

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
DEPARTAMENTO DE ALTAS ENERGIAS
LAFEX

LUIS GUSTAVO DE ALMEIDA

Onda de Detonação de Matéria Estranha em Estrelas Compactas

Rio de Janeiro
2015

LUIS GUSTAVO DE ALMEIDA

Onda de Detonação de Matéria Estranha em Estrelas Compactas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Altas Energias do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Astrofísica Nuclear.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte

Co-Orientador: Prof. Dr. Hilário Antonio Rodrigues Gonçalves

Rio de Janeiro
2015

A meus filhos.

Agradecimentos

Agradeço a meus orientadores: Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte e Prof. Dr. Hilário Antônio Rodrigues Gonçalves pelo apoio dado e pela confiança depositados em mim. Aos amigos funcionários da Universidade Federal do Acre (UFAC) que sempre me apoiaram, em especial, mas sem olvidar os demais, Pedro Henrique de Almeida Mello, Neila Fernandes e André Louis Farias Franca. Aos amigos professores da Ufac que sempre me estimularam, em especial, Prof. Dr. William Ferreira Alves e Prof. Dr. Paulo Sérgio Bernarde.

Ao meu grande amigo pessoal de longa data, que sempre me apoiou mesmo antes de eu ir para o Acre, Henrique Monteiro Felício. A minha mãe, minha irmã e meu padrasto que sempre me brindaram com seu amor. A meus filhos e esposa que se sacrificaram na organização de nosso lar em minha ausência.

Ao Prof. Dr. Pascoal Torres Muniz que me estimulou nas nossas conversas com suas palavras edificantes. E por fim, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Acre (FAPAC) e à CAPES pelo apoio financeiro parcial que ambas deram para a execução deste projeto.

–It is not so much that I have confidence in scientists being right, but that I have so much in nonscientists being wrong.

Isaac Asimov,
Quasar, quasar, burning bright.

Resumo

Almeida, L. G.. **Onda de Detonação de Matéria Estranha em Estrelas Compactas**. Rio de Janeiro, 2015. 111p. Tese de Doutorado LAFEX, Departamento de Altas Energias, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Neste trabalho apresentamos uma descrição efetiva da formação da onda de detonação na matéria hadrônica dentro do núcleo de uma proto-estrela de nêutron. Nós usamos um modelo simplificado de duas camadas onde o meio da camada interna é inicialmente composto por uma pequena massa de matéria quark estranho circundado por uma espessa casca exterior composta de matéria hadrônica. Nós utilizamos uma equação de estado (EOS) com base na Teoria de Campo Médio Relativístico com o conjunto de parâmetros de acoplamento NL3 para descrever a fase nuclear e uma expansão Virial para descrever a fase subnuclear. Utilizamos o modelo de sacola do MIT para descrever a matéria de quark estranho. A transição de fase hádron-quark induz modos altamente fora do equilíbrio, o que pode tornar-se um processo de detonação (mais rápido) ou um processo de queima (mais lento). O principal objetivo do trabalho é estudar a formação de uma estrela de quark remanescente e a possibilidade de ejeção de massa causada pela transição de fase hádron-quark. Descobrimos que a quantidade total de massa ejetada é dependente do valor da constante sacola utilizado na descrição da matéria estranha.

Palavras-chave

Onda de detonação, proto-estrela de nêutron, matéria estranha, transição de fase.

Abstract

Almeida, L. G.. **Detonation Wave of Strange Matter into Compact Stars**. Rio de Janeiro, 2015. 111p. PhD. Thesis. LAFEX, Departamento de Altas Energias, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

In this work we present an effective description of the detonation wave formation in hadronic matter inside a protoneutron star core. We have used a simplified two shell model where the inner shell medium is initially composed of a small lump of strange quark matter surrounded by a thick outer shell composed of hadronic matter. We have used an equation of state (EOS) based on Relativistic Mean Field Theory with the coupling parameter set NL3 to describe the nuclear phase and a Virial expansion to describe the subnuclear phase. We used the MIT bag model to describe the strange quark matter. The hadron-quark phase transition actually induces highly non equilibrium modes, which may become a detonation process (faster) or a burning process (slower). The main purpose of the work is to study the formation of a remnant quark star and the possibility of mass ejection caused by the hadron-quark phase transition. We have found that the total amount of ejected mass is dependent on the bag model constant used in the strange matter description.

Keywords

Detonation wave, protoneutron star, strange matter, phase transition.

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	11
Introdução	12
1 Evolução Estelar	16
1.1 Formação	17
1.2 A Sequência Principal	19
1.2.1 Classe Espectral e Cor	20
1.2.2 A Entrada na Sequência Principal	21
As cadeias <i>pp</i>	22
A Ciclo <i>CNO</i>	24
1.2.3 Anãs Marrons	26
1.3 Estágios Finais	27
1.3.1 A Fase de Gigante Vermelha	28
1.3.2 Limite de Chandrasekhar	29
1.3.3 A Fase de Anã Branca	29
1.3.4 Supernova	30
1.3.5 A Estrela de Nêutron e sua Formação	32
Neutralidade de Carga e Interação Fraca na Fase de Formação	33
1.3.6 Estrelas de Quark	35
Modelo de Confinamento de Quark	36
2 Hidrodinâmica	37
2.1 Equações da Hidrodinâmica	37
2.1.1 A conservação de massa – Equação da Continuidade	38
2.1.2 A conservação do momento	38
2.1.3 A conservação da energia	39
2.1.4 Hidrodinâmica com Viscosidade	40
2.2 Hidrodinâmica Relativística	40
3 O Modelo de Duas Camadas	42
3.1 O Formalismo	42
3.1.1 A Energia Potencial Gravitacional e a Energia Interna	46
3.2 As Equações de Movimento	47
3.3 Velocidade de Escape	51
3.4 Determinação das Condições Iniciais	52
3.4.1 Estabilidade da Posição de Equilíbrio	53

4	Equações de Estado da Fase Hadrônica	55
4.1	Unidades	55
4.2	Espansão Virial	56
4.2.1	Espansão Virial	57
4.3	Aproximação de campo médio	61
4.3.1	Conjunto de parâmetros de acoplamento dependentes da densidade (NL3)	62
4.3.2	Aproximação de Wigner-Seitz na matéria nuclear não-uniforme	64
4.3.3	Matéria nuclear uniforme	65
4.4	Alguns detalhes numéricos	67
4.4.1	A Equação de Estado a Temperatura Zero	67
4.4.2	A Entropia a Temperatura Finita	67
4.4.3	Interpolação Bicúbica de F/A	68
4.4.4	Formato das tabelas da EOS	69
5	Equação de Estado da Fase de Quark	71
5.1	Modelo de Quark	71
5.1.1	Liberdade Assintótica	72
5.1.2	O Confinamento de Quarks	72
5.2	Modelo de bag do MIT	73
5.2.1	Equações de estado para um sistema de férmions	75
6	Transição de Fase na Matéria Densa	77
6.1	Vínculos Termodinâmicos na Transição de Fase	78
7	Resultados	81
7.1	Evolução Dinâmica	81
7.2	Estimando a Massa Ejetada	94
	Conclusões e Perspectivas Futuras	102■
	Referências Bibliográficas	105■

Lista de Figuras

- 1.1 Imagem do primeiro Diagrama H-R baseado em medidas diretas de paralaxe, os tamanhos dos pontos e círculos indicavam diferentes tamanhos de erros prováveis. O eixo horizontal se refere à classe espectral onde as estrelas mais quentes se situam à esquerda e as mais frias à direita (conferir Tabela 1.2). O eixo vertical se refere à luminosidade da estrela, as mais brilhantes ficam mais acima e as menos brilhantes mais abaixo. A Sequência Principal se destaca na contradiagonal do gráfico. Fonte: Ref. [1] 20
- 1.2 Esquema representando um Diagrama H-R típico. A Sequência Principal se destaca na contradiagonal do gráfico, mas também podemos ver grupos menores como o de Anãs Brancas e o das Gigantes Vermelhas. Fonte: Ref. [2] 21
- 1.3 Representação da estrutura do caroço de uma estrela massiva em seus estágios finais. A sobreposição de camadas com fusão de diferentes elementos faz com que o caroço se assemelhe a uma cebola. Fonte: adaptado a partir da Ref. [3] 26
- 3.1 Representação esquemática do caroço como sendo uma esfera dividida em duas camadas concêntricas. 43
- 4.1 Equação de estado utilizando o conjunto de parâmetros de acoplamento NL3 para as fases nuclear e supranuclear e expansão Virial para a fase subnuclear. 70
- 6.1 Representação esquemática do deslocamento da interface entre as camadas em três instantes de tempo distintos e consecutivos. As cores apresentadas são apenas ilustrativas e não têm relação com a “carga de cor” dos quarks. 78
- 7.1 Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução dos raios das camadas interna (R_1) e externa (R_2), respectivamente, para uma proto-estrela de nêutron de $1.4M_{\odot}$, $T = 1MeV$ e $Y_P = 0.4$. 83
- 7.2 Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução dos raios das camadas interna (R_1) e externa (R_2), respectivamente, para uma proto-estrela de nêutron de $1.6M_{\odot}$, $T = 1MeV$ e $Y_P = 0.4$. 84
- 7.3 Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução dos raios das camadas interna (R_1) e externa (R_2), respectivamente, para uma proto-estrela de nêutron de $1.8M_{\odot}$, $T = 1MeV$ e $Y_P = 0.4$. 85

- 7.4 Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução das massas, das camadas interna (M_1) e externa (M_2), para uma estrela de nêutron de $1.4M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark. 87
- 7.5 Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução das massas, das camadas interna (M_1) e externa (M_2), para uma estrela de nêutron de $1.6M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark. 88
- 7.6 Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução das massas, das camadas interna (M_1) e externa (M_2), para uma estrela de nêutron de $1.8M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark. 89
- 7.7 Nos Gráficos (a) e (b), apresentamos, respectivamente, as curvas de evolução temporal das velocidades \dot{R}_1 e \dot{R}_2 para uma estrela com $1.4M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark. 90
- 7.8 Nos Gráficos (a) e (b), apresentamos, respectivamente, as curvas de evolução temporal das velocidades \dot{R}_1 e \dot{R}_2 para uma estrela com $1.6M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark. 91
- 7.9 Nos Gráficos (a) e (b), apresentamos, respectivamente, as curvas de evolução temporal das velocidades \dot{R}_1 e \dot{R}_2 para uma estrela com $1.8M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark. 92
- 7.10 Nos Gráficos (a) e (b) da Figura 7.10 temos uma visão comparada da evolução dos raios interno (R_1), externo (R_2) e o associado à velocidade de escape (R_{ESC}) para uma estrela de $1.4M_\odot$, onde ambos os gráficos apresentam a evolução dos raios em diferentes escalas de tempo. Nos Gráficos (c) e (d) vemos a evolução dos mesmos raios nas respectivas escalas de tempo para uma estrela de $1.6M_\odot$ e, nos Gráficos (e) e (f) vemos a evolução desses raios nas respectivas escalas de tempo para uma estrela de $1.8M_\odot$. Nos três sistemas utilizamos uma constante de sacola $B^{1/4} = 145 MeV$. 95
- 7.11 Nos Gráficos (a), (b) e (c) vemos as curvas da massa da camada 2 (M_2) e da massa que atinge velocidade de escape (M_{EJEC}) em função da constante de sacola utilizada nos cálculos da EOS da fase de quark para estrelas de $1.4M_\odot$, $1.6M_\odot$ e $1.8M_\odot$, respectivamente. 96
- 7.12 No Gráfico (a) vemos uma comparação entre as curvas de M_{ESC} em função da constante de sacola para as estrelas com $1.4M_\odot$, $1.6M_\odot$ e $1.8M_\odot$, respectivamente. No gráfico (b) temos as curvas do percentual de matéria ejetada em função da constante de sacola utilizada. No Gráfico (c) vemos uma comparação entre as curvas de massa do objeto remanescente em função da constante de sacola. 97
- 7.13 No gráfico acima temos as curvas de massa final do objeto estranho remanescente, considerando diferentes massas iniciais, em função do valor da constante de sacola utilizada. 100

Lista de Tabelas

1.1	Definição de estrelas massivas da Sequência Principal.	18
1.2	Características que definem cada classe espectral e a temperatura superficial (T_S) associada a cada classe.	22
4.1	Interação efetiva NL3. As massas dos nucleons são iguais a 939MeV tanto para prótons quanto para nêutrons. Além disso, a constante de compressibilidade nuclear é $K = 271.5MeV$, e $c_3 = 0$ na Equação (4-29)	63
4.2	Intervalos de valores cobertos pela EOS para a temperatura, T , a densidade bariônica, n_B e a fração protônica, Y_P .	63

Introdução

Neste trabalho pesquisamos a formação de onda de detonação e a possibilidade de ejeção de matéria de uma proto-estrela de nêutron induzida pela transição de fase da matéria hadrônica do meio super denso. A proto-estrela de nêutron é basicamente um caroço composto principalmente de ferro remanescente de um evento de supernova de caroço colapsante. Durante a formação da proto-estrela de nêutron, a maioria dos neutrinos produzidos fica aprisionada mas esses neutrinos acabam atravessando o meio denso e escapando, essa difusão ocorre durante um intervalo de tempo da ordem de $10 s$. Com a difusão dos neutrinos ocorre um amolecimento da equação de estado da região mais interna do caroço propiciando um aumento da densidade daquela região onde pode ocorrer desconfinamento de quarks. Neste trabalho consideramos a formação de uma pequena “semente” de matéria estranha onde houve desconfinamento de quarks com a eventual produção de quarks estranhos. O desconfinamento gera um amolecimento da equação de estado da camada interna e aciona o colapso do caroço. Embora a transição ocorra no interior profundo do caroço, a onda de detonação gerada pela transição de fase pode transferir momentum para a camada externa. Desta forma, pretendemos verificar se parte da matéria da camada externa da estrela de nêutron pode ser ejetada. É importante ressaltar que o modelo dinâmico utilizado não é relativístico, mas newtoniano. Essa aproximação ainda é válida para uma aproximação inicial, pois a maioria dos modelos que descrevem transições de fase hádron-quark são estáticos ou quasi-estáticos. Ou seja, mesmo sendo newtoniana, nossa modelagem é válida pois traz uma análise dinâmica do problema, algo ainda pouco explorado no estudo desse tipo de transição de fase.

O estudo da formação das estrelas de nêutron indica que sua composição varia ao longo da estrutura [4, 5, 6, 7]. Estima-se que em sua crosta, uma estrela de nêutron possui densidades menores que a densidade nuclear de equilíbrio, com uma composição de núcleos exóticos (ricos em nêutrons) num mar de nêutrons com alguns prótons e permeado por um gás de elétrons livres. No interior profundo superdenso talvez haja um plasma de quark-glúon, e a região intermediária apresenta uma composição de hádrons e léptons onde a densidade é menor, porém ainda supra-nuclear.

Para traduzir as diferentes composições do meio ao longo da estrutura de uma estrela de nêutron, três equações de estado obtidas para diferentes regimes de densidade são utilizadas em nosso trabalho.

Utilizamos neste trabalho utilizamos como valores fixos a temperatura e a fração protônica da matéria hadrônica respectivamente $T = 1\text{MeV}$ e $Y_P = 0.4$, o que é razoável para uma proto-estrela de nêutron após a fase de escape de neutrinos, ver Refs. [8, 9, 10].

Para o regime de densidades subnucleares sem nêutrons livres, utilizamos a equação de estado apresentada nas Refs. [11, 12], que considera o meio como um gás composto de nêutrons, prótons, partículas alfa e núcleos pesados. Realiza-se uma expansão Virial em termos das fugacidades dos componentes do gás. O gás de elétrons é tratado, em primeira aproximação, como um gás de Fermi degenerado.

Para o estudo da faixa hadrônica de densidades utilizamos uma generalização do modelo de Campo Médio Relativístico (RMF na sigla em inglês), que foi desenvolvido para a descrição da matéria nuclear densa, um modelo relativístico aplicado a um sistema de muitos corpos. Tal modelo é aplicado à matéria nuclear e a partir dele obtemos a equação de estado [12, 13]. Neste modelo, onde foi utilizado o conjunto de parâmetros de acoplamento NL3 [14], a interação nuclear entre prótons e nêutrons, ou bárions mais pesados, deve-se à troca de mésons, conhecidos como σ , ω e ρ .

Para a fase de plasma de quark-glúon, utilizamos o já bem conhecido modelo de sacola do M.I.T., [15, 16]. Utilizamos a aproximação de massa nula para os quarks e consideramos três sabores (u , d , e s).

Para discutir a questão da formação da onda de choque e da ejeção de massa destas estrelas, cujos interiores passam por uma transição de fase com desconfinamento, várias simulações de evolução hidrodinâmica efetiva foram realizadas. No cálculo incorporamos o acoplamento da hidrodinâmica com a termodinâmica da transição de fase.

Estudamos a possibilidade de ejeção de massa para diferentes massas estelares, e para variações da constante de sacola utilizada na equação de estado da fase de quark. É importante salientar que a partir dos parâmetros das equações de estado, estes são os dois únicos parâmetros livres de nosso cálculo.

A Tese está estruturada da seguinte forma:

A fim de situarmos a formação das estrelas de nêutron dentro da evolução estelar, no Capítulo 1 discorremos resumidamente sobre a teoria de Evolução Estelar. Descrevendo o processo de formação estelar, assim como as fases pós-seqüência principal, nos detendo um pouco mais no ítem sobre estrelas de nêutron e de quark (maiores detalhes sobre Evolução Estelar nas Refs. [4, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,

25, 26, 27, 28]).

No Capítulo 2, descrevemos em linha gerais as equações utilizadas na hidrodinâmica Newtoniana e discorremos brevemente sobre sua aplicação no estudo de estrelas compactas, Ref. [29]. Apresentamos também, de forma sucinta, as equações hidrodinâmicas relativísticas utilizadas para descrever o meio estelar, ver Refs. [30, 31, 32]. A utilização de uma modelagem relativística apresentaria um caráter mais geral e acurado à abordagem do problema que pesquisamos neste trabalho, entretanto, a complexidade do modelo que utilizaremos demandaria um enorme esforço computacional que consideramos desnecessário numa aproximação inicial. Nossa escolha por um modelo Newtoniano sem viscosidade se justifica pois nosso objetivo principal focaliza-se na pesquisa das consequências da transição de fase e não na hidrodinâmica em si.

No Capítulo 3, visando obter as equações de movimento que regem a hidrodinâmica do interior de uma estrela de nêutron durante a transição de fase, utilizamos uma descrição lagrangeana do caroço de uma estrela de nêutron onde utilizamos um modelo de duas camadas para o caroço, Ref. [33]. Apresentamos o modelo de duas camadas utilizado para descrever a dinâmica do caroço ao longo do processo de desconfinamento de quarks em seu interior. A partir desse modelo obtemos as equações de movimento para as camadas da estrela de nêutron. Definimos e deduzimos de forma sucinta a *velocidade de escape*, a fim de introduzirmos uma tentativa de refinamento de nosso cálculo para os valores totais da massa ejetada em função daquela. Também descrevemos brevemente como obtivemos numericamente as condições iniciais a partir da preparação de uma esfera hadrônica homogênea.

No Capítulo 4 discutimos as equações de estado utilizadas em nosso trabalho para os regimes de densidade sub-nuclear e nuclear, pois no interior da proto-estrela de nêutron coexistem, em camadas distintas, meios com diferentes densidades (conforme Refs. [4, 21, 22]), tornando-se necessário utilizar diferentes equações de estado para tais meios, como as das Refs. [11, 12, 13].

De forma análoga ao que fizemos para a fase de hádrons no capítulo anterior, no Capítulo 5 discutimos as equações de estado utilizadas em nosso trabalho para os regimes de matéria de quark estranho, ver Refs. [15, 16].

No Capítulo 6 descrevemos a abordagem utilizada para descrever a transição de fase hádron-quark, de primeira ordem. Mostramos, então, a variação da energia interna que deve ser acoplada às equações de movimento obtidas no capítulo anterior, tal acoplamento permite uma descrição aproximada da formação da onda de choque induzida pela transição de fase.

De modo a investigar a sensibilidade dos resultados aos parâmetros da equação de estado e às massas, na descrição da fase de quark na geração da onda

de choque durante a transição de fase, no Capítulo 7 apresentamos os resultados obtidos a partir da utilização de uma gama variada de valores para a constante de sacola com uma estrela de nêutron de massa igual a $1.4M_{\odot}$. Por fim, repetimos todos os cálculos para estrelas de $1.6M_{\odot}$ e $1.8M_{\odot}$.

As conclusões demonstraram que a ejeção de massa é possível e que os valores mais propícios na escolha da constante de sacola, para obter maior estabilidade do caroço, são superiores aos comumente utilizados na literatura. Entretanto, qualitativamente os resultados concordam com o de outros autores (vide Ref. [34]) que, no passado, utilizaram um modelo hidrodinâmico de n -camadas para descrever a dinâmica da transição de fase hadron-quark.

No capítulo seguinte apresentamos nossas conclusões e perspectivas para trabalhos futuros continuando a linha de pesquisa seguida neste trabalho.

Evolução Estelar

Antes de mais nada, devemos definir o que é uma estrela. Podemos definir duas características que um objeto deve ter para que possa ser chamado de estrela:

1. deve ser ligado por sua auto-gravitação; e,
2. deve irradiar energia proveniente de uma fonte termonuclear em seu interior¹.

A primeira condição garante que sua forma deve ser esférica, pois o campo de força gravitacional é esfericamente simétrico. Ou esferoidal, caso haja a presença de forças com simetria axial (Ref. [23]). Embora a segunda condição dependa da existência de reações de fusão nuclear no interior do objeto, deve-se levar em consideração que há também liberação de energia potencial gravitacional durante fases de contração ou colapso, que serão mais discutidas adiante.

Uma implicação direta das definições acima é que as estrelas devem evoluir: a liberação contínua da energia produzida em seu interior deve promover modificações em sua estrutura ou em sua composição, ou em ambas. Da definição acima também podemos inferir que a “morte” de uma estrela pode ocorrer de duas formas: através da violação da primeira condição – auto gravitação – que significa a ruptura da estrela, a expulsão de sua matéria para o espaço interestelar; ou, através da violação da segunda condição – irradiação da energia produzida em seu interior – que pode resultar da exaustão de seu combustível nuclear. No segundo caso, a estrela se apaga lentamente enquanto esfria gradualmente emitindo a energia residual acumulada durante sua produção em fases anteriores de sua evolução. Faremos adiante uma discussão sucinta de algumas dessas fases. Vale também comentar que, apesar de ser certo que a maioria das estrelas (senão todas) possui rotação e campo magnético próprios, sem perda de generalidade, ignoraremos propositalmente essas grandezas.

¹Devemos incluir aqui uma ressalva: há objetos chamados de “estrelas”, como *estrelas de nêutron* e *estrelas de quark*, por exemplo, que não possuem reações termonucleares ocorrendo em seu interior mas irradiam energia. Tais objetos, apesar de seu nome, não são estrelas mas sim **remanescentes** de estrelas que explodiram.

1.1 Formação

As estrelas costumam se formar em gigantescas nuvens compostas basicamente de hidrogênio e poeira, tais formações são chamadas de *Nuvens Moleculares* (Ref. [23, 25]). A maior parte dessas nuvens é fria em seu interior com temperaturas da ordem de $10K$ (Ref. [25]), porém, em algumas regiões as temperaturas podem ser altas, da ordem de $\sim 10^3K$. Seu tamanho também varia bastante, podendo variar de um ano-luz a centenas de anos-luz de diâmetro com massas que podem atingir de 10 a 10^7M_{\odot} . Vale lembrar, entretanto, que apesar das dimensões e massas gigantescas dessas nuvens, a densidade média das mesmas é da ordem de $\sim 10^2$ partículas por centímetro cúbico, muito menor do que a do melhor vácuo produzido em nosso planeta.

Uma nuvem molecular é composta basicamente de hidrogênio molecular, outras moléculas estão presentes como CO e HC_4 . Como a temperatura da nuvem é muito baixa, a luz emitida no espectro visível é muito fraca para ser detectada. Por outro lado, a nuvem apresenta grande grau de extinção luminosa o que a torna praticamente indetectável no espectro visível. Basicamente, a maioria das nuvens moleculares é detectada não pela emissão espectral do hidrogênio, mas sim de outras moléculas como o CO .

Vários fatores influenciam a formação estelar, tais como gravidade, composição química, pressão do gás, rotação, campos magnéticos, materiais oriundos de estrelas vizinhas, etc (ver Refs. [35, 36, 37]). No entanto, o fator mais importante é a massa total que é formada predominantemente por hidrogênio molecular, desta forma, sem perda de generalidade, desconsideraremos os outros fatores citados e utilizaremos apenas a massa inicial como fator determinante da evolução estelar. Um estudo mais rigoroso deveria levar todos esses fatores em consideração, porém não é nosso objetivo realizar uma análise mais aprofundada, apenas mostrar as características gerais das diversas fases da evolução de uma estrela, e, para isso nossa aproximação é válida.

Embora seja fácil imaginar a formação estelar começando nas regiões mais densas da nuvem atraindo gravitacionalmente a matéria nas regiões vizinhas, um pré-requisito para tal acreção de matéria é que a temperatura inicial da nuvem seja a menor possível (Ref. [27]). Um gás a baixa temperatura implica uma pressão menor, já temperaturas não muito baixas promoveriam um aumento da pressão do meio interestelar que poderia se contrapor à atração gravitacional da matéria nas vizinhanças.

Uma nuvem molecular não colapsa formando uma única estrela, mas serve de berçário para várias formações mais densas distribuídas em seu interior. Tais

formações densas são chamadas de *nuvens protoestelares*, onde estas sim, podem vir a originar estrelas (Refs. [20, 23]). Na verdade, estrelas massivas, com massa muito superior a $2M_{\odot}$, costumam se formar em pequenos grupos dentro das regiões mais densas dessas nuvens. Estima-se que metade de todas as estrelas conhecidas se encontra em sistemas binários.

Um dos motivos da formação de múltiplos objetos num mesmo grupo pode ser a fragmentação proposta por Hoyle em 1953 (Ref. [38]). Existe um limite teórico de massa conhecido como *Massa de Jeans* (M_J), que é a massa mínima necessária para tornar a nuvem instável e iniciar seu colapso. Não entraremos em detalhes na dedução da equação da Massa de Jeans, mas é interessante comentar a mesma é proporcional a $T^{3/2}\rho^{-1/2}$, onde T é a temperatura da nuvem em colapso e ρ é a sua densidade. Segundo o modelo de Hoyle, quando a região mais densa da nuvem possui massa maior que a massa de Jeans ocorre o colapso, porém, com o colapso, em alguns casos pode haver um aumento suficiente da temperatura² para elevar a massa de Jeans até um valor maior que o da nuvem (Ref. [21]). Como consequência o colapso cessa e eventualmente a nuvem esfria e se fragmenta reduzindo o valor da massa de Jeans localmente para cada fragmento até que este seja novamente menor que o valor da massa do fragmento e o colapso se reinicie, porém, desta vez em menor escala. Este processo se repetiria várias vezes sempre com a contração mais recente ocorrendo numa escala menor. Hoyle chamou este modelo de fragmentação de *Estrutura Hierárquica*. É ainda hoje considerado uma boa aproximação para explicar a formação de grupos de estrelas menos massivas.

Tabela 1.1: Definição de estrelas massivas da Sequência Principal.

Massa	Designação
$2^3 - 2^4 M_{\odot}$	Tipo Early-B
$2^4 - 2^5 M_{\odot}$	Tipo Late-O
$2^5 - 2^6 M_{\odot}$	Tipo Early-O
$2^6 - 2^7 M_{\odot}$	Tipos O e WR

A contração de parte da nuvem protoestelar forma um objeto chamado de *protoestrela*. À medida que a protoestrela atrai matéria, sua massa cresce promovendo um aumento da atração gravitacional sobre as partículas do gás à volta. A proto-estrela não é uma estrela propriamente dita, pois não apresenta ainda reações nucleares em seu interior, mas pode ser considerada um “embrião” de estrela.

²De acordo com o Teorema do Virial, Refs. [20, 26], pelo menos metade da energia gravitacional da protoestrela deve ser convertida em calor, com isso, surge um gradiente de temperatura que deve permitir que a estrela irradie a energia acumulada, entretanto, nesta fase a protoestrela é opaca e toda radiação produzida é utilizada na ionização da nuvem.

A frente de choque na superfície da proto-estrela aquece o gás a milhões de Kelvin e o gradiente de temperatura formado faz com que o gás irradie e esfrie. Entretanto, a alta opacidade da nuvem em volta da proto-estrela impede que a radiação saia, impossibilitando a observação do nascimento de uma proto-estrela. Essa mesma radiação também reduz a taxa de acreção do material para a proto-estrela.

À medida que a proto-estrela contrai sob sua auto-gravitação, a temperatura continua a subir rapidamente no interior, aumentando o gradiente de temperatura entre as camadas centrais e as externas. Surge então uma zona convectiva entre o caroço e a superfície da proto-estrela. O caroço vai aumentando com a acreção de massa, mas a proto-estrela continua contraindo-se e comprimindo a zona convectiva. Normalmente, os núcleos de hidrogênio são impedidos de se fundir devido à barreira Coulombiana, em torno de $1MeV$. Entretanto, quando a temperatura da proto-estrela atinge temperaturas da ordem de $\sim 10^6 K$, passa a haver tunelamento da barreira Coulombiana possibilitando a ocorrência de reações termonucleares. É o surgimento da estrela propriamente dita. Com o início das reações termonucleares, a estrela pára de se contrair e atinge uma configuração de equilíbrio hidrostático. Ou seja, a atração gravitacional continua mas é equilibrada pela pressão interna gerada pelas reações termonucleares, o que permite à estrela ficar numa configuração de estabilidade que dura a maior parte de sua existência. A estrela começa, então, sua fase na Sequência Principal.

1.2 A Sequência Principal

Uma ferramenta muito utilizada na análise e classificação das estrelas é o Diagrama H-R. No início do século XX o trabalho de dois astrônomos, Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russell, levou à construção do que hoje chamamos de Diagrama Hertzsprung–Russell (ou simplesmente diagrama H–R). Ele permite o estudo das estrelas pela análise de suas características fundamentais como temperatura efetiva e luminosidade. Quando o primeiro diagrama H-R foi feito a grande surpresa foi que os pontos do gráfico não só se distribuíam de maneira não homogênea, como também os pontos representativos das estrelas, em sua grande maioria, se concentravam ao longo de uma faixa larga numa das contra diagonais dos gráficos (ver Figura 1.1). Também foi notada a presença de grupos menores, porém destacadamente colocados em relação à grande faixa. A essa grande faixa deu-se o nome de Sequência Principal. A interpretação dada dentro da teoria de evolução estelar é que as estrelas passam em torno de 90% de sua vida na Sequência Principal. O diagrama H-R é de grande importância na ligação entre a teoria da evolução estelar e a estrutura estelar.

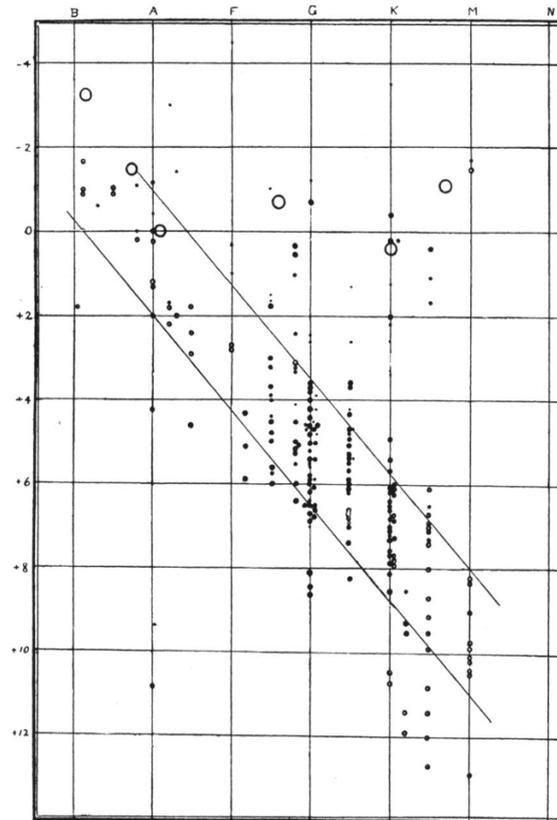


Figura 1.1: Imagem do primeiro Diagrama H-R baseado em medidas diretas de paralaxe, os tamanhos dos pontos e círculos indicavam diferentes tamanhos de erros prováveis. O eixo horizontal se refere à classe espectral onde as estrelas mais quentes se situam à esquerda e as mais frias à direita (conferir Tabela 1.2). O eixo vertical se refere à luminosidade da estrela, as mais brilhantes ficam mais acima e as menos brilhantes mais abaixo. A Sequência Principal se destaca na contradiagonal do gráfico. Fonte: Ref. [1]

1.2.1 Classe Espectral e Cor

A função mais importante de um sistema de classificação é fornecer um painel geral de referência no qual os objetos estudados possam ser encaixados. Uma estatística baseada num esquema de classificação pode fornecer pistas que nos permitam compreender a natureza intrínseca dos objetos em estudo. O sistema de classificação mais utilizado associa a temperatura com letras na sequência O B A F G K M³, onde as estrelas da classe O são as mais quentes e as da classe M são as mais frias (ver Tabela 1.2). Quando surgem muitos espécimes novos de um mesmo tipo, é natural que se crie um termo novo para adequar esse grupo. Desta forma, posteriormente foram descobertas estrelas supergigantes quentes que perdem massa a taxas vertiginosas, Ref. [24], que vieram a ser classificadas em 1962 como estrelas

³Há vários mnemônicos utilizados para se memorizar a sequência, mas o mais comum (em inglês) é: “Oh, Be A Fine Girl, Kiss Me”.

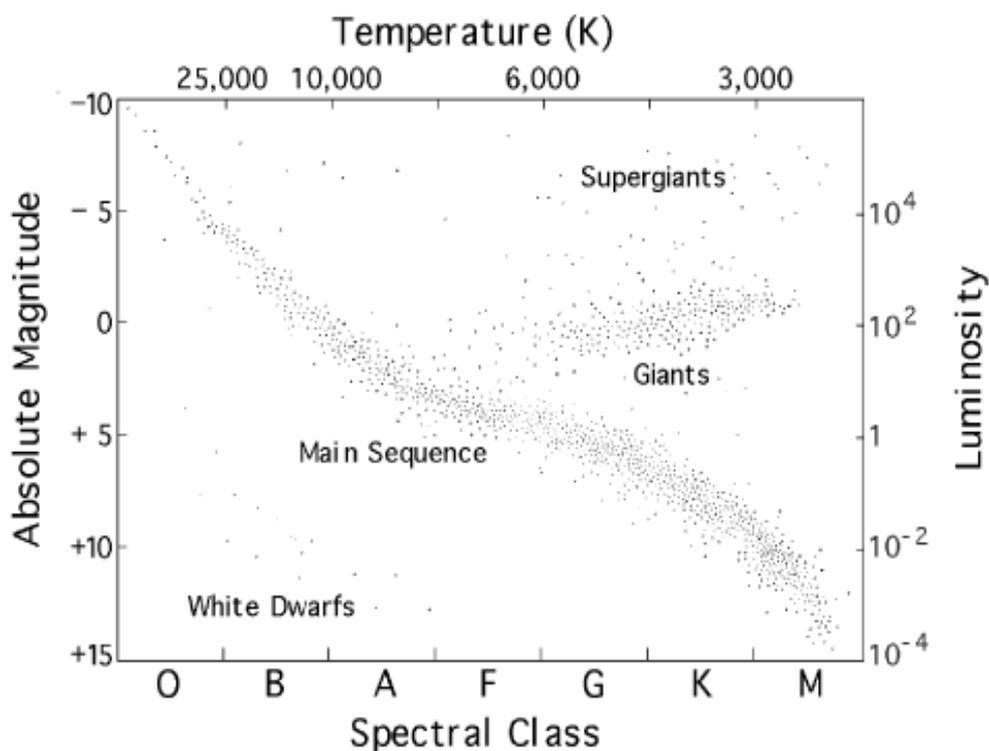


Figura 1.2: Esquema representando um Diagrama H-R típico. A Sequência Principal se destaca na contradiagonal do gráfico, mas também podemos ver grupos menores como o de Anãs Brancas e o das Gigantes Vermelhas. Fonte: Ref. [2]

de tipo W ou ainda W-R⁴, ver Ref. [39].

1.2.2 A Entrada na Sequência Principal

A Sequência Principal (SP) é a etapa mais longa da vida da estrela, quando ela está fundindo hidrogênio em hélio no núcleo e brilhando estavelmente, em equilíbrio hidrostático. Durante esse tempo as estrelas mantêm uma relação unívoca entre a luminosidade e a temperatura, determinada pela sua massa, formando uma faixa diagonal no diagrama H-R, com as estrelas mais quentes (mais massivas), sendo as mais luminosas e as mais frias (as menos massivas) as menos luminosas.

A massa com que uma estrela se forma define a sua temperatura, a sua cor, o seu tamanho, a sua luminosidade e o seu tempo de vida da estrela na sequência principal. Quanto maior a massa, mais quente, mais azul e mais luminosa será a estrela, e menor será o seu tempo de vida. Durante a sequência principal a estrela está produzindo sua energia por reações termonucleares ocorrendo apenas na sua

⁴São também chamadas de estrelas Wolf-Rayet em homenagem a Charles Wolf e Georges Rayet que descreveram as três primeiras estrelas que viriam posteriormente a serem classificadas dentro deste tipo.

Tabela 1.2: Características que definem cada classe espectral e a temperatura superficial (T_S) associada a cada classe.

Letra	$T_S(K)$	Características Especiais
W	> 40 000	Muitas linhas de emissão
O	30 000	Linhas de emissão e absorção
B	20 000	He e H dominantes
A	10 000	H dominante
F	7 000	Ca dominante
G	6 000	Muitos metais presentes
K	4 000	Linhas metálicas muito fortes
M	3 000	Complexa devido à presença de moléculas

parte mais central, o núcleo, que concentra aproximadamente 10% da massa da estrela. Somente essa região é quente o suficiente para produzir tais reações. O tipo de reação que está ocorrendo é a fusão de 4 núcleos de hidrogênio (4 prótons) para formar 1 núcleo de hélio.

As cadeias pp

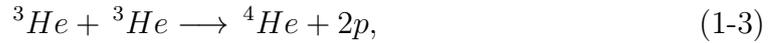
Para que haja a fusão do hidrogênio ($Z = 1$) em hélio ($Z = 2$) é necessário que haja o encontro de três ou quatro prótons, núcleos de hidrogênio, a uma distância da ordem de fermis ($1fm = 10^{-13}$), Ref. [23, 25]. A probabilidade de ocorrência de tal encontro múltiplo é quase nula, portanto, o processo a partir do qual o hidrogênio é convertido em hélio não ocorre de uma só vez. Na realidade, o processo é gradual, através de uma cadeia de reações, cada uma envolvendo o encontro próximo de apenas duas partículas. Tais cadeias começam e terminam da mesma forma, ou seja, começam com o encontro de núcleos de hidrogênio e terminam com a formação de núcleos de hélio. O que difere essas cadeias são justamente as reações intermediárias, que possuem diferentes probabilidades de ocorrerem, as principais, e portanto as mais prováveis de ocorrerem são as cadeias $pp-I$, $pp-II$ e $pp-III$. O primeiro elo comum a essas cadeias é, justamente, a fusão de dois prótons via interação nuclear forte (daí a denominação pp , de *próton-próton*). A partícula resultante, entretanto, seria instável e decairia quase imediatamente em dois prótons novamente. Foi Hans Bethe quem propôs a solução para esse problema em 1939 (ver Ref. [40]). Ele propôs que, ao invés da interação forte apenas, ocorreria também uma interação fraca durante o encontro dos dois prótons. Desta forma, a partícula resultante seria um isótopo mais estável do hidrogênio, o *deutério*,



Na reação acima, há conservação de três cargas: elétrica; bariônica; e, leptônica. O deutério captura um próton resultando na formação do isótopo mais leve do hélio, o ${}^3\text{He}$,



o fóton resultante será rapidamente absorvido e sua energia será distribuída entre as partículas vizinhas. A cadeia agora se ramifica: um ramo seguindo o encontro de dois isótopos de ${}^3\text{He}$, e ainda, outro onde um isótopo de ${}^3\text{He}$ encontre um de ${}^4\text{He}$. Ou seja, as reações de maior probabilidade de ocorrerem são:



ou



A reação (1-3) marca o fim da cadeia *pp-I*, que converte seis prótons em um núcleo de hélio (também chamado de partícula α) e liberando dois prótons. Entretanto, o aumento de temperatura e da abundância de hélio aumentam a probabilidade de ocorrência da reação (1-4), que por sua vez se ramifica nas cadeias *pp-II* e *pp-III*. A *pp-II* segue com a captura de um elétron pelo ${}^7\text{Be}$ seguida da emissão de um neutrino,



e a subsequente captura de outro próton para formar dois átomos de ${}^4\text{He}$,



A cadeia *pp-III* resulta da captura de um próton pelo ${}^7\text{Be}$, e não um elétron,



O isótopo ${}^8\text{B}$ decai em ${}^8\text{Be}$, que por sua vez é altamente instável e imediatamente decai em dois núcleos de ${}^4\text{He}$,



A energia liberada (Q) para o meio estelar difere nas três cadeias do tipo *pp* (conferir Ref. [26]): $Q = 26.50\text{MeV}$ na cadeia *pp-I*; $Q = 25.97\text{MeV}$ na cadeia *pp-II*; e, $Q = 19.59\text{MeV}$ na cadeia *pp-III*.

A Ciclo *CNO*

Outra importante cadeia de reações que levam à fusão do hidrogênio em hélio é o ciclo *CNO* que depende da existência prévia de **C**arbono, **N**itrogênio e **O**xigênio no meio estelar (daí a nomenclatura *CNO*). No caso da queima do hidrogênio via cadeias *pp*, o conjunto de reações inicia com a reação entre dois prótons e apresenta um produto final completamente diferente, o ${}^4\text{He}$. No caso da queima do carbono, este elemento inicia a reação e também aparece como resultado final delas. Esta é a razão para chamarmos este conjunto de reações nucleares, que é iniciado pelo carbono e produz carbono como elemento final, de “ciclo”. No caso da queima do hidrogênio o que acontece é uma “cadeia” de reações.

O ciclo *CNO* só acontece em estrelas que já possuem uma quantidade razoável de carbono no seu interior, ou seja, em estrelas formadas a partir dos resíduos gasosos produzidos pela explosão de uma outra estrela, uma supernova. Como veremos mais tarde, as estrelas evoluem e produzem no seu interior elementos pesados. Quando elas explodem esses elementos são lançados no meio interestelar e se ela estiver próxima ou dentro de uma nuvem molecular gigante a onda de choque resultante desta explosão pode comprimir o gás suficientemente de modo a dar origem a novas estrelas. Como o meio interestelar foi contaminado pelos elementos pesados da estrela que explodiu, as novas estrelas terão estes elementos químicos no seu interior.

O Ciclo *CNO* pode seguir três caminhos distintos,



ou



ou



O ciclo *CNO* propriamente dito é composto pelos dois primeiros conjuntos de reações, o terceiro conjunto foi incluído apenas por completeza pois ainda há indeterminações nesse conjunto visto que a taxa da reação ${}^{17}\text{O}(p, \alpha){}^{14}\text{N}$ ainda não é bem determinada.

Tanto a cadeia *pp* como o ciclo *CNO* produzem ${}^4\text{He}$ como elemento final das reações. Isto quer dizer que, sejam estrelas de grande massa ou não, o processo nuclear iniciado na sequência principal deixará como resíduo no interior da estrela um núcleo inerte de ${}^4\text{He}$. Na realidade, os dois processos nucleares, cadeia *pp* e ciclo *CNO*, podem ocorrer simultaneamente nas estrelas e, dependendo de sua massa, um deles se torna dominante. Por exemplo, para as estrelas que estão no intervalo entre 1 e 3 massas solares, a fração de luminosidade produzida pela queima no ciclo *CNO* é pequena para as estrelas com $1M_{\odot}$. No entanto, para uma estrela com $1.5M_{\odot}$, o ciclo *CNO* já é responsável por 73% da energia no centro da estrela e por aproximadamente metade da sua luminosidade total. Para uma estrela com $1.7M_{\odot}$, e também para aquelas com mais massa, o ciclo *CNO* claramente domina o processo de produção de energia.

A fusão de hidrogênio em hélio não é o mais eficiente entre todos os estágios de queima nuclear que ocorrem em uma estrela. Conseqüentemente, a fase de permanência na sequência principal é a mais longa da existência de uma estrela. No entanto, o tempo de permanência de uma estrela na sequência principal depende de sua massa e de sua composição química. Estrelas de grande massa ($M \geq 16M_{\odot}$), aquelas que estão localizadas na região do canto superior esquerdo do diagrama H-R, permanecem muito menos tempo na sequência principal do que as estrelas de pequena massa ($M \leq 8M_{\odot}$).

Depois que todo o hidrogênio do caroço é consumido, uma camada de hidrogênio continua sendo queimada em torno do caroço isotérmico até que a temperatura seja grande o suficiente para iniciar a queima do hélio no caroço. Se ao sair da Sequência Principal a massa do caroço for maior que um limite conhecido como Limite de Chandrasekhar (esse limite será discutido mais adiante na Seção 1.3.2), então a pressão do gás de elétrons não será suficiente para deter o colapso do caroço quando a queima de hidrogênio cessar. Eventualmente os aumentos da

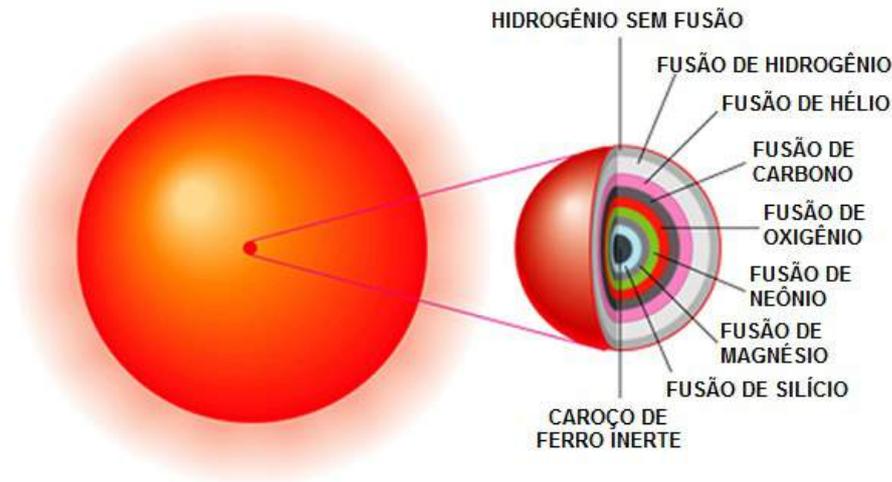


Figura 1.3: Representação da estrutura do caroço de uma estrela massiva em seus estágios finais. A sobreposição de camadas com fusão de diferentes elementos faz com que o caroço se assemelhe a uma cebola. Fonte: adaptado a partir da Ref. [3]

densidade e da temperatura viabilizarão a fusão do hélio. É interessante lembrar que, como o hélio possui dois prótons ao invés de um, é necessária uma temperatura muito maior para que haja tunelamento da barreira Coulombiana entre os núcleos de hélio. O mesmo vale para elementos mais pesados que, por terem mais prótons, apresentarão maior força de repulsão Coulombiana e exigirão temperaturas cada vez maiores para que possa haver sua fusão.

Ao processo nuclear que envolve a fusão do hélio damos o nome de processo triplo- α , pois envolve a fusão de três partículas α (${}^4\text{He}$). Isto nos mostra que estas reações só podem ocorrer no interior das estrelas após a fase de reações nucleares da cadeia *pp* ou do ciclo *CNO* que produzem partículas α .

A queima de hélio produz um caroço de carbono. Quando um elemento se exaure, se a temperatura for grande o suficiente, inicia-se a queima do elemento seguinte. Cascas concêntricas vão se formando à medida que cada elemento é sintetizado, o núcleo passa a ter uma estrutura semelhante à de uma cebola, ver Figura 1.3. A queima de elementos continua até o ferro, quando as reações nucleares então cessam, pois a fusão do ferro em elementos mais pesados é endotérmica⁵.

1.2.3 Anãs Marrons

O limite de massa inicial mínimo para a proto-estrela começar a queimar hidrogênio, e portanto entrar na SP, é de aproximadamente $0.08M_{\odot}$. Objetos com massa inicial abaixo desse limite não conseguem atingir temperaturas altas

⁵Elementos mais pesados que o ferro não são produzidos nas reações de fusão e sim em eventos de *supernovae*, sobre as quais falaremos mais adiante

o suficiente para promover o tunelamento da barreira Coulombiana e iniciar a fusão de hidrogênio em hélio. Entretanto, acredita-se que objetos com massa superior a 12 massas de Júpiter ($\sim 0.0012M_{\odot}$), possam começar a fundir deutério (ver Refs. [41, 42, 43]), que exige uma temperatura mais baixa do que a de fusão do hidrogênio. Embora haja reações de fusão de deutério, muitos autores não consideram esses objetos estrelas propriamente ditas pois não entram na SP em momento nenhum. Esses objetos são conhecidos como anãs marrons. Há ainda controvérsia sobre a diferenciação entre uma anã marrom e um planeta gasoso gigante. Há autores que propõem essa diferenciação através da observação das linhas de lítio, pois a queima de deutério destruiria o lítio na superfície do objeto e as linhas de emissão desse elemento estariam ausentes no espectro de uma anã marrom, mas não necessariamente no de um planeta gigante gasoso (Refs. [23, 43]). Embora haja anãs marrons de tipo espectral M, que são as mais jovens, foi criada uma classificação estendida para elas com os tipos L, T e Y. Suas características específicas são:

- Classe M ($T_S = 3\,500 - 2\,100K$) magneticamente ativas, apenas as mais jovens anãs marrons são classificadas como M;
- Classe L ($T_S = 2\,100 - 1\,300K$) atmosferas ricas em moléculas de hidrídios (FeH , CrH , MgH , CaH) e outros condensados;
- Classe T ($T_S = 1\,300 - 600K$) são as anãs marrons mais frias já observadas, possuem atmosfera com gases de H_2O , CH_4 e NH_3 ; e,
- Classe Y ($T_S = < 600K$) tipo hipotético ainda não observado, estima-se que tenham nuvens de H_2O .

1.3 Estágios Finais

Quando toda energia proveniente de reações nucleares cessa, a estrela se encaminha para o fim de sua trajetória evolutiva. Nesta seção consideraremos os possíveis estágios finais da estrela.

Durante as reações termonucleares muitos raios gama liberados no caroço produzem pares elétron-pósitron que se aniquilam produzindo pares neutrino-antineutrino. A perda de neutrinos aumenta muito com a temperatura. A perda é tão grande nesse estágio que as etapas seguintes de queima de elementos ocorrem cada vez mais rápido, como oxigênio em um ano e silício em uma semana. Quando um dos elementos combustíveis é exaurido, o caroço se contrai até atingir a temperatura necessária para iniciar a próxima etapa de queima. Em alguns casos a perda de calor em um estágio seguinte é tão grande que pode ocasionar a re-expansão das camadas mais externas da estrela, eventualmente até ejetando matéria para o exterior da estrela.

A cessação da fusão nuclear sinaliza o fim do estágio luminoso da estrela. A fusão termonuclear ocorre durante a maior parte da vida de uma estrela e a época de sua cessação depende de sua massa inicial. Só estrelas massivas ($M \gtrsim 8M_{\odot}$) chegam a produzir ferro nas reações de fusão. Estas estrelas massivas podem terminar suas vidas como estrelas de nêutron ou buracos-negros. Em estrelas menos massivas a combustão é mais lenta e não chega à síntese do ferro. Estas estrelas terminam suas vidas como anãs brancas.

1.3.1 A Fase de Gigante Vermelha

As gigantes vermelhas não estão entre os estágios finais das estrelas mas precedem o estágio de anã branca, portanto é interessante comentarmos brevemente este que é um importante estágio intermediário das estrelas de baixa massa.

Em termos de tamanho físico o caroço isotérmico de hélio degenerado nunca é muito grande. Assim, a evolução pós-seqüência principal de uma estrela de pouca massa pode ser vista como o processamento de material estelar além da zona de queima, com o hélio resultante sendo acumulado em um pequeno volume com peso molecular médio muito maior (o caroço pode atingir densidades da ordem de $10^6 g.cm^{-3}$). A densidade caindo logo acima do caroço de hélio levará a um aumento da temperatura (que passa a ser da ordem de $10^8 K$), de modo que os mecanismos de geração de energia nuclear possam suprir a energia necessária para suportar a estrela através do processo triplo- α . Entretanto, um aumento na temperatura central levaria a um aumento do gradiente de temperatura e a um conseqüente aumento da luminosidade. A luminosidade aumentada, por sua vez, provoca a expansão do envelope externo da estrela, diminuindo o gradiente de temperatura. O equilíbrio é estabelecido com uma temperatura de camada superior com gradiente de temperatura e luminosidade um pouco maiores. O processo continua até que o gradiente de temperatura exceda o gradiente adiabático. Então o envelope externo inteiro se tornará convectivo ficando com a menor temperatura que uma estrela pode ter – segundo modelos teóricos de Hayashi & Hoshi (limite de Hayashi, ver Ref. [44]).

O aumento no tamanho físico do envelope diminui a temperatura superficial e, portanto, aumenta a opacidade radiativa nas camadas externas. Isso promove a redução da eficiência do transporte radiativo e assegura a formação da zona convectiva externa. A estrela agora é totalmente convectiva. A redução contínua do suprimento de hidrogênio disponível na região de queima na camada, que se torna extremamente fina, leva a um aumento contínuo na temperatura de camada acompanhado de um aumento da luminosidade. Com a zona convectiva externa carregando eficientemente a energia para a superfície, a perda de energia é novamente

limitada pela fotosfera e a estrela se expande rapidamente para acomodar o fluxo de energia aumentado.

1.3.2 Limite de Chandrasekhar

Uma estrela que termine sua evolução com um caroço cuja massa esteja abaixo de um determinado limite poderá ter o colapso de seu caroço detido pela pressão dos elétrons degenerados em seu interior. Ou seja, existe um limite máximo a partir do qual a pressão de elétrons degenerados não consegue vencer a gravidade e estabilizar a estrela. Com a auto-gravitação sendo grande demais para ser contrabalançada pela pressão de elétrons degenerados, seu colapso não será detido e os prótons do caroço começarão a capturar elétrons e produzir nêutrons eventualmente ocasionando um evento explosivo que chamamos de *supernova*. Falaremos sobre *supernovae* mais adiante.

A existência de um limite superior para a massa de uma estrela degenerada foi proposta em 1931 por Chandrasekhar e, portanto, esse limite recebe o nome de *Massa de Chandrasekhar* (M_{Ch}), ou *Limite de Chandrasekhar*. O valor desse limite superior é, segundo as Refs. [45, 46], de aproximadamente $M_{Ch} \approx 1.4M_{\odot}$, para maiores detalhes da dedução teórica desse limite, ver as Refs. [47, 17]. Meio século depois, tal descoberta rendeu a Chandrasekhar o prêmio Nobel de Física de 1983, que ele dividiu com Fowler, por suas contribuições à compreensão da Evolução Estelar.

1.3.3 A Fase de Anã Branca

Quando o hélio se esgota, o caroço volta a se contrair e o aumento de temperatura pode levar à fusão do elemento seguinte e assim sucessivamente. Porém, se a estrela não for massiva o suficiente ela pode cessar sua contração sem se aquecer o suficiente para iniciar a queima dos elementos seguintes. Neste caso, é a pressão de elétrons degenerados no interior do objeto que detém a contração. O objeto remanescente é chamado de *anã branca*. Para que haja a formação de uma anã branca o caroço deve ter massa inferior ao limite de Chandrasekhar, ou seja, uma anã branca, teoricamente, deve ter massa $M \lesssim 1.4M_{\odot}$.

Uma anã branca é uma estrela que já esgotou seu combustível nuclear. Não possui, portanto, uma fonte de energia nuclear que a mantenha luminosa por muito tempo. Entretanto, uma anã branca, por ser originalmente a região central de uma estrela, é inicialmente um objeto bastante quente. Em consequência, ela mantém-se irradiando luz pela conversão de seu manancial de energia interna em radiação. Uma estrela normal também o faz, mas tem sua energia térmica repostada

pelas reações nucleares. No caso de uma anã branca, a inexistência de um processo de reposição de sua energia interna implica que a estrela lentamente se resfria até entrar em equilíbrio térmico com o universo, tornando-se eventualmente uma anã negra. As anãs brancas são o produto final da evolução estelar para cerca de 95–98% de todas as estrelas.

1.3.4 Supernova

Se a massa inicial da estrela for pequena ($< 8M_{\odot}$ segundo a Ref. [28]), o colapso pode ser detido pela pressão do gás de elétrons degenerados em seu interior. Porém, caso a massa inicial da estrela seja $\geq 8M_{\odot}$, o colapso não será detido pela pressão de elétrons e a temperatura continuará aumentando até que seja possível iniciar a fusão do hélio. Estrelas mais massivas podem se estabilizar com a queima de hélio em seu caroço, também mantendo a queima de hidrogênio em uma camada em torno do caroço. Os produtos finais da queima de hélio são carbono, nitrogênio e oxigênio. Apenas as estrelas com massa $M \geq 8M_{\odot}$ conseguem usar carbono, nitrogênio e oxigênio como combustível em reações termonucleares. Tais estrelas possuem caroços mais massivos do que $1.4M_{\odot}$, cuja pressão gravitacional pode superar a pressão de degenerescência dos elétrons e assim tornar-se densas o suficiente para queimar esses elementos. Esta massa é chamada de limite de Chandrasekhar e é definida em função da falha da degenerescência dos elétrons para deter de forma eficaz a enorme pressão gravitacional, como vimos na Seção 1.3.2. Quanto mais denso o núcleo da estrela, mais comprimidos os elétrons devem ficar. Isto acaba por fazer com que os elétrons atinjam a energia de Fermi.

Como os caroços de estrelas massivas podem tornar-se quentes o suficiente para queimar carbono, nitrogênio e oxigênio, as reações de fusão se sucedem. Em geral, estrelas com massa acima dessa massa limite são capazes de queimar todos os elementos mais leves que o ferro. No entanto, nenhuma estrela pode fundir ferro para obter elementos mais pesados, a razão disso é que o ferro tem a maior energia de ligação por nucleon. Como a fusão do ferro é endotérmica, isso, somado a reações de fotodissociação, leva ao colapso do caroço. Durante o colapso, o endurecimento da equação de estado do caroço pode levar à reversão do colapso promovendo a ejeção de mais de 90% da matéria estelar. Esse evento explosivo devido à reversão do colapso do caroço de uma estrela massiva é conhecido como *supernova* (SN) com plural *supernovae* (SNe), ver Refs.[48, 49, 50]. Mais adiante veremos que há eventos explosivos que, embora ocorram em anãs brancas, também recebem este nome.

Uma massa de uma a dez massas solares é ejetada a velocidades da ordem de dez por cento da velocidade da luz. A energia correspondente é comparável à

energia de ligação gravitacional de uma estrela e, portanto, evidencia que a estrela fica severamente, se não completamente, comprometida.

Vários são os possíveis remanescentes da supernova, o tipo de remanescente depende principalmente da massa total da estrela progenitora ao entrar na Sequência Principal. Como exemplos, pode haver aniquilação total da estrela na explosão, podemos ter como remanescente da supernova um caroço feito primariamente de nêutrons, que chamamos de *estrela de nêutron* ou podemos ter um *buraco negro*, caso a pressão de nêutrons degenerados não consiga estabilizar o caroço remanescente. Elas também podem liberar restos extensos que são ejetados para fora e conduzem ondas de choque para o meio interestelar. Essa energia pode ajudar a formar novas estrelas e, em algumas circunstâncias, pode “soprar” matéria totalmente para fora de galáxias quentes. Devido a seus grandes brilhos, as SNe podem ser usadas para determinar distâncias e ajudam a determinar a idade, forma e dinâmica do universo. Dos estudos de SNe em outras galáxias, Minkowski classificou dois tipos básicos (ver Ref. [51]), baseado na presença ou não de hidrogênio no espectro observado, chamados de :

1. **Tipo I** – caracterizado pela ausência de hidrogênio no espectro e é hoje dividido nos seguintes subtipos:

- *Tipo Ia* – (subgrupo que compreende 80% das SNe de Tipo I), em geral são explosões de estrelas antigas (seu tempo estimado de vida é da ordem de 10^9 anos) e de baixa massa (algo em torno de $3 - 8M_{\odot}$). Esta é uma classe extremamente homogênea de objetos. Na fase de brilho máximo, seu espectro apresenta fortes linhas de absorção de silício. A luminosidade máxima é bem definida, principalmente se considerarmos separadamente as SNe de galáxias late-type (mais brilhantes) e early-type (menos brilhantes). No cenário “standard” esta SN ocorre em sistemas binários, onde uma anã branca de carbono/oxigênio acreta a massa da estrela secundária, eventualmente atinge o limite de Chandrasekhar ($\sim 1.4M_{\odot}$) e explode em uma reação termonuclear. A reação ocorre quando a queima de seu carbono e oxigênio é disparada, produzindo elementos mais próximos do ferro. Um importante isótopo produzido é o ^{56}Ni que decai para ^{56}Co , que por sua vez decai para ^{56}Fe . Esses decaimentos liberam raios gama da ordem de MeV e pósitrons que potencializam a curva de luz óptica;
- *Tipo Ib* – Tais SNe têm linhas fortes de hélio e pouco silício durante o máximo. Os progenitores dessas SNe (assim como as de Tipo Ic) são estrelas maciças que colapsam;
- *Tipo Ic* – Espectro semelhante ao Tipo Ib, mas sem as linhas proeminentes de hélio;

2. **Tipo II** – O que define as SNe deste tipo é o fato de que exibem a linha $H\alpha$ de forma proeminente. Exceto pelo hidrogênio, seu espectro é similar às SNe de Tipo Ib/c, mas, assim como a luminosidade máxima, há uma grande variedade. Estas SNe ocorrem devido ao colapso do caroço de estrelas com massas no intervalo $10 - 30M_{\odot}$.

Ou seja, estrelas que entram na Sequência Principal com diferentes massas poderão ter diferentes finais em sua evolução. Neste trabalho nos ateremos ao estudo das proto-estrelas de nêutron, objetos remanescentes das SNe de Tipos Ib, Ic e II que posteriormente evoluem para o estágio de estrelas de nêutron.

1.3.5 A Estrela de Nêutron e sua Formação

A criação de elementos mais pesados que núcleos de ferro não libera qualquer energia e, como consequência, a estrela com um caroço de ferro, portanto, não possui mais uma fonte de energia. Uma vez que o caroço também é muito grande para que a pressão de degenerescência de elétrons possa manter o equilíbrio hidrostático, o caroço inicia o colapso e ultrapassa a fase de anã branca até que um novo mecanismo seja capaz de fornecer uma pressão de equilíbrio, Ref. [22]. Durante o colapso, a pressão gravitacional que é demasiada para ser detida pela degenerescência de elétrons, favorece a captura destes pelos prótons resultando na liberação de nêutrons e neutrinos reduzindo drasticamente a população de elétrons e aumentando a de nêutrons. A degenerescência de nêutrons, entretanto, pode ser capaz de fornecer a pressão para deter o colapso gravitacional (ver Ref. [4]). Além disso estrelas compactas feitas de quarks livres também devem ser capazes de fornecer a pressão necessária. A matéria de quark livre é um estado de matéria em que os quarks se comportam como partículas que interagem fracamente. Em matéria normal, os quarks são fortemente ligados em bárions, como resultado do confinamento, fenômeno segundo o qual não pode existir um quark isolado. No entanto, a altas energias, a liberdade assintótica presente na teoria de interações entre quarks indica que o desconfinamento deve ocorrer. Liberdade assintótica significa que, no limite das energias infinitas a força de interação vai para zero. Falaremos um pouco mais sobre liberdade assintótica mais adiante.

Objetos para os quais a pressão de degenerescência de nêutrons ou quarks é o fator de estabilização são muito pequenos, com raios da ordem de $10km$, se comparados com anãs brancas, cujos raios típicos são da ordem de 10^4km . É também possível que a pressão de degenerescência de nêutrons ou de quarks não seja suficiente para se contrapor à gravidade se a massa do caroço for muito grande. Nesse caso, nenhum outro mecanismo conhecido pode impedir o colapso do

objeto. O remanescente desse tipo de colapso é o objeto que chamamos de *buraco negro*, Ref. [4].

Neutralidade de Carga e Interação Fraca na Fase de Formação

A força Coulombiana repulsiva agindo partículas carregadas, de mesmo sinal, como se fosse uma carga líquida em uma estrela, sobrepujará a atração gravitacional agindo sobre essas partículas que eventualmente serão expelidas, Ref. [22].

Pode-se concluir que a carga líquida por nucleon (e, portanto, a carga média por nucleon em qualquer estrela) deve ser muito pequena, essencialmente zero. No entanto, o número de cargas de sinais iguais e de opostos não é de todo limitado. É importante ressaltar que a condição de neutralidade da carga líquida em uma estrela é uma característica global mas não local. O argumento acima não coloca nenhuma restrição quanto ao valor da densidade de carga como uma função da posição dentro da estrela.

Por outro lado, a presença de elétrons em matéria quark estranho é crucial para que haja uma possível existência de uma crosta nuclear em tais objetos. Como mostrado nas Refs. [52] e [53], os elétrons, por estarem ligados à matéria estranha pela força Coulombiana ao invés da força forte, se distribuem por várias centenas de fm acima da superfície da matéria estranha. Associado a este deslocamento de elétrons surge uma fina camada com um dipolo elétrico intenso capaz de suportar – sem contato com a superfície da matéria estranha – uma crosta de material nuclear, que se polariza. A densidade máxima possível na base da crosta (densidade da crosta interna) é determinada pela densidade de gotejamento de nêutrons ($\rho_{drip} \approx 4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$), na qual nêutrons começam a “gotejar” para fora dos núcleos e formar um gás de nêutrons livres. Sendo eletricamente neutros, os nêutrons livres não sentem a força Coulombiana repulsiva e, portanto, devem cair em direção ao núcleo de matéria quark, onde eles se converterão, por hipótese, em matéria de quark estranho. A condição para que tal conversão ocorra, segundo Witten (ver Ref. [54]), é a de que a energia média por bárion da matéria deve ser maior antes da transição e menor após o desconfinamento. A taxa com que tal conversão deve ocorrer, entretanto, não está definida de forma definitiva na literatura. Discutiremos melhor a nossa abordagem a esse respeito no Capítulo 6.

Para compreender a natureza do equilíbrio químico em uma estrela, é interessante notar que a estrela evolui, e que uma estrela de nêutrons fria em equilíbrio químico representa a configuração definitiva de estado fundamental. Muitas reações diferentes podem ocorrer durante essa evolução. Diversas reações entre hádrons ocorrem. Certos números quânticos ou partículas, tais como carga

elétrica e número bariônico, são conservadas em um longo prazo em comparação com a vida da estrela. No entanto, quaisquer káons produzidos em associação com híperons eventualmente irão decair na escala de tempo electro-fraca, e seus produtos finais serão léptons, fótons e neutrinos.

Os neutrinos e fótons se difundem para a superfície e, tendo mais do que a velocidade de escape, deixam a estrela, diminuindo sua energia e causando um “bloqueio de Pauli” na produção dos híperons em associação com os káons. Isso continua até que a estrela eventualmente atinge um estado degenerado onde outras reações não são possíveis. Nesta fase, na escala nuclear, e do ponto de vista da sua composição hadrônica e leptônica, a estrela é essencialmente fria ($\approx 1MeV$). Apesar de fria, a estrela ainda está quente em comparação a radiação cósmica de fundo de cerca de 3 K. É por isso que há uma radiação residual de fótons e neutrinos. A difusão de fótons continua ainda por milhões de anos.

Para fins práticos os potenciais químicos de quaisquer componentes que não sejam conservados na escala do tempo de vida da estrela são definidos como nulos. Têm-se, então, as relações entre os potenciais químicos. Há tantos potenciais químicos independentes, quantos hajam componentes ou atributos conservados, ou, de modo mais geral, “cargas” que sejam absolutamente conservadas, ou conservadas em uma escala de tempo longa em comparação com a vida da estrela (ou de uma forma mais restrita, ao longo da época de observação). Todos os outros potenciais químicos não nulos podem ser escritos em termos dos independentes.

Quaisquer neutrinos e fótons produzidos nas reações durante a desexcitação da estrela em seu início quente acabam se difundindo para fora. Estamos interessados no estado fundamental após essa difusão ter ocorrido e a estrela alcançado seu estado frio em que reações posteriores são proibidas por causa do bloqueio de Pauli dos produtos da reação. Como a população de neutrinos está perdida para a estrela, temos de definir o seu potencial químico como zero,

$$\mu_\nu = 0; \text{ (todos os sabores).}$$

Como já mencionado, a escala de tempo da interação eletrofraca é curta em comparação com a escala macroscópica, de modo que o número quântico de estranheza, embora conservado pela interação forte, não é conservado na escala de tempo de vida da estrela. Há, portanto, apenas duas “cargas” conservadas com seus correspondentes potenciais químicos, aqueles para o número bariônico e para o número de carga elétrica. Os potenciais químicos de todos os outros constituintes podem ser escritos em termos destes dois.

Estrelas de nêutron evoluem a partir de uma proto-estrela de nêutron

quente, preenchida por um grande número de neutrinos e fótons, que se formam no colapso de uma estrela massiva após a ejeção da maior parte da estrela progenitora numa supernova (para maiores detalhes, ver Ref. [55]). A energia levada pela matéria ejetada é uma fração pequena, da ordem de um por cento, da energia que será retirada pouco depois por neutrinos. Ao longo do período de difusão dos neutrinos cerca de aproximadamente 99% da energia da estrela é “roubada” pelos neutrinos, estes, por sua vez, possuem tanta energia e atravessam um meio tão denso que podem depositar momentum nas camadas mais externas da estrela e promover uma nova ejeção de massa, só que em escala muito menor (conforme já demonstramos em trabalhos anteriores nas Refs.[8, 10, 9]). A fonte de energia é, claro, a energia de ligação gravitacional da estrela de nêutrons (até 100MeV por nucleon). Esta proto estrela de nêutron inicial não é isotérmica e tem temperaturas interiores de várias dezenas de MeV ($1\text{MeV} = 1,065 \times 10^{10} \text{K}$) e uma alta densidade, de modo que mesmo neutrinos têm um tempo de difusão longo quando comparado com a escala de tempo dinâmico do colapso. Com efeito, a maior parte dos neutrinos escapa em cerca de 10s transportando para fora da estrela quase toda a energia de ligação, e a temperatura cai rapidamente para cerca de 10MeV no seu interior e vários MeV nas camadas externas em aproximadamente 20s . Depois disso, a estrela esfria por mais emissão de neutrinos, por raios-X e, mais tarde, por emissão de fótons, levando alguns milhões de anos até cair a uma temperatura superficial de 10^5K , ver Refs. [56, 57, 58]. Ainda há considerável controvérsia sobre quais são os processos mais relevantes através dos quais o resfriamento ocorre, por outro lado, a temperatura cai em um curto período de tempo a um patamar inferior a 1MeV , que é considerado frio na escala nuclear. Todos os fótons e neutrinos escapam e, até onde se sabe, a temperatura torna-se tão baixa e a degenerescência de bárions no mar de Fermi é tão completa que outras reações não são mais possíveis devido ao bloqueio de Pauli.

1.3.6 Estrelas de Quark

Estrelas de quark são objetos astrofísicos teóricos que seriam formados por matéria de quarks desconfinados, ver Refs. [59, 60]. Estrelas híbridas, como o próprio nome já permite supor, seriam estrelas de nêutron com um caroço feito de matéria de quark. Tal estado da matéria foi teorizado logo após a descoberta de que os quarks, os constituintes dos nucleons, são assintoticamente livres. No extremo da transferência assintótica de momento, densidade ou temperatura, os quarks são livres de interação. Nestas circunstâncias, a individualidade dos nucleons é perdida, e os quarks da matéria nuclear se tornam livres para explorar uma região “sem cor” muito maior do espaço conhecida como matéria de quark.

A fase de desconfinamento da matéria de quark é de grande interesse em astrofísica por várias razões. Em primeiro lugar, o universo primordial provavelmente passou por esta fase nos seus primeiros segundos. Em segundo lugar, as condições nos núcleos das estrelas compactas (como estrelas de nêutron e anãs brancas), podem ser tais que a matéria hadrônica ordinária na qual os quarks estão confinados em hádrons individuais seja convertida pela alta pressão em matéria de quark, formando uma estrela híbrida com um caroço central de matéria de quark e um manto de matéria nuclear. Em terceiro lugar, é concebível que o estado fundamental da interação forte seja na realidade a matéria de quark estranho ao invés da matéria ordinária composta por nucleons e núcleos que nós já conhecemos bem. Neste caso, pulsares poderiam ser estrelas de quark estranho ao invés de estrelas de nêutron.

Modelo de Confinamento de Quark

Quarks não são observados isoladamente na natureza. Isso provavelmente ocorre devido a uma propriedade chamada *confinamento*. Liberdade assintótica é a propriedade de algumas teorias de calibre nas quais a interação entre as partículas para distâncias pequenas (ou altas energias) se torna arbitrariamente pequena. Ou seja, quanto maior a distância maior a interação, como se esses quarks estivessem ligados por uma mola. Se eles têm alta velocidade (grande energia) e estão se afastando, a mola vai se distendendo, e à medida que isso acontece, uma força maior vai puxando os quarks de volta. A partir de um certo ponto, eles não conseguem prosseguir. Quando retornam, aproximando-se, a mola relaxa, e é como se os quarks estivessem “livres”.

Podemos considerar que os quarks estão livres da atuação de forças enquanto estão dentro das partículas de que fazem parte (bárions, mésons e suas anti-partículas). Mas por outro lado, eles não conseguem sair de dentro destas partículas, a não ser que recebam uma quantidade de energia muito grande, a esse fato damos o nome de “confinamento”. Uma teoria definitiva para descrever a matéria de quarks puros ainda está longe de ser obtida, entretanto, há modelos aproximados que vêm sendo utilizados na literatura. Um desses modelos, que utilizamos neste trabalho, é o modelo de sacola do MIT, conferir a Ref. [61], que considera o nucleon como sendo uma sacola com três quarks dentro da qual estes se movem livremente. O modelo de sacola aplicado à matéria superdensa considera que as sacolas individuais dos nucleons estão tão comprimidas na matéria superdensa que eventualmente torna-se possível aos quarks transitarem de uma sacola a outra. Ou ainda, como se as sacolas se fundissem numa sacola maior contendo todos os quarks das sacolas originais. Este modelo será mais detalhadamente descrito no Capítulo 5.

Hidrodinâmica

A Hidrodinâmica estuda o movimento dos fluidos. Podemos considerar tal estudo como uma análise de um sistema de muitos corpos, portanto, uma descrição fiel da evolução dinâmica de um fluido, em princípio, dependeria de conhecermos o estado de movimento de cada uma das partículas do sistema. Entretanto, tal descrição não é prática e não seria de grande valia para a descrição de sistemas suficientemente grandes, como o interior estelar. Em geral, o comportamento macroscópico de um fluido é assumido como sendo perfeitamente contínuo em sua estrutura, e, grandezas físicas como massa, densidade e momento são consideradas uniformemente distribuídas sobre todo o volume. Na realidade, tendo em vista que o grau de acurácia desejado geralmente é menor que a aproximação no meio contínuo, na maioria dos problemas analisados é razoável aceitar a modelagem de um sistema desses como se fosse um fluido ideal mesmo sem levar em conta a estrutura molecular do mesmo.

As equações de conservação que apresentaremos mais adiante são válidas para qualquer volume, entretanto, embora simples, geometrias estáticas e esféricamente simétricas são ideais para o estudo de objetos astrofísicos como estrelas, pois apresentam boas aproximações iniciais antes de se utilizar modelos mais refinados e/ou complexos.

2.1 Equações da Hidrodinâmica

Uma análise hidrodinâmica precisa deve levar em consideração três princípios: conservação de massa; conservação de momento; e, conservação de energia. Cada um deve ser levado em consideração e, portanto, deve levar à utilização de equações que quantifiquem essas grandezas ao longo do tempo de modo a permitir um acompanhamento de sua evolução dinâmica. Descreveremos adiante alguns modelos utilizados na Mecânica Newtoniana (ver Ref. [29]) e, mais adiante, comentaremos brevemente a Hidrodinâmica Relativística.

2.1.1 A conservação de massa – Equação da Continuidade

Sendo definida a densidade ρ de um fluido num dado ponto dentro de um volume fechado V como uma função do tempo t e do vetor posição desse ponto \vec{r} , podemos escrever $\rho \equiv \rho(t, \vec{r})$. Desta forma, a massa desse fluido pode ser escrita como,

$$m = \int_V \rho(t, \vec{r}) dV, \quad (2-1)$$

mas, na ausência de fontes e sumidouros, o princípio de conservação da massa dentro desse volume também nos permite escrever,

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \vec{r}) dV = 0. \quad (2-2)$$

Considerando o *Teorema de Transporte de Reynolds* para um campo escalar, podemos escrever,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \vec{r}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V_t} \rho \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \left[\frac{D}{Dt} \rho + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) \right] dV = 0, \quad (2-3)$$

onde \vec{v} é o vetor velocidade, $d\vec{\Sigma}$ é um elemento diferencial de área da superfície ∂V_t e definimos o operador *derivada convectiva* como,

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla. \quad (2-4)$$

A derivada convectiva de uma dada grandeza pode ser interpretada fisicamente como a taxa de variação no tempo dessa grandeza ao longo do caminho que segue o movimento do fluido. Considerando a aplicação de tal princípio de conservação a qualquer volume e que a densidade seja a mesma em todos os pontos, a Equação (2-3) se reduz à *Equação da Continuidade* para a massa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2-5)$$

2.1.2 A conservação do momento

Através de argumentos semelhantes para o momento, porém incluindo a segunda Lei de Newton que dá a derivada temporal do momentum total de um corpo como sendo a soma das forças que atuam sobre ele. Ou seja, teremos,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \vec{v} dV = - \int_{\partial V_t} p d\vec{\Sigma} + \int_{V_t} \rho \vec{g} dV = \int_{V_t} (\rho \vec{g} - \nabla p) dV, \quad (2-6)$$

onde \vec{g} é a aceleração da gravidade.

Utilizando agora o Teorema de Transporte para um campo vetorial do lado esquerdo da expressão acima, teremos,

$$\int_{V_t} \left[\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)(\rho\vec{v}) + \rho\vec{v}(\nabla \cdot \vec{v}) \right] = \int_{V_t} (\rho\vec{g} - \nabla p) dV. \quad (2-7)$$

Utilizando a Equação (2-4) e a Equação (2-5), podemos reescrever facilmente a Equação (2-7) como,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p, \quad (2-8)$$

que também é conhecida como *Equação de Euler*.

2.1.3 A conservação da energia

Considerando que a energia do fluido seja dada pela soma da energia cinética (E_K) e da energia interna (E_{int}), podemos escrever,

$$E_K + E_{int} = \frac{1}{2} \int_{V_t} \rho \vec{v}^2 dV + \int_{V_t} \rho \varepsilon dV, \quad (2-9)$$

onde ε é a densidade volumétrica de energia interna.

O princípio de conservação da energia determina que a variação temporal da energia total de uma porção do fluido é igual ao trabalho realizado por unidade de volume sobre o sistema pelas forças internas e externas. Isto nos permite escrever,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho \varepsilon \right) dV = - \int_{\partial V_t} p \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma} + \int_{V_t} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV. \quad (2-10)$$

Aplicando novamente o Teorema de Transporte e o Teorema da Divergência, é fácil obter para a energia uma relação equivalente às Equações (2-5) e (2-8),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho \varepsilon + p \right) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} \cdot \vec{v}, \quad (2-11)$$

ou ainda, de forma mais compacta,

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \varepsilon \right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (p\vec{v}), \quad (2-12)$$

É interessante comentar que a presença da pressão e da energia interna em pelo menos duas das equações de conservação acima torna o modelo altamente dependente da equação de estado utilizada para descrever o meio fluido. Ou seja, equações de estado diferentes podem e deverão induzir diferentes evoluções dinâmicas para o sistema.

2.1.4 Hidrodinâmica com Viscosidade

Um fluido perfeito pode ser definido de tal forma que uma força aplicada através de sua superfície separando duas partículas do fluido deve ser normal a essa superfície. A teoria cinética, porém, nos diz que a existência de gradientes de velocidade implica no aparecimento de uma força tangente à superfície separando duas camadas de fluido.

No caso de haverem forças cisalhantes e/ou forças viscosas no fluido, precisamos incluir a contribuição dessas forças para o momento na Equação (2-8),

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \mathbf{T}, \quad (2-13)$$

onde \mathbf{T} é o *tensor de stress* definido como,

$$\mathbf{T} \equiv -p\mathbf{I} - \frac{2}{3}\mu(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (2-14)$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade, \mathbf{I} é o tensor unitário e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação que é definido como,

$$\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2} \left[(\nabla v) + (\nabla v)^T \right]. \quad (2-15)$$

É possível, também, reescrever a Equação (2-12) como,

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \varepsilon \right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (p\vec{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{v}) + \nabla \cdot \vec{Q}, \quad (2-16)$$

onde \vec{Q} é um termo de fonte devido ao acoplamento entre matéria e radiação.

2.2 Hidrodinâmica Relativística

De forma análoga ao caso Newtoniano, as equações hidrodinâmicas relativísticas são obtidas a partir de leis de conservação locais do tensor de energia-stress, $T^{\mu\nu}$, identidades de Bianchi, e da densidade de corrente de matéria, J^μ , equação da continuidade, (para maiores detalhes, ver Refs. [30, 31, 32]).

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2-17)$$

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (2-18)$$

onde o termo ∇_μ é a derivada covariante associada à metrica quadridimensional do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$. A densidade de corrente é dada por $J^\mu = \rho u^\mu$, onde u^μ é o

quadrivetor de velocidade e ρ é a densidade de massa de repouso num referencial inercial. Nas Equações (2-17) e (2-18) utilizamos a convenção de soma de Einstein, que consiste em omitir o símbolo de somatório e interpretar índices repetidos como indicador desse somatório.

O tensor de energia-stress para um fluido não-perfeito é definido como

$$T^{\mu\nu} \equiv \rho(1 + \epsilon)u^\mu u^\nu + (p - \zeta\theta)h^{\mu\nu} - 2\eta\sigma^{\mu\nu} + q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu, \quad (2-19)$$

onde ϵ é a densidade específica de energia, energia por unidade de massa, p é a pressão, $h^{\mu\nu}$ é o tensor de projeção espacial dado por $h^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu + g_{\mu\nu}$, ζ e η são as viscosidades de massa e de cisalhamento, e q^μ é o vetor fluxo de energia. A expansão θ , descrevendo a divergência ou convergência das linhas de fluxo do fluido, é definida como $\theta \equiv \nabla_\mu u^\mu$. Finalmente, o tensor de cisalhamento espacial, simétrico, é dado por,

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u^\mu h^{\alpha\nu} + \nabla_\alpha u^\nu h^{\alpha\mu}) - \frac{1}{3}\theta h^{\mu\nu}. \quad (2-20)$$

De modo a fechar uma descrição geral do sistema, as Equações (2-17) e (2-18) precisam ser complementadas com uma equação de estado que relacione algumas das grandezas termodinâmicas fundamentais. Em geral, a equação de estado utilizada tem a forma

$$p \equiv p(\rho\varepsilon). \quad (2-21)$$

As Equações (2-17) e (2-18) precisam ser resolvidas em conjunto com as equações de campo gravitacional de Einstein,

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (2-22)$$

que descrevem a evolução da geometria em um espaço-tempo dinâmico.

A utilização de uma modelagem relativística apresentaria um caráter mais geral e acurado à abordagem do problema que pesquisamos neste trabalho, entretanto, a complexidade do modelo que utilizaremos demandaria um enorme esforço computacional que consideramos desnecessário numa aproximação inicial. Nossa escolha por um modelo Newtoniano sem viscosidade se justifica pois nosso objetivo principal focaliza-se na pesquisa das consequências da transição de fase e não na hidrodinâmica em si. Desta forma, utilizamos um modelo Lagrangiano efetivo que será melhor descrito no Capítulo 3. Vale comentar que está em nossos planos dar continuidade a este trabalho com a adaptação do formalismo dentro de uma visão relativística com simplificações, tais como a ausência de viscosidade.

O Modelo de Duas Camadas

Para descrever a dinâmica da protoestrela de nêutron, dividimos o sistema em duas camadas homogêneas concêntricas de raios R_1 e R_2 , respectivamente, para as camadas interna e externa. Definimos também as massas e densidades para a camada interna, (m_1, ρ_1) e externa (m_2, ρ_2) . Podemos ver na Figura 3.1 uma representação esquemática das camadas interna e externa da estrela de nêutron. A massa de cada camada é incluída como uma coordenada lagrangiana do sistema visando permitir a transferência de massa e energia entre os caroços interno e externo, entretanto, é possível eliminar a variável m_2 dos cálculos se tomarmos como verdadeiro o vínculo

$$M = m_1 + m_2, \quad (3-1)$$

onde M é a massa total do sistema.

3.1 O Formalismo

Neste modelo (para maiores detalhes ver Refs. [8, 33, 62]), a Lagrangiana efetiva do sistema é dada por,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(R_1, R_2, m_1, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{m}_1) \\ \mathcal{L} &= K - W - U, \end{aligned} \quad (3-2)$$

onde são definidos K como sendo a energia cinética, W a energia potencial gravitacional e U a energia interna,

Para obter a energia cinética, é necessário definir o campo de velocidade em cada camada. Como nosso sistema possui simetria esférica, utilizamos a equação de continuidade como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3-3)$$

onde v é a velocidade. Desta forma, lembrando que $\rho_1 \equiv \rho_1(R_1, m_1)$, podemos

escrever

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial R_1} \dot{R}_1 + \frac{\partial \rho}{\partial m_1} \dot{m}_1, \quad (3-4)$$

Desta forma, a Equação (3-3) fica

$$\frac{d}{dr} (r^2 \rho_1 v_1) + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \left(\frac{9 \dot{R}_1 m_1}{4\pi R_1^4} - \frac{3 \dot{m}_1}{4\pi R_1^3} \right) r^2. \quad (3-5)$$

Integrando a Equação (3-5) em r , e adotando a condição de contorno $v(0) \equiv 0$, obtemos,

$$v_1(r) = \left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{\dot{m}_1}{3m_1} \right) r. \quad (3-6)$$

Realizando cálculo similar para a camada 2, obtemos

$$v_2(r) = -\frac{\dot{\rho}_2}{3\rho_2} + \frac{b}{r^2 \rho_2}, \quad b \equiv \text{constante}. \quad (3-7)$$

O fluxo de massa através da interface esférica, com raio R_1 , entre as camadas é dado por

$$\dot{m}_1 = - \int_{S_1} \rho_2 u_2(R_1) dS_1, \quad (3-8)$$

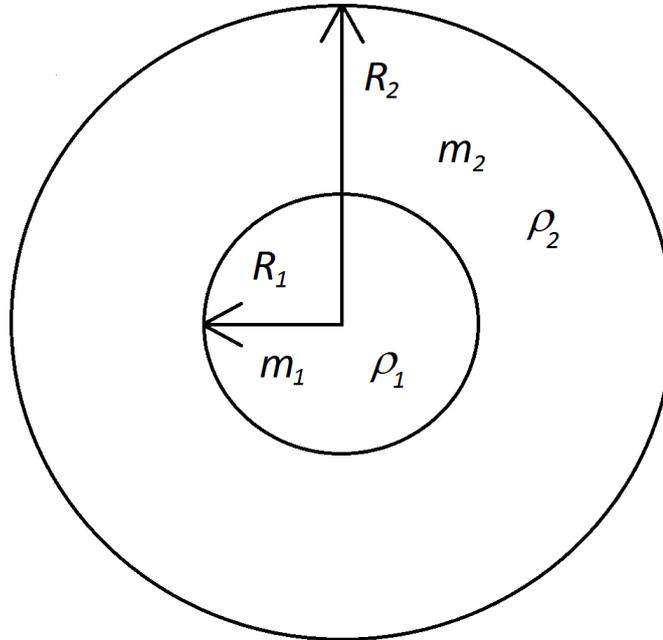


Figura 3.1: Representação esquemática do caroço como sendo uma esfera dividida em duas camadas concêntricas.

onde $S_1 = 4\pi R_1^2$ é a área da interface e $u_2(R_1) = v_2(R_1) - \dot{R}_1$ é a velocidade relativa entra a camada 2 e a descontinuidade $r = R_1$. A partir da Equação (3-8), podemos determinar que,

$$b = \frac{\dot{\rho}_2 R_1^3}{3} + R_1^2 \dot{R}_1 \rho_2 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi}. \quad (3-9)$$

Desta forma, a Equação (3-7) fica,

$$v_2(r) = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) + \frac{\dot{m}_1}{3m_2} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) + \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r^2}. \quad (3-10)$$

Tomando as Equações (3-6) e (3-10) em $r = R_1$, obtemos,

$$v_1(R_1) = \dot{R}_1 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2 \rho_1} \quad (3-11)$$

$$v_2(R_1) = \dot{R}_1 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2 \rho_2}, \quad (3-12)$$

As Equações (3-11) e (3-12) deixam claro que um fluxo de massa através da interface em $r = R_1$ provocará uma descontinuidade no campo de velocidade na interface. É justamente a associação dessa descontinuidade junto à descontinuidade na pressão e nas densidades das camadas que caracteriza a formação da onda de detonação.

Podemos agora determinar a energia cinética K da Equação (3-2). Tomando $K = K_1 + K_2$, onde K_1 e K_2 são as respectivas contribuições das camadas 1 e 2. Desta forma, a energia cinética da i -ésima camada será,

$$K_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i v_i^2(r) dV, \quad (3-13)$$

onde $dV \equiv 4\pi r^2 dr$.

Realizando as devidas integrações da Equação (3-13) em cada camada, definindo uma variável adimensional $x = R_2/R_1$, agrupando os termos em \dot{R}_1^2 , \dot{R}_2^2 , \dot{m}_1^2 e seus termos cruzados e lembrando que:

$$x^5 - 1 = (x - 1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (3-14)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1) (x^2 + x + 1) \quad (3-15)$$

$$x^1 - 1 = (x - 1) (x + 1), \quad (3-16)$$

é possível escrever a energia cinética total como,

$$\begin{aligned}
 K = & \frac{3}{10} \left[\frac{(5x^3 + 6x^2 + 3x + 1) m_2}{(x^2 + x + 1)^3} + m_1 \right] \dot{R}_1^2 \\
 & + \frac{3}{10} \left[\frac{x^3 (x^3 + 3x^2 + 6x + 5) m_2}{(x^2 + x + 1)^3} \right] \dot{R}_2^2 \\
 & + \frac{R_1^2}{30} \left[\frac{(x-1)^2 (5x^3 + 6x^2 + 3x + 1)}{m_2 (x^2 + x + 1)} + \frac{1}{m_1} \right] \dot{m}_1^2 \quad (3-17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{9}{10} \left[\frac{x^2 (x^2 + 3x + 1) m_2}{(x^2 + x + 1)^3} \right] \dot{R}_1 \dot{R}_2 \\
 & - \frac{R_1}{5} \left[\frac{(x-1) (5x^3 + 6x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} + 1 \right] \dot{m}_1 \dot{R}_1 \\
 & - \frac{3R_1}{10} \left[\frac{x^2 (x-1) (x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \right] \dot{m}_1 \dot{R}_2. \quad (3-18)
 \end{aligned}$$

A energia cinética total pode ser escrita na forma quadrática abaixo,

$$K = \frac{1}{2} \langle \mathbf{V} | \mathbf{M} | \mathbf{V} \rangle, \quad (3-19)$$

onde,

$$|\mathbf{V}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dot{m}_1 \end{pmatrix}, \quad (3-20)$$

e \mathbf{M} é uma matriz simétrica definida por,

$$\mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (3-21)$$

e com elementos de matriz:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{3}{5} \left[\frac{(5x^3 + 6x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3} m_2 + m_1 \right] \\
 M_{22} &= \frac{3}{5} \frac{x^3 (x^3 + 3x^2 + 6x + 5)}{(x^2 + x + 1)^3} m_2 \\
 M_{33} &= \frac{R_1^2}{15} \left[\frac{(x-1)^2 (5x^3 + 6x^2 + 3x + 1)}{m_2 (x^2 + x + 1)} + \frac{1}{m_1} \right] \\
 M_{12} = M_{21} &= \frac{9}{10} \frac{x^2 (x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3} m_2 \\
 M_{13} = M_{31} &= -\frac{R_1}{5} \left[\frac{(x-1) (5x^3 + 6x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} + 1 \right] \\
 M_{23} = M_{32} &= -\frac{3R_1}{10} \frac{x^2 (x-1) (x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

3.1.1 A Energia Potencial Gravitacional e a Energia Interna

A energia potencial gravitacional possui três termos:

– A autoenergia gravitacional da camada 1 dada por

$$W_1 = - \int_0^{R_1} \frac{Gm_1(r)}{r} dm_1, \quad (3-22)$$

onde G é a constante de gravitação universal,

– A autoenergia gravitacional da camada 2 dada por

$$W_2 = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Gm_2(r)}{r} dm_2, \quad (3-23)$$

– A energia de interação entre as duas camadas dada por

$$W_{int} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Gm_1}{r} dm_2. \quad (3-24)$$

Após as devidas integrações, obtemos,

$$W = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[m_1^2 + f(x)m_2^2 + \frac{5}{2}g(x)m_1m_2 \right], \quad (3-25)$$

onde,

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{(2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2}, \quad (3-26)$$

e,

$$g(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}. \quad (3-27)$$

Por fim, resta determinar a energia interna do sistema, que pode ser obtida a partir da densidade de energia interna por unidade de volume, escrevendo,

$$U = \frac{m_1 \epsilon_1}{\rho_1} + \frac{m_2 \epsilon_2}{\rho_2}, \quad (3-28)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são as respectivas densidades volumétricas de energia interna das camadas 1 e 2.

3.2 As Equações de Movimento

A partir da Lagrangiana dada na Equação (3-2), podemos obter as equações de movimento para as três coordenadas generalizadas usadas para descrever a evolução dinâmica do sistema

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad (3-29)$$

onde $q_k = R_1, R_2, m_1$ e $\dot{q}_k = \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{m}_1$. Temos então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} (W + U). \quad (3-30)$$

Os termos de força oriundos da energia cinética, presentes na equação acima, são dados por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \langle k | \mathbf{M} | \mathbf{V} \rangle, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3-31)$$

onde

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3-32)$$

e

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_k, \quad (3-33)$$

sendo

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) v_i v_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3-34)$$

Mais adiante analizaremos os termos de força gravitacional e de força hidrostática.

Precisaremos das derivadas temporais e espaciais dos elementos da matriz \mathbf{M} para obter o cálculo explícito das Equações (3-31) e (3-33). As derivadas espaciais

são

$$\begin{aligned}
M'_{11} &= -\frac{9}{5}x^2 \frac{(5x^2 + 8x + 2)}{(x^2 + x + 1)^4} m_2, \\
M'_{22} &= \frac{9}{5}x^2 \frac{(2x^2 + 8x + 5)}{(x^2 + x + 1)^4} m_2, \\
M'_{33} &= \frac{3}{5m_2} x^2 \frac{(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4)}{(x^2 + x + 1)^2} R_1^2, \\
M'_{12} = M'_{21} &= -\frac{9}{5}m_2 x \frac{(x^4 + 4x^3 - 4x - 1)}{(x^2 + x + 1)^4}, \\
M'_{13} = M'_{31} &= -\frac{9}{5}x^2 \frac{(x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3} R_1, \\
M'_{23} = M'_{32} &= -\frac{9}{5}x \frac{(x^5 + 3x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 6x - 2)}{2(x^2 + x + 1)^3} R_1,
\end{aligned}$$

onde

$$M'_{ij} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial x}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3-35)$$

e as derivadas temporais ficam

$$\begin{aligned}
\dot{M}'_{11} &= \frac{1}{R_1} M'_{11} \dot{R}_2 - \frac{x}{R_1} M'_{11} \dot{R}_1 + \frac{1}{m_2} \left(\frac{3}{5} M - M_{11} \right) \dot{m}_1, \\
\dot{M}'_{22} &= \frac{1}{R_1} M'_{22} \dot{R}_2 - \frac{x}{R_1} M'_{22} \dot{R}_1 - \frac{1}{m_2} M_{22} \dot{m}_1, \\
\dot{M}'_{33} &= \frac{1}{R_1} M'_{33} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} \left(2M_{33} - xM'_{33} \right) \dot{R}_1 \\
&\quad + \frac{1}{m_2} \left(M_{33} - \frac{1}{15} M \frac{R_1^2}{m_1^2} \right) \dot{m}_1, \\
\dot{M}'_{12} = \dot{M}'_{21} &= \frac{1}{R_1} M'_{12} \dot{R}_2 - \frac{x}{R_1} M'_{12} \dot{R}_1 - \frac{1}{m_2} M_{12} \dot{m}_1, \\
\dot{M}'_{13} = \dot{M}'_{31} &= \frac{1}{R_1} M'_{13} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} \left(M_{13} - xM'_{13} \right) \dot{R}_1, \\
\dot{M}'_{23} = \dot{M}'_{32} &= \frac{1}{R_1} M'_{23} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} \left(M_{23} - xM'_{23} \right) \dot{R}_1.
\end{aligned}$$

As equações de movimento para R_1 , R_2 e m_1 podem ser escritas como

$$M_{11} \ddot{R}_1 + M_{12} \ddot{R}_2 + M_{13} \ddot{m}_1 = Q_1 + B_1 + H_1, \quad (3-36)$$

$$M_{12} \ddot{R}_1 + M_{22} \ddot{R}_2 + M_{23} \ddot{m}_1 = Q_2 + B_2 + H_2, \quad (3-37)$$

$$M_{13} \ddot{R}_1 + M_{23} \ddot{R}_2 + M_{33} \ddot{m}_1 = Q_3 + B_3 + H_3, \quad (3-38)$$

onde

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} x M'_{11} \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} (2M'_{12} + xM'_{22}) \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} (2M_{33} - xM'_{33}) \dot{m}_1^2 - M'_{11} \dot{R}_1 \dot{R}_2 - \frac{R_1}{m_2} \left(\frac{3}{5} M - M_{11} \right) \dot{R}_1 \dot{m}_1 + \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} + M_{23} - M'_{13} - xM'_{23} \right) \dot{R}_2 \dot{m}_1 \right], \quad (3-39)$$

$$Q_2 = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} (M'_{11} + 2xM'_{12}) \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} M'_{22} \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} M'_{33} \dot{m}_1^2 + xM'_{22} \dot{R}_1 \dot{R}_2 + \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} - M_{23} + M'_{13} + xM'_{23} \right) \dot{R}_1 \dot{m}_1 + \frac{R_1}{m_2} M_{22} \dot{R}_2 \dot{m}_1 \right], \quad (3-40)$$

$$Q_3 = \left[\frac{1}{2m_2} \left(\frac{3}{5} M - M_{11} \right) - \frac{1}{R_1} (M_{13} - xM'_{13}) \right] \dot{R}_1^2 - \frac{1}{R_1} \left(M'_{23} + \frac{R_1}{2m_2} M_{22} \right) \dot{R}_2^2 - \frac{1}{2m_2} \left(M_{33} - \frac{R_1^2}{15m_1^2} M \right) \dot{m}_1^2 - \frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} + M_{23} + M'_{13} - xM'_{23} \right) \dot{R}_1 \dot{R}_2 - \frac{1}{R_1} (2M_{33} - xM'_{33}) \dot{R}_1 \dot{m}_1 - \frac{1}{R_1} M'_{33} \dot{R}_2 \dot{m}_1, \quad (3-41)$$

representam as forças generalizadas dependentes das velocidades, derivadas da energia cinética.

Por sua vez, o conjunto de forças gravitacionais é formado pelas expressões

$$B_1 = -\frac{\partial W}{\partial R_1} = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1^2} \left[m_1^2 + f_1(x)m_2^2 + \frac{5}{2} g_1(x)m_1 m_2 \right], \quad (3-42)$$

$$B_2 = -\frac{\partial W}{\partial R_2} = -\frac{3}{5} \frac{G}{x^2 R_1^2} \left[f_2(x)m_2^2 + \frac{5}{2} g_2(x)m_1 m_2 \right], \quad (3-43)$$

$$B_3 = -\frac{\partial W}{\partial m_1} = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[2(m_1 - f(x)m_2) + \frac{5}{2} g(x)(m_2 - m_1) \right], \quad (3-44)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ foram definidas nas Equações (3-26) e (3-27), respectivamente, e também definimos

$$f_1(x) = \frac{3(x^2 + 3x + 1)}{2(x^2 + x + 1)^3}, \quad (3-45)$$

$$f_2(x) = x^3 \frac{(x^3 + 3x^2 + 6x + 5)}{(x^2 + x + 1)^3}, \quad (3-46)$$

$$g_1(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}, \quad (3-47)$$

$$g_2(x) = x^3 \frac{(x + 2)}{(x^2 + x + 1)^2}. \quad (3-48)$$

Por fim, resta determinar as forças hidrostáticas. Para a primeira equação de movimento temos

$$H_1 = -\frac{\partial U}{\partial R_1} = -\left(\frac{\partial U}{\partial V_1} \frac{\partial V_1}{\partial R_1} + \frac{\partial U}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial R_1}\right). \quad (3-49)$$

Lembrando que $P = -\frac{\partial U}{\partial V}$, podemos escrever a equação acima como

$$H_1 = 4\pi(P_1 - P_2)R_1^2. \quad (3-50)$$

Pode-se, através de cálculo semelhante, demonstrar que

$$H_2 = 4\pi P_2 R_2^2. \quad (3-51)$$

Para o cálculo de H_3 , convém reescrever U como

$$U = m_1 \varepsilon_1(\rho_1) + m_2 \varepsilon_2(\rho_2), \quad (3-52)$$

onde, $\varepsilon_1(\rho_1)$ e $\varepsilon_2(\rho_2)$ são as energias internas específicas de cada camada. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial m_1} &= \varepsilon_1 + m_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial m_1} - \varepsilon_2 + m_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial m_1}, \\ &= \varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} - \varepsilon_2 - \frac{P_2}{\rho_2}. \end{aligned} \quad (3-53)$$

onde v_1 e v_2 são os volumes específicos das camadas.

Em termos da densidade volumétrica de energia, podemos escrever

$$H_3 = -\frac{\partial U}{\partial m_1} = \frac{\varepsilon_2 + P_2}{\rho_2} - \frac{\varepsilon_1 + P_1}{\rho_1}. \quad (3-54)$$

Portanto

$$H_3 = h_2 - h_1, \quad (3-55)$$

onde h_1 e h_2 são as entalpias específicas das camadas 1 e 2, respectivamente.

As Equações (3-36), (3-37) e (3-38) formam um sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas que pode ser representado na forma compacta

$$\mathbf{M}|\mathbf{a}\rangle = |\mathbf{F}\rangle, \quad (3-56)$$

onde

$$|\mathbf{a}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \ddot{R}_1 \\ \ddot{R}_2 \\ \ddot{m}_1 \end{pmatrix}, \quad (3-57)$$

e

$$|\mathbf{F}\rangle \equiv \begin{pmatrix} Q_1 + B_1 + H_1 \\ Q_2 + B_2 + H_2 \\ Q_3 + B_3 + H_3 \end{pmatrix}, \quad (3-58)$$

Da Equação (3-56), obtemos as acelerações através da equação matricial

$$|\mathbf{a}\rangle = \mathbf{M}^{-1} |\mathbf{F}\rangle, \quad (3-59)$$

onde \mathbf{M}^{-1} é a matriz inversa de \mathbf{M} . A partir de tais acelerações, utilizamos o método numérico de Runge-Kutta-Fehlberg (ver Ref.[63]) para integrar numericamente as equações de movimento.

3.3 Velocidade de Escape

A obtenção da velocidade de escape pode ser feita de várias formas triviais, apresentaremos aqui uma delas. Considerando uma massa teste m sendo lançada com uma velocidade v a partir da superfície de um objeto esférico de raio R e massa M onde, por definição, $M \gg m$. A velocidade de escape é definida como a velocidade mínima a partir da qual podemos lançar a partícula que chegará em $r \rightarrow \infty$ com $v \rightarrow 0$.

Considerando que a partícula somente esteja sujeita à interação gravitacional com a massa M , podemos escrever a segunda Lei de Newton para a partícula como

$$m \frac{dv}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2}, \quad (3-60)$$

onde G é a constante gravitacional.

Podemos utilizar a regra da cadeia na derivada temporal à esquerda da Equação (3-60) e obter a variação de v em relação ao espaço

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dr},$$

e a Equação (3-60) fica

$$v \frac{dv}{dr} = -G \frac{M}{r^2}. \quad (3-61)$$

Integrando a Equação (3-61) à esquerda ao longo de $v = v_{ESC}$ até $v = 0$ e

à direita ao longo de $r = R$ até $r = \infty$, teremos

$$\frac{v^2}{2} \Big|_{v_{ESC}}^0 = \frac{GM}{r} \Big|_R^\infty \quad (3-62)$$

$$v_{ESC} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (3-63)$$

3.4 Determinação das Condições Iniciais

Para preparar as condições iniciais para a camada externa, consideramos o caroço inicial como sendo esférico, homogêneo, com raio R , massa M , pressão P e energia interna E , regidas pela equação de estado hadrônica descrita no Capítulo 4. Buscamos obter a configuração de menor energia para o caroço. Para isso devemos construir a Lagrangiana do caroço e extrair sua equação de movimento, na qual introduzimos uma pseudo-viscosidade que serve como artifício numérico para minimizar a energia do sistema.

Para este modelo inicial podemos utilizar uma lagrangiana simplificada dada por

$$L = L(R, \dot{R}) \quad (3-64)$$

$$L = K - W - E. \quad (3-65)$$

Considerando que o caroço seja homólogo, densidade não dependente de r , podemos integrar a equação da continuidade para obter o campo de velocidade, utilizando como condições de contorno $v(0) = 0$ e $v(R) = \dot{R}$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho v)}{dr} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3-66)$$

$$v(r) = \frac{\dot{R}}{R} r. \quad (3-67)$$

A energia cinética K do caroço, portanto, pode ser calculada por,

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \quad (3-68)$$

$$K = \frac{3}{10} m \dot{R}^2. \quad (3-69)$$

O potencial gravitacional W é obtido pela relação,

$$W = - \int_0^R G \frac{m(r)}{r} dm \quad (3-70)$$

$$W = - \frac{3}{5} \frac{Gm^2}{R}. \quad (3-71)$$

Desta forma, a equação lagrangiana de movimento fica,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial L}{\partial R} = 0 \quad (3-72)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial W}{\partial R} - 4\pi R^2 \frac{\partial E}{\partial V} = 0. \quad (3-73)$$

E finalmente a aceleração \ddot{R} passa a ser dada por,

$$\ddot{R} = - \frac{Gm}{R^2} + \frac{5P}{\rho R}. \quad (3-74)$$

Introduzindo uma pseudo-viscosidade proporcional a v^2 no lado direito da Equação (3-74), podemos minimizar a energia da esfera numericamente até que esta fique numa configuração de equilíbrio estável, a qual pode ser utilizada nas condições iniciais. A partir destas configurações iniciais, introduzimos um caroço pequeno composto de matéria de quark estranho com raio $R_1 \ll R_2$ e passamos a utilizar as equações de movimento representadas na forma matricial pela Equação (3-59). Em trabalhos anteriores, ver Refs. [8, 9, 10], estudamos a fase de escape de neutrinos de uma proto-estrela de nêutron. Considerando que após a saída dos neutrinos o amolecimento da equação de estado permite que haja uma acomodação da matéria hadrônica no interior profundo da proto-estrela de nêutron, é possível que ocorra o desconfinamento de quarks nessa região central justificando a utilização deste modelo.

3.4.1 Estabilidade da Posição de Equilíbrio

No equilíbrio, a Equação (3-74) se reduz a $\ddot{R} = 0$, ou seja, podemos definir uma posição de equilíbrio R_e onde a esfera possui uma pressão (P_e) e densidade características ($\rho_e = m/(4\pi R_e^3)$), e onde teremos,

$$\frac{Gm}{R_e} = \frac{5P_e}{\rho_e}. \quad (3-75)$$

Para estudar a estabilidade de R_e , analisaremos a Equação (3-74) na vizinhança de R_e , escrevendo $R = R_e + \delta$, com $\delta \ll R_e$. Usamos também que,

$$\left(1 + \frac{\delta}{R_e}\right)^\alpha \approx 1 + \alpha \frac{\delta}{R_e}. \quad (3-76)$$

e

$$\begin{aligned} P(R_e + \delta) &\approx P(R_e) + \frac{dP(R_e)}{dR} \delta \\ &\approx P(R_e) + \frac{dP(\rho_e)}{d\rho} \frac{d\rho(R_e)}{dR} \delta \\ P(R_e + \delta) &\approx P_e - P'_e \frac{9m}{4\pi R_e^4} \delta, \end{aligned} \quad (3-77)$$

onde

$$P'_e \equiv \frac{dP(\rho_e)}{d\rho}. \quad (3-78)$$

A Equação (3-74), com δ em primeira ordem, fica

$$\ddot{\delta} = -\frac{Gm}{[R_e + \delta]^2} + \frac{5P(R_e + \delta)}{\rho [R_e + \delta]}. \quad (3-79)$$

Utilizando na Equação (3-79) as aproximações definidas nas Equações (3-76) e (3-77), obtemos,

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} &\approx -\frac{Gm}{[R_e + \delta]^2} + \frac{20\pi}{3m} [R_e + \delta]^2 P(R_e + \delta) \\ \ddot{\delta} &\approx \left(\frac{2Gm}{R_e^3} + \frac{40\pi R_e P_e}{3m} - \frac{15P'_e}{R_e^2} \right) \delta \equiv K\delta. \end{aligned} \quad (3-80)$$

A estabilidade da solução de equilíbrio dependerá do sinal de K na Equação (3-80): $K > 0$ corresponde ao equilíbrio instável, ao passo que $K < 0$ corresponde ao equilíbrio estável.

Equações de Estado da Fase Hadrônica

Para simular a fase hadrônica da camada externa do caroço, utilizamos tabelas obtidas a partir da equação de estado, EOS (do inglês *equation of state*), para matéria nuclear densa descrita nas Refs., [11, 13, 12]. A EOS influencia a formação e a evolução de ondas de choque assim como determina a densidade da protoestrela de nêutron. A EOS também afeta a neutrinosfera, que é o local onde há espalhamento e emissão de neutrinos. Embora não incluamos a influência de neutrinos em nosso trabalho atual, esta EOS abre espaço para a inclusão dos mesmos em nossas perspectivas futuras. A EOS apresentada neste trabalho pode ser utilizada para outros valores de temperatura finita e possui uma contante de compressibilidade $K = 271.5 MeV$. É uma EOS bem adequada para a utilização em pesquisas com estrelas de nêutrons e colapso de supernovae. Tal EOS utiliza como parâmetros de entrada a densidade de número bariônico do meio n_B , a fração protônica Y_P , e a temperatura T . Essas tabelas têm sido utilizadas por autores diversos em simulações de colapso de caroço em supernovas, formação de buracos negros e estrelas de nêutron. Essa EOS é baseada em cálculos de campo médio relativístico, que serão brevemente descritos na Seção 4.3, para descrever a fase nuclear e utiliza uma expansão Virial, que será descrita na Seção 4.2.1, para descrever a fase subnuclear.

4.1 Unidades

Neste capítulo e nos demais utilizaremos, salvo seja explicitado o contrário, utilizaremos como convenção, $c = \hbar = k_B = 1$. Onde c é a velocidade da luz, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e k_B é a constante de Boltzmann. Também utilizaremos como uma conveniente unidade de energia (e massa, mc^2) um milhão de elétron-volts, ou MeV . Sua conversão em erg e em algumas outras unidades é

dada por,

$$\begin{aligned} MeV &= 1.6022 \times 10^{-6} erg = 1.3234 \times 10^{-55} cm, \\ &= 1.7827 \times 10^{-27} g = 1.1604 \times 10^{10} K. \end{aligned} \quad (4-1)$$

O alcance da força nuclear é $\approx 10^{-13} cm$ que é definido como um *fermi* e denotado por fm ,

$$1 fm = 10^{-13} cm.$$

A conversão entre MeV e fm é possível através da relação,

$$\hbar c = 1 = 197.327 MeV \cdot fm. \quad (4-2)$$

A partir das relações acima, é possível estabelecer uma conversão da densidade volumétrica de energia ($MeV \cdot fm^{-3}$), para o sistema CGS,

$$MeV \cdot fm^{-3} = 1.6022 \times 10^{33} erg \cdot cm^{-3}.$$

4.2 Espansão Virial

A utilização da expansão Virial para uma equação de estado foi proposta inicialmente por Heike Kamerlingh Onnes, em 1901, como um aprimoramento da equação de estado de Van der Waals. Faremos uma breve descrição do modelo proposto por Onnes, para uma abordagem mais detalhada ver a Ref. [64].

A equação de estado proposta por van der Waals em sua Tese de Doutorado (ver Ref. [65]), considerava que um gás é composto de partículas de volume ν não nulo e incluía a contribuição de forças atrativas entre essas partículas. Para um dado gás com pressão P , volume V , composto por N partículas e a uma temperatura T , sua equação de estado é dada pela expressão,

$$\left(P + \frac{a}{\nu^2} \right) (\nu - b) = RT, \quad (4-3)$$

onde R é a constante universal dos gases, a é um coeficiente associado às forças de atração, b é um coeficiente associado às forças de repulsão e $\nu \equiv V/N$. Posteriormente determinou-se que a é proporcional ao quadrado da densidade do gás e que b equivale a quatro vezes o volume ocupado por molécula do gás. Os coeficientes a e b , portanto, dependem fortemente da composição e densidade do gás considerado.

Na Ref. [66] Kamerlingh Onnes escreve que tentou, sem sucesso, utilizar vários métodos empíricos para obter funções dos coeficientes a e b por meio de considerações cinéticas e termodinâmicas. Ele argumentou que, sob seu ponto

de vista, a melhor proposta seria combinar sistematicamente todo o conjunto de dados experimentais disponíveis sobre isotermas de gases e líquidos e, tão independentemente quanto possível, a partir de considerações teóricas expressá-los como uma série. Ou seja, ele não se baseou nos resultados da observação de um gás, mas sim de vários e sob diferentes limites. Ele conseguiu chegar a uma expansão da Equação de van der Waals com a seguinte estrutura,

$$P\nu = A + \frac{B}{\nu} + \frac{C}{\nu^2} + \frac{D}{\nu^4} + \frac{E}{\nu^6} + \frac{F}{\nu^8} + \dots \quad (4-4)$$

Kamerlingh Onnes argumentou que a adição de termos envolvendo $1/\nu^3$ e $1/\nu^{16}$ não contribuíram significativamente para a expansão. Também reportou que tentou utilizar várias outras formas polinomiais que não se provaram melhores do que a Equação (4-4).

Os dados experimentais serviram para determinar os coeficientes da Equação (4-4), aos quais chamou de *coeficientes viriais*, como funções da temperatura, conforme a estrutura a seguir,

$$B = b_1 + \frac{b_2}{T} + \frac{b_3}{T^2} + \frac{b_4}{T^3} + \frac{b_5}{T^4} + \dots \quad (4-5)$$

É importante destacar que a mecânica estatística pode ser usada para derivar os diversos coeficientes viriais em termos de funções potenciais intermoleculares e explicar os desvios de comportamento em relação a um gás ideal em termos das forças entre as moléculas. Ou seja, o segundo, terceiro, quarto coeficientes viriais representam os desvios de comportamento ideal quando colisões que envolvem duas, três, quatro moléculas se tornam importantes no gás. O alcance da validade da expansão virial depende da convergência da série.

4.2.1 Expansão Virial

Descreveremos agora uma expansão Virial para um gás composto de nêutrons, prótons, partículas alfa e núcleos pesados. A grande função de partição Q de um gás de pressão P e volume V é expandida até a segunda ordem em função das fugacidades de nêutrons, de prótons e de partículas alfa, respectivamente z_n , z_p e

z_α ,

$$\begin{aligned} \frac{\log Q}{V} = \frac{P}{T} = & \frac{2}{\lambda_n^3} [z_n + z_p + (z_n^2 + z_p^2)b_n + 2z_n z_p b_{pn}] \\ & + \frac{2}{\lambda_\alpha^3} [z_\alpha + z_\alpha^2 b_\alpha + 2z_\alpha (z_n + z_p) b_{\alpha n}] \\ & + \sum_i \frac{2}{\lambda_i^3} z_i \Omega_i, \end{aligned} \quad (4-6)$$

onde Ω_i é a função de partição para núcleos e b_n , b_{pn} , b_α e $b_{\alpha n}$ são os segundos coeficientes Viriais definidos por Horowitz e Schwenk (2006), Ref. [67].

O somatório em i engloba diversos núcleos pesados para os quais utiliza-se a tabela de massa da Ref. [68], para $A \geq 16$. Define-se o comprimento de onda térmico para uma dada espécie a como,

$$\lambda_a \equiv \sqrt{2\pi/m_a T}, \quad a = n, p, \alpha, \text{ núcleos.} \quad (4-7)$$

Passaremos a utilizar os índices i, j, \dots para somatórios sobre os núcleos pesados e a, b, \dots para todas as outras espécies. Utiliza-se a função de partição obtida por Fowler *et al.* (1978), Ref. [69]. A condição de equilíbrio químico entre nucleons e núcleos pesados com Z prótons e N nêutrons assegura que,

$$\mu_i = Z\mu_p + N\mu_n, \quad (4-8)$$

onde μ_i , μ_p e μ_n são, respectivamente os potenciais químicos do núcleo pesado, dos prótons e dos nêutrons. Por sua vez, a fugacidade de um núcleo pesado é dada por,

$$z_i = \exp(\mu_i + E_i)/T = z_p^Z z_n^N e^{E_i/T}, \quad (4-9)$$

onde E_i é a energia de ligação do núcleo pesado ${}^A Z$. Considera-se a interação Coulombiana entre elétron e núcleo obtida por Baym *et al.* (1971), Ref. [70], porém generalizada para diversas espécies de núcleos. A energia Coulombiana total de um núcleo imerso em elétrons é

$$Q_i^C = \frac{3}{5} \frac{Z_i^2 \alpha}{r_A} \left[1 - \frac{3r_A}{2r_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_A}{r_i} \right)^3 \right], \quad (4-10)$$

onde $r_A = 1.16A^{1/3} fm$ é o raio nuclear (Ref. [68]), e r_i é o raio médio de um íon esférico definido por

$$\frac{4}{3} \pi r_i^3 \left(\sum_j Z_j n_j \right) = Z_i. \quad (4-11)$$

Esta definição assegura neutralidade de carga dentro de cada íon esférico. O primeiro termo da Equação (4-10) vem da energia Coulombiana próton-próton e é também incluída na energia de ligação do núcleo. Quando r_A se aproxima de r_i a energia Coulombiana total de um núcleo desaparece, como esperado. Desta forma, a correção Coulombiana para a energia de ligação do núcleo é dada por

$$E_i^C = \frac{3}{5} \frac{Z_i^2 \alpha}{r_A} \left[-\frac{3}{2} \frac{r_A}{r_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_A}{r_i} \right)^3 \right]. \quad (4-12)$$

Adicionando esta correção à Equação (4-9), obtém-se,

$$z_i = \exp(\mu_i + E_i - E_i^C)/T = z_p^Z z_n^N e^{(E_i - E_i^C)/T}. \quad (4-13)$$

A densidade de cada espécie pode ser obtida através da relação

$$n_a = z_a \left(\frac{\partial \log \mathcal{Q}}{\partial z_a} \frac{1}{V} \right)_{V,T}. \quad (4-14)$$

o que fornece

$$n_n = \frac{2}{\lambda_n^3} [z_n + 2z_n^2 b_n + 2z_n z_p b_{pn} + 8z_\alpha z_n b_{\alpha n}], \quad (4-15)$$

$$n_p = \frac{2}{\lambda_n^3} [z_p + 2z_p^2 b_n + 2z_n z_p b_{pn} + 8z_\alpha z_p b_{\alpha n}], \quad (4-16)$$

$$n_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha^3} [z_\alpha + 2z_\alpha^2 b_\alpha + 2z_\alpha (z_n + z_p) b_{\alpha n}], \quad (4-17)$$

$$n_i = \frac{1}{\lambda_i^3} z_i \Omega_i. \quad (4-18)$$

A fração de massa de uma espécie $a(A, Z)$ é definida como

$$X_a = \frac{A_a n_a}{n_B}. \quad (4-19)$$

As duas condições para determinar as fugacidades de nêutrons e prótons são:

- a conservação da densidade bariônica total

$$n_B = n_n + n_p + 4n_\alpha + \sum_i A_i n_i; \quad (4-20)$$

- a fração de próton deve ser definida como

$$Y_p \equiv \left(n_p + 2n_\alpha + \sum_i Z_i n_i \right) / n_B. \quad (4-21)$$

A densidade de entropia s do gás Virial é obtida de

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\mu = \frac{5P}{2T} = \frac{2T}{\lambda_n^3} \left[(z_n^2 + z_p^2) b'_n + 2z_n z_p b'_{pn} \right] \\ &+ \frac{T}{\lambda_\alpha^3} \left[z_\alpha^2 b'_\alpha + 2z_\alpha (z_n + z_p) b'_{\alpha n} \right] \\ &- \left[\sum_i n_i \log z_i + n_n \log z_n + n_p \log z_p + n_\alpha \log z_\alpha \right] \\ &+ \sum_i \frac{z_i}{\lambda_i^3} T \Omega'_i - \sum_i n_i \frac{\partial E_i^C}{\partial T} \Big|_\mu, \end{aligned} \quad (4-22)$$

onde a apóstrofe indica uma derivada em relação à temperatura. O último termo é a correção Coulombiana para a entropia, que não é estimada diretamente de forma trivial. Entretanto, a energia livre do gás Virial pode ser obtida diretamente de forma que nos permite também obter a entropia através da derivada da energia livre.

A densidade de energia ϵ pode ser obtida a partir da densidade de entropia.

$$\epsilon = Ts + \sum_a n_a \mu_a - P, \quad (4-23)$$

onde o somatório em a abrange nêutrons, prótons, partículas alfa e núcleos pesados.

A densidade de energia livre f é dada por

$$\begin{aligned} f &= \epsilon - Ts = \sum_a n_a \mu_a - P \\ &= n_n T \log z_n + n_p T \log z_p + n_\alpha T \log z_\alpha - n_\alpha E_\alpha \\ &+ \sum_i \left[n_i T \log z_i - n_i (E_i - E_i^C) \right] - P. \end{aligned} \quad (4-24)$$

Da Equação (4-24) podemos definir uma correção Coulombiana efetiva para a energia livre por nucleon $\Delta f/A$,

$$\frac{\Delta f}{A} = \frac{\sum_i E_i^C n_i}{n_B}. \quad (4-25)$$

A energia livre por nucleon fica,

$$\frac{F}{A} = \frac{f}{n_B}. \quad (4-26)$$

A pressão termodinâmica P_{th} pode ser obtida a partir da energia livre,

$$P_{th} = n_B^2 \left(\frac{\partial(F/A)}{\partial n_B} \right)_{T, Y_p}, \quad (4-27)$$

que pode ser reescrita como

$$P_{th} = P + n_B \sum_i n_i \frac{\partial E_i^C}{\partial n_B} \Big|_{T, Y_p}. \quad (4-28)$$

O segundo termo na Equação (4-28) é a correção devida à interação Coulombiana sobre a pressão termodinâmica.

4.3 Aproximação de campo médio

Faremos a seguir uma breve descrição da Aproximação de Campo Médio Relativístico, ou modelo RMF (do inglês *Relativistic Mean Field*). A EOS utilizada neste trabalho para descrever a fase hadrônica dentro do modelo RMF utiliza-se do conjunto de parâmetros de acoplamento NL3 definidos na Ref. [14].

Para melhor descrever a matéria de baixa densidade rica em nêutrons, apresentamos um acoplamento dependente da densidade entre o méson escalar e o nucleon. Notamos que muitos estudos anteriores de modelos tipo RMF dependentes da densidade focaram principalmente em obter melhores descrições da matéria nuclear e da matéria em densidade supranuclear. Aqui o foco será a matéria rica em nêutrons a baixa densidade.

O ansatz básico da teoria RMF é uma densidade Lagrangiana, onde nucleons interagem através da troca de mésons sigma (σ), ômega (ω_μ) e rho (ρ_μ), e também fótons (A_μ),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \Gamma_\sigma \sigma - g_\omega \gamma^\mu \omega_\mu \right. \\ & \left. - g_\rho \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu - e\gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} A_\mu \right] \psi \\ & + \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 \\ & - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu + \frac{1}{4} c_3 (\omega^\mu \omega_\mu)^2 \\ & - \frac{1}{4} \vec{\rho}^{\mu\nu} \cdot \vec{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}^\mu \vec{\rho}_\mu - \frac{1}{4} A^{\mu\nu} A_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4-29)$$

Note-se que $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(n)$ ($n \equiv \sqrt{j_\mu j^\mu}$ e j_μ é a corrente nucleônica) é o acoplamento dependente da densidade entre o méson sigma e o nucleon.

$$\begin{aligned}
\omega^{\mu\nu} &= \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu, \\
A^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \\
\vec{\rho}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu - g_\rho \vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu.
\end{aligned} \tag{4-30}$$

Na matéria nuclear eletricamente neutra composta de nêutrons, n , prótons, p , e elétrons, e , os números de elétrons e prótons são idênticos. Em altas densidades os elétrons podem ser tratados como um gás de Fermi uniforme. Eles contribuem para a energia Coulombiana da matéria npe e servem como uma fonte de potencial Coulombiano.

O princípio variacional leva às equações de movimento abaixo

$$[\alpha \cdot \mathbf{p} + V(\mathbf{r}) + \beta (m + S(\mathbf{r}))] \psi_{\mathbf{i}} = \varepsilon_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{i}} \tag{4-31}$$

para os espiniores dos nucleons, com potenciais vetoriais e escalares,

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \beta [g_\omega \omega_\mu + g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu + e \frac{(1 + r_3)}{2} A_\mu + \Sigma^R], \\
S(\mathbf{r}) &= \Gamma_\sigma \sigma,
\end{aligned} \tag{4-32}$$

onde

$$\Sigma^R = \frac{\gamma^\mu j_\mu}{n} \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n} \rho_s \sigma, \tag{4-33}$$

é o termo de reorganização devido ao acoplamento dependente da densidade que existe entre o meson sigma e o nucleon, ρ_s é a densidade escalar de nucleons a ser definida abaixo.

4.3.1 Conjunto de parâmetros de acoplamento dependentes da densidade (NL3)

Neste trabalho utilizamos a interação efetiva descrita na Ref. [14], a qual tem tido sucesso na reprodução das propriedades do estado fundamental de núcleos estáveis e propriedades de saturação da matéria nuclear simétrica. Os valores dos parâmetros utilizados na interação efetiva NL3 são listados na Tabela 4.1.

Já é fato conhecido que a proposta de campo médio para matéria de nêutron pura é problemática a baixas densidades pois correlações de longo alcance são importantes. A matéria neutrônica a baixas densidades está muito próxima de um

Tabela 4.1: *Interação efetiva NL3. As massas dos nucleons são iguais a 939MeV tanto para prótons quanto para nêutrons. Além disso, a constante de compressibilidade nuclear é $K = 271.5\text{MeV}$, e $c_3 = 0$ na Equação (4-29)*

Γ_σ^0	g_ω	g_ρ	g_2 (fm^{-1})	g_3	m_σ (MeV)	m_ω (MeV)	m_ρ (MeV)
10,217	12,868	4,474	-10,431	-28,885	508,194	782,5	763

gás unitário¹, (vide Ref. [71]), visto que o espalhamento atinge distâncias maiores que o espaço médio entre as partículas, que é também maior que o alcance efetivo da interação nuclear. Visando descrever fenomenologicamente a matéria de nêutron no contexto RMF, sem abrir mão de seu sucesso para com as propriedades da matéria nuclear, é introduzido um acoplamento escalar meson-nucleon dependente de densidade.

$$\Gamma_\sigma = \begin{cases} \Gamma_\sigma^0, & n > n_0 \\ \frac{\Gamma_\sigma^0}{1+\alpha} \left[\left(\frac{n+n_0}{2n} \right)^{\frac{1}{6}} \right] + \alpha, & n \leq n_0. \end{cases} \quad (4-34)$$

Os dois parâmetros livres, n_0 e α , são determinados ajustando a energia da matéria de nêutron para a de um gás unitário a temperatura zero E_U (Ref.[72]),

$$E_U = \xi \cdot \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m} \simeq 0,44 \cdot \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m}, \quad (4-35)$$

onde k_F é o momento de Fermi do nêutron e os melhores valores ajustados são $n_0 = 5 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-3}$ e $\alpha = 1.2$.

Tabela 4.2: *Intervalos de valores cobertos pela EOS para a temperatura, T , a densidade bariônica, n_B e a fração protônica, Y_P .*

Parâmetro	Mínimo	Máximo
T [MeV]	0, 10^{-8}	$10^{1.875}$
$\log_{10}(n_B)$ [fm^{-3}]	-8	0.175
Y_P	0, 0.05	0.56

¹A princípio, um gás unitário é qualquer gás cuja densidade numérica obedeça ao vínculo $\rho b^3 \ll 1$, onde b é o alcance de interação das partículas do gás. Ou seja, a probabilidade de encontrar duas partículas de tal gás juntas dentro do volume b^3 é desprezível.

4.3.2 Aproximação de Wigner-Seitz na matéria nuclear não-uniforme

As equações de movimento para os mesons e fótons são

$$\begin{aligned}
(m_\sigma^2 - \nabla^2)\sigma &= -\Gamma_\sigma \rho_s - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3, \\
(m_\omega^2 - \nabla^2)\omega^\mu &= g_\omega j^\mu - c_3 \omega^\mu (\omega^\nu \omega_\nu), \\
(m_\rho^2 - \nabla^2)\vec{\rho}^\mu &= g_\rho \vec{j}^\mu, \\
-\nabla^2 A^\mu &= e (j_p^\mu - j_e^\mu),
\end{aligned} \tag{4-36}$$

onde os elétrons são incluídos como fonte de potencial Coulombiano. Os espinores de nucleon fornecem os termos de fonte relevantes:

$$\begin{aligned}
\rho_s &= \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i n_i, \\
j^\mu &= \sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i n_i, \\
\vec{j}^\mu &= \sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \vec{\tau} \psi_i n_i, \\
j_p^\mu &= \sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi_i n_i.
\end{aligned} \tag{4-37}$$

A temperatura finita, a estatística de Fermi-Dirac determina que as ocupações, n_i , de nêutrons e prótons são dadas por

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}, \tag{4-38}$$

onde μ é o potencial químico do nêutron (próton). Nos cálculos da equação de estado, ver Refs. [12, 13], os autores incluíram todos os níveis onde $g_i \cdot n_i > 10^{-2}$, onde g_i é a degenerescência do nível.

Levando em conta que o meio a ser descrito tem temperaturas da ordem de, no máximo, algumas dezenas de MeV , pode-se desprezar os estados de energia negativa. Em um núcleo esférico, não há correntes e as componentes vetoriais espaciais ω_μ , $\vec{\rho}_\mu$ e A_μ desaparecem. Somente restam as componentes tipo tempo ω_0 , $\vec{\rho}_0$ e A_0 . A conservação de carga garante que apenas a terceira componente do campo isovetorial $\rho_{0,3}$ sobreviva. As equações não-lineares acima são resolvidas dentro do contexto da aproximação de campo médio onde os campos mesônicos são substituídos por seus valores esperados.

A aproximação de Wigner-Seitz (W-S) é utilizada para descrever a matéria não uniforme. Cada célula W-S possui um núcleo, nesta aproximação é importante

incluir correções Coulombianas devido à interação com as células W-S vizinhas (maiores detalhes na Ref. [73]).

Os campos médios mesônicos e as funções de onda de Dirac dos nucleons são resolvidos de forma auto consistente dentro de uma célula W-S de raio R_c , para uma dada densidade bariônica n_B , uma dada fração protônica Y_P , e uma dada temperatura T . Neste modelo RMF que adotamos, os nucleons são os únicos bárions. O número de nucleons dentro da célula W-S é $A = 4\pi R_c^3 n_B / 3$ e o número de prótons é $Z = Y_P A$. A energia interna de uma célula W-S, incluindo a correção aproximada da energia Coulombiana, é

$$E_b = E_{nucleon} + E_\sigma + E_\rho + E_\omega + E_{Coulomb} - mA,$$

ou, de forma mais detalhada,

$$\begin{aligned} E_b = & \sum_i \epsilon_i n_i - \int d^3r j_0(r) \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial j_0} \rho_s(r) \sigma(r) - \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \Gamma_\sigma \sigma \rho_s(r) + \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 + \frac{1}{2} g_3 \sigma^4 \right\} \\ & - \frac{1}{2} \int d^3r g_\rho \rho_0 \rho_3 j_{0,3}(r) - \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ g_\omega \omega_0 j_0(r) - \frac{1}{2} c_3 \omega_0^4 \right\} \\ & - \frac{e}{2} \int d^3r (\rho_p + \rho_e) A_0(r) + d\omega - mA, \end{aligned} \quad (4-39)$$

onde $d\omega = 0.0065620 Z^2 / a$ é a correção Coulombiana aproximada e $a^3 = V_{W-S}$ é o volume da célula W-S.

A contribuição do nucleon para a entropia é dada pela expressão usual

$$S_b = -k_B \sum_i g_i [n_i \ln(n_i) + (1 - n_i) \ln(1 - n_i)], \quad (4-40)$$

onde n_i é dado pela Equação (4-38). A partir das Equações (4-39,4-40) torna-se fácil obter a contribuição de um nucleon para a energia livre por nucleon F .

$$F = F_b / A = (E_b - TS_b) / A. \quad (4-41)$$

4.3.3 Matéria nuclear uniforme

A altas temperaturas ou a altas densidades a matéria é uniforme, incluiremos nas expressões abaixo termos para anti-nucleons que apresentarão uma pequena contribuição a grandes temperaturas. De acordo com as Refs. [12, 13], a densidade

de energia da matéria nuclear uniforme é,

$$\begin{aligned} \epsilon = & \sum_{i=N,P} \epsilon_{kin}^i + \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma^2 + m_\omega^2 \omega_0^2 + m_\rho^2 \rho_{0,3}^2] \\ & + \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 + \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 + \frac{3}{4} c_3 \omega_0^4, \end{aligned} \quad (4-42)$$

onde

$$\epsilon_{kin}^i = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k E^*(k) [n_k(T) + \bar{n}_k(T)], \quad (4-43)$$

com massa efetiva $m^* = m + \Gamma_\sigma \sigma$ e $E^*(k) = \sqrt{k^2 + m^{*2}}$. As probabilidades de ocupação para partículas, $n_k(T)$, e antipartículas, $\bar{n}_k(T)$, são, respectivamente,

$$n_k(T) = \frac{1}{\exp(E^*(k) + g_\omega \omega_0 + g_\rho \tau^3 \rho_{0,3} + \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n} \rho_s \sigma - \mu)/T + 1}, \quad (4-44)$$

$$\bar{n}_k(T) = \frac{1}{\exp(E^*(k) - g_\omega \omega_0 - g_\rho \tau^3 \rho_{0,3} - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n} \rho_s \sigma + \mu)/T + 1}. \quad (4-45)$$

A pressão da matéria nuclear uniforme, conforme as Refs. [12, 13], é dada por,

$$\begin{aligned} P = & \sum_{i=N,P} P_{kin}^i - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 \\ & + \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n} \rho_s \sigma n + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{4} c_3 \omega_0^4 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{0,3}^2, \end{aligned} \quad (4-46)$$

onde

$$P_{kin}^i = \frac{2}{3(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)]. \quad (4-47)$$

A densidade de entropia da matéria nuclear uniforme é

$$\begin{aligned} s = & -\frac{2k_B}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_k(T) \ln n_k(T) + (1 - n_k(T)) \ln (1 - n_k(T)) \\ & + \bar{n}_k(T) \ln \bar{n}_k(T) + (1 - \bar{n}_k(T)) \ln (1 - \bar{n}_k(T))]. \end{aligned} \quad (4-48)$$

Utilizando as Eqs.(4-42) e (4-48), obtemos a densidade de energia livre por nucleon para a matéria uniforme,

$$F = \frac{(\epsilon - Ts)}{n_B}. \quad (4-49)$$

4.4 Alguns detalhes numéricos

Nesta seção descreveremos brevemente como foram interpolados os resultados da energia livre e os cálculos de outras grandezas a partir de derivadas da energia livre de uma forma termodinamicamente consistente, para uma descrição mais detalhada ver a Ref. [12].

4.4.1 A Equação de Estado a Temperatura Zero

A EOS é obtida por extrapolação quadrática dos resultados das duas menores temperaturas $T = 0.158MeV$ e $T = 0.251MeV$. Especificamente, quantidades termodinâmicas (como a energia livre, F) têm uma dependência da temperatura aproximada do tipo

$$F(T) = F(T = 0) + a \cdot T^2, \quad (4-50)$$

que é usada para obter $F(T = 0)$.

De acordo com as Refs. [11, 12], os autores partiram da Tabela 4.2, que foi usada para gerar a pressão a $T = 0$ (também incluindo a pressão de elétrons no procedimento de suavização a ser descrito mais adiante). A pressão termodinâmica P_{th} pode ser obtida numericamente a partir da energia livre por bárion (F/A),

$$P_{th} = n_B^2 \left(\frac{\partial(F/A)}{\partial n_B} \right)_{T, Y_P}. \quad (4-51)$$

A pressão foi suavizada removendo-se pontos que divergiam significativamente da média geométrica dos pontos vizinhos e substituindo-os com valores interpolados. Foi utilizada uma interpolação cúbica monotônica de Hermite na tabela suavizada, de forma a obter uma tabela mais refinada no eixo das densidades. Finalmente, a energia livre a temperatura zero foi obtida integrando esta pressão em relação à densidade.

4.4.2 A Entropia a Temperatura Finita

A partir de pontos da energia livre a temperatura $T < 12.5MeV$, densidade n_B , e fração protônica Y_P , como na Tabela 4.2, a entropia por bárion s_{th} pode ser obtida numericamente,

$$s_{th} \equiv \frac{S}{A} = - \left(\frac{\partial(F/A)}{\partial T} \right)_{n_B, Y_P}. \quad (4-52)$$

Finalmente, obtem-se a energia por bárion e_{th}

$$e_{th} = \frac{F}{A} - T s_{th}. \quad (4-53)$$

Para temperaturas mais altas $T \geq 12.5 MeV$, a matéria é uniforme para todas as frações protônicas e densidades. Para a matéria uniforme todas as quantidades termodinâmicas podem ser obtidas diretamente a partir de cálculos de campo médio relativístico com boa consistência termodinâmica.

O seguinte esquema foi utilizado para gerar uma grande tabela de EOS termodinamicamente consistente, mantendo monotonicidades da entropia e da energia, e preservando a suavidade de $(dP/dn_B)|T$. Começou-se com a entropia no plano (T, n_B) como na Tabela 4.2. Então trocou-se para a tabela “crua” da entropia e foram descartados numericamente os pontos que violavam os vínculos

$$\frac{\partial S}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n_B} < 0. \quad (4-54)$$

Esses pontos foram substituídos pela interpolação de pontos vizinhos. Desta forma, obteve-se uma tabela de entropia que satisfaz as condições (4-54). As contribuições dos elétrons e dos fótons pode ser manuseada de forma mais acurada através de uma iterpolação monotônica de quantidades individuais como energia, pressão e entropia. Este procedimento assegura a suavidade de $(dP/dn_B)|T$.

Após isso foi realizada uma interpolação cúbica monotônica de Hermite para gerar uma tabela quatro vezes maior tanto das direções da temperatura quanto na da densidade. A tabela de entropia suavizada foi integrada para se obter valores da energia livre (adicionando o termo a temperatura zero para obter a energia livre). Desta forma, obteve-se uma tabela mais refinada para a energia livre com uma boa consistência termodinâmica.

4.4.3 Interpolação Bicúbica de F/A

O passo final foi obter a interpolação bicúbica dos valores prévios da energia livre para gerar a entropia e a pressão através das Equações (4-51) e (4-52). Esta receita assegura a monotonicidade da entropia e da pressão na tabela final e também conserva a Primeira Lei da Termodinâmica em testes de compressão adiabática². Primeiro aplicou-se interpolação bicúbica, Ref. [74], para a energia livre. As primeiras

²Um teste importante da consistência termodinâmica desta EOS é conferir se a entropia é conservada quando a matéria sofre uma compressão adiabática reversível. Isto possui uma relação muito estreita com a conservação da energia na Primeira Lei da Termodinâmica. Para maiores detalhes, ver a Ref. [12].

derivadas são geradas a partir de interpolação cúbica monotônica de Hermite. A segunda derivada, a derivada cruzada $\partial^2 F / \partial n \partial T$, é gerada na grade de pontos como na Ref. [74]. A interpolação bicúbica pôde então ajustar as energias livres com funções cúbicas em coordenadas de temperatura e densidade, e forneceu a primeira derivada e a segunda (cruzada).

4.4.4 Formato das tabelas da EOS

Aqui descreveremos as quantidades físicas fornecidas numericamente pela equação de estado, assim como as unidades utilizadas. Há dezesseis grandezas diferentes fornecidas que incluem a contribuição de elétrons, pósitrons e fótons.

1. Temperatura $T [MeV]$. O intervalo de temperaturas inicia em $T = 0$ e depois vai de $10^{-0.8} - 10^{1.875}$, ver Tabela 4.2;
2. Fração protônica Y_P . O intervalo de frações protônicas inicia em $Y_P = 0$ e depois vai de $0.05 - 0.56$ com passo 0.01;
3. Densidade bariônica $n_B [fm^{-3}]$. O intervalo de densidades bariônicas vai de $10^{-0.8} - 10^{0.175}$;
4. A energia livre por bárion $F/A [MeV]$, subtraída a massa do nucleon $939MeV$;
5. Pressão $P [MeV \cdot fm^{-3}]$;
6. Entropia por bárion $S/A [k_B]$;
7. Potencial químico dos nêutrons $\mu_n [MeV]$. O valor tabelado tem subtraída a massa do nucleon $939MeV$;
8. Potencial químico dos prótons $\mu_p [MeV]$. O valor tabelado tem subtraída a massa do nucleon $939MeV$;
9. Potencial químico dos elétrons $\mu_e [MeV]$. O valor tabelado inclui a massa do elétron;
10. Número médio de massa \bar{A} de núcleos pesados com massa $A > 4$, que exclui as partículas α ;
11. Número médio de prótons \bar{p} de núcleos pesados com massa $A > 4$, que exclui as partículas α ;
12. Fração de massa de nêutrons livres;
13. Fração de massa de prótons livres;
14. Fração de massa de partículas α ;
15. Fração de massa de núcleos pesados com massa $A > 4$, que exclui as partículas α ;
16. Massa efetiva do nucleon $M^* [MeV]$. Na matéria uniforme é obtida a partir da Teoria de Campo Médio Relativístico. Para o gás Virial e matéria não-uniforme, é escolhida a massa do nucleon livre $M^* = 939MeV$.

Na Figura 4.1 podemos observar os gráficos da pressão e da energia obtidos a partir da equação de estado em diferentes regimes de densidade.

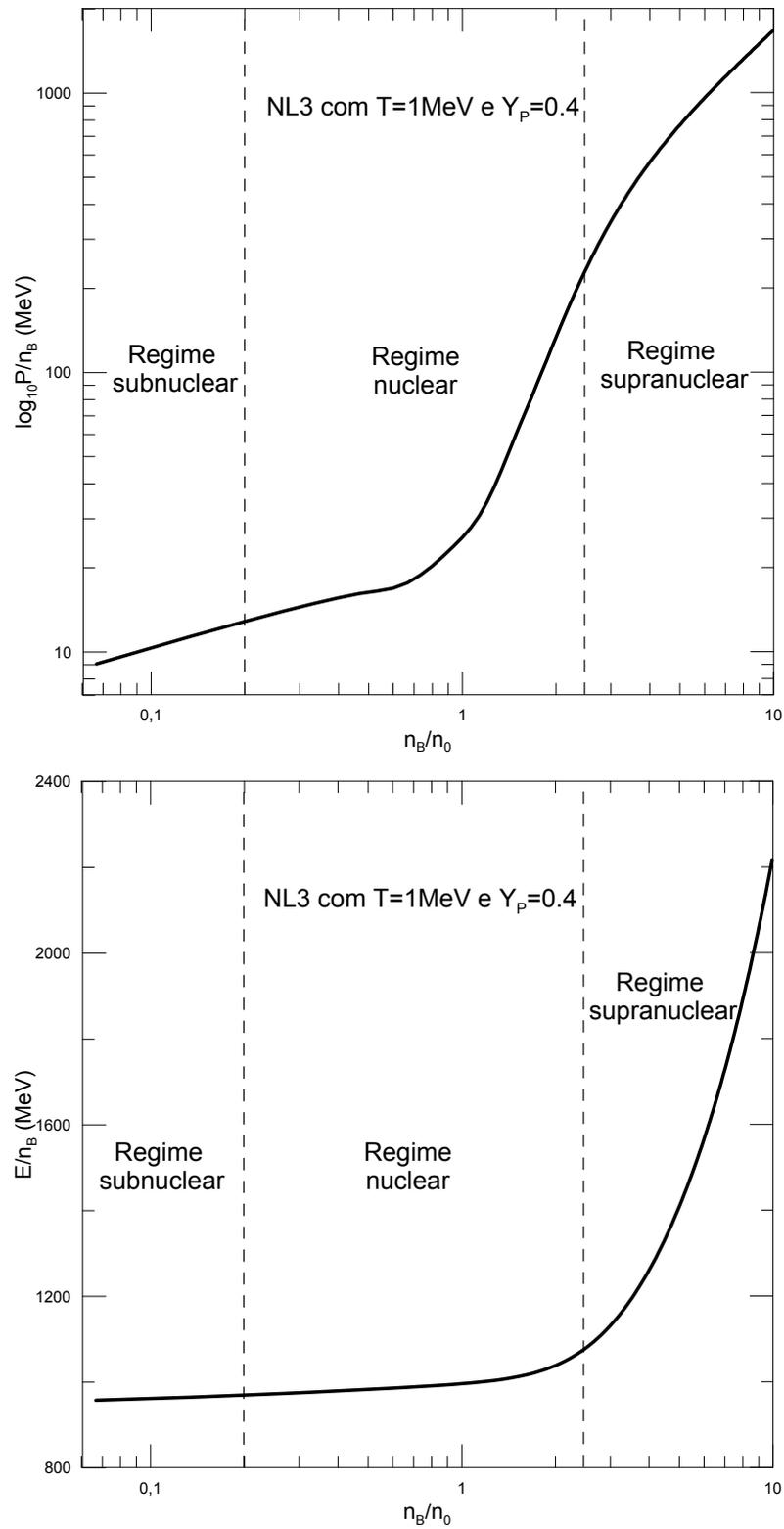


Figura 4.1: Equação de estado utilizando o conjunto de parâmetros de acoplamento NL3 para as fases nuclear e supranuclear e expansão Virial para a fase subnuclear.

Equação de Estado da Fase de Quark

Para se estudar a transição de fase hádron-quark, são necessários modelos que descrevam a matéria hadrônica e a matéria de quark. Neste capítulo discutiremos o modelo de quark e introduziremos o modelo de sacola do MIT, que utilizamos para descrever o plasma de quark-glúon. Como o número de partículas N e a energia E do sistema em transição podem variar, trataremos estatisticamente o plasma de quark-glúon como um *ensemble* gran-canônico explicitando as densidades volumétricas dessas grandezas como funções da temperatura e do potencial químico dos quarks μ_q . Consideraremos uma transição de primeira ordem induzida pela presença do quark s , conforme proposto por Witten na Ref. [54]. A matéria estranha, por se encontrar num estado de energia mais baixo do que a matéria hadrônica, induz a transição de fase da matéria hadrônica na região de fronteira entre as duas fases.

5.1 Modelo de Quark

Na década de 1960, enquanto um número crescente de novas partículas era descoberto, tornou-se claro que não poderiam ser todas elementares. Os físicos estavam procurando pela teoria que explicasse este fenômeno, numa época em que a formulação da teoria de campo das interações fortes estava desfavorecida e muitos físicos eminentes defendiam abandoná-la completamente. O modelo de quarks para hádrons foi introduzido pela primeira vez em 1964 por Gell-Mann na Ref. [75] e, independentemente, por Zweig na Ref. [76]. Gell-Mann e Zweig forneceram uma idéia simples, que resolveu o problema – eles propuseram que todos os mésons consistem de um quark e um antiquark e todos os bárions consistem de três quarks. Hoje é amplamente aceito que quarks vêm em seis sabores: u (up), d (down), s (strange), c (charm), b (bottom) e t (top), e carregam carga elétrica fracionária (quarks u , c e t têm carga $+2/3$, e d , s e b têm carga $-1/3$). Os quarks também tem uma outra propriedade chamada “carga de cor” que foi introduzida em 1964 por Greenberg na Ref. [77], e em 1965 por Han e Nambu na Ref. [78]. Quarks e antiquarks se combinam para formar hádrons, de tal forma que todos os hádrons

observados possuem neutralidade de cor e carregam carga elétrica inteira. Quarks são férmions, ou seja, têm spin $s = \frac{1}{2}$.

5.1.1 Liberdade Assintótica

Por analogia com a Eletrodinâmica Quântica (QED), na qual os fótons são os portadores do campo eletromagnético, partículas chamadas glúons carregam a força forte na medida que são trocados entre partículas coloridas. A diferença importante é que na Cromodinâmica Quântica (QCD) os glúons também carregam carga de cor e, portanto, podem interagir uns com os outros. Isto leva ao fato de que os glúons num sistema se comportam de tal maneira que aumentam a magnitude de um campo externo de cor aplicado à medida que a distância aumenta. Quarks sendo férmions têm o efeito oposto sobre o campo externo – eles se cancelam parcialmente para qualquer distância finita (a blindagem da carga de cor ocorre de forma muito semelhante à blindagem da carga elétrica por elétrons na QED). O efeito combinado dos quarks e glúons sobre a polarização do vácuo depende do número de sabores e cores dos quarks. Em QCD, para 6 sabores de quarks e 3 cores, a anti-blindagem de glúons supera a blindagem devida aos quarks e leva ao surgimento do fenômeno chamado de *liberdade assintótica*. O nome do fenômeno sugere o seu significado – a distâncias curtas (altas energias) partículas que interagem via interação forte se comportam como se elas fossem assintoticamente livres (o acoplamento efetivo é muito pequeno).

A liberdade assintótica acabou por se tornar uma propriedade muito útil para o estudo da QCD de altas energias. Ela permite que se trate a interação entre partículas perturbativamente para distâncias suficientemente pequenas e, portanto, calcular as propriedades físicas consideradas de uma forma sistemática e controlada.

5.1.2 O Confinamento de Quarks

O confinamento é uma propriedade importante da interação forte, que é amplamente aceita e deve ser incorporado em qualquer modelo fenomenológico que vise emular a QCD forte. Sendo um fenômeno essencialmente não perturbativo, o confinamento ainda carece de uma explicação rigorosa dos seus princípios fundamentais apesar de mais de 30 anos de investigação.

O confinamento é muitas vezes definido como a ausência de quarks isolados na natureza, visto eles nunca terem sido observados experimentalmente dessa forma. A procura por quarks livres normalmente se concentra em partículas livres com carga elétrica fracionária. Entretanto, a observação de uma partícula com carga fracionária não implica necessariamente que um quark livre foi observado. Podem existir, por

exemplo, partículas escalares coloridas pesadas que possam formar estados ligados com a produção de estados de quarks massivos com carga elétrica fracionária, ver Refs. [79, 80].

Outra definição de confinamento é como fenômeno físico onde as partículas com carga de cor não podem ser isoladas. Mas isso confunde confinamento com blindagem de cor, e também funciona para teorias de quebra espontânea de simetria, que supostamente não deveriam apresentar confinamento.

Pode-se também tentar definir confinamento pelas suas propriedades físicas, por exemplo, o potencial linear de longo alcance entre quarks. No entanto, esta exigência é apenas razoável para quarks infinitamente massivos. Quando dois quarks com massas finitas se separam, em algum momento torna-se mais energeticamente favorável que um novo par quark/anti-quark seja criado a partir do vácuo do que os quarks se separem ainda mais.

5.2 Modelo de bag do MIT

A teoria de quarks e glúons, a cromodinâmica quântica, ou QCD, contém dois aspectos fundamentais: liberdade assintótica e confinamento. Esses dois aspectos são incorporados ao modelo de sacola da seguinte maneira:

- dentro da sacola as interações não são consideradas (ou são tratadas com teoria de perturbação de ordem mais baixa);
- na região fora da sacola não existem quarks livres. Isto é representado, dando-se ao vácuo uma densidade de energia constante B , também chamada de constante de sacola ou constante de BAG , que mantém quarks e glúons confinados em pequenas regiões do espaço.

Considerando um hádron dentro do modelo de sacola, podemos interpretar sua energia como sendo composta de duas partes: a energia associada ao volume da sacola devida à pressão do vácuo e a energia devida à energia cinética dos quarks. Em princípio, pode-se utilizar o modelo de sacola para descrever a matéria de quarks e glúons em qualquer volume fechado finito. Portanto, tal modelo pode ser aplicado no estudo de estrelas de nêutron, onde consideramos que a sacola é uma região de movimento livre para os quarks. Neste caso, podemos idealizar duas situações: as sacolas respectivas aos hádrons estão tão comprimidas que os quarks se movimentam livremente de uma sacola para outra; ou, as sacolas se fundem numa sacola maior que engloba todo o volume da matéria de quark desconfinado, também onde os quarks transitam livremente.

Neste capítulo continuaremos utilizando o sistema de coordenadas naturais, onde se define $\hbar = c = k_B = 1$, onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , c é a

velocidade da luz e k_B é a constante de Boltzmann. As funções de que necessitamos para estudar uma estrela de quark são a pressão P , a densidade volumétrica de energia ε e a densidade de número bariônico n_B . De acordo com a termodinâmica, tais funções são dadas, no limite de um volume infinito, pelas expressões abaixo:

$$n_B = \frac{T}{V} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z \quad (5-1)$$

$$\varepsilon = \frac{T^2}{V} \frac{\partial}{\partial T} \ln Z + \frac{\mu T}{V} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z \quad (5-2)$$

$$\Omega = -T \ln Z \quad (5-3)$$

$$P = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} = \frac{\partial (T \ln Z)}{\partial V}, \quad (5-4)$$

onde Ω é o grande potencial termodinâmico, μ é o potencial químico e Z é a função de partição do sistema considerado.

O próximo passo é determinar $\ln Z(T, V, \mu)$, para partículas e antipartículas, e calcular suas respectivas derivadas. No *ensemble* gran-canônico temos a definição da função de partição

$$Z = \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{T} (\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\} \right], \quad (5-5)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano e \hat{N} é o operador número de partículas. Como estamos lidando com um gás de quarks livres no interior da sacola e utilizando o sistema de coordenadas naturais, é possível escrever $\ln Z$ de um gás de férmions, sem interação, como

$$\ln Z = \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{1}{T} (\sqrt{k^2 + m^2} - \mu) \right] \right\}. \quad (5-6)$$

No limite para V infinito podemos substituir o somatório por uma integral

$$\ln Z = \frac{gV}{8\pi^3} \int d^3k \ln \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{1}{T} (\sqrt{k^2 + m^2} - \mu) \right] \right\}, \quad (5-7)$$

onde g é um termo de degenerescência. Como o caso que nos interessa é onde o integrando só depende de k , podemos explicitar $d^3k = 4\pi k^2 dk$, obtendo

$$\ln Z = \frac{gV}{2\pi^2} \int k^2 dk \ln \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{1}{T} (\sqrt{k^2 + m^2} - \mu) \right] \right\}. \quad (5-8)$$

Resolvendo a integral acima por partes é possível obter a nova relação

$$\ln Z = \frac{gV}{2\pi^2 T} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{T}(\sqrt{k^2 + m^2} - \mu)\right] + 1}. \quad (5-9)$$

Realizando cálculos semelhantes para bósons, obtém-se,

$$\ln Z = \frac{gV}{2\pi^2 T} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{T}(\sqrt{k^2 + m^2} - \mu)\right] - 1}. \quad (5-10)$$

5.2.1 Equações de estado para um sistema de férmions

Como hipótese simplificadora, vamos definir um potencial químico μ para os quarks tal que $\mu = \mu_u = \mu_d = \mu_s$. A partir desta aproximação, e utilizando a Equação (5-9) na Equação (5-1), realizamos uma expansão de Sommerfeld (conferir a Ref. [81]), obtendo a relação aproximada, para os sistemas fermiônicos,

$$(T \ln Z)_f = \frac{g_f V}{2} \left(\frac{7}{30} \pi^2 T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2} \right). \quad (5-11)$$

Para sistema de bósons, com $\mu_b = 0$, obtemos,

$$(T \ln Z)_b = \frac{g_b V}{90} \pi^2 T^4. \quad (5-12)$$

Estamos lidando com um gás livre de quarks com três sabores e glúons, tanto quarks quanto glúons têm dois graus de liberdade de spin e, de acordo com a estrutura de calibre SU(3) da QCD, há mais três graus de liberdade para os quarks (sabores) e oito para os glúons, conferir nas Refs. [16, 82]. Portanto, o fator de degenerescência para quarks e anti-quarks é $g_f = 3 \times 2 \times 3 = 18$ e, para glúons, $g_b = 2 \times 8 = 16$. Desta forma, a grande função de partição para quarks, anti-quarks e glúons fica,

$$(T \ln Z)_{qgp} = V \left(\frac{19}{36} \pi^2 T^4 + \frac{3}{2} \mu^2 T^2 + \frac{3}{4\pi^2} \mu^4 \right) - BV, \quad (5-13)$$

onde B é a constante efetiva de sacola associada à pressão do vácuo que mantém quarks e glúons confinados a pequenas regiões do espaço.

Introduzir a constante B acima equivale a introduzir uma contribuição do vácuo para a grande função de partição, contribuição essa dada por,

$$\ln Z_{\text{vácuo}} = -\frac{BV}{T}. \quad (5-14)$$

A contribuição dada pela Equação (5-14) é o que caracteriza o modelo de sacola.

Tendo isso em mente, utilizando a Equação (5-13) na Equação (5-4), obtemos finalmente a pressão para um gás livre de quarks e glúons como sendo,

$$P = \left(\frac{19}{36} \pi^2 T^4 + \frac{3}{2} \mu^2 T^2 + \frac{3}{4\pi^2} \mu^4 \right) - B. \quad (5-15)$$

O modelo de sacola também prevê que,

$$P = \frac{1}{3} (\varepsilon - 4B), \quad (5-16)$$

de onde podemos reescrever a Equação (5-2) como,

$$\varepsilon = \left(\frac{19}{12} \pi^2 T^4 + \frac{9}{2} \mu^2 T^2 + \frac{9}{4\pi^2} \mu^4 \right) + B. \quad (5-17)$$

A Equação (5-1), por sua vez, fica,

$$n_B = T^2 \mu + \frac{\mu^3}{\pi^2}. \quad (5-18)$$

Neste trabalho, estamos considerando um sistema onde, inicialmente, uma semente de matéria estranha encontra-se imersa em um reservatório com temperatura $T = 1 \text{ MeV}$ (estrela fria). Com isso, a Equação (5-18) nos permite aproximar o potencial químico dos quarks como sendo dado por,

$$\mu \approx \sqrt[3]{\pi^2 n_B}. \quad (5-19)$$

Por fim, é importante ressaltar que, dentro das aproximações aqui utilizadas, nossas conclusões não necessariamente serão válidas para outros modelos de confinamento.

Transição de Fase na Matéria Densa

Complementando os dados experimentais envolvendo matéria em densidades muito maiores que a densidade de saturação nuclear (ρ_0), obtidos nos modernos aceleradores de partículas de altas energias (como LHC, RHIC e GSI, por exemplo), é possível que as observações astrofísicas de objetos compactos venham a proporcionar uma oportunidade única de compreender a física oculta que rege as reações que ocorrem a tais densidades.

Observações em frequências eletromagnéticas distintas (rádio, visuais, infravermelhos, raios-X, raios- γ) poderão ser utilizadas para isolar e identificar muitas das propriedades intrínsecas desses objetos, incluindo suas massas, raios, campos magnéticos e estrutura interna. Além disso, podemos esperar que, num futuro próximo, venhamos a observar indícios de possíveis transições de fase que levem a novos estados da matéria previstos mas não observados em laboratórios terrestres.

Atualmente, é bem conhecida a ideia de Witten, na Ref. [54], que propôs pela primeira vez que a matéria nuclear não seria a forma mais estável de matéria. Em vez disso, a matéria mais estável seria a matéria “estranha”, matéria consistindo de quarks desconfinados com populações de *up*, *down* e *strange*. Foi demonstrado por Fahri e Jaffe, ver Ref. [15], que sob determinadas condições específicas, a energia média por nucleon pode ser menor na matéria “estranha” se comparada com a matéria nuclear. Acredita-se que, se um pequeno pedaço de matéria estranha entra em contato com uma estrela de nêutrons por quaisquer meios possíveis, a estrela de nêutrons será rapidamente convertida em uma estrela estranha. A questão é o quão rápido e estritamente sob que condições essa conversão será realizada. Existem dois métodos básicos utilizados para analisar o processo de conversão. O primeiro é devido a Olinto, Ref. [83], que utiliza um modelo de difusão não-relativístico. Como tal, é um modelo de combustão lenta, com a propagação da frente de queima ocorrendo a uma velocidade de aproximadamente $10m/s$. Esta é determinada principalmente pela taxa na qual um dos quarks *down* dentro dos nêutrons é convertido através de um decaimento fraco para um quark estranho (*strange*): $d + u \rightleftharpoons s + u$.

O segundo método foi introduzido por Horvath e Benvenuto, Ref. [84], que

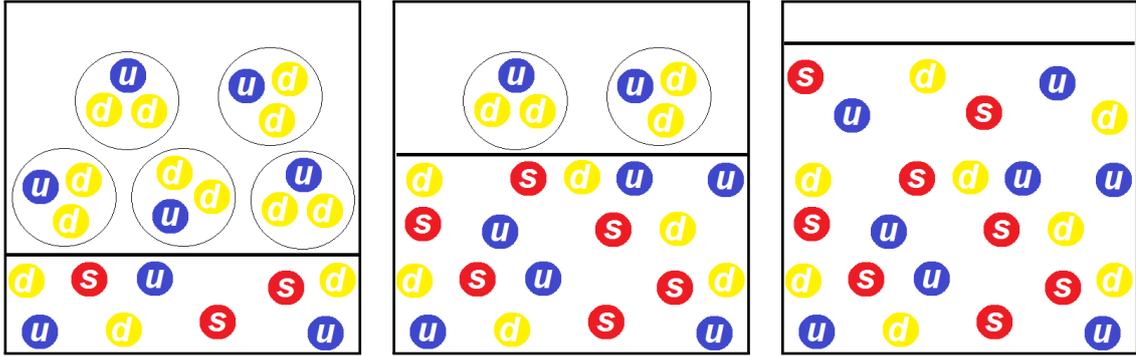


Figura 6.1: Representação esquemática do deslocamento da interface entre as camadas em três instantes de tempo distintos e consecutivos. As cores apresentadas são apenas ilustrativas e não têm relação com a “carga de cor” dos quarks.

modelam a conversão como uma detonação. A sua taxa de conversão é de várias ordens de grandeza maior do que a prevista por Olinto. Neste trabalho, não pretendíamos, *a priori*, assumir que o processo de conversão é devido a uma combustão lenta ou uma detonação, entretanto, todos os resultados que obtivemos houve formação de ondas de detonação. Utilizamos uma descrição dinâmica lagrangiana efetiva para a evolução dinâmica do sistema e analisamos a conversão da matéria hadrônica estelar em matéria de quark estranho. Tal evolução depende enormemente das equações de estado dos dois meios descritos, mantendo a conservação de número bariônico através da frente de combustão. Isto é, fazemos uma análise cinemática, a qual tem a vantagem de ser independente dos detalhes microscópicos da transição e também independente de quaisquer hipóteses quanto à taxa à qual a conversão ocorrerá. Mesmo assim, visto que a equação de estado utilizada para descrever a matéria estranha é parametrizada pelo modelo de sacola do MIT, qualquer análise da conversão de uma estrela compacta composta de matéria hadrônica em uma estrela estranha será dependente do valor da constante de sacola, que não é bem estabelecida dentro das condições de densidade e temperatura de nosso interesse. Nós, portanto, calculamos a velocidade da frente de conversão para uma ampla gama de valores da constante de sacola. Veremos mais adiante que, para todos os valores utilizados para a constante de sacola, obtivemos a formação de uma onda de detonação.

6.1 Vínculos Termodinâmicos na Transição de Fase

Visando reduzir o número de parâmetros livres sem perder a consistência termodinâmica nos cálculos das equações de movimento que regem a evolução dinâmica do sistema, ou seja, respeitando as propriedades do sistema, introduziremos

alguns vínculos. Partimos da 1ª Lei da Termodinâmica,

$$dE_1 = dQ - P_1 dV_1 + \sum_i \mu_{1i} dN_{1i}, \quad (6-1)$$

onde dE é a variação da energia interna total na camada 1, dQ ¹ é o calor líquido trocado com o reservatório (que neste caso é a camada 2), e $\mu_{1i} dN_{1i}$ é a energia associada ao potencial químico das partículas de espécie i que entram no sistema.

Qualquer entrada de massa ($-dm_2$)², deve ser proporcional à variação do número bariônico associado à camada interna (dN_1),

$$dN_1 = -\frac{1}{m_u} dm_2, \quad (6-2)$$

onde m_u é a unidade de massa atômica. Ou seja, para cada hádron que atravessa a camada 2 em direção à camada 1, devemos considerar que as cargas bariônica e elétrica são conservadas.

Entretanto, estamos supondo que o hádron, ao atravessar a interface entre as camadas, é subdividido em seus componentes menores, seus quarks. Partimos da aproximação de que esses quarks possuem o mesmo potencial químico, ou seja, $\mu_u = \mu_d = \mu_s = \mu_1$. Onde cada quark possui potencial químico μ_1 dado pela Equação (5-19),

$$\mu_1 = \sqrt[3]{\pi^2 n_1}, \quad (6-3)$$

onde n_1 é a densidade bariônica da camada 1.

Desta forma, a 1ª Lei pode ser reescrita,

$$dE_1 = dQ - P_1 dV_1 - 3 \frac{\mu_1}{m_N} dm_2. \quad (6-4)$$

Podemos, então, obter as taxas de variação temporal das respectivas grandezas descritas acima.

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{dQ}{dt} - P_1 \frac{dV_1}{dt} - 3 \frac{\mu_1}{m_N} \frac{dm_2}{dt}. \quad (6-5)$$

Com relação ao calor, se estamos trabalhando com temperatura (T) constante, podemos lidar com o calor recebido (dQ) como sendo proporcional a um calor

¹Devemos ressaltar aqui que o significado físico de dQ não é o mesmo de um diferencial no sentido formal do cálculo e mais correto seria fazermos ΔQ . Entretanto, manteremos propositalmente esse vício de linguagem pois tal variação, para fins práticos de integração numérica no nosso modelo, pode ser aproximada como um diferencial.

²O sinal negativo se deve ao fato de que a camada 2 teve perda de massa, ou seja, a camada 1 tem acréscimos positivos de energia e número bariônico. Em outras palavras, houve colapso.

latente (L) liberado pelo elemento de massa (dm_2) ao realizar a transição de fase.

$$dQ = -Ldm_2. \quad (6-6)$$

A variação do volume fica,

$$dV_1 = 4\pi R_1^2 dR_1, \quad (6-7)$$

Retornando à variação temporal, obtemos,

$$\frac{dE_1}{dt} = - \left(L + \frac{3\mu_1}{m_N} \right) \dot{m}_2 - 4\pi P_1 R_1^2 \dot{R}_1. \quad (6-8)$$

Por outro lado, podemos reinterpretar o calor latente L como,

$$\Delta Q = - (\epsilon_2 - \epsilon_1) \Delta m_2, \quad (6-9)$$

onde ϵ_2 e ϵ_1 representam, respectivamente, as densidades de energia por massa que o elemento de massa tinha quando estava na fase hadrônica (na camada 2) e quanto passou a ter quando passou para a fase de quark (na camada 1). Foi utilizada a notação de densidade de energia por massa pois estamos lidando com a perda de energia de um elemento de massa. Porém, como o modelo do MIT utiliza densidade volumétrica de energia, é conveniente fazermos,

$$\Delta Q = - \left(\frac{\epsilon_2}{\rho_2} - \frac{\epsilon_1}{\rho_1} \right) \Delta m_2. \quad (6-10)$$

onde definimos: $\epsilon_i \equiv$ densidade de energia por unidade de volume da camada i .

Por fim, a variação temporal da energia interna fica,

$$\frac{dE_1}{dt} = - \left(\frac{3\mu_1}{m_N} + \frac{\epsilon_2}{\rho_2} - \frac{\epsilon_1}{\rho_1} \right) \dot{m}_2 - 4\pi P_1 R_1^2 \dot{R}_1. \quad (6-11)$$

Integrando numericamente a Equação (6-11) é possível obter a energia interna em qualquer instante t .

Resultados

7.1 Evolução Dinâmica

Conforme vimos nos Capítulos 3 e 6, a simulação que realizamos leva em conta não apenas as equações de movimento apresentadas na Seção 3.2 mas também possui consistência termodinâmica dada pela Equação (6-11) que governa os vínculos da transição de fase na interface das duas camadas dos caroços interno e externo. Veremos neste capítulo os resultados obtidos para a evolução dinâmica do sistema utilizando diferentes valores para a constante de sacola na fase de quark e compararemos com os resultados obtidos para outros valores de massa inicial da estrela de nêutron.

Na aplicação do modelo levamos em consideração, inicialmente, um caroço típico de $1.4M_{\odot}$, composto de hádrons imersos em um gás de elétrons degenerados. Como forma de obter a configuração inicial do sistema descrito pela lagrangiana dada na Equação (3-2), determinamos a energia total e buscamos a configuração de energia mínima para uma esfera hadrônica. Tais condições foram obtidas numericamente utilizando a equação de estado descrita no Capítulo 4 que utiliza a teoria RMF com o conjunto de parâmetros de acoplamento NL3. Adotamos uma fração protônica inicial dada por $Y_p = 0.4$ e uma temperatura de $1MeV$, que é uma aproximação razoável para uma proto-estrela de nêutron imediatamente após a difusão dos neutrinos que foram aprisionados durante a formação da proto-estrela de nêutron. Na realidade, neste trabalho damos prosseguimento à análise iniciada em estudos anteriores da fase de escape de neutrinos, vide nossos trabalhos anteriores nas Refs. [8, 9, 10]. Após a difusão dos neutrinos, a perda de energia do caroço interno pode levar a um aumento da densidade naquela região favorecendo o desconfinamento de quarks, ou seja, aumentando a probabilidade de formação de uma “semente” de matéria de quark devida a uma transição de fase hádron-quark.

Em seguida utilizamos os mesmos procedimentos para diferentes massas com o objetivo de verificar a variação de nossos resultados face à mudança da massa total do sistema (que é um parâmetro de entrada para nossos cálculos). Ou

seja, comparamos os resultados obtidos a partir de uma estrela de nêutrons típica com aqueles obtidos para estrelas mais massivas que o protótipo tomado. Como uma perturbação plausível ao equilíbrio da configuração inicial do sistema, e que simula o início da transição de fase, introduzimos um caroço pequeno já contendo matéria estranha, para análise de sua evolução dinâmica. A integração numérica das equações de movimento (Equação (3-36) à Equação (3-38) na Seção 3.2) do sistema contempla a presença de matéria estranha na camada interna que é vinculada à relação termodinâmica dada na Equação (6-11) associada à transição de fase.

Na Figura 7.1, vemos no Gráfico (a) a evolução somente da camada interna para uma estrela de nêutron de $1.4M_{\odot}$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de bag na equação de estado da fase de quark. Note-se que, para valores onde $B^{1/4} < 160MeV$, a curva evolui para uma configuração de crescimento rápido do raio R_1 , já dentro da escala de $10^{-3}ms$, enquanto que, para valores onde $B^{1/4} \geq 160MeV$, o crescimento é mais suave. No Gráfico (a) da Figura 7.2 vemos a evolução do raio interno para uma estrela de $1.6M_{\odot}$, onde notamos um comportamento semelhante ao das curvas do Gráfico (a) da Figura 7.1. No entanto, no Gráfico (a) da Figura 7.3, que mostra situação semelhante para uma estrela de $1.8M_{\odot}$, vemos que a curva associada à constante de sacola $B^{1/4} = 160MeV$ deixa de apresentar uma evolução lenta e se aproxima das curvas de evolução mais brusca na escala dos primeiros $10^{-3}ms$.

De maneira análoga, os Gráficos (b), das Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 representam as curvas evolutivas do raio externo (R_2) para os mesmos sistemas respectivos descritos nos Gráficos (a)s. É interessante notar o distanciamento das curvas onde utilizamos $B^{1/4} < 160MeV$ em relação às curvas onde utilizamos $B^{1/4} \geq 160MeV$ para as estrelas de $1.4M_{\odot}$ e $1.6M_{\odot}$. A diferença nas ordens de grandeza do crescimento se deve às velocidades maiores que R_1 atinge para os valores menores da constante de sacola enquanto que para maiores valores dessa constante o sistema evolui de forma mais suave pois o raio R_1 atinge velocidades menores.

É interessante verificar que, qualitativamente, nossos resultados concordam razoavelmente bem com os obtidos por Fryer e Woosley (1998), conforme pode ser visto na Ref. [34]. Os autores ressaltam em seu trabalho que a ejeção de massa devida à transição de fase em uma estrela de nêutron deve ocorrer devido à deposição de momentum apenas na camada mais externa. Enquanto os autores da Ref. [34] utilizaram um cálculo hidrodinâmico com zoneamento de n -camadas bem refinado nas regiões externas, obtivemos resultados semelhantes utilizando o modelo simplificado de duas camadas, que é computacionalmente menos custoso que o cálculo hidrodinâmico com n -camadas. O modelo dos autores da Ref. [34] apresenta o bounce ocorrendo dentro da mesma escala de tempo que observamos

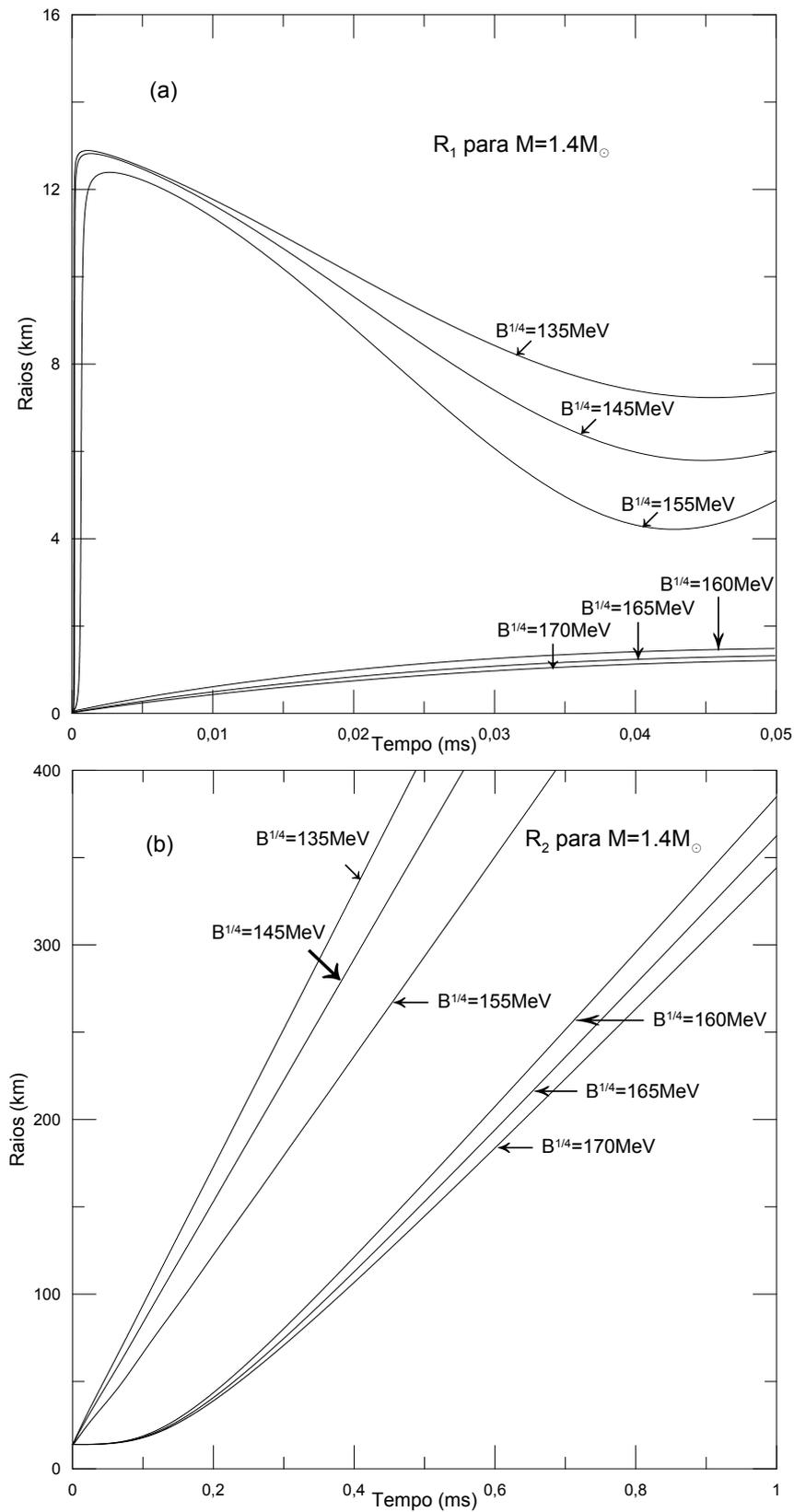


Figura 7.1: Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução dos raios das camadas interna (R_1) e externa (R_2), respectivamente, para uma proto-estrela de nêutron de $1.4M_{\odot}$, $T = 1\text{MeV}$ e $Y_P = 0.4$.

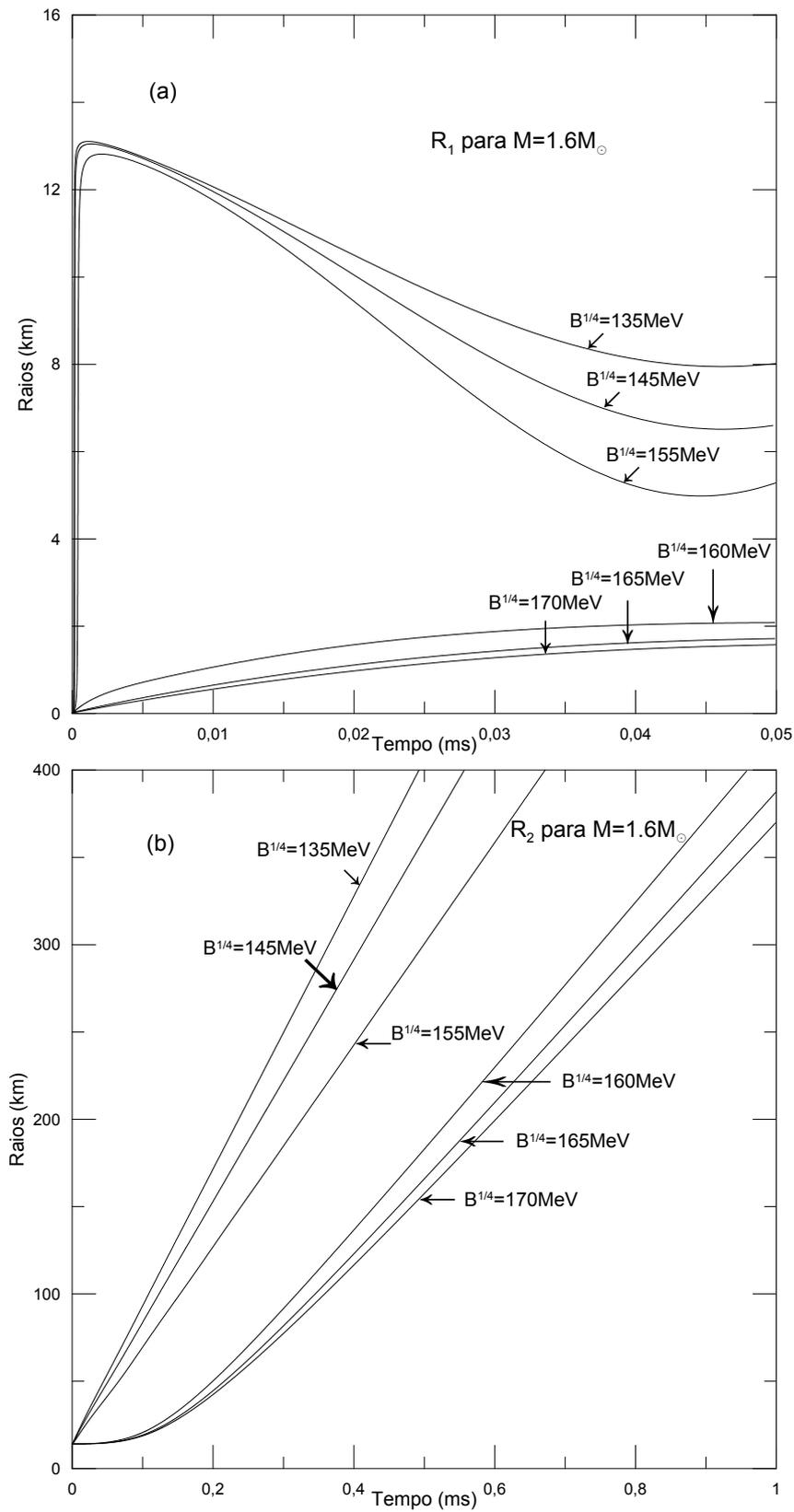


Figura 7.2: Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução dos raios das camadas interna (R_1) e externa (R_2), respectivamente, para uma proto-estrela de nêutron de $1.6M_{\odot}$, $T = 1\text{MeV}$ e $Y_P = 0.4$.

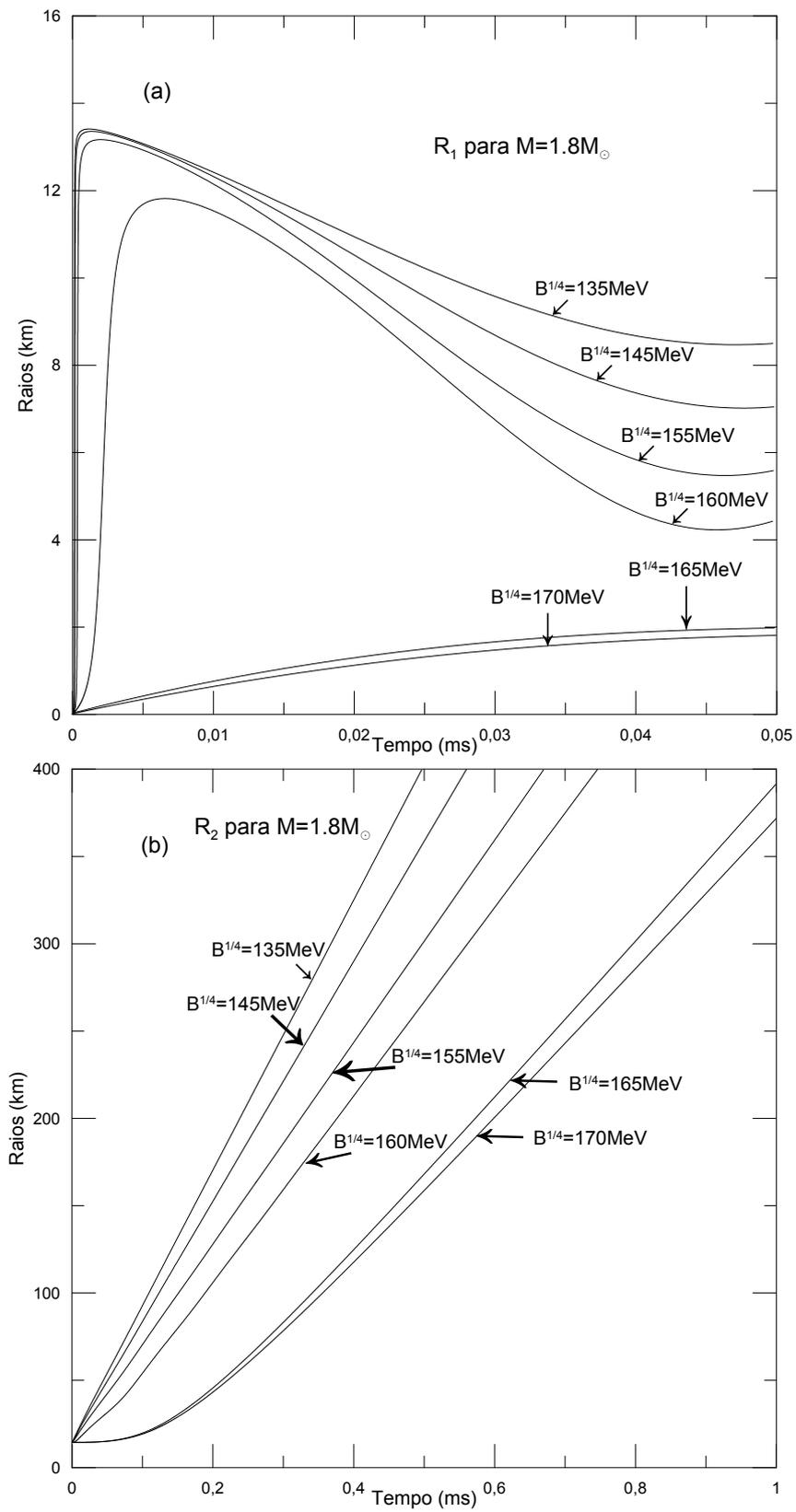


Figura 7.3: Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução dos raios das camadas interna (R_1) e externa (R_2), respectivamente, para uma proto-estrela de nêutron de $1.8M_{\odot}$, $T = 1\text{MeV}$ e $Y_P = 0.4$.

em nossos resultados (ms). Mesmo utilizando modelos diferentes, com equações de estado diferentes, qualitativamente nossos resultados apresentaram cenários evolutivos semelhantes.

Também é interessante notar que a massa inicial da estrela também exerce um importante papel na evolução dos raios pois mesmo para $B^{1/4} = 160MeV$, para o qual a curva evolutiva de R_1 era bem comportada para as estrelas de menor massa, demonstrou o comportamento de crescimento rápido em escalas de tempo menores na estrela com massa de $1.8M_{\odot}$. Ou seja, R_1 evolui mais rápido em estrelas de maior massa.

Comportamento semelhante podemos observar na evolução de R_2 , onde podemos observar um *bounce* mais brusco nas curvas associadas a $B^{1/4} < 160MeV$. De forma análoga ao comportamento de R_1 , temos um *bounce* mais suave para as curvas associadas a $B^{1/4} \geq 160MeV$ para as estrelas com massas iguais a $1.4M_{\odot}$ e $1.6M_{\odot}$. Também de forma análoga, vemos que para a estrela de massa igual a $1.8M_{\odot}$ a curva associada a $B^{1/4} = 160MeV$ apresenta um comportamento de crescimento mais rápido do raio R_2 .

Na Figura 7.4, no Gráfico (a), vemos a evolução das massas, das camadas interna (M_1) e externa (M_2), para uma estrela de nêutron de $1.4M_{\odot}$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark, mas todos sendo $B^{1/4} < 160MeV$. No Gráfico (b) da Figura 7.4 vemos a evolução das mesmas massas, também para uma estrela de nêutron de $1.4M_{\odot}$, onde utilizamos valores para a constante de sacola $B^{1/4} \geq 160MeV$. Note-se que a evolução das curvas ocorre de forma muito mais brusca no primeiro caso onde temos uma escala de tempo da ordem de $10^{-4}ms$, ou seja, a transferência de massa entre as camadas ocorre mais rápido, enquanto que, no segundo caso, com constantes de sacola maiores, a evolução é mais lenta e ocorre numa escala de tempo de $10^{-1}ms$. Em outras palavras, quanto menor a constante de sacola utilizada mais rápida a troca de massa entre as camadas, o que fica evidente pelo desenvolvimento mais brusco das curvas nos gráficos.

Nos Gráficos (a) e (b) da Figura 7.5, vemos a evolução das massas para uma estrela de $1.6M_{\odot}$, onde notamos um comportamento semelhante ao das curvas dos Gráficos (a) e (b) da Figura 7.4. Podemos já observar um deslocamento das curvas em direção à origem, denotando que as camadas trocam massa mais rápido que no caso anterior de $1.4M_{\odot}$. De forma análoga, porém, a evolução das curvas se divide apresentando uma evolução mais lenta quando utilizamos a constante de sacola com $B^{1/4} \geq 160MeV$.

No Gráfico (a) da Figura 7.6 temos uma situação inusitada, embora a mesma mostre situação semelhante às figuras anteriores, para uma estrela de $1.8M_{\odot}$, vemos

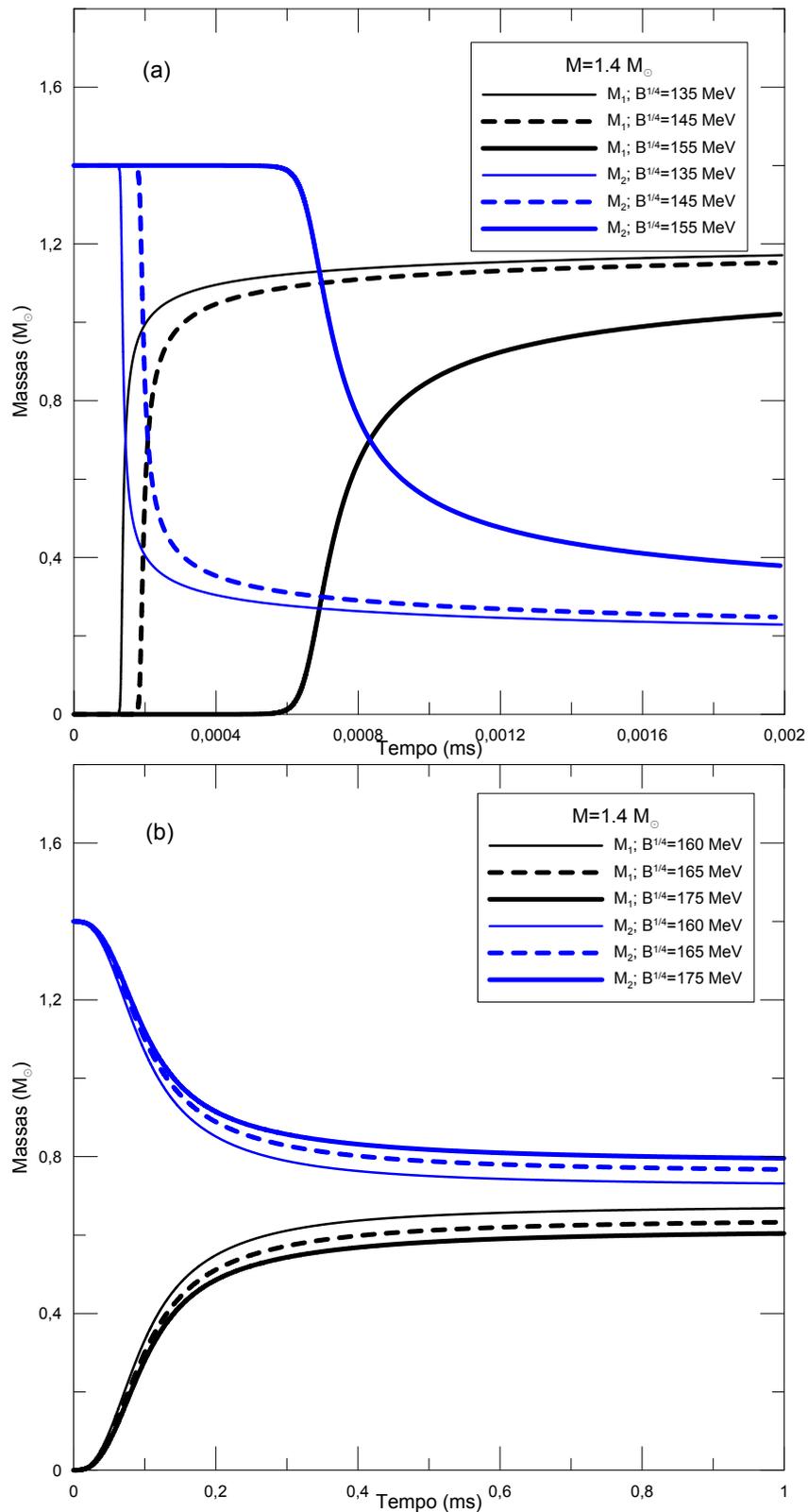


Figura 7.4: Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução das massas, das camadas interna (M_1) e externa (M_2), para uma estrela de nêutron de $1.4M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark.

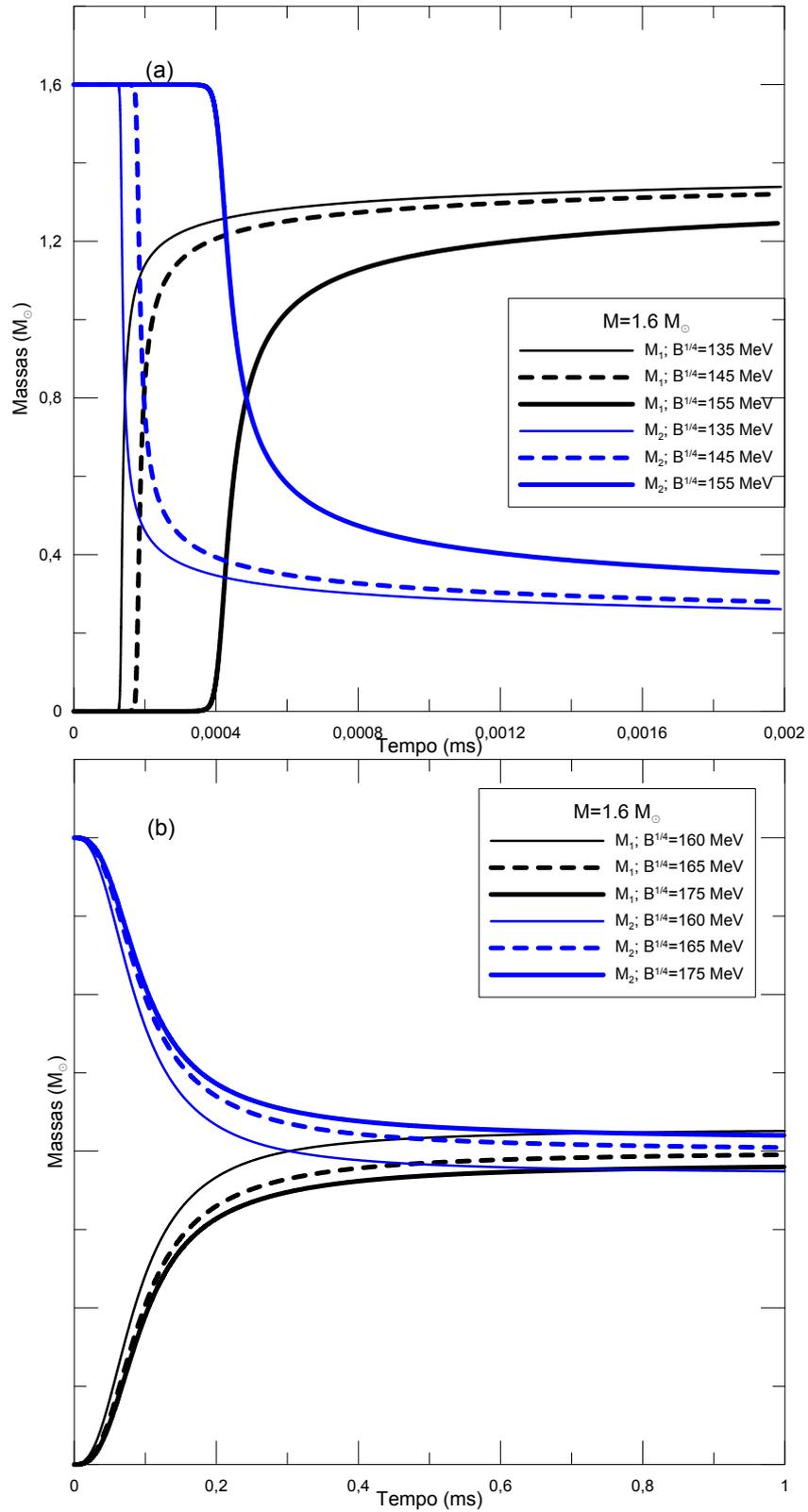


Figura 7.5: Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução das massas, das camadas interna (M_1) e externa (M_2), para uma estrela de nêutron de $1.6M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark.

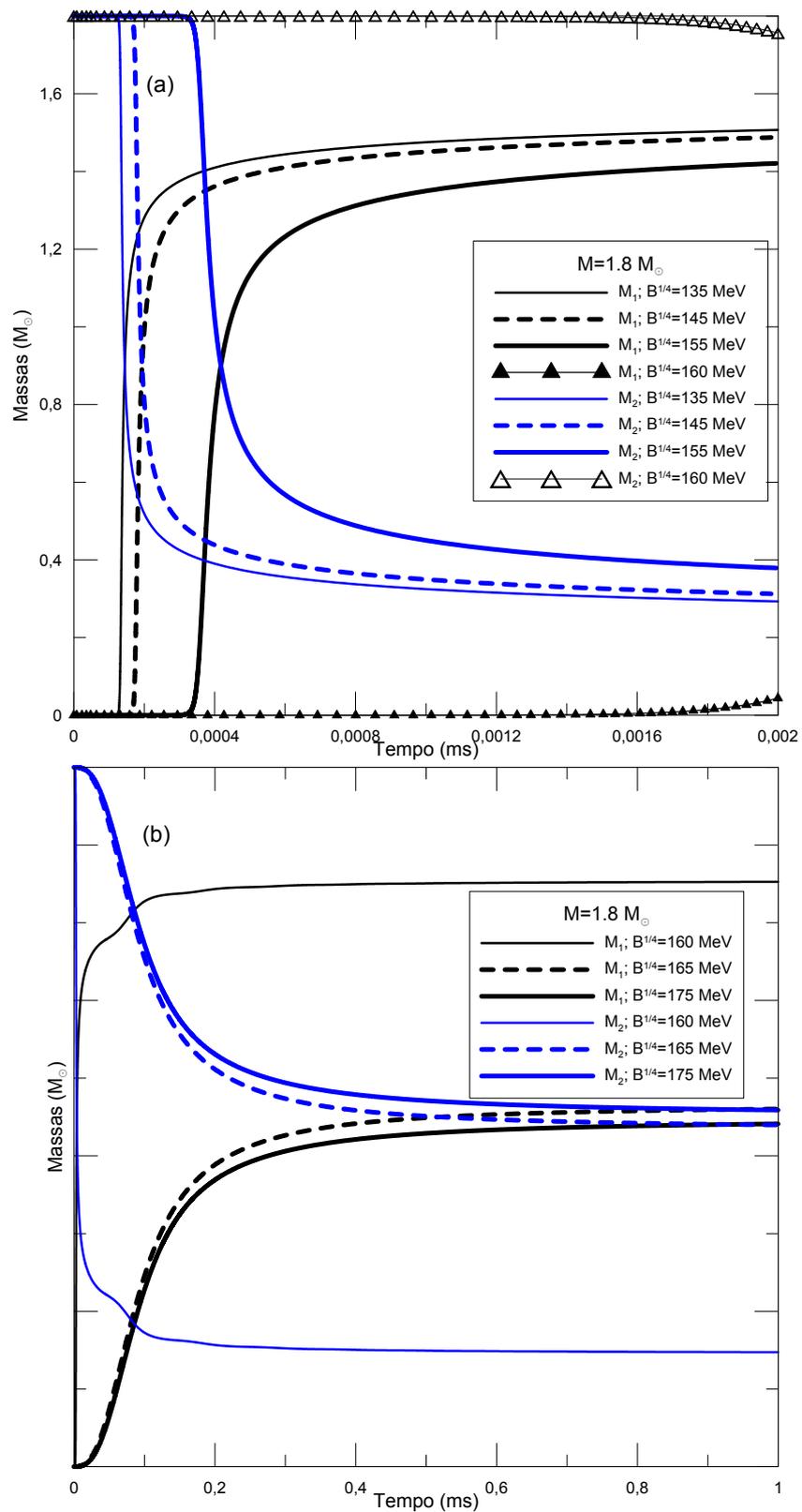


Figura 7.6: Nos Gráficos (a) e (b) vemos a evolução das massas, das camadas interna (M_1) e externa (M_2), para uma estrela de nêutron de $1.8M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark.

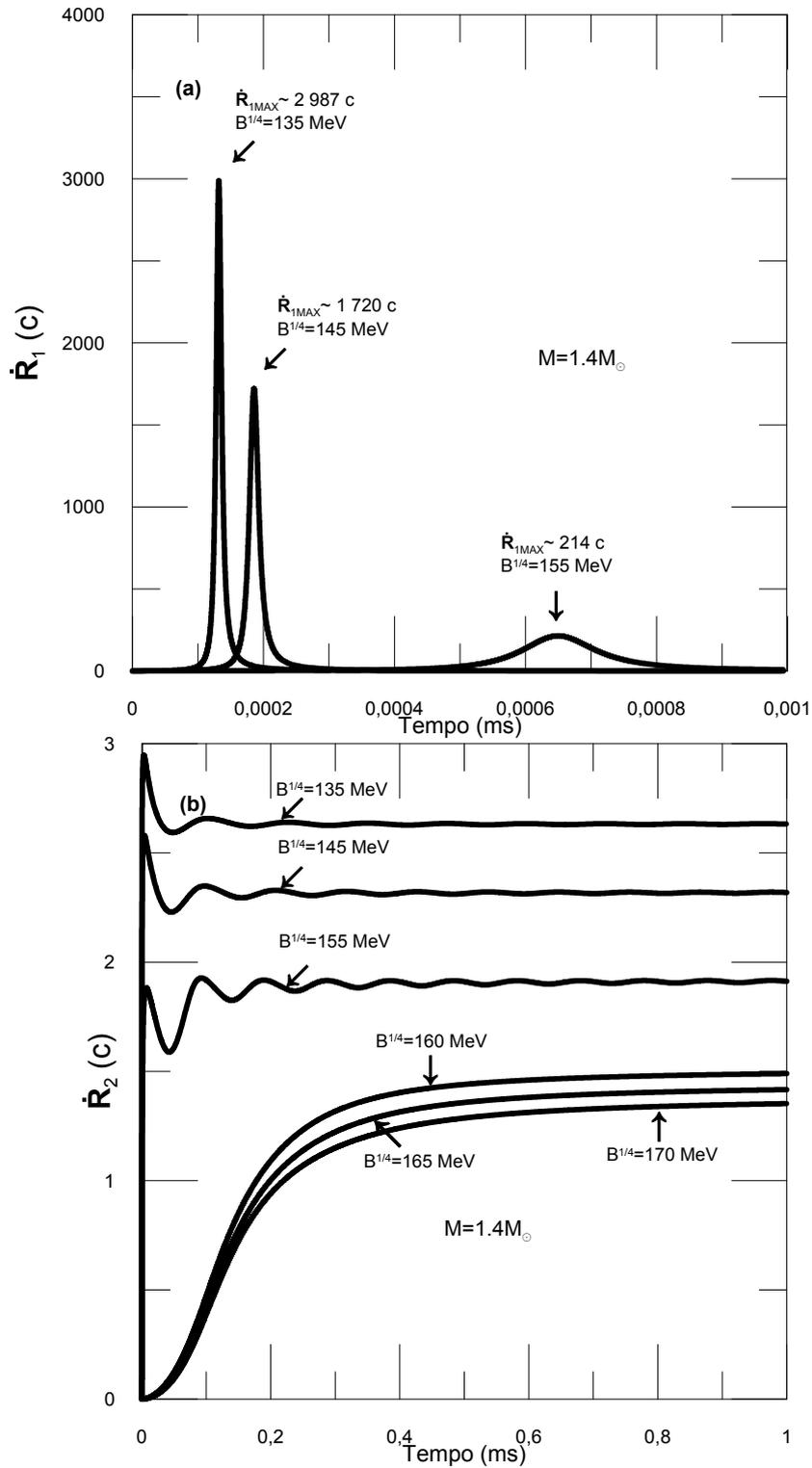


Figura 7.7: Nos Gráficos (a) e (b), apresentamos, respectivamente, as curvas de evolução temporal das velocidades \dot{R}_1 e \dot{R}_2 para uma estrela com $1.4M_{\odot}$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark.

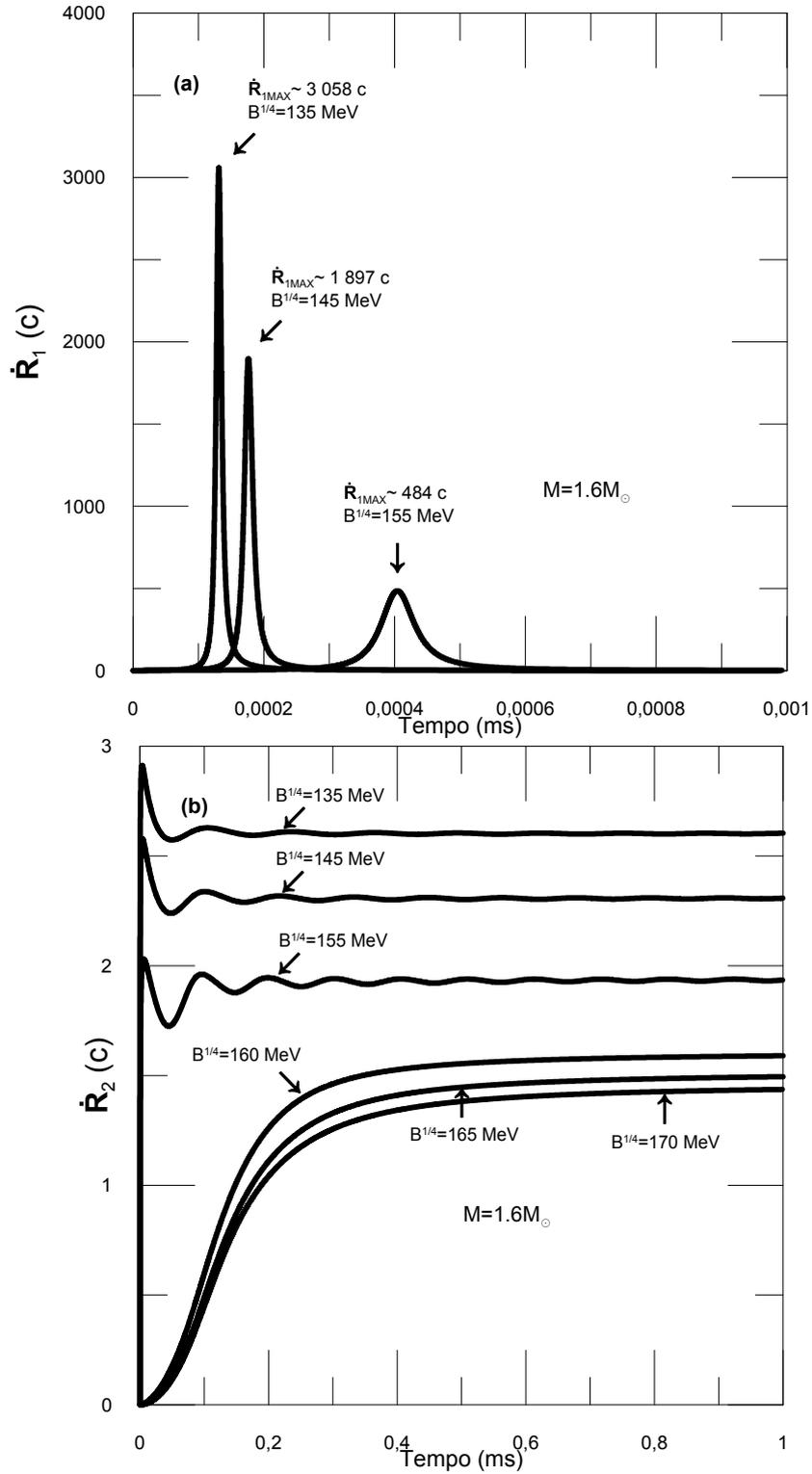


Figura 7.8: Nos Gráficos (a) e (b), apresentamos, respectivamente, as curvas de evolução temporal das velocidades \dot{R}_1 e \dot{R}_2 para uma estrela com $1.6M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark.

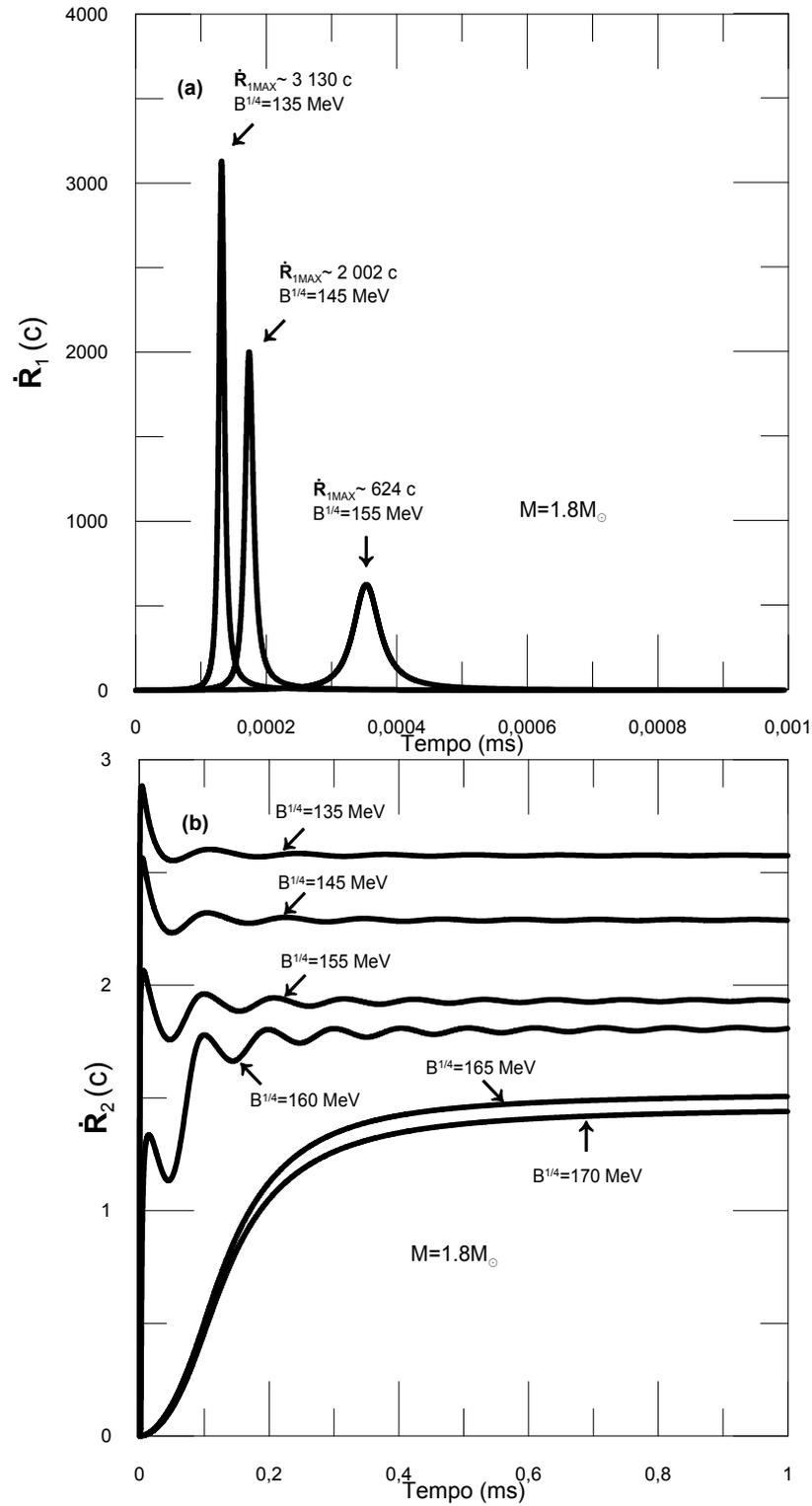


Figura 7.9: Nos Gráficos (a) e (b), apresentamos, respectivamente, as curvas de evolução temporal das velocidades \dot{R}_1 e \dot{R}_2 para uma estrela com $1.8M_\odot$, onde utilizamos diferentes valores para a constante de sacola na equação de estado da fase de quark.

que a curva associada à constante de sacola $B^{1/4} = 160MeV$ deixa de apresentar uma evolução lenta e se aproxima das curvas de evolução mais brusca na escala dos primeiros $10^{-4}ms$. Ou seja, com esse valor para a constante de sacola, ainda na escala de $10^{-4}ms$ podemos perceber que a troca de massa entre as camadas já é perceptível e no Gráfico (b) da Figura 7.6 ela se destaca das demais.

A diferença nas ordens de grandeza do tempo na evolução das curvas se deve à troca de massa mais rápida entre as camadas para os valores menores da constante de sacola enquanto que para maiores valores dessa constante a troca de massa ocorre mais lentamente. Mas também devemos notar que a massa inicial do sistema também é muito importante na evolução dinâmica da estrela pois as curvas de evolução temporal das massas se deslocavam no eixo do tempo à medida que realizávamos os mesmos cálculos para sistemas com massa inicial maior.

Na Figura 7.7, no Gráfico (a) vemos nitidamente as curvas evolutivas de \dot{R}_1 ao longo do tempo, em unidades de velocidade da luz, para uma estrela de $1.4M_{\odot}$ utilizando diferentes constantes de sacola. Entretanto, cabe aqui uma ressalva, somente as curvas associadas às constantes de sacola com $B^{1/4} < 160MeV$ foram apresentadas e tiveram seus valores de pico destacados no gráfico. Fizemos isto porque foram as únicas curvas “mal comportadas”, para todos os valores de constante de sacola onde $B^{1/4} \geq 160MeV$ a evolução de \dot{R}_1 foi totalmente subluminal e não é visível nos gráficos dentro da escala utilizada. Podemos notar, ainda no Gráfico (a), um decaimento quase exponencial para os valores dos picos de \dot{R}_1 em função do aumento do valor utilizado na constante de sacola. De forma semelhante, mas menos gritante, no Gráfico (b) vemos que \dot{R}_2 se comportou melhor para os mesmos valores de $B^{1/4} \geq 160MeV$, formando assim dois grupos distintos de curvas: um com caráter oscilatório e mais violento e outro com crescimento suave e mais bem comportado. Embora para essas curvas “bem comportadas” ainda tenhamos valores superluminais para \dot{R}_2 , devemos lembrar que o modelo utilizado é newtoniano. Tais resultados para \dot{R}_2 demonstram que uma correção relativística é desejável porém não essencial, por outro lado, pode-se argumentar que os resultados para \dot{R}_1 demandam uma correção relativística, entretanto, o fato das curvas evolutivas se tornarem superluminais para \dot{R}_1 apenas para $B^{1/4} < 160MeV$ nos leva a crer que o problema não está tanto na falta de uma correção relativística mas no ajuste do melhor valor para a constante de sacola. Esses valores “problemáticos” para a constante de sacola já foram muito utilizados na literatura para situações próximas de equilíbrio, quase estáticas, porém aqui estamos lidando com um sistema que evolui de forma mais dinâmica e cujo caráter não linear de comportamento se torna evidente para todas as grandezas observadas. Acreditamos que a abordagem da constante de sacola deva ser diferenciada, talvez com a adoção de um modelo onde a constante seja dependente

da densidade. Já há modelos assim sendo apresentados na literatura e está em nossos planos futuros incluir essa abordagem mais dinâmica para a constante de sacola.

No Gráfico (a) da Figura 7.8 vemos evoluções, similares às da figura anterior, para as curvas de \dot{R}_1 de uma estrela de $1.6M_\odot$. É visível que os picos de velocidade para as curvas de \dot{R}_1 onde utilizamos $B^{1/4} < 160MeV$ estão deslocados em direção à origem do gráfico e os valores dos picos também são maiores, o que indica que a aceleração de R_1 aumenta também com o aumento da massa inicial da estrela. No Gráfico (b) da Figura 7.8 vemos evoluções, semelhantes às do Gráfico (b) da Figura 7.7, para as curvas de \dot{R}_2 também para uma estrela de $1.6M_\odot$. Podemos notar que as curvas apresentam evoluções similares às do Gráfico (a) da Figura 7.7, porém, destacamos o fato de que a curva associada a $B^{1/4} = 160MeV$ começa a ensaiar uma mudança de comportamento e se destaca um pouco das curvas do mesmo grupo.

No Gráfico (a) da Figura 7.9 vemos evoluções, similares às dos Gráficos (a) das duas figuras anteriores, para as curvas de \dot{R}_1 de uma estrela de $1.8M_\odot$. Novamente, é explícito que os picos de velocidade para as curvas de \dot{R}_1 onde utilizamos $B^{1/4} < 160MeV$ estão maiores e mais deslocados em direção à origem do gráfico, indicando uma maior aceleração de R_1 com o aumento da massa inicial da estrela. No Gráfico (b) da Figura 7.9 vemos evoluções, semelhantes às dos Gráficos (b) das figuras anteriores, para as curvas de \dot{R}_2 também para uma estrela de $1.8M_\odot$. Podemos notar o fato de que a curva associada a $B^{1/4} = 160MeV$ passou para o grupo de curvas “mal comportadas”, provavelmente também devido a uma maior aceleração de R_2 com o aumento da massa inicial da estrela.

7.2 Estimando a Massa Ejetada

Dentro deste trabalho, o modelo de duas camadas nos permitiu realizar estimativas do montante de matéria ejetada do caroço devido à onda de detonação gerada pela transição de fase hádron-quark. No entanto, embora o modelo gere resultados qualitativamente razoáveis, a simplicidade do mesmo pode permitir o questionamento plausível de que haja superestimativas dos reais valores de matéria ejetada nos sistemas considerados. De modo a aumentar a confiabilidade de nossas estimativas para a quantidade de matéria ejetada, resolvemos calcular qual a quantidade de matéria da camada 2 não atinge velocidade de escape e pode eventualmente “cair” de volta sobre a camada 1.

Nos Gráficos (a), e (b) da Figura 7.10, apresentamos, em diferentes escalas de tempo, a evolução dinâmica dos raios interno (R_1) e externo (R_2) de um caroço de $1.4M_\odot$ e um “raio de escape”(R_{ESC}), que definiremos como o raio mínimo acima

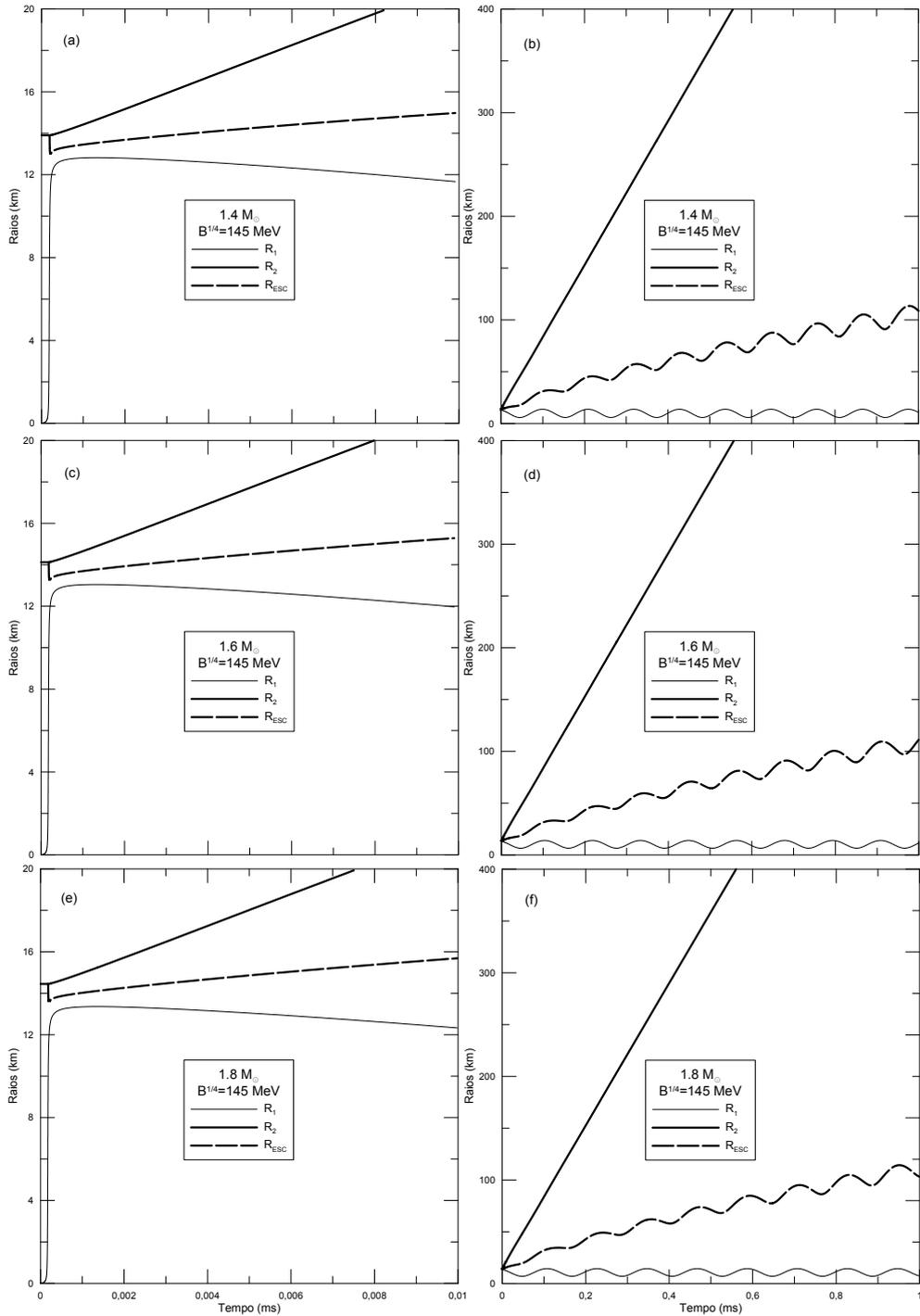


Figura 7.10: Nos Gráficos (a) e (b) da Figura 7.10 temos uma visão comparada da evolução dos raios interno (R_1), externo (R_2) e o associado à velocidade de escape (R_{ESC}) para uma estrela de $1.4M_{\odot}$, onde ambos os gráficos apresentam a evolução dos raios em diferentes escalas de tempo. Nos Gráficos (c) e (d) vemos a evolução dos mesmos raios nas respectivas escalas de tempo para uma estrela de $1.6M_{\odot}$ e, nos Gráficos (e) e (f) vemos a evolução desses raios nas respectivas escalas de tempo para uma estrela de $1.8M_{\odot}$. Nos três sistemas utilizamos uma constante de sacola $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$.

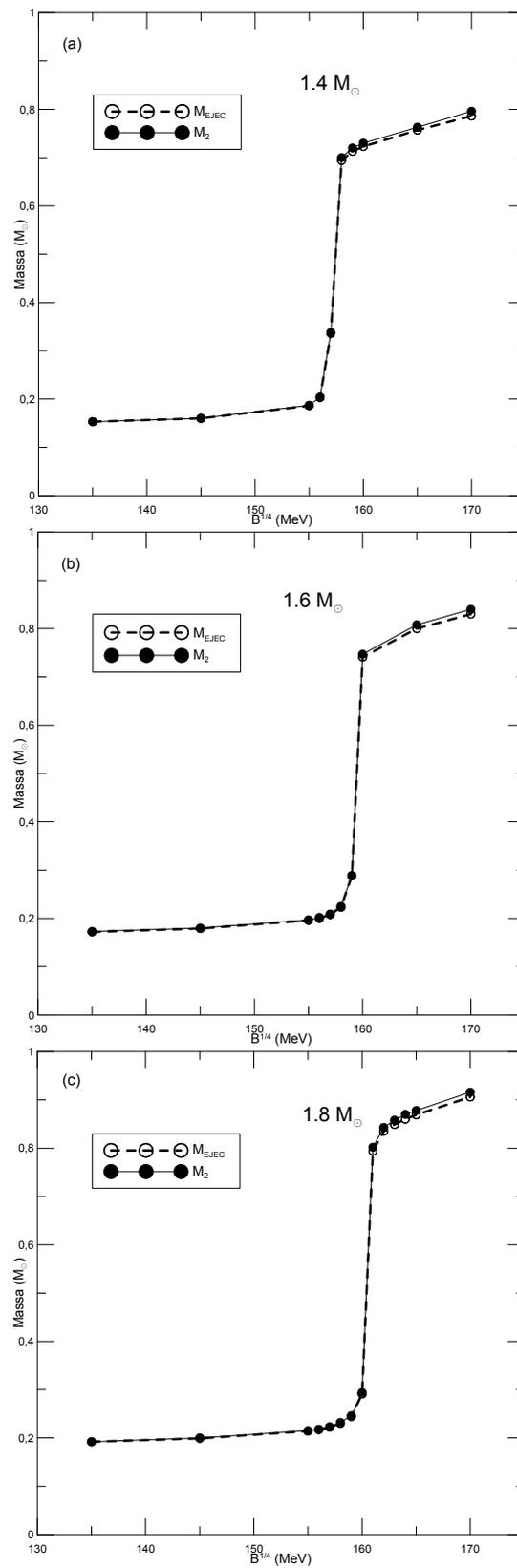


Figura 7.11: Nos Gráficos (a), (b) e (c) vemos as curvas da massa da camada 2 (M_2) e da massa que atinge velocidade de escape (M_{EJEC}) em função da constante de sacola utilizada nos cálculos da EOS da fase de quark para estrelas de $1.4M_{\odot}$, $1.6M_{\odot}$ e $1.8M_{\odot}$, respectivamente.

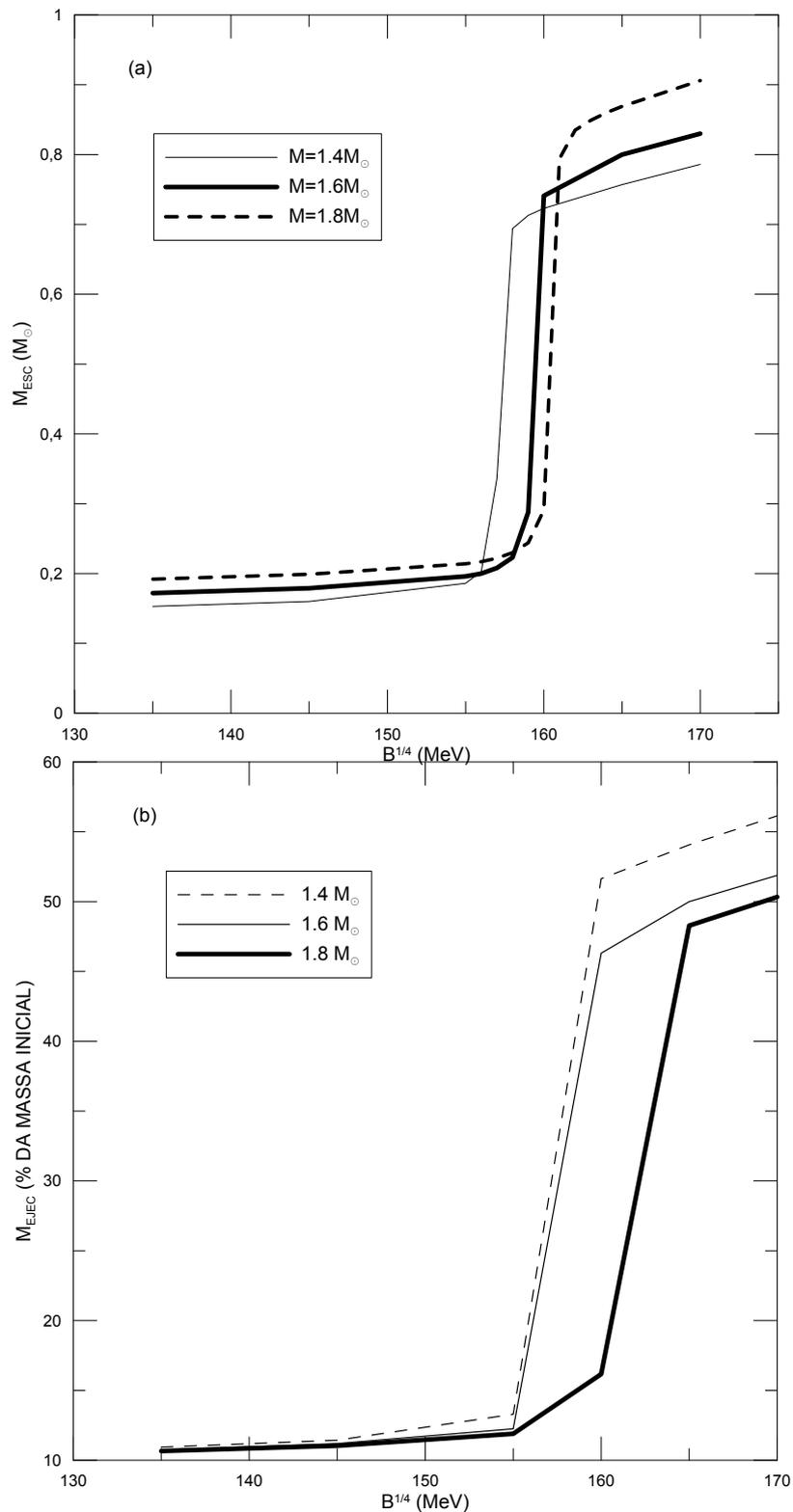


Figura 7.12: No Gráfico (a) vemos uma comparação entre as curvas de M_{ESC} em função da constante de sacola para as estrelas com $1.4M_{\odot}$, $1.6M_{\odot}$ e $1.8M_{\odot}$, respectivamente. No gráfico (b) temos as curvas do percentual de matéria ejetada em função da constante de sacola utilizada. No Gráfico (c) vemos uma comparação entre as curvas de massa do objeto remanescente em função da constante de sacola.

do qual uma partícula teste deve estar para atingir velocidade de escape. Note-se que utilizamos uma estrela com equação de estado da fase de quark com $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ apenas, pois, para outros valores de constante de sacola o comportamento relativo entre os raios foi essencialmente o mesmo. Nos Gráficos (c) e (d) da Figura 7.10, apresentamos gráficos evolutivos das mesmas grandezas para uma estrela de $1.6M_{\odot}$. Nos Gráficos (e) e (f) da Figura 7.10, apresentamos gráficos similares para uma estrela de $1.8M_{\odot}$. Como esperávamos, nos três casos, o raio R_1 está totalmente abaixo de R_{ESC} , porém este se distancia de R_1 cada vez mais, já na escala de tempo de 10^{-3} ms , dando-nos a impressão de que a quantidade de matéria da camada 2 que não atingiu a velocidade de escape deve ser significativa. Essa impressão fica maior na escala de tempo de ms onde podemos ver R_1 e R_{ESC} se afastando indefinidamente. Devemos lembrar, porém, que a diferença entre as densidades torna-se muito grande com o aumento explosivo de R_1 , ou seja, a camada 2 é mais rarefeita e a massa que não atingiu velocidade de escape pode não ser tão significativa assim, como poderemos confirmar na análise da Figura 7.11 mais adiante.

Uma massa teste que atingisse a velocidade de escape dentro da camada externa com certeza seria ejetada, entretanto, nada nos garante que toda a matéria da camada externa atinge velocidade de escape (para maiores detalhes sobre a dedução da velocidade de escape veja a Seção 3.3). Partindo do pressuposto de que pode sim haver matéria da camada hadrônica que eventualmente cairia novamente sobre a superfície do caroço, em cada iteração calculamos a velocidade de escape numa grade de valores da posição radial r de uma partícula teste entre R_1 e R_2 . Para cada valor de r calculamos a velocidade de escape $v_{ESC}(r)$ e comparamos com a velocidade da matéria no meio hadrônico $v_2(r)$ dada pela Equação (3-10). Para os valores limite onde $v_2(r) = v_{ESC}(r)$, definimos um r limite ($r \equiv R_{ESC}$) acima do qual toda matéria possui velocidade superior à velocidade de escape associada a R_{ESC} . Desta forma, torna-se simples calcularmos a matéria total contida no volume esférico delimitado por R_{ESC} , a qual denotaremos por m_{ESC} e nos permitirá uma estimativa mais realista da matéria ejetada que passaria a ser dada por $M_{EJEC} = M - m_{ESC}$, onde M é a massa total do caroço dada no vínculo definido na Equação (3-1). Em síntese, m_{ESC} é definida como a massa de toda matéria que ainda não adquiriu velocidade igual nem superior à velocidade de escape definida na Seção 3.3.

Toda matéria localizada a uma distância radial do centro que esteja acima de R_{ESC} tem grandes chances de ser efetivamente ejetada enquanto a matéria que estiver em posição abaixo de R_{ESC} estará gravitacionalmente ligada ao remanescente do caroço. Devemos chamar a atenção ao fato de que esse é um refinamento no cálculo da massa ejetada, mas ainda se trata de uma estimativa. Poderíamos ainda remover dos cálculos a massa que estivesse acima da velocidade de escape, porém, como neste

trabalho a massa é uma variável lagrangiana, isso poderia falsear nossos cálculos ao invés de aumentar a acurácia de nossos resultados.

Nos Gráficos (a), (b) e (c) da Figura 7.11, para estrelas de massas respectivas de $1.4M_{\odot}$, $1.6M_{\odot}$ e $1.8M_{\odot}$, apresentamos uma comparação entre os valores atingidos pela massa da camada 2 e os valores contidos fora do volume delimitado por R_{ESC} , ou seja, $M_{EJEC} \equiv M - m_{ESC}$. Os valores são apresentados em função da constante de sacola utilizada na equação de estado para a fase de quark. Como podemos notar, para valores até $B^{1/4} = 155 MeV$ a curva é quase linear formando um “platô”, entretanto, a partir desse valor temos uma variação brusca nos valores de massa ejetada formando um “degrau” quase vertical e, logo após, outro “platô”. Ou seja, há uma visível descontinuidade nos valores obtidos para a massa ejetada para valores de sacola próximos.

Para fins de comparação, utilizamos tanto a massa da camada externa quanto a massa que atingiu velocidade de escape no gráfico. Diferente do que esperávamos com a sobreposição das curvas, as diferenças de resultados não foram significativas e tornam-se imperceptíveis no primeiro “platô”. Embora se tornem mais visíveis no segundo “platô”, ainda continua claro que suas diferenças em relação à massa total da camada 2 podem ser desprezadas e a massa M_2 ainda é uma boa aproximação da massa ejetada. Essa insignificância na diferença é relativa, ou seja, em valores absolutos ela é perceptível e dá indícios de que pode se formar uma crosta hadrônica sobre o objeto remanescente da transição de fase. Entretanto, torna-se desprezível se comparada com o montante de massa ejetada pois mesmo R_{ESC} sendo nitidamente maior que R_1 , a densidade da camada 2 é muito baixa e a região entre esses raios eventualmente vai se tornando cada vez mais rarefeita.

Embora as figuras apresentem aspectos semelhantes, os valores da constante de sacola onde começa o degrau de descontinuidade entre os platôs varia, se deslocando para longe da origem, ou seja, ele aumenta para maiores valores de massa. Isso fica mais evidente no Gráfico (a) da Figura 7.12 onde apresentamos as curvas apenas de M_{EJEC} para as estrelas com as três massas consideradas em função da constante de sacola. Também observamos que o acréscimo na massa inicial não somente desloca o degrau para a direita, mas também desloca os platôs para cima, ou, em outras palavras, os valores ejetados também aumentam em função da massa inicial da estrela.

No Gráfico (b) da Figura 7.12, temos as curvas do percentual de matéria ejetada, em relação à massa inicial do caroço, em função da constante de sacola utilizada. É interessante notar que, para caroços mais massivos, obtemos percentuais de ejeção de massa menores, ao contrário do que nos deu a entender o Gráfico (a) da Figura 7.12 que demonstrou valores absolutos maiores para a quantidade de matéria

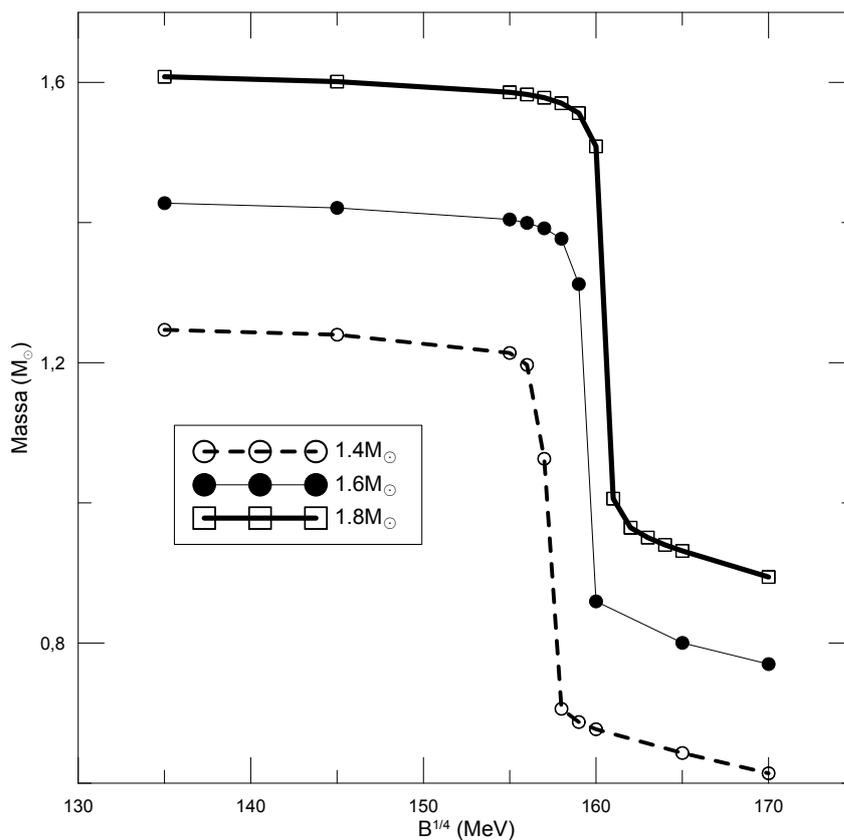


Figura 7.13: No gráfico acima temos as curvas de massa final do objeto estranho remanescente, considerando diferentes massas iniciais, em função do valor da constante de sacola utilizada.

ejetada. Ou seja, utilizando-se uma dada constante de sacola qualquer, estrelas de maior massa realmente ejetam mais matéria do que estrelas menos massivas, porém essa matéria ejetada a mais ainda é percentualmente menor do que o montante ejetado pelas de menor massa. Podemos ver que a descontinuidade que gera o “degrau” também ocorre neste gráfico para as três estrelas consideradas.

No gráfico da Figura 7.13, temos as curvas de massa final em função do valor utilizado na constante de sacola. Podemos notar que, para caroços mais massivos, obtemos objetos finais com maiores massas, mas apresentando também uma grande dependência com relação ao valor utilizado para a constante de sacola. Como podemos ver, novamente temos um “degrau” devido a uma súbita descontinuidade em cada uma das curvas. Notamos também que a descontinuidade ocorre mais à direita no gráfico para as curvas associadas aos caroços iniciais com maiores massas.

É interessante notar que a teoria não nega a possibilidade de obter objetos estáveis com massas tão pequenas quanto as obtidas nos degraus mais baixos do gráfico, ou seja, para valores mais altos da constante de sacola (acima de 158MeV , 160MeV e 161MeV , respectivamente para estrelas de massa inicial $1.4M_{\odot}$, $1.6M_{\odot}$

e $1.8M_{\odot}$).

Conclusões e Perspectivas Futuras

Conclusões

Analizamos neste trabalho a formação e propagação da onda de detonação gerada durante uma transição de fase hádron-quark no interior de uma estrela de nêutron. Após representar a configuração inicial por um modelo de duas camadas homogêneas com as massas sendo tratadas como variáveis lagrangianas, a evolução dinâmica do sistema foi descrita através de uma Lagrangiana efetiva, ver Equação (3-2), de onde extraímos as equações de movimento das camadas, Equação (3-59).

A fase de hádrons foi descrita através de uma equação de estado que descreve o regime de densidade supranuclear utilizando a Teoria de Campo Médio Relativístico dentro de uma expansão Virial em termos das fugacidades das partículas constituintes no regime de densidade subnuclear conectado à equação de estado RMF para a fase hadrônica (ver Refs. [11, 13, 12]). A fase de quark foi descrita utilizando o modelo de sacola do MIT (Refs. [16, 82, 15]), onde vários valores diferentes para a constante de sacola foram utilizados, onde foram considerados três sabores de quark (u , d e s), com potenciais químicos idênticos. Também consideramos que a escala de tempo da reação é suficientemente pequena para que a única transferência de calor considerada seja a liberação de calor latente durante a transição de fase. A camada externa hadrônica foi tratada como um reservatório térmico com temperatura de $1MeV$ e fração protônica $Y_P = 0.4$, visto que são valores já bastante utilizados na literatura (pois estamos utilizando uma equação de estado extremamente sensível a variações nesses parâmetros na descrição da fase hadrônica nos regimes de densidade nuclear e supranuclear).

Os cálculos dinâmicos mostram grande sensibilidade ao valor utilizado para a constante de sacola na descrição da fase de quark, alterando drasticamente a evolução das variáveis lagrangianas ao longo do tempo. Apesar dessa variação no comportamento das variáveis lagrangianas, em todas as situações consideradas obtivemos ejeção de matéria. O montante de massa ejetada depende da constante de sacola utilizada, afetando de forma altamente não-linear a fração de massa ejetada.

Os resultados foram comparados com os de outros autores que utilizaram

uma descrição hidrodinâmica de n -camadas com zoneamento mais detalhado na Ref. [34], e ainda assim obtivemos uma semelhança qualitativa considerável entre esses resultados. Ou seja, nosso modelo apresenta uma abordagem efetiva mais simplificada e consegue obter resultados semelhantes. Ainda tentamos um refinamento maior considerando estimar isoladamente o montante de massa que atinge velocidade de escape e obtivemos uma boa concordância com os valores obtidos da segunda camada permitindo concluir que a massa da segunda camada é uma boa aproximação do total de massa ejetada.

Pra valores menores do que $B^{1/4} = 160 \text{ MeV}$ obtivemos resultados com velocidades generalizadas superluminais, ou seja, não realísticas pois não ocorrem na natureza. As velocidades generalizadas obtidas demonstraram ser mais realistas quando utilizamos valores maiores para a constante de sacola da fase de quark. A evolução das velocidades também demonstrou ser sensível à massa inicial do caroço.

Por fim, comprovamos também que a massa inicial do caroço influencia o processo de ejeção levando a valores absolutos maiores porém com percentuais menores para o montante de material ejetado quando o caroço inicial é mais massivo. Ou seja, caroços menos massivos ejetarão menos matéria mas terão percentuais de ejeção maiores do que os mais massivos.

Perspectivas Futuras

Como complementação a este trabalho, gostaríamos de introduzir novos elementos ao dar continuidade à nossa pesquisa, aqui seguem algumas idéias que pretendemos implementar eventualmente nos nossos desenvolvimentos futuros:

1. **Constante de sacola dependente da densidade.** Embora tenhamos utilizado diferentes valores para a constante de sacola em nossas simulações, em cada simulação a constante de sacola utilizada era sempre a mesma, independente da evolução do sistema. Hoje já existem modelos de constante de sacola dependentes da densidade que podem ser incorporados ao modelo (conforme as Refs. [85, 86, 87, 88]), visto que a evolução das massas, dos raios e das velocidades é muito sensível ao valor utilizado para essa contante.
2. **Inclusão da emissividade de neutrinos.** Desconsideramos aqui a produção de neutrinos ao longo da evolução do sistema. O tratamento desta questão requer o estudo mais detalhado dos processos de produção via processos fundamentais no plasma. Esta produção deveria entrar na equação dinâmica como um termo de fonte dependente da densidade e composição do meio. Em trabalhos prévios, ver Refs. [8, 9, 10], já demonstramos que a perda de neutrinos na fase de “cooling” de uma protoestrela de nêutron pode transportar

momentum para a camada externa promovendo ejeção de massa. Considerar a influência dos neutrinos sobre a matéria densa da camada externa pode levar a novos valores para a ejeção de massa.

3. **Inclusão do octeto bariônico.** Em alguns experimentos de colisões de íons pesados observa-se o surgimento de bárions constituídos pelo quark s que são denominados *híperons*, acredita-se que tais híperons surjam também sob as altas densidades e energias das estrelas de nêutron, Ref. [89]. A ocorrência de espalhamentos e sucessivos decaimentos que produzem novas partículas pode levar à presença de todo o octeto bariônico. Muitos dos neutrinos produzidos durante essas reações escapam ajudando a manter a temperatura do sistema baixa.
4. **Inclusão de matéria Δ .** Também é interessante incluir futuramente a presença de matéria Δ , visto que há também a possibilidade de formação de condensados de Δ no meio denso da estrela de nêutrons Refs. [90, 91]. A presença de ressonâncias Δ na fase hadrônica pode modificar significativamente as condições críticas para a ocorrência da transição de fase, Ref. [92].

Referências Bibliográficas

- [1] Primeiro Diagrama H-R – site acessado em 11/05/2014. <http://spiff.rit.edu/classes/phys301/lectures/hr/hr.html>.
- [2] Diagrama H-R típico – site acessado em 11/05/2014. http://imagine.gsfc.nasa.gov/educators/lifecycles/Image31_med.gif.
- [3] Carvão com Estrutura em Formato de Cebola – site acessado em 11/05/2014. <http://eternosaprendizes.com/wp-content/uploads/2010/08/Camadas-nucleossintese-estrela-massiva.jpg>.
- [4] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-VCH, June 1986.
- [5] P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, editors. *Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure*, volume 326 of *Astrophysics and Space Science Library*, 2007.
- [6] D. G. Yakovlev. Electron transport through nuclear pasta in magnetized neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 453:581–590, October 2015.
- [7] N. Martin and M. Urban. Liquid-gas coexistence versus energy minimization with respect to the density profile in the inhomogeneous inner crust of neutron stars. *Phys. Rev. C*, 92(1):015803, July 2015.
- [8] L. G. Almeida, H. Rodrigues, D. Portes, and S. B. Duarte. Neutrino diffusion and mass ejection in protoneutron stars. *Phys. Rev. D*, 82:105011, Nov 2010.
- [9] L. G. Almeida, H. Rodrigues, D. Portes, and S. B. Duarte. Gravitational wave generated by mass ejection in protoneutron star neutrino burst. In M. Nielsen, F. S. Navarra, and M. E. Bracco, editors, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1296 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 374–377, November 2010.
- [10] L. G. Almeida, S. B. Duarte, H. Rodrigues, and D. Portes. Mass Ejection in Protoneutron Star Induced by Neutrino Emission. In C. A. Z. Vasconcellos, editor, *Astronomy*

- and Relativistic Astrophysics. New Phenomena and New States of Matter in the Universe*, pages 113–117, April 2010.
- [11] G. Shen, C. J. Horowitz, and S. Teige. Equation of state of nuclear matter in a virial expansion of nucleons and nuclei. *Phys. Rev. C*, 82(4):045802, October 2010.
- [12] G. Shen, C. J. Horowitz, and S. Teige. New equation of state for astrophysical simulations. *Phys. Rev. C*, 83(3):035802, March 2011.
- [13] G. Shen, C. J. Horowitz, and S. Teige. Equation of state of dense matter from a density dependent relativistic mean field model. *Phys. Rev. C*, 82(1):015806, July 2010.
- [14] G. A. Lalazissis, J. König, and P. Ring. New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, 55:540–543, January 1997.
- [15] E. Farhi and R. L. Jaffe. Strange matter. *Phys. Rev. D*, 30:2379–2390, December 1984.
- [16] J. Cleymans, R. V. Gavai, and E. Suhonen. Quarks and gluons at high temperatures and densities. *Physics Reports*, 130:217–292, January 1986.
- [17] S. Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover Publications, 1957.
- [18] E. Böhm-Vitense. *Introduction to stellar astrophysics. Volume 1 - Basic stellar observations and data*. Cambridge University Press, 1989.
- [19] E. Böhm-Vitense. *Introduction to stellar astrophysics. Volume 2 - Stellar atmospheres*. Cambridge University Press, 1989.
- [20] E. Böhm-Vitense. *Introduction to stellar astrophysics. Volume 3. Stellar structure and evolution*. Cambridge University Press, January 1992.
- [21] Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov. *Stars and relativity*. Dover Publications, 1999.
- [22] Norman K. Glendenning. *Compact Stars*, pages 443–456. Springer-Verlag, Berkeley, 2000.
- [23] D. Prialnik. *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press, July 2000.
- [24] P. Murdin, editor. *Wolf, Charles J E (1827-1918)*, page 4101. Nature Publishing Group, November 2000.

- [25] M. Inglis. *Observer's guide to stellar evolution - the birth, life and death of stars*. Springer-Verlag, January 2003.
- [26] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss. *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag, 2012.
- [27] I. Iben, Jr. *Stellar Evolution Physics, Volume 1: Physical Processes in Stellar Interiors*. Cambridge University Press, 2013.
- [28] I. Iben, Jr. *Stellar Evolution Physics, Volume 2: Advanced Evolution of Single Stars*. Cambridge University Press, 2013.
- [29] P. K. Kundu, I. M. Cohen, and D. R. Dowling. *Fluid Mechanics: Fourth Edition*. Academic Press, 2012.
- [30] J. W. York, Jr. Kinematics and dynamics of general relativity. In L. L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pages 83–126, 1979.
- [31] J. R. Wilson and G. J. Mathews. *Relativistic hydrodynamics.*, pages 306–314. Cambridge University Press, 1989.
- [32] J. A. Font. Numerical hydrodynamics in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 6(4), 2003.
- [33] H. Rodrigues, S.B. Duarte, T. Kodama, and V. d'Ávila. An effective lagrangian description of supernova-core bounce. *Astrophys. and Space Sci.*, 194(2):313–326, 1992.
- [34] C. L. Fryer and S. E. Woosley. Gamma-Ray Bursts from Neutron Star Phase Transitions. *Astrophys. J.*, 501:780–786, July 1998.
- [35] L. Mestel and L. Spitzer, Jr. Star formation in magnetic dust clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 116:503, 1956.
- [36] T. C. Mouschovias. A connection between the rate of rotation of interstellar clouds, magnetic fields, ambipolar diffusion, and the periods of binary stars. *Astrophys. J.*, 211:147–151, January 1977.
- [37] T. C. Mouschovias. Magnetic braking of self-gravitating, oblate interstellar clouds. *Astrophys. J.*, 228:159–162, February 1979.
- [38] F. Hoyle. On the Fragmentation of Gas Clouds Into Galaxies and Stars. *Astrophys. J.*, 118:513, November 1953.

- [39] M. S. Roberts. The galactic distribution of the Wolf-Rayet stars. *Astron. J.*, 67:79–85, February 1962.
- [40] H. A. Bethe. Energy Production in Stars. *Physical Review*, 55:434–456, March 1939.
- [41] D. Saumon, W. B. Hubbard, A. Burrows, T. Guillot, J. I. Lunine, and G. Chabrier. A Theory of Extrasolar Giant Planets. *Astrophys. J.*, 460:993, April 1996.
- [42] G. Chabrier and I. Baraffe. Structure and evolution of low-mass stars. *Astron. Astrophys.*, 327:1039–1053, November 1997.
- [43] A. J. Burgasser. Brown dwarfs: Failed stars, super Jupiters. *Physics Today*, 61(6):70, 2008.
- [44] C. Hayashi and R. Hoshi. The Outer Envelope of Giant Stars with Surface Convection Zone. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 13:442–449, 1961.
- [45] U. Das and B. Mukhopadhyay. Modified Einstein’s gravity as a possible missing link between sub- and super-Chandrasekhar type Ia supernovae. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 5:45, May 2015.
- [46] Z.-W. Liu, T. J. Moriya, R. J. Stancliffe, and B. Wang. Constraints on single-degenerate Chandrasekhar mass progenitors of Type Ia supernovae. *Astron. Astrophys.*, 574:A12, February 2015.
- [47] S. Chandrasekhar. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *Astrophys. J.*, 74:81, July 1931.
- [48] S. J. Smartt. Progenitors of Core-Collapse Supernovae. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 47:63–106, September 2009.
- [49] A. Gal-Yam, P. Mazzali, E. O. Ofek, P. E. Nugent, S. R. Kulkarni, M. M. Kasliwal, R. M. Quimby, A. V. Filippenko, S. B. Cenko, R. Chornock, R. Waldman, D. Kasen, M. Sullivan, E. C. Beshore, A. J. Drake, R. C. Thomas, J. S. Bloom, D. Poznanski, A. A. Miller, R. J. Foley, J. M. Silverman, I. Arcavi, R. S. Ellis, and J. Deng. Supernova 2007bi as a pair-instability explosion. *Nature*, 462:624–627, December 2009.
- [50] A. Kozyreva, S.-C. Yoon, and N. Langer. Explosion and nucleosynthesis of low-redshift pair-instability supernovae. *Astron. Astrophys.*, 566:A146, June 2014.
- [51] R. Minkowski. Spectra of Supernovae. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 53:224, August 1941.

- [52] C. Kettner, F. Weber, M. K. Weigel, and N. K. Glendenning. Structure and stability of strange and charm stars at finite temperatures. *Phys. Rev. D*, 51:1440–1457, February 1995.
- [53] C. Alcock, E. Farhi, and A. Olinto. Strange stars. *Astrophys. J.*, 310:261–272, November 1986.
- [54] E. Witten. Cosmic separation of phases. *Phys. Rev. D*, 30:272–285, July 1984.
- [55] A. Burrows and J. M. Lattimer. The birth of neutron stars. *Astrophys. J.*, 307:178–196, August 1986.
- [56] O. V. Maxwell. Neutrino emission processes in hyperon-populated neutron stars. *Astrophys. J.*, 316:691–707, May 1987.
- [57] K. Nomoto and S. Tsuruta. Cooling of neutron stars - Effects of the finite time scale of thermal conduction. *Astrophys. J.*, 312:711–726, January 1987.
- [58] M. Prakash, M. Prakash, J. M. Lattimer, and C. J. Pethick. Rapid cooling of neutron stars by hyperons and Delta isobars. *Astrophys. J.*, 390:L77–L80, May 1992.
- [59] D. Ivanenko and D. F. Kurdgelaidze. Remarks on quark stars. *Nuovo Cimento Lettere*, 2:13–16, 1969.
- [60] N. Itoh. Hydrostatic Equilibrium of Hypothetical Quark Stars. *Progress of Theoretical Physics*, 44:291–292, July 1970.
- [61] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Phys. Rev. D*, 9:3471–3495, June 1974.
- [62] S. Epsztein Grynberg, M. C. Nemes, H. Rodrigues, M. Chiapparini, S. B. Duarte, A. H. Blin, and B. Hiller. Neutrino trapping and hybrid protoneutron star formation. *Phys. Rev. D*, 62:123003, Nov 2000.
- [63] R.L. Burden, J.D. Faires, and A.C. Reynolds. *Numerical analysis*. Prindle, Weber & Schmidt, 1984.
- [64] J. Wisniak. Heike Kamerlingh – The Virial Equation of State. *Indian Journal of Chemical Technology*, 10:564–572, September 2003.
- [65] Johannes D. van der Waals. *Over de continuïteit van de gas- en vloeistofoestand*. PhD thesis, Hoogeschool te Leiden, June 1873.

- [66] H. Kamerlingh Onnes. Expression of the equation of state of gases and liquids by means of series. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 4:125–147, 1901.
- [67] C. J. Horowitz and A. Schwenk. Cluster formation and the virial equation of state of low-density nuclear matter. *Nuc. Phys. A*, 776:55–79, September 2006.
- [68] P. Möller, J. R. Nix, W. D. Myers, and W. J. Swiatecki. Nuclear Ground-State Masses and Deformations. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 59:185, 1995.
- [69] W. A. Fowler, S. E. Woosley, and C. A. Engelbrecht. Nuclear partition functions. *Astrophys. J.*, 226:984–995, December 1978.
- [70] G. Baym, H. A. Bethe, and C. J. Pethick. Neutron star matter. *Nuc. Phys. A*, 175:225–271, November 1971.
- [71] C. J. Horowitz and A. Schwenk. The virial equation of state of low-density neutron matter. *Phys. Lett. B*, 638:153–159, July 2006.
- [72] J. Carlson, S.-Y. Chang, V. Pandharipande, and K. Schmidt. Superfluid Fermi Gases with Large Scattering Length. *Phys. Rev. Lett.*, 91(5):050401, July 2003.
- [73] C. J. Horowitz and G. Shen. Shell states of neutron-rich matter. *Phys. Rev. C*, 78(1):015801, July 2008.
- [74] B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. H. Press, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1989.
- [75] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8:214–215, February 1964.
- [76] G Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Technical Report CERN-TH-412, CERN, Geneva, 1964.
- [77] O. W. Greenberg. Spin and Unitary-Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons. *Physical Review Letters*, 13:598–602, November 1964.
- [78] M. Y. Han and Y. Nambu. Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry. *Physical Review*, 139:1006–1010, August 1965.
- [79] J. Greensite. The confinement problem in lattice gauge theory. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 51:1–83, 2003.

- [80] E. S. Swanson. Aspects of Confinement: a Brief Review. In E. Klempt, H. Koch, and H. Orth, editors, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 717 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 636–645, August 2004.
- [81] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, and R. Smoluchowski. Solid State Physics. *Physics Today, Apendice C*, 30:61, 1977.
- [82] G. Lugones, O. G. Benvenuto, and H. Vucetich. Combustion of nuclear matter into strange matter. *Phys. Rev. D*, 50:6100–6109, November 1994.
- [83] A. V. Olinto. On the conversion of neutron stars into strange stars. *Physics Letters B*, 192:71–75, June 1987.
- [84] J. E. Horvath and O. G. Benvenuto. On the stability of slow neutron combustion in astrophysical objects. *Physics Letters B*, 213:516–520, November 1988.
- [85] G. F. Burgio, M. Baldo, P. K. Sahu, A. B. Santra, and H.-J. Schulze. Maximum mass of neutron stars with a quark core. *Physics Letters B*, 526:19–26, January 2002.
- [86] G. F. Burgio, M. Baldo, P. K. Sahu, and H.-J. Schulze. Hadron-quark phase transition in dense matter and neutron stars. *Phys. Rev. C*, 66(2):025802, August 2002.
- [87] G. H. Bordbar, H. Bahri, and F. Kayanikhoo. Calculation of the structural properties of a strange quark star in the presence of a strong magnetic field using a density dependent bag constant. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 12:1280–1290, September 2012.
- [88] G. F. Burgio, H. Chen, H.-J. Schulze, and G. Taranto. Constraints on the quark matter equation of state from astrophysical observations. *ArXiv e-prints*, January 2013.
- [89] H. J. Schulze. Neutron star structure with hyperons and quarks. *Journal of Physics: Conference Series*, 336(1):012022, 2011.
- [90] J. C. T. DE OLIVEIRA, M. KYOTOKU, M. CHIAPPARINI, H. RODRIGUES, and S. B. DUARTE. Delta matter formation in dense asymmetric nuclear medium. *Modern Physics Letters A*, 15(24):1529–1537, 2000.
- [91] J. C. T. OLIVEIRA, A. G. SOUZA, S. B. DUARTE, and H. RODRIGUES. Proto-neutron star formation with delta-resonance matter and trapped neutrinos. *International Journal of Modern Physics D*, 19(08n10):1541–1544, 2010.
- [92] A. G. Sousa, M. Orsaria, S. B. Duarte, H. Rodrigues, and M. Chiapparini. Color Superconducting Phase in Hybrid Neutron Star with Delta-Matter. *International Journal of Modern Physics E*, 16:2859–2862, 2007.