

TESE DE  
DOUTORADO

**Emissão Espontânea de Prótons na Região de Núcleos Pesados  
e de Massas Intermediárias**

MARTHA MONIQUE NOGUEIRA RODRIGUES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 2016

# Dedicatória

*Aos meus pais.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades que me foram concedidas e também pelos momentos difíceis que contribuíram para o meu aprendizado. A minha mãe Ruth e ao meu pai Edmundo (in memoriam) que sempre me ajudaram para que eu conseguisse me realizar profissionalmente. Agradeço ao meu orientador prof. Sérgio Duarte e ao carinho e atenção dos professores Odilon Tavares, Emil Medeiros, José Helayel, Sebastião Alves e Edgar Côrrea. Aos coordenadores da pós-graduação, aos secretários Elizabete e Ricardo, aos meus colegas de sala e aos demais colegas e amigos, fora e dentro do CBPF.

# Resumo

No presente trabalho apresentaremos uma abordagem baseada no tunelamento de partículas numa barreira de potencial esférica formada pela superposição de potenciais. Os núcleos a serem estudados são os que se encontram longe da linha de estabilidade beta, na chamada “*proton drip line*”. O modelo apresentado neste trabalho tem o objetivo de calcular as meias-vidas desses núcleos, fazendo o uso de uma função de onda em aproximação quasi-clássica (WKB) para calcular a probabilidade de atravessar uma barreira formada pelos potenciais centrífugo, Coulombiano, spin-órbita e nuclear de Wood-Saxon. Observa-se, então, desvios calculados em relação aos dados experimentais. Ao longo dos capítulos, aprimoramos o modelo até conseguir reproduzir os dados experimentais com desvios menores que um por cento.

# Abstract

In this work we present an approach based on tunneling of particles in a spherical potential barrier formed by superposition of potentials. The nuclei to be studied are those that are far from the stability line beta in the so-called "proton drip line". The model presented in this work aims to calculate the half-life of these nuclei, making use of a wave function in almost classical approach (WKB) to calculate the probability of crossing a barrier formed by centrifugal, Coulomb, spin - orbit and nuclear Wood-Saxon potentials. We observed deviations in the calculated with to experimental. Thus, improve the model to reproduce the experimental data with a deviations of less than one percent.

# Conteúdo

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Conteúdo . . . . .	v
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Papel dos núcleos exóticos na síntese de elementos mais pesados . . . . .	5
1.2 Processo-p . . . . .	8
1.3 Planos de trabalho . . . . .	10
<b>2 Modelos Nucleares para Decaimentos</b>	<b>13</b>
2.1 Modelos de estrutura . . . . .	14
2.1.1 Modelo da gota líquida . . . . .	14

2.1.2	Modelo de gás de Fermi . . . . .	18
2.1.3	Modelo de camada nuclear . . . . .	19
2.1.4	Modelo de Nilson . . . . .	22
2.2	Modelos para decaimentos . . . . .	24
2.2.1	Modelo fenomenológico para decaimento nuclear hadrônico . . . . .	24
2.2.2	Aplicação do modelo no decaimento alfa . . . . .	29
2.2.3	Aplicação do modelo a emissão de prótons . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Potencial no Modelo de Camadas para Emissão de Prótons</b>	<b>36</b>
3.1	Modelo Óptico . . . . .	37
3.2	Modelo de Espalhamento Elástico . . . . .	39
3.3	Tunelamento . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Decaimento com Emissão Simples de Prótons</b>	<b>45</b>
4.1	Sensibilidade à Energia de Decaimento . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Efeitos de não-localidade</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Síntese dos Resultados, Conclusões e Perspectivas</b>	<b>67</b>
6.1	Síntese dos resultados . . . . .	67

6.2	Conclusões . . . . .	70
6.3	Perspectivas futuras . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Código Computacional</b>	<b>72</b>
<b>B</b>	<b>Propriedades dos Núcleos</b>	<b>92</b>
B.1	Raio nuclear . . . . .	92
B.2	Energias de ligação . . . . .	93
B.3	Energia de separação . . . . .	94
B.4	Momento angular total do núcleo . . . . .	95
B.5	Momentos eletromagnéticos nucleares . . . . .	96
B.6	Estados excitados dos núcleos . . . . .	97
B.7	Estabilidade nuclear . . . . .	98



# Lista de Tabelas

4.1	Tabela de várias medidas dos núcleos emissores de próton. . . . .	50
4.2	Tabela de núcleos emissores de próton no estado fundamental. . . . .	52
5.1	Tabela que contém núcleos cujas meias-vidas foram ajustadas com a massa efetiva	64
5.2	Núcleos cujas meias-vidas foram ajustadas com a massa efetiva e os raios nucleares.	64

# Lista de Figuras

1.1	Mapa mostrando as diversas instalações onde são produzidos os feixes radioativos pelo mundo. . . . .	4
1.2	Taxa de energias necessárias para produzir feixes radioativos nos diversos aceleradores. . . . .	4
1.3	Carta de nuclídeos onde são mostrados os diversos tipos de decaimentos nucleares. [Fonte: <a href="http://professor.ufabc.edu.br/leigui/disciplinas/grad/bc1203/arquivos:">http://professor.ufabc.edu.br/leigui/disciplinas/grad/bc1203/arquivos:</a> ] . . . . .	6
1.4	Estrutura de uma estrela massiva ( $M \approx 25M_s$ ). As áreas hachuradas mostram a fase de nascimento nuclear que se inicia na região central e migra para as cascas periféricas. Fonte: [10] . . . . .	9
2.1	Energia de ligação de alguns núcleos com número de massa par. Os núcleos estáveis estão representados por círculos. Fonte: <a href="http://www.profpc.com.br">http://www.profpc.com.br</a> . . . . .	16
2.2	Energia de ligação de alguns núcleos com número de massa ímpar. Os núcleos estáveis estão representados por círculos. Fonte: <a href="http://www.profpc.com.br">http://www.profpc.com.br</a> . . . . .	17
2.3	Energia de ligação entre núcleons em função da massa do núcleo. . . . .	22
2.4	Representação da formação de fragmentos [22] . . . . .	25

2.5	Desenho esquemático do processo de overlapping no qual é mostrado a diferença entre os raios do núcleo-pai e o próton e a soma dos raios do núcleo-filha e o próton. . . . .	27
3.1	Na figura à esquerda é mostrado o tunelamento de uma partícula em um única barreira que é equivalente ao tunelamento em barreira dupla. À direita temos uma ressonância Feshbach que acontece quando surge efeitos de graus de liberdade internos no tunelamento ressonante. Fonte: [52]	43
4.1	A figura mostra os fatores espectroscópicos de cada emissor estudado, segundo as diferentes frequências de assalto. A que apresentou desvios das meias-vidas mais bem comportados foi a frequência que se baseia no Teorema do Virial. . . . .	53
4.2	Na parte superior temos o valor-Q dos 44 núcleos emissores de próton. Na parte inferior são mostradas a diferença de energia e a deformação de cada núcleo. . . . .	55
5.1	Sistema de interação no Potencial Não-local no qual o núcleo-alvo troca de posição com o núcleon do projétil e, com isso, os centros de massa do projétil ( $P_{CM}$ ) e do alvo ( $A_{CM}$ ) são movidos conforme mostrado na figura. [70] . . . . .	58
5.2	Relação de núcleos que conseguimos ajustar as meias-vidas calculadas apenas incluindo correção na massa efetiva. . . . .	61
5.3	Relação de núcleos que conseguimos ajustar as meias-vidas calculadas incluindo a correção na massa efetiva e do parâmetro do raio nuclear. . . . .	62
5.4	Relação entre a barreira de potencial e a massa efetiva de um núcleo quase-esférico. No lado esquerdo, temos a relação entre a barreira de potencial e o parâmetro de superfície da massa efetiva. No lado direito são mostrados os potenciais que formaram a barreira de potencial. . . . .	65

5.5 Relação entre a barreira de potencial e a massa efetiva de um núcleo mais deformado. No lado esquerdo, temos a relação entre a barreira de potencial e o parâmetro de superfície da massa efetiva. No lado direito são mostrados os potenciais que formaram a barreira de potencial. . . . . 66

# Capítulo 1

## Introdução

As pesquisas na Física Nuclear de baixas energias tomaram rumos promissores a partir do momento em que se conseguiu produzir feixes secundários de núcleos fora da linha de estabilidade beta, conhecidos como núcleos exóticos, que recebem esta denominação por terem excesso de nêutrons ou prótons e, também, propriedades muito diferentes às dos núcleos estáveis.

Os núcleos instáveis apresentam energias de ligação muito baixas, grandes valores de isospin e possuem características peculiares, tais como estrutura de camadas modificada, com diferentes números mágicos e, também, novos modos coletivos de excitação. Além disso, apresentam densidades anômalas, como halo nuclear, ou seja, uma nuvem pouco densa formada por nêutrons que giram ao redor do caroço; possuem estrutura borromeana que é um sistema ligado de três corpos, onde qualquer um dos dois subsistemas é não-ligado. E apesar do excesso de partículas que possuem e de se dissociarem facilmente durante a colisão, fundem-se com outros núcleos, do mesmo modo que os núcleos estáveis e apresentam variados tipos de deformação.

São conhecidos aproximadamente 300 núcleos estáveis e pouco mais de 3000 nuclídeos

fora da linha de estabilidade beta. Os primeiros casos de núcleos emissores de prótons foram observados por Jackson [1] e confirmado por Cerny [2] em setembro de 1970, mas ainda existem previsões para emissores de prótons que ainda não foram constatadas experimentalmente [3].

Usando núcleos exóticos torna-se possível o estudo de modos de vibrações coletivas, correspondentes a enormes ressonâncias, com energias baixas e de diversas multipolaridades. Através dessas ressonâncias compreende-se as várias propriedades da matéria nuclear assimétrica.

O estudo dos núcleos exóticos pode ser feito através de feixes secundários que podem ser produzidos por diversas reações nucleares. As primeiras experiências com feixes de núcleos fora da linha de beta estabilidade foram feitas em 1965 no CERN [4] onde alvos de lantânio e urânio foram bombardeados com um feixe de prótons de 600 MeV e os produtos de reação eram ionizados em uma fonte de íons e reacelerados. Com baixas energias cinéticas, cerca de 60 KeV, foram produzidos feixes de núcleos pesados ricos em prótons.

Somente na década de 1980, com a evolução dos aceleradores, foi possível a produção de feixes energéticos de núcleos instáveis radioativos, com uma intensidade que permitiu a realização das primeiras experiências de espalhamento com projéteis instáveis.

Com o objetivo de produzir feixes com qualidade cada vez melhor, existem hoje várias instalações em funcionamento localizadas em diversos países como Alemanha, França, USA, Japão, Suíça, Canadá e outros tantos em construção ou em projeto (Figs: 1.1 e 1.2).

O Brasil é o único país no hemisfério Sul que possui um sistema de produção de feixes exóticos, instalado no Laboratório do acelerador Pelletron, no Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP).

Muitas reações nucleares são capazes de produzir feixes de núcleos exóticos, algumas delas são apresentadas a seguir. Na fragmentação de projéteis pesados de altas energias sobre alvos leves, exemplo, o Berílio e o Carbono, são fornecidos feixes secundários de núcleos radioativos de alta energia.

Neste caso, um feixe de núcleos ricos em nêutrons incide sobre o alvo de produção. O projétil e o alvo colidem com um parâmetro de impacto de tal forma que há uma sobreposição entre os dois em uma pequena região, onde são altamente excitados [5]. Em seguida, estes nucleons prosseguem em uma velocidade intermediária entre o alvo e o projétil que seguem viajando com a mesma velocidade e com a mesma energia de excitação que é, razoavelmente, baixa devido à deformação na sua superfície.

Este núcleo é, em geral, muito rico em nêutrons uma vez que se originou de um núcleo rico em nêutrons. Com este método são produzidos núcleos muito exóticos, mas apresenta dificuldades em produzir núcleos exóticos de baixas energias, tais como os envolvidos em processos astrofísicos.

Outro método é o de reação de espalação utilizando prótons [4]. Neste processo, um feixe de prótons de alta energia (em torno de 600 MeV) incide num alvo pesado, lantânio e urânio. Nesta reação há uma rápida emissão de nucleons devido à incidência do próton no alvo que fica em um estado excitado e decai, preferencialmente, pela evaporação de nêutrons formando, em geral, núcleos ricos em prótons.

Outra maneira de produzir núcleos exóticos é através da fusão. Quando dois núcleos se fundem formando um sistema composto, este se desexcita pela emissão de nucleons. Devido à curvatura do vale de estabilidade para a direção dos núcleos ricos em nêutrons, o núcleo composto,

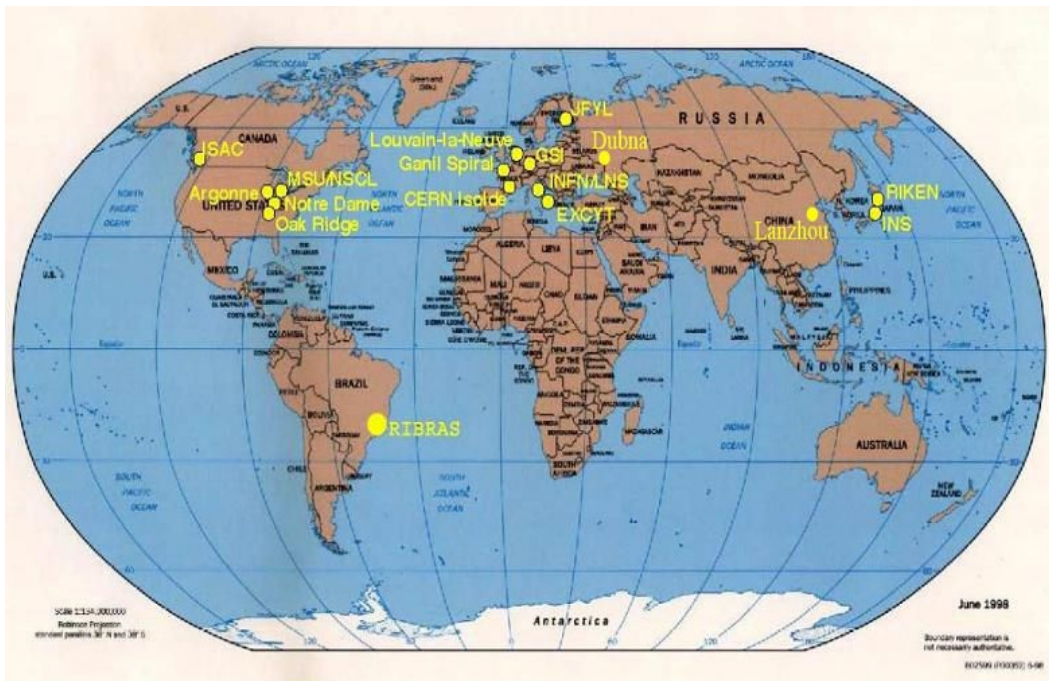


Figura 1.1: Mapa mostrando as diversas instalações onde são produzidos os feixes radioativos pelo mundo.



Figura 1.2: Taxa de energias necessárias para produzir feixes radioativos nos diversos aceleradores.



formado pela fusão de dois núcleos estáveis, está sempre na região de núcleos ricos em prótons. Evaporando poucos nucleons, o núcleo residual será um núcleo rico em prótons devido a energia de excitação do núcleo composto não ser muito grande.

As reações de transferência de nucleons também são empregadas na produção de feixes radioativos. Esta técnica é a utilizada no sistema RIBRAS, no qual um feixe primário de baixa energia incide sobre um alvo de produção (ou alvo primário) que produzirá um feixe secundário de núcleos radioativos por meio de reações de transferência, de um ou dois nucleons, com grande seção de choque. O método permite produzir núcleos exóticos leves com meia-vida muito curta ( $T \approx 100$  ns) e com baixas energias ( $3 - 5$  MeV/u).

Os íons radioativos são separados em vôo por campos magnéticos intensos gerados pelos solenóides supercondutores do sistema RIBRAS. Apesar de produzir núcleos não muito distantes da linha de estabilidade, estes são os mais significativos nos processos de nucleossíntese estelar [6].

## **1.1 Papel dos núcleos exóticos na síntese de elementos mais pesados**

Os núcleos exóticos não são encontrados na natureza, mas são essenciais para compreendermos como foram produzidos os núcleos estáveis na nucleossíntese, suas respectivas abundâncias possibilitando a ampliação do nosso entendimento sobre os processos que determinam a evolução do Universo.

Um dos grande interesse em estudar os núcleos exóticos são as implicações na Astrofísica Nuclear, pois através deles é possível medir reações fora da linha de estabilidade e abundâncias na

nucleossíntese estelar ou primordial. Em ambas as situações, o processo de evolução de estrelas supermassivas, que ocorre num ambiente de altas densidade e temperatura, envolvem os núcleos exóticos (Fig. 1.3).

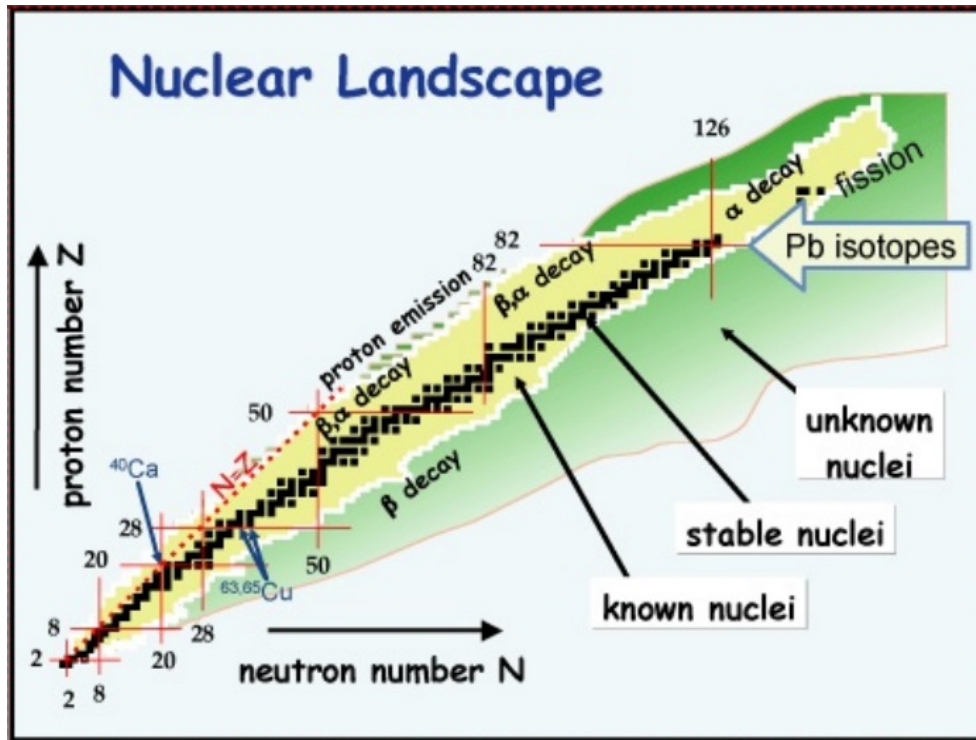


Figura 1.3: Carta de núclídeos onde são mostrados os diversos tipos de decaimentos nucleares. [Fonte: <http://professor.ufabc.edu.br/~leigui/disciplinas/grad/bc1203/arquivos/>]

As reações de fusão nuclear que ocorrem nas estrelas se limitam à produção dos elementos até a região da massa do ferro. Para sintetizar elementos mais pesados faz-se necessário outros mecanismos com a participação dos núcleos exóticos. Isto ocorre principalmente no final da vida ativa de estrelas muito massivas, assim como a nucleossíntese explosiva na fase de supernova destas estrelas.

A possibilidade da existência de núcleos com excesso de prótons e nêutrons em ambientes estelares e inter-estelares contribuiu para o surgimento de reações nucleares que podem participar

de nucleossíntese e de geração de energia [7, 8].

Para a estrela produzir elementos e continuar evoluindo suas reações nucleares devem liberar energia. Mas para ocorrer essas reações nucleares as condições de temperatura, pressão e densidade dos núcleos reagentes devem alcançar valores que propiciem as ocorrências dessas reações. A pressão e a densidade são responsáveis pela probabilidade dos núcleos colidirem. Já a temperatura influencia na energia cinética permitindo colisões entre núcleos para que consigam tunelar a barreira coulombiana ocasionando a fusão efetivamente.

Na primeira fase da nucleossíntese das estrelas, ocorre a queima de hidrogênio com a consequente produção de hélio e energia, como acontece no Sol. Essa fase é a mais longa, pois ela representa a sequência principal do estágio de evolução. Devido à falta de elementos estáveis, a fase entre o hélio e o carbono torna-se muito importante. O carbono-12 pode ser produzido pela fusão de três alfas e, também, existem possibilidades de produzir núcleos exóticos para chegar ao carbono. A partir daí, as capturas de alfa levam à produção de oxigênio e demais elementos [9].

Depois de ultrapassar as dificuldades da estabilidade, a síntese dos elementos por reações de fusão pode continuar até a regiões de massa do ferro e do níquel, conforme a massa da estrela. Para além dessas regiões são necessários outros tipos de processos, como por exemplo a captura de nêutrons, no qual são produzidos elementos pesados com excesso de nêutrons, e o “processo-p” que produz elementos com excesso de prótons.

## 1.2 Processo-p

No final da década de 1960 percebeu-se que altas temperaturas são muito improváveis de serem alcançadas em grandes explosões estelares e, assim, foi sugerido verificar o processo-p nas camadas de estrelas de grande massa ricas em oxigênio e neônio, em pré-supernovas e supernovas.

Existem propostas que o processo-p também pode ocorrer em regiões ricas em carbono em Anãs Brancas que explodem como supernovas do tipo I no qual há um acréscimo de quantidade de matéria de uma outra estrela.

O processo-p é feito de fotodesintegrações de tipo gama-nêutron ( $\gamma, n$ ), gama-próton ( $\gamma, p$ ) ou gama-alfa ( $\gamma, \alpha$ ), captura de nêutrons, prótons ou partículas alfa em energias do centro de massa abaixo de 1 MeV ou de barreira Coulombiana no caso de partículas carregadas [10].

Como mostrado na fig. 1.4 as estrelas são, inicialmente, compostas por hidrogênio, ou seja, por prótons. Com o aumento da temperatura, o hidrogênio se funde formando hélio, liberando energia. Esse processo continua e se a estrela conseguir alcançar a fase de queima de hélio e tiver massa até oito vezes a massa solar, então ela passará a produzir Carbono, Nitrogênio, Oxigênio e alguns elementos um pouco mais pesados.

Outras estrelas com massas muito maiores que o Sol conseguem chegar na fase de pré-Supernova e produzir elementos mais pesados através de vários processos, por exemplo, o processo de captura de prótons (processo rp) e nêutrons (processo-s). Durante este processo há formação de núcleos ricos em prótons e nêutrons que são instáveis por decaimento beta.

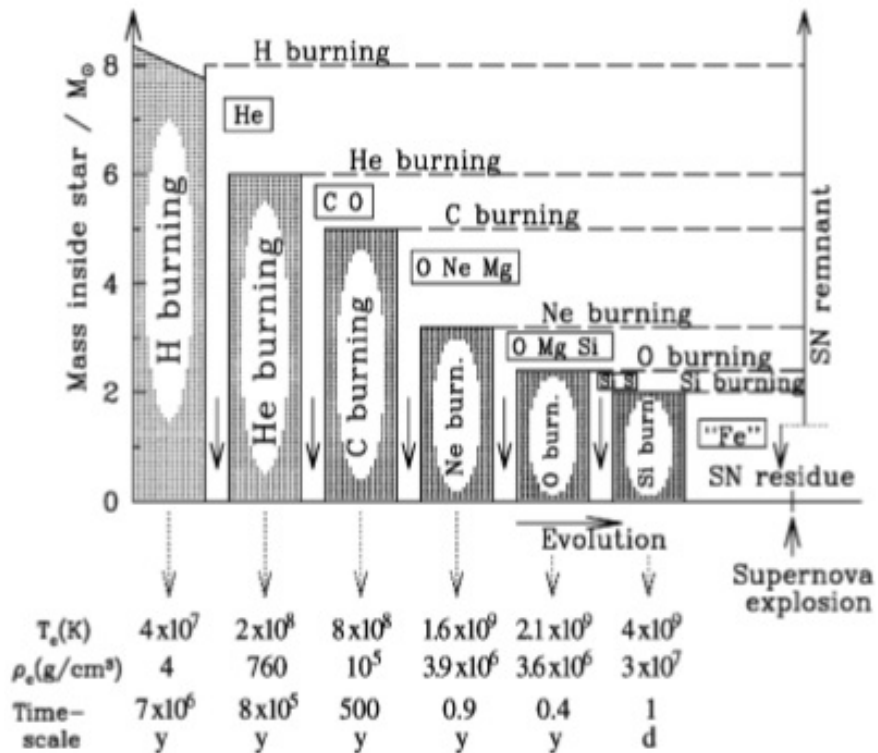


Figura 1.4: Estrutura de uma estrela massiva ( $M \approx 25M_s$ ). As áreas hachuradas mostram a fase de nascimento nuclear que se inicia na região central e migra para as cascas periféricas. Fonte: [10]

Neste estágio de evolução estelar no qual os elementos produzidos possuem massa próxima ao número de massa do Ferro ( $A = 56$ ), a energia nuclear é superada pela força gravitacional, já que esses núcleos são mais ligados e compactos. Devido à alta densidade, a região central da estrela torna-se pesada e sua contração é violenta gerando energia suficiente para superar a grande força repulsiva entre os núcleos devido à carga elétrica do núcleo, possibilitando a ocorrência de processos de fusão nuclear. Essa explosão de energia é chamada de Supernova.

De acordo com o espectro de luz podemos classificar as supernovas em tipo I e tipo II. A primeira possui um espectro na fase inicial da explosão sem presença de hidrogênio; a segunda, apresenta linhas de emissão e absorção de hidrogênio, alargadas pela alta velocidade de ejeção do

gás.

Um dos grandes desafios para a Astrofísica é entender os fenômenos envolvidos no colapso da Supernova e como ocorre a síntese dos elementos pesados nessa explosão. Os núclídeos deficientes em nêutron  $^{138}\text{La}$  e o isomérico  $^{180m}\text{Ta}$  são alguns dos subprodutos do processo-p.

Por conta da baixa abundância do  $^{138}\text{La}$ , sua produção pode ser explicada por processos termonucleares através de partículas energéticas estelares [11, 12] ou por transmutações induzidas de neutrinos [13]. Nas camadas da Supernova onde é produzido o  $^{138}\text{La}$  também são produzidos elementos mais pesados como  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{162}\text{Er}$  e  $^{168}\text{Yb}$ . E através de reações térmicas com o  $^{180m}\text{Ta}$  tem como subprodutos  $^{181}\text{Ta}$  e  $^{179}\text{Ta}$ . Pela síntese de núclídeos-p leves em explosões das estrelas maciças Supernova Tipo II e PCSN são produzidos  $^{113}\text{In}$ ,  $^{115}\text{Sn}$ ,  $^{138}\text{La}$  e  $^{152}\text{Ga}$ . Outros elementos pesados vindos de diversas reações do interior dessas Supernovas são apresentados no trabalho [10].

### 1.3 Planos de trabalho

Uma das possibilidades para se estudar os núcleos exóticos é através do decaimento por emissão de prótons no qual são utilizadas ferramentas análogas aos decaimentos de emissão alfa para a exploração da estrutura nuclear na região de núcleos deficientes em nêutrons.

Muitos modelos consideram um próton orbitando em torno de um caroço inerte e a meia-vida de decaimento é calculada considerando um estado quase-estacionário [14–17]. A dificuldade no estudo dos núcleos exóticos está no fato de que os potenciais nucleares são parametrizados e os valores desses parâmetros são ajustados pelos núcleos da linha de estabilidade beta. E quanto

ao tunelamento, a configuração da barreira depende diretamente da forma do potencial nuclear escolhido, onde podem ser relevantes alguns efeitos de deformação.

Este trabalho apresentará, em seis capítulos, uma evolução dos modelos nucleares existentes, abordando os tipos de potenciais e suas características. O pleno conhecimento deles é extremamente necessário para compreender o modelo que usaremos em núcleos emissores de prótons.

No capítulo dois faremos uma revisão bibliográfica dos principais modelos teóricos existentes. O conhecimento destes modelos são úteis para entender os conceitos dos modelos desenvolvidos para núcleos da linha de estabilidade beta, depois para decaimento alfa e, finalmente, ser aplicado no estudo da emissão espontânea de prótons.

No capítulo três apresentaremos um ajuste de espalhamento elástico de prótons e nêutrons que, apesar de ser o processo reverso do que o adotado por nós, terá o seu resultado para o potencial adotado em nosso trabalho. Para entender esse método será feita uma breve abordagem sobre o modelo que, geralmente, se aplica para esse tipo de processo.

No capítulo quatro serão abordados os cálculos do modelo para explicar a emissão de prótons. Apesar dos nossos cálculos terem origem nos núcleos esfericamente simétricos, o método é adotado para os núcleos exóticos que devido à grande diferença da quantidade entre prótons e nêutrons apresentam uma considerável deformação, ocasionando uma relativa divergência entre os nossos resultados em relação aos dados experimentais. Para tentar entender essa diferença, será feita também uma discussão em relação à sensibilidade da energia no processo de decaimento do núcleo emissor de próton na qual pode sofrer os efeitos de determinados graus de liberdade não explícitos neste trabalho.

No capítulo cinco é apresentada uma implementação importante no modelo. Nesta etapa

é levada em consideração a influência da energia e da densidade nuclear; sendo assim, para o ajuste dos dados trabalhados, no modelo proposto relaciona os efeitos de não-localidade de Pauli devido à natureza fermiônica dos núcleons.

Como dividimos nosso trabalho em etapas e cada uma obteve resultados particulares que contribuíram para o desenvolvimento do modelo, então, no capítulo seis fazemos uma síntese de todos esses resultados e apresentamos nossas conclusões. Ao final do capítulo fazemos sugestões e perspectivas futuras do trabalho.

A fim de melhor compreender algumas informações existentes no texto, foram incluídos anexos que mostram um histograma do código computacional em nossos cálculos e a apresentação das propriedades nucleares mais relevantes para o nosso trabalho.



## Capítulo 2

# Modelos Nucleares para Decaimentos

Devido a sua complexidade, um sistema de três núcleons não permite que a equação de Schrödinger seja solúvel, o que dificulta estudar núcleos pesados a partir das interações de todos os seus constituintes. A alternativa para resolver esse problema é idealizar modelos que se propõem a analisar uma quantidade limitada de dados experimentais. Esses modelos são fundamentalmente de duas naturezas: os chamados modelos coletivos que estudam fenômenos de um núcleo como um todo, como exemplo temos o “Modelo da Gota Líquida” e os que analisam as partículas independentes que sustentam o Princípio de Exclusão de Pauli, como os “Modelo de Camadas”. Neste capítulo faremos uma breve revisão bibliográfica sobre alguns modelos que tentam explicar a estrutura de um núcleo e os que são aplicados para descrever os decaimentos nucleares.

## 2.1 Modelos de estrutura

### 2.1.1 Modelo da gota líquida

Neste modelo o núcleo é comparado com uma gota líquida que sofre diversas rotações e vibrações na qual são levadas em conta propriedades como densidade, tensão superficial e carga elétrica. É um modelo extremamente eficaz na descrição de núcleos que contêm uma grande quantidade de núcleons na camada exterior como é o caso dos núcleos pesados. A equação que rege o modelo da gota líquida é formada por cinco fatores, cada um contribuindo de uma determinada maneira, cujos parâmetros ( $a_v, a_s, a_c, a_A, a_p$ ) são ajustados empiricamente [18].

(a) o primeiro termo refere-se à energia de volume. A energia de ligação por núcleon é aproximadamente constante para  $A > 20$ , pois a força nuclear é de curto alcance, permitindo interação de um núcleon somente com seus vizinhos mais próximos. Assim a energia de ligação total também será proporcional a  $A$ .

$$B_1 = a_v A. \quad (2.1)$$

Essa propriedade ocasiona a saturação das forças nucleares.

(b) os núcleons que estão na superfície contribuem menos para a energia de ligação, porque sentem a força nuclear apenas unilateralmente. A quantidade de núcleons na superfície deve ser proporcional à área da superfície  $a_s = 4\pi R^2$  onde o raio nuclear é calculado como  $R = r_0 A^{1/3}$  (B.2), assim,

$$B_2 = -a_s A^{2/3}, \quad (2.2)$$

esse termo de superfície deverá ser somado à equação 2.1.

(c) a energia de ligação deve ser menor devido à repulsão coulombiana entre os prótons.

Sabendo que a energia de Coulomb de uma esfera com distribuição homogênea de carga, e carga total  $Ze$ , é dada por,

$$\frac{\frac{3}{5}(Ze^2)}{R} = \frac{3 e^2 Z^2}{5 r_0^2 A^{1/3}}, \quad (2.3)$$

então a energia coulombiana contribui com a parcela,

$$B_3 = -a_c Z^2 A^{-1/3} \quad (2.4)$$

(d) quando o número de prótons e nêutrons forem diferentes em um núcleo, a energia de ligação será menor se comparada a um núcleo simétrico. Este termo de assimetria pode ser expresso por,

$$B_4 = -a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \quad (2.5)$$

(e) a energia de ligação é maior quando os números de prótons e nêutrons são pares e é menor quando um dos números é ímpar e, principalmente, quando ambos forem ímpares. Introduzindo o termo de emparelhamento,  $B_5$ , que será,

$$B_5 = +\delta, \quad \text{para núcleos par-par}$$

ou

$$B_5 = 0, \quad \text{para núcleos ímpar-par}$$

ou

$$B_5 = -\delta, \quad \text{para núcleos ímpar-ímpar}$$

Empiricamente, se encontra que

$$\delta \cong a_p A^{-1/2}. \quad (2.6)$$

Reunindo os cinco termos, tem-se:

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} + \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2} a_p A^{-1/2} \quad (2.7)$$

Substituindo na eq. B.3 (vide anexo B), tem-se uma equação para a massa de um núcleo,

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c Z^2 A^{-1/3} + a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} - \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2} a_p A^{-1/2}. \quad (2.8)$$

Esta é conhecida como a *Fórmula semi-empírica de massa* ou *fórmula de Weizsäcker*(1935) na qual é possível observar que uma pequena variação em  $a_v$  e  $a_s$  provoca uma grande variação nos demais parâmetros, devido a sua grande importância nos termos correspondentes à fórmula de massa.

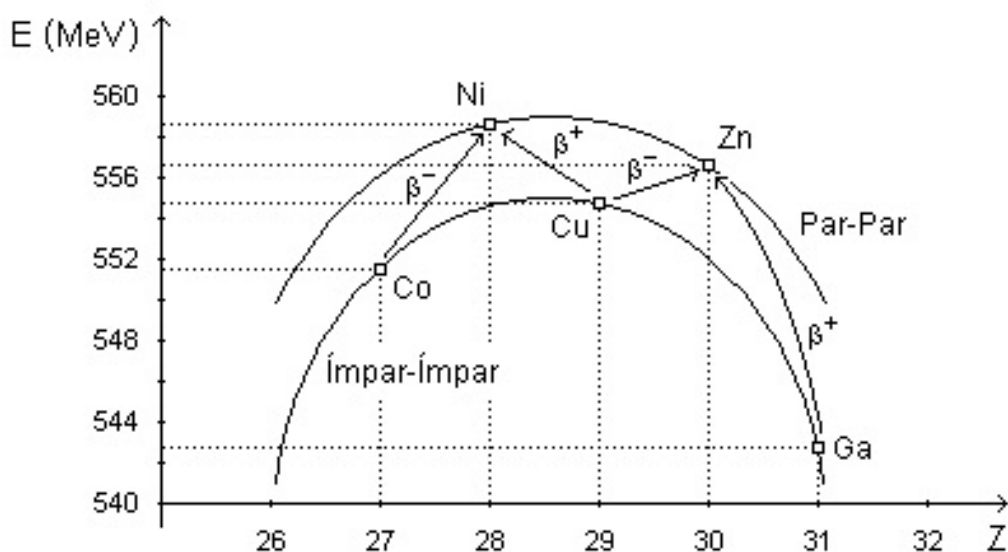


Figura 2.1: Energia de ligação de alguns núcleos com número de massa par. Os núcleos estáveis estão representados por círculos. Fonte: <http://www.profpc.com.br>

A eq. 2.8 permite deduzir que, sendo quadrática em Z para núcleos ímpares, ela representa uma parábola. Para A par, a energia de emparelhamento  $\pm\delta$  cria duas parábolas e inúmeros núcleos

estáveis são formados. Núcleos com  $Z$  vizinhos podem decair um no outro por emissão de uma partícula  $\beta^+$  (pósitron) ou  $\beta_-$  (elétron) (Fig. 2.1).

Para um núcleo com  $A$  ímpar existe apenas um isóbaro estável (Fig. 2.2).

Da eq. 2.8 sendo,

$$E = [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_\alpha]c^2 > 0, \quad (2.9)$$

pode saber se um núcleo é ou não instável pela emissão de partícula  $\alpha$ . Isso acontece para  $A > 150$ .

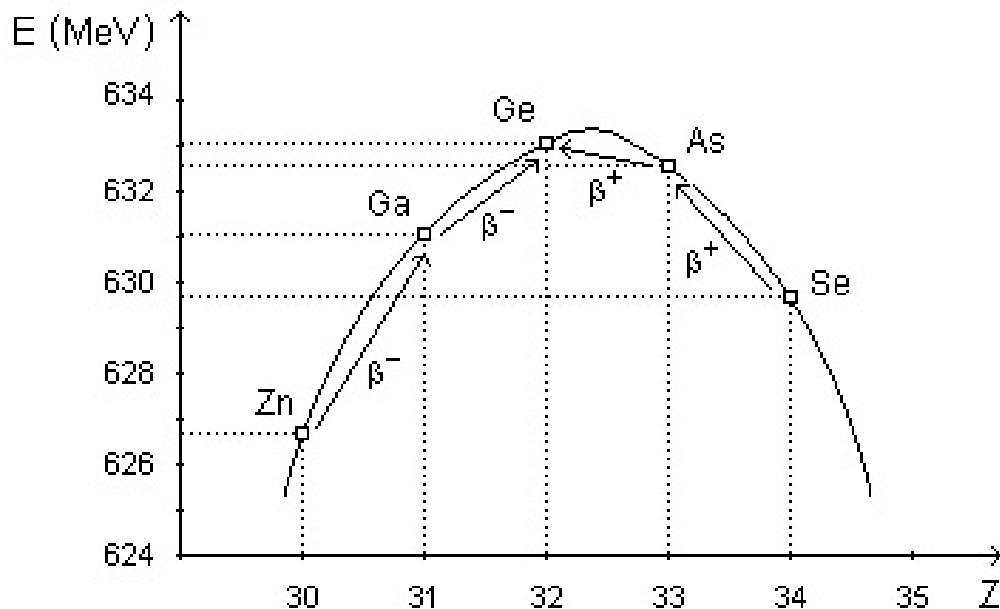


Figura 2.2: Energia de ligação de alguns núcleos com número de massa ímpar. Os núcleos estáveis estão representados por círculos. Fonte: <http://www.profpc.com.br>

Nota-se também pela equação da energia a possibilidade de um núcleo pesado fissionar.

Isso será possível se,

$$E_f = [m(Z, A) - 2m(Z/2, A/2)]c^2 > 0, \quad (2.10)$$

o que é válido para  $A \geq 90$ .

O modelo da gota líquida descreve bem o comportamento médio das energias de ligação com o número de massa  $e$ , por isso é bem usado para explicar os decaimentos alfa e emissão de clusters, mas não fornece muita informação sobre os números mágicos que são elementos essenciais para se conhecer a estrutura de camadas. Diante disso, descreveremos outros modelos mais aptos para explicar essas estruturas.

### 2.1.2 Modelo de gás de Fermi

O Modelo de gás de Fermi consegue explicar algumas propriedades nucleares que não foram bem esclarecidas pelo método anterior.

É levado em consideração que os núcleons se movimentam quase que livremente no interior do núcleo e que, não ocupam um mesmo estado de energia obedecendo ao Princípio de Pauli. Os dois núcleons se deslocam sem colidir, pois todos os possíveis estados finais que poderiam ser ocupados já estão preenchidos. Mas ao se aproximar da superfície, conseqüentemente, afastando-se do núcleo, um núcleon sofre um força de atração dos núcleos que ficaram para trás, fazendo-o retornar, porém no interior do núcleo ele sofre as forças de atração de todos os núcleons que estão à sua volta, o que conduz a uma força resultante igual a zero.

Os núcleons do gás de Fermi obedecem à equação de Schrödinger para a partícula livre,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta^2\Psi = E\Psi,$$

onde  $m$  é a massa do núcleon e  $E$  é a energia, calculada da seguinte forma,

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2\rho}{2} \right)^{2/3}, \quad (2.11)$$

no qual  $E_F$  é a energia de Fermi,  $a$  é a aresta do cubo idealizado onde se encontra a partícula e  $\rho = A/a^3$ , sendo  $A$  a massa do núcleo, quando a energia é máxima para a mesma quantidade de prótons e nêutrons. Se o número de núcleons for diferente, então a densidade fica  $\rho_p = Z/a^3$  para a densidade de prótons e  $\rho_n = N/a^3$  para a densidade de nêutrons.

O modelo do gás de Fermi consegue explicar propriedades nucleares, antes sem embasamento teórico. Por exemplo, podemos dar um entendimento ao termo de assimetria do modelo de gota líquida, pois podemos considerar o núcleo como um gás de prótons com energia de Fermi  $E_F(p)$  adicionado com gás de nêutrons de Fermi  $E_F(n)$ . E a diferença entre o número de prótons e o de nêutrons aumenta a energia do sistema, diminuindo a energia de ligação. Os núcleos pesados possuem uma força coulombiana que torna o poço de potencial mais raso que o de nêutrons, o que significa que o número de prótons, comparado com o de nêutrons, é menor.

Também consegue explicar a abundância de núcleos par-par em relação à falta de núcleos ímpar-ímpar estáveis. Acontece que o núcleo ímpar-ímpar tem um próton e um nêutron isolados, cada qual em poço de potencial e essa diferença de energia pode gerar a passagem de um dos núcleons para o poço do outro através de uma emissão beta, deixando o núcleo instável [3].

Além do modelo de gás de Fermi existem outros modelos mais sofisticados que conseguem explicar a estrutura do núcleo, como é o caso do modelo de camadas.

### **2.1.3 Modelo de camada nuclear**

Neste modelo os núcleons continuam independentes, mas submetidos a um potencial central médio nuclear. O objetivo do modelo de camadas é tentar explicar a origem desse potencial.

Consideramos que a energia potencial nuclear seja função de  $V(r)$ , com simetria esférica, e que dependa de  $r$ , ou seja,  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$ . Assim, calcularemos o estado dos núcleons de forma individual pela equação de Schrödinger em coordenadas esféricas, levando em conta apenas a parte radial,

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + V(r)\Psi = E\Psi \quad , \quad (2.12)$$

onde  $m$  pode ser a massa do próton ou a massa do nêutron. Os autovalores, correspondentes a  $E$  são os orbitais ou órbitas.

De acordo com o modelo de camadas, os núcleons preenchem os orbitais de energias mais baixas segundo o Princípio de Exclusão de Pauli.

Atribuindo um momento angular ao núcleon,  $L^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ ,

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) + \left[ V(r) + \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R(r) = ER(r) \quad . \quad (2.13)$$

Substituindo  $R(r) = \xi/r$  temos,

$$\frac{d\xi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \xi(r) = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Esse potencial central é praticamente constante devido ao curto alcance das forças nucleares e tende rapidamente a zero na superfície o que o aproxima de potencial de oscilador harmônico e um potencial de poço retangular.

Para isso, é comum empregar a forma de potencial nuclear de Wood-Saxon

$$V = V_0 / (1 + \exp[(r - R)/a]) \quad , \quad (2.15)$$

no qual  $V_0$ ,  $r$  e  $a$  correspondem a parâmetros ajustáveis. Mas, este potencial não é suficiente para os nossos cálculos, então, recorreremos ao termo de interação de spin-órbita, como proposto por



Mayer [19], e que tem a seguinte forma,

$$f(r)\vec{\ell} \cdot \vec{s} \text{ ,} \quad (2.16)$$

sendo  $f(r)$  uma função radial.

Os autovalores são dados em primeira ordem,

$$E = \int \Psi^* H \Psi = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega + \alpha \int \Psi^* f(r) \ell \cdot s \Psi \text{ ,} \quad (2.17)$$

onde  $\alpha$  é uma constante de proporcionalidade. Sabendo que  $\ell \cdot s = (j^2 - \ell^2 - s^2)/2$  então,

$$\int \Psi^* f(r) \ell \cdot s \Psi = 1/2 \text{ para } j = \ell + 1/2 \quad (2.18)$$

$$\int \Psi^* f(r) \ell \cdot s \Psi = \frac{1}{2}(\ell + 1) \text{ para } j = \ell - 1/2 \text{ .} \quad (2.19)$$

A interação spin-órbita remove a degenerescência do número de spin,  $j$  e promove alteração nos valores de energia.

$$\Delta E|_{j=\ell+1/2} = -|\alpha| \langle f(r) \rangle \ell/2 \text{ ,} \quad (2.20)$$

$$\Delta E|_{j=\ell-1/2} = +|\alpha| \langle f(r) \rangle (\ell + 1)/2 \text{ ,} \quad (2.21)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro com dimensões de energia.

Existem núcleos cuja energia de ligação apresenta picos, como pode ser observado na figura 2.3. Notou-se que quando os núcleos possuem certos números de prótons ou nêutrons ele é muito mais fortemente ligado. Esses números para os quais a energia de ligação é muito maior do que a prevista foram chamados de números mágicos,

$$Z \text{ ou } N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \text{ .} \quad (2.22)$$

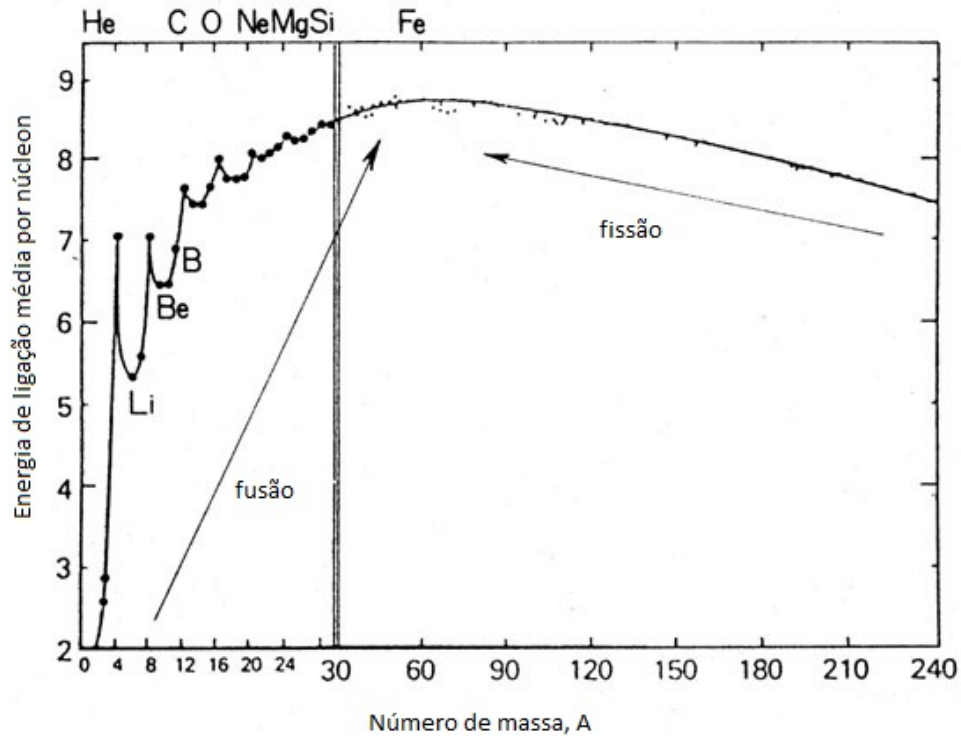


Figura 2.3: Energia de ligação entre núcleons em função da massa do núcleo.

### 2.1.4 Modelo de Nilson

Os núcleos que estamos interessados em estudar possuem número de prótons diferente do de nêutrons. Isso faz com que esses núcleos sejam deformados e para eles devemos começar a considerar potenciais centrais não mais esféricos.

Esse tipo de potencial foi desenvolvido por S. G. Nilson que propôs o seguinte hamiltoniano,

$$H = H_0 + C\ell \cdot s + D\ell^2 \quad (2.23)$$

no qual  $H_0$  é um hamiltoniano do oscilador harmônico anisotrópico [3],

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (2.24)$$

no qual  $\ell.s$  corresponde ao termo de acoplamento spin-órbita do modelo de camadas esféricas e  $\ell^2$  é um termo destinado a simular um achatamento do potencial do oscilador e torná-lo mais próximo de um potencial real e  $C$  e  $D$  são constantes que podem ser determinadas pelos valores experimentais.

Em relação às frequências, temos,

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right) \quad (2.25)$$

$$\omega_z^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right) , \quad (2.26)$$

os parâmetros  $\omega_0$  e  $\delta$  podem ter seus valores obtidos pela conservação do volume nuclear, resultando em  $\omega_x\omega_y\omega_z = cte = \omega_0^3$  onde  $\omega_0^3$  corresponde a uma frequência para deformação nula.

Neste caso,

$$\omega(\delta) = \omega_0 \left(1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3\right)^{-1/6} \quad (2.27)$$

que é função do parâmetro de deformação  $\delta$  e as energias resultam da diagonalização do hamiltoniano que são funções de  $\delta$ . O valor positivo de  $\delta$  corresponde aos núcleos prolatos e se for negativo, núcleos oblatos.

É importante considerar que  $j$  e  $\ell$  não são considerados bons números quânticos quando os núcleos não são esféricos, pois deixam de ser constantes de movimento de potencial.

O modelo de Nilson consegue dar explicações sobre fenômenos em núcleos deformados que os modelos de camada esférica não conseguem como, por exemplo, a determinação do spin dos núcleos leves e de quase todos os pesados, os momentos magnéticos de muitos nuclídeos e, também, os momentos de quadrupólos elétricos para a região  $150 < A < 180$  de forma correta.

## 2.2 Modelos para decaimentos

### 2.2.1 Modelo fenomenológico para decaimento nuclear hadrônico

Entende-se por hádron partículas compostas por quarks que se mantêm coesos devido à interação forte entre eles. Os hádrons mais conhecidos são os prótons e os nêutrons. Aglomerados de prótons e nêutrons são conhecidos como clusters e a radioatividade desses clusters constitui um processo intermediário entre o decaimento alfa e a fissão espontânea [20].

No trabalho desenvolvido por Duarte e Gonçalves [21, 22] é explicada a emissão de clusters, através de um Modelo de Pré-Cisão para Desintegrações Nucleares Raras. Este modelo descreve o processo de deformação de um núcleo-pai que se fragmenta em duas partes e, neste caso, são consideradas interações coulombiana e nuclear entre os fragmentos.

Nesse processo tanto o núcleo-pai quanto a fase final dos fragmentos são considerados esféricos. No entanto, durante a fase de pré-cisão os fragmentos são como calotas esféricas em contato por um círculo de base comum no qual pode haver transferência de massa e carga entre as partes do sistema.

As coordenadas geométricas mostradas na fig. 2.4 descrevem os estados do sistema durante a fase de separação. As coordenadas  $R_1$  e  $R_2$  são os raios das calotas (1 corresponde ao fragmento emitido e 2, o núcleo-filha),  $\zeta$  corresponde a distância entre os centros geométricos das calotas e  $\xi$  é a distância entre o centro do fragmento maior e o plano do círculo de base.

Para o cálculo da meia-vida é utilizada a aproximação WKB para a função de onda [23–26]. Sendo assim, devemos eliminar os quatro vínculos descritos anteriormente a fim de reduzir

o problema ao caso unidimensional. Para isso foram criadas restrições nas relações de vínculo durante a dinâmica do processo. Uma dessas restrições é manter o volume total do sistema, a outra é considerar que as calotas têm uma base comum e, para finalmente chegar ao caso unidimensional, considerou-se que os raios são constantes durante todo o processo.

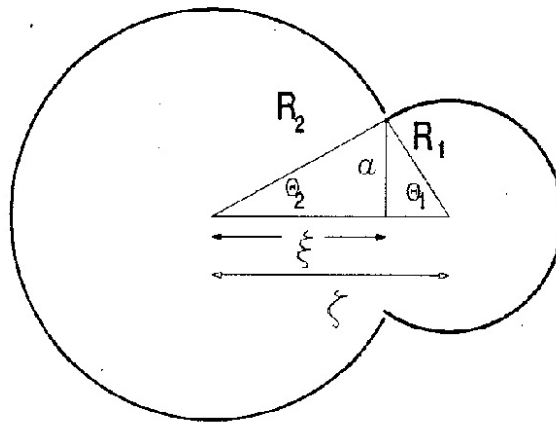


Figura 2.4: Representação da formação de fragmentos [22]

A barreira de potencial é formada pelo termo coulombiano e o de superfície. No caso do potencial coulombiano, deve-se lembrar que os núcleons deixam de ter simetria esférica durante o processo de fragmentação, portanto a escolha adequada do sistema de coordenadas torna-se essencial. Para este caso foi escolhido o sistema de coordenadas toroidal para que se possa acomodar as condições de contorno para a energia potencial coulombiana. O potencial de superfície é similar ao potencial do modelo de gota líquida, diferindo apenas na definição da constante de tensão superficial que nesse caso tem a seguinte forma,

$$V_s = \sigma_{eq} S , \quad (2.28)$$

onde  $S$  corresponde a soma das superfícies das calotas e  $\sigma_{eq}$  é determinada pelo valor- $Q$ . É impor-

tante, também, levar em conta os efeitos da barreira centrífuga no processo de fragmentação.

No modelo de pré-cisão também são definidos os raios e as massas nucleares que, neste caso, são as massas de cada calota nas quais dependem de suas, respectivas, velocidades e da densidade do núcleo-pai.

O raio final dos fragmentos é dado pela equação,

$$R_i = \left[ \frac{Z_i}{Z_p} \right]^{1/3} R_p \quad i = 1, 2, \quad (2.29)$$

e  $R_p = r_0 A_p^{1/3}$  onde  $r_0$  é o parâmetro do raio nuclear ajustado pelos dados experimentais.

A massa efetiva do sistema calculada como,

$$\mu_{eff} = \mu \alpha^2 \quad (2.30)$$

na qual  $\mu$  é a massa reduzido do sistema ( $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ) e  $\alpha$  caracteriza a evolução do sistema na fase molecular.

Baseados na barreira de potencial do modelo de fragmentos, fizemos adaptações para serem usadas mais adiante no decaimento alfa. Identificou-se que seria possível realizar uma parametrização na região de superposição por uma forma parabólica de ordem  $q$ ,

$$V_c = Q + \left( \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2\mu_0 c^2} + \frac{2Z_d e^2}{c} - Q \right) \left( \frac{s - a}{c - a} \right)^q, \quad q \geq 1 \quad e \quad a < s < c. \quad (2.31)$$

e na região de separação, utilizamos apenas as formas de potenciais coulombiano e centrífugo convencionais,

$$V_{coul}(s) = \frac{2 Z_d e^2}{s}, \quad V_{cent} = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2\mu_0 s^2} \quad s \geq c, \quad (2.32)$$

nas quais  $Q$  é a energia total de decaimento,  $\ell$  é o momento angular orbital,  $Z_d$  o número atômico do núcleo-filha.

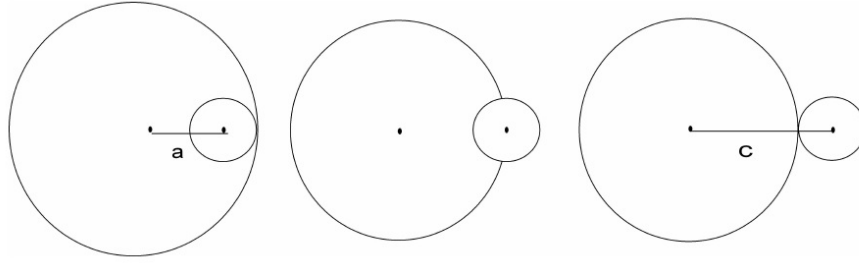


Figura 2.5: Desenho esquemático do processo de overlapping no qual é mostrado a diferença entre os raios do núcleo-pai e o próton e a soma dos raios do núcleo-filha e o próton.

Os termos  $a = R_p - r_p$  e  $c = R_d + r_p$ , como mostrados na Fig. (2.5), representam a diferença e a soma, respectivamente, entre os raios dos núcleos pai e filha e o raio da partícula emitida.

A equação  $c - a$  corresponde à extensão da região de superposição, ou seja, região na qual a partícula alcança a superfície nuclear e o termo  $e$  corresponde à carga do elétron.

Calcula-se a constante de decaimento,  $\lambda$ , como

$$\lambda = \lambda_0 P P_{se}, \quad (2.33)$$

onde  $P = e^{-G_{ov}}$  e  $P_{se} = e^{-G_{se}}$ . A quantidade  $\lambda_0$  corresponde ao fator de frequência de assalto a barreira, calculada da seguinte maneira,

$$\lambda_0 = \frac{v}{2a} = \left( \frac{Q}{2\mu_0 a^2} \right)^{1/2}, \quad (2.34)$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula a ser emitida. O termo  $P$  pode ser interpretado como sendo a probabilidade da partícula atravessar a superfície nuclear, e  $P_{se}$  de tunelar a barreira coulombiana mais centrífuga na região de separação.

O termo  $G$  corresponde ao fator de Gamow [27] que define o tunelamento da barreira para o processo de decaimento nuclear e apresenta contribuições para as regiões de superposição,  $G_{ov}$ ,

e de separação,  $G_{se}$ ,

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2\mu(s)[V(s) - E]} ds. \quad (2.35)$$

Na região de superposição não se consegue determinar a massa reduzida do sistema, então para resolver esse problema Duarte e Gonçalves [21, 22] fizeram uma análise do comportamento da massa efetiva dos fragmentos, onde foi observada uma forma aproximadamente parabólica para a dependência da massa efetiva com a separação entre os centros dos fragmentos. Numa parametrização da forma obtida naquele trabalho, determinamos uma expressão simples para a massa efetiva dada por,

$$\mu(s) = \mu_0 \left( \frac{s - a}{c - a} \right)^p, \quad p \geq 0 \quad e \quad a < s < c, \quad (2.36)$$

tendo por limite após a separação dos fragmentos a massa reduzida  $\mu_0$ , representada pela expressão  $\mu_0 = (m_d m)/(m_d + m)$ .

Substituindo as equações (2.31) e (2.36) na eq. (2.35) e fazendo algumas manipulações algébricas (Apêndice da ref. [28]) a integral de Gamow para a região de superposição fica dada por,

$$G_{ov} = c_1 \sqrt{\mu_0 Q} (c - a) g H(x, y), \quad (2.37)$$

com  $c_1 = 2\sqrt{2\mu_0 c}/\hbar c$  onde  $c$  corresponde a velocidade da luz e,

$$x = \frac{c_2 \ell(\ell + 1)}{\mu_0 Q_\alpha c^2}; \quad y = \frac{Z_d e^2}{Q_\alpha c} \quad e \quad H(x, y) = \sqrt{x + 2y - 1}. \quad (2.38)$$

com  $c_2 = (\hbar c)^2/(2 \mu_0 c)$ . Observa-se que os parâmetros  $p$  e  $q$  das expressões do potencial e da massa efetiva na região de superposição foram incorporados em um único parâmetro  $g$  dado por,

$$g = \left( \frac{2}{p + q + 2} \right). \quad (2.39)$$

Este parâmetro está limitado no intervalo  $0 \leq g \leq 2/3$ .



O expoente do fator de Gamow na região de separação fica dado pela seguinte expressão,

$$G_{se} = c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\sqrt{x}}{2y} \ln \left( \frac{\sqrt{x(x+2y-1)} + x + y}{\frac{x}{y} \left[ 1 + \sqrt{x + \frac{x}{y^2}} \right]^{-1} + y} \right) \right\} \quad (2.40)$$

$$+ c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 - \frac{1}{y}}{\sqrt{1 + \frac{x}{y^2}}} \right)} - \sqrt{\frac{1}{2y} \left( 1 + \frac{x}{2y} - \frac{1}{2y} \right)} \right\}.$$

onde  $c_3 = 2\sqrt{2\mu_0}ce^2/(\hbar c)$ .

Quando  $\mu_0$  é dado em unidades de MeV e  $c$  em fm/s, com  $\hbar c = 197.32 \text{ MeV}\cdot\text{s}$  temos  $c_1 = 0.43747$ ,  $c_2 = 20.9008 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^2$  e  $c_3 = 1.25988372$ . Os parâmetros  $x$  e  $y$  definidos nas expressões de Gamow são dependentes dos raios nucleares e da energia do decaimento (eq. 2.38).

A determinação dos raios nucleares será feita na próxima seção onde o modelo apresentado foi adaptado para o decaimento alfa. A radioatividade alfa é um processo que já foi muito bem analisado [29–32] e, sendo assim, o sucesso do modelo depende dos resultados satisfatórios quando aplicado nesses conjuntos de dados.

## 2.2.2 Aplicação do modelo no decaimento alfa

Os decaimentos alfa nucleares constituem a desintegração nuclear com mais casos experimentais de meias-vidas bem determinadas, por isso será usado como base para garantir a eficiência do modelo.

Devido à utilização de potenciais esfericamente simétricos dentro do modelo nos restringiremos aos casos do decaimento alfa com  $\ell = 0$  de estado fundamental para estado fundamental, o que corresponde a uma quantidade mais limitada de dados, cerca de 336 núcleos alfa emissores [33]. O fator de Gamow na região de superposição para  $\ell = 0$  fica da seguinte forma (de acordo

com a eq. (2.37)),

$$G_{ov} = c_1 \sqrt{\mu_0 Q_\alpha} (c - a) g \sqrt{2y - 1}. \quad (2.41)$$

para o decaimento alfa,  $c = R_d + r_\alpha$  onde  $r_\alpha = 1.620 \pm 0.01 \text{ fm}$  que corresponde ao raio homogêneo equivalente da alfa extraído do espalhamento elástico de elétrons sobre o  $^4\text{He}$  [33].

A energia total de decaimento,  $Q_\alpha$ , é calculada com os excessos de massa atômica,

$$Q = \Delta M_p - (\Delta M_d + \Delta M_\alpha) + 10^{-6} k (Z_p^\beta - Z_d^\beta) \text{ MeV}, \quad (2.42)$$

onde  $\Delta M$  é o excesso de massa da partícula e  $kZ_\beta$  representa a energia de ligação dos elétrons no átomo e seus valores são  $k = 8.7 \text{ eV}$  e  $\beta = 2.517$  for  $Z \geq 60$  e  $k = 13.6 \text{ eV}$  e  $\beta = 2.408$  for  $Z < 60$ . e, na região de separação, da eq. (2.40), fica,

$$G_{se} = c_3 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_\alpha} \right)^{1/2} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{1}{2y}} - \sqrt{\frac{1}{2y} \left( 1 - \frac{1}{2y} \right)} \right\}$$

com  $c_3$  determinado na seção anterior.

A determinação dos valores das variáveis auxiliares  $x$  e  $y$  necessita do conhecimento dos raios nucleares  $R'_i$  [i = p (pai), d (filha, do inglês *daughter*)] (vide eq. 2.38). Baseando-se no modelo da gotícula, Myers [34] e Moller [35] estimaram os raios nucleares com base nos raios das distribuições de próton,  $R_{Zi}$ , e de nêutron,  $R_{Ni}$ , dos núcleos pai e filha como,

$$R_i = \frac{Z_i}{A_i} R_{Zi} + \left( 1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) R_{Ni}, \quad (2.43)$$

sendo estes últimos dados como funções dos raios das correspondentes distribuições homogêneas equivalentes de prótons,  $r_{Zi}$ , e de nêutrons,  $r_{Ni}$ , por

$$R_{ji} = r_{ji} \left[ 1 + \frac{5}{2} \left( \frac{w}{r_{ji}} \right)^2 \right], \quad \text{com } j = Z, N, \quad i = p, d,$$

tomando-se o parâmetro de difusibilidade de superfície nuclear igual a  $\omega = 1 \text{ fm}$ , os raios nucleares ficam finalmente determinados conhecendo-se os  $r_{Zi}$  e  $r_{Ni}$ , dados por,

$$r_{Zi} = \tilde{r}_0(1 + \bar{\epsilon}_i) \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) \left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} - \bar{\delta}_i \right) \right] A_i^{1/3} \quad (2.44)$$

$$r_{Ni} = \tilde{r}_0(1 + \bar{\epsilon}_i) \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{Z_i}{A_i} \left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} - \bar{\delta}_i \right) \right] A_i^{1/3} \quad (2.45)$$

onde

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{4e^{0.831A_i^{1/3}}} - \frac{0.191}{A_i^{1/3}} + \frac{0.0031Z_i^2}{A_i^{4/3}} \quad (2.46)$$

$$\bar{\delta}_i = \frac{\left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} + 0.004781 \frac{Z_i}{A_i^{2/3}} \right)}{\left( 1 + \frac{2.52114}{A_i^{1/3}} \right)}, \quad (2.47)$$

utilizando-se  $\tilde{r}_0 = 1.16 \text{ fm}$ .

Nas referências [28, 33] verifica-se que a aplicação do modelo no decaimento alfa gerou resultados bastantes satisfatórios podendo garantir, dessa forma, o sucesso desses cálculos. E depois dessa conclusão, o modelo foi utilizado para o estudo de núcleos emissores de prótons.

### 2.2.3 Aplicação do modelo a emissão de prótons

Os núcleos deficientes em nêutrons localizados na “*proton drip line*” ainda são pouco estudados. A emissão de próton foi observada em 1969 num isômero do  $^{53}\text{Co}$  e, desde então, tornou-se um canal importante para o advento de uma nova Física Nuclear e contribuiu para o surgimento de vários trabalhos a respeito [36–41]. O que tentamos no trabalho [42] foi reproduzir as meias-vidas experimentais desses núcleos emissores de prótons usando a aproximação semi-clássica WKB, considerando um caráter efetivo no tunelamento do próton de valência na barreira de potencial. Essa barreira é generalizada pela superposição dos potenciais Coulombiano, centrífugo, spin-órbita e nuclear Wood-Saxon.

As meias-vidas dos núcleos exóticos emissores de prótons em estados fundamental e metaestável são calculadas usando o cálculo da penetrabilidade através da barreira de potencial [28].

Como visto anteriormente a taxa de decaimento,  $\lambda$ , é calculada como

$$\lambda = \lambda_0 P P_{se}, \quad P = e^{-G_{ov}}, \quad P_{se} = e^{-G_{se}} \quad (2.48)$$

onde  $\lambda_0$  corresponde à frequência de assalto à barreira por unidade de tempo,  $P$  é a probabilidade de encontrar um próton na superfície nuclear,  $G_{ov}$  é o fator de Gamow calculado na região de superposição,  $P_{se}$  é o fator de penetrabilidade através da região externa da barreira, e  $G_{se}$  é o fator de Gamow calculado na região de separação que se estende até a superfície de contato  $c = R_d + r_p$  no qual  $R_d$  é o raio do núcleo filha, e  $r_p$  é o raio do próton. A quantidade  $\lambda_0$  é calculada como  $\lambda_0 = \frac{v}{2a}$ , onde  $v$  é a velocidade relativa do próton emitido, e  $a = R_p - r_p$  é o ponto de contato interno.

Para as transições de próton do estado fundamental ou isomérico do núcleo-pai para o estado fundamental do núcleo-filha, as expressões para os termos do fator de Gamow são dadas por,

$$G_{ov} = 0.4374702(c - a)g\sqrt{\mu_0 Q_p} H(x, y) \quad (2.49)$$

onde

$$H(x, y) = (x + 2y - 1)^{1/2}, \quad (2.50)$$

e

$$G_{se} = 0.62994186 Z_d \left( \frac{\mu_0}{Q_p} \right)^{1/2} F(x, y) \quad (2.51)$$

onde

$$F(x, y) = \frac{x^{1/2}}{2y} \times \ln \frac{x^{1/2} H(x, y) + x + y}{\sqrt{x + y^2}} + \arccos \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{y - 1}{\sqrt{x + y^2}} \right) \right]^{1/2} - \frac{H(x, y)}{2y}. \quad (2.52)$$

Nas expressões acima as quantidades  $x$  e  $y$  são definidas por

$$x = \frac{20.9008 \ell(\ell + 1)}{\mu_0 c^2 Q_p}, \quad y = \frac{1}{2} \frac{Z_d e^2}{c Q_p}, \quad e^2 = 1.4399652 \text{ MeV}\cdot\text{fm}, \quad (2.53)$$

onde  $\mu_0$  representa a massa reduzida do sistema de desintegração, e  $\ell$  é o momento angular orbital mútuo resultante da barreira centrífuga associada com a rotação do próton e o núcleo-filha em torno de um centro de massa comum. Segundo [43] a equação (2.49) resulta da combinação da potência das funções que descrevem as massas reduzidas,  $\mu(s)$ , e a energia potencial,  $V(s)$ , na região de superposição ( $a \leq s \leq c$ ), i.e.,

$$\mu(s) = \mu_0 \left( \frac{s - a}{c - a} \right)^p, \quad p \geq 0 \quad (2.54)$$

$$V(s) - Q_p = Q_p (x + 2y - 1) \left( \frac{s - a}{c - a} \right)^q, \quad q \geq 1, \quad (2.55)$$

onde  $s$  é a separação entre os centros de massa do próton com o núcleo-filha. O fator de Gamow na região de superposição é calculado como,

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_a^c \sqrt{2\mu(s) [V(s) - Q_p]} ds. \quad (2.56)$$

O parâmetro de ajuste do modelo é descrito como,

$$g = \frac{2}{p + q + 2}, \quad 0 < g \leq 2/3. \quad (2.57)$$

Os valores das quantidades  $\mu_0$  and  $Q_p$  são obtidos pelo método mais recente de se calcular os excessos de massas atômicas ( $\Delta M$ ) [44], que inclui os efeitos de “screening” para o núcleo causado pelos elétrons em torno dele. As expressões para  $\mu_0$  e  $Q_p$  são:

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_p} \quad (2.58)$$

$$m_d = A_d + \frac{\Delta M_d}{F} - \left( Z_d m_e - \frac{10^{-6} k Z_d^\beta}{C} \right), \quad (2.59)$$

$$Q_p = \Delta M_p - (\Delta M_d + \Delta M) + 10^{-6}k \left( Z_p^\beta - Z_d^\beta \right), \quad (2.60)$$

onde  $m_p = 1.00727646676$  u é a massa do próton,  $m_e = 0.548579911 \times 10^{-3}$  u é a massa de repouso do elétron,  $C = 931.494009$  MeV/u é o fator de conversão massa-energia e  $\Delta M = 7.288983386$  MeV é o excesso de massa do próton. A quantidade  $kZ^\beta$  representa o total da energia de ligação dos  $Z$  elétrons no átomo, onde os valores  $k = 8.7$  eV e  $\beta = 2.517$  para núcleos de  $Z \geq 60$ , e  $k = 13.6$  eV e  $\beta = 2.408$  para  $Z < 60$  são originados dos dados de Huang *et al.* [45].

Os valores dos raios de prótons usados na presente sistemática é  $r_p = 0.87 \pm 0.02$  fm de acordo com os adquiridos pelos valores médios dos raios do próton em vários experimentos e análises de dados de espalhamento elástico de elétron num alvo de hidrogênio [42].

A aproximação de núcleo esférico foi adotada pelo presente modelo, e o raio nuclear do núcleo pai,  $R_p$ , e filha,  $R_d$ , foram calculados pelo modelo de gota líquida [34, 35],

$$R_i = \frac{Z_i}{A_i} R_{pi} + \left( 1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) R_{ni}, \quad i = p, d, \quad (2.61)$$

onde os raios  $R_{ji}$  são dados por

$$R_{ji} = r_{ji} \left[ 1 + \frac{5}{2} \left( \frac{w}{r_{ji}} \right)^2 \right], \quad j = p, n; \quad i = p, d, \quad (2.62)$$

no qual  $w = 1$  fm é a difusibilidade da superfície nuclear, e o raio  $r_{ji}$  representa o raio da distribuição de densidade do próton ( $j = p$ ) ou nêutron ( $j = n$ ). Para o cálculo dessas quantidades foi usado o modelo da gota líquida descrita por Möller *et al.* [35],

$$r_{pi} = r_0 (1 + \bar{\epsilon}_i) \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) \left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} - \bar{\delta}_i \right) \right] A_i^{1/3}, \quad (2.63)$$

$$r_{ni} = r_0 (1 + \bar{\epsilon}_i) \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{Z_i}{A_i} \left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} - \bar{\delta}_i \right) \right] A_i^{1/3}, \quad (2.64)$$

onde

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{4e^{0.831A_i^{1/3}}} - \frac{0.191}{A_i^{1/3}} + \frac{0.0031Z_i^2}{A_i^{4/3}}, \quad (2.65)$$

$$\bar{\delta}_i = \left( 1 - \frac{2Z_i}{A_i} + 0.004781 \frac{Z_i}{A_i^{2/3}} \right) / \left( 1 + \frac{2.52114}{A_i^{1/3}} \right), \quad (2.66)$$

Após o estudo da barreira esquemática em núcleos emissores de prótons, aprimoramos o nosso modelo com uma barreira mais realista formada pelos potenciais Coulombiano e centrífugo e, também, com os termos de spin-órbita e o potencial nuclear de Wood-Saxon. No próximo capítulo faremos um estudo de uma barreira mais realista em um modelo que é, geralmente, utilizado para explicar o espalhamento nuclear. Espalhamento nuclear pode ser elástico ou inelástico. O espalhamento elástico é aquele em que há transferência apenas de energia cinética e o inelástico é o que, durante a transferência, parte da energia cinética é usada para excitar o núcleo alvo.

## Capítulo 3

# Potencial no Modelo de Camadas para Emissão de Prótons

Como visto no primeiro capítulo, um dos métodos para produzir núcleos ricos em prótons é através do espalhamento. O espalhamento elástico é um processo que acompanha todo tipo de reação para entender as propriedades nucleares. No entanto, quando aplicado em núcleos pesados, o espalhamento elástico torna-se complexo, devido aos muitos graus de liberdade, por conta do que pode ocorrer durante a interação (excitação, deformidade na forma do núcleo, etc) o que causa a perda de fluxo dos canais elásticos para os canais inelásticos, principalmente próximo à região da barreira Coulombiana.

Para energias mais altas, a força nuclear atrativa entre o projétil e o núcleo alvo torna-se suficientemente grande para mantê-los unidos. As interferências produzidas pelas ondas e canais produzidos durante a interação leva a padrões muito regulares em distribuições angulares elásticas e inelásticas e funções de excitação. Em relação às energias próximas às da barreira de interação,



alguns canais contribuem para que o sistema seja descrito como uma aproximação de canais acoplados de Schrödinger.

Em sistemas de energias intermediárias, a superfície de absorção é baixa o suficiente para que apareçam ondas estacionárias e ressonâncias [46]. Se a energia do centro de massa supera a interação da barreira, a repulsão centrífuga nas ondas parciais de superfície supera a atração nuclear e, com isso, a formação projétil-núcleo alvo não se mantém para os canais quasi-elásticos.

Para o estudo do espalhamento elástico é muito utilizado o Modelo Óptico que tem uma parte imaginária para descrever essa perda de fluxo do canal elástico para os canais inelásticos (absorção). A introdução da parte complexa na forma de potencial é análoga à introdução de um índice de refração complexo para a refração da luz através de um meio absorvivo, portanto, o núcleo é considerado um esfera opaca com índice de refração complexo, no qual as ondas incidentes são refletidas e absorvidas [47].

### 3.1 Modelo Óptico

Quando um núcleon penetra num núcleo, há uma probabilidade de ser absorvido, ou seja, o núcleo torna-se um meio transparente para o feixe incidente o que é compatível com o modelo da partícula independente que tem um livre caminho médio e que poderia fazê-lo escapar do núcleo após algumas interações.

O modelo óptico foi determinado inicialmente por Feshbach em 1953 [48] e descreve um potencial  $V(r)$  entre duas partículas, a uma distância  $r$  uma da outra, que tem uma parcela complexa que corresponde aos efeitos de absorção, ou seja, de espalhamento inelástico.

Esse potencial é descrito como,

$$V(r) = V_R(r) + V_I(r) + V_D(r) + V_S(r) + V_C(r) , \quad (3.1)$$

cujos parâmetros variam com a energia e as massas de núcleos e que são ajustados de acordo com os dados experimentais.

O primeiro termo,

$$V_R(r) = -V_0 f(r, R, d) , \quad (3.2)$$

é real e representa o poço nuclear com a profundidade  $V_0$  e o fator de forma Wood-Saxon  $f(r, R, d) = [1 + e^{(r-R)/d}]^{-1}$ , onde  $R$  é o raio do núcleo e  $d$  é a difusibilidade.

Os termos  $V_I$  e  $V_D$  são os termos imaginários que representam o efeito de absorção e são calculados como,

$$V_I(r) = -iW f(r, R_I, d_I) \quad (3.3)$$

$$V_D(r) = 4id_I W_D \frac{d}{dr} f(r, R, d_I) . \quad (3.4)$$

Essas duas parcelas possuem funções complementares. Em núcleos com baixas energias não há estados desocupados disponíveis para os núcleons e as interações são essencialmente na superfície, neste caso, o termo  $V_D$  é mais importante e o  $V_I$  pode ser ignorado. Para os núcleos de altas energias, a partícula incidente tem maior proteção e, assim, o termo  $V_I$  torna-se relevante.

O termo  $V_S$  corresponde ao efeito da polarização e pode ser escrito da seguinte maneira,

$$V_S(r) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \left( \frac{\hbar}{M_\pi c^2} \right)^2 \frac{V_s}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_S, d_S) , \quad (3.5)$$

$\mathbf{s}$  é o operador de spin,  $\mathbf{L}$  é o operador de momento angular orbital e  $M_\pi$  é a massa do pión. Os valores de  $V_S$ ,  $R_S$  e  $d_S$  são ajustados de acordo com os dados experimentais.

O termo coulombiano  $V_C$  está relacionado com a presença das partículas carregadas,  $Z_1$  e  $Z_2$ , e tem a seguinte forma,

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2r} & ; r > R_C \\ Z_1 Z_2 e^2 [(3 - r/R_C)^2]/2R_C; & r \leq R_C \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $R_C$  é o raio Coulombiano.

## 3.2 Modelo de Espalhamento Elástico

Surgiram muitos trabalhos que usam o modelo óptico para analisar o espalhamento elástico de núcleos emissores de prótons e de nêutrons, mas esses autores divergem em relação aos valores encontrados dos parâmetros. Sendo assim, a fim de eliminar essas ambiguidades, Becchetti [49] utilizou o modelo óptico para analisar o espalhamento elástico de núcleos emissores de prótons.

Nesta abordagem, Becchetti [49] engloba, dentro de uma mesma faixa de energia, o maior número possível de dados a serem utilizados. Esses dados são núcleos com energia, isospin, etc., conhecidos explicitamente, pois estes constituem parâmetros variáveis dos potenciais do Modelo Óptico. Esses dados foram ajustados usando um código computacional que resolve a equação de Schrödinger local não-relativística independente do tempo para as amplitudes de espalhamento de ondas parciais.

A função teórica para o ajuste foi feita da seguinte maneira,

$$F = \sum_n^{n_{max}} \left[ \frac{\chi^2}{N_{\sigma(\theta)}} + \frac{\chi^2}{N_{P(\theta)}} + \chi_{\sigma R}^2 \right] \quad (3.7)$$

onde  $\chi^2$  corresponde à seção de choque da reação dos prótons ou da reação total, incluindo os nêutrons, para os dados analisados, o primeiro termo corresponde ao  $\chi^2$  por valores das seções de choque  $\sigma(\theta)$  para os n-dados e o segundo termo é o  $\chi^2$  por valores pontuais de polarização dos n-dados. O ajuste simultâneo dos núcleos de próton foi feito minimizando essa equação e os dados de nêutrons foram usados para verificar os dados de prótons.

A profundidade do potencial nuclear de Wood-Saxon é calculada pelo *fit* dos núcleos emissores de prótons e a equação inicial para o ajuste desses dados tem a seguinte forma,

$$V_R = V_{OR} + V_{ER}E + 0.4Z/A^{1/3} + V_{sim}(N - Z)/A . \quad (3.8)$$

onde  $V_{OR}$  e  $V_{ER}$  são os potenciais da parte real,  $E$  é a energia incidente, o terceiro termo da soma corresponde a correção devido aos efeitos da repulsão Coulombiana e o último é o termo de simetria.

Na reação de espalhamento contemplada há ainda os termos imaginários correspondentes à absorção representados pelas equações  $W_V = W_{OV} + W_{EV}E$  e  $W_{SF} = W_{OS} + W_{ES}E$ , referentes à contribuição do volume e da superfície do núcleo, respectivamente.

O próximo passo é o estudo do tunelamento da partícula em uma barreira realista que, em nosso trabalho, terá a profundidade do poço de potencial definida pelo termo de  $V_R$  acima. Na próxima seção faremos uma breve apresentação histórico do tunelamento e seus diversos efeitos.

### 3.3 Tunelamento

O efeito túnel foi aplicado, pela primeira vez, na Física Nuclear para explicar como as partículas conseguiam atravessar regiões classicamente proibidas. Essa explicação foi dada por George Gamow [27] que usou a teoria de tunelamento para calcular as meias-vidas do decaimento alfa através da combinação de forças nucleares com a repulsão de Coulomb determinando uma barreira eficaz para a partícula alfa.

Dessa forma, a equação de Schrödinger foi resolvida usando este potencial efetivo com a condição de contorno da onda para grandes distâncias do centro do núcleo e descobriu-se que existem soluções para energias complexas. A parte complexa da energia está relacionada com a largura do decaimento encontrando, assim, a fórmula de Geiger-Nuttall [50] que é a relação entre a largura do decaimento e a energia da partícula emitida.

Ao conhecer o trabalho de Gamow, Max Born notou que este poderia ser estendido para outros sistemas físicos como, por exemplo, a emissão fria de elétrons de uma superfície metálica. Mas, como não aceitava a solução complexa encontrada por Gamow, trabalhou nesse problema considerando operadores hermitianos e estados com autovalores reais conseguindo encontrar, dessa forma, o mesmo resultado.

Paralelo ao trabalho de Gamow, Gurney e Condon observaram algumas características incomuns da mecânica quântica de sistemas unidimensionais e a usaram para compreender a física da emissão fria de elétrons e pensaram em aplicar a sua idéia no problema do decaimento. Inicialmente, eles acharam que não era necessário conhecer a forma do potencial, apenas que o interior do potencial tem que ser zero numa distância igual ao raio nuclear. Observaram, também, que é

possível usar a aproximação semi-clássica ou WKB para calcular a função de onda sob a barreira.

Desta forma Gurney e Condon encontraram a solução da equação de Schrodinger para a onda radial com a condição de que a sua amplitude durante o tunelamento tem de ser grande dentro e pequena fora do núcleo. Com este resultado determinaram a taxa de decaimento e a energia da partícula emitida. Outra preocupação de Gurney era entender como uma partícula de energia similar à de um núcleo num estado quase-estacionário conseguia atravessar uma barreira. Este processo é conhecido como tunelamento ressonante.

Outras descobertas importantes foram feitas em relação ao tunelamento de elétrons em sólidos. Com a descoberta de transistores, em 1947, foi possível explicar de maneira satisfatória a dinâmica da corrente num metal semiconductor com o tunelamento de elétrons, pois anteriormente concluíram, através da mecânica quântica, que o sentido da corrente era oposta ao da corrente observada. Essa descoberta possibilitou a construção dos semicondutores de Germânio e Silício.

Mais tarde, foi observada a existência de uma segunda corrente devido ao tunelamento de elétrons em pares entre supercondutores separados por uma fina camada isolante de óxido que serve como barreira. Quanto ao átomo individual, a grande descoberta foi que a taxa de tunelamento aumenta à medida que a superfície fica mais fria [51].

Através dos semicondutores foi possível fazer diversas descobertas a cerca do tunelamento de partículas que contribuiu para aprimorar o conhecimento do efeito túnel em outras reações nucleares.

O tunelamento ressonante, que permitiu avanços em estudos de semicondutores, constitui um tipo de tunelamento em pequenos dispositivos, os chamados diodos. Esse processo ocorre quando o nível de energia em um lado de uma barreira tem uma correspondência com um nível

de energia do outro lado, forçando o tunelamento. Geralmente, a barreira mostra-se transparente para a transmissão de partícula. Num diodo, dois semicondutores estão dispostos em camadas, como em um sanduiche, gerando uma dupla barreira nas quais são preenchidas pelos elétrons, que conseguem ser conduzidos por causa da diferença de potencial.

O estado ressonante não acontece somente com duas barreiras, mas também quando se tem barreiras únicas independentes ou quando, durante a interação, aparecem estados de energias diferentes equivalentes a pseudo estados quase-ligados (Fig. 3.1 a esquerda) como no caso da fusão de núcleos fracamente ligados. Outra situação relacionada são as ressonâncias Feshbach, que ocorrem quando há diferença entre os canais abertos e fechados de um sistema, devido à influência de graus de liberdade internos durante o processo de tunelamento ressonante (Fig. 3.1 a direita).

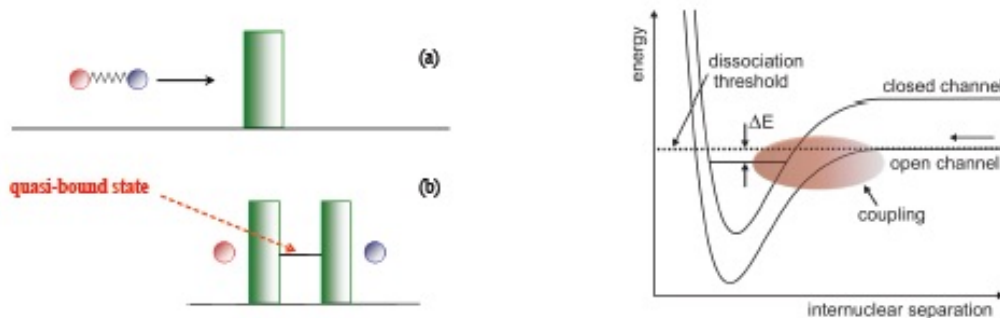


Figura 3.1: Na figura à esquerda é mostrado o tunelamento de uma partícula em um única barreira que é equivalente ao tunelamento em barreira dupla. À direita temos uma ressonância Feshbach que acontece quando surge efeitos de graus de liberdade internos no tunelamento ressonante. Fonte: [52]

Em relação ao estudo do tunelamento dependente do tempo, é possível calcular a função de onda  $\Psi(t)$  através da equação de Schrödinger pelo método de diferença finita. Aplicando o operador de evolução do tempo  $U$ , tem-se  $\Psi(t + \Delta t) = U(\Delta t, t)\Psi(t) = \exp[-iH\Delta t/\hbar]\Psi(t)$ , onde  $H$  é a hamiltoniana do sistema. Para um tempo pequeno, tem-se a aproximação válida para

o termo  $(\Delta t)^2$ ,

$$U(t + \Delta t) = \frac{1 + (\Delta t/2i\hbar)H(t)}{1 - (\Delta t/2i\hbar)H(t)}. \quad (3.9)$$

O estudo dependente do tempo torna-se inviável para ser aplicado em alguns casos. Em sistemas fermiônicos ou bosônicos o problema se dá devido ao grande número de partículas e também as escalas de tempo não dão conta do longo tempo transcorrido por um processo nuclear como, por exemplo, o decaimento alfa.

Para um estudo mais aprimorado do tunelamento, considera-se a transição de um estado excitado para um estado de energia mais baixo, pois assim aumenta a chance de transmissão. A probabilidade de transmissão também mostra sinais de comportamento ressonante.

O efeito túnel pode ser afetado de diversas formas, com o surgimento de pseudo-níveis de energia durante o processo de tunelamento, as ressonâncias Feshbach, e por transferência de energia para o movimento relativo por acoplamento com os graus de liberdade internos. A perda de energia de um projétil por unidade de comprimento,  $S = -dE/dx$ , constitui um observável importante para experimentos em bombardeamento de baixas energias. A energia em que ocorre uma reação nuclear depende da perda de energia média do projétil num alvo atômico.

Outra forma de aprimorar a probabilidade de transmissão é considerar sistemas fracamente ligados. Neles, durante o processo de tunelamento, há a separação por reflexão e transmissão através de uma barreira. Se cada parte observar uma barreira diferente então a barreira efetiva do centro de massa também será diferente da original. Isso acontece na fusão do deutério com outro núcleo e fusão de núcleos exóticos.



## Capítulo 4

# Decaimento com Emissão Simples de Prótons

O modelo que apresentaremos será aplicado para calcular as meias-vidas de núcleos deficientes em nêutrons e esses resultados serão comparados às meias-vidas experimentais apresentadas nas próximas tabelas. No modelo é considerado um sistema de dois corpos formado por um caroço inerte e, no interior deste, um próton, considerado como uma partícula ressonante, que após algumas tentativas de assalto consegue tunelar a barreira de potencial.

A meia vida,  $\tau_{1/2}$ , será calculada da seguinte maneira,

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \lambda_0 e^{-G} , \quad (4.1)$$

onde  $G$  corresponde ao fator de Gamow, ou seja, a probabilidade de tunelamento e  $\lambda_0$  é a frequência de assalto à barreira de potencial.

O fator de Gamow corresponde a,

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_{R_2}^{R_3} \sqrt{2\mu [V(r) - Q_p]} dr , \quad (4.2)$$

no qual  $\mu$  é a massa reduzida do sistema,  $V(r)$  é a forma da barreira no modelo de camada, de acordo com a superposição do potencial nuclear de Wood-Saxon ( $V_{WS}$ ), spin-órbita ( $V_{LS}$ ), Coulombiano ( $V_C$ ) e o potencial centrífugo ( $V_L$ ):

$$V(r) = V_{WS}(r) + V_{LS}(r) + V_C(r) + V_L(r) , \quad (4.3)$$

onde  $V_{WS}$  é o termo de potencial nuclear de Wood-Saxon,

$$V_{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + \exp(r - R)/d} , \quad (4.4)$$

no qual  $V_0$  é a profundidade do potencial nuclear,  $R$  é o raio nuclear calculado por  $R (= R_0 A^{1/3})$  e  $d$  é a difusibilidade.

O potencial de spin-órbita é conhecido como,

$$V_{LS}(r) = \left( \frac{\lambda_\pi}{2\pi} \right)^2 \frac{V_0^{ls}}{a_{ls} r} \frac{\exp(r - R_{ls})/a_{ls}}{(1 + \exp(r - R_{ls})/a_{ls})^2} \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\sigma} , \quad (4.5)$$

o valor da profundidade do potencial de spin-órbita é  $V_0^{ls} = -6.2$  MeV,  $\lambda_\pi$  é o comprimento de onda do pión e vale  $\lambda_\pi^2 = 2.14$  fm<sup>2</sup> e  $R_{ls}$  é o raio nuclear calculado como  $R_{ls} = r_{0_{ls}} A^{1/3}$ , cujo valor do parâmetro do raio nuclear é  $r_{0_{ls}} = 1.01$  fm, e  $\mu$  é a massa reduzida do sistema [53].

O potencial Coulombiano é escrito como,

$$V_C(r) = \begin{cases} Z_D e^2 / r & ; r > R \\ Z_D e^2 [(3 - r/R)^2] / 2R; & r \leq R \end{cases} \quad (4.6)$$

O potencial centrífugo tem a forma,

$$V_L(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} . \quad (4.7)$$

O caráter efetivo do potencial é representado na definição da profundidade do potencial de Woods-Saxon,  $V_0$ , que é determinado pelo ajuste aos dados de seção de choque de espalhamento elástico de próton-núcleo usando um potencial do tipo Wood-Saxon. Neste processo de emissão de prótons a forma Wood-Saxon é a forma convencional para o estudo de reações e estrutura de núcleos na linha de beta-estabilidade. O que faremos em nosso estudo é extrapolar o uso deste tipo de potencial nuclear como campo médio mesmo para núcleos de nosso interesse. Neste caso, recorreremos à parametrização de Becchetti [49].

Todos os parâmetros do modelo ótico dos prótons foram encontrados ajustando esses dados e a forma encontrada foi,

$$V_R = 54.0 - 0.32E + \frac{0.4Z}{A^{1/3}} + \frac{24.0(N - Z)}{A} \quad (4.8)$$

onde  $V_R$  representa à parte real do potencial ótico que corresponde, em nosso modelo, à profundidade da barreira de potencial,  $V_0$ ,  $E$  é a energia de laboratório incidente,  $Z$ ,  $A$  e  $N$  são os números atômico, de massa e de nêutrons. O termo  $0.4Z/A^{1/3}$  é usado para a correção dos efeitos da repulsão coulombiana. Neste cálculo de Becchetti o parâmetro do raio nuclear tem o valor de  $r_0 = 1.17$  fm e a difusibilidade de  $d = 0.75$  fm.

A constante de decaimento,  $\lambda$ , na eq. 4.1 corresponde à largura e é definida como na ref. [54] por

$$\lambda = \lambda_0 e^{-G} , \quad (4.9)$$

onde  $\lambda_0$  é a taxa da frequência de assalto à barreira de potencial. No cálculo da frequência de assalto, utilizamos três maneiras possíveis.

1) Uma das alternativas é definir a frequência pelo valor-Q (denominaremos esta alternativa de “ $\hbar\omega$ ”) levando em conta um estado ressonante do próton de valência. No modelo de partícula independente assume-se que a interação entre uma partícula e todas as outras de um núcleo pode ser aproximada por um potencial central escolhido como sendo um potencial de oscilador harmônico isotrópico que tem a forma,

$$U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2, \quad (4.10)$$

onde  $\hbar\omega$  é a energia do oscilador e  $r$  é a distância entre o núcleon no potencial oscilador harmônico.

Considerando que a equação de Schrödinger de um núcleon num potencial de oscilador harmônico é,

$$H = T + U = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2 r^2}{2}, \quad (4.11)$$

e podemos separá-lo em coordenadas radial e angular, fazemos alguns cálculos e encontramos,

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\nabla^2 + r^2. \quad (4.12)$$

As funções de onda do oscilador harmônico podem ser dadas como funções de  $r' = r/b$  no qual,

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{M_p\omega}}, \quad (4.13)$$

corresponde ao parâmetro do tamanho do potencial do oscilador harmônico.

Levando em conta, também, que o número total de núcleons de todas as camadas ( $N_{max}$ ) é dado por,

$$A \approx \frac{2}{3}(N_{max} + 2)^3 \quad (4.14)$$

e que o raio médio quadrático de um orbital com uma única partícula é dado por  $\overline{r^2} = (3/5)A^{(2/3)}r_0^2$

então,

$$\lambda_0 = \frac{\frac{5}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \hbar^2}{\mu r^2 (A_d)^{1/3}} . \quad (4.15)$$

no qual  $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$  e  $\mu c^2 = 938 \text{ MeV}$ .

2) Outra forma é estabelecer a frequência numa visão clássica onde o próton de valência tem a sua energia cinética definida dentro do poço (“VQ”); neste caso, temos

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{V_{min} - Q}}{2\mu r^2} . \quad (4.16)$$

3) A terceira alternativa foi calculada estabelecendo um modelo de oscilação harmônica, onde o próton de valência oscila com a energia total igual a energia de Fermi,  $E_f$ , e sendo a energia cinética determinada pelo Teorema de Virial (“Q”) e que “ $Q = h\nu$ ” e “ $\nu = Q/h$ ”, então,

$$\lambda_0 = \frac{Q}{\hbar} . \quad (4.17)$$

Das três alternativas apresentadas utilizaremos apenas uma delas e a escolhida é a que determinará os menores desvios das meias-vidas dos núcleos emissores estudados. Esses resultados serão mostrados na próxima seção.

## 4.1 Sensibilidade à Energia de Decaimento

A tabela 4.1 mostra que para os núcleos emissores conhecidos foram realizadas diversas medidas, o que no total resultou em 77 medidas [35, 42, 44, 55], algumas delas com diferentes experimentos realizados para um mesmo núcleo emissor de prótons.

Nesta etapa do trabalho, analisaremos mais profundamente a sensibilidade da meia-vida dos núcleos emissores de próton com a energia de decaimento. Os núcleos mais pesados com

Tabela 4.1: Tabela de várias medidas dos núcleos emissores de próton.

Na primeira coluna tem-se os números atômicos; na segunda, os números de nêutrons; na terceira, os números de massa; nas próximas colunas temos os momentos angulares, o número de spin, o valor-Q calculado como  $Q = M_p - M_d + m_p$ , os excessos de massa dos núcleos-pai, dos núcleos-filha, o momento de quadrupolo  $\beta_2$  [35, 44], a deformação  $\delta$ , onde  $\delta = 0.757 \beta_2 + 0.273 \beta_2^2$  [42] e as meias-vidas experimentais [42, 44, 55], respectivamente.

Z	N	A	$\ell$	j	$Q^1$ [MeV]	$\delta M_p$ [MeV]	$\delta M_d$ [MeV]	$\beta_2$	$\delta$	$T_{1/2}^{exp}$ [s]
53	56	109	2	5/2	0.829	-57.61	-65.72	0.160	0.128	$9.35 \times 10^{-5}$
53	56	109	2	5/2	0.829	-57.61	-65.72	0.160	0.128	$1.00 \times 10^{-4}$
53	56	109	2	5/2	0.828	-57.61	-65.72	0.160	0.128	$1.09 \times 10^{-4}$
53	56	109	2	5/2	0.829	-57.61	-65.72	0.160	0.128	$1.07 \times 10^{-4}$
55	57	112	2	3/2	0.830	-46.29	-54.40	0.169	0.208	$5.0 \times 10^{-4}$
55	58	113	2	5/2	0.990	-51.70	-59.97	0.168	0.207	$1.67 \times 10^{-5}$
55	58	113	2	5/2	0.990	-51.70	-59.97	0.168	0.207	$1.70 \times 10^{-5}$
55	58	113	2	5/2	0.990	-51.70	-59.97	0.168	0.207	$1.83 \times 10^{-5}$
57	60	117	2	3/2	0.810	-46.51	-54.60	0.242	0.290	$2.38 \times 10^{-2}$
57	60	117	2	3/2	0.810	-46.51	-54.60	0.242	0.290	$2.50 \times 10^{-2}$
57	60	117	2	3/2	0.810	-46.51	-54.60	0.242	0.290	$2.20 \times 10^{-2}$
57	60	117	4	9/2	0.951	-46.37	-54.60	0.242	0.290	$1.00 \times 10^{-2}$
59	62	121	2	5/2	0.851	-41.58	-49.71	0.268	0.318	$1.0 \times 10^{-2}$
63	67	130	2	3/2	1.033	-33.94	-42.25	0.281	0.331	$9.0 \times 10^{-4}$
63	68	131	2	3/2	0.953	-39.35	-47.58	0.281	0.331	$2.14 \times 10^{-2}$
63	68	131	2	3/2	0.953	-39.35	-47.58	0.281	0.331	$2.66 \times 10^{-2}$
65	70	135	2	3/2	1.200	-32.574	-41.051	0.275	0.325	$9.47 \times 10^{-4}$
67	73	140	2	3/2	1.104	-29.31	-37.69	0.249	0.297	$6.0 \times 10^{-3}$
67	74	141	2	3/2	1.194	-34.37	-42.84	0.239	0.286	$4.10 \times 10^{-3}$
67	74	141	2	3/2	1.194	-34.37	-42.84	0.239	0.286	$3.90 \times 10^{-3}$
67	74	141	2	3/2	1.194	-34.37	-42.84	0.239	0.286	$4.20 \times 10^{-3}$
67	74	141	2	3/2	1.194	-34.37	-42.84	0.239	0.286	$6.60 \times 10^{-6}$
67	74	141	2	3/2	1.194	-34.37	-42.84	0.239	0.286	$7.40 \times 10^{-6}$
69	75	144	5	11/2	1.851	-22.225	-31.35	0.213	0.258	$2.70 \times 10^{-6}$
69	76	145	5	11/2	1.754	-27.88	-36.91	0.205	0.249	$3.46 \times 10^{-6}$
69	76	145	5	11/2	1.754	-27.88	-36.91	0.205	0.249	$3.40 \times 10^{-6}$
69	76	145	5	11/2	1.754	-27.88	-36.91	0.205	0.249	$3.00 \times 10^{-6}$
69	76	145	5	11/2	1.754	-27.88	-36.91	0.205	0.249	$3.90 \times 10^{-6}$
69	77	146	5	11/2	1.134	-31.28	-39.69	-0.140	-0.199	$1.176 \times 10^{-1}$
69	77	146	5	11/2	1.134	-31.28	-39.69	-0.140	-0.199	$5.30 \times 10^{-2}$
69	77	146	5	11/2	1.134	-31.28	-39.69	-0.140	-0.199	$7.50 \times 10^{-2}$
69	77	146	5	11/2	1.134	-31.28	-39.69	-0.140	-0.199	$7.20 \times 10^{-2}$
69	77	146	5	11/2	1.134	-31.28	-39.69	-0.140	-0.199	$2.03 \times 10^{-1}$
69	77	146	5	11/2	1.134	-31.28	-39.69	-0.140	-0.199	$3.50 \times 10^{-1}$
69	78	147	5	11/2	1.064	-36.37	-44.71	-0.134	-0.190	$3.78 \times 10^0$
69	78	147	5	11/2	1.064	-36.37	-44.71	-0.134	-0.190	$4.30 \times 10^0$
69	78	147	2	3/2	1.134	-36.30	-44.71	-0.134	-0.190	$3.60 \times 10^{-4}$
71	79	150	5	11/2	1.284	-24.94	-33.50	-0.117	-0.164	$6.40 \times 10^{-2}$
71	79	150	5	11/2	1.284	-24.94	-33.50	-0.117	-0.164	$6.60 \times 10^{-2}$
71	79	150	2	3/2	1.325	-24.94	-33.50	-0.117	-0.164	$4.30 \times 10^{-5}$
71	79	150	2	3/2	1.325	-24.94	-33.50	-0.117	-0.164	$3.00 \times 10^{-5}$
71	80	151	5	11/2	1.255	-30.20	-38.73	-0.111	-0.156	$1.27 \times 10^{-1}$
71	80	151	2	3/2	1.325	-30.13	-38.73	-0.111	-0.156	$1.60 \times 10^{-5}$
73	82	155	5	11/2	1.786	-23.67	-32.73	0.006	0.008	$2.90 \times 10^{-3}$
73	83	156	2	5/2	1.026	-25.80	-34.10	-0.039	-0.053	$2.46 \times 10^{-1}$
73	83	156	2	5/2	1.026	-25.80	-34.10	-0.039	-0.053	$1.65 \times 10^{-1}$
73	83	156	2	5/2	1.026	-25.80	-34.10	-0.039	-0.053	$2.40 \times 10^{-1}$
73	83	156	5	11/2	1.126	-25.70	-34.10	-0.039	-0.053	$8.52 \times 10^0$
73	83	156	5	11/2	1.126	-25.70	-34.10	-0.039	-0.053	$8.90 \times 10^0$
73	84	157	0	1/2	0.946	-29.63	-37.85	0.035	0.045	$3.00 \times 10^{-1}$
75	84	159	5	11/2	1.644	-14.757	-23.695	0.041	0.053	$2.02 \times 10^{-5}$
75	85	160	2	5/2	1.296	-16.66	-25.23	0.062	0.080	$8.70 \times 10^{-4}$
75	86	161	0	1/2	1.212	-20.875	-29.361	0.062	0.080	$4.40 \times 10^{-4}$
75	86	161	0	1/2	1.212	-20.875	-29.361	0.062	0.080	$3.70 \times 10^{-4}$
75	86	161	5	11/2	1.337	-20.75	-29.361	0.062	0.080	$2.24 \times 10^{-1}$
75	86	161	5	11/2	1.337	-20.75	-29.361	0.062	0.080	$3.25 \times 10^{-1}$
77	87	164	5	11/2	1.577	-7.27	-16.12	0.069	0.089	$1.13 \times 10^{-4}$
77	87	164	5	11/2	1.577	-7.27	-16.12	0.069	0.089	$5.80 \times 10^{-5}$
77	88	165	5	11/2	1.557	-11.63	-20.43	0.078	0.099	$3.40 \times 10^{-4}$
77	89	166	2	5/2	1.167	-13.205	-21.646	0.084	0.107	$1.52 \times 10^{-1}$
77	89	166	5	11/2	1.343	-13.030	-21.646	0.084	0.107	$8.40 \times 10^{-1}$
77	90	167	0	1/2	1.087	-17.077	-25.437	0.091	0.116	$1.10 \times 10^{-1}$
77	90	167	5	11/2	1.087	-17.077	-25.437	0.091	0.116	$7.50 \times 10^0$
79	91	170	2	5/2	1.488	-3.603	-12.364	0.062	0.080	$3.21 \times 10^{-4}$
79	91	170	2	5/2	1.488	-3.603	-12.364	0.062	0.080	$3.60 \times 10^{-4}$
79	91	170	5	11/2	1.751	-3.340	-12.364	0.062	0.080	$1.046 \times 10^{-3}$
79	91	170	5	11/2	1.751	-3.340	-12.364	0.062	0.080	$1.80 \times 10^{-3}$
79	91	170	5	11/2	1.751	-3.340	-12.364	0.062	0.080	$8.40 \times 10^{-4}$
79	92	171	0	1/2	1.464	-7.567	-16.304	-0.076	-0.105	$2.45 \times 10^{-5}$
79	92	171	5	11/2	1.716	-7.315	-16.304	-0.076	-0.105	$2.22 \times 10^{-3}$
81	95	176	0	1/2	1.281	0.58	-7.973	-0.039	-0.053	$5.20 \times 10^{-3}$
81	96	177	0	1/2	1.179	-3.328	-11.779	-0.039	-0.053	$6.70 \times 10^{-2}$
81	96	177	5	11/2	1.986	-2.521	-11.779	-0.039	-0.053	$4.00 \times 10^{-4}$
81	96	177	5	11/2	1.986	-2.521	-11.779	-0.039	-0.053	$4.50 \times 10^{-4}$
81	96	177	5	11/2	1.986	-2.521	-11.779	-0.039	-0.053	$5.30 \times 10^{-4}$
83	102	185	0	1/2	1.564	-2.210	-11.045	-0.039	-0.052	$5.80 \times 10^{-5}$
83	102	185	0	1/2	1.564	-2.210	-11.045	-0.039	-0.052	$4.40 \times 10^{-5}$

$Z > 50$  apresentam uma grande barreira Coulombiana que dificulta o tunelamento da partícula aumentando, consideravelmente, as suas meias-vidas. Já para os núcleos mais esféricos na região de “*proton drip line*” (PDL) com  $Z > 69$  e  $Z < 81$  as taxas de transição tem sido bem reproduzidas através da aproximação WKB com o modelo de camadas. Nesses modelos consideram o próton orbitando próximo ao núcleos-pai e os nêutrons como partículas espectadoras [56, 57]. Outras aproximações mais sofisticadas que utilizam fator espectroscópico baseado em aproximações de quase-partículas independentes tem obtido bons resultados para essa região [58, 59].

O modelo de massa macroscópica-microscópica prevê formas altamente deformadas [60–62] e quase-esféricas na região entre *Tm* e *Ho* na região PDL. Sendo assim, os núcleos deficientes em nêutrons constituem poderosa ferramenta para o estudo de deformações.

O nosso modelo, baseado em núcleos esféricos, demonstra forte presença da deformação dos núcleos estudados por nós. Para núcleos deformados, desvios em taxas de decaimento significativos constituem uma particularidade para o início da deformação e, visto que, no capítulo anterior, observamos desvios entre as meias-vidas calculada e experimental, temos a necessidade de analisar a causa desse fenômeno. Como já previsto, faremos o uso, ao longo do trabalho, de alternativas para minimizar essa diferença.

Considerando que essas medidas foram realizadas dentro dos mesmos padrões, escolhemos aquelas que têm o mesmo valor de meia-vida experimental do artigo da referência [55], resultando, dessa forma, em 44 núcleos emissores de prótons, apresentados na tabela 4.2. Usaremos esses dados em nosso modelo e os respectivos resultados serão confrontados com os da referência citada.

Em relação às frequências de assalto apresentadas, escolhemos a que determinou fator

Tabela 4.2: Tabela de núcleos emissores de próton no estado fundamental.

Nesta tabela consideramos somente os emissores de próton tomados de acordo com a ref. [49]. Nas primeiras três colunas temos os números de prótons, nêutrons e de massa,  $Z$ ,  $N$  e  $A$ , respectivamente; na quarta e quinta colunas são mostrados momento angular da partícula e o de spin ( $n, \ell, j$ ); na sexta coluna temos o valor-Q,  $Q$ , na sétima coluna o parâmetro do raio nuclear,  $r_0$ ; em seguida, a profundidade do poço,  $V_0$ ; depois, as meias-vidas experimental e calculada ( $T_{1/2}^{exp}, T_{1/2}^{calc}$ ) e, finalmente, o fator espectroscópico,  $S$ . O índice  $m$  indica os estados metaestáveis.

$Z$	$N$	$A$	$\ell$	$j$	$Q^1$ [MeV]	$r_0$ [MeV]	$V_0$ [MeV]	$T_{1/2}^{exp}$ [s]	$T_{1/2}^{calc}$ [s]	$S$
53	56	109	2	5/2	0.827	1.17	58.992	$9.350 \times 10^{-5}$	$9.246 \times 10^{-6}$	0.099
55	57	112	2	3/2	0.823	1.17	58.879	$5.000 \times 10^{-4}$	$7.130 \times 10^{-5}$	0.143
55	58	113	2	5/2	0.976	1.17	59.026	$1.670 \times 10^{-5}$	$4.780 \times 10^{-7}$	0.029
57	60	117	2	3/2	0.814	1.17	59.160	$2.380 \times 10^{-2}$	$5.279 \times 10^{-4}$	0.022
57	60	117	4	9/2	0.951	1.17	59.116	$1.000 \times 10^{-2}$	$8.469 \times 10^{-4}$	0.085
59	62	121	2	3/2	0.890	1.17	59.219	$1.000 \times 10^{-2}$	$1.857 \times 10^{-4}$	0.019
63	67	130	2	3/2	1.039	1.17	59.506	$9.000 \times 10^{-4}$	$3.815 \times 10^{-5}$	0.042
63	68	131	2	3/2	0.959	1.17	59.696	$2.140 \times 10^{-2}$	$4.282 \times 10^{-4}$	0.020
65	70	135	3	7/2	1.200	1.17	59.693	$9.400 \times 10^{-4}$	$1.492 \times 10^{-5}$	0.016
67	73	140	3	3/2	1.106	1.17	59.951	$6.000 \times 10^{-3}$	$1.119 \times 10^{-3}$	0.186
67	74	141	3	7/2	1.190	1.17	60.075	$4.100 \times 10^{-3}$	$6.787 \times 10^{-5}$	0.017
67	74	141 <sup>m</sup>	0	1/2	1.255	1.17	60.054	$6.600 \times 10^{-6}$	$1.950 \times 10^{-7}$	0.030
69	75	144	5	11/2	1.725	1.17	59.824	$2.700 \times 10^{-6}$	$2.463 \times 10^{-6}$	0.912
69	76	145	5	11/2	1.753	1.17	59.962	$3.460 \times 10^{-6}$	$1.546 \times 10^{-6}$	0.447
69	77	146	5	11/2	1.210	1.17	60.280	$1.176 \times 10^{-1}$	$5.490 \times 10^{-2}$	0.467
69	77	146 <sup>m</sup>	5	11/2	1.144	1.17	60.301	$2.030 \times 10^{-1}$	$3.197 \times 10^{-1}$	1.575
69	78	147	5	11/2	1.073	1.17	60.466	$3.78 \times 10^0$	$2.425 \times 10^0$	0.642
69	78	147 <sup>m</sup>	2	3/2	1.133	1.17	60.447	$3.600 \times 10^{-4}$	$1.806 \times 10^{-4}$	0.502
71	79	150	5	11/2	1.283	1.17	60.321	$6.400 \times 10^{-2}$	$3.068 \times 10^{-2}$	0.479
71	79	150 <sup>m</sup>	2	3/2	1.306	1.17	60.313	$4.300 \times 10^{-5}$	$9.155 \times 10^{-6}$	0.213
71	80	151	5	11/2	1.253	1.17	60.469	$1.271 \times 10^{-1}$	$6.131 \times 10^{-2}$	0.482
71	80	151 <sup>m</sup>	2	3/2	1.332	1.17	60.444	$1.600 \times 10^{-5}$	$4.916 \times 10^{-6}$	0.307
73	82	155	5	11/2	1.468	1.17	60.462	$2.900 \times 10^{-3}$	$1.563 \times 10^{-3}$	0.539
73	83	156	2	5/2	1.032	1.17	60.734	$1.490 \times 10^{-1}$	$6.410 \times 10^{-2}$	0.430
73	83	156 <sup>m</sup>	5	11/2	1.127	1.17	60.704	$8.520 \times 10^0$	$6.713 \times 10^0$	0.788
73	84	157	0	1/2	0.947	1.17	60.893	$3.000 \times 10^{-1}$	$1.516 \times 10^{-1}$	0.505
75	84	159 <sup>m</sup>	5	11/2	1.831	1.17	60.408	$2.020 \times 10^{-5}$	$7.793 \times 10^{-6}$	0.386
75	85	160	2	5/2	1.287	1.17	60.712	$6.870 \times 10^{-4}$	$1.633 \times 10^{-4}$	0.238
75	86	161	0	1/2	1.214	1.17	60.864	$4.400 \times 10^{-4}$	$1.269 \times 10^{-4}$	0.288
75	86	161 <sup>m</sup>	5	11/2	1.338	1.17	60.824	$2.240 \times 10^{-1}$	$7.992 \times 10^{-2}$	0.357
77	87	164	5	9/2	1.835	1.17	60.597	$1.130 \times 10^{-4}$	$4.171 \times 10^{-5}$	0.369
77	88	165 <sup>m</sup>	5	11/2	1.726	1.17	60.758	$3.400 \times 10^{-4}$	$1.015 \times 10^{-4}$	0.299
77	89	166	2	3/2	1.161	1.17	61.062	$1.520 \times 10^{-1}$	$2.225 \times 10^{-2}$	0.146
77	89	166 <sup>m</sup>	5	11/2	1.340	1.17	61.005	$8.400 \times 10^{-1}$	$2.427 \times 10^{-1}$	0.289
77	90	167	0	1/2	1.090	1.17	61.207	$1.100 \times 10^{-1}$	$2.117 \times 10^{-2}$	0.192
77	90	167 <sup>m</sup>	5	11/2	1.254	1.17	61.154	$7.500 \times 10^0$	$2.132 \times 10^0$	0.284
79	91	170	2	5/2	1.476	1.17	61.017	$3.210 \times 10^{-4}$	$2.523 \times 10^{-5}$	0.079
79	91	170 <sup>m</sup>	5	11/2	1.764	1.17	60.925	$1.046 \times 10^{-3}$	$1.404 \times 10^{-4}$	0.134
79	92	171	0	1/2	1.464	1.17	61.140	$2.450 \times 10^{-5}$	$4.105 \times 10^{-6}$	0.168
79	92	171 <sup>m</sup>	5	11/2	1.715	1.17	61.060	$2.200 \times 10^{-3}$	$3.113 \times 10^{-4}$	0.140
81	95	176	0	1/2	1.282	1.17	61.368	$5.200 \times 10^{-3}$	$1.215 \times 10^{-3}$	0.234
81	96	177	0	1/2	1.180	1.17	61.514	$6.700 \times 10^{-2}$	$2.242 \times 10^{-2}$	0.335
81	96	177 <sup>m</sup>	5	11/2	1.976	1.17	61.260	$3.960 \times 10^{-4}$	$1.216 \times 10^{-5}$	0.031
83	102	185	0	1/2	1.608	1.17	61.861	$5.800 \times 10^{-5}$	$2.107 \times 10^{-6}$	0.036



espectroscópico de menor valor para cada núcleo, ou seja, menos desvio entre as meias-vidas. Estes resultados são apresentados na fig. 4.1. Conforme observado, chega-se à conclusão que a frequência mais conveniente para os nossos estudos é a da eq. 4.16 que corresponde à diferença do valor-Q com a profundidade mínima do poço de potencial. E é com esta escolha que realizamos os demais cálculos do modelo.

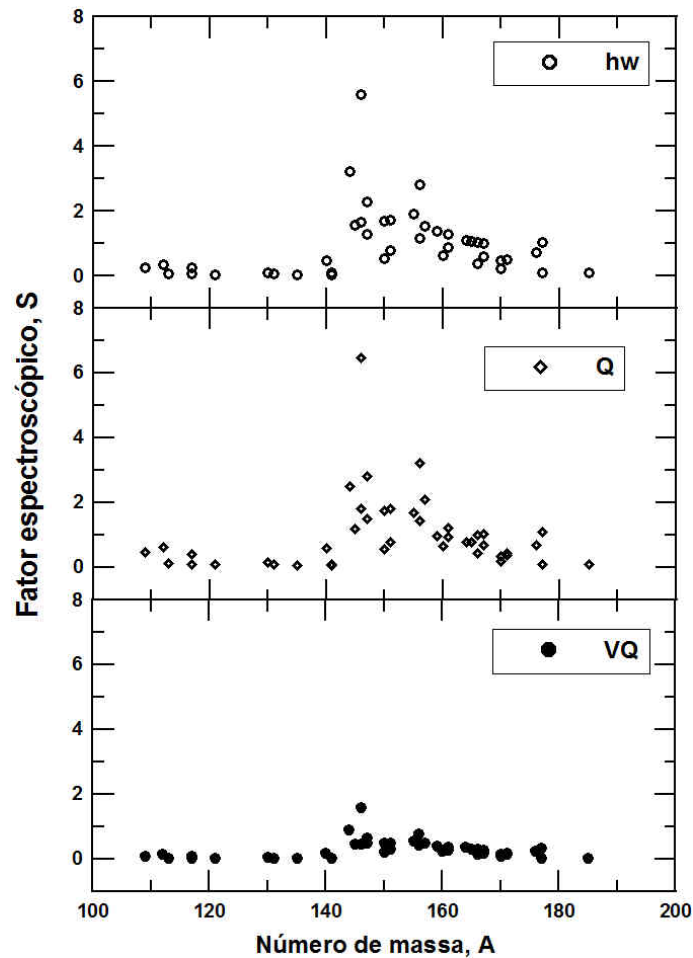


Figura 4.1: A figura mostra os fatores espectroscópicos de cada emissor estudado, segundo as diferentes frequências de assalto. A que apresentou desvios das meias-vidas mais bem comportados foi a frequência que se baseia no Teorema do Virial.

Observamos que nesta tentativa inicial, os resultados das meias-vidas calculadas a partir

do nosso modelo apresentam desvios em relação às meias-vidas experimentais que correspondem ao fator espectroscópico na última coluna da tabela 4.2. Como objetivo do nosso trabalho, devemos tentar diminuir essa diferença. Para isso, aprimoraremos o nosso modelo, dessa vez, analisando a relação desses núcleos emissores de prótons com a energia de decaimento.

A meia-vida de emissão do próton apresenta enorme sensibilidade com a energia de decaimento, o valor- $Q$ . A fim de ter uma noção da grandeza dessa sensibilidade, igualamos as meias-vidas calculada e experimental ajustando-as com a energia de decaimento. Para isso impusemos um limite superior e inferior ao valor- $Q$  experimental de cada núcleo e realizamos uma varredura para este limite de energia. Dentro do intervalo estabelecido, encontramos os valores das raízes da energia. Os resultados obtidos são mostrados na figura 4.2.

Na parte superior dessa figura é apresentado o valor- $Q$  experimental dos 44 núcleos considerados em nosso trabalho e na inferior a diferença ( $\Delta E$ ) entre os valores de energias cujas meias-vidas calculada e experimental são iguais, e as experimentais. No eixo horizontal temos o número de massa de cada núcleo.

Pela figura 4.2 notamos que a maior parte dos núcleos que apresentam maiores deformações também possuem maiores diferenças nas energias. O modelo apresentado neste trabalho foi baseado em núcleos esfericamente simétricos. Sabemos que implicitamente existem diversos observáveis que não foram contemplados em nosso modelo a fim de manter a sua simplicidade. Esses observáveis são momento de spin, energia de ligação, etc. (vide anexo B)

Na tabela 4.2 é possível observar com mais clareza os resultados apresentados na figura anterior. São mostrados os núcleos emissores de próton e os resultados das meias-vidas calculadas com a frequência de assalto escolhida e os resultados dos desvios das meias-vidas experimental e

calculada.

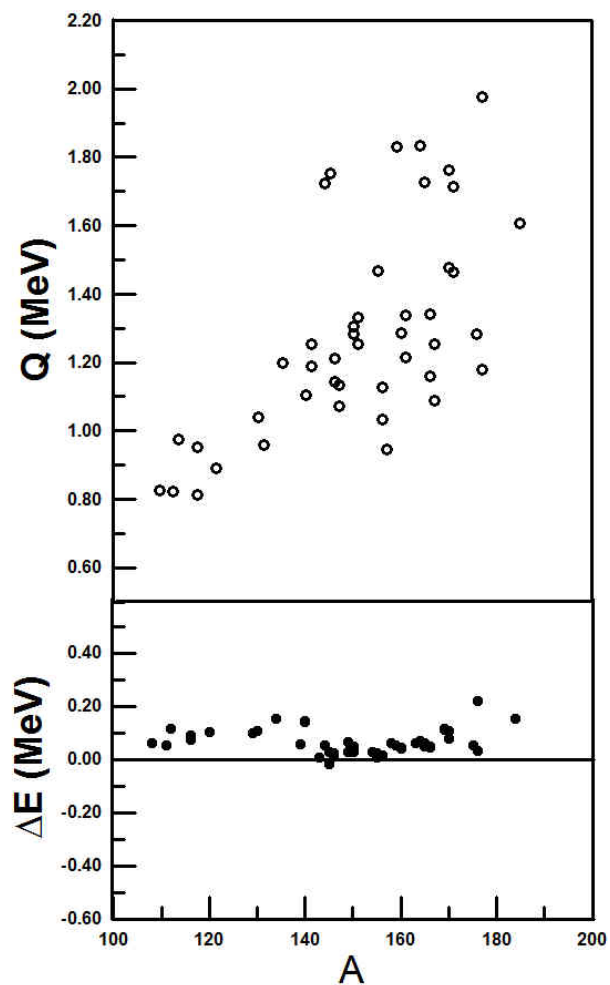


Figura 4.2: Na parte superior temos o valor-Q dos 44 núcleos emissores de próton. Na parte inferior são mostradas a diferença de energia e a deformação de cada núcleo.

Com o intuito de minimizar os desvios entre as meias-vidas calculadas e experimentais mostrados na última coluna da tabela 4.2, será mostrada mais uma implementação no modelo que o tornará mais próximo da situação real do sistema fazendo com que os valores das meias-vidas calculadas sejam melhor ajustados.

No processo de decaimento do núcleo, ao tunelar a barreira de potencial, afastando-se do

núcleo, o próton tem a sua massa efetiva alterada ao longo da trajetória, o que torna conveniente considerar no modelo um termo derivativo dessa massa efetiva dependente da posição da partícula. Essa implementação será abordada no próximo capítulo no qual estarão incluídos os novos valores calculados a partir dessa mudança.

# Capítulo 5

## Efeitos de não-localidade

Ao longo dos anos, os modelos nucleares evoluíram bastante e, com isso, mostrou-se que são dependentes, não somente da energia, mas também da densidade nuclear. Na análise do espalhamento elástico, o ajuste, que engloba grande extensão de energia, necessita de muitos refinamentos e, dessa forma, foi proposto um modelo de interação não-local que relacionava a dependência de energia do potencial nuclear com efeitos de não-localidade de Pauli, devido à natureza fermiônica dos nucleons [63–67].

De acordo com a não-localidade de Pauli, durante a interação entre dois núcleos, o núcleon do núcleo incidente pode trocar de lugar com outro núcleon do núcleo alvo. A figura 5.1 mostra que um núcleon do núcleo alvo que tem a coordenada  $r_a^{\vec{}}$  troca de lugar com o do incidente com a coordenada  $r_p^{\vec{}}$  fazendo com que assumam as coordenadas  $r_a^{\vec{}}$  e  $r_p^{\vec{}}$ , respectivamente.

O primeiro modelo com os efeitos da não-localidade de Pauli foi proposto em 1962 por Perey e Buck que descreve a interação nucleon-núcleo [68]. Jackson e Johnson usaram esse modelo para estudar o comportamento de potenciais fenomenológicos com partículas alfa [69].

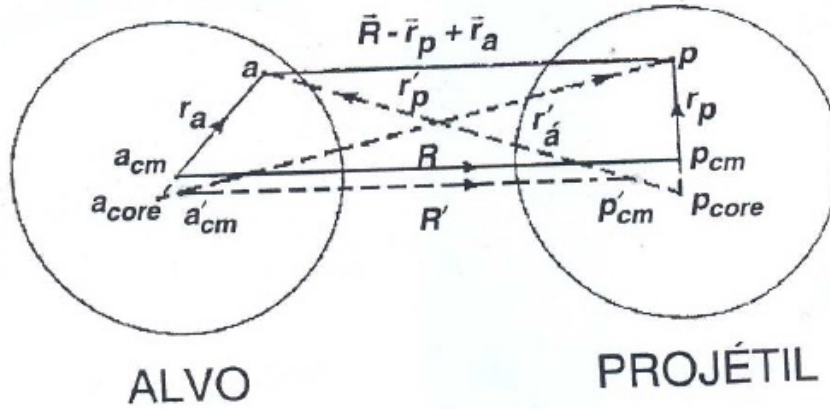


Figura 5.1: Sistema de interação no Potencial Não-local no qual o núcleo-alvo troca de posição com o núcleo do projétil e, com isso, os centros de massa do projétil ( $P_{CM}$ ) e do alvo ( $A_{CM}$ ) são movidos conforme mostrado na figura. [70]

A não-localidade pode ser interpretada por uma massa dependente da posição e é representada na equação de Schrödinger por um termo derivativo da massa efetiva.

A massa efetiva possui um papel relevante num sistema de muitos corpos considerando a abordagem energia-densidade. Utilizando o operador de energia cinética de uma partícula com uma massa variável na equação de Schrödinger, o potencial passa a descrever uma massa dependente da velocidade [48, 71–74].

A parametrização da massa efetiva do próton é baseada nos estudos dos efeitos de superfície devido às não-localidades do potencial nuclear no processo de espalhamento elástico próton-núcleos [75–78]:

$$m^* = \frac{m_0}{1 - \rho(r)} \quad (5.1)$$

onde  $\rho(r)$  é o termo de massa efetiva,

$$\rho(r) = \rho_s d_s \frac{df(r)}{dr} + \rho_v f(r) . \quad (5.2)$$

na qual  $\rho_s$  e  $\rho_v$  são, respectivamente, os parâmetros de superfície e volume e a função  $f(r)$  tem a forma,

$$f(r) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R_s}{d}\right)} \quad (5.3)$$

onde os raios  $R_s$  e o parâmetro de difusibilidade  $d_s$  correspondem a  $R_s$  é o raio nuclear cujo parâmetro é  $2r_0$  e  $d_s = d = 0.75$  fm e  $m$  é a massa livre do próton. Apesar da massa efetiva do próton poder ser uma função da distância  $r$ , o Fator de Gamow ainda permanece com sua forma inalterada como mostrada na Eq. 4.2. A fim de provar essa afirmação, consideramos a forma da equação de Schrödinger radial,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{m'}{m} \left[ \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} \Psi = (E - V)\Psi , \quad (5.4)$$

e o termo da massa efetiva,

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1 - \rho}{m_0} \quad (5.5)$$

cuja derivada é,

$$\frac{m'}{m_0} = \frac{\rho'}{(1 - \rho)^2} . \quad (5.6)$$

Colocamos o termo centrífugo no outro lado da igualdade; por isso, depende do  $\Psi$ . Este novo termo será chamado de  $V'$ .

$$V' = V + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m r^2} \quad (5.7)$$

Substituindo as equações 5.6 e 5.7 na eq 5.5, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}(1 - \rho) \left\{ \frac{d^2\Psi}{dr^2} - \frac{\rho'}{1 - \rho} \left[ \frac{d\Psi}{dr} - \frac{\Psi}{r} \right] \right\} = (E - V')\Psi \quad (5.8)$$

Mas,

$$\Psi = N e^{i\phi(r)/\hbar} , \quad (5.9)$$

então,

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{Ni}{\hbar} \frac{d\phi}{dr} e^{i\phi(r)/\hbar} , \quad (5.10)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = \left[ \frac{Ni}{\hbar} \frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{N}{\hbar^2} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 \right] e^{i\phi(r)/\hbar} , \quad (5.11)$$

substituindo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} (1 - \rho) \left\{ \frac{Ni}{\hbar} \frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{N}{\hbar^2} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 - \frac{\rho'}{1 - \rho} \left[ \frac{Ni}{\hbar} \frac{d\phi}{dr} - \frac{N}{r} \right] \right\} e^{i\phi(r)/\hbar} = N(E - V') e^{i\phi(r)/\hbar} \quad (5.12)$$

Fazendo a distributiva dos termos  $(1 - \rho)$  e entrando com o  $\hbar$ , temos:

$$-\frac{1}{2m_0} \left\{ (1 - \rho) i \hbar \frac{d^2\phi}{dr^2} - (1 - \rho) \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 - \rho' i \hbar \frac{d\phi}{dr} + \rho' \frac{\hbar^2}{r} \right\} = (E - V'). \quad (5.13)$$

Juntando os termos que não têm  $\hbar$ :

$$\frac{1 - \rho}{2m_0} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 = (E - V'). \quad (5.14)$$

Com a eq. 5.5 e lembrando que  $m = m(r)$ , nós temos:

$$\frac{1}{2m(r)} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 = (E - V') , \quad (5.15)$$

então,

$$\frac{d\phi}{dr} = \sqrt{2m(r)(E - V')} , \quad (5.16)$$

integrando em  $r$ :

$$\phi(r) = \int \sqrt{2m(r)(E - V')} dr , \quad (5.17)$$



mostrando que o Fator de Gamow mantém sua forma convencional com a inclusão da massa efetiva dependente da posição. Dessa forma, não é necessária nenhuma implementação em nosso modelo de barreira de potencial.

Nesta etapa do trabalho, não faremos uso de todos os dados abordados na tabela 4.2, nos restringiremos apenas aos núcleos emissores de próton mais pesados, com  $A > 144$ , pois segundo observado na ref. [55] esse conjunto de dados possui transições mais fortes influenciadas por suas deformações já que os decaimentos dos núcleos deformados continua através de pequenos componentes esféricos de orbitais deformados correspondentes e, por conseguinte, as probabilidades de formação tornam-se menores.

Os ajustes dos parâmetros das massas efetivas  $\rho_s$  foram feitos na tentativa de reproduzir as meias-vidas experimentais. Para isso, nos limitamos a não nos afastarmos dos critérios sugeridos pela ref. [76] para escolher o valor do parâmetro  $\rho_s$  ao invés de deixá-lo completamente livre.

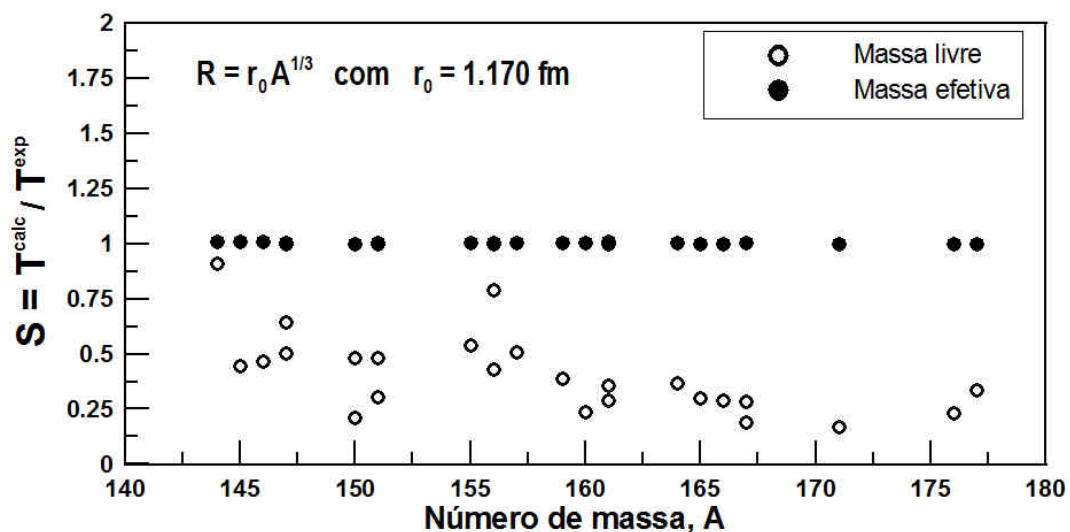


Figura 5.2: Relação de núcleos que conseguimos ajustar as meias-vidas calculadas apenas incluindo correção na massa efetiva.

As figuras 5.2 e 5.3 mostram o efeito da massa efetiva para o cálculo dos desvios das meias-vidas calculada e experimental para os núcleos deficientes em nêutrons. Esses dados foram separados em dois gráficos, porque o ajuste das massas efetivas não foi suficiente para os desvios das meias-vidas.

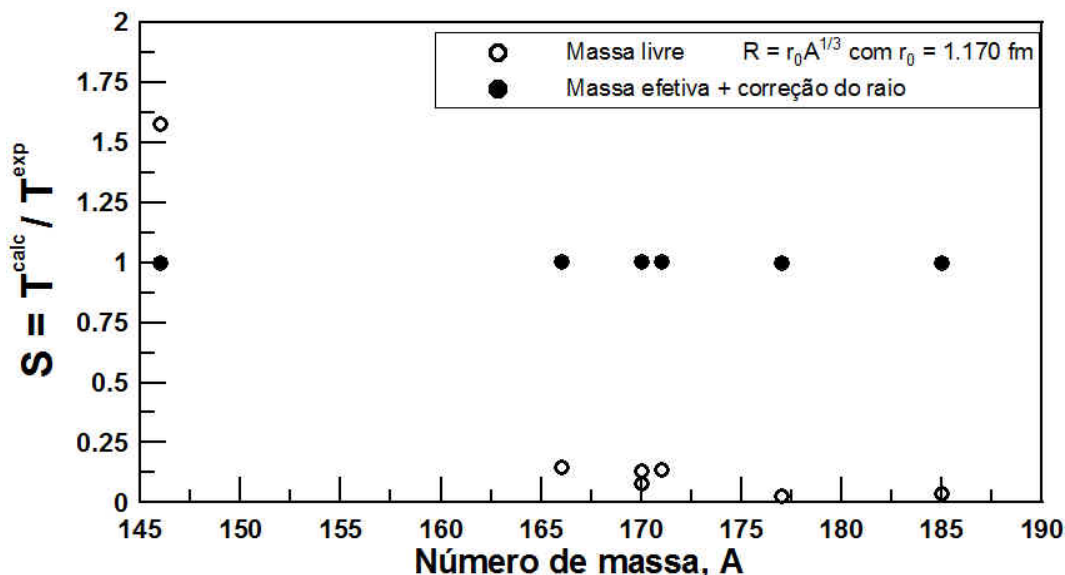


Figura 5.3: Relação de núcleos que conseguimos ajustar as meias-vidas calculadas incluindo a correção na massa efetiva e do parâmetro do raio nuclear.

Na Fig. 5.2 temos na parte superior os valores dos fatores espectroscópicos usando apenas a massa livre, e na parte inferior com a correção da massa efetiva. O valor do parâmetro de raio nuclear é o mesmo utilizado por Becchetti [49] e esses dados são comparados aos dados experimentais apresentados no trabalho do Qi [55].

O tamanho nuclear constitui uma das mais precisas características dos núcleos e muitas vezes sua fórmula empírica  $R = r_0 A^{1/3}$  recebe, por muitos autores, correções como isospin e de camadas.

Neste trabalho não nos aprofundaremos em tais conceitos, mas como podemos verificar nos círculos vazados da (Fig. 5.3) alguns núcleos emissores não apresentaram resultados tão satisfatórios quanto os anteriores. Para alcançar ainda melhores resultados, além do ajuste da massa efetiva variável, decidimos ajustar, também, o raio nuclear com pequenas variações no parâmetro  $r_0$ .

Com os procedimentos adotados verificamos que, de acordo com os gráficos, o nosso objetivo em ajustar as meias-vidas calculada em relação a experimental foi alcançado. Observamos que todos os dados tiveram o fator espectroscópico, praticamente, igual a 1.

Na tabela 5.1 são mostradas as características dos núcleos como números quânticos, energia de decaimento, profundidade do poço de potencial e meia-vida experimental. Em seguida são mostrados os valores das meias-vidas calculadas com a massa livre e com a massa efetiva, respectivamente. No ajuste teórico, consideramos que as meias-vidas calculadas não se desviariam mais que um por cento da meia-vida experimental do respectivo núcleo.

É verificado que, de acordo com o valor atribuído ao parâmetro de superfície da massa efetiva  $\rho_S$ , os valores das meias-vidas calculadas se aproximaram das meias-vidas experimentais o que pode ser observado pelo fator espectroscópico,  $S_{EM}$ . Para obter esses valores, o parâmetro do raio nuclear usado foi o mesmo utilizado por Becchetti [49], i.e., igual a 1.17 fm.

Na tabela 5.2 estão os núcleos emissores de prótons que não tiveram suas meias-vidas calculadas ajustadas tão satisfatoriamente como as dos núcleos apresentados na tabela anterior. Para esses conjuntos de dados, foi necessário, além da massa efetiva, recorrer também ao raio nuclear. Foram, então, encontrados novos valores dos parâmetros de raio nuclear,  $r_0^{aj}$ , e as meias-vidas calculadas através desse ajuste,  $T_{r_0^{aj}}^{calc}$  e o fator espectroscópico  $S_{r_0}^{aj}$ .

Tabela 5.1: Tabela que contém núcleos cujas meias-vidas foram ajustadas com a massa efetiva

Na primeira coluna estão os núcleos emissores de prótons; da segunda até a terceira colunas são mostrados o momento angular e momento angular total, respectivamente. A energia de decaimento está na quarta coluna e, em seguida, a profundidade do poço de potencial nuclear de Wood-Saxon segundo a parametrização do Becchetti [49]. Depois, são apresentados os valores da profundidade mínima do poço da barreira de potencial. Da sétima a nona colunas estão as meias-vidas experimental, meia-vida calculada sem a massa efetiva (representada por FM que significa *free mass*) e a meia-vida calculada com a massa efetiva (EM, *effective mass*), respectivamente. Nas três últimas colunas temos o fator espectroscópico das meias-vidas calculada com a massa efetiva e experimental, o parâmetro de superfície que ajustou as meias-vidas dos núcleos e o parâmetro de raio nuclear usado por Becchetti, nessa ordem.

Núcleos	$\ell$	$j$	$Q(MeV)$	$V_0^{Becch}(MeV)$	$V_0^{min}(MeV)$	$T^{exp}(s)$	$T_{FM}^{calc}(s)$	$T_{EM}^{calc}(s)$	$S_{EM}$	$\rho_S$	$r_0(fm)$
$^{144}_{69}Tm$	5	5.5	1.725	59.824	-9.509	$2.700 \times 10^{-6}$	2.463	2.724	1.009	-0.52	1.170
$^{145}_{69}Tm$	5	5.5	1.753	59.962	-10.259	$3.500 \times 10^{-6}$	1.546	3.486	1.007	-2.42	1.170
$^{146}_{69}Tm$	5	5.5	1.210	60.280	-10.646	$1.176 \times 10^{-1}$	0.549	1.186	1.009	-2.26	1.170
$^{147}_{69}Tm$	5	5.5	1.073	60.466	-10.809	$3.780 \times 10^0$	2.425	3.796	1.004	-1.60	1.170
$^{147m}_{69}Tm$	2	1.5	1.133	60.447	-27.288	$3.600 \times 10^{-4}$	1.806	3.596	0.999	-1.59	1.170
$^{150}_{71}Lu$	5	5.5	1.283	60.321	-10.804	$6.400 \times 10^{-2}$	3.068	6.392	0.999	-2.16	1.170
$^{150m}_{71}Lu$	2	1.5	1.306	60.313	-26.916	$4.300 \times 10^{-5}$	0.915	4.301	1.000	-2.64	1.170
$^{151}_{71}Lu$	5	5.5	1.253	60.469	-11.091	$1.271 \times 10^{-1}$	0.613	1.272	1.001	-2.15	1.170
$^{151m}_{71}Lu$	2	1.5	1.332	60.444	-27.142	$1.600 \times 10^{-5}$	0.492	1.595	0.997	-2.27	1.170
$^{155}_{73}Ta$	5	5.5	1.468	60.462	-11.154	$2.900 \times 10^{-3}$	1.562	2.912	1.004	-1.94	1.170
$^{156}_{73}Ta$	2	2.5	1.032	60.734	-30.351	$1.490 \times 10^{-1}$	0.641	1.493	1.002	-1.80	1.170
$^{156m}_{73}Ta$	5	5.5	1.127	60.704	-11.291	$8.520 \times 10^0$	6.710	8.512	0.999	-0.93	1.170
$^{157}_{73}Ta$	0	0.5	0.947	60.893	-37.364	$3.000 \times 10^{-1}$	1.516	3.009	1.003	-1.42	1.170
$^{159m}_{75}Re$	5	5.5	1.831	60.408	-11.326	$2.020 \times 10^{-5}$	0.779	2.030	1.005	-2.48	1.170
$^{160}_{75}Re$	2	2.5	1.287	60.712	-30.130	$6.870 \times 10^{-4}$	1.633	6.895	1.004	-2.51	1.170
$^{161}_{75}Re$	0	0.5	1.214	60.863	-36.941	$4.400 \times 10^{-4}$	1.269	4.429	1.006	-2.18	1.170
$^{161m}_{75}Re$	5	5.5	1.338	60.824	-11.988	$2.240 \times 10^{-1}$	0.779	2.238	0.999	-2.50	1.170
$^{164}_{77}Ir$	5	4.5	1.835	60.598	-2.759	$1.130 \times 10^{-4}$	0.417	1.135	1.004	-2.44	1.170
$^{165m}_{77}Ir$	5	5.5	1.726	60.758	-12.057	$3.400 \times 10^{-4}$	1.015	3.395	0.998	-2.71	1.170
$^{166m}_{77}Ir$	5	5.5	1.340	61.005	-12.403	$8.400 \times 10^{-1}$	2.427	8.381	0.998	-2.69	1.170
$^{167}_{77}Ir$	0	0.5	1.090	61.207	-36.999	$1.100 \times 10^{-1}$	0.212	1.104	1.003	-2.54	1.170
$^{167m}_{77}Ir$	5	5.5	1.254	61.154	-12.673	$7.500 \times 10^0$	2.132	7.507	1.001	-2.70	1.170
$^{171}_{79}Au$	0	0.5	1.464	61.140	-36.546	$2.450 \times 10^{-5}$	0.411	2.446	0.998	-2.66	1.170
$^{176}_{81}Tl$	0	0.5	1.282	61.368	-36.441	$5.200 \times 10^{-3}$	1.215	5.196	0.999	-2.33	1.170
$^{177}_{81}Tl$	0	0.5	1.180	61.514	-36.638	$6.700 \times 10^{-2}$	2.242	6.677	0.997	-1.93	1.170

Tabela 5.2: Núcleos cujas meias-vidas foram ajustadas com a massa efetiva e os raios nucleares.

Nesta tabela são apresentados os núcleos que precisaram, também, da correção do parâmetro do raio nuclear para o ajuste de suas meias-vidas calculadas em relação às experimentais.

Nas duas últimas colunas estão os valores do fator espectroscópico e do parâmetro de superfície, respectivamente, com a correção do  $r_0$  cujos valores são mostrados na última coluna.

Nucleus	$\ell$	$j$	$Q(MeV)$	$V_0^{Becch}(MeV)$	$V_0^{min}(MeV)$	$T^{exp}(s)$	$T_{FM}^{calc}(s)$	$T_{EM}^{calc}(s)$	$S_{EM}$	$\rho_S$	$r_0(fm)$	$T_{r_0aj}^{calc}(s)$	$S_{r_0}^{aj}$	$\rho_S^{aj}$	$r_0^{aj}(fm)$
$^{146m}_{69}Tm$	5	5.5	1.144	60.301	-17.851	$2.030 \times 10^{-1}$	3.197	3.207	1.580	0	1.170	2.029	0.999	-2.58	1.291
$^{166}_{77}Ir$	2	1.5	1.161	61.062	-26.706	$1.520 \times 10^{-1}$	0.223	1.181	0.777	-2.65	1.170	1.522	1.001	-2.65	1.147
$^{170}_{79}Au$	2	2.5	1.476	61.017	-25.895	$3.210 \times 10^{-4}$	0.252	1.333	0.413	-2.67	1.170	3.221	1.003	-2.60	1.074
$^{170m}_{79}Au$	5	5.5	1.764	60.925	-4.855	$1.046 \times 10^{-3}$	0.140	0.468	0.447	-2.67	1.170	1.052	1.006	-1.77	1.070
$^{171m}_{79}Au$	5	5.5	1.715	61.060	-8.629	$2.200 \times 10^{-3}$	0.311	1.041	0.469	-2.67	1.170	2.225	1.002	-2.65	1.112
$^{177m}_{81}Tl$	5	5.5	1.976	61.260	-1.088	$3.960 \times 10^{-4}$	0.122	0.404	0.102	-2.66	1.170	3.958	0.999	-2.59	1.010
$^{185}_{83}Bi$	0	0.5	1.608	61.861	-32.546	$5.800 \times 10^{-5}$	0.211	1.287	0.222	-2.66	1.170	5.774	0.995	-2.60	1.018

Para minimizar o desvio das meias-vidas com a massa efetiva, tivemos o cuidado de obedecer algumas regras como, por exemplo, que o valor dos parâmetros de superfície de cada núcleo não apresentasse um valor exorbitante e que a massa efetiva fosse no máximo três vezes maior que a massa livre da partícula.

Nas figuras 5.4 e 5.5 apresentamos o comportamento dos potenciais e da massa efetiva para dois núcleos: um mais esférico,  $^{156}\text{Ta}$  com parâmetro de deformação  $\beta^2$  igual a  $-0.053$  e o outro mais deformado,  $^{166}\text{Ir}$ , com  $\beta^2$  igual a  $0.107$ .

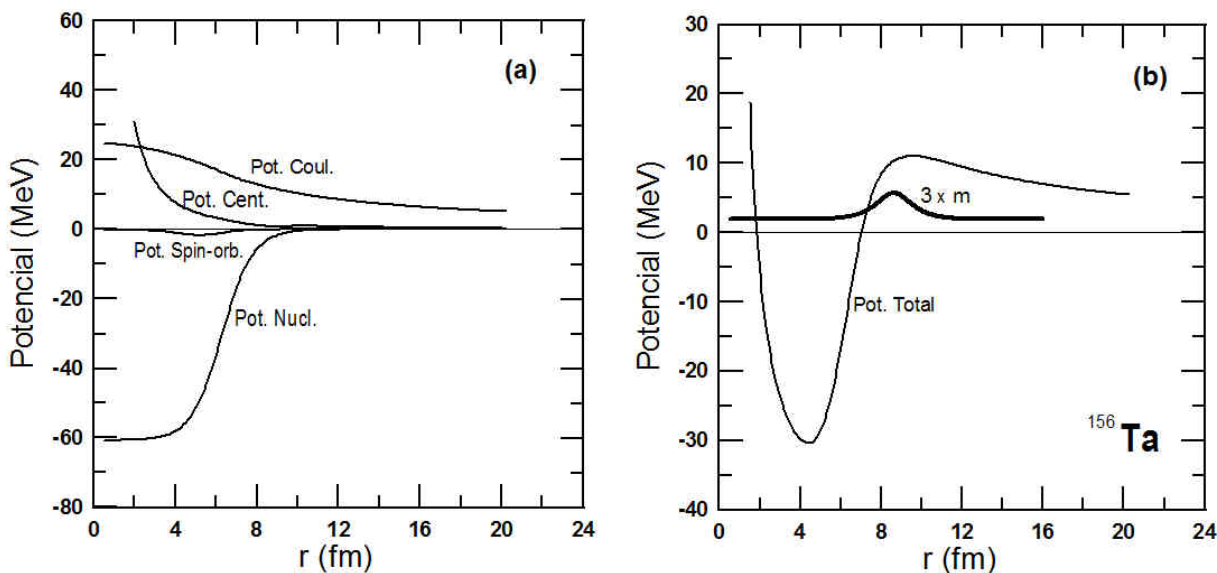


Figura 5.4: Relação entre a barreira de potencial e a massa efetiva de um núcleo quase-esférico. No lado esquerdo, temos a relação entre a barreira de potencial e o parâmetro de superfície da massa efetiva. No lado direito são mostrados os potenciais que formaram a barreira de potencial.

Conforme observa-se na figura 5.4, com o núcleo mais esférico a massa efetiva ficou muito pequena e, por isso, para poder ser visualizada no gráfico foi necessário usar um fator multiplicativo no parâmetro. Este núcleo devido à sua esfericidade não precisa de tanta energia para

manter o sistema ligado.

Já na figura 5.5, como o núcleo apresenta maior deformação que o anterior, sua energia de ligação é menor fazendo com que a massa efetiva do sistema seja bem maior que a massa livre da partícula.

Como observado pelas figuras é possível verificar que quando o núcleo é mais deformado, a massa efetiva tem um pico maior se comparado à massa efetiva de um núcleo menos deformado. Maior massa efetiva significa que o sistema próton-núcleo filha é menos ligado e o potencial centrífugo é menor, o que diminui a energia cinética do sistema fazendo com que consigamos, finalmente, ajustar as meias-vidas obtidas através de nossos cálculos em relação aos dados experimentais.

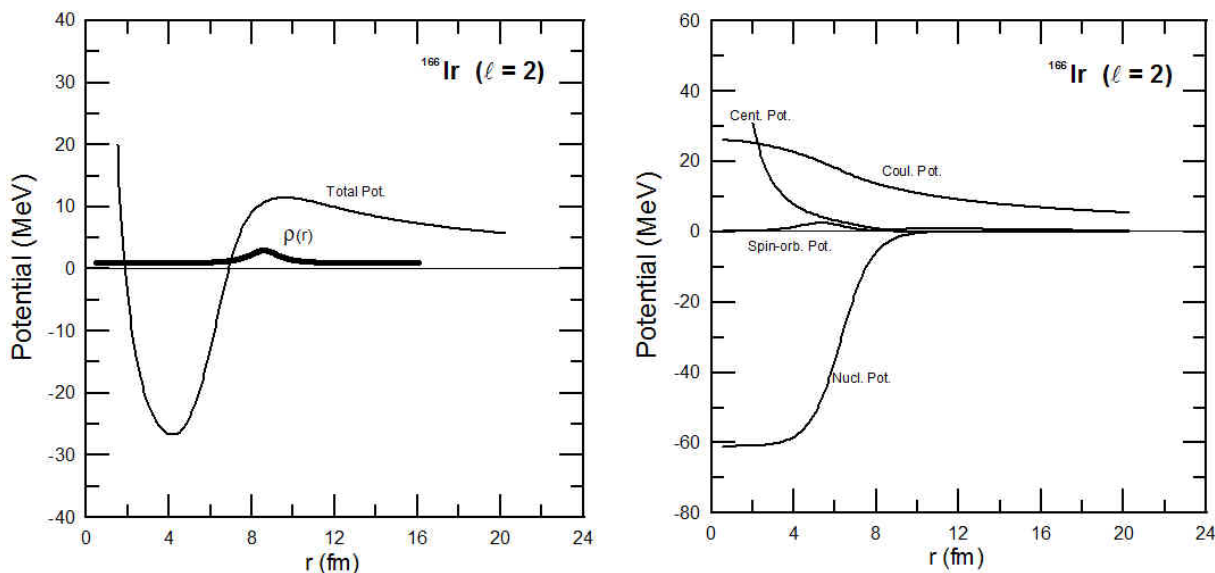


Figura 5.5: Relação entre a barreira de potencial e a massa efetiva de um núcleo mais deformado. No lado esquerdo, temos a relação entre a barreira de potencial e o parâmetro de superfície da massa efetiva. No lado direito são mostrados os potenciais que formaram a barreira de potencial.

# Capítulo 6

## Síntese dos Resultados, Conclusões e Perspectivas

Como distribuímos nossos resultados ao longo das seções do capítulo anterior, neste fizemos uma síntese do que foi obtido através dos nossos cálculos. Em seguida, apresentamos nossas conclusões finais e, na sequência, levantamos algumas questões a serem abordadas como continuação direta do presente trabalho.

### 6.1 Síntese dos resultados

Vale relembrar que o objetivo do nosso trabalho era elaborar um modelo para conhecer a estrutura dos núcleos exóticos que se encontram na “proton drip line”. A emissão de um único próton foi discutida em forma de barreira de potencial com uma massa efetiva e formada pela superposição dos potenciais centrífugo, coulombiano, spin-órbita e nuclear, tipo Wood-Saxon. A

profundidade do potencial nuclear foi calculada usando uma parametrização de dados experimentais usados no espalhamento elástico de prótons usando um modelo de potencial nuclear ótico. Foram apresentadas três tipos de frequência de assalto, onde apenas aquela que gerou menor desvio nas meias-vidas calculada e experimental foi a usada em todo o trabalho. Com os resultados dessa etapa, encontramos desvios de uma ordem de grandeza.

Usamos para determinar o desvio padrão em relação aos dados a seguinte equação,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \left[ \log \left( \frac{T_i^{cal}}{T_i^{exp}} \right) \right]^2}, \quad (6.1)$$

onde  $T^{calc}$  e  $T^{exp}$  são as meias-vidas calculada e experimental. O desvio padrão referente aos 32 emissores de próton quase esféricos considerados no presente trabalho tem o valor de  $\sigma = 0,66$ . Apesar de não ser um resultado insatisfatório, tentamos ao longo do trabalho diminuir este desvio.

Nesta segunda etapa tentamos ajustar as meias-vidas pelo valor da energia, pois sabemos que o próton apresenta grande sensibilidade à energia de decaimento. Neste processo, escolhemos um limite em torno do valor-Q e fizemos uma varredura para encontrar, dentro desse intervalo, um valor de energia em que as meias-vidas experimental e calculada são iguais. Com isso, verificamos que existia uma diferença nos valores de energia para cada núcleo. Atribuímos essa variação aos graus de liberdade que sabemos que existem, mas que não levamos em conta explicitamente em nossa forma de potencial para não perder a simplicidade do modelo.

Observa-se ao longo deste trabalho a dificuldade de se determinar a estrutura microscópica dos núcleos altamente instáveis [46, 60–62] fazendo com que alguns aspectos do processo de decaimento continuem inexplorados como, por exemplo, a regra da exclusão de Pauli e o efeito da não-localidade para a interação próton-núcleo.

A não-localidade da interação de uma partícula com o núcleo tem sido estudada desde os



trabalhos de W. E. Frahn e R. H. Lemmer [78] e de Feshbach [79] para o estudo de espalhamento núcleon-núcleo. Este problema solicitou uma cuidadosa análise, tanto em contexto relativístico [68, 80] quanto em não-relativístico [75, 76, 78, 79].

A fim de conseguirmos, finalmente, reproduzir as meias-vidas experimentais dos núcleos emissores de prótons, recorreremos a uma parametrização da massa efetiva levando em conta o efeito de superfície. Nesta etapa, verificamos que mesmo com a inclusão da massa efetiva variável no nosso modelo de potencial, este permanece inalterado. Mas, com o termo de superfície, conseguimos alcançar nosso objetivo ao fazer com que as meias-vidas calculadas se ajustem às experimentais.

O valor do parâmetro de superfície  $\rho_s$  na Eq. 5.2 foi ajustado para reproduzir as meias-vidas. Nós conseguimos um erro menor que 0.01 na razão entre as meias-vidas calculada e experimental de cada emissor. Também aplicamos um limite à massa efetiva para que essa ficasse, no máximo, três vezes maior que a massa livre, segundo o limite imposto em [76]. Mesmo com este critério rigoroso foi possível ajustar 25 núcleos num universo de 32 emissores de próton quase esféricos cujas meias-vidas foram bem determinadas experimentalmente. Somente sete núcleos emissores mostraram resultados não tão satisfatórios, para estes as meias-vidas foram ajustadas com a correção da massa efetiva mais o ajuste fino do raio nuclear.

O desvio padrão das meias-vidas calculadas para os 32 emissores correspondeu a  $\sigma = 0,66$  com os valores nas tabelas 5.1 e 5.2. Usando o mesmo cálculo para o conjunto de 25 emissores da Tabela 5.1 é reduzido para  $\sigma = 0,48$ . A divergência significativa entre previsão e dados do modelo ocorre para os sete emissores separados na Tabela 5.2.

## 6.2 Conclusões

O nosso modelo conseguiu se mostrar bastante satisfatório para o objetivo proposto, porém, para um estudo mais aprofundado, torna-se necessário modelos com altos graus de sofisticação que talvez não tenhamos condições de realizá-los. Os núcleos exóticos são bastante deformados o que provoca diversas alterações em vários observáveis relacionados, como spin, energia de ligação, etc. E o que temos ainda são modelos que constituem uma aproximação insatisfatória da estrutura desses sistemas de núcleons.

Porém, conforme conseguimos demonstrar, o efeito de não-localidade e uma barreira realística contribuem para a reprodução das meias-vidas dos núcleos emissores de prótons com o nível desejado de precisão. Nota-se que a expressão da massa efetiva corresponde à introdução de um único parâmetro em nossos cálculos para a maior parte de nossos dados. Com os dados que necessitaram do ajuste do parâmetro do raio para melhorar seus resultados demonstramos a importância do raio nuclear no estudo da estrutura do núcleo [81, 82].

## 6.3 Perspectivas futuras

O modelo apresentado em nosso trabalho constitui uma forma bastante simplificada e permite diversos aprimoramentos para que se possa estudar os núcleos longe da linha de beta estabilidade de maneira mais profunda. Como possíveis alternativas de continuidade do presente trabalho apresentamos alguns aspectos a serem explorados e/ou melhorados.

1. Estender o modelo usando a parametrização da massa efetiva para ajustar as meias-vidas

calculadas dos núcleos emissores de prótons com  $A < 144$ . Estes núcleos não apresentaram resultados tão satisfatórios quanto os que foram abordados neste trabalho, necessitando, dessa forma, especial atenção.

2. Explicitar na barreira de potencial graus de liberdade que não foram abordados de maneira explícita em nossos cálculos (spin, energia de ligação e outros), mas que defendemos sua existência através da diferença entre os valores das energias de decaimento calculada e experimental.
3. Aprimorar o modelo incorporando a distribuição de ângulo de abertura das direções de emissão de prótons e, a partir daí, ser possível trabalhar melhor com a deformação dos núcleos emissores de prótons.
4. Explorar, a partir do modelo apresentado com a barreira de potencial realística, a emissão de dois prótons, tanto simultâneo quanto o sequencial.

# Apêndice A

## Código Computacional

Com este código computacional foram calculadas as meias-vidas dos núcleos emissores de próton através do ajuste da profundidade do potencial. Para o ajuste das massas efetivas e parâmetros dos raios nucleares, este programa foi rodado para cada dado, individualmente.

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

VARIÁVEIS DIMENSIONADAS

```
dimension xlr(80),xjr(80),Apr(80),Zpr(80),xNpr(80)
```

```
dimension dmfilr(80),beta2pair(80),hlifexpr(80),Ecpr(80)
```

```
dimension dmpair(80),xnr(80),deform(80),beta2daugr(80)
```

CHAMADAS DE FUNÇÕES

```
external V0
```

```
external func
```

```
external rtbis
```

```
external pototls
```

```
external xmvida
```

```
external func2
```

## BLOCO DE VARIÁVEIS

**common/main1/** Ad,Zd,xl,e2,d

**common/main1/** Rnucls,V0so

**common/main1/** xj,b,hw,n

**common/main1/** Rccou

**common/main1/** r0n

**common/main1/** rhoS,rhoV

## ARQUIVO A SER LIDO PELO PROGRAMA

**open** (9,FILE='table.dat',status ='old')

## ARQUIVOS DE SAÍDA

**open** (10,FILE='potBechmudaMredps136pv0.dat')

**open** (5,FILE='paramBechmudaMredps136pv0.dat')

**open** (4,FILE='hlifeBechmudaMredps136pv0.dat')

**open** (2,FILE='sistemBechmudaMredps136pv0.dat')

## CONSTANTES

**d = 0.75d0** (difusibilidade nuclear usado por Becchetti)

**uma = 931.494009d0** (fator de conversão de u.m.a. para Mev)

**e2 = 1.4399652d0** (carga do elétron (Mev.fm))

**cluz = 3.d+23** (velocidade da luz (fm/s))

**rmp = 1.0078d0** (massa do próton (u.m.a))

**r<sub>ols</sub> = 1.01d0** (parâm. do raio nuclear do potencial spin-órbita)

**dmd = 7.288983386d0** (excesso de massa do próton)

**nnuc = 1** (quantidade de dados a serem lidos por vez)

**rhoS = -0.d0** (parâmetro de superfície da massa efetiva)

**rhoV = -0.d0** (parâmetro de volume da massa efetiva)

## PARÂMETRO DOS RAIOS NUCLEAR E COULOMBIANO

$r0n = 0.d0$

$r0 = r0n$

$r0c = r0n$

$V0so = 12.4d0$  (**profundidade do potencial de spin-órbita**)

LOOP PARA A VARIAÇÃO DO NÚCLEO-PAI

**do** inuc = 1,nnuc

$xn = xnr(inuc)$  (**número quântico principal**)

$xl = xlr(inuc)$  (**momento angular orbital**)

$xj = xjr(inuc)$  (**momento angular total**)

$Ap = Apr(inuc)$  (**número de massa do núcleo pai**)

$Zp = Zpr(inuc)$  (**número atômico do núcleo pai**)

$xNp = xNpr(inuc)$  (**número de nêutrons**)

$dmpai = dmpair(inuc)$  (**excesso de massa do núcleo pai**)

$dmfil = dmflr(inuc)$  (**excesso de massa do núcleo filha**)

$beta2pai = beta2pair(inuc)$  (**parâm. de deformação do núcleo pai**)

$beta2daug = beta2daugr(inuc)$  (**parâm. de deform. do núcleo filha**)

$hlifeexp = hlifeexpr(inuc)$  (**meia-vida experimental**)

$deform = deform(inuc)$  (**deformação**)

$Ecp = Ecpr(inuc)$  (**energia de decaimento**)

DEFINIR CARACTERÍSTICAS DO NÚCLEO FILHA

$Zd = Zp - 1.d0$

$Ad = Ap - 1.d0$

INTEIRIZANDO OS NÚMEROS QUÂNTICOS

$n = xn + 0.00001d0$

$l = xl + 0.00001d0$

NÚMERO DE PONTOS PARA REALIZAR A INTEGRAÇÃO WKB

$npontos = 1000$

## TERMOS A SEREM USADOS AO LONGO DO PROGRAMA

$$A_{red} = A_d / (A_d + 1.d0)$$

$$A_{13} = A_d^{**}(1.d0/3.d0)$$

## TERMOS DA FREQUÊNCIA BASEADA NO OSCILADOR HARMÔNICO

$$potenc1 = 2.d0^{**}(7.d0/6.d0)$$

$$potenc2 = 3.d0^{**}(-1.d0/6.d0)$$

$$potenc3 = 5.d0^{**}(-1.d0/2.d0)$$

$$b = potenc1 * potenc2 * potenc3 * r_{0n} * A_d^{**}(1.d0/6.d0)$$

$$Z_A = Z_p / A_p^{**}(1.d0/3.d0)$$

$$E = E_{cp} \text{ (**energia de decaimento**)}$$

$$Q_p = E_{cp}$$

call Raionuclear( $A_d, r_{0n}, R_{nd}$ ) (**rotina que calcula o raio nuclear**)

$$R_{nuc} = R_{nd}$$

$$R_{nucl_s} = r_{0ls} * A_d^{**}(1.d0/3.d0)$$

$$R_{ccou} = r_{0c} * A_d^{**}(1.d0/3.d0)$$

xacc = 1.d-5 (**Precisão na determinação das raízes pela função rtbis**)

1 format(i5,5(2x,d20.10),f15.10)

11 format(i5,12(2x,f15.10))

12 format(i5,9(2x,f10.5))

hlife = xmvida(xlamb0Q, xlambQ, G1, V0nuc, Ecp, Rccou, redmass) (**rotina que calcula a meia-vida dos núcleos**)

$$rr_{0i} = 0.1d0$$

$$rr_{0f} = 100.5d0$$

$$drr0 = (rr0f - rr0i)/1000$$

$$\text{do irr0} = 0,1000 \quad rr0 = rr0i + drr0*irr0$$

```
call Vspinorb(rr0,xj,Vspo)
call Vnuclear(V0nuc,rr0,Vn)
call VcxR(rr0,Vcr)
call Vcentr(rr0,Vcent)
somapot = Vspo+Vn+Vcr+Vcent
```

```
write(10,12) inuc,rr0,Qp,V0nuc,Vspo,Vn,Vcr,Vcent,somapot
enddo
```

LOOP DA VARIAÇÃO DA ENERGIA DE DECAIMENTO PARA  
ACHAR  $dQ'$

$$x1 = Ecp - 0.5d0$$
$$x2 = Ecp + 0.5d0$$

$xacc = 1.d-3$  (**Precisão na determinação das raízes pela função  
rtbis**)

```
raizE =
rtbis2(func2,x1,x2,Ad,xlamb0Q,xlambQ,G1,V0nuc,V0so,r0n,hlifeexp,xacc2)
```

$$dE = Ecp - raizE$$

$$x1 = 0.2d0$$
$$x2 = 1.5d0$$

```
hlife = xmvida(xlamb0Q,xlambQ,G1,V0nuc,raizE,r0c)
```

$$xlogT = dlog10(hlife)$$



```

xlogP = -dlog10(xlambQ)
desvio = (dlog10(hlife) - dlog10(hlifeexp))
sdiv2 = sdiv2 + desvio**2
fatesp = hlife/hlifeexp
xexplgT = dlog10(hlifeexp)

write(5,1) inuc,Zd,Ad,r0,Ecp,xlamb0Q,redmass

```

```

enddo

```

```

write(4,11)inuc,Ap,Zp,xl,xj,Qp,V0nuc,hlifeexp,hlife,fatesp

```

```

close(2)
close(4)
close(10)
stop
End

```

.....

## ROTINAS E FUNÇÕES

.....

SUBROUTINE Vspinorb(Rt,xj,Vspo) (**Calcula o potencial spin-órbita**)

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

```

common/main1/Ad,Zd,xl,e2,d
common/main2/Rcnucls,V0so

```

```

data sp/ 0.5d0/

```

```
data xmpion/ 134.9d0/  
data hccort/ 197.326d0/
```

```
difRls = Rt - Renucls
```

```
if (difRls/d .gt. 300) then  
Vspo = 0.d0  
else
```

```
termnum2 = (hccort/xmpion)**2  
termquant = (xj*(xj+1.d0)-xl*(xl+1.d0)-sp*(sp+1.d0))/2  
xnumls = -V0so*termnum2*dexp(difRls/d)*termquant  
denls = d*Rt*(1.d0+dexp(difRls/d))**2
```

```
Vspo = xnumls/denls
```

```
end if  
return  
END
```

.....

```
SUBROUTINE Vnuclear(V0,Rt,Vn) (Calcula o potencial de  
Wood-Saxon)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
common/main1/Ad,Zd,xl,e2,d  
common/main5/r0n
```

```
Rcnuc = r0n*Ad**(1.d0/3.d0)  
difR = Rt - Rcnuc
```

```

if (difR/d .gt. 300) then
Vn = 0.d0
else
Vn = -V0/(1.d0+ dexp(difR/d))
end if
return
END

```

.....

SUBROUTINE VcxR(Rt,Vcr) (**Calcula o potencial Coulombiano**)

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

common/main1/Ad,Zd,x1,e2,d

common/main4/Rccou

if (Rt .le. Rccou) then

Vcr = (1.d0\*Zd\*e2/(2.d0\*Rccou))\*(3.d0-(Rt/Rccou)\*\*2.d0)

else

Vcr = 1.d0\*Zd\*e2/Rt

endif

return

END

.....

SUBROUTINE Vcentr(Rt,Vcent) (**Calcula o potencial centrífugo**)

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

```
common/main1/Ad,Zd,x1,e2,d
common/main3/xj,b,hw,n
common/main6/rhoS,rhoV
```

```
data hccort/197.326d0/
data uma/931.494009d0/
```

```
call rhofmass(Rt,rhoS,rhoV,xmefet)
call MassRed(Zd,Ad,xmefet,uma,redmass)
```

```
Vcent = x1*(x1+1.d0)*hccort**2/(2.d0*uma*redmass*Rt**2)
```

```
return
END
```

.....

**SUBROUTINE MassRed(Zd,Ad,xmefet,uma,redmass) (Calcula massa do sistema)**

**(Calcula a massa reduzida em u.m.a.)**

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
No esquecer: E=mc2 ento [c2]=dsqrt(MeV/u)
data dmd/ 7.288983386d0/ (em MeV)
```

```
if (Zd .lt. 60) then
bd = 13.6d0*Zd**2.408d0*1.d-6
else
bd = 8.7d0*Zd**2.517d0*1.d-6
endif
```

```
rm = Ad + (dmd + bd)/uma - Zd*0.548579911d-3
```

```
rm = 1.d0 / (1.d0/rmd + 1.d0/xmefet)
```

```
redmass = rm
```

```
return
```

```
END
```

```
.....
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION pottotls(Rt,V0,E) (Determina a  
forma da barreira de potencial)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
common/main1/Ad,Zd,x1,e2,d
```

```
common/main2/Rnuculs,V0so
```

```
common/main3/xj,b,hw,n
```

```
common/main4/Rccou
```

```
common/main5/r0n
```

```
common/main6/rhoS,rhoV
```

```
call Vspinorb(Rt,xj,Vspo)
```

```
call Vnuclear(V0,Rt,Vn)
```

```
call VcxR(Rt,Vcr)
```

```
call Vcentr(Rt,Vcent)
```

```
if ((Vspo+Vn+Vcr+Vcent-E) .lt. 0.d0) then
```

```
  pottotls = 0.d0
```

```
else
```

```
  pottotls = dsqrt(Vspo+Vn+Vcr+Vcent-E)
```

```
endif
```

```
return
END
```

.....

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION func(Rt,V0,E) (Delimita a área da
barreira de potencial)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
common/main1/Ad,Zd,x1,e2,d
common/main2/Rnucls,V0so
common/main3/xj,b,hw,n
common/main4/Rccou
common/main5/r0n
common/main6/rhoS,rhoV
```

```
call Vspinorb(Rt,xj,Vspo)
call Vnuclear(V0,Rt,Vn)
call VcxR(Rt,Vcr)
call Vcentr(Rt,Vcent)
```

```
func= Vspo+Vn+Vcr+Vcent-E
```

```
return
END
```

.....

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION rtbis(func,x1,x2,V0,E,xacc) (Função
que calcula a raízes da barreira)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
EXTERNAL func
PARAMETER (JMAX=40)
```

```
fmid=func(x2,V0,E)
f=func(x1,V0,E)
```

```
if(f*fmid.ge.0.d0) pause 'root must be bracketed in rtbis'
if(f.lt.0.d0)then
rtbis=x1
dx=x2-x1
else
rtbis=x2
dx=x1-x2
endif
do 11 j=1,JMAX
dx=dx*0.5d0
xmid=rtbis+dx
fmid=func(xmid,V0,E)
if(fmid.le.0.d0)rtbis=xmid
```

```
if(abs(dx).lt.xacc .or. fmid.eq.0.d0) return
11 continue
pause 'too many bisections in rtbis'
END
```

.....

```
SUBROUTINE simpson(pottotls,aa,bb,V0,E,npontos,s) (Subrotina de  
integração)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
EXTERNAL pottotls
```

```
common/main1/Ad,Zd,x1,e2,d
common/main2/Rcnucls,V0so
common/main3/xj,b,hw,n
common/main4/Rccou
common/main5/r0n
common/main6/rhoS,rhoV
```

```
data uma/ 931.494009d0/
```

```
dx = (bb-aa)/npontos
```

```
call rhofmass(aa,rhoS,rhoV,xmefetaa)
call rhofmass(bb,rhoS,rhoV,xmefetbb)
```

```
call MassRed(Zd,Ad,xmefetaa,uma,redmassaa)
call MassRed(Zd,Ad,xmefetbb,uma,redmassbb)
```

```
s=(dsqrt(2.d0*uma*redmassbb)*pottotls(bb,V0,E)-
```

```
dsqrt(2.d0*uma*redmassaa)*pottotls(aa,V0,E))/2.d0
```

```
xx = aa
```

```
do kx = 2, npontos-1
```

```
  xx = xx + dx
```

```
  call rhofmass(xx,rhoS,rhoV,xmefetxx)
  call MassRed(Zd,Ad,xmefetxx,uma,redmassxx)
```

```
s = s + (dsqrt(2.d0*uma*redmassxx)*pottotls(xx,V0,E))
```

```
enddo
```

```
s = s*dx
```



```
return  
end
```

.....

```
SUBROUTINE Raionuclear(A,r0n,Rn) (Calcula raios nucleares em fm  
segundo o artigo EPJA, 34, 417-427 (2007))
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
Rn = r0n*A**(1.d0/3.d0)
```

```
return  
END
```

.....

```
SUBROUTINE MaxMinPot(npontos,V0,Vmax,Vmin,RVmax,RVmin) (Calcula  
os pontos máximos e mínimos da barreira)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
common/main1/Ad,Zd,xl,e2,d
```

```
common/main2/Rcnucls,V0so
```

```
common/main3/xj,b,hw,n
```

```
common/main4/Rccou
```

```
common/main5/r0n
```

```
common/main6/rhoS,rhoV
```

```
Vmin = 1.d100
```

```
Rmin = 0.5d0
```

```
dR = 0.01d0
```

```
do i = 0,npontos
```

```
R = Rmin + i*dR
```

```
Rt = R
```

```
call Vspinorb(Rt,xj,Vspo)
```

```
call Vnuclear(V0,Rt,Vn)
```

```
call VcxR(Rt,Vcr)
```

```
call Vcentr(Rt,Vcent)
```

```
Vtot = Vspo + Vcent + Vn + Vcr
```

```
if (Vtot .lt. Vmin) then
```

```
Vmin = Vtot
```

```
RVmin = Rt
```

```
endif
```

```
3 format (e16.6,2x,e16.6,2x,e16.6,2x,e16.6,2x,e16.6,2x,e16.6)
```

```
enddo
```

```
Vmax = -1.d100
```

```
Rmin = RVmin
```

```
dR = 0.01d0
```

```
do i = 0,npontos
```

```
R = Rmin + i*dR
```

```
Rt = R
```

```
call Vspinorb(Rt,xj,Vspo)
```

```
call Vnuclear(V0,Rt,Vn)
call VcxR(Rt,Vcr)
call Vcentr(Rt,Vcent)
```

$V_{tot} = V_{spo} + V_{cent} + V_n + V_{cr}$

```
if (Vtot .gt. Vmax) then
Vmax = Vtot
RVmax = Rt
endif
enddo
```

```
if (Vmin .eq. 1.d100 .and. RVmin .gt. 120.d0) then
write (6,*)'POTENCIAL NO TEM MINIMO'
pause
STOP
endif
if (Vmax .eq. -1.d100 .and. RVmin .gt. 120.d0) then
write (6,*)'POTENCIAL NO TEM MAXIMO'
pause
STOP
endif
end
```

.....

DOUBLE PRECISION FUNCTION

xmvida(xlamb0Q,xlambQ,G1,V0nuc,Ecp,Rccou,redmass) (**Calcula  
as meias-vidas**)

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

common/main1/Ad,Zd,x1,e2,d  
common/main2/Rcnucls,V0so  
common/main3/xj,b,hw,n  
common/main5/r0n  
common/main6/rhoS,rhoV

data pi/ 3.141592653589793d0/  
data cluz/ 3.d+23/ **velocidade da luz (fm/s)**  
data uma/ 931.494009d0/  
data hcorta/ 6.582d22/ **constante de Dirac em Mev.sec**  
data hccort/ 197.326d0/ **valor de hcortado vezes c (Mev.fm)**

EXTERNAL V0  
EXTERNAL func  
EXTERNAL rtbis  
EXTERNAL pottotls  
EXTERNAL func2  
EXTERNAL rtbis2

npontos= 1000

$Z_p = Z_d + 1.d0$   
 $A_p = A_d + 1.d0$   
 $xN_p = A_p - Z_p$   
 $xN_d = A_d - Z_d$

$Z_d A_d = Z_d / (A_d^{**}(1.d0/3.d0))$   
 $A_{13} = A_d^{**}(1.d0/3.d0)$

$R_{cnucl} = r_{0n} * A_{13}$   
 $R_{ccou} = R_{cnucl}$

$r_0 = r_{0n}$

E = Ecp  
Qp = Ecp

frac1 = (5.d0/4.d0)

frac2 = (3.d0/2.d0)\*\*(1.d0/3.d0)

hw = (hccort\*\*2\*frac1\*frac2)/(redmass\*uma\*r0n\*\*2.d0\*A13)

hwQ = Ecp

Rinfinit = 300.d0\*1.17d0

V0bech = 54.d0 - 0.32d0\*E + 0.4d0\*ZdAd + 24.d0\*((xNd - Zd)/Ad)

V0nuc = V0bech

xacc = 1.d-5 **Precisão na determ. das raízes pela função rtbis**

call MaxMinPot(npontos,V0nuc,Vmax,Vmin,RVmax,RVmin)

## **Determinação das raízes da barreira**

if (x1 .ne. 0.d0) then

x1 = 0.001d0

x2 = RVmin

raiz1 = rtbis(func,x1,x2,V0nuc,E,xacc)

else

raiz1 = 0.d0

endif

x1 = RVmin

x2 = RVmax

raiz2 = rtbis(func,x1,x2,V0nuc,E,xacc)

x1 = RVmax

x2 = Rinfinit

```
raiz3 = rtbis(func,x1,x2,V0nuc,E,xacc)
```

### **Cálculo da frequência de assalto a barreira**

```
nxl = x1 + 0.00001d0
```

```
if (nxl .eq. 0) then
```

```
denxlamb0Q = (2.d0*uma*redmass*(raiz2 - raiz1)**2)
```

```
else
```

```
denxlamb0Q = (4.d0*uma*redmass*(raiz2 - raiz1)**2)
```

```
endif
```

### **Os três tipos de frequência de assalto**

```
xlamb0Q = hw/(2.d0*pi*hcorta)
```

```
xlamb0Q = hwQ/hcorta
```

```
xlamb0Q = dsqrt((Qp - Vmin)/denxlamb0Q)*cluz
```

```
call simpson(pottotls,raiz2,raiz3,V0nuc,Ecp,npontos,s)
```

```
G1 = 2.d0*s/hccort
```

```
prob1 = dexp(- G1)
```

```
xlambQ = prob1
```

```
xmvida = dlog(2.d0)/(xlamb0Q*xlambQ)
```

```
return
```

```
END
```

.....

SUBROUTINE rhofmass(Rt,rhoS,rhoV,xmefet) (**Rotina que calcula a massa efetiva**)

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

common/main1/Ad,Zd,x1,e2,d

data r0/1.17d0/

data rmp/ 1.0078d0/

xm0=rmp

Rfmass = r0\*Ad\*\*(1.d0/3.d0)+ 2.d0\*r0

difR = Rt - Rfmass

if (difR/d .gt. 300) then

fmass = 0.d0

dfmass=0.d0

else

fmass = 1/(1.d0+dexp(difR/d))

dfmass= -dexp(difR/d)/(d\*(1.d0+dexp(difR/d))\*\*2)

rhomass = rhoS\*d\*dfmass+rhoV\*fmass

frac = 1.d0/(1-rhomass)

xmefet = xm0\*frac cálculo da massa efetiva

end if

return

FIM DO PROGRAMA

# Apêndice B

## Propriedades dos Núcleos

### B.1 Raio nuclear

O raio nuclear pode ser calculado através de diversos métodos. Um deles corresponde ao modelo das esferas “empacotadas” que consiste em considerar que dentro de um núcleo existe  $A$  núcleons distribuídos dentro de uma esfera de raio  $R$  e que o raio dos prótons e nêutrons que compõem este núcleo seja da ordem de 1 fermi. Estes núcleons, comparados aqui como esferas duras de raio  $r$ , formam um aglomerado no qual podemos escrever estes  $A$  núcleons como,

$$A \approx \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}. \quad (\text{B.1})$$

$$R \approx r_0 A^{1/3} \quad (\text{B.2})$$

Colocamos o  $r_0$  no lugar de  $r$ , pois este núcleo possui espaços vazios entre as esferas e o volume nuclear deve ser maior que a soma dos volumes de cada esfera. Esperamos, então, que o valor de



$r_0$  seja maior que 1fm.

Outro método que fornece um valor de raio nuclear mais preciso é o espalhamento de elétrons que consiste em acelerar os elétrons e atirá-los contra um elemento-alvo, interagindo eletromagneticamente com os prótons. Na saída, esses elétrons fornecem informações de como esses prótons estão distribuídos no interior dos núcleos. Ou seja, este método nos permite deduzir a distribuição de carga no núcleo. Supondo que a densidade de nêutrons e de prótons têm a mesma forma de distribuição, a distribuição de carga e de massa são iguais. O raio do núcleo, também, pode ser determinado através do estudo do raio muônico e das reações nucleares ou colisões induzidas por partículas- $\alpha$  e outros núcleos.

## B.2 Energias de ligação

A energia de ligação de um núcleo corresponde à energia necessária para separar o núcleo em todos os seus nucleons e é calculada da seguinte maneira,

$$B(Z, N) = [Zm_p + Nm_n - m(Z, N)]c^2, \quad (\text{B.3})$$

onde  $m_p$  é a massa do próton,  $m_n$  é a massa do nêutron e  $m(Z, N)$  é a massa do núcleo. Pode-se medir essas massas por um aparelho chamado *Espectrógrafo de massa*, no qual se baseia na trajetória que descreve uma partícula carregada sob a ação de um campo elétrico e magnético.

Um núcleo com  $Z$  prótons e  $N$  nêutrons que denotaremos por  $(Z, A)$  tem sempre a massa menor que a soma de  $Z$  vezes a massa de um próton e  $N$  vezes a massa de um nêutron. Esta diferença é dada por:

$$\Delta M = Zm_p + Nm_n - M(Z, A), \quad (\text{B.4})$$

onde  $M(Z,A)$  é a massa do núcleo e sua explicação está na relação massa-energia ( $E = mc^2$ ), ou seja, a diferença de massa foi convertida em energia necessária para manter o próton e o nêutron ligados. Mais precisamente, a energia de ligação de um núcleo  $(Z,A)$  é dada por,

$$B(Z, A) = \Delta M c^2, \quad (\text{B.5})$$

que substituindo na equação B.4 fica,

$$B(Z, A) = Zm_p + Nm_n - M(Z, A), \quad (\text{B.6})$$

dessa forma, a energia de ligação de um sistema é sempre positiva. Em muitas situações, é mais conveniente usar o excesso de massa atômica, definido por,

$$\delta M(Z, A) = M(Z, A) - Au, \quad (\text{B.7})$$

ao contrário da energia de ligação, o excesso de massa pode ser positivo, negativo ou zero.

### **B.3 Energia de separação**

Entende-se como a energia para separar um ou vários nucleons do núcleo original. Os núcleons dentro do núcleo, considerando-o aproximadamente como um gás de Fermi, pois os núcleons são férmions, são dispostos em níveis de energia acessíveis, do mais baixo ao mais alto, respeitando-se o princípio de exclusão de Pauli. Pode-se então considerar a energia de separação de um nucleon dentro do núcleo como sendo a energia necessária para separar do núcleo o último nucleon, ou seja, o nucleon no último nível de energia. Este possui o máximo de energia em relação aos demais, assim a energia que o nucleon vai precisar para escapar do núcleo será mínima. E é este valor mínimo de energia entregue ao sistema que corresponde à energia de separação.

Neste caso, a energia de separação é a energia de ligação desse nucleon em relação ao núcleo residual, sendo para o caso do próton,

$$S_p = M(Z, N - 1) + m_n - M(Z, N) \quad (\text{B.8})$$

ou, em termos da energia de ligação,

$$S_p = M(Z, N) - B(Z, N - 1). \quad (\text{B.9})$$

## B.4 Momento angular total do núcleo

Considerando o núcleo um sistema quântico composto de  $A$  núcleons e sendo o nucleon um férmion, ou seja, partícula de spin semi-inteiro, as leis da mecânica quântica de adição de momentos angulares estabelecem que o momento angular total ou o spin do núcleo, vale  $n\hbar$  se  $A$  for par e  $(n + 1/2)\hbar$  se  $A$  for ímpar.

Para obter o spin do núcleo podem ser feitas, além de diversas técnicas nucleares, a perturbação magnética causada no espectro atômico pelo spin nuclear (estrutura hiperfina) cujos resultados também contribuem para saber que o spin dos núcleos par-par ( $Z$  e  $N$  pares) é sempre zero. Resumindo,

$$I = n\hbar \quad \text{para núcleos ímpar-ímpar,}$$

$$I = (n + 1/2)\hbar \quad \text{para núcleos ímpares (par-ímpar ou ímpar-par),}$$

$$I = 0 \quad \text{para núcleos par-par}$$

onde  $I$  é o número quântico de momento angular total e  $n$  um número inteiro maior ou igual a zero.

A correta determinação do spin nuclear é elemento importante na escolha de modelos que tentam descrever as propriedades nucleares.

## B.5 Momentos eletromagnéticos nucleares

A importância dos momentos elétricos e magnéticos dos núcleos está na interação dos núcleos com campos eletromagnéticos e, também, por fornecer informações sobre a forma nuclear e o movimento dos nucleons no interior do núcleo.

Seja uma distribuição de carga  $\rho(r)$  definida como,

$$\int_v \rho(r) d^3r = q, \quad (\text{B.10})$$

no qual a integral se estende por todo o volume da distribuição e  $q$  é a carga total. Considerando que haja um campo externo, a energia de interação eletrostática será:

$$W = \int_v \rho(r) V(r) d^3r = q, \quad (\text{B.11})$$

onde  $V(r)$  é o potencial externo.

Expandindo  $V(r)$  em série de Taylor, em torno do centro da distribuição, que é considerado como origem.

$$W = \int_v \rho(r) \left[ V(0) + r \cdot (\Delta V)|_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 + \dots \right] d^3r, \quad (\text{B.12})$$

Somando e subtraindo, dentro do somatório do último termo da eq. B.12, a quantidade,

$$\frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 \quad (\text{B.13})$$

onde  $\delta_{ij}$  é o *delta de Kronecker*, encontramos,

$$W = \int_v \rho(r)V(0)d^3r + \int_v \rho(r)r \cdot (\Delta V)|_0 d^3r \quad (\text{B.14})$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{i,j} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 + \frac{1}{6} (\Delta^2 V)|_0 \int_v \rho(r)r^2 d^3r,$$

onde  $Q_{i,j} = \int_v (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho(r) d^3r$  é o *tensor momento de quadrupolo elétrico*.

Como  $\mathbf{E} = -\Delta V$ , podemos escrever,

$$W = V(0)q - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) + \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{i,j} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 + \frac{1}{6} (\Delta^2 V)|_0 \langle r^2 \rangle + \dots, \quad (\text{B.15})$$

no qual  $\langle r^2 \rangle = \int_v \rho(r)r^2 d^3r$  e  $\mathbf{p} = \int_v r \rho(r) d^3r$  é o momento de dipolo elétrico.

Tendo o potencial  $V(r)$  originado das cargas externas, então a região de distribuição,  $\Delta^2 V = 0$  e o último termo da Eq. B.15 se anula, de modo que,

$$W = V(0)q - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) + \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{i,j} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 + \dots \quad (\text{B.16})$$

Assim, a energia eletrostática é uma soma (em princípio, infinita) de termos, na qual o primeiro termo provém da interação entre o potencial e a carga total da distribuição (monopólo elétrico); o segundo termo surge da interação entre o campo elétrico e o momento de dipolo elétrico; o terceiro termo, entre o gradiente do campo e o momento de quadrupolo elétrico, e assim sucessivamente, até termos superiores de expansão. Na maioria dos casos de interesse físico, os termos superiores a quadrupolo podem ser desprezados.

## B.6 Estados excitados dos núcleos

Durante os processos nucleares ou as reações nucleares, os núcleos (com exceção do deuteron) apresenta estados excitados que não possuem energia bem definida, mas uma largura  $\Delta E$  que

pode ser relacionada com a vida média  $\tau$ , através do princípio de incerteza. O estado excitado é menos instável quanto mais nítida for a sua energia.

O destino de todo estado excitado é decair para um estado energeticamente inferior. Tal decaimento acontece por emissão de partículas massivas, se a energia de excitação for igual ou superior que a energia limiar para ejeção dessas partículas. Neste caso a transição pode ocorrer ou para um estado fundamental ou para um estado excitado núcleo-filho. Mas, se a energia de excitação for insuficiente, então o estado excitado se livrará do excesso de energia através da emissão de radiação gama. A desexcitação pode ocorrer diretamente para o estado fundamental, através da emissão de um único gama, ou através da passagem por vários estados excitados intermediários.

Outro fenômeno relacionado aos estados excitados são os estados meta-estáveis ou isoméricos que ocorrem por um mecanismo de inibição. Este mecanismo acontece quando se o momento angular for grande a probabilidade de transição fica extremamente baixa, conseqüentemente a vida média fica longa, porque o momento angular alto significa que a distância entre o centro do núcleo e o ponto de emissão do gama passa a ser maior que o próprio raio do núcleo.

## **B.7 Estabilidade nuclear**

Como visto anteriormente, a sequencia de transições por emissão de raios gama leva normalmente ao estado fundamental do núcleo. Mas, o próprio estado fundamental pode não ser estável para muitos núclídeos, sendo estes capazes de se transformar em outros núclídeos pela emissão espontânea de uma ou mais partículas ou fragmentos. Como opções de transformação temos:

(a) Decaimento  $\beta^-$  e  $\beta^+$ : núcleos leves estáveis têm seu número de prótons  $Z$  semelhantes ao número de nêutrons  $N$ . Nos núcleos pesados um maior número de nêutrons são necessários para compensar a força coulombiana entre os prótons. Em ambos os casos, quando um núcleo tem um valor de  $N$  maior do que o necessário para o equilíbrio, ele pode se desintegrar pela emissão de um elétron e um antineutrino (decaimento  $\beta^-$ ). Por outro lado, se  $N$  for menor pode ocorrer o decaimento  $\beta^+$  sendo as partículas emitidas um pósitron e um neutrino.

(b) Captura eletrônica: consiste na captura de um elétron atômico pelo núcleo, dando lugar a uma diminuição do número de prótons e a um aumento do número de nêutrons de uma unidade. O efeito é o mesmo do decaimento  $\beta^+$ , mas a captura eletrônica leva vantagens em núcleos pesados.

(c) Decaimento- $\alpha$ : neste modo é emitida uma partícula alfa, sendo esse processo energeticamente possível para núcleos pesados.

(d) Fissão: este processo pode se dar espontaneamente para núcleos muito pesados. Ele é responsável, junto com a emissão  $\alpha$ , pelos tempos de vida extremamente curtos dos nuclídeos de  $Z > 100$ .

Os processos acima descritos acontecem quando os núcleos instáveis estão em seu estado fundamental, mas podem ocorrer a partir de um estado excitado em situações especiais.

# Bibliografia

- [1] K. P. Jackson *et al*, *Phys. Lett. B* **33**, 281 (1970).
- [2] J. Cerny *et al*, *Phys. Lett. B* **33**, 284 (1970).
- [3] H. Schechter e C. A. Bertulani, *Introdução à Física Nuclear*, ed. UFRJ, Rio de Janeiro (2007).
- [4] G. Rudstam, *Nucl. Instrum. and Methods* **38**, 282 (1965).
- [5] R. Lichtenthäler Filho, *Texto da XIII Escola de Verão de Física Experimental J. A. Swieca*, Pelletron, IFUSP (2004).
- [6] P. N. de Faria, *Estudo do Espalhamento Elástico e Reações de Feixes Secundários de Núcleos Exóticos*, Tese de Doutorado, USP (2008).
- [7] C. E. Rolfs e W. S. Rodney, *Cauldrons in the Cosmos*, The University of Chicago Press (1988).
- [8] S. Kubono, *Nucl. Phys. A* **693**, 221 (2001).
- [9] N. Teruya, S. B. Duarte, *Quim. Nova* **35**, n 2, 360 - 366 (2012).
- [10] M. Arnould, S. Goriely, *Phys. Rep.* **384**, 1 - 84 (2003).
- [11] J. Audouze, *Astron. Astrophys.* **8**, 436 (1970).



- [12] K. L. Hainebach *et al*, *Astrophys. J.* **205**, 920 (1976).
- [13] S. E. Woosley *et al*, *Astron. Astrophys. J.* **356**, 272 (1990).
- [14] C.N. Davids *et al*, *Phys. Rev. C* **55**, 2255 (1997).
- [15] P.J. Woods, C.N. Davids, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47**, 541 (1997).
- [16] J.M. Dong, H.F. Zhang, G. Royer, *Phys. Rev. C* **79**, 054330 (2009).
- [17] D.S. Delion, R.J. Liotta, R. Wyss, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 072501 (2006).
- [18] W.D. Myers e W.J. Swiatecki, *Nucl. Phys.* **81**, 1-60 (1966).
- [19] M. Goeppert-Mayer e J. H. D. J. Mayer, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, John and Sons, New York (1964).
- [20] O. A. P. Tavares, *Alta Simetria de Massa na Desintegração Espontânea e Induzida de Núcleos Pesados*, Tese de Doutorado (1978).
- [21] S. B. Duarte, M. G. Gonçalves, *Phys. Rev. C* **53**, 2309 (1996).
- [22] M. G. Gonçalves, *Modelo de Pré-Cisão para Desintegrações Nucleares Raras*, Tese de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (1992).
- [23] G. Wentzel, *Zeitschrift für Physik* **38** (67), 518-529 (1926).
- [24] H. A. Kramers, *Zeitschrift für Physik* **39** (1011), 828-840 (1926).
- [25] L. Brillouin, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* **183**, 24-26, (1926).
- [26] O. C. Castellani, M. G. Gonçalves, A. J. Santiago, *Rev. Bras. Fís* **15**, 1-4 (1993).
- [27] G. Gamow, *Z. Phys.* **51**, 204 (1928).

- [28] M. M. N. Rodrigues, *Tunelamento de barreira na emissão de prótons por núcleos deficientes em nêutrons*, dissertação de Mestrado, CBPF (2011).
- [29] H. Kettunen *et al*, *Phys. Rev. C* **69**, 054323 (2004).
- [30] D. N. Poenaru *et al*, *Phys. Rev. C* **32**, 2 (1985).
- [31] H. G. Carvalho, J. B. Martins e O. A. P. Tavares, *Phys. Rev. C* **34**, 6 (1986).
- [32] R. D. Page, *Phys. Rev. C* **83**, 014305 (2011).
- [33] E. L. Medeiros *et al*, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **32**, B23-B30 (2006).
- [34] W. D. Myers, *Droplet Model of Atomic Nuclei*, Plenum, New York, (1977).
- [35] P. Möller e J. R. Nix, *Atom. Data and Nucl. Data Tab.* **59**, 185 - 381 (1995).
- [36] K. P. Rykaczewski, *Eur. Phys. J. A* **15**, 81-84 (2002).
- [37] M. Karny *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 1 (2003).
- [38] T. N. Ginter *et al*, *Phys. Rev. C* **68**, 034330 (2003).
- [39] C. N. Davids e H. Esbensen, *Phys. Rev. C* **64**, 034317 (2001).
- [40] P. J. Sellin *et al*, *Phys. Rev. C* **47**, 5 (1993).
- [41] E. Gapon, D. Iwanenko, *Die Naturwissenschaften* **20**, 792-793 (1932).
- [42] E. L. Medeiros *et al*, *Eur. Phys. J. A* **34**, 417 - 427 (2007).
- [43] O. A. P. Tavares, E. L. Medeiros, M. L. Terranova, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **31**, 129 (2005).
- [44] G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot e A. H. *Nucl. Phys. A* **729**, 3-128 (2003).

- [45] K-N. Huang *et al*, *At. Data Nucl. Data Tables* **18**, 243 (1976).
- [46] T. N. Leite *et al*, *Int. Jour. Mod. Phys. E* **11**, 469 (2002).
- [47] E. A. Benjamim, *Estudo do Espalhamento Elástico entre Núcleos Pesados Leves Estáveis e Radioativos.*, Dissertação de Mestrado, USP (2006).
- [48] H. Feshbach, C. E. Porter, and V. E. Weisskopf, *Phys. Rev.* **96**, 448 (1954).
- [49] F. D. Becchetti e G. W. Greenlees, *Phys. Rev.* **182**, 1190 (1969).
- [50] D. N. Poenaru, R. A. Gherghescu e W. Greiner, *Phys. Rev. C* **83**, 014601 (2011).
- [51] M. Razavy, *Quantum Theory of Tunneling*, World Scientific, Canadá (2003).
- [52] C. A. Bertulani, *Tunneling of atoms, nuclei and molecules*, arXiv: 1502.00074v1 (2015).
- [53] M. M. N. Rodrigues *et al*, *AIP Conf. Proc.* **1529**, 174-177 (2012).
- [54] M. M. N. Rodrigues *et al*, *AIP Conf. Proc.* **1351**, 59 (2010).
- [55] C. Qi, D. S. Delion, R. J. Liotta, e R. Wyss, *Phys. Rev. C* **85**, 011303R (2012).
- [56] L. Meitner, *Nature* **165**, 561 (1950).
- [57] I. Talmi e R. Thieberger, *Phys. Rev.* **103**, 718 (1956).
- [58] Y. M. Zhao e A. Arima, *Phys. Rep.* **545**, 1 - 45 (2014).
- [59] Y. Utsuno *et al*, *EPJ Web of Conferences* **66**, 02106 (2014).
- [60] L. S. Ferreira e E. Maglione, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 9 (2001).
- [61] E. Maglione, L. S. Ferreira e R. J. Liotta, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3 (1998).

- [62] E. Maglione, L. S. Ferreira e R. J. Liotta, *Phys. Rev. C* **59**, 2 (1999).
- [63] M. Razavy, *Nucl. Phys.* **78**, 256 (1966).
- [64] M. Coz, L. G Arnold e A. D. MacKellar, *Ann. of Phys.* **59**, 219 (1970).
- [65] L. C. Chamon *et al*, *Brazilian Jour. of Phys.* **33**, 238 (2003).
- [66] N. K. Timofeyuk e R. C. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 112501 (2013).
- [67] Y. Tian *et al*, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **24**, 1550006-1 (2015).
- [68] F. Perey e P. Buck, *Nucl. Phys.* **32**, 353 (1962).
- [69] D. F. Jackson e R. C. Johnson, *Phys. Lett. B* **49**, 249 (1974).
- [70] V. M. de Almeida, *Estudo do Espalhamento Elástico de Projéteis Exóticos por Alvo de Massa Intermediária*, dissertação de Mestrado, USP (2007).
- [71] A. K. Kerman, H. McManus e R. M. Thaler, *Ann. Phys.* **8**, 551 (1955).
- [72] R. Crespo *et al*, *Phys. Rev. C* **49**, 1091 (1994).
- [73] L. G. Arnold, and B. C. Clarck, *Phys. Lett. B* **84**, 46 (1979).
- [74] L. S. Kisslinger, *Phys. Rev.* **98**, 761 (1955).
- [75] M. I. Jaghoub, M. F. Hassan e G. H. Rawitscher, *Phys. Rev. C* **84**, 034618 (2011).
- [76] R. A. Zureikat e M. I. Jaghoub, *Nucl. Phys. A* **916**, 183 - 209 (2013).
- [77] O. von Roos, *Phys. Rev. B* **27**, 7547 (1983).
- [78] W. E. Frahn and R. H. Lemmer, *Il Nuovo Cimento* **5**, 6 (1957).

- [79] H. Feshbach, *Annu. Rev. of Nucl. Sci.* **8**, 49 (1958).
- [80] G. H. Rawitscher, *Phys. Rev. C* **31**, 1173 (1985).
- [81] Y. Qian, Z. Ren e D. Ni, *Phys. Rev. C* **87**, 054323 (2013).
- [82] B. H. Sun *et al*, *Phys. Rev. C* **90**, 054318 (2014).