análise completa e exaustiva. Nós realizamos nossa discussão em D dimensões e, para $D = 4$, nós devemos apontar os casos que correspondem à intersecções com as situações contempladas em

[15].

5.1 Descrição do Modelo

Para investigar as mudanças que ocorrem quando a torção se propaga, nós iniciamos considerando a mesma Lagrangeana analisada por Nakasone e Oda na Ref. [19], com a diferença que nós consideramos aqui o sinal correto para o termo de EH. Nos modelos das Refs. [19] e [21] o sinal oposto é essencial para a redução da Lagrangeana ao modelo de Pauli-Fierz. Entretanto, como mostrado em [19], esta redução é possível somente em três dimensões. Isto pode ser visto notando que, em 3 dimensões, a Lagrangeana de EH não possui modos propagantes, ao passo que em dimensões maiores que três ela propaga um modo não massivo unitariamente. Com o sinal “errado”, o modelo apresenta necessariamente partículas fantasmas em seu espectro. Portanto, nosso ponto de partida é a Lagrangeana abaixo:

$$\mathcal{L}_R = e \left(-\frac{1}{\kappa^2} R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu a} R^{\mu a} + \gamma (R_{\mu\nu ab} R^{\mu\nu ab} - 4R_{\mu a} R^{\mu a} + R^2) \right), \quad (5.1)$$

onde α , β e γ são constantes adimensionais e e é o determinante da vielbein. No trabalho da Ref. [19], seus valores são dados por:

$$\alpha = -\frac{D}{4-D}\beta, \quad \gamma = 0. \quad (5.2)$$

Nós não adotamos estas escolhas aqui, porque agora a Lagrangeana (5.1) contém R , $R_{\mu a}$ e $R_{\mu\nu ab}$ com a vielbein, e_μ^a , e a conexão de spin, ω_μ^{ab} , tomados como campos independentes. Nós devemos analisar se a Lagrangeana (5.1) resulta numa teoria quântica consistente no que concerne a unitariedade e causalidade. Nossas convenções são

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^{cb} - \mu \longleftrightarrow \nu, \quad (5.3a)$$

$$R_\mu{}^a = e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad (5.3b)$$

$$R = e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad (5.3c)$$

$$\eta_{ab} = (1, -1, -1, -1), \quad (5.3d)$$

onde os índices Gregos se referem à variedade mundo e os Latinos à variedade tangente. No que segue, nós devemos considerar flutuações dos campos fundamentais para definirmos a teoria quântica:

$$e_\mu^a = \delta_\mu^a + \tilde{e}_\mu^a, \quad (5.4a)$$

$$\omega_\mu^{ab} = \tilde{\omega}_\mu^{ab}. \quad (5.4b)$$

Nós também definimos os campos ϕ e χ :

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2} (\tilde{e}_{ab} + \tilde{e}_{ba}), \quad (5.5a)$$

$$\chi_{ab} = \frac{1}{2} (\tilde{e}_{ab} - \tilde{e}_{ba}), \quad (5.5b)$$

onde estamos usando indistintamente índices gregos e latinos na flutuação dos campos. Isso se justifica devido ao fato de estarmos fazendo a expansão em torno da solução de espaço plano. Dessa maneira, a diferença entre os campos com índices gregos e latinos são de ordem superior na expansão perturbativa das flutuações.

A Lagrangeana, até termos de segunda ordem nas flutuações quânticas, pode ser escrita como

$$(\mathcal{L}_R)_2 = \sum_{\alpha,\beta} \Psi_\alpha \mathcal{O}_{\alpha\beta} \Psi_\beta, \quad (5.6)$$

onde Ψ_α carrega as 40 componentes dos campos (5.4b) e (5.5a)-(5.5b). Para investigar o espectro do nosso modelo, nós trabalhamos com um conjunto completo de operadores de projeção de spin para um modelo com conservação de paridade e que descreve um tensor de rank-3 antissimétrico em dois índices e um tensor de rank-2. Com a ajuda destes projetores, dados no Apêndice A, nós podemos escrever a parte bilinear da Lagrangeana como:

$$(\mathcal{L}_R)_2 = \sum_{\alpha,\beta,i,j,\psi,\lambda,J^P} \psi_\alpha a_{ij}^{\psi\lambda} (J^P) P_{ij}^{\psi\lambda} (J^P)_{\alpha\beta} \lambda_\beta, \quad (5.7)$$

com ψ e λ , sendo os campos componentes (5.4b) e (5.5a)-(5.5b). As matrizes dos coeficientes $a_{ij} (J^P)$, representando a contribuição do spin (J) e paridade (P), são dadas por:

$$a(2^+) = \begin{matrix} & \omega & \phi \\ \omega & \left(-\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{2}\beta p^2 & i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2}} \right) \\ \phi & \left(i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2}} & 0 \right) \end{matrix}; \quad (5.8)$$

$$a(2^-) = -\frac{1}{2\kappa^2} + 2\gamma p^2; \quad (5.9)$$

$$a(1^+) = \begin{matrix} & \omega & \omega & \chi \\ \omega & \left(-\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{2}\beta p^2 & -\frac{1}{\sqrt{2\kappa^2}} & i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2}} \right) \\ \omega & \left(-\frac{1}{\sqrt{2\kappa^2}} & 0 & 0 \right) \\ \chi & \left(i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2}} & 0 & 0 \right) \end{matrix}; \quad (5.10)$$

$$a(1^-) = \begin{matrix} & \omega & \omega & \phi & \chi \\ \omega & \left(\frac{(D-2)}{2}\beta p^2 + (D-3)\frac{1}{2\kappa^2} - 2(D-3)\gamma p^2 & -\frac{(D-2)^{1/2}}{2}\frac{1}{\kappa^2} & -\frac{1}{2\kappa^2}i\sqrt{p^2}(D-2)^{1/2} & -\frac{1}{2\kappa^2}i\sqrt{p^2}(D-2)^{1/2} \right) \\ \omega & \left(-\frac{(D-2)^{1/2}}{2}\frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 \right) \\ \phi & \left(\frac{1}{2\kappa^2}i\sqrt{p^2}(D-2)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \right) \\ \chi & \left(\frac{1}{2\kappa^2}i\sqrt{p^2}(D-2)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \right) \end{matrix}; \quad (5.11)$$

$$a(0^+) = \begin{matrix} \omega \\ \phi \\ \phi \end{matrix} \begin{pmatrix} \omega & \phi & \phi \\ \frac{D}{2}\beta p^2 - \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{D}{2}\right) + 2(D-1)\alpha p^2 & -i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)}{\sqrt{2}\kappa^2} & 0 \\ i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)}{\sqrt{2}\kappa^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.12)$$

$$a(0^-) = \frac{1}{\kappa^2} + 2\gamma p^2. \quad (5.13)$$

Explicitamos acima e ao lado esquerdo de cada matriz o índice referente aos campos para ficar clara a contribuição de cada coeficiente das matrizes para os propagadores dos respectivos campos.

Como pode ser visto prontamente, as matrizes para os spins $J = (1^\pm, 0^+)$ são degeneradas; isto reflete o fato de que há algumas invariâncias locais em nossa Lagrangeana. Nós já esperávamos por isto, conforme discutido no Capítulo (4). Dessa maneira, para obtermos os propagadores saturados com as fontes, (3.50), devemos considerar as submatrizes não degeneradas e os vínculos satisfeitos pelas fontes. No presente caso, os vínculos satisfeitos pelas fontes expressam o fato de elas serem conservadas:

$$\partial_a \tau^{abc} \equiv \partial_a \Sigma^{(ab)} \equiv \partial_a \Sigma^{[ab]} = 0, \quad (5.14)$$

onde τ^{abc} , $\Sigma^{(ab)}$ e $\Sigma^{[ab]}$ são as fontes para os campos ω , ϕ e χ , respectivamente.

As submatrizes não degeneradas são dadas por:

$$a_{ij}(2^+) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\beta p^2 & i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2}\kappa^2} \\ -i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2}\kappa^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$b_{ij}(1^+) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\beta p^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\kappa^2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\kappa^2} & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.16)$$

$$b_{ij}(1^-) = \begin{pmatrix} \frac{(D-2)}{2}\beta p^2 + \frac{D-3}{2\kappa^2} & -\frac{(D-2)^{1/2}}{2} \frac{1}{\kappa^2} \\ -2(D-3)\gamma p^2 & 0 \\ -\frac{(D-2)^{1/2}}{2} \frac{1}{\kappa^2} & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.17)$$

$$b_{ij}(0^+) = \begin{pmatrix} \frac{D}{2}\beta p^2 - \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{D}{2}\right) + 2(D-1)\alpha p^2 & -i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)}{\sqrt{2}\kappa^2} \\ i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)}{\sqrt{2}\kappa^2} & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.18)$$

$$a(2^-) = -\frac{1}{2\kappa^2} + 2\gamma p^2; \quad (5.19)$$

$$a(0^-) = \frac{1}{\kappa^2} + 2\gamma p^2. \quad (5.20)$$

Suas respectivas inversas são listadas na sequência:

$$a_{ij}^{-1}(2^+) = -\frac{2\kappa^4}{p^2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{p^2}\frac{1}{\sqrt{2}\kappa^2} \\ i\sqrt{p^2}\frac{1}{\sqrt{2}\kappa^2} & -\frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\beta p^2 \end{pmatrix}; \quad (5.21)$$

$$b^{-1}(1^+) = -2\kappa^4 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\kappa^2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\kappa^2} & \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\beta p^2 \end{pmatrix}; \quad (5.22)$$

$$b_{ij}^{-1}(1^-) = -\frac{4\kappa^4}{(D-2)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{(D-2)^{1/2}}{2}\frac{1}{\kappa^2} \\ \frac{(D-2)^{1/2}}{2}\frac{1}{\kappa^2} & \frac{(D-2)}{2}\beta p^2 + \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{D-3}{2}\right) - 2(D-3)\gamma p^2 \end{pmatrix}; \quad (5.23)$$

$$b_{ij}^{-1}(0^+) = -\frac{2\kappa^4}{(D-2)^2 p^2} \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{p^2}\frac{(D-2)}{\sqrt{2}\kappa^2} \\ -i\sqrt{p^2}\frac{(D-2)}{\sqrt{2}\kappa^2} & \frac{D}{2}\beta p^2 - \frac{1}{\kappa^2}\left(1 - \frac{D}{2}\right) + 2(D-1)\alpha p^2 \end{pmatrix}; \quad (5.24)$$

$$a^{-1}(2^-) = \frac{1}{2\gamma\left(p^2 - \frac{1}{4\gamma\kappa^2}\right)}; \quad (5.25)$$

$$a^{-1}(0^-) = \frac{1}{2\gamma\left(p^2 + \frac{1}{2\gamma\kappa^2}\right)}. \quad (5.26)$$

Podemos ver imediatamente que há dois polos não massivos nos setores 2^+ e 0^+ e dois polos massivos nos setores 2^- e 0^- . Estes resultados apontam uma diferença notável com respeito àqueles apresentados na Ref. [19], devido ao fato de não termos a propagação de um spin-2 massivo para a vielbein; então, nós não esperamos a presença de um gráviton massivo em nenhuma dimensão. Na verdade, como será mostrado na discussão que segue, se nós impusermos unitariedade do modelo, este se torna trivial, no sentido de que nenhum dos modos podem se propagar .

5.2 Obtenção de Grávitons Massivos

Nossa motivação inicial era investigar o papel da propagação da torção na descrição da gravitação massiva. Desde então, nossos resultados não têm sido encorajadores no sentido de que, como visto na análise da seção anterior, não há a possibilidade da propagação de um gráviton massivo em nosso modelo inicial.

Analisando a estrutura das matrizes (5.15)-(5.20), nós podemos compreender como resolver este problema. Nos termos de curvatura, nós temos apenas contribuições para propagadores $\omega\omega$, $\omega\phi$ e $\phi\omega$. Uma vez que a estrutura das contribuições $\omega\phi$ e $\phi\omega$ são sempre da forma $\sqrt{2}\times$ (função das constantes κ , α , β e D), não esperamos que o determinante possa exibir zeros em $p^2 = m^2 \neq 0$, os quais corresponderiam à polos massivos. Sendo assim, pode-se dizer que o único modo de se obter grávitons massivos é inserir uma contribuição do tipo $\phi\phi$ nestas matrizes. No entanto, isto só é possível se introduzirmos termos explícitos de torção na nossa Lagrangeana.

Dentre todos os possíveis termos quadráticos que podemos formar com a torção, as contribuições independentes são: $T_{ab}{}^c T^{ab}{}_c$, $T_{ab}{}^b T^{ac}{}_c$, $T_{abc} T^{bca}$. Numa tentativa inicial, nós poderíamos tomar um caso representativo e verificar se ele realiza o trabalho que temos em mente, à saber, introduzir um polo massivo. Contudo, como desejamos encontrar possíveis Lagrangeanas unitárias que descrevem grávitons massivos, nós deixamos de lado nosso modelo inicial e consideramos a Lagrangeana mais geral que conserva paridade, sem derivadas superiores, que é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\lambda R + \xi R^2 + (s+t) R_{ab} R^{ab} + (s-t) R_{ab} R^{ba} + \frac{1}{6} (2d+q) R_{abcd} R^{abcd} \\ & + \frac{1}{6} (2d+q-6r) R_{abcd} R^{cdab} + \frac{2}{3} (d-q) R_{abcd} R^{acbd} + \frac{1}{12} (4u+v+3\lambda) T_{abc} T^{abc} \\ & + \frac{1}{6} (-2u+v-3\lambda) T_{abc} T^{bca} + \frac{1}{D-1} (-u+2w-(D-1)\lambda) T_{ab}{}^b T^{ac}{}_c. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Os fatores constantes são escolhidos deste modo confuso para simplificar a análise das condições para unitariedade. Linearizando \mathcal{L} e usando os resultados do Apêndice A, podemos escrever \mathcal{L}_2 em termos dos operadores de spin. A Lagrangeana linearizada total pode ser escrita novamente como

$$(\mathcal{L})_2 = \sum_{\alpha,\beta,i,j,J^P} \psi_\alpha a_{ij}^{\psi\lambda} (J^P) P_{ij}^{\psi\lambda} (J^P)_{\alpha\beta} \lambda_\beta. \quad (5.28)$$

Mas agora, as matrizes de coeficientes são dadas por

$$a(0^+) = \begin{pmatrix} [Ds + 2d - 2r + 2(D-1)\xi] p^2 + w & -i\sqrt{2}\sqrt{p^2}w & 0 \\ i\sqrt{2}\sqrt{p^2}w & 2[w - (\frac{D-2}{2}\lambda)] p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.29)$$

$$a(1^-) = \begin{pmatrix} \left[\frac{(D-2)}{2} (s+t) + d \right] p^2 & -\frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) & -i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) & -i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) \\ -\frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) & \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] & i\sqrt{p^2} \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] & i\sqrt{p^2} \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] \\ i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) & -i\sqrt{p^2} \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] & p^2 \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] & p^2 \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] \\ i\sqrt{p^2} \frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) & -i\sqrt{p^2} \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] & p^2 \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] & p^2 \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] \end{pmatrix}; \quad (5.30)$$

$$a(2^+) = \begin{pmatrix} [s + 2d - 2r] p^2 + \frac{u}{2} & -i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2}} u \\ i\sqrt{p^2} \frac{1}{\sqrt{2}} u & (u + \lambda) p^2 \end{pmatrix}; \quad (5.31)$$

$$a(2^-) = dp^2 + \frac{u}{2}; \quad (5.32)$$

$$a(1^+) = \begin{pmatrix} (t-2r)p^2 + \left(\frac{u+4v}{6}\right) & -\frac{(2v-u)}{3\sqrt{2}} & -i\sqrt{p^2}\frac{(2v-u)}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{(2v-u)}{3\sqrt{2}} & \frac{(u+v)}{3} & i\sqrt{p^2}\frac{(u+v)}{3} \\ i\sqrt{p^2}\frac{(2v-u)}{3\sqrt{2}} & -i\sqrt{p^2}\frac{(u+v)}{3} & \frac{(u+v)}{3}p^2 \end{pmatrix}; \quad (5.33)$$

$$a(0^-) = qp^2 + v. \quad (5.34)$$

Novamente há degenerescências e, para a obtenção do propagador saturado, devemos extrair as submatrizes não degeneradas. As inversas dessas matrizes são dadas abaixo:

$$a^{-1}(2^+) = p^{-2} \left[(s+2d-2r)(u+\lambda)p^2 + \frac{u}{2}\lambda \right]^{-1} \begin{pmatrix} (u+\lambda)p^2 & i\sqrt{p^2}\frac{1}{\sqrt{2}}u \\ -i\sqrt{p^2}\frac{1}{\sqrt{2}}u & [s+2d-2r]p^2 + \frac{u}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

$$a^{-1}(0^-) = (qp^2 + v)^{-1}, \quad (5.36)$$

$$a^{-1}(2^-) = \left(dp^2 + \frac{u}{2} \right)^{-1}, \quad (5.37)$$

$$b^{-1}(1^+) = \left[\frac{1}{3}(t-2r)(u+v)p^2 + \frac{uv}{2} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{(u+v)}{3} & \frac{(2v-u)}{3\sqrt{2}} \\ \frac{(2v-u)}{3\sqrt{2}} & (t-2r)p^2 + \left(\frac{u+4v}{6}\right) \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

$$b^{-1}(1^-) = \left\{ \frac{1}{D-1} \left[\frac{(D-2)}{2}(s+t) + p \right] \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] p^2 + \frac{wu}{2} \right\}^{-1} \times \quad (5.39)$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{D-1} \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] & \frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) \\ \frac{(D-2)^{1/2}}{2} \left(\frac{2w-u}{D-1} \right) & \left[\frac{(D-2)}{2}(s+t) + p \right] p^2 + \frac{2(D-2)wu}{2(D-1)} \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

$$b^{-1}(0^+) = p^{-2} \left[\frac{1}{2} [Ds + 2d - 2r + 2(D-1)\xi] \left[w - \frac{D-2}{2}\lambda \right] p^2 - w(D-2)\lambda \right]^{-1} \quad (5.41)$$

$$\times \begin{pmatrix} 2 \left[w - \frac{D-2}{2}\lambda \right] p^2 & i\sqrt{2}\sqrt{p^2}w \\ -i\sqrt{2}\sqrt{p^2}w & [Ds + 2d - 2r + 2(D-1)\xi] p^2 + w \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Podemos agora ver que nossas chances de descrever um gráviton massivo aumentaram. Ao mesmo tempo, a introdução dos novos termos deram dinâmica aos outros setores de spin. Dessa maneira, aparentemente, poderíamos obter uma Lagrangeana análoga a Pauli-Fierz, ou seja, com apenas uma partícula de spin-2 massiva se propagando, se inibirmos a propagação dos modos extras, impondo relações entre os parâmetros da Lagrangeana de tal forma que estes polos se anulem. Entretanto, deve-se tomar o cuidado de se verificar se tais condições possuem uma intersecção não nula com aquelas associadas à unitariedade do modelo. Tais relações, por sua vez, são dadas ao

aplicarmos a condição de positividade do resíduo dos propagadores obtidos de (3.50). Os zeros dos determinantes das submatrizes não degeneradas são os polos das matrizes (5.35)-(5.42). Portanto, quando analisadas nos polos, essas matrizes são também degeneradas e, sendo assim, possuem apenas um autovalor não nulo. Além disso, como os blocos formadores dos operadores de spin, θ e ω , tomam respectivamente valor $+1$ ou -1 nos polos massivos, os próprios operadores de spin tomam esses mesmos valores quando avaliados nos polos massivos. Dessa maneira, a positividade da forma quadrática (3.50) é assegurada se a seguinte condição é satisfeita:

$$(-1)^P \text{tr} A (J^P) |_{p^2=m^2} > 0, \quad (5.43)$$

com P sendo a paridade do operador e as matrizes $A (J^P)$ sendo quaisquer uma das matrizes (5.35)-(5.42) com o polo analisado extraído. Se aplicarmos essa condição às matrizes (5.35)-(5.42), juntamente com a imposição da positividade das massas (ausência de táquions)

$$p^2 = m^2 > 0, \quad (5.44)$$

obtemos as seguintes condições, para cada spin independentemente, sobre os parâmetros da Lagrangeana (5.27):

$$\mathbf{2}^+ : \quad 2d - 2r + s > 0; \quad u\lambda (u + \lambda) < 0. \quad (5.45)$$

$$\mathbf{2}^- : \quad d < 0; \quad u > 0. \quad (5.46)$$

$$\mathbf{1}^+ : \quad 2r + t > 0; \quad uv (u + v) < 0. \quad (5.47)$$

$$\mathbf{1}^- : \quad \left[\frac{(D-2)}{2} (s+t) + d \right] < 0; \quad wu \left[w + u \left(\frac{D-2}{2} \right) \right] > 0. \quad (5.48)$$

$$\mathbf{0}^+ : \quad [Ds + 2d - 2r + 2(D-1)\xi] > 0; \quad w\lambda \left[w - \left(\frac{D-2}{2} \right) \lambda \right] > 0. \quad (5.49)$$

$$\mathbf{0}^- : \quad q < 0; \quad v > 0. \quad (5.50)$$

Para o caso de polos não massivos, a análise requer um cuidado extra, isto porque aparecem novas singularidades, vindas dos próprios operadores de spin, quando avaliados no polo $p^2 = 0$. Por esta razão, nós procederemos de uma forma um pouco diferente para obtermos a condição de unitariedade para estes modos.

Devido às singularidades dos operadores de spin, mesmo as matrizes com polos massivos podem contribuir para o resíduo dos polos não massivos. As singularidades p^{-6} e p^{-4} acabam se cancelando quando usamos os vínculos satisfeitos pelas fontes. Também pode ser mostrado que dentre todas as singularidades p^{-2} , somente aquelas associadas com o termo de Einstein-Hilbert sobrevive. O resultado final para o resíduo do polo não massivo é dado por

$$\text{Im Res} (\Pi)_{p^2=0} = \frac{\lambda^{-1}}{p^2} \begin{pmatrix} \tau^{ab*} & \Sigma^{ab*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \times \left[P(2^+, \eta) - \frac{1}{D-2} P(0^+, \eta) \right] \times \begin{pmatrix} \tau^{cd} \\ \Sigma^{cd} \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Como a matriz que aparece nesta equação é hermitiana, ela pode ser diagonalizada por uma transformação unitária conveniente. Realizando esta mudança de variáveis, podemos reescrever esta expressão como

$$\text{Im Res } (\Pi)_{p^2=0} = 5 \frac{\lambda^{-1}}{p^2} \left(\tilde{\tau}^{(ab)*} \tilde{\tau}_{(ab)} - \frac{1}{D-2} \tilde{\tau}_a^{a*} \tilde{\tau}_b^b \right). \quad (5.52)$$

Além disso, escolhendo uma base conveniente no espaço de Minkowski D-dimensional, podemos expandir as fontes $\tau^{(ab)}$:

$$\tau^{(ab)} = c_1 p^a p^b + c_{2\alpha} (p^b \epsilon^{a\alpha} + p^a \epsilon^{b\alpha}) + c_{3\alpha\beta} (\epsilon^{a\alpha} \epsilon^{b\beta}), \quad (5.53)$$

onde

$$p^a = (p_0, \vec{p}), \quad (5.54a)$$

$$q^a = (p_0, -\vec{p}), \quad (5.54b)$$

$$\alpha = 1, \dots, D-2, \quad (5.54c)$$

e

$$p^2 = q^2 = 0, \quad (5.55a)$$

$$p \cdot q = (p_0)^2 + (\vec{p})^2 \neq 0, \quad (5.55b)$$

$$p \cdot \epsilon_\alpha = q \cdot \epsilon_\alpha = 0, \quad (5.55c)$$

$$\epsilon_\alpha \cdot \epsilon_\beta = -\delta_{\alpha\beta}. \quad (5.55d)$$

Estes vetores expandem o espaço de Minkowski D-dimensional. Usando (5.53) em (5.52), obtemos:

$$\text{Im Res } (\Pi)_{p^2=0} = 5 \frac{\lambda^{-1}}{p^2} \left(c_{3\alpha\beta}^* c_3^{\alpha\beta} - \frac{1}{D-2} c_{3\alpha}^{a*} c_{3\beta}^b \right). \quad (5.56)$$

Vamos renomear os $(D-2)$ c_3 's por c_i , com $i = 1, \dots, D-2 = N$. Então, esta expressão pode ser escrita como

$$\text{Im Res } (\Pi)_{p^2=0} = 5 \frac{\lambda^{-1}}{p^2} \sum_{i>j=1}^N \frac{1}{N} (|c_i|^2 + |c_j|^2 - (c_i^* c_j + c_j^* c_i)). \quad (5.57)$$

Esta expressão se anula para $D = 3$ ($N = 1$) e é positivo-definida para $D > 3$ ($N > 1$) se a condição $\lambda = \frac{1}{\kappa^2} > 0$ é escolhida. Além disso, uma vez que a matriz que aparece em (5.51) é degenerada, há apenas um modo propagante.

Podemos também analisar o espectro do modelo inicial (5.1). Comparando esta Lagrangeana com aquela definida em (5.27), vemos que ambas coincidem se fizermos a identificação:

$$\lambda = \frac{1}{\kappa^2}; \quad \beta - 4\gamma = s + t; \quad \alpha + \gamma = \xi; \quad \gamma = \frac{d}{2} = \frac{q}{2} = r; \quad u = -v = -\lambda; \quad \frac{D-2}{2}u + w = 0. \quad (5.58)$$

Pode-se ver, das matrizes (5.15)-(5.20), que estas relações confirmam nossa afirmação de que o modelo (5.1) possui polos massivos apenas nos setores 2^- e 0^- . Além disso, a relação $u = -v$ é incompatível com as condições para a unitariedade desses polos, dadas em (5.46) e (5.50). Portanto, o modelo inicial não possui modos massivos para $D = 3$ e possui apenas um gráviton sem massa para $D > 3$.

Devemos agora procurar por possíveis Lagrangeanas unitárias que resultam das possíveis intersecções das condições (5.45)-(5.50). Entretanto, há um claro conflito entre estas condições. Como pode ser verificado, as condições para o setor 2^- requerem que $u > 0$, ao passo que as condições para o setor 2^+ impõem que $u < 0$. Sendo assim, para valores arbitrários dos parâmetros na Lagrangeana (5.27), temos um modelo não unitário. Para obtermos unitariedade para um gráviton massivo propagante, devemos assumir que alguns modos não se propagam. Ao se fazer isso, as condições relacionadas à esses modos não precisam ser satisfeitas. As condições para a não propagação de um modo podem ser lidas diretamente das matrizes (5.35)-(5.40). Elas são obtidas requerendo a ausência do polo associado ao modo em questão. Na sequência, apresentamos as condições que devem ser satisfeitas para obtermos um modelo unitário com um gráviton massivo propagante:

$$\text{i) } d = 0; \quad 2r + t < 0; \quad s = -t; \quad u = -v; \quad \frac{1}{\kappa^2} > v > 0; \quad q < 0; \quad w \left(w - \frac{D-2}{2\kappa^2} \right) > 0.$$

Estas condições correspondem à seguinte Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{\kappa^2}R + \xi R^2 - 2tR_{ab}R^{ba} + \frac{1}{6}qR_{abcd}R^{abcd} + \frac{1}{6}(q - 6r)R_{abcd}R^{cdab} \\ & - \frac{2}{3}qR_{abcd}R^{acbd} + \frac{1}{4}\left(-v + \frac{1}{\kappa^2}\right)(T_{abc}T^{abc} - 2T_{abc}T^{bca}) \\ & + \frac{1}{D-1}\left(v + 2w - \frac{(D-1)}{\kappa^2}\right)T_{ab}{}^bT^{ac}{}_c, \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde os parâmetros satisfazem as condições do item i. Os modos que se propagam são: spin- 2^+ não massivo (para $D \geq 4$), e modos de spin- 2^+ , spin- 0^+ e spin- 0^- massivos. Há vários casos particulares de (5.59) correspondendo à inibição da propagação dos modos 0^+ e 0^- .

$$\text{ii) } d = 0; \quad -2r + s > 0; \quad t = -2r; \quad w = -u \left(\frac{D-2}{2} \right); \quad -\frac{1}{\kappa^2} < u < 0; \quad Ds - 2r + 2(D-1)\xi = 0; \quad q < 0; \quad v > 0.$$

Com estes parâmetros, temos a segunda Lagrangeana unitária:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{\kappa^2}R + \frac{2r - Ds}{2(D-1)}R^2 + (s - 2r)R_{ab}R^{ab} + (s + 2r)R_{ab}R^{ba} + \frac{1}{6}qR_{abcd}R^{abcd} \\ & + \frac{1}{6}(q - 6r)R_{abcd}R^{cdab} - \frac{2}{3}qR_{abcd}R^{acbd} + \frac{1}{12}\left(4u + v + \frac{3}{\kappa^2}\right)T_{abc}T^{abc} \\ & + \frac{1}{6}\left(-2u + v - \frac{3}{\kappa^2}\right)T_{abc}T^{bca} - \left(u + \frac{1}{\kappa^2}\right)T_{ab}{}^bT^{ac}{}_c. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Além do gráviton massivo, este modelo carrega o gráviton sem massa (para $D \geq 4$) e uma partícula massiva de spin-0⁻.

$$\text{iii) } d = 0; \quad -2r + s > 0; \quad u = -v; \quad s + t < 0; \quad 2r + t < 0; \quad w \left(w - v \left(\frac{D-2}{2} \right) \right) < 0; \quad \frac{1}{\kappa^2} > v > 0; \quad q < 0; \quad Ds - 2r + 2(D-1)\xi = 0.$$

A Lagrangeana associada é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\lambda R + \frac{2r - Ds}{2(D-1)} R^2 + (s+t) R_{ab} R^{ab} \frac{1}{6} q R_{abcd} R^{abcd} + \frac{1}{2} \left(v - \frac{1}{\kappa^2} \right) T_{abc} T^{bca} \\ & + \frac{1}{6} (q - 6r) R_{abcd} R^{cdab} - \frac{2}{3} q R_{abcd} R^{acbd} + \frac{1}{4} \left(-v + \frac{1}{\kappa^2} \right) T_{abc} T^{abc} + (s-t) R_{ab} R^{ba} \\ & + \frac{1}{D-1} \left(v + 2w - \frac{(D-1)}{\kappa^2} \right) T_{ab}{}^b T^{ac}{}_c. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Este modelo propaga os grávitons massivo e sem massa (para $D \geq 4$), juntamente com partículas massivas de spin-1⁻ e spin-0⁻.

$$\text{iv) } d = 0; \quad 2r + t > 0; \quad -2r + s > 0; \quad w = -u \left(\frac{D-2}{2} \right); \quad -\frac{1}{\kappa^2} < u < 0; \quad \xi = \frac{2r - Ds}{2(D-1)}; \quad q < 0; \quad v > 0; \quad u > -v.$$

Estas condições esgotam nossas possibilidades de descrever um gráviton massivo de maneira unitária. A Lagrangeana associada é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\lambda R + \frac{2r - Ds}{2(D-1)} R^2 + (s+t) R_{ab} R^{ab} - \left(u - \frac{1}{\kappa^2} \right) T_{ab}{}^b T^{ac}{}_c + \frac{1}{6} q R_{abcd} R^{abcd} \\ & + \frac{1}{6} (q - 6r) R_{abcd} R^{cdab} - \frac{2}{3} q R_{abcd} R^{acbd} + \frac{1}{12} \left(4u + v + \frac{3}{\kappa^2} \right) T_{abc} T^{abc} \\ & + \frac{1}{6} \left(-2u + v - \frac{3}{\kappa^2} \right) T_{abc} T^{bca} + (s-t) R_{ab} R^{ba}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Além dos grávitons massivo e sem massa (para $D \geq 4$), há partículas dinâmicas massivas de spin-1⁺ e spin-0⁻. Como mencionamos na Introdução, há um considerável interesse em Gravitação em $D = 3$. Dessa maneira, é conveniente enfatizar que nossos resultados são válidos para esta dimensão também. Com a ressalva de que nesta dimensão não há nenhuma partícula sem massa de spin-2⁺ se propagando, os outros aspectos analisados são essencialmente os mesmos. Para compararmos nossos resultados com aqueles apresentados em Ref. [15], nós investigamos estas condições para $D = 4$. Neste caso, temos as seguintes Lagrangeanas unitárias:

$$\text{i) } \mathcal{L} = -\lambda R - 2t R_{ab} R^{ba} + \frac{1}{6} q R_{abcd} R^{abcd} + \frac{1}{6} (q - 6r) R_{abcd} R^{cdab} - \frac{2}{3} q R_{abcd} R^{acbd} + \frac{1}{4} \left(-v + \frac{1}{\kappa^2} \right) (T_{abc} T^{abc} - 2T_{abc} T^{bca}) + \frac{1}{3} \left(v + 2w - \frac{3}{\kappa^2} \right) T_{ab}{}^b T^{ac}{}_c,$$

com $r < -\frac{t}{2}$; $\frac{1}{\kappa^2} > v > 0$; $q < 0$; $r < -2t$; $w(w - \frac{1}{\kappa^2}) > 0$.

$$\text{ii) } \mathcal{L} = -\lambda R - 3sR_{ab}R^{ab} + 5sR_{ab}R^{ba} + \frac{1}{6}qR_{abcd}R^{abcd} + \frac{1}{6}(q - 12s)R_{abcd}R^{cdab} - \frac{2}{3}qR_{abcd}R^{acbd} \\ + \frac{1}{12}(4u + v + \frac{3}{\kappa^2})T_{abc}T^{abc} + \frac{1}{6}(-2u + v - \frac{3}{\kappa^2})T_{abc}T^{bca} - (u + \frac{1}{\kappa^2})T_{ab}{}^bT^{ac}{}_c,$$

com $-\frac{1}{\kappa^2} < u < 0$; $q < 0$; $s < 0$; $v > 0$.

$$\text{iii) } \mathcal{L} = -\lambda R + (s + t)R_{ab}R^{ab} + (s - t)R_{ab}R^{ba} + \frac{1}{6}qR_{abcd}R^{abcd} + \frac{1}{6}(q - 12s)R_{abcd}R^{cdab} \\ - \frac{2}{3}qR_{abcd}R^{acbd} + \frac{1}{4}(-v + \frac{1}{\kappa^2})T_{abc}T^{abc} + \frac{1}{2}(v - \frac{1}{\kappa^2})T_{abc}T^{bca} + \frac{1}{3}(v + 2w - \frac{3}{\kappa^2})T_{ab}{}^bT^{ac}{}_c,$$

com $s < 0$; $s + t < 0$; $w(w - v) < 0$; $\frac{1}{\kappa^2} > v > 0$; $q < 0$.

$$\text{iv) } \mathcal{L} = -\lambda R + (s + t)R_{ab}R^{ab} + (s - t)R_{ab}R^{ba} + \frac{1}{6}qR_{abcd}R^{abcd} + \frac{1}{6}(q - 6r)R_{abcd}R^{cdab} \\ - \frac{2}{3}qR_{abcd}R^{acbd} + \frac{1}{12}(4u + v + \frac{3}{\kappa^2})T_{abc}T^{abc} + \frac{1}{6}(-2u + v - \frac{3}{\kappa^2})T_{abc}T^{bca} - (u - \frac{1}{\kappa^2})T_{ab}{}^bT^{ac}{}_c,$$

com $2r + t > 0$; $s < 0$; $-\frac{1}{\kappa^2} < u < 0$; $q < 0$; $v > 0$.

Para obtermos estes resultados, tomamos $\xi = 0$ devido à versão quadri-dimensional do teorema de Gauss-Bonnet, o qual afirma que para espaços assintoticamente planos

$$\int d^4x e (R_{\mu\nu ab}R^{\mu\nu ab} - 4R_{\mu a}R^{\mu a} + R^2) = 0 \quad (5.63)$$

e, dessa maneira, não há necessidade da presença dos três termos correspondentes nas Lagrangeanas acima. Estas condições correspondem à casos particulares daqueles listados em [15]. Portanto, todas as Lagrangeanas que descrevem um gráviton massivo de uma maneira unitária em D-dimensões são reduzidas à algum caso particular já mencionado em [15].

5.3 Conclusão

Nós começamos nossa discussão tentando generalizar os resultados de [19] para o caso de torção não trivial se propagando. Concluimos que nossa suposição inicial de simplesmente considerar a mesma forma para a Lagrangeana não é suficiente para descrever grávitons massivos, e o requerimento da unitariedade é tão severo que o modelo se torna trivial. Algumas considerações nos guiaram à conclusão de que, se nós desejarmos introduzir grávitons massivos, devemos incluir termos explícitos de torção na Lagrangeana. Além disso, como estamos interessados na análise da unitariedade, consideramos a Lagrangeana que preserva paridade mais geral em D -dimensões sem derivadas superiores, e investigamos os vínculos que deve se impor sobre os parâmetros de tal maneira a assegurar a unitariedade. Encontramos um conjunto de Lagrangeanas unitárias em D -dimensões que propagam um gráviton massivo, e verificamos que estas Lagrangeanas concordam com aquelas listadas em [15], no caso particular de $D = 4$. Mas, para $D \neq 4$, como o teorema de Gauss-Bonnet inclui produtos de mais do que dois tensores tipo-curvatura, há muitas outras condições compatíveis com os vínculos impostos pela unitariedade, uma vez que se tem o parâmetro α à disposição.

A proposta inicial foi parcialmente alcançada, uma vez que encontramos Lagrangeanas unitárias com torção propagante que descrevem no mínimo um gráviton massivo. Entretanto, o que fizemos não é propriamente uma generalização dos resultados de [19], pois lá, as Lagrangeanas linearizadas correspondem à Lagrangeana de Pauli-Fierz, a qual é intrinsicamente definida no formalismo de segunda ordem para a Gravitação. Nós poderíamos tentar definir tal modelo no caso em que a torção se propaga inibindo a propagação dos demais modos, com exceção do gráviton massivo. Contudo, estamos mais interessados em considerações que devem ser feitas para lançar alguma luz sobre modelos para grávitons massivos, quando consideramos uma proposta mais fundamental para gravitação (no sentido das teorias de calibre). A lição que tiramos é que na verdade a torção desempenha um papel crucial na discussão, confirmando resultados anteriores a que nós nos referimos na elaboração da presente tese.

Capítulo 6

Gravitação em 3D com Termos de Chern-Simons, $(\text{Curvatura})^2$ e $(\text{Torção})^2$

Em dimensões ímpares, a consideração do termo de Chern-Simons é tentadora. No caso dos campos vetoriais, este termo é conhecido por dar massa ao fóton de um modo invariante de calibre. Para gravitação planar, este termo foi primeiramente considerado por Deser, Jackiw e Templeton na Ref. [8]. De fato, a Lagrangeana de EH com o sinal errado associada ao termo de C-S propaga uma partícula massiva de spin-2 que viola paridade. Apesar do fato de o termo de C-S possuir três derivadas, foi mostrado que este modelo não possui partículas fantasmas ou acausalidades. Além disso, a presença das três derivadas sugerem que as divergências ultravioletas do modelo possam ser estabilizadas rendendo um modelo renormalizável por contagem de potências. Na verdade, isto foi mostrado explicitamente nas Refs. [26, 27, 28]. A questão da unitariedade nas extensões dessas teorias, como na incorporação de termos quadráticos na curvatura, não é uma tarefa fácil de se analisar, como discutido em [29, 30, 31, 32].

Como vimos no capítulo anterior, modelos de gravitação com torção dinâmica podem naturalmente resultar num modo de gerar massa para os grávitons. Dessa maneira, nós tomamos o ponto de vista que, um melhor entendimento de ambos, torção propagante e grávitons massivos em espaços tri-dimensionais podem ser úteis em nossa compreensão da gravitação massiva em conexão com torção dinâmica em quatro dimensões.

Em conexão com a correspondência AdS/CFT em três dimensões, gravitação quântica planar tem sido objeto de grande e renovado interesse [33]. Como mostrado na Ref. [34], a Gravitação de EH com constante cosmológica negativa possui soluções de buracos-negros e por essa razão está interessantemente relacionada às teorias de campos conformes em duas dimensões na fronteira AdS. No trabalho [35], Witten reaceessou outros aspectos relevantes da Gravitação em três dimensões. Num artigo subsequente, Li, Song and Strominger [36] propuseram um modelo de Gravitação chiral num espaço-tempo tridimensional e focaram seus esforços no estudo da Gravitação topologicamente massiva.

Uma vez que estamos convencidos da relevância da investigação dos aspectos da gravitação quântica no espaço-tempo tridimensional, poderíamos ir além e tentar entender como os graus de

liberdade associados à torção poderiam influenciar e afetar as propriedades da gravitação quântica planar, previamente contemplada na ausência de torção. Nesta discussão, estamos preocupados em realizar uma investigação nos possíveis efeitos que a torção pode induzir nos aspectos quântico-mecânicos da gravitação planar. A emergência de grávitons massivos, uma vez que torção dinâmica é permitida, é de especial interesse para nós.

Neste capítulo, estamos interessados principalmente no termo topológico de CS, mas com a modificação de que devemos permitir que a torção se propague. Isto é apelativo sempre que adotamos o formalismo de primeira ordem para gravitação, uma vez que, como mostrado em [37, 38], a conexão de spin e a vielbein podem ser combinadas de tal modo que formam uma conexão para uma verdadeira teoria de calibre. Deste modo, a intensidade de campo relacionada à esta conexão carrega ambos, o tensor de Riemann e o tensor de torção. Nosso principal objetivo é investigar o espectro e as propriedades de unitariedade da teoria de calibre topológica para gravitação no formalismo de primeira ordem. Para fazer nossa análise mais geral, adicionamos termos tipo (curvatura)² e (torção)².

Nossos resultados nos permitem discutir o papel desempenhado pelo termo de CS sobre as condições para a unitariedade e as propriedades espectrais do modelo. Nós também analisamos o caso onde o termo de CS é descartado e comparamos com os resultados obtidos no capítulo anterior, para $D = 3$, para verificar a consistência da base de operadores proposta no Capítulo (3) e dada no Apêndice B.

6.1 Descrição do Modelo

Para efeitos de generalidade, investigamos uma Lagrangeana gravitacional geral que inclui termos quadráticos na curvatura e torção além do termo de CS:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & e[(u - s)R + \frac{1}{8} \left(3(\beta + \gamma) - \frac{1}{4}\xi \right) R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu}R^{\nu\mu} + \\ & \frac{1}{8}(u + r + 2s)T_{abc}T^{abc} + \frac{1}{4}(u + r - 2s)T_{abc}T^{bca} + \frac{1}{2}(u - 2s - t)T_{ab}{}^b T^a{}_c] + d\mathcal{L}_{CS}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde r, s, t, u , são parâmetros arbitrários com dimensão de massa igual a 1, ao passo que ξ, β e γ são parâmetros com inverso da dimensão de massa e d é adimensional. Além disso, justificamos que esta combinação aparentemente não usual é uma questão de mera conveniência. De fato, em nossa análise das condições espectrais (assunto da Sec. 6.3), os parâmetros associados à densidade Lagrangeana acima se combinam de tal modo que a forma que propomos em (6.1) resulta em simplificações algébricas consideráveis, sem nenhuma perda de generalidade em nossos resultados. O termo

$$\mathcal{L}_{CS} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (R_{\alpha\beta ab} \omega_\gamma{}^{ab} + \frac{2}{3} \omega_{\alpha b}{}^c \omega_{\beta c}{}^a \omega_{\gamma a}{}^b) \quad (6.2)$$

é o conhecido termo de CS. Algumas considerações devem ser feitas. Primeiro, a ausência de termos quadráticos do tensor de Riemann é devido ao fato de que, em três dimensões, o tensor

de Riemann pode ser escrito em termos do tensor de Ricci e do escalar de curvatura. Segundo, a ausência da constante cosmológica e do termo de C-S translacional, $\epsilon^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu}{}^a e_{\lambda a}$ [39], se devem à questões mais sutis. De acordo com nossa discussão no Capítulo 4, estamos adotando a postura de expandir o campo do gráviton em torno do espaço de Minkowski. No entanto, é sabido que não há soluções planas para teorias com esses dois termos na ausência de matéria. Como uma consequência imediata, a introdução destes termos estragaria a simetria de calibre presente na versão linearizada do modelo. Terceiro, potências maiores que dois na curvatura e torção não foram consideradas com intuito de evitar derivadas superiores que usualmente são prejudiciais às propriedades de unitariedade do modelo. Finalmente, uma vez que estamos considerando o termo de C-S e portanto um modelo que viola a paridade, há a possibilidade de considerarmos termos quadráticos construídos a partir dos tensores duais da torção e do tensor de Ricci, como por exemplo, $\epsilon_{\mu}{}^{\kappa\lambda}T_{\kappa\lambda}{}^a R_{\mu a}$, $R\epsilon^{\mu\nu\kappa}T_{\mu\nu\kappa}$, $\epsilon_{\mu\nu}{}^{\kappa}T_{\kappa a}{}^a R^{\mu\nu}$. Todos estes termos de mistura acoplam a intensidade de campo da vielbein e da conexão de spin de um modo não trivial. É interessante notar que estes termos podem ser considerados como originando-se de um modelo de gravitação com quebra de simetria de Lorentz em (1+3)-dimensões na presença de um vetor de fundo, v^μ , tipo tempo. Os termos: $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu T_{\nu\kappa}{}^a R_{\lambda a}$, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu R T_{\nu\kappa\lambda}$ e $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu T_{\nu a}{}^a R_{\kappa\lambda}$ resultam, respectivamente, os termos mencionados acima em $3D$ para um vetor de fundo tipo tempo, $v^\mu = (\mu; \vec{0})$. Em conexão com um artigo de Kostelecký [40] e o trabalho da Ref. [41], uma investigação da possível origem e as consequências de tais termos em $4D$ no espectro dos modelos de gravitação com desvios da simetria de Lorentz e um estudo completo da gravitação em $3D$ com a inclusão dos termos tipo $T - R$ acima, exigem uma atenção especial e é o assunto de uma investigação que realizamos no trabalho da Ref. [42].

Para definirmos o modelo a ser quantizado, devemos considerar as seguintes flutuações em torno do vácuo de Minkowski:

$$e_{\mu}{}^a = \delta_{\mu}{}^a + \tilde{e}_{\mu}{}^a, \quad (6.3a)$$

$$\omega_{\mu}{}^{ab} = \tilde{\omega}_{\mu}{}^{ab}. \quad (6.3b)$$

Daqui em diante, a distinção entre os índices Gregos e Latinos se torna desnecessária. Também é conveniente decompor a flutuação da vielbein, \tilde{e}_{ab} , nas suas partes simétrica, ϕ_{ab} , e anti-simétrica, $\epsilon_{ab}{}^c \chi_c$. Uma decomposição análoga é feita para o campo dual da flutuação da conexão de spin, sendo, ψ_{ad} a parte simétrica e $\epsilon_{ad}{}^e \lambda_e$ a parte anti-simétrica:

$$\tilde{e}_{ab} = \phi_{ab} + \epsilon_{ab}{}^c \chi_c, \quad (6.4a)$$

$$\tilde{\omega}_{abc} = \epsilon_{bc}{}^d (\psi_{ad} + \epsilon_{ad}{}^e \lambda_e). \quad (6.4b)$$

Na sequência, devemos considerar ϕ , χ , ψ e λ como os campos fundamentais do modelo linearizado.

6.2 Cálculo do Propagador

Consideremos a Lagrangeana (6.1) até segunda ordem nas flutuações quânticas,

$$(\mathcal{L})_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \Psi_\alpha \mathcal{O}_{\alpha\beta} \Psi_\beta, \quad (6.5)$$

onde Ψ_α é um multiplete que carrega as 18 componentes $(\phi_{ab}, \psi_{ab}, \chi_a, \lambda_a)$ e $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ é o operador de onda que contém η 's, ϵ 's e no máximo duas derivadas cada termo.

Como já foi dito, o problema da obtenção do propagador é reduzido ao problema da inversão do operador de onda e, uma vez que se tenha uma base completa de operadores na qual o operador de onda pode ser expandido, a inversão do operador de onda se torna uma tarefa factível, porém em geral trabalhosa.

Um primeiro passo para obtenção do propagador para gravitação de CS no formalismo de segunda ordem foi realizado em [43, 44], com a ajuda de uma base de operadores que é uma extensão dos operadores de Barnes-Rivers [45]. Entretanto, a consideração de Lagrangeanas com um grande número de parâmetros livres, especialmente no formalismo de primeira ordem, faz com a tarefa de inversão do operador de onda seja tecnicamente muito difícil [46, 47], devido à álgebra não trivial que estes operadores satisfazem.

Conforme discutido no Capítulo (3), uma técnica mais eficiente que simplifica enormemente esta tarefa é decompor o operador de onda do modelo linearizado numa base ortogonal de operadores.

Ficou claro naquela discussão que a base de operadores spin-paridade obtida como uma generalização daquela proposta em [15] não pode lidar com o termo de CS de uma maneira direta, uma vez que o operador de onda contém o símbolo de Levi-Civita. Em outras palavras, este conjunto de operadores não forma uma base para Lagrangeanas que violam a paridade, os quais são o tipo de modelos que o termo de CS se encaixa. Para solucionar essa questão, propusemos uma base de operadores alternativa que é, na verdade, a mais conveniente para $3D$ no que concerne à análise espectral dos modelos. Uma vez estabelecida esta base, o operador de onda pode ser escrito como

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \sum_{J, ij} a_{ij}^{\varphi^\theta}(J) P_{ij}^{\varphi^\theta}(J^{PQ})_{\alpha\beta}, \quad (6.6)$$

onde as matrizes $a(J)$ são os coeficientes que contribuem para o setor de spin- J na expansão do operador de onda na base de operadores dadas no Apêndice B. Por construção estes operadores satisfazem às seguintes relações:

$$\sum_{\beta} P_{ij}^{\Sigma\Psi}(I^{PQ})_{\alpha\beta} P_{kl}^{\Lambda\Xi}(J^{RS})_{\beta\gamma} = \delta_{jk} \delta^{\Psi\Lambda} \delta^{IJ} \delta^{QR} P_{il}^{\Sigma\Xi}(I^{PS})_{\alpha\gamma}, \quad (6.7)$$

$$\sum_{i, J^{PP}} P_{ii}(J^{PP})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6.8)$$

A Lagrangeana considerada (6.1) é invariante sob Lorentz local e transformações gerais de coordenadas. Isto implica, conforme a análise geral do Capítulo 4, que a Lagrangeana linearizada

é invariante sob algumas transformações locais dos campos. Dessa maneira, algumas das matrizes de coeficientes devem ser degeneradas. Isto de fato ocorre. Os coeficientes $a_{ij}^{\Sigma\Lambda}(J)$ formam uma matriz 6×6 de spin-0, uma matriz 8×8 de spin-1 e uma matriz 4×4 de spin-2. Listamos abaixo as maiores submatrizes não degeneradas obtidas destas

$$a(0) = \begin{pmatrix} 2u + 4r + 2(\beta - \gamma)p^2 & 2\sqrt{2}r & 0 & 8\sqrt{2}id\sqrt{p^2} \\ 2\sqrt{2}r & 2(u + r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(u - t - s)p^2 & 2\sqrt{2}i\sqrt{p^2}t \\ -8i\sqrt{2}d\sqrt{p^2} & 0 & -2\sqrt{2}it\sqrt{p^2} & -4t + \xi p^2 \end{pmatrix}, \quad (6.9a)$$

$$a(1) = \begin{pmatrix} 2u + \beta p^2 & -4id\sqrt{p^2} & 0 & -iu\sqrt{p^2} \\ 4id\sqrt{p^2} & 2u + \beta p^2 & iu\sqrt{p^2} & 0 \\ 0 & -iu\sqrt{p^2} & \frac{1}{2}(u - t)p^2 & 0 \\ iu\sqrt{p^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(u - t)p^2 \end{pmatrix}, \quad (6.9b)$$

$$a(2) = \begin{pmatrix} 2u + 2(\beta + \gamma)p^2 & 8id\sqrt{p^2} & 0 & 2iu\sqrt{p^2} \\ -8id\sqrt{p^2} & 2u + 2(\beta + \gamma)p^2 & -2iu\sqrt{p^2} & 0 \\ 0 & 2iu\sqrt{p^2} & 2sp^2 & 0 \\ -2iu\sqrt{p^2} & 0 & 0 & 2sp^2 \end{pmatrix}, \quad (6.9c)$$

onde $p^2 = p_a p^a$, com p^a sendo o tri-momento relativístico. Suas inversas, que são necessárias para a obtenção dos propagadores, são dadas no Apêndice C.

Na discussão da Seção 5.2, consideramos a mesma Lagrangeana (6.1), exceto o termo de C-S, num espaço-tempo de dimensão arbitrária. Portanto, é conveniente compararmos nossos resultados encontrados até aqui, quando fazemos $d = 0$, com aqueles da Seção 5.2, para $2 + 1$ dimensões ($D = 3$), para verificarmos a consistência da base de operadores. À primeira vista, nota-se que há três matrizes a mais no trabalho do Capítulo 5. De fato, o spin- 2^- e o spin- 0^- , que estão contidos na decomposição do campo da conexão de spin, não devem aparecer aqui porque os operadores de spin associados com estes spins são identicamente nulos em três dimensões. Também pode ser verificado que os operadores de spin associados com o spin- 1^+ , da Seção 5.2, são mapeados nos operadores de spin-0 quando usamos as relações de dualidade dos campos. Isto pode ser notado na matriz de spin-0 acima: para $d = 0$, ela se torna bloco-diagonal com os blocos correspondendo aos blocos de spin- 0^+ e de spin- 1^+ que aparecem na Seção 5.2. As matrizes de spin-2 e de spin-1 permanecem essencialmente as mesmas, quando comparadas às matrizes de spin- 2^+ e spin- 1^- . As diferenças são alguns rearranjos nos parâmetros de spin-1 e a duplicação da dimensão da matriz no trabalho desta seção, devido à separação das helicidades que ocorre nos spins em $3D$ quando comparados com $4D$. Deve ser enfatizado que, comparando os parâmetros usados em ambas as seções, tem que se contemplar o fato de que em três dimensões o tensor de Riemann pode ser expresso em termos dos tensores de Ricci e do escalar de curvatura.

6.3 Análise da Consistência Espectral

Nesta seção, analisamos a consistência espectral do modelo. Com este estudo, devemos impor condições sobre os parâmetros da Lagrangeana (6.1), de tal modo que partículas não físicas, ou seja partículas fantasmas e taquiônicas, não se propaguem. Para efeitos de clareza, separamos a discussão para os casos de polos massivos e não massivos.

6.3.1 Polos massivos

Em termos das matrizes inversas (C.1)-(C.5), dadas no Apêndice C, podemos escrever o propagador como:

$$\Pi(J^P) = i \sum_{ij,\alpha,\beta} A_{ij}^{\Sigma\Lambda}(J, m^2) S_{\alpha}^* P_{ij}^{\Sigma\Lambda}(J^{PQ})_{\alpha\beta} \mathcal{S}_{\beta}(p^2 - m^2)^{-1}, \quad (6.10)$$

onde $A(J, m^2)$ é a matriz 4×4 que é degenerada no polo $p^2 = m^2$.

A condição para ausência de partículas fantasmas e taquiônicas são dadas respectivamente por:

$$\Im \text{Res}(\Pi|_{p^2=m^2}) > 0, \quad \text{and} \quad m^2 > 0. \quad (6.11)$$

A condição para ausência de partículas fantasmas para cada spin está diretamente relacionada à positividade das matrizes $(\sum A_{ij}(J, m^2) P_{ij})_{\alpha\beta}$. Entretanto, pode ser mostrado que estas matrizes possuem apenas um autovalor não nulo quando avaliadas no polo e que, portanto, é igual ao traço de $A(J, m^2)$. Além disso, os próprios operadores P_{ij} contribuem com um sinal $(-1)^N$ quando calculados no polo, onde N é a soma dos números de ρ 's e σ 's em cada parte do projetor. Portanto, a condição para ausência de partículas fantasmas para cada spin é reduzida para:

$$(-1)^N \text{tr} A(J, m^2)|_{p^2=m^2} > 0. \quad (6.12)$$

Usando as condições (6.11) e (6.12) para as matrizes (C.1)-(C.5), temos:

$$\text{Spin-2} : us(s-u) < 0; (\beta + \gamma) > 0; \quad (6.13a)$$

$$\text{Spin-1} : \beta < 0; ut(u-t) < 0; \quad (6.13b)$$

$$\text{Spin-0} : (s+t-u)(s-u)t > 0; (r+u)u(u+3r) < 0; \xi > 0; (\beta + \gamma) > 0. \quad (6.13c)$$

É notável que as condições para ausência de partículas fantasmas e taquiônicas são equivalentes àquelas obtidas na Seção 5.2 no caso tridimensional, mesmo que o termo de C-S estrague a identificação direta das respectivas matrizes de spin.

As raízes dos denominadores das matrizes (C.2), (C.4), e (C.6), que são dadas no Apêndice C, nos dão as massas das partículas propagantes. Um olhar cuidadoso na combinação dos parâmetros nos revela que apenas os termos de torção são cruciais para obtenção do espectro massivo (como discutido na Seção 5.2). Esta é uma notável diferença com o formalismo de segunda ordem, onde

o termo de CS faz emergir um gráviton massivo. Entretanto, isto é devido ao caráter de derivadas superiores de tal teoria.

O espectro de massas,

$$\mathbf{2}: m_{\pm}^2 = \frac{8d^2}{(\beta + \gamma)^2} + \frac{u(u-s)}{s(\beta + \gamma)} \pm \sqrt{\left(\frac{8d^2}{(\beta + \gamma)^2}\right)^2 + 2\frac{u(u-s)}{s(\beta + \gamma)}\frac{8d^2}{(\beta + \gamma)^2}}, \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{1}: m_{\pm}^2 = \frac{8d^2}{\beta^2} + \frac{2ut}{\beta(u-t)} \pm \sqrt{\left(\frac{8d^2}{\beta^2}\right)^2 + 2\frac{2ut}{\beta(u-t)}\frac{8d^2}{\beta^2}}, \quad (6.14b)$$

$$\mathbf{0}: m_{\pm}^2 = \left(\frac{32d^2}{\xi(\beta - \gamma)} + \frac{2t(s-u)}{\xi(s+t-u)} - \frac{u(3r+u)}{2(\beta - \gamma)(r+u)}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{32d^2}{\xi(\beta - \gamma)} + \frac{2t(s-u)}{\xi(s+t-u)} - \frac{u(3r+u)}{2(\beta - \gamma)(r+u)}\right)^2 + 4\frac{tu(s-u)(3r+u)}{\xi(\beta - \gamma)(r+u)(s+t-u)}}, \quad (6.14c)$$

é mudado significativamente pelo termo de CS. Nos setores de spin-1 e spin-2 o número de partículas muda de um para dois. A influência do termo de CS no setor de spin-0 é restrita a mudar as massas das partículas. Estes fatos ocorrem devido à propriedade de quebra de paridade do termo de CS. Em três dimensões, toda partícula massiva possui um grau de liberdade [48]. Uma vez que o spin é representado em $3D$ por um operador pseudo-escalar [49], deve haver um dublete de spins com o mesmo valor absoluto para massa, $|m|$, de tal maneira que seja constituída uma representação irredutível do grupo de Lorentz extendida pela inversão temporal e transformações de paridade. Por outro lado, numa teoria com quebra de paridade, este dublete é perdido e cada componente de spin adquire um valor diferente para $|m|$. Isto se torna explícito quando analisamos o papel do termo de CS em cada valor das massas das partículas (6.14a)-(6.14c).

6.3.2 Polos não massivos

Para o cálculo dos propagadores sem massa, algumas sutilezas requerem um cuidado extra. O operador de onda, assim como sua inversa, é covariante por Lorentz, portanto pode ser expresso em termo das seguintes estruturas:

$$\omega_{ab} = \frac{p_a p_b}{p^2}; \quad \theta_{ab} = \eta_{ab} - \omega_{ab}; \quad \epsilon_{abc}; \quad p_a. \quad (6.15)$$

Como discutimos anteriormente, para obtenção do propagador, é extremamente conveniente decompor θ como $\rho + \sigma$ para construirmos um conjunto ortonormal de operadores de spin em $3D$. Contudo, para o cálculo do resíduo no polo sem massa, a dependência explícita em p_a complica a identificação dos projetores de spin. Neste estágio, nós reescrevemos o propagador em termos do conjunto (6.15). Além disso, uma vez que o modelo possui invariância de calibre, há alguns vínculos que as fontes satisfazem. Eles aparecem para inibir a propagação dos modos não

propagantes. As expressões explícitas para estes vínculos são dadas em termos dos autovetores associados aos autovalores nulos das matrizes dos coeficientes:

$$\sum V_j^{(L,n)}(J)P_{kj}(J^{PQ})_{\alpha\beta}\mathcal{S}_\beta = 0. \quad (6.16)$$

Esta equação implica nos seguintes vínculos para as fontes fundamentais:

$$p^a(S_{ab} + S_{ba} + \epsilon_{bca}\Omega^c) = 0, \quad (6.17a)$$

$$p^a(\Sigma_{ab} + \Sigma_{ba}) = 0, \quad (6.17b)$$

onde S_{ab} , Ω_c e Σ_{ab} são as fontes para os campos ψ , λ e ϕ respectivamente. Para compararmos com os resultados anteriores, expressamos a resposta final para o propagador não massivo em termos da fonte para a conexão de spin. A relação entre os campos dada em (6.4a) e (6.4b) nos permite escrever as fontes fundamentais como:

$$S_{ab} = \frac{1}{2}(\epsilon_{pqb}\tau_a^{pq} + \epsilon_{pqa}\tau_b^{pq}), \quad (6.18a)$$

$$\Omega_a = -2\eta_{cd}\tau_a^{cd}, \quad (6.18b)$$

com τ_{abc} sendo a fonte para ω_{abc} .

Usando (6.17a), (6.17b), (6.18a), e (6.18b), pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \Pi(p^2 = 0) &= \frac{1}{2p^2(s-u)}(\tau^{ab*}\Sigma^{ab*}) \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2}(\eta_{ac}\eta_{bd} + \eta_{bc}\eta_{ad}) - (\eta_{ab}\eta_{cd}) \right] (\tau^{de}\Sigma^{de}) \\ &- \frac{2id}{p^2(s-u)^2}\Sigma^{ab*} \left[\frac{1}{2}(\eta_{ac}\epsilon_{dbe} + \eta_{bd}\epsilon_{cae})p^e \right] \Sigma^{cd} \end{aligned} \quad (6.19)$$

+ termos que não contribuem para o resíduo,

onde $\tau_{ab} = p^c\tau_{abc}$. Este resultado, para $d = 0$, concorda com aquele obtido no Capítulo 5 para o caso tridimensional. Pode-se mostrar que esta parte do propagador se anula. Para calcularmos explicitamente o outro termo, vamos expandir a fonte Σ_{ab} como

$$\Sigma_{ab} = c_1 p_a p_b + c_2(p_a \epsilon_b + p_b \epsilon_a) + c_3 \epsilon_a \epsilon_b, \quad (6.20)$$

onde

$$p_a = (p_0, \vec{p}), \quad (6.21a)$$

$$q_a = (p_0, -\vec{p}), \quad (6.21b)$$

com

$$p^2 = q^2 = 0, \quad (6.22a)$$

$$p \cdot q = (p_0)^2 + (\vec{p})^2, \quad (6.22b)$$

$$p \cdot \epsilon = q \cdot \epsilon = 0, \quad (6.22c)$$

$$\epsilon^2 = -1. \quad (6.22d)$$

A expansão (6.20) é a mais geral para um tensor de rank-2 que satisfaz (6.17b). Usando esta expansão em (6.19), pode-se mostrar que o termo devido à Lagrangeana de CS também se anula. Portanto, mesmo com $d \neq 0$, não há partículas sem massa se propagando no modelo e as relações (6.13a)-(6.13c) são as únicas que devem ser impostas para assegurar a unitariedade da Lagrangeana (6.1).

6.4 Conclusão

Consideramos uma Lagrangeana de gravitação geral sem derivadas superiores e com um termo de CS que quebra a paridade no formalismo de primeira ordem. Nosso interesse era investigar as possíveis Lagrangeanas unitárias que se poderia obter da Lagrangeana inicial e determinar a influência do termo de CS no espectro de partículas.

A proposta de aplicar a base de operadores de spin desenvolvida na Seção (3) foi implementada com sucesso. Dois fatos notáveis devem ser enfatizados: primeiro, sua propriedade de ortogonalidade faz com que a inversão do operador de onda seja mais direta e, segundo, a análise das simetrias de calibre do modelos se torna um procedimento sistemático. Além disso, os resultados que aparecem na literatura, mas sem o termo de CS, são recuperados, como era de se esperar. Ficou claro que a base de operadores não é apenas de mera conveniência algébrica. O papel da paridade e o conceito de spin em $3D$, dão aos operadores um significado físico bem definido. Uma construção análoga pode ser implementada para lidar com modelos com quebra de Lorentz em $4D$, uma vez que termos com quebra de paridade em $3D$ estão intrinsecamente relacionados com termos com quebra de simetria de Lorentz em $4D$ [42].

Da análise da consistência espectral, (Seção 6.3), vemos que o termo de C-S não modifica as relações de unitariedade. Portanto, as possíveis Lagrangeanas unitárias são as mesmas que aquelas listadas na Seção 5.2 adicionadas com o termo de CS. A principal contribuição deste termo, devido ao seu caráter de quebra de paridade, é aumentar o número de partículas massivas nos setores de spin-1 e spin-2, assim como modificar suas massas. Além disso, apenas modos massivos se propagam. No caso particular da Lagrangeana de EH-CS no formalismo de primeira ordem, não há modos massivos se propagando e, conseqüentemente, não há nenhum modo propagante. Desta maneira, concluímos que o termo topológico de CS é compatível com a propagação da torção mesmo impondo que a unitariedade deve ser respeitada.

Entendemos que o termo de CS não altera as condições para unitariedade devido ao seu caráter de baixo número de derivadas e em virtude do seu aspecto topológico. Na verdade, como sabemos,

um termo de CS sozinho não resulta em perturbações locais que poderiam ser identificadas como partículas. O mesmo não precisaria ser verdade para outros termos que violam paridade (como aqueles listados na Seção 6.1), uma vez que eles carregam um maior número de derivadas. Não temos nenhum argumento em favor desta afirmativa, mas nossa opinião é que eles deveriam ser investigados. Além disso, não esperamos nenhuma modificação no conteúdo de partículas do setor massivo, uma vez que, analisando os possíveis graus de liberdade que podem se propagar, todos os modos massivos foram consistentemente excitados. O genuíno modo de spin-2 não massivo (correspondendo ao gráviton sem massa) não deveria existir em três dimensões por uma simples contagem nos graus de liberdade na camada de massa. Resta elucidar se os modos sem massa restantes poderiam se propagar em compatibilidade com a unitariedade.

Capítulo 7

Considerações Finais

Apesar do imenso esforço empregado desde os primórdios da formulação das teorias da RG e da TQC, a tentativa de compatibilização dessas teorias numa descrição comum tem-se se mostrado um objetivo arredo. Atualmente existem muitas propostas para o que seria tal teoria no seu nível mais fundamental. Embora muitas destas propostas tenham se mostrado promissoras, a certeza de sucesso ainda parece ser algo fugaz.

Tal situação abre espaço para especulações, que a princípio poderiam parecer atitudes desesperadas, mas que poriam um fim no problema. Uma delas seria a de considerar a teoria da Gravitação e das demais interações, como sendo fundamentalmente distintas e, portanto, não necessitariam de um tratamento comum.

Algumas considerações, parecem inviabilizar esta alternativa. O desenvolvimento da Física, sempre foi permeado pela ideia da unificação dos conceitos e princípios. Grandes saltos no entendimento dos fenômenos ocorreram quando este amálgama de descrições se fez presente, de tal maneira que ter teorias fundamentais descorrelacionadas nos causa um certo desconforto. Além disso, essa postura traz uma certa assimetria à RG. Por um lado, se tem o tensor energia-momento associado à matéria, que por sua vez encontra a descrição adequada dentro do tratamento de TQC. Por outro lado, se tem a geometria que seria eminentemente clássica. Mesmo que o tensor energia-momento seja tomado como uma média, dependeria do estado quântico ao qual esta média é tomada. Parece, portanto, que a abordagem do problema deve ser outra.

Uma vez assumido que se deve considerar o aspecto quântico da Gravitação, cabe-se questionar sobre quais os princípios envolvidos na formulação das teorias de Gravitação à tornam tão indomesticável.

Uma das principais características da teoria da gravitação é que ela tenta elucidar questões fundamentais da Física que nas demais interações são dadas como assumidas. A teoria da RG, por exemplo, se guiou fortemente nas especulações de Mach sobre a interpretação dos efeitos inerciais como sendo efeitos dinâmicos gravitacionais. A inércia de um corpo deixa de ser uma propriedade intrínseca e passa a ser devida aos movimentos relativos entre as partículas. Dessa maneira, o campo gravitacional é destituído de seu caráter absoluto e é reconhecido como uma quantidade que depende do estado de movimento dos observadores, ou do sistema de coordenadas escolhido.

Apesar de se saber que o princípio de Mach, como cunhado por Einstein, não ser completamente verificado na RG, é certo que esta teoria conserva muitos de seus aspectos filosóficos [50, 51]. Ao se questionar sobre a origem dos referenciais inerciais e relacioná-los com a distribuição de matéria no universo, Mach introduziu a ideia de que tanto a gravitação como o próprio espaço-tempo são fenômenos emergentes.

Do ponto de vista relativista, portanto, a Gravitação é mais do que uma teoria de campo para uma interação. Nesse sentido, a ideia da descrição gravitacional como excitações físicas sobre um fundo fixo, não é correta. Isto porque, sob este aspecto a questão da quantização da Gravidade é a questão de compatibilização de conceitos completamente distintos. Por um lado, os princípios da Mecânica Quântica e por outro, da origem do próprio espaço-tempo.

Uma abordagem que se assemelharia à essas ideias, seria a de considerar a Gravitação e a geometria do espaço-tempo como sendo também fenômenos emergentes. Ou seja, em princípio a teoria que descreveria a micro-física no seu nível mais fundamental teria informação suficiente para fazer emergir em baixas energias tanto a Gravitação e o espaço-tempo como as demais interações. Apesar de essa postura parecer não encaminhar a solução de problemas como o da estrutura da teoria mais fundamental, alguns modelos propostos na literatura, para encaminhar a questão da quantização da gravitação, parecem não estar em contradição com esta postura. Para citar 2 exemplos: o princípio holográfico, embutido na correspondência AdS/CFT, trata essa questão relacionando teorias que contém Gravitação com outras que não a contém. Outros encaminhamentos, baseados num grupo de grande unificação, também tratam o aparecimento de estruturas geométricas como provindo de um mecanismo de quebra espontânea de simetria.

Sob a ótica da Física de Partículas, a gravitação deve ser considerada como apenas mais uma interação. Nesse sentido, deve corresponder à excitações físicas sobre um fundo fixo, em geral considerado como sendo o espaço de Minkowski. As questões mais fundamentais que são encaminhadas na RG, deveriam corresponder à manifestações de baixas energias desta teoria. Sigamos em frente com essa ideia.

Uma maneira eficiente de pensar na descrição da interação na Física de Partículas é por meio do teorema de Noether. Sabemos que uma simetria global na Lagrangeana permite definirmos cargas conservadas. Ao generalizarmos essa simetria, tornando-a local, somos levados a introduzir um novo campo que promove a interação entre as cargas conservadas. Logo, a existência de simetrias globais e, portanto, cargas conservadas, sugere que essas cargas devam interagir.

Sabe-se que a conexão entre Gravitação e espaço-tempo é devida ao Princípio de Equivalência (PE) e este, por sua vez, se baseia na igualdade entre massa inercial e gravitacional. Essa igualdade é verificada experimentalmente com grande precisão. Portanto, o entendimento da gravitação como as demais interações, ou seja, como uma interação ocorrendo sobre o espaço-tempo, parte do pressuposto de que essa igualdade deixa de ser válida para energias suficientemente altas (na ordem da escala da MP). Se mesmo nessa escala de energia supusermos a existência de um espaço-tempo contínuo, chegaremos numa situação inusitada. Ainda se pode referir às propriedades inerciais dos sistemas físicos e, portanto, podemos construir grandezas conservadas devido às simetrias espaço-temporais. Contudo, tais grandezas conservadas não seriam responsáveis por nenhuma interação. Ou seja, essa simetria espaço-temporal seria apenas global. A carga responsável pela interação

gravitacional nessa escala de energia deve confundir-se com o tensor energia momento em baixas energias. Essa situação me parece desconfortável. Mais natural seria pensar que todas as cargas existentes interajam e que o tensor energia momento só passe a existir num certo regime de energia e, dessa maneira, o próprio espaço-tempo só passe a existir nesse nível de energia.

Um dos poucos exemplos que temos de uma teoria com sucesso tanto no nível microscópico quanto macroscópico é o Eletromagnetismo. Com isso, quero dizer que as equações de Maxwell descrevem muito bem efeitos clássicos e quânticos num intervalo de energia que abrange desde escalas onde os efeitos quânticos são importantes até onde eles são suprimidos pelos efeitos da descoerência física. No entanto, sabe-se que em muitos sistemas clássicos (como supercondutividade, física de plasma, etc.), as equações de Maxwell podem sofrer alterações para descrever corretamente os efeitos eletromagnéticos. Se tivéssemos acesso somente à esses efeitos macroscópicos, possivelmente não teríamos êxito ao descrevermos seus efeitos quânticos. Ainda assim essas alterações poderiam ser geradas se não víssemos a EDQ como fundamental, mas sim como uma teoria efetiva.

A RG é uma teoria com enorme sucesso na escala macroscópica e cosmológica que pode chegar a 10^{15} m. Na busca pela sua formulação quantizada, espera-se definir uma teoria microscópica consistente e gerar em baixas energias a RG. No entanto, efeitos quânticos da Gravitação, devem aparecer na escala de 10^{-35} m. Dessa maneira, a validade de tal modelo deveria abranger um intervalo da ordem de 50 ordens de grandeza na escala de energia. A experiência que temos com as demais interações, faz com que tenhamos dúvidas sobre o sucesso de tal abordagem. Assim como no caso do eletromagnetismo microscópico, quando tratado como fundamental, que é incapaz de gerar os efeitos não-lineares observados em alguns sistemas clássicos. Ou seja, a postura de se considerar uma teoria de campos fundamental para descrição da Gravitação Quântica que seja equivalente à RG em baixas energias, pode não ser a mais adequada.

As considerações levantadas nessas notas finais, são meramente especulativas e podem parecer desconectadas. No entanto, visam mais do que qualquer coisa, levantar questões que me parecem relevantes ao se pensar na questão da Gravitação Quântica.

Apêndice A

Projetores de Spin-Paridade em D-Dimensões

Neste Apêndice, listamos os operadores em D dimensões utilizados para obtenção dos propagadores na Seção (5.2).

1. $P_{21}^{\phi\omega} (0^+)_{ab;def} = \frac{\sqrt{2}}{2(D-1)} (\theta_{ab}\theta_{de}p_f - \theta_{ab}\theta_{df}p_e)$
2. $P_{31}^{\phi\omega} (0^+)_{ab;def} = \frac{\sqrt{2}}{2(D-1)^{1/2}} (\omega_{ab}\theta_{de}p_f - \omega_{ab}\theta_{df}p_e)$
3. $P_{12}^{\omega\phi} (0^+)_{abc;df} = \frac{\sqrt{2}}{2(D-1)} (\theta_{ab}\theta_{df}p_c - \theta_{ac}\theta_{df}p_b)$
4. $P_{13}^{\omega\phi} (0^+)_{abc;df} = \frac{\sqrt{2}}{2(D-1)^{1/2}} (\theta_{ab}p_c - \theta_{ac}p_b) \omega_{df}$
5. $P_{22}^{\phi\phi} (0^+)_{ab;cd} = \frac{1}{D-1} \theta_{ab}\theta_{cd}$
6. $P_{33}^{\phi\phi} (0^+)_{ab;cd} = \omega_{ab}\omega_{cd}$
7. $P_{23}^{\phi\phi} (0^+)_{ab;cd} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \theta_{ab}\omega_{cd}$
8. $P_{32}^{\phi\phi} (0^+)_{ab;cd} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \omega_{ab}\theta_{cd}$
9. $P_{11}^{\omega\omega} (0^+)_{abc;def} = \frac{1}{2(D-1)} [\theta_{ab} (\theta_{de}\omega_{cf} - \theta_{df}\omega_{ce}) - \theta_{ac} (\theta_{de}\omega_{bf} - \theta_{df}\omega_{be})]$
10. $P_{11}^{\omega\omega} (1^-)_{abc;def} = \frac{1}{2(D-2)} [\theta_{ab} (\theta_{de}\theta_{cf} - \theta_{df}\theta_{ce}) - \theta_{ac} (\theta_{de}\theta_{bf} - \theta_{df}\theta_{be})]$
11. $P_{31}^{\phi\omega} (1^-)_{ab;def} = -\frac{1}{2(D-2)^{1/2}} (\theta_{de}\theta_{af}p_b + \theta_{de}\theta_{bf}p_a - \theta_{df}\theta_{ae}p_b - \theta_{df}\theta_{be}p_a)$
12. $P_{32}^{\phi\omega} (1^-)_{ab;def} = \frac{1}{2} [\omega_{ad} (\theta_{bf}p_e - \theta_{be}p_f) + \omega_{bd} (\theta_{af}p_e - \theta_{ae}p_f)]$

13. $P_{13}^{\omega\phi} (1^-)_{abc;df} = \frac{1}{2(D-2)^{1/2}} (\theta_{ac}\theta_{bd}p_f + \theta_{ac}\theta_{bf}p_d - \theta_{ab}\theta_{cd}p_f - \theta_{ab}\theta_{cf}p_d)$
14. $P_{23}^{\omega\phi} (1^-)_{abc;df} = \frac{1}{2} [\omega_{da} (\theta_{fc}p_b - \theta_{fb}p_c) + \omega_{fa} (\theta_{dc}p_b - \theta_{db}p_c)]$
15. $P_{41}^{\chi\omega} (1^-)_{ab;def} = \frac{1}{2(D-2)^{1/2}} (\theta_{ac}\theta_{df}p_b - \theta_{be}\theta_{df}p_a - \theta_{af}\theta_{de}p_b + \theta_{bf}\theta_{de}p_a)$
16. $P_{42}^{\chi\omega} (1^-)_{ab;def} = \frac{1}{2} [\omega_{ad} (\theta_{be}p_f - \theta_{bf}p_e) + \omega_{bd} (\theta_{af}p_e - \theta_{ae}p_f)]$
17. $P_{14}^{\omega\chi} (1^-)_{abc;df} = \frac{1}{2(D-2)^{1/2}} (\theta_{ac}\theta_{bd}p_f - \theta_{ab}\theta_{cd}p_f - \theta_{ac}\theta_{bf}p_d + \theta_{ab}\theta_{cf}p_d)$
18. $P_{24}^{\omega\chi} (1^-)_{abc;df} = \frac{1}{2} [\omega_{da} (\theta_{fb}p_c - \theta_{fc}p_b) + \omega_{fa} (\theta_{dc}p_b - \theta_{db}p_c)]$
19. $P_{33}^{\phi\phi} (1^-)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\theta_{ac}\omega_{bd} + \theta_{bc}\omega_{ad} + \theta_{ad}\omega_{bc} + \theta_{bd}\omega_{ac})$
20. $P_{44}^{\chi\chi} (1^-)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\theta_{ac}\omega_{bd} - \theta_{ad}\omega_{bc} - \theta_{bc}\omega_{ad} + \theta_{bd}\omega_{ac})$
21. $P_{34}^{\phi\chi} (1^-)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\theta_{ac}\omega_{bd} - \theta_{ad}\omega_{bc} + \theta_{bc}\omega_{ad} - \theta_{bd}\omega_{ac})$
22. $P_{43}^{\chi\phi} (1^-)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\theta_{ac}\omega_{bd} + \theta_{ad}\omega_{bc} - \theta_{bc}\omega_{ad} - \theta_{bd}\omega_{ac})$
23. $P_{22}^{\omega\omega} (1^-)_{abc;def} = \frac{1}{2}\omega_{ad} [\theta_{be}\omega_{cf} - \theta_{bf}\omega_{ce} - \theta_{ce}\omega_{bf} + \theta_{cf}\omega_{be}]$
24. $P_{12}^{\omega\omega} (1^-)_{abc;def} = \frac{1}{2(D-2)^{1/2}} \{ \theta_{ab} [\theta_{ce}\omega_{df} - \theta_{cf}\omega_{de}] - \theta_{ac} [\theta_{be}\omega_{df} - \theta_{bf}\omega_{de}] \}$
25. $P_{21}^{\omega\omega} (1^-)_{abc;def} = \frac{1}{2(D-2)^{1/2}} \{ \omega_{ab} [\theta_{df}\theta_{ce} - \theta_{de}\theta_{cf}] - \omega_{ac} [\theta_{df}\theta_{be} - \theta_{de}\theta_{bf}] \}$
26. $P_{21}^{\phi\omega} (2^+)_{ab;def} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\left(\theta_{ad}\theta_{be} + \theta_{ae}\theta_{bd} - \frac{2}{(D-1)}\theta_{ab}\theta_{de} \right) p_f - \left(\theta_{ad}\theta_{bf} + \theta_{af}\theta_{bd} - \frac{2}{(D-1)}\theta_{ab}\theta_{df} \right) p_e \right]$
27. $P_{12}^{\omega\phi} (2^+)_{abc;df} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\left(\theta_{ad}\theta_{bf} + \theta_{af}\theta_{bd} - \frac{2}{(D-1)}\theta_{ab}\theta_{df} \right) p_c - \left(\theta_{ad}\theta_{cf} + \theta_{af}\theta_{cd} - \frac{2}{(D-1)}\theta_{ac}\theta_{df} \right) p_b \right]$
28. $P_{22}^{\phi\phi} (2^+)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\theta_{ac}\theta_{bd} + \theta_{ad}\theta_{bc}) - \frac{1}{(D-1)}\theta_{ab}\theta_{cd}$
29. $P_{11}^{\omega\omega} (2^+)_{abc;def} = \frac{1}{2}\theta_{ad} (\theta_{be}\omega_{cf} - \theta_{bf}\omega_{ce} - \theta_{ce}\omega_{bf} + \theta_{cf}\omega_{be}) - \frac{1}{4}\theta_{ad} [\theta_{be}\omega_{cf} - \theta_{bf}\omega_{ce} - \theta_{ce}\omega_{bf} + \theta_{cf}\omega_{be}]$
 $+ \frac{1}{4}\theta_{ae} [\theta_{cd}\omega_{bf} - \theta_{bd}\omega_{cf}] + \frac{1}{4}\theta_{af} [\theta_{bd}\omega_{ce} - \theta_{cd}\omega_{be}] - \frac{1}{2(D-1)} [\theta_{ab} (\theta_{de}\omega_{cf} - \theta_{df}\omega_{ce}) - \theta_{ac} (\theta_{de}\omega_{bf} - \theta_{df}\omega_{be})]$
30. $P_{31}^{\chi\omega} (1^+)_{ab;def} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\theta_{af}\theta_{bd}k_e - \theta_{bd}\theta_{ae}p_f + \theta_{ad}\theta_{be}p_f - \theta_{ad}\theta_{bf}p_e)$
31. $P_{32}^{\chi\omega} (1^+)_{ab;def} = -\frac{1}{2} (\theta_{bf}\theta_{ae} - \theta_{af}\theta_{be}) p_d$
32. $P_{13}^{\omega\chi} (1^+)_{abc;df} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\theta_{af}\theta_{cd}p_b - \theta_{bd}\theta_{af}p_c + \theta_{ad}\theta_{bf}p_c - \theta_{ad}\theta_{cf}p_b)$
33. $P_{23}^{\omega\chi} (1^+)_{abc;df} = -\frac{1}{2} (\theta_{bd}\theta_{cf} - \theta_{cd}\theta_{bf}) p_a$

34. $P_{33}^{XX}(1^+)_{ab;cd} = \frac{1}{2}(\theta_{ac}\theta_{bd} - \theta_{ad}\theta_{bc})$
35. $P_{22}^{\omega\omega}(1^+)_{abc;def} = \frac{1}{2}\omega_{ad}[\theta_{be}\theta_{cf} - \theta_{bf}\theta_{ce}]$
36. $P_{12}^{\omega\omega}(1^+)_{abc;def} = -\frac{\sqrt{2}}{4}[\theta_{ae}(\theta_{bf}\omega_{cd} - \theta_{cf}\omega_{bd}) - \theta_{af}(\theta_{be}\omega_{cd} - \theta_{ce}\omega_{bd})]$
37. $P_{21}^{\omega\omega}(1^+)_{abc;def} = -\frac{\sqrt{2}}{4}[\theta_{cd}(\theta_{bf}\omega_{ae} - \theta_{be}\omega_{af}) + \theta_{bd}(\theta_{ce}\omega_{af} - \theta_{cf}\omega_{ae})]$
38. $P_{11}^{\omega\omega}(1^+)_{abc;def} = \frac{1}{4}\theta_{ad}[\theta_{be}\omega_{cf} - \theta_{bf}\omega_{ce} - \theta_{ce}\omega_{bf} + \theta_{cf}\omega_{be}] + \frac{1}{4}\theta_{ae}[\theta_{cd}\omega_{bf} - \theta_{bd}\omega_{cf}] + \frac{1}{4}\theta_{af}[\theta_{bd}\omega_{ce} - \theta_{cd}\omega_{be}]$
39. $P^{\omega\omega}(0^-)_{abc;def} = \frac{1}{6}\{\theta_{ad}[\theta_{be}\theta_{cf} - \theta_{bf}\theta_{ce}] + \theta_{ae}[\theta_{bf}\theta_{cd} - \theta_{bd}\theta_{cf}] + \theta_{af}[\theta_{bd}\theta_{ce} - \theta_{be}\theta_{cd}]\}$
40. $P^{\omega\omega}(2^-)_{abc;def} = \frac{1}{2}\theta_{ad}(\theta_{be}\theta_{cf} - \theta_{bf}\theta_{ce}) - \frac{1}{2(D-2)}[\theta_{ab}(\theta_{de}\theta_{cf} - \theta_{df}\theta_{ce}) - \theta_{ac}(\theta_{de}\theta_{bf} - \theta_{df}\theta_{be})]$
 $\frac{1}{6}\{\theta_{ad}[\theta_{be}\theta_{cf} - \theta_{bf}\theta_{ce}] + \theta_{ae}[\theta_{bf}\theta_{cd} - \theta_{bd}\theta_{cf}] + \theta_{af}[\theta_{bd}\theta_{ce} - \theta_{be}\theta_{cd}]\}$

Apêndice B

Operadores de Spin em 3D e Relações Tensoriais

Neste Apêndice, listamos os operadores de spin em 3D construídos na Seção (3) e algumas identidades satisfeitas por eles.

B.1 *Operadores para campos vetoriais: A – A*

Setor de spin-0

- $P^{AA}(0)_{ab} = \omega_{ab}$

Setor de spin-1

- $P_{11}^{AA}(+1)_{ab} = \rho_{ab}$
- $P_{22}^{AA}(-1)_{ab} = \sigma_{ab}$

Identidades entre os operadores

- $P^{AA}(1)_{ab} = \theta_{ab} = P_{11}^{AA}(+1)_{ab} + P_{22}^{AA}(-1)_{ab}$

Identidades tensoriais

$$\begin{aligned}\eta_{ab} &= P^{AA}(0)_{ab} + P^{AA}(1)_{ab} \\ k_a k_b &= k^2 P^{AA}(0)_{ab} \\ \varepsilon_{abc} k^c &= i\sqrt{k^2} (P_{11}^{AA}(+1)_{ab} - P_{22}^{AA}(-1)_{ab})\end{aligned}$$

B.2 Tensores simétricos de rank-2, $h - h$

Setor de spin-0

- $P_{11}^{hh} (0^s)_{ab;cd} = \frac{1}{2}\theta_{ab}\theta_{cd}$,
- $P_{22}^{hh} (0^\omega)_{ab;cd} = \omega_{ab}\omega_{cd}$,
- $P_{12}^{hh} (0^{s\omega})_{ab;cd} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{ab}\omega_{cd}$,
- $P_{21}^{hh} (0^{\omega s})_{ab;cd} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{ab}\theta_{cd}$.

Setor de spin-1

- $P_{11}^{hh} (+1)_{ab;cd} = \frac{1}{2}(\rho_{ac}\omega_{bd} + \rho_{bc}\omega_{ad} + \rho_{ad}\omega_{bc} + \rho_{bd}\omega_{ac})$,
- $P_{22}^{hh} (-1)_{ab;cd} = \frac{1}{2}(\sigma_{ac}\omega_{bd} + \sigma_{bc}\omega_{ad} + \sigma_{ad}\omega_{bc} + \sigma_{bd}\omega_{ac})$,
- $P_{12}^{hh} (1^{+-})_{ab;cd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ghe}(\rho_a^g\sigma_c^h\omega_{bd} + \rho_b^g\sigma_c^h\omega_{ad} + \rho_a^g\sigma_d^h\omega_{bc} + \rho_b^g\sigma_d^h\omega_{ac})\frac{k^e}{\sqrt{k^2}}$,
- $P_{21}^{hh} (1^{-+})_{ab;cd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ghe}(\sigma_a^h\rho_c^g\omega_{db} + \sigma_a^h\rho_d^g\omega_{cb} + \sigma_b^h\rho_c^g\omega_{da} + \sigma_b^h\rho_d^g\omega_{ca})\frac{k^e}{\sqrt{k^2}}$.

Sector de spin-2

- $P_{11}^{hh} (+2)_{ab;cd} = \rho_{ac}\rho_{bd}$,
- $P_{22}^{hh} (-2)_{ab;cd} = \sigma_{ac}\sigma_{bd}$.

Identidades entre os operadores

- $P^{hh} (1)_{ab;cd} = \frac{1}{2}(\theta_{ac}\omega_{bd} + \theta_{bc}\omega_{ad} + \theta_{ad}\omega_{bc} + \theta_{bd}\omega_{ac}) = P_{11}^{hh} (+1) + P_{22}^{hh} (+1)$
- $P^{hh} (2)_{ab;cd} = \frac{1}{2}(\theta_{ac}\theta_{bd} + \theta_{ad}\theta_{bc} - \theta_{ab}\theta_{cd}) = P_{11}^{hh} (+2) + P_{22}^{hh} (+2)$

Identidades tensoriais

$$\delta_{ab,cd} = \frac{1}{2}(\eta_{ac}\eta_{bd} + \eta_{ad}\eta_{bc}) = P^{hh} (2) + P^{hh} (1) + P_{11}^{hh} (0^s) + P_{22}^{hh} (0^\omega)$$

$$\eta_{ab}\eta_{cd} = 2P_{11}^{hh} (0^s) + \sqrt{2}P_{12}^{hh} (0^{s\omega}) + \sqrt{2}P_{21}^{hh} (0^{\omega s}) + P_{22}^{hh} (0^\omega)$$

$$k_a k_b \eta_{cd} + k_c k_d \eta_{ab} = \sqrt{2}k^2 (P_{12}^{hh} (0^{s\omega}) + P_{21}^{hh} (0^{\omega s})) + 2k^2 P_{22}^{hh} (0^\omega)$$

$$k_a k_c \eta_{bd} + k_a k_d \eta_{bc} + k_b k_c \eta_{ad} + k_b k_d \eta_{ac} = 2k^2 P^{hh} (1) + 4k^2 P_{22}^{hh} (0^\omega)$$

$$k_a k_b k_c k_d = k^4 P_{22}^{hh} (0^\omega)$$

$$(\varepsilon_{eca}\eta_{bd} + \varepsilon_{ecb}\eta_{ad} + \varepsilon_{eda}\eta_{bc} + \varepsilon_{edb}\eta_{ac}) k^e = 2\sqrt{k^2} (P_{11}^{hh} (+2) - P_{22}^{hh} (-2) - P_{12}^{hh} (1^{+-}) + P_{21}^{hh} (1^{-+}))$$

$$(\varepsilon_{eca}k_b k_d + \varepsilon_{ecb}k_a k_d + \varepsilon_{eda}k_b k_c + \varepsilon_{edb}k_a k_c) k^e = 2k^2 \sqrt{k^2} (-P_{12}^{hh} (1^{+-}) + P_{21}^{hh} (1^{-+}))$$

onde os índices dos operadores $P_{ij}^{hh} (J)_{ab;cd}$ foram omitidos.

Apêndice C

Matrizes Inversas da Seção 6.3

As matrizes inversas que aparecem no propagador (6.10) são dadas por:

$$a^{-1}(0) = \frac{1}{D_0} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} & A_{13}^{(0)} & A_{14}^{(0)} \\ A_{12}^{(0)} & A_{22}^{(0)} & A_{23}^{(0)} & A_{24}^{(0)} \\ A_{13}^{(0)} & A_{23}^{(0)} & A_{33}^{(0)} & A_{34}^{(0)} \\ -A_{14}^{(0)} & -A_{24}^{(0)} & -A_{23}^{(0)} & A_{44}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

onde

$$\begin{aligned} D_0 &= 8p^2 [(u+r)((u+2r+(\beta-\gamma)p^2)((u-t-s)\xi p^2 - 4t(u-s))) - 64d^2 p^2 (u-t-s)], \\ &\quad -2r^2 ((u-t-s)\xi p^2 - 4t(u-s))], \quad (\text{C.2}) \\ A_{11}^{(0)} &= 4(u+r)(-4t(u-s) + (u-t-s)\xi p^2)p^2, \\ A_{12}^{(0)} &= -2\sqrt{2}r(2(u-t-s)(-4t + \xi p^2) - 8t^2)p^2, \\ A_{22}^{(0)} &= ((2u+4r+2(\beta-\gamma)p^2)(2(u-t-s)(-4t + \xi p^2) - 8t^2) - 256d^2 p^2 (u-t-s))p^2, \\ A_{13}^{(0)} &= 64dt(r+u)p^2, \\ A_{14}^{(0)} &= -32\sqrt{2}id(u-t-s)(r+u)\sqrt{p^2}p^2, \\ A_{22}^{(0)} &= 4((u+2r+(\beta-\gamma)p^2)(-4(u-s)t + (u-t-s)\xi p^2) - 64d^2 p^2 (u-t-s))p^2, \\ A_{23}^{(0)} &= -64\sqrt{2}drt p^2, A_{24}^{(0)} = 64idr(u-t-s)\sqrt{p^2}p^2, \\ A_{33}^{(0)} &= 4(-4t + \xi p^2)(u(3r+u) + (u+r)(\beta-\gamma)p^2) - 256p^2 d^2 (u+r), \\ A_{34}^{(0)} &= -8\sqrt{2}i\sqrt{p^2}t(u(3r+u) + (\beta-\gamma)(u+r)p^2), \\ A_{44}^{(0)} &= 8p^2(u-t-s)(u(3r+u) + (\beta-\gamma)(u+r)p^2). \end{aligned}$$

$$a^{-1}(1) = \frac{1}{D_1} \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & A_{13}^{(1)} & A_{14}^{(1)} \\ -A_{12}^{(1)} & A_{11}^{(1)} & -A_{14}^{(1)} & A_{13}^{(1)} \\ A_{13}^{(1)} & A_{14}^{(1)} & A_{33}^{(1)} & A_{34}^{(1)} \\ -A_{14}^{(1)} & A_{13}^{(1)} & -A_{34}^{(1)} & A_{33}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

onde

$$D_1 = \frac{1}{2}p^2 \left(4d^2(u-t)^2p^2 - \left(\frac{1}{2}p^2(u-t)\beta - ut \right)^2 \right), \quad (\text{C.4})$$

$$A_{11}^{(1)} = -\frac{1}{4}(u-t) \left(\frac{1}{2}(u-t)\beta p^2 - ut \right) p^2,$$

$$A_{12}^{(1)} = -\frac{i}{2}(u-t)^2 d\sqrt{p^2}p^2,$$

$$A_{13}^{(1)} = -du(u-t)p^2,$$

$$A_{14}^{(1)} = -\frac{i}{2}\sqrt{p^2}u \left(\frac{1}{2}(u-t)\beta p^2 - ut \right),$$

$$A_{33}^{(1)} = - \left(\left(\frac{1}{2}p^2\beta - t \right) (u-t)^2 + \left(\frac{1}{4}p^4\beta^2 - 2t^2 \right) (u-t) - t^2 \left(\frac{1}{2}\beta p^2 + t \right) - 4(u-t)d^2p^2 \right),$$

$$A_{34}^{(1)} = -2idu^2\sqrt{p^2},$$

$$a^{-1}(2) = \frac{1}{D_2} \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & A_{13}^{(2)} & A_{14}^{(2)} \\ -A_{12}^{(2)} & A_{11}^{(2)} & -A_{14}^{(2)} & A_{13}^{(2)} \\ A_{13}^{(2)} & A_{14}^{(2)} & A_{33}^{(2)} & A_{34}^{(2)} \\ -A_{14}^{(2)} & A_{13}^{(2)} & -A_{34}^{(2)} & A_{33}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

onde

$$D_2 = 2p^2 \left(16d^2s^2p^2 - (u(s-u) + p^2s(\beta + \gamma))^2 \right), \quad (\text{C.6})$$

$$A_{11}^{(2)} = -s(su + s(\beta + \gamma)p^2 - u^2)p^2,$$

$$A_{12}^{(2)} = 4ids^2\sqrt{p^2}p^2,$$

$$A_{13}^{(2)} = -4dusp^2,$$

$$A_{14}^{(2)} = iu\sqrt{p^2}(u(s-u) + s(\beta + \gamma)p^2),$$

$$A_{33}^{(2)} = -\frac{1}{s} \left((u(s-u) + s(\beta + \gamma)p^2)^2 - 16s^2d^2p^2 + u^2(u(s-u) + s(\beta + \gamma)p^2) \right),$$

$$A_{34}^{(2)} = -4idu^2\sqrt{p^2}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] I. L. Shapiro, Phys. Rept. 357:113 (2002) [arXiv:hep-th/9811072].
- [2] K. Hagiwara, P. Konar, Q. Li, K. Mawatari and D. Zeppenfeld, JHEP **0804** (2008) 019 [arXiv:0801.1794 [hep-ph]].
- [3] Z. Ya-Jin, M. Wen-Gan, H. Liang and Z. Ren-You, Phys. Rev. D **76** (2007) 054003 [arXiv:0708.1195 [hep-ph]].
- [4] C. Cartier, R. Durrer and M. Ruser, Phys. Rev. D **72** (2005) 104018 [arXiv:hep-th/0510155].
- [5] P. Jain and S. Panda, JHEP **0403** (2004) 011 [arXiv:hep-ph/0401222].
- [6] A. S. Goldhaber, M. M. Nieto, "Photon and Graviton Mass Limits", arXiv:0809.1003v3 [hep-ph]
- [7] Z. Kakushadze and P. Langfelder, Mod. Phys. Lett. A **15** (2000) 2265 [arXiv:hep-th/0011245].
- [8] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Annals Phys. **140** (1982) 372 [Erratum-ibid. **185** (1988 APNYA,281,409-449.2000) 406.1988 APNYA,281,409].
- [9] C. A. Hernaski, B. Pereira-Dias and A. A. Vargas-Paredes, Phys. Lett. A **374**, 3410 (2010), arXiv:1001.2784 [hep-th].
- [10] C. A. Hernaski, A. A. Vargas-Paredes and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **80** (2009) 124012, arXiv:0905.1068 [hep-th].
- [11] J. A. Helayel-Neto, C. A. Hernaski, B. Pereira-Dias, A. A. Vargas-Paredes and V. J. Vasquez-Otoya, Phys. Rev. D **82**, 064014 (2010) [arXiv:1005.3831 [hep-th]].
- [12] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books Publishing (1995).
- [13] M. Gomes, Teoria Quântica dos Campos. 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP (2002).

- [14] Gerard't Hooft and M. Veltman, Diagrammar. Cern report 73/9 (1973), reprinted in "Particle interactions at very high energies". NATO Adv. Study Inst. Series, Sect. B, vol. 4B, 177.
- [15] E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, Phys.Rev. D **21**, 3269 (1980).
- [16] R. J. Rivers Hagiwara, Nuovo Cimento 34 (1964) 387.
- [17] V. N. Popov and L. D. Fadeev, Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 1, p. 1 (1970).
- [18] D. E. Neville, Phys. Rev. D **18**, 3535 (1978).
- [19] M. Nakasone and I. Oda, Prog. Theor. Phys. **121**, 1389 (2009) [arXiv:0902.3531 [hep-th]].
- [20] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, Phys. Rev. D **79**, 124042 (2009) [arXiv:0905.1259 [hep-th]].
- [21] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **102**, 201301 (2009) [arXiv:0901.1766 [hep-th]].
- [22] J. L. Boldo, L. M. de Moraes and J. A. Helayël-Neto, Class. Quantum Grav. 17 (2000) 813–823.
- [23] Gerard't Hooft "Unitarity in the Brout-Englert-Higgs Mechanism for Gravity", arXiv:0708.3184v4 [hep-th].
- [24] Ryoyu Utiyama, Phys. Rev. 101, 1597 - 1607 (1956).
- [25] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2** (1961) 212.
- [26] S. Deser and Z. Yang, Class. Quant. Grav. **7**, 1603 (1990).
- [27] B. Keszthelyi and G. Kleppe, Phys. Lett. B **281**, 33 (1992).
- [28] I. Oda, JHEP **0905**, 064 (2009) [arXiv:0904.2833 [hep-th]].
- [29] A. Accioly, H. Mukai and A. Azeredo, J. Phys. A **34**, 7213 (2001).
- [30] A. Accioly, Phys. Rev. D **67**, 127502 (2003).
- [31] A. Accioly and M. Dias, Mod. Phys. Lett. A **19**, 817 (2004) [arXiv:hep-th/0402222].
- [32] D. Dalmazi, Phys. Rev. D **80**, 085008 (2009) [arXiv:0908.1954 [hep-th]].
- [33] S. Carlip, J. Korean Phys. Soc. **28**, S447 (1995) [arXiv:gr-qc/9503024].
- [34] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992) [arXiv:hep-th/9204099].
- [35] E. Witten, "Three-Dimensional Gravity Reconsidered," arXiv:0706.3359v1 [hep-th].

- [36] W. Li, W. Song and A. Strominger, JHEP 0804, 082 (2008) [arXiv:0801.4566 [hep-th]].
- [37] E. Witten, Nucl. Phys. B **311**, 46 (1988).
- [38] S. L. Cacciatori, M. M. Caldarelli, A. Giacomini, D. Klemm and D. S. Mansi, J. Geom. Phys. **56**, 2523 (2006) [arXiv:hep-th/0507200].
- [39] E. W. Mielke and P. Baekler, Phys. Lett. A **156**, 399 (1991).
- [40] V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004) [arXiv:hep-th/0312310].
- [41] J. L. Boldo, J. A. Helayël-Neto, L. M. de Moraes, C. A. G. Sasaki and V. J. Vásquez Otoya, Phys. Lett. B **689** (2010) 112 [arXiv:hep-th/0903.5207].
- [42] B. Pereira-Dias, C. A. Hernaski, J. A. Helayël-Neto, "Probing the Effects of Lorentz-Symmetry Violating Chern-Simons and Ricci-Cotton Terms in Higher Derivative Gravity", arXiv:1009.5132. *Artigo submetido para publicação em Phys. Rev. D.*
- [43] C. Pinheiro, G. O. Pires and C. Sasaki, Gen. Rel. Grav. **29**, 409 (1997) [arXiv:gr-qc/9704003].
- [44] C. Pinheiro, G. O. Pires and N. Tomimura, Nuovo Cim. B **111**, 1023 (1996) [arXiv:gr-qc/9704004].
- [45] F. C. P. Nunes and G. O. Pires, Phys. Lett. B **301**, 339 (1993).
- [46] J. L. Boldo, L. M. de Moraes and J. A. Helayel-Neto, Class. Quant. Grav. **17**, 813 (2000) [arXiv:hep-th/9903127].
- [47] J. A. Helayel-Neto, L. M. de Moraes and V. J. V. Otoya, Eur. Phys. J. C **67** (2010) 311 [arXiv:hep-th/1002.0526].
- [48] B. Binengar, J. Math. Phys. **23**, 1511 (1982).
- [49] J. L. Cortes, M. S. Plyushchay, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 3331 (1996) [arXiv:hep-th/9505117].
- [50] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons, New York (1972).
- [51] V. De Sabbata and M. V. Gasperini, Introduction to Gravitation, World Scientific, Singapore (1985).