

CBPF

**Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas**

Tese de Doutorado

**Efeitos de Spin e Polarização na Interação entre
Fontes e Correntes de Bósons Vetoriais Carregados**

Kim Pedro Bitencourt Veiga

Rio de Janeiro 2016

Agradecimentos

Agradeço a Deus, ao Professor Helayël, à minha esposa Maria Helena e aos meus pais e irmãos. Agradeço aos amigos do CBPF Leo Ospedal e Pedro Malta. Agradeço ao Chauca pelo trabalho excepcional à frente do Projeto Vídeo-Aulas, do qual me beneficiei muito.

Agradeço a minha avó, Mainha, por ser esta mulher excepcional! Agradeço aos meus tios Lauro, Mauro, Jorge e Altamirando.

Aos amigos Marquinhos Sales e Vinícius Nonato.

Aos amigos do IFBA Mônica, Jime, Rafael Rocha, Everard Lucas, todos os Allan, Eduardo, Edson, Fernando, Camilo, Gislan, Rose, Sinval, Walmir, Fred, todos os Marcos, Daniani, Ana Karine, Murilo, Selma, Jorge, Eliana, Alexandro, Alexandre Rogerio, Adriana, Anely, Max, Laura, Nelma, Naiara.

Ao Márcio do Rio.

Aos colegas que tomaram a frente da APG-JLL, tarefa importante e necessária.

Ao Marcelo e sua família.

Aos meus sogros, cunhados e cunhados e toda a família de Riachão do Jacuípe.

Aos amigos do CBPF Linneu, Guilherme (Vinte), Léo, Érico, Alan Maicá, Bruno Silva, Enrique, Max, Lucas Cardoso, Bruno Dias, Marcelo, Aline Ramires, Carlos Hernaski, César, Edson, Fernanda, Isabel, Jefferson, Lucho, Justiniano, Vanji, Fonseca, Nardi, William Trujillo, Carol, Edward, Elvis, Fabrício, Maurício, Gabriel Santiago Lima, Jeovani, Santiago, Marcos (Paraibano), Marília, Naiara, Roberta, Turco e Ury. Um agradecimento especial para a Martinha e para o Juan Guillermo.

Ao meu grande amigo Vitor Damião e sua noiva Maria Isabel.

Aos amigos da UFBA Jamile, Victor Mancir, Joilton, Carlinha, Elderlei, Jemima, Welber, Jessica Guerreiro, Tiago Gudi, Paulo Roberto, Paulo Moreno, Wallas, Mariana Lima Limão, Vanessa, Luquinhas, Euler, Sarão, Tiago Antonio (PAF), Ítalo, Heber, Érico, Paulo Vinicius, Tárccio, Lilian, Floquet, Maroivo, Letícia (de Química).

Ao meu amigo Danilo e sua esposa Vanessa.

Ao professor Sebastião do CBPF; e aos professores Ricardo Miranda, Arthur Matos, Roberto Andrade e Roberto Rivelino da UFBA.

Ao meu amigo Ricardo Marinho (Tico), seu irmão Chocolate e toda sua família.

À minha amiga Camila do Rio que me acolheu no estado.

Ao meu brother Samuel.

E a todos que eu esqueci de mencionar e que me ajudaram de alguma forma, desculpa e muito obrigado!

Resumo

Discutimos aqui novas interações macroscópicas no contexto de algumas propostas de Física Além do Modelo Padrão, o que torna necessária a procura por sinais destas novas forças, e justifica a busca de limites para restringir parâmetros destas teorias e modelos estendidos. Estudamos novos potenciais entre fontes ou correntes associadas a partículas de spin-1, gerados pela troca de bósons escalares e vetoriais, massivos ou de massa nula. Comparamos nossos resultados com os potenciais associados a fontes e correntes de matéria com spin-1/2, e consideramos correções até a ordem $\frac{v^2}{c^2}$. Encontramos diferenças marcantes entre os dois tipos de potenciais, principalmente nos termos em que há dependência no spin. Os potenciais fermiônicos apresentam uma riqueza maior nas interações de spin, enquanto a interação entre bósons vetoriais carregados é caracterizada por peculiaridades envolvendo o spin e a polarização e é capaz de revelar até mesmo a particular representação relativística que se adota para descrever partículas massivas (neutras ou carregadas) de spin-1 (neste trabalho, apresentamos duas representações distintas de $SO(1,3)$). Concluimos com a discussão de algumas propriedades intrínsecas à eletrodinâmica de portadores vetoriais carregados, questão que não permite que a Eletrodinâmica (Clássica ou Quântica) seja tratada fora do setor eletrofraco do Modelo Padrão.

Abstract

New macroscopic interactions appear in the context of different theoretical proposals for Physics beyond the Standard Model, so that it is mandatory to search for signals of these new forces to constrain the parameters of these extended theories and models. We pursue the investigation of new potentials that describe the interactions between sources and currents associated to spin-1 particles. These potentials are generated via the exchange of scalar and vector bosons, massive and massless. We compare our results with the corresponding ones for sources and currents of fermionic spin-1/2 matter; we include effects up to the order $\frac{v^2}{c^2}$. We have found remarkable differences between the two categories of potentials, especially in the spin dependence displayed by the interaction potentials. The fermionic potentials exhibit a richer diversity of spin interactions; on the other hand, the interactions of the charged vector bosons are characterized by particular relations between spin and polarization. In addition, we highlight that the specific relativistic representation one adopts to describe massive spin-1 particles (we consider two different representations of $SO(1,3)$) can be revealed by the potentials themselves. We conclude by pointing out particularities of the electrodynamics of spin-1 charge carriers, which indicates that the (Classical and Quantum) Electrodynamics of spin-1 particles cannot be disconnected from the electroweak sector of the Standard Model.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
1 A Eletrodinâmica do Spin-1	8
1.1 Spin-1 e o Campo Vetorial	9
1.2 O Fator Giromagnético $g = 2$ e a Invariância de Calibre	12
1.3 Renormalização e Unitariedade	13
1.4 Spin-1 e o Campo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond	16
1.5 Resumo do Capítulo	19
2 O Modelo de Campos Mixados	20
2.1 O Modelo Livre	21
2.2 Invariância por Transformações de Calibre	23
2.3 Graus de Liberdade	24
2.4 Propagadores	27
2.5 Acoplamento com o Campo Eletromagnético	31
2.6 Conclusões do Capítulo	34
3 As Correntes	35
3.1 Correntes de Spin-1/2	36
3.2 Correntes de Spin-1	41
3.3 Considerações Finais do Capítulo	46

4	Potenciais de Interação Interpartícula	48
4.1	Fontes de Spin-1/2	49
4.2	Fontes de Spin-1	56
4.3	Discussão	59
4.4	O Caso Eletromagnético	62
4.5	Conclusões do Capítulo	66
5	Considerações Finais e Perspectivas	70
	Referências Bibliográficas	73

Introdução

Além das duas interações de longo alcance que são conhecidas na Natureza, a eletromagnética e a gravitacional, outras forças, ainda hipotéticas, que teriam fraco acoplamento com a matéria do Modelo Padrão, despertam interesse na comunidade científica. Suas partículas mediadoras fazem parte de teorias que descrevem alguma Física Além do Modelo Padrão (BSM), tais como áxions [1, 2], *paraphotons* [3] e *unparticles* [4]. Em particular, forças que envolvem dependência no spin despertam bastante interesse: são as chamadas interações monopolo-dipolo e dipolo-dipolo, já que as interações monopolo-monopolo, aquelas que envolvem apenas cargas, não trazem muita novidade para a física das interações fundamentais. Os áxions são partículas de spin-0 e massa muito pequena, que, em algumas teorias e modelos, aparecem como candidatos a uma fração da matéria escura. Desde a década de 1980 [5] até a década atual [6], esta discussão permanece viva. Estas novas partículas mediadoras seriam bósons escalares ou de spin-1, e a nova força mediada, apesar de bastante fraca, teria alcance macroscópico, sempre que os mediadores tiverem massa muito pequena. Em [7], podemos encontrar uma lista de dezesseis potenciais que ilustram a troca dessas partículas. Os três potenciais mais estudados na literatura são aqueles que não dependem da velocidade, e sim exclusivamente dos spins.

Basicamente, existem dois tipos de experimentos que procuram detectar estas novas interações. Há aqueles que tratam os corpos interagentes (logo, as partículas) separados por distâncias de μm até km , e há os experimentos que procuram por novas interações entre partículas a distâncias na escala atômica ou sub-atômica. Os primeiros procuram forças de longo alcance (*long-range forces*), os outros forças de curto alcance (*short-range forces*). Claro que, quanto maior o alcance do campo de interação, menor tem que ser a massa da partícula trocada. Isto pode ser visto pelo fator $e^{-m_0 r}$ que surge em todos os potenciais estudados por esses experimentos e por nós nesta tese, onde r é a distância entre as fontes, e m_0 a massa do bóson intermediário. Mesmo que estas novas partículas não tenham ainda sido confirmadas, os avanços na área teórica e nos experimentos são muito importantes, pois impõem limites aos potenciais e acabam restringindo ou descartando

teorias e modelos na categoria BSM. Além, é claro, de existir a possibilidade de descoberta de uma nova interação macroscópica que poderia alterar muitos aspectos no panorama da Física atual.

Limites experimentais são importantes para se impor restrições sobre estes potenciais; neste sentido, destacamos o trabalho de Adelberger *et al.* [8], que fixa limites para os três potenciais estáticos, onde considera interações de longo alcance, ou seja, considera as massas dos bósons intermediários como sendo muito pequenas. Destacamos também o comentado trabalho de Hunter *et al.* [9], publicado na revista *Science*, que usa a distribuição de elétrons da Terra como uma das fontes de spin, sendo a outra fonte elétrons e nucleons de três diferentes laboratórios. Potenciais estáticos foram também estudados em cenários de forças de curto alcance, por exemplo, em uma molécula de hidrogênio pesado, onde um dos átomos é um deutério [10]. É muito interessante considerar a interação de partículas neutras com spin, já que escapamos das interações eletromagnéticas que provêm da carga e podemos, assim, concentrar as atenções em novas possíveis forças. O primeiro experimento em que as partículas interagentes eram nêutrons, e que impôs limite superior sobre a constante de acoplamento entre estas partículas e um bóson axial de spin-1 é relatado em [11]. Outros trabalhos experimentais podem ser encontrados em [12, 13]. Em experimentos mais recentes, de 2014, todos os seis potenciais dependentes da velocidade que apresentam interação spin-spin foram vinculados a limites superiores [14] sobre os parâmetros envolvidos.

Além do intenso estudo com sistemas que geram interação dipolo-dipolo, os trabalhos experimentais também se preocuparam em analisar sistemas que geram interação monopolo-dipolo [15–18]. Apesar do foco em alguns potenciais, o trabalho [19] explora todos os quinze potenciais dependentes do spin dados por [7] (um dos dezesseis potenciais é do tipo monopolo-monopolo). A busca por estas partículas de fraco acoplamento continua até os dias atuais e, apesar de não confirmadas, são impostos limites cada vez mais restritivos sobre os acoplamentos, e os resultados mais recentes podem ser encontrados em [20–22]. Cabe também mencionar as recentes investidas na procura por matéria escura associada ao áxion, que podem ser encontradas em [23, 24]. Há uma linha de trabalhos teóricos que não seguem a direção dessa procura por limites e vínculos; por exemplo, [25]

está interessado em comparar o perfil dos potenciais induzidos pela intermediação de diferentes campos (na verdade, diferentes representações irredutíveis do Grupo de Lorentz) que podem representar *on-shell* partículas massivas de spin-1. A questão, neste caso, é também investigar, através do perfil dos diferentes potenciais, se podemos fixar a representação que mais se adequa para descrever partículas com um dado spin. Este ponto torna-se não trivial para o spin-1 e spins mais altos. A estrutura tensorial do campo está ligada aos graus de liberdade *on-* e *off-shell*, além de eventuais simetrias intrínsecas, e estes elementos interferem nos acoplamentos spin-spin e spin-órbita que as interações entre fontes/correntes vêm a exibir.

Após contextualizar as questões acima e apresentar o panorama geral do estágio em que se encontram as frentes de pesquisa e as buscas por novas forças efetivas residuais de alguma Física além do Modelo Padrão, passamos a apresentar os desenvolvimentos próprios desta tese, ressaltando que introduções parciais mais específicas são fornecidas no início de cada capítulo deste trabalho. Os dois primeiros capítulos constituem um preâmbulo ao foco principal do trabalho, que é o estudo de potenciais macroscópicos. Neles, dedicamo-nos a discutir em detalhes aspectos inerentes à escolha da representação para descrever partículas massivas e carregadas de natureza vetorial. Diferentes descrições para o mesmo tipo de partícula são contempladas e são colocados em evidência aspectos que dizem respeito à estrutura *on-* e *off-shell*, bem como as simetrias associadas, de forma a deixar claro até que ponto diferentes representações do mesmo tipo de partícula são fisicamente equivalentes.

Um ponto importante é que propagação não causal [26,27], autovalores complexos de energia [28–34] e alteração no número de graus de liberdade [27,35] são dificuldades enfrentadas pelo formalismo lagrangeano quando se tenta descrever a dinâmica de partículas carregadas de spins mais altos ($s \geq 1$). Problemas relacionados à não causalidade para uma partícula de spin-1 massiva e carregada fazem-se sentir quando acoplamos o campo que a descreve com campos tensoriais simétricos externos. Ao adicionar o termo $\lambda W_\mu^\dagger W_\nu T^{\mu\nu}$ ao lagrangeano de Proca, [27] mostra-se que a propagação torna-se não-causal. O problema de autovalores complexos de energia para a partícula de spin-1 massiva e carregada surge quando se tenta descrevê-la se sujeita a um campo magnético externo homogêneo sufici-

entamente forte [31]. Esta inconsistência pode ser evitada. Os autores de [36] mostram que, mesmo quando a partícula é submetida a um campo magnético externo homogêneo de qualquer intensidade, é possível obter todos os autovalores reais e ainda se ter uma propagação causal, porém, em contrapartida, a razão giromagnética, g , deve ser igual a um. Isto significaria usar somente o acoplamento mínimo com o campo eletromagnético. Foi mostrado, em 1940, por Corben e Schwinger [37] que, com esta interação apenas, um conjunto completo de funções de onda com comportamento aceitável não existe para o méson de spin-1 em presença de campo Coulombiano. Entretanto, para partículas elementares massivas e carregadas de spin $\geq 1/2$, foi mostrado teoricamente [38, 39], com base em teorias mais fundamentais, que as mesmas apresentam $g = 2$. Experimentalmente, foi confirmado para o caso dos bósons W^\pm [40] que carregam spin-1. A questão de uma formulação lagrangeana para a interação de campos com spin ≥ 1 é debatida em vários trabalhos recentes e apontam para possibilidades de construções lagrangeanas consistentes, sempre considerando o acoplamento do campo de alto spin com algum campo externo, que pode ser o próprio campo eletromagnético [41, 42], ou algum genérico *background* [43, 44]. A preocupação com a unitariedade e renormalizabilidade para partículas de spin-1 pode ser vista também em outros contextos, como por exemplo no de *milli-charged particles* [45], que são partículas com carga elétrica igual a ϵe , onde $\epsilon \ll 1$ e e é a carga do pósitron.

O primeiro capítulo desta tese aborda a discussão, para partículas massivas carregadas de spin-1, das inconsistências na renormalizabilidade e unitariedade que aparecem nos propagadores dos modelos do tipo Proca. Este capítulo 1 não contém resultados originais, mas é necessário para a construção do capítulo seguinte. Este, o capítulo 2, propõe-se a discutir um modelo de bóson vetorial massivo no qual a massa é gerada por um termo de *mixing*, que, diferentemente do termo de Proca, não viola a simetria de calibre. Podemos resumir os resultados originais deste capítulo nas seguintes palavras:

Formulamos dois diferentes modelos onde introduzimos um tensor de rank-2 anti-simétrico, em associação com um campo vetorial, para descrever partículas de spin-1 massivas e carregadas em interação com fótons; nestes modelos, apresentamos propaga-

dores sem a inconsistência ultravioleta inerente à formulação de Proca. ¹

Nos capítulos 3 e 4, passamos ao estudo das correntes (que são as fontes de matéria) e dos potenciais gerados por elas. Os resultados referentes a ambos capítulos estão publicados em [46]. Até este momento, toda literatura teórica ou experimental que trata de novas interações macroscópicas considera somente fontes de spin-1/2. Nesta tese, vamos desenvolver potenciais também para fontes (matéria) de spin-1, e comparar seus perfis com os potenciais fermiônicos conhecidos. Nosso objetivo não é fixar parâmetros ou procurar vínculos sobre os mesmos, estamos interessados, sim, em explicitar o comportamento dos potenciais interpartícula para matéria de diferentes spins, focando nas dependências que existem nas velocidades e, principalmente, nos próprios spins e na polarização. Embora o interesse seja comparar o perfil de potenciais gerados por diferentes fontes, vamos trabalhar sempre com a mesma partícula intermediária, representada pelo modelo cujo lagrangeano invariante de calibre tem sua massa dada por um *mixing* de um campo vetorial com outro de rank-2, chamado de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR) [47,48]. Os propagadores associados já foram devidamente encontrados no capítulo 2. Adotamos este modelo porque seus propagadores não apresentam o problema ultravioleta daqueles advindos de lagrangeanos do tipo Proca. A contribuição do capítulo 3 está em:

Apresentar correntes e, mais genericamente, fontes associadas a matéria de spin-1, ainda não consideradas na literatura para efeito de cálculos de potenciais interpartícula, e compará-las com os correspondentes resultados para matéria de spin-1/2, ressaltando suas semelhanças e apontando e discutindo as diferenças [46].

No capítulo 4, utilizamos os resultados obtidos nos dois capítulos anteriores para

¹Apesar destes resultados terem característica de originalidade, consideramo-los ainda preliminares e estamos compreendendo aspectos de fundamentação que devem ser devidamente esclarecidos, sobretudo no setor de acoplamentos não-mínimos e em conexão com a unificação eletrofraca. Em prosseguimento, desejamos ampliar os resultados desta proposta para a inclusão de portadores elétricos com spin-2; por estas razões, os resultados deste capítulo 2 precisam ser investigados de forma mais completa para poderem originar um trabalho a ser submetido para publicação. Entretanto, em sua presente forma, já são suficientes para a realização dos estudos que serão reportados nos capítulos posteriores, e que constituem o objetivo central desta tese.

calcular os potenciais macroscópicos, onde comparamos aqueles gerados por fontes de spin-1/2, com os originalmente obtidos nesta tese, gerados por fontes de spin-1. Apontar as semelhanças e compreender as diferenças pode ser um caminho viável para auxiliar, por exemplo, em um trabalho experimental que se dedique a determinar o spin das fontes (em processo de identificação) interagentes. Além disto, na seção 4.4, fizemos um estudo particular das Equações de Maxwell, considerando a matéria carregada composta por partículas de spin-1. Neste caso, percebemos que a corrente conservada de Noether recebe contribuições muito peculiares, o que tem consequências especiais sobre os potenciais e campos eletromagnéticos. Neste capítulo 4, descrevemos a nossa contribuição como segue abaixo:

Recalculamos potenciais gerados por correntes de matéria com spin-1/2 e derivamos os correspondentes gerados por correntes de partículas com spin-1, ressaltando suas semelhanças e analisando suas diferenças. Consideramos sempre efeitos até segunda ordem em v/c por entender que os principais aspectos que os diferenciam podem se encontrar apenas a partir desta ordem. Como aplicação, exploramos o caso eletromagnético, considerando a matéria formada por partículas carregadas de spin-1. Ressaltamos as particularidades dos termos de spin e polarização e chamamos atenção para a influência da escolha de representação na forma do potencial. Finalmente, consideramos o conjunto de Equações de Maxwell no caso em que a densidade e a corrente sejam originadas de cargas com spin-1. O acoplamento da densidade de partículas carregadas e da polarização da matéria vetorial com o campo eletromagnético induz singularidades nas equações de Maxwell que podem sinalizar para uma interessante relação entre carga, spin e extensibilidade de partículas elementares bosônicas [46].

Em todos os capítulos e seções desta tese, utilizamos o formalismo lagrangeano para descrever partículas vetoriais. Existe, no entanto, uma outra forma bem estabelecida para se descrever partículas de spin-1, que é a teoria Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). De fato, esta é uma teoria relativística baseada em uma equação de onda de primeira ordem, que descreve partículas de spin-1 e spin-0 [49–51]. Nesta tese não fazemos nenhuma abordagem com a teoria DKP, mas ela é uma importante alternativa para se trabalhar com os potenciais obtidos no capítulo 4, já que existe um contexto não relativístico para

o uso da teoria DKP, que é a sua versão galileana [52–55], ou também chamada de DKP não relativística (DKPNR) [56]. No quinto capítulo vamos sugerir uma linha de trabalho para ser seguida no contexto não relativístico da teoria DKP.

Após esta apresentação geral do material desenvolvido ao longo deste trabalho de doutoramento, mencionamos que cada capítulo foi elaborado de forma que tenha sua própria introdução e uma conclusão parcial. As considerações finais e as perspectivas abertas por esta tese estão contidas no último capítulo, onde fazemos uma análise crítica do nosso trabalho. As limitações do mesmo são assinaladas no decorrer desta auto-análise e são propostas como ponto de partida para estudos consecutivos.

Capítulo 1

A Eletrodinâmica do Spin-1

Uma descrição efetiva da interação eletromagnética de partículas de spin-1 massivas e carregadas sempre foi um problema não-trivial, pois os modelos que geram a massa através do termo do tipo Proca são não renormalizáveis e a solução proposta dentro deste modelo gera excitações que não respeitam unitariedade. Vamos abordar esta situação na terceira seção deste capítulo. A teoria eletrofraca de Salam-Glashow-Weinberg [57] resolve esses problemas quando propõe que a interação fraca e a eletromagnética sejam oriundas de um mesmo setor de calibre da física de partículas, em um contexto não abeliano. No entanto, uma descrição efetiva, abeliana, da partícula de spin-1 massiva e carregada interagindo com o campo eletromagnético (não considerando o setor fraco) que supere os problemas de inconsistência continua em aberto. A ideia é que, por exemplo, W^μ seja um campo de matéria e não um campo de calibre, como é feito com o caso espinorial e escalar.

Na próxima seção, vamos descrever uma partícula massiva e carregada de spin-1 submetida a um campo magnetostático externo, através de um campo vetorial cuja massa é dada por um termo do tipo Proca. Na seção 1.2, abordamos a importância do fator giro-magnético e da simetria de calibre como guias no desenvolvimento de uma teoria/modelo. Na seção 1.3, voltamos ao problema da não renormalização e quebra de unitariedade dos modelos massivos de spin-1. E, na seção 1.4, desenvolvemos um modelo alternativo que descreve a partícula de spin-1 massiva e carregada através de um campo de rank-2 anti-simétrico e que também exhibe inconsistências por gerar massa à partícula do mesmo modo que aquele visto na seção 1.1, através de um termo do tipo Proca. Por fim, dedicamos a

última seção para resumir os resultados revisados.

1.1 Spin-1 e o Campo Vetorial

Partimos do lagrangeano abaixo, no qual consideramos apenas o setor de matéria (campos W e W^*) e seus acoplamentos com o campo eletromagnético. É importante considerar o acoplamento não mínimo que aparece como o terceiro termo do lagrangeano abaixo, visto que é ele que corrige a razão giromagnética do bóson vetorial carregado. Abaixo propomos um modelo efetivo, no qual o acoplamento não mínimo advém da teoria eletrofraca. Observamos que o referido acoplamento é não mínimo do ponto de vista Abelian, mas mínimo sob a ótica de Yang-Mills.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^*W^{\mu\nu} + m^2W_\mu^*W^\mu + ieF_{\mu\nu}W^{\mu*}W^\nu. \quad (1.1)$$

Ao fazermos a variação em função do campo W_μ^* , chegamos a seguinte equação de campo,

$$D_\mu W^{\mu\nu} + m^2W^\nu - ieF^{\mu\nu}W_\mu = 0, \quad (1.2)$$

sendo

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (1.3)$$

$$W^{\mu\nu} = D^\mu W^\nu - D^\nu W^\mu. \quad (1.4)$$

A intenção nesta seção é obter uma equação não relativística, a partir da equação de campo (1.2), que descreva corretamente a partícula de spin-1, com o correto fator giromagnético. Derivamos com D_ν para ganhar a condição subsidiária

$$D_\nu D_\mu W^{\mu\nu} + D_\nu m^2W^\nu - ieD_\nu F^{\mu\nu}W_\mu = 0. \quad (1.5)$$

Desenvolvendo $(\partial_\mu F^{\mu\nu})W_\nu$, temos

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu})W_\nu = \partial_i(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)W_0 + \partial_0(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)W_i + \partial_j(\partial^j A^i - \partial^i A^j)W_i, \quad (1.6)$$

identificando o campo elétrico $\partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \vec{E}$ e o campo magnético $\partial^j A^i - \partial^i A^j = B^k$, temos $(\partial_\mu F^{\mu\nu})W_\nu = 0$, já que estamos em uma situação magnetostática. Como $W^{\mu\nu}$ e

$F^{\mu\nu}$ são campos anti-simétricos, temos

$$\underbrace{\frac{1}{2}[D_\nu, D_\mu] W^{\mu\nu}}_{\frac{1}{2}ieF_{\nu\mu}} + m^2 D_\nu W^\nu - ieF^{\mu\nu} \underbrace{\frac{1}{2}(D_\nu W_\mu - D_\mu W_\nu)}_{\frac{1}{2}W^{\nu\mu}} = 0 \quad (1.7)$$

e logo,

$$D_\nu W^\nu = 0. \quad (1.8)$$

Trabalhando a condição subsidiária na forma (1.8), que é uma equação que relaciona a componente temporal com as componentes espaciais do campo vetorial, ganhamos,

$$\begin{aligned} D_0 W^0 + D_i W^i &= 0 \\ \partial_0 W^0 + \partial_i W^i + ieA_i W^i &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde fizemos o potencial escalar A_0 igual a zero, visto que a situação estudada é magnetostática e a componente temporal de A_μ só contribui para o campo elétrico. Aplicando uma transformada de Fourier nas componentes do campo vetorial, temos

$$\begin{aligned} -iEW^0 + ip^i W^i - ieA^i W^i &= 0 \\ W^0 &= \frac{p^i W^i}{m} - \frac{eA^i W^i}{m}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Neste ponto, ressaltamos que, para evitar carregar a notação, não vamos usar outro símbolo para distinguir o espaço dos *momenta* do espaço das configurações, mas sempre apontaremos quando fizermos uma transformada de Fourier. Observamos que a nossa transformada de Fourier é definida como segue abaixo:

$$W^\mu(x) = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} W^\mu(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (1.11)$$

Voltando para a equação de campo (1.2) temos,

$$\begin{aligned} &\square W^\nu + ieA^\mu \partial_\mu W^\nu + ieA_\mu \partial^\mu W^\nu - e^2 A_\mu A^\mu W^\nu - \partial_\mu \partial^\nu W^\mu \\ &- ieW^\mu \partial_\mu A^\nu - ieA^\nu \partial_\mu W^\mu - ieA_\mu \partial^\nu W^\mu + e^2 A_\mu A^\nu W^\mu \\ &+ m^2 W^\nu - ieW_\mu \partial^\mu A^\nu - ieW_\mu \partial^\nu A^\mu = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde já consideramos o *gauge fixing*, $\partial_\mu A^\mu = 0$, ou seja, como $A^0 = 0$ então $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Vamos desenvolver a equação anterior tomando $\nu = i$, lembrando que, como o campo magnético é estático, temos $\partial^0 A^i = 0$, assim,

$$\begin{aligned}
& \partial_0 \partial^0 W^i + \partial_j \partial^j W^i + 2ieA^j \partial_j W^i \\
& - e^2 A_j A^j W^i - \partial_0 \partial^i W^0 - \partial_j \partial^i W^j - 2ieW^j \partial_j A^i \\
& - ieA^i \partial_0 W^0 - ieA^i \partial_j W^j - ieA_j \partial^i W^j + e^2 A_j A^i W^j \\
& + m^2 W^i - ieW_j \partial^i A^j = 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Fazendo a transformada de Fourier de (1.13)

$$\begin{aligned}
& E^2 W^i + \vec{p}^2 W^i - 2eA^j p^j W^i \\
& + e^2 \vec{A}^2 W^i + Ep^i W^0 - p^j p^i W^j + 2eW^j p^j A^i \\
& - eA^i EW^0 + eA^i p^j W^j + eA^j p^i W^j + e^2 A^j A^i W^j \\
& + m^2 W^i - eW^j p^i A^j = 0.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Substituindo a condição subsidiária, (1.10), na equação acima ganhamos,

$$\begin{aligned}
& E^2 W^i + \vec{p}^2 W^i - 2eA^j p^j W^i \\
& + e^2 \vec{A}^2 W^i - e\vec{A} \cdot \vec{W} p^i + 2eW^j p^j A^i \\
& + m^2 W^i - 2eW^j p^i A^j = 0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Para o limite não relativístico obtemos,

$$E_{\text{nr}} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} W^i + \frac{e}{m} (p^j A^i - p^i A^j) W^j, \tag{1.16}$$

e logo,

$$E_{\text{nr}} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} W^i + \frac{ie}{m} (\vec{S})_{ij} \cdot \vec{B} W^j, \tag{1.17}$$

pois $(\vec{S}_n)_{ij} = i\epsilon_{ijn}$, assim $i(\vec{S})_{ij} \cdot \vec{B} = -\epsilon_{ijn} \vec{B}_n = -F^{ij} = F^{ji}$. A equação do tipo Pauli acima nos dá um fator giromagnético $g = 2$ para esse bóson de spin-1 massivo e carregado que estamos descrevendo. É bem aceito na comunidade científica que o fator giromagnético de partículas elementares massivas e carregadas com qualquer spin é igual

a 2, a nível de árvore [38, 39]. Logo, esse resultado representa um sucesso do modelo (1.1). O último termo deste lagrangeano acopla não minimamente o campo vetorial ao eletromagnetismo e é o responsável por alterar o fator g . Se considerássemos apenas o acoplamento mínimo, embutido nas derivadas covariantes, o fator g seria igual a 1. Apesar do bom resultado encontrado, na seção 1.3 veremos que (1.1) carrega problemas de consistência.

1.2 O Fator Giromagnético $g = 2$ e a Invariância de Calibre

O fator giromagnético de uma partícula elementar carregada com qualquer spin é igual a 2, a nível de árvore. Esse resultado foi primeiramente deduzido por Weinberg em 1970 como condição para que as amplitudes de espalhamento exibissem bom comportamento em altas energias [38]. Essa condição foi estudada no formalismo lagrangeano e o mesmo resultado foi obtido [39].

No final da década de 1990, Jackiw mostrou outro motivo para reforçar o valor do fator giromagnético como sendo 2 [58]. Ele mostrou que o lagrangeano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W^{*\mu\nu}W_{\mu\nu} + ie(g-1)F^{\mu\nu}W_{\mu}^*W_{\nu}, \quad (1.18)$$

na ausência de fontes eletromagnéticas ($\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$), é invariante por uma transformação não eletromagnética de calibre, $W_{\mu}^* \rightarrow W_{\mu}^* + D_{\mu}^*\xi$, somente se $g = 2$. Variando (1.18) através de δW_{μ}^* temos,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(D^{*\mu}\delta W^{*\nu} - D^{*\nu}\delta W^{*\mu})W_{\mu\nu} + ie(g-1)F^{\mu\nu}\delta W_{\mu}^*W_{\nu} \\ &= -\frac{1}{2}(-ie(\partial^{\mu}A^{\nu})\xi + ie(\partial^{\nu}A^{\mu})\xi)W_{\mu\nu} + ie(g-1)F^{\mu\nu}(W_{\nu}\partial_{\mu}\xi - ieA_{\mu}W_{\nu}\xi) \\ &= \frac{ie}{2}F^{\mu\nu}\xi(\partial_{\mu}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\mu} + ie(A_{\mu}W_{\nu} - A_{\nu}W_{\mu})) + ie(g-1)F^{\mu\nu}(W_{\nu}\partial_{\mu}\xi - ieA_{\mu}W_{\nu}\xi). \end{aligned}$$

Como de fato é a ação que deve ser invariante, podemos fazer uma integração por partes e temos:

$$\delta\mathcal{L} = ieF^{\mu\nu}(W_{\mu}\partial_{\nu}\xi + ieA_{\mu}W_{\nu}) + ie(g-1)F^{\mu\nu}(W_{\nu}\partial_{\mu}\xi - ieA_{\mu}W_{\nu}\xi), \quad (1.19)$$

e logo $\delta\mathcal{L} = 0$ se $g = 2$.

Mostramos abaixo que o mesmo resultado não pode ser encontrado quando fazemos a análise com o campo de CSKR, $B_{\mu\nu}$. Vamos considerar o lagrangeano, análogo a (1.18),

$$\mathcal{L}_{CSKR} = -\frac{1}{6}G^{*\mu\nu\kappa}G_{\mu\nu\kappa} + ieF^\mu{}_\nu B_{\mu\kappa}^* B^{\nu\kappa}, \quad (1.20)$$

onde $G_{\mu\nu\kappa} = D_\mu B_{\nu\kappa} + D_\nu B_{\kappa\mu} + D_\kappa B_{\mu\nu}$ e a transformação não-eletromagnética de calibre tem a forma $B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + D_\mu \xi_\nu - D_\nu \xi_\mu$. Observe que nesse caso já consideramos $g = 2$ deste o início. Fazendo a variação de (1.20) através de $\delta B_{\mu\kappa}^*$, encontramos:

$$\delta\mathcal{L}_{CSKR} = \frac{ie}{6}(F^{\mu\nu}\xi^\kappa + F^{\nu\kappa}\xi^\mu + F^{\kappa\mu}\xi^\nu)G_{\mu\nu\kappa} + ieF^\mu{}_\nu(\partial_\mu\xi_\kappa - \partial_\kappa\xi_\mu - ieA_\mu\xi_\kappa + ieA_\kappa\xi_\mu)B^{\nu\kappa}.$$

Integrando novamente por partes no segundo termo temos,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{CSKR} &= \frac{ie}{2}F^{\mu\nu}\xi^\kappa(\partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu} + ie(A_\mu B_{\nu\kappa} + A_\nu B_{\kappa\mu} + A_\kappa B_{\mu\nu})) \\ &\quad - ieF^{\mu\nu}(\xi^\kappa\partial_\mu B_{\nu\kappa} - \xi_\mu\partial^\kappa B_{\nu\kappa} + ie(\xi^\kappa A_\mu B_{\nu\kappa} - \xi_\mu A^\kappa B_{\nu\kappa})). \end{aligned}$$

Quatro dos termos acima são cancelados, mas o resto permanece. Para tentar fazer com essa variação fosse zero, poderíamos propor um lagrangeano com mais termos de acoplamento não-mínimo, no entanto, o termo $F_{\mu\nu}\xi^\kappa A_\kappa B_{\mu\nu}$ que aparece devido ao termo cinético inicial sempre se manterá, pois os termos advindos dos acoplamentos não-mínimo sempre apresentam ξ e A com índices diferentes. Logo, sempre teremos $\delta\mathcal{L}_{CSKR} \neq 0$.

Como explicar essa diferença de comportamento, já que, como mostraremos na última seção, o campo de CSKR também pode descrever um spin-1? Estamos considerando ambos lagrangeanos não massivos e o campo de rank-2 somente descreve um spin-1 quando massivo. Isto significa que $B_{\mu\nu}$ em (1.20) propaga um campo de spin-0 e logo não carrega momento de dipolo magnético, por isso não se pode encontrar um lagrangeano simétrico por uma transformação não-eletromagnética de calibre nesse modelo.

1.3 Renormalização e Unitariedade

Quando tentamos descrever uma Eletrodinâmica Quântica para uma partícula elementar massiva com spin-1 através de um lagrangeano que carrega um termo de massa do

tipo Proca, encontramos inconsistências como a não renormalizabilidade e a perda do limite de unitariedade. Estes problemas aparecem explicitamente no propagador $\langle W_\mu^* W_\nu \rangle$. Considerando o lagrangeano livre abaixo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^*W_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2W_\mu^*W^\nu, \quad (1.21)$$

com $W^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu$, podemos extrair o seguinte propagador,

$$\langle W_\mu^* W_\nu \rangle = \frac{i}{\square + m^2}\theta_{\mu\nu} + \frac{i}{m^2}\omega_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Fazendo uma transformação de Fourier, temos

$$\begin{aligned} \langle W_\mu^* W_\nu \rangle &= \frac{-i}{k^2 - m^2}(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) + \frac{i}{m^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \\ &= \frac{-i}{k^2 - m^2}\eta_{\mu\nu} + \frac{ik_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - m^2)} + \frac{ik_\mu k_\nu}{m^2 k^2} \\ &= \frac{-i}{k^2 - m^2}\eta_{\mu\nu} + \frac{ik_\mu k_\nu}{k^2}(\frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{m^2}) \\ &= \frac{-i}{k^2 - m^2}(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Este propagador nos diz que o modelo é não renormalizável, pois no limite de altas energias o propagador tende a uma constante e não cai com $1/k^2$. O modelo desenvolvido aqui apresenta um outro problema, como em altas energias o propagador tende a uma constante, as seções de choque crescem com E^2 , o que quebra o chamado limite de unitariedade.

Estamos usando as definições:

$$\eta = \text{diag}[1, -1, -1, -1]; \quad (1.24)$$

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}; \quad (1.25)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}. \quad (1.26)$$

Seria interessante buscar uma teoria de campo renormalizável e unitária para descrever o spin-1 carregado e massivo. Um modelo diferente da teoria de Salam-Glashow-Weinberg, foi proposto por Lee e Yang em 1962 [59]. Eles adicionaram um novo termo invariante de calibre ao lagrangeano na tentativa de resolver os problemas de inconsistências que

aparecem em (1.23). Apesar de solucionar o problema da não renormalizabilidade e da quebra do limite da unitariedade, em altas energias a unitariedade é perdida na forma de aparecimento de uma excitação do tipo *ghost*.

Considerando apenas as partes do lagrangeano de Lee e Yang que interessam, vamos encontrar o propagador $\langle W_\mu^* W_\nu \rangle$ associado.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^* - \partial_\nu W_\mu^*)(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + m^2 W_\mu^* W^\mu + \xi(\partial_\mu W^{\mu*})(\partial_\nu W^\nu), \quad (1.27)$$

onde o último termo foi introduzido por Lee e Yang. Podemos reescrever esse lagrangeano como

$$\mathcal{L} = W_\nu^* \square \theta^{\nu\mu} W_\mu + m^2 W_\mu^* (\theta^{\mu\nu} W_\nu + \omega^{\mu\nu} W_\nu) - \xi W^{\mu*} \square \omega_{\mu\nu} W^\nu, \quad (1.28)$$

onde $\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}$ e $\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}$. Finalmente,

$$\mathcal{L} = W_\nu^* ((\square + m^2)\theta^{\mu\nu} - (\xi\square - m^2)\omega^{\mu\nu})W_\nu. \quad (1.29)$$

Com o lagrangeano posto da forma acima podemos obter a seguinte função de Green:

$$\langle W_\mu^* W_\nu \rangle = \frac{1}{\square + m^2} (\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}) - \frac{1}{(\xi\square - m^2)} \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}. \quad (1.30)$$

Passando para o espaço dos *momenta*, e multiplicando por i de acordo com as regras de Feynman, obtemos o propagador,

$$\langle W_\mu^* W_\nu \rangle = \frac{-i}{k^2 - m^2} \eta_{\mu\nu} + \frac{i(1 + \xi)}{(k^2 - m^2)(\xi k^2 + m^2)} k_\mu k_\nu. \quad (1.31)$$

Este propagador é renormalizável e apresenta dois polos, ou seja, duas excitações físicas. Vamos analisar a parte imaginária dos resíduos dos diferentes polos para entender o que está se propagando na teoria e se há *ghosts* ou *tachyons* [60].

1º Pólo: $k^2 = m^2$

$$R_{\mu\nu} = -i\eta_{\mu\nu} + i\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}, \text{ onde } k_\mu = (m; \vec{0}). \quad (1.32)$$

A matriz Resíduo tem $R_{00} = 0$ e $R_{jj} = i$, no qual não há soma em jj . Desta forma, são três graus de liberdade no total, o que significa que esse polo descreve uma partícula massiva de spin-1.

2º Pólo: $k^2 = -\frac{m^2}{\xi}$, onde $\xi < 0$ para evitar *tachyons*.

$$R_{\mu\nu} = -i\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}, \text{ onde } k_\mu = \left(\frac{m}{\sqrt{|\xi|}}; \vec{0}\right). \quad (1.33)$$

A matriz resíduo tem $R_{00} = \frac{-i}{|\xi|}$ e $R_{jj} = 0$, totalizando apenas um grau de liberdade, o que significa que esse polo descreve uma partícula massiva de spin-0. No entanto, sabemos que resíduo negativo representa uma excitação fantasma, ou seja, o estado desta partícula tem norma ao quadrado negativa, $|\psi|^2 < 0$. Podemos tentar contornar este problema através da arbitrariedade do parâmetro ξ . Atribuindo-o um valor muito pequeno, tornamos o segundo polo muito mais massivo do que o primeiro. Desta forma, temos uma faixa de energia grande o bastante para excitar a partícula de spin-1, representada pelo primeiro polo, mas pequena o suficiente para que a partícula fantasma não seja excitada. Esse modelo efetivo pode ser útil para descrever uma física em baixas energias, mas falha se tentar descrever fenômenos envolvendo energias muito mais altas do que a massa da partícula de spin-1 que está sendo investigada.

1.4 Spin-1 e o Campo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond

Existem muitas abordagens diferentes para tentar descrever corretamente uma partícula de spin-1 massiva e carregada. Vamos ver que um campo tensorial antissimétrico de rank-2 (CSKR) é capaz de desempenhar o mesmo papel do campo vetorial na descrição da situação física considerada na seção 1.1 e gerar o mesmo fator giromagnético $g = 2$ esperado. O modelo tem o seguinte lagrangeano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{6}G^{*\mu\nu\kappa}G_{\mu\nu\kappa} + \frac{1}{2}m^2 B^{*\nu\kappa}B_{\nu\kappa} + ieF_\nu{}^\mu B_{\mu\kappa}B^{*\nu\kappa}, \quad (1.34)$$

onde não escrevemos no lagrangeano acima os termos cinéticos de Maxwell. Variando (1.34) em relação ao tensor antissimétrico de rank-2 $B_{\nu\kappa}^*$ temos a equação,

$$D^\mu G_{\mu\nu\kappa} + m^2 B_{\nu\kappa} + eB_{\mu\kappa}F_\nu{}^\mu + eB_{\nu\mu}F_\kappa{}^\mu = 0, \quad (1.35)$$

onde

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu, \text{ e} \\
G_{\mu\nu\kappa} &= D_\mu B_{\nu\kappa} + D_\nu B_{\kappa\mu} + D_\kappa B_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Desenvolvendo a equação de campo

$$\begin{aligned}
&\square B_{\nu\kappa} + 2ieA_\mu \partial^\mu B_{\nu\kappa} - e^2 A^\mu A_\mu B_{\nu\kappa} \\
&+ \partial^\mu \partial_\nu B_{\kappa\mu} + ieB_{\kappa\mu} \partial^\mu A_\nu + ieA_\nu \partial^\mu B_{\kappa\mu} + ieA^\mu \partial_\nu B_{\kappa\mu} - e^2 A^\mu A_\nu B_{\kappa\mu} \\
&+ \partial^\mu \partial_\kappa B_{\mu\nu} + ieB_{\mu\nu} \partial^\mu A_\kappa + ieA_\kappa \partial^\mu B_{\mu\nu} + ieA^\mu \partial_\kappa B_{\mu\nu} - e^2 A^\mu A_\kappa B_{\mu\nu} \\
&+ m^2 B_{\nu\kappa} + eB_{\mu\kappa} F_\nu^\mu + eB_{\nu\mu} F_\kappa^\mu = 0.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Tomando o limite não-relativístico e fazendo $\nu = i$ e $\kappa = j$ temos,

$$\begin{aligned}
E_{\text{nr}} B_{ij} &= \frac{(\vec{p} - e\vec{A})}{2m} B_{ij} \\
&+ \frac{p^i B_{j0}}{2} - \frac{eA^i B_{j0}}{2} + \frac{p^j B_{0i}}{2} - \frac{eA^j B_{0i}}{2} \\
&+ \frac{p^l}{2m} (p^i B_{jl} + p^j B_{li}) - \frac{ep^l}{2m} (A^i B_{jl} + A^j B_{li}) \\
&- \frac{eA^l}{2m} (p^i B_{jl} + p^j B_{li}) + \frac{e^2 A^l}{2m} (A^i B_{jl} + A^j B_{li}) \\
&- \frac{eB_{lj} F^{il}}{2m} - \frac{eB_{il} F^{jl}}{2m}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Derivando a equação de campo, (1.35), com ∂^ν e fazendo $\kappa = i$ no limite não-relativístico, obtemos a seguinte condição subsidiária:

$$B_{0i} = -\frac{p^l B_{li}}{m} - \frac{eA^l B_{il}}{m}. \tag{1.39}$$

Neste ponto, percebemos que, dos seis graus de liberdade carregados pelo tensor antissimétrico de rank-2, três deles (B_{0i}) podem ser escritos em função dos outros três (B_{li} , onde $i \neq l$). Ou seja, até aqui, nossa descrição está compatível com uma partícula de spin-1.

Substituindo a condição subsidiária na equação (1.38), temos,

$$\begin{aligned}
E_{\text{nr}} B_{ij} &= \frac{(\vec{p} - e\vec{A})}{2m} B_{ij} \\
&+ \frac{e}{2m} (p^i A^l) B_{jl} - \frac{e}{2m} (p^j A^l) B_{il} - \frac{e}{2m} (p^l A^i) B_{jl} - \frac{e}{2m} (p^l A^j) B_{li} \\
&- \frac{eB_{lj} F^{il}}{2m} - \frac{eB_{il} F^{jl}}{2m}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Reorganizando,

$$E_{\text{nr}}B_{ij} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})}{2m}B_{ij} + \frac{e}{m}F^{il}B_{jl} + \frac{e}{m}F^{jl}B_{li}. \quad (1.41)$$

A equação acima tem dois termos de momento de dipolo magnético, ambos indicam o fator giromagnético $g = 2$. Esses termos não se somam algebricamente e sim tensorialmente, ou seja, de fato o resultado indica o valor $g = 2$ e não 4.

Esse modelo é consistente no que diz respeito a renormalização? Para responder a esta pergunta devemos calcular o propagador $\langle B^{*\mu\nu}B^{\kappa\lambda} \rangle$. Considerando apenas os termos livres do lagrangeano (1.34), temos

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = \frac{1}{6}\mathcal{G}_{\mu\nu\kappa}^*\mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} + \frac{1}{2}m^2B_{\mu\nu}^*B^{\mu\nu}, \quad (1.42)$$

onde $\mathcal{G}_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}$.

O primeiro termo de (1.42) pode ser escrito como

$$\frac{1}{6}\mathcal{G}_{\mu\nu\kappa}^*\mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}B^{*\mu\nu}(-\square(P_b^1)_{\mu\nu,\rho\sigma})B^{\rho\sigma}, \quad (1.43)$$

onde,

$$(P_b^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{\mu\rho}\theta_{\nu\sigma} - \theta_{\mu\sigma}\theta_{\nu\rho}). \quad (1.44)$$

A igualdade (1.43) pode ser mais facilmente verificada se desenvolvermos o segundo membro com a finalidade de obter o primeiro.

O segundo termo de (1.42) fica

$$\frac{1}{2}m^2B_{\mu\nu}^*B^{\mu\nu} = \frac{1}{2}m^2B^{*\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\right)(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho})B^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}m^2B^{*\mu\nu}(P_b^1 + P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma}B^{\rho\sigma}, \quad (1.45)$$

pois,

$$(P_b^1 + P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}), \quad (1.46)$$

já que $(P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma}$ é definido como

$$(P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{\mu\rho}\omega_{\nu\sigma} + \theta_{\nu\sigma}\omega_{\mu\rho} - \theta_{\mu\sigma}\omega_{\nu\rho} - \theta_{\nu\rho}\omega_{\mu\sigma}). \quad (1.47)$$

Desta forma, o lagrangeano livre pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{livre}} &= \frac{1}{2}B^{*\mu\nu}(-\square(P_b^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} + m^2(P_b^1 + P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma})B^{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2}B^{*\mu\nu}((\square + m^2)(P_b^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} + m^2(P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma})B^{\rho\sigma},\end{aligned}\quad (1.48)$$

e assim o propagador $\langle B^{*\mu\nu} B^{\kappa\lambda} \rangle$ fica

$$\langle B^{*\mu\nu} B^{\kappa\lambda} \rangle = \frac{i}{\square + m^2}(P_b^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} + \frac{i}{m^2}(P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma}.\quad (1.49)$$

Observamos que este propagador tem a mesma forma de (1.22), já que os operadores $(P_b^1)_{\mu\nu,\rho\sigma}$ e $(P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma}$ desempenham papéis análogos a $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$, respectivamente. Ou seja, esse modelo apresenta o mesmo mal comportamento no limite ultra-violeta já visto no caso do campo vetorial. O problema não está no campo que descreve a partícula e sim na geração da massa. Nos dois modelos estudados a massa tem origem em um termo do tipo Proca, responsável pelo aparecimento do setor longitudinal nos propagadores, que apresenta o mal comportamento gerando inconsistências na unitariedade e renormalizabilidade.

1.5 Resumo do Capítulo

Este capítulo traz uma revisão da eletrodinâmica do spin-1 carregado. Ele é usado como motivação e introdução para o capítulo seguinte, além de ser um complemento do mesmo, pois muitos cálculos necessários já foram realizados aqui. Vimos que a partícula de spin-1 pode ser descritas de duas formas diferentes e que em ambos os casos o propagador associado apresenta inconsistências devido ao termo massivo do tipo Proca. Na seção 1.3, mostramos um modelo alternativo de Lee e Yang que resolve os problemas de unitariedade e renormalizabilidade a baixas energias. No capítulo 2, vamos propor um modelo que gera massa de forma alternativa a Proca e apresenta um propagador sem inconsistências.

Capítulo 2

O Modelo de Campos Mixados

Este capítulo está reservado ao estudo de uma partícula de spin-1 massiva e carregada sujeita a um campo externo magnetostático. Dentro da ideia de geração de massa por um termo topológico invariante por transformação de calibre, propomos dois modelos efetivos acoplados ao eletromagnetismo que descrevem corretamente a situação física considerada, e não exibem inconsistências como a não renormalizabilidade e a perda do limite de unitariedade. A proposta consiste em um lagrangeano que contém dois campos de matéria, sendo que ambos descrevem a mesma partícula. Isto vai nos permitir introduzir a massa da partícula de uma forma diferente dos modelos abordados no capítulo 1.

Na primeira seção, abordamos o modelo livre e mostramos que ele de fato pode descrever uma partícula relativística, já que apresenta a correta relação de dispersão. A seção 2.2 mostra explicitamente a invariância de calibre. Os graus de liberdade são contabilizados na seção 2.3, na qual provamos que o modelo carrega 3 graus de liberdade *on-shell*. Na seção 2.4, obtemos os propagadores, diferenciando-os daqueles encontrados no primeiro capítulo. E por último, na seção 2.5, acoplamos o modelo principal ao eletromagnetismo, de onde surgem duas variações que são chamadas de Modelo I e Modelo II, mas descrevem a mesma situação física. A seção 2.6 traz as conclusões do capítulo.

2.1 O Modelo Livre

O lagrangeano que consideramos mistura no termo de massa o campo vetorial e o campo tensorial de rank-2 antissimétrico. Vamos estudar a situação de partículas carregadas e, por isto, os campos são complexos. A princípio, não fixamos os coeficientes α , β e γ , mas assim que obtermos as equações de campo livre, atribuiremos valores adequados a eles. O modelo tem a forma:

$$\mathcal{L} = -\alpha W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} + \beta \mathcal{G}_{\mu\nu\kappa}^* \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} + (\gamma \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} W^{*\mu} \mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda} + c.c.), \quad (2.1)$$

onde,

$$W^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} = \partial^\mu B^{\nu\kappa} + \partial^\nu B^{\kappa\mu} + \partial^\kappa B^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Antes de continuarmos, é válido relembrar as relações dos campos com seus duais,

$$\tilde{W}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} W^{\kappa\lambda}, \quad (2.4)$$

$$W_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \tilde{W}^{\kappa\lambda}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_\mu \equiv \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu\kappa} = \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \tilde{\mathcal{G}}^\lambda, \quad (2.7)$$

bem como as identidades de Bianchi para cada um deles, isto é,

$$\partial_\mu W_{\nu\kappa} + \partial_\nu W_{\kappa\mu} + \partial_\kappa W_{\mu\nu} = 0, \quad (2.8)$$

$$\partial_\mu \tilde{W}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial_\mu \mathcal{G}_{\nu\kappa\lambda} - \partial_\nu \mathcal{G}_{\kappa\lambda\mu} + \partial_\kappa \mathcal{G}_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda \mathcal{G}_{\nu\mu\kappa} = 0, \quad (2.10)$$

$$\partial_\mu \tilde{\mathcal{G}}^\mu = 0. \quad (2.11)$$

Após variarmos o lagrangeano em função de W_μ^* e em função de B_μ^* , obtemos as seguintes equações:

$$-2\alpha \partial^\mu W_{\nu\mu} + \gamma \epsilon_{\nu\mu\kappa\lambda} \mathcal{G}^{\mu\kappa\lambda} = 0; \quad (2.12)$$

$$\beta \partial_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} + \frac{\gamma}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} W_{\lambda\mu} = 0. \quad (2.13)$$

Podemos reescrever as equações (2.12) e (2.13) em função dos campos duais:

$$\alpha \epsilon_{\nu\mu\kappa\lambda} \partial^\mu \tilde{W}^{\nu\kappa\lambda} + \gamma \epsilon_{\nu\mu\kappa\lambda} \mathcal{G}^{\mu\kappa\lambda} = 0; \quad (2.14)$$

$$\beta \partial_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} - \gamma \tilde{W}^{\nu\kappa} = 0. \quad (2.15)$$

Se reescrevermos (2.14) na forma $\alpha \partial^\mu \tilde{W}^{\nu\kappa\lambda} + 3\gamma \partial^\mu B^{\kappa\lambda} = 0$, percebemos que $\alpha \tilde{W}^{\nu\kappa\lambda} + 3\gamma B^{\kappa\lambda} = \text{constante}$. Ao derivarmos com ∂_κ obtemos então

$$\alpha \partial_\kappa \tilde{W}^{\nu\kappa\lambda} + 3\gamma \partial_\kappa B^{\kappa\lambda} = 0, \quad (2.16)$$

e utilizando a identidade de Bianchi (2.9) ganhamos

$$\partial_\kappa B^{\kappa\lambda} = 0. \quad (2.17)$$

Dessa forma, (2.14) e (2.15) ficam:

$$\alpha \partial^\mu \tilde{W}^{\nu\kappa\lambda} + 3\gamma \partial^\mu B^{\kappa\lambda} = 0; \quad (2.18)$$

$$\beta (\partial_\mu \partial^\mu B^{\nu\kappa} + \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu B^{\kappa\mu}}_{=0} + \underbrace{\partial^\kappa \partial_\mu B^{\mu\nu}}_{=0}) - \gamma \tilde{W}^{\nu\kappa} = 0. \quad (2.19)$$

Logo,

$$\alpha \partial^\mu \tilde{W}^{\nu\kappa\lambda} + 3\gamma \partial^\mu B^{\kappa\lambda} = 0 \quad (2.20)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu B^{\nu\kappa} - \frac{\gamma}{\beta} \tilde{W}^{\nu\kappa} = 0, \quad (2.21)$$

substituindo (2.20) em (2.21), obtemos

$$\left(\square + \frac{3\gamma^2}{\alpha\beta}\right) \tilde{W}^{\nu\kappa\lambda} = 0. \quad (2.22)$$

Se escolhermos $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$ e $\gamma = \frac{m}{6}$, o lagrangeano (2.1) ganha a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} + \frac{1}{6} \mathcal{G}_{\mu\nu\kappa}^* \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} + \left(\frac{m}{6} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} W^{\mu*} \mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda} + c.c.\right), \quad (2.23)$$

e as equações desacopladas se tornam

$$\left(\square + m^2\right) \tilde{W}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.24)$$

O tensor dual que aparece na equação (2.24) faz o papel do campo que descreve a partícula, pois se analisarmos a equação (2.20), observamos que o tensor dual $\tilde{W}_{\mu\nu}$ é igual ao campo $B_{\mu\nu}$ a menos de uma constante de integração. De forma análoga ao procedimento acima, somos capazes de obter uma equação para $\tilde{\mathcal{G}}_\mu$ que desempenhará o papel do campo W_μ na descrição da partícula. Reescrevendo as equações (2.12) e (2.13) de outra forma, temos

$$- 2\alpha\partial^\mu W_{\nu\mu} + 6\gamma\tilde{\mathcal{G}}_\nu = 0, \quad (2.25)$$

$$\beta\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\partial_\mu\tilde{\mathcal{G}}_\lambda + \frac{\gamma}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}W_{\lambda\mu} = 0. \quad (2.26)$$

De (2.26) obtemos $\beta\tilde{\mathcal{G}}_\lambda - \gamma W_\lambda = \text{constante}$, logo $\beta\partial^\lambda\tilde{\mathcal{G}}_\lambda - \gamma\partial^\lambda W_\lambda = 0$. Pela identidade de Bianchi (2.11) $\partial^\mu\tilde{\mathcal{G}}_\mu = 0$, de forma que temos

$$\partial^\lambda W_\lambda = 0. \quad (2.27)$$

Assim, (2.25) e (2.26) ficam

$$2\alpha\Box W_\nu + 6\gamma\tilde{\mathcal{G}}_\nu = 0 \quad (2.28)$$

$$\beta\partial_\mu\tilde{\mathcal{G}}_\lambda - \gamma\partial_\mu W_\lambda = 0. \quad (2.29)$$

Utilizando os valores já declarados para os coeficientes, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$ e $\gamma = \frac{m}{6}$, e substituindo (2.29) em (2.28), obtemos uma equação análoga à (2.24):

$$(\Box + m^2)\tilde{\mathcal{G}}^\nu = 0. \quad (2.30)$$

Sabemos que um campo livre que, de fato, descreve uma partícula relativística, deve obedecer a relação de dispersão $E^2 = p^2 + m^2$. As equações (2.24) e (2.30) retratam exatamente isto, mostrando que nosso modelo (2.1) descreve uma partícula livre e de massa m .

2.2 Invariância por Transformações de Calibre

Nosso objetivo é descrever uma partícula elementar massiva, carregado e com spin-1. Até os dias atuais, na natureza, apenas os bósons de calibre da interação fraca se apresentam

desta forma. O modelo de campos mixados, diferentemente dos modelos do tipo Proca, exibe uma invariância por transformações de calibre que será essencial para tornar o modelo renormalizável. Dentro desta simetria, os campos W_μ e $B_{\mu\nu}$ se transformam por

$$\begin{aligned}\delta W^\mu &= \partial^\mu \chi, \\ \delta B^{\mu\nu} &= \partial^\mu \zeta^\nu - \partial^\nu \zeta^\mu.\end{aligned}\tag{2.31}$$

De fato, considerando o lagrangeano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} + \frac{1}{6}\mathcal{G}_{\mu\nu\kappa}^* \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} + \left(\frac{m}{6}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}W^{\mu*}\mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda} + c.c.\right),\tag{2.32}$$

é bastante claro que os dois primeiros termos são invariantes por (2.31), ou seja,

$$\begin{aligned}\delta W_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta W_\nu - \partial_\nu \delta W_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \chi - \partial_\nu \partial_\mu \chi = 0, \\ \delta \mathcal{G}_{\mu\nu\kappa} &= \partial_\mu \partial_\nu \zeta_\kappa - \partial_\mu \partial_\kappa \zeta_\nu + \partial_\nu \partial_\kappa \zeta_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \zeta_\kappa + \partial_\kappa \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\kappa \partial_\nu \zeta_\mu = 0,\end{aligned}\tag{2.33}$$

mas não é tão claro assim para os dois últimos. Fazendo uma variação em $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}W^{\mu*}\mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda}$, temos

$$\begin{aligned}\delta(\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}W^{\mu*}\mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda}) &= \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}(\delta W^{\mu*}\mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda} + W^{\mu*}\underbrace{\delta \mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda}}_{=0}) \\ &= \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\partial^\mu \chi^* \mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda} \\ &= -\chi^* \partial^\mu (\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda}) \\ &= -\chi^* \partial^\mu \tilde{\mathcal{G}}_\mu = 0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

A igualdade (2.34) é decorrente da identidade de Bianchi (2.11). O lagrangeano é invariante por transformação de calibre e isto vai nos auxiliar na redução do número de graus de liberdade dos campos W^μ e $B^{\mu\nu}$ na próxima seção, assim como no cálculo dos propagadores na seção 2.4.

2.3 Graus de Liberdade

Para provarmos que, de fato, o modelo de campos mixados descreve uma partícula de spin-1, devemos verificar que ele propaga 3 graus de liberdade (g.l.) *on-shell*. Vamos

expandir os campos W^μ e $B^{\mu\nu}$ em uma base no espaço dos *momenta* e eliminar alguns coeficientes através da fixação de calibre, e depois através do uso das equações de campo. A priori, o campo W^μ exibe 8 g.l. e $B^{\mu\nu}$ 12 g.l., pois os campos são complexos.

A base do espaço dos *momenta* que vamos utilizar é dada por $\mathcal{B} = \{p^\mu, \bar{p}^\mu, \xi_I^\mu\}$, com o índice $I = 1, 2$. Os quadrivetores desta base não são ortogonais, já que $\bar{p}^\mu \equiv (p^0; -\vec{p})$, no entanto são linearmente independentes. Definimos $\xi^\mu \equiv (0; \vec{\xi})$, $p_\mu \xi_I^\mu \equiv 0$ e $\xi_{\mu I} \xi_J^\mu \equiv \delta_{IJ}$. Assim, os campos expandidos nesta base são dados por:

$$W^\mu = ap^\mu + b\bar{p}^\mu + c_I \xi_I^\mu \quad (2.35)$$

$$B^{\mu\nu} = \alpha p^{[\mu} \bar{p}^{\nu]} + \beta_I p^{[\mu} \xi_I^{\nu]} + \gamma_I \bar{p}^{[\mu} \xi_I^{\nu]} + \vartheta_{IJ} \xi_I^{[\mu} \xi_J^{\nu]} \quad (2.36)$$

Chamamos a atenção para o fato de $\vartheta_{IJ} = -\vartheta_{JI}$ já que sua parte simétrica é eliminada, pois $\xi_I^{[\mu} \xi_J^{\nu]}$ acaba sendo antissimétrico em IJ também. Definimos $A^{[\mu} B^{\nu]} \equiv A^\mu B^\nu - A^\nu B^\mu$. Como vimos anteriormente, o modelo respeita uma simetria de calibre, e no espaço dos *momenta* ela é dada por

$$\begin{aligned} W'^\mu &= W^\mu - ip^\mu \chi, \\ B'^{\mu\nu} &= B^{\mu\nu} - ip^\mu \zeta^\nu + ip^\nu \zeta^\mu. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Expandindo a primeira equação na base \mathcal{B} obtemos

$$a'p^\mu + b'\bar{p}^\mu + c'_I \xi_I^\mu = ap^\mu + b\bar{p}^\mu + c_I \xi_I^\mu - ip^\mu \chi, \quad (2.38)$$

de forma que $a = a' + i\chi$. Como os parâmetros de calibre são arbitrários, podemos tomar $\chi = ia'$, o que elimina esse coeficiente.

Analogamente para o campo $B^{\mu\nu}$ temos

$$\begin{aligned} &\alpha' p^{[\mu} \bar{p}^{\nu]} + \beta'_I p^{[\mu} \xi_I^{\nu]} + \gamma'_I \bar{p}^{[\mu} \xi_I^{\nu]} + \vartheta'_{IJ} \xi_I^{[\mu} \xi_J^{\nu]} \\ &= \alpha p^{[\mu} \bar{p}^{\nu]} + \beta_I p^{[\mu} \xi_I^{\nu]} + \gamma_I \bar{p}^{[\mu} \xi_I^{\nu]} + \vartheta_{IJ} \xi_I^{[\mu} \xi_J^{\nu]} - ip^\mu \zeta^\nu + ip^\nu \zeta^\mu. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Os parâmetros de calibre, nesse caso, são quadrivetores e podem ser expandidos na base \mathcal{B} , ficamos então com:

$$\begin{aligned} -ip^\mu \zeta^\nu + ip^\nu \zeta^\mu &= -ip^\mu (mp^\nu + n\bar{p}^\nu + l_I \xi_I^\nu) + ip^\nu (mp^\mu + n\bar{p}^\mu + l_I \xi_I^\mu) \\ &= -inp^{[\mu} \bar{p}^{\nu]} - il_I p^{[\mu} \xi_I^{\nu]}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

de forma que, comparando os dois lados da equação (2.39) e utilizando (2.40), obtemos $\alpha = \alpha' + in$ e $\beta_I = \beta'_I + il_I$, ou seja, podemos eliminar os três coeficientes por uma escolha adequada de calibre. Interessante notar que esta descrição deixa bem claro em quais graus de liberdade a simetria de calibre pode atuar. Em uma análise *off-shell*, reduzimos de 20 para 12 graus de liberdade nosso modelo de campos mixados. Sumarizando, os campos podem ser escritos como:

$$W^\mu = b\bar{p}^\mu + c_I \xi_I^\mu; \quad (2.41)$$

$$B^{\mu\nu} = \gamma_I \bar{p}^{[\mu} \xi_I^{\nu]} + \vartheta_{IJ} \xi_I^{[\mu} \xi_J^{\nu]}. \quad (2.42)$$

Devemos agora trabalhar as equações de campo para determinar o número de graus de liberdade *on-shell*. Elas já foram obtidas na primeira seção deste capítulo, são as equações (2.12) e (2.13), onde, abaixo, vamos escrevê-las com os seguintes valores para os parâmetros: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$ e $\gamma = \frac{m}{6}$. Temos, então:

$$\partial_\nu W^{\nu\mu} + \frac{m}{6} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \mathcal{G}_{\nu\kappa\lambda} = 0; \quad (2.43)$$

$$\partial_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\lambda\nu\kappa} W_{\mu\lambda} = 0. \quad (2.44)$$

Escrevendo a equação (2.43) no espaço dos *momenta* e expandindo os campos na base \mathcal{B} , temos

$$\begin{aligned} & - b p_\nu p^\nu \bar{p}^\mu - c_I p_\nu p^\nu \xi_I^\mu + b p_\nu p^\mu \bar{p}^\nu + \underbrace{c_I p_\nu p^\mu \xi_I^\nu}_{=0, p_\mu \xi_I^\mu = 0} \\ & - \frac{im\gamma_I}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} p_\nu \bar{p}_{[\kappa} \xi_{\lambda]I} - \frac{im\vartheta_{IJ}}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} p_\nu \xi_{[\kappa}^I \xi_{\lambda]}^J = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para $\mu = 0$, obtemos a seguinte relação

$$2b \vec{p}^2 p^0 = -im\vartheta_{IJ} \epsilon^{ijk} p^i \xi_I^j \xi_J^k. \quad (2.46)$$

Ou seja, um dos coeficientes pode ser escrito em função de outro, o que reduz 2 g.l. (visto que são complexos) dos campos W^μ e $B^{\mu\nu}$.

Escrevendo a equação (2.44) no espaço dos *momenta* e expandindo os campos na base \mathcal{B} , temos

$$\begin{aligned} & - \gamma_I p_\mu p^\mu \bar{p}^\nu \xi_I^\kappa + \gamma_I p_\mu p^\mu \bar{p}^\kappa \xi_I^\nu - \vartheta_{IJ} p_\mu p^\mu \xi_I^\nu \xi_J^\kappa + \vartheta_{IJ} p_\mu p^\mu \xi_I^\kappa \xi_J^\nu \\ & + \gamma_I p_\mu p^\nu \bar{p}^\mu \xi_I^\kappa - \gamma_I p_\mu p^\kappa \bar{p}^\mu \xi_I^\nu + \frac{im}{2} \epsilon^{\mu\lambda\nu\kappa} p_\mu (b\bar{p}_\lambda + c_I \xi_\lambda^I) = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Fazendo $\nu = 0$ e $\kappa = i$, vamos chegar na seguinte relação:

$$4\gamma_I \vec{p}^2 p^0 \xi_I^i = im\epsilon^{ijk}(bp^j p^k - c_I p^j \xi_I^k). \quad (2.48)$$

Esta equação permite escrever dois coeficientes (γ_1 e γ_2) em termos de outros, o que reduz mais 4 g.l. do nosso sistema. De forma que, *on-shell*, temos 6 graus de liberdade, sendo que 3 descrevem uma partícula massiva de spin-1 e 3 descrevem sua antipartícula. Percebemos então que o modelo (2.1) pode representar os bósons vetoriais intermediadores da interação fraca W^+ e W^- . Se desenvolvermos este modelo com os campos reais podemos descrever o bóson Z^0 .

2.4 Propagadores

Para calcular os propagadores associados ao modelo (2.1), devemos introduzir no lagrangeano livre os termos do tipo *gauge-fixing*. De forma que ficamos com o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} + \frac{1}{6}\mathcal{G}_{\mu\nu\kappa}^* \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} + \left(\frac{m}{6}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} W^{*\mu} \mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda} + c.c.\right) \\ & + \alpha\partial_\mu W^{*\mu} \partial_\nu W^\nu + \beta\partial_\mu B^{*\mu\nu} \partial_\nu B^\kappa{}_\nu. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Como os campos são complexos teremos dificuldades em escrevê-los como dubletos, de forma que existe a necessidade de explicitar e separar as suas partes reais e imaginárias. Vamos reescrever os campos na forma:

$$W_\mu \equiv \frac{E_\mu + iF_\mu}{\sqrt{2}} \quad (2.50)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \frac{C_{\mu\nu} + iD_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}, \quad (2.51)$$

onde E_μ e F_μ são campos vetoriais reais e $C_{\mu\nu}$ e $D_{\mu\nu}$ campos tensoriais reais de rank-2. Os termos do lagrangeano (2.49) vão ser trabalhados separadamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\mathcal{G}_{\mu\nu\kappa}^* \mathcal{G}^{\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{6}(3\partial_\mu B_{\nu\kappa}^* \partial^\mu B^{\nu\kappa} + 6\partial_\mu B_{\nu\kappa}^* \partial^\nu B^{\kappa\mu}) \\ &= \frac{1}{12}(3\partial_\mu C_{\nu\kappa} \partial^\mu C^{\nu\kappa} + 6\partial_\mu C_{\nu\kappa} \partial^\nu C^{\kappa\mu} + 3\partial_\mu D_{\nu\kappa} \partial^\mu D^{\nu\kappa} + 6\partial_\mu D_{\nu\kappa} \partial^\nu D^{\kappa\mu}) \\ &= \frac{1}{12}C_{\mu\nu\kappa} C^{\mu\nu\kappa} + \frac{1}{12}D_{\mu\nu\kappa} D^{\mu\nu\kappa}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde

$$C_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu C_{\nu\kappa} + \partial_\nu C_{\kappa\mu} + \partial_\kappa C_{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

$$D_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu D_{\nu\kappa} + \partial_\nu D_{\kappa\mu} + \partial_\kappa D_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

De forma análoga,

$$-\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^*W^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}E_{\mu\nu}E^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.55)$$

onde

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu E_\nu - \partial_\nu E_\mu, \quad (2.56)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu. \quad (2.57)$$

O termo de *mixing* é dado, então, por

$$\begin{aligned} \frac{m}{6}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}W^{*\mu}\mathcal{G}^{\nu\kappa\lambda} + c.c. &= \frac{m}{4}E^\mu S_{\mu\kappa\lambda}C^{\kappa\lambda} - \frac{m}{4}C^{\kappa\lambda}S_{\kappa\lambda\mu}E^\mu \\ &+ \frac{m}{4}F^\mu S_{\mu\kappa\lambda}D^{\kappa\lambda} - \frac{m}{4}D^{\kappa\lambda}S_{\kappa\lambda\mu}F^\mu, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde

$$S_{\mu\kappa\lambda} = \epsilon_{\mu\kappa\lambda\nu}\partial^\nu. \quad (2.59)$$

E finalmente, os termos do tipo *gauge-fixing* tomam a forma

$$\alpha\partial_\mu W^{*\mu}\partial_\nu W^\nu = \frac{\alpha}{2}(\partial_\mu E^\mu)^2 + \frac{\alpha}{2}(\partial_\mu F^\mu)^2, e \quad (2.60)$$

$$\beta\partial_\mu B^{*\mu\nu}\partial_\kappa B^\kappa{}_\nu = \frac{\beta}{2}(\partial_\mu C^{\mu\nu})^2 + \frac{\beta}{2}(\partial_\mu D^{\mu\nu})^2. \quad (2.61)$$

O lagrangeano (2.49) então pode ser reescrito em uma forma matricial, o que nos vai ajudar a calcular os propagadores associados.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E^\mu & C^{\kappa\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mu\nu} & Q_{\mu\rho\sigma} \\ R_{\kappa\lambda\nu} & L_{\kappa\lambda,\rho\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^\nu \\ C^{\rho\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F^\mu & D^{\kappa\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mu\nu} & Q_{\mu\rho\sigma} \\ R_{\kappa\lambda\nu} & L_{\kappa\lambda,\rho\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^\nu \\ D^{\rho\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

onde

$$P_{\mu\nu} = \square\theta_{\mu\nu} - \alpha\square\omega_{\mu\nu}; \quad (2.64)$$

$$L_{\kappa\lambda,\rho\sigma} = -\frac{\square}{2}(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{\beta\square}{2}(P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma}; \quad (2.65)$$

$$Q_{\mu\kappa\lambda} = \frac{m}{2}S_{\mu\kappa\lambda}; \quad (2.66)$$

$$R_{\kappa\lambda\nu} = -\frac{m}{2}S_{\kappa\lambda\nu}. \quad (2.67)$$

Observamos que no setor de 2-formas, $(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma}$ faz o papel de $\theta_{\mu\nu}$ e $(P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma}$ o de $\omega_{\mu\nu}$.

Para encontrar os propagadores devemos inverter a matriz

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & L \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Ou seja, estamos em busca de uma matriz

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

tal que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$. Estamos omitindo os índices, mas no final devemos incluí-los. Fazendo esse produto encontramos:

$$PX + QZ = 1 \quad (2.70)$$

$$RX + LZ = 0 \quad (2.71)$$

$$PY + LW = 1 \quad (2.72)$$

$$RY + QW = 0, \quad (2.73)$$

utilizando (2.71) temos $Z = -L^{-1}RX$, substituindo em (2.70) ficamos com $PX + Q(-L^{-1}RX)$.

Logo, obtemos

$$X = (P - QL^{-1}R)^{-1} \quad (2.74)$$

$$Z = -L^{-1}R(P - QL^{-1}R)^{-1}. \quad (2.75)$$

Da mesma forma, trabalhando com (2.72) e (2.73) obtemos

$$W = (L - RP^{-1}Q)^{-1} \quad (2.76)$$

$$Y = -P^{-1}Q(L - RP^{-1}Q)^{-1}. \quad (2.77)$$

• Propagador associado a X

$$\begin{aligned}
P - QL^{-1}R &= \square\theta_{\mu\nu} - \alpha\square\omega_{\mu\nu} - \frac{m}{2}S_{\mu\kappa\lambda}\left(-\frac{2}{\square}(P_b^1)^{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{2}{\beta\square}(P_e^1)^{\kappa\lambda,\rho\sigma}\right)\left(-\frac{m}{2}S_{\rho\sigma\nu}\right) \\
&= \square\theta_{\mu\nu} - \alpha\square\omega_{\mu\nu} - \frac{m}{2}S_{\mu\kappa\lambda}\left(\frac{m}{\square}\underbrace{(P_b^1)^{\kappa\lambda,\rho\sigma}S_{\rho\sigma\nu}}_{=S^{\kappa\lambda}{}_{\nu}} + \frac{m}{\beta\square}\underbrace{(P_e^1)^{\kappa\lambda,\rho\sigma}S_{\rho\sigma\nu}}_{=0}\right) \\
&= \square\theta_{\mu\nu} - \alpha\square\omega_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2\square}\underbrace{S_{\mu\kappa\lambda}S^{\kappa\lambda}{}_{\nu}}_{=-2\square\theta_{\mu\nu}} \\
&= (\square + m^2)\theta_{\mu\nu} - \alpha\square\omega_{\mu\nu}. \tag{2.78}
\end{aligned}$$

Para encontrar o propagador devemos inverter essa última expressão. Invertendo-o, transformando para o espaço dos *momenta* e multiplicando por i , encontramos o seguinte propagador,

$$\langle E_{\mu}E_{\nu} \rangle = -\frac{i}{k^2 - m^2}\eta_{\mu\nu} + i\left(\frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{\alpha k^2}\right)\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}. \tag{2.79}$$

• Propagador associado a W

$$\begin{aligned}
L - RP^{-1}Q &= -\square(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{\beta\square}{2}(P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} + mS_{\kappa\lambda\mu}\left(\frac{1}{\square}\theta^{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha\square}\omega^{\mu\nu}\right)\frac{m}{2}S_{\nu\rho\sigma} \\
&= -\square(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{\beta\square}{2}(P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} + mS_{\kappa\lambda\mu}\left(\frac{m}{2\square}\underbrace{\theta^{\mu\nu}S_{\nu\rho\sigma}}_{=S^{\mu}{}_{\rho\sigma}} - \frac{m}{2\alpha\square}\underbrace{\omega^{\mu\nu}S_{\nu\rho\sigma}}_{=0}\right) \\
&= -\square(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{\beta\square}{2}(P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} + \frac{m^2}{2\square}\underbrace{S_{\kappa\lambda\mu}S^{\mu}{}_{\rho\sigma}}_{=-2\square(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma}} \\
&= -(\square + m^2)(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{\beta\square}{2}(P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma}. \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Invertendo o operador acima encontramos obtemos,

$$W_{\kappa\lambda,\rho\sigma} = -\frac{1}{(\square + m^2)}(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{2}{\beta\square}(P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma}, \tag{2.81}$$

transformando para o espaço dos *momenta* e multiplicando por i temos o propagador,

$$\langle C_{\mu\nu}C_{\kappa\lambda} \rangle = \frac{i}{(k^2 - m^2)}(P_b^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} + \frac{2i}{\beta k^2}(P_e^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda}, \tag{2.82}$$

onde nesta última equação os operadores P_b^1 e P_e^1 estão no espaço dos *momenta*.

Além dos dois propagadores encontrados acima temos outros dois associados a Y e a Z que misturam os dois campos (vetorial e tensorial de rank-2). Eles também podem ser calculados e temos que $Y_{\mu,\rho\sigma} = \frac{m/\sqrt{2}}{\square(\square+m^2)}S_{\mu,\rho\sigma}$ e $Z_{\kappa\lambda,\nu} = -\frac{m/\sqrt{2}}{\square(\square+m^2)}S_{\kappa\lambda,\nu}$. Invertendo o primeiro e passando para o espaço dos *momenta*, temos,

$$\langle A_\mu B_{\nu\kappa} \rangle = \frac{m/\sqrt{2}}{k^2(k^2 - m^2)} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} k^\lambda. \quad (2.83)$$

Neste ponto, já podemos perceber a diferença entre os propagadores encontrados nesta seção, (2.79) e (2.82), e os do capítulo 1, (1.23) e (1.49). Aqui, em todos os termos os denominadores apresentam um polo e no limite de altas energias todos os termos tenderão a zero com $1/k^2$.

2.5 Acoplamento com o Campo Eletromagnético

Após verificar o bom comportamento do modelo (2.49) analisando seus propagadores, assim como checar o número correto de graus de liberdade associados a uma partícula de spin-1, devemos estudar o acoplamento com o campo eletromagnético. Para isso, vamos propor e estudar dois modelos diferentes, ambos com acoplamento não-mínimo.

Modelo I

O primeiro modelo a ser considerado tem a forma dada abaixo.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6}G_{\mu\nu\kappa}^* G^{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} + \left(\frac{m}{6}W^{*\mu} G^{\nu\kappa\lambda} + c.c.\right) + (i\vartheta F_{\mu\nu} W^{*\mu} \tilde{G}^\nu + c.c.), \quad (2.84)$$

onde

$$G_{\mu\nu\kappa} = D_\mu B_{\nu\kappa} + D_\nu B_{\kappa\mu} + D_\kappa B_{\mu\nu}, \quad (2.85)$$

$$W_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu, \quad (2.86)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (2.87)$$

e o \tilde{G}_μ é o dual do $G_{\nu\kappa\lambda}$, como já definido na primeira seção deste capítulo. Observamos que o coeficiente ϑ que aparece no lagrangeano tem dimensão de comprimento, L , visto que $F_{\mu\nu} W^{*\mu} \tilde{G}^\nu$ já tem dimensão de L^{-5} .

Variando o lagrangeano com respeito a W_μ^* e depois com respeito a $B_{\mu\nu}^*$ obtemos respectivamente,

$$\delta_{W_\mu^*} \mathcal{L} : \quad D^\nu W_{\nu\mu} + \frac{m}{6} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} G^{\nu\kappa\lambda} + i\vartheta F_{\mu\nu} \tilde{G}^\nu = 0, \quad (2.88)$$

$$\delta_{B_{\mu\nu}^*} \mathcal{L} : \quad D_\mu G^{\mu\nu\kappa} + m\epsilon^{\mu\lambda\nu\kappa} D_\lambda W_\mu = 0. \quad (2.89)$$

De (2.89) obtemos,

$$\begin{aligned} D_\mu \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \tilde{G}_\lambda + m\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} D_\lambda W_\mu &= 0, \\ D_\lambda W_\mu &= -\frac{D_\mu \tilde{G}_\lambda}{m}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

Então (2.88) pode ser escrito como,

$$D^\nu \left(\frac{-D_\mu \tilde{G}_\nu}{m} + \frac{D_\nu \tilde{G}_\mu}{m} \right) + m\tilde{G}_\mu + i\vartheta F_{\mu\nu} \tilde{G}^\nu = 0 \quad (2.91)$$

e reorganizando os índices temos,

$$D^\mu (D_\mu \tilde{G}_\nu - D_\nu \tilde{G}_\mu) + m^2 \tilde{G}_\nu - i\vartheta m F_{\mu\nu} \tilde{G}^\mu = 0. \quad (2.92)$$

Percebemos que esta equação é análoga à (1.2). Como ϑ tem dimensão de comprimento, podemos atribuir $\vartheta = \frac{e}{m}$, e seguirmos os mesmos cálculos da seção 1.1 que vamos encontrar $g = 2$. Este é o resultado correto para um modelo que descreve uma partícula de spin-1 sujeita a um campo magnetostático.

Deste ponto em diante, a descrição da partícula se torna análoga ao caso de Proca onde o tensor dual \tilde{G}_μ faz o papel do campo vetorial. Inclusive podemos extrair uma condição subsidiária que reduzirá para 3 os graus de liberdade do sistema. Trabalhando com a equação,

$$D^\mu (D_\mu \tilde{G}_\nu - D_\nu \tilde{G}_\mu) + m^2 \tilde{G}_\nu - ie F_{\mu\nu} \tilde{G}^\mu = 0, \quad (2.93)$$

podemos obter, com um procedimento análogo ao realizado de (1.5-1.8), a condição subsidiária

$$D^\nu \tilde{G}_\nu = 0, \quad (2.94)$$

o que nos permite escrever uma das componentes do campo \tilde{G}_ν em função das outras, reduzindo para três os graus de liberdade físicos do modelo (2.84) (*on-shell*), como deve ser.

Modelo II

Um modelo alternativo, parecido com o primeiro, com uma mudança no acoplamento não-mínimo é proposto. Agora, deveremos encontrar uma equação para o dual do $W_{\mu\nu}$, que é definido como $\tilde{W}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}W^{\kappa\lambda}$. A ideia deste modelo é conseguir uma equação de campo que descreva o spin-1 carregado e massivo a partir de um campo tensorial de rank-2, como foi feito na seção 1.4 do capítulo 1, mas com a diferença que vamos partir de um lagrangeano que não apresenta inconsistências.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6}G_{\mu\nu\kappa}^*G^{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^*W^{\mu\nu} + \left(\frac{m}{6}W^{*\mu}G^{\nu\kappa\lambda} + c.c.\right) + (i\sigma F_\mu{}^\nu\tilde{W}^{\mu\kappa}B_{\nu\kappa}^* + c.c.). \quad (2.95)$$

Variando o lagrangeano (2.95) com respeito a W_μ^* e depois com respeito a $B_{\mu\nu}^*$ obtemos respectivamente,

$$\delta_{W_\mu^*}\mathcal{L} : \quad D^\nu W_{\nu\mu} + \frac{m}{6}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}G^{\nu\kappa\lambda} = 0, \quad (2.96)$$

$$\delta_{B_{\mu\nu}^*}\mathcal{L} : \quad D_\mu G^{\mu\nu\kappa} + m\epsilon^{\mu\lambda\nu\kappa}D_\lambda W_\mu - 2i\sigma F_\mu{}^\nu\tilde{W}^{\mu\kappa} = 0. \quad (2.97)$$

De (2.96) obtemos,

$$mD^\nu B^{\kappa\lambda} + D^\nu\tilde{W}^{\kappa\lambda} = 0, \quad (2.98)$$

$$B^{\kappa\lambda} = \frac{\text{constante}}{m} - \frac{\tilde{W}^{\kappa\lambda}}{m} \quad (2.99)$$

Então (2.97) pode ser escrito como,

$$-D_\mu(D^\mu\tilde{W}^{\nu\kappa} + D^\nu\tilde{W}^{\kappa\mu} + D^\kappa\tilde{W}^{\mu\nu}) - m^2\epsilon^{\lambda\mu\nu\kappa}D_\lambda W_\mu - 2i\sigma mF_\mu{}^\nu\tilde{W}^{\mu\kappa} = 0. \quad (2.100)$$

e logo

$$D_\mu(D^\mu\tilde{W}^{\nu\kappa} + D^\nu\tilde{W}^{\kappa\mu} + D^\kappa\tilde{W}^{\mu\nu}) + m^2\tilde{W}^{\nu\kappa} + 2i\sigma mF_\mu{}^\nu\tilde{W}^{\mu\kappa} = 0. \quad (2.101)$$

Assim como no Modelo I, o parâmetro σ tem dimensão de comprimento, logo podemos atribuir $\sigma = \frac{e}{2m}$. Seguindo os mesmos cálculos da seção 1.4 encontramos $g = 2$, o que corrobora esse segundo modelo. Aqui, o campo dual do $W_{\mu\nu}$ desempenha o mesmo papel do campo de rank-2 antissimétrico do primeiro capítulo. O modelo de campos mixados tem bom comportamento quando estamos tratando o campo W^μ como um campo de calibre, mas quando ele desempenha o papel de campo de matéria, os resultados $\vartheta = \frac{e}{m}$ e $\sigma = \frac{e}{2m}$ podem ser um problema para a renormalização.

2.6 Conclusões do Capítulo

Neste capítulo, propusemos uma forma abeliana diferente da formulação de Proca, no que se refere à geração de massa, para descrever uma partícula de spin-1 carregada: tem-se massa sem violação da simetria de calibre. Usamos um termo de massa que é gerado por uma mistura entre dois campos, permitindo que o lagrangeano permaneça invariante por transformações locais do tipo U(1). Os dois modelos efetivos para os quais chamamos a atenção na introdução deste capítulo, são aqueles que surgem na seção 2.5, e são advindo de um mesmo modelo livre. Ambos descrevem a situação física de uma partícula de spin-1, massiva e carregada submetida a um campo magnetostático. O Modelo I se conecta com aquele visto na seção 1.1 do capítulo anterior, que usa um campo vetorial para descrever o spin-1, e o Modelo II se conecta com aquele visto na seção 1.4 também do capítulo passado, que usa um campo tensorial de rank-2 antissimétrico para descrever esse sistema físico. Apesar dessa conexão, um estudo cuidadoso sobre renormalizabilidade dos Modelos I e II deve ser feita, e não podemos afirmar que são bons modelos efetivos para se descrever a matéria bosônica de spin-1, apesar de não apresentarem inconsistências quando são tratados como campos intermediadores.

Capítulo 3

As Correntes

Neste capítulo, vamos estudar algumas correntes de matéria, considerando-as até a segunda ordem nos *momenta*, ou seja, termos contendo até $\frac{\vec{p}^2}{m_{1,2}^2}$, $\frac{\vec{q}^2}{m_{1,2}^2}$ ou $\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{q}_j}{m_{1,2}^2}$. Termos de ordem três ou superior não contribuem de forma significativa para a análise do limite não-relativístico. A busca por correntes neste patamar de baixas energias é a fundação para construirmos os potenciais de interação entre duas partículas fermiônicas de spin-1/2 ou entre duas partículas bosônicas de spin-1, assunto do capítulo seguinte.

Basicamente, o que queremos estudar neste capítulo e no próximo é uma interação entre duas partículas (de spin-1/2 ou 1) através da troca de um bóson de spin-1 massivo, ao nível árvore, já que correções quânticas de *loops* não teriam contribuições significativas no regime de baixas energias. A Figura 3.1 serve de suporte para análise de todas as interações entre partículas, sejam de spin-1/2 ou 1.

Vamos trabalhar no referencial do laboratório, que deve coincidir com o referencial de centro de massa (CM) das partículas, de forma que,

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \vec{p} - \vec{q}/2), (\text{quadri-}i\text{momentum inicial da partícula 1}) \\ p'_1 &= (E_1, \vec{p} + \vec{q}/2), (\text{quadri-}i\text{momentum final da partícula 1}) \\ p_2 &= (E_2, -\vec{p} + \vec{q}/2), (\text{quadri-}i\text{momentum inicial da partícula 2}) \\ p'_2 &= (E_2, -\vec{p} - \vec{q}/2), (\text{quadri-}i\text{momentum final da partícula 2}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

É interessante trabalhar no referencial de CM, já que lidamos com apenas duas variáveis de quadri-*momentum* p e q , ao invés de quatro, e elas podem ser escritas em função de p_1

e p'_1 , na forma

$$\begin{aligned} q &= p'_1 - p_1 \\ p &= \frac{p'_1 + p_1}{2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O vetor \vec{p} é a média do *momentum* da partícula 1 e \vec{q} é o *momentum* transferido pelo bóson intermediário, chamado de *momentum transfer*. O espalhamento trabalhado, representado pela Figura 3.1, é perfeitamente elástico, e assim, devido à conservação de energia podemos mostrar que $q^0 = 0$ e que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.

Vamos considerar o desenvolvimentos apenas das correntes associadas à partícula 1, observando que, neste capítulo, não manteremos o rótulo $_1$ para a massa, nem para o δ e nem para as matrizes de spin, apesar de mantê-lo para p_1 , já que se faz necessário a diferenciação com p . Para as correntes associada à partícula 2 o desenvolvimento é análogo e o que vai ser alterado é $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ e $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$.

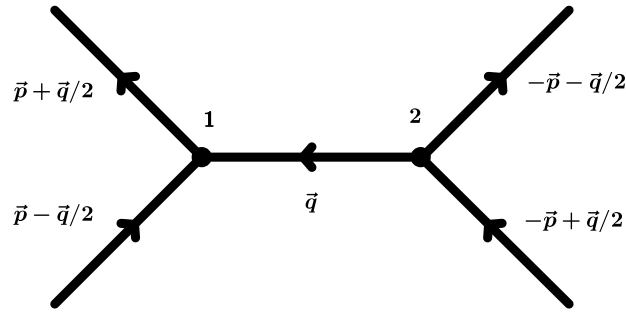


Figura 3.1: Estrutura de vértices que ilustra a interação entre duas partículas intermediária por outra de spin-1 e massa $\neq 0$.

3.1 Correntes de Spin-1/2

Antes de calcularmos as correntes, apresentamos as nossas convenções para a descrição da partícula de spin-1/2. A equação de Dirac, no espaço dos *momenta*, associada com a energia positiva é

$$\gamma^\mu p_{1\mu} u(p_1) - m u(p_1) = 0. \quad (3.3)$$

O espinor conjugado de Dirac é dado por $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$.

Sempre consideramos $u = u(p - q/2)$ e $\bar{u} = \bar{u}(p + q/2)$.

Para as matrizes γ usamos a representação de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Temos ainda que

$$u_{lab} = \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E+m} \xi \end{pmatrix}, \quad u_{lab}^\dagger = \left(\xi^\dagger \quad \xi^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E+m} \right). \quad (3.5)$$

A nossa matriz de spin é dada por

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.6)$$

E, finalmente, definimos

$$\delta \equiv \xi^\dagger \xi, \quad (3.7)$$

$$\langle \vec{\sigma} \rangle \equiv \xi^\dagger \vec{\sigma} \xi, \quad (3.8)$$

onde $\delta = 1$ se o spin da partícula se mantiver inalterado e $\delta = 0$ caso se modifique.

Corrente Vetorial

A corrente conservada de Noether, que é extraída a partir do lagrangeano de Dirac, $\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{u}\gamma^\mu\partial_\mu u - m\bar{u}u$, é a corrente vetorial para férmions de spin-1/2 e pode ser escrita como

$$J_{V(s=1/2)}^\mu = g_V \bar{u} \gamma^\mu u, \quad (3.9)$$

onde g_V é a constante de acoplamento, que não é necessariamente a eletromagnética. Para a componente temporal, temos,

$$J_{V(s=1/2)}^0 = g_V \bar{u} \gamma^0 u = g_V u^\dagger \gamma^0 \gamma^0 u = g_V u^\dagger u, \quad (3.10)$$

de forma que, como $\vec{q} \cdot \vec{p} = 0$ pela conservação de energia, ganhamos,

$$J_{V(s=1/2)}^0 = g_V \left\{ \delta \left[1 + \frac{1}{4m^2} \left(\vec{p}^2 - \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right) \right] + \frac{i}{4m^2} (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle \right\}. \quad (3.11)$$

Para a componente espacial de (3.9)

$$J_{V(s=1/2)}^i = g_V \bar{u} \gamma^i u = g_V u^\dagger \gamma^0 \gamma^i u, \quad (3.12)$$

assim,

$$J_{V(s=1/2)}^i = g_V \left\{ \xi^\dagger \frac{\vec{\sigma}_i \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{q}/2)}{2m} \xi + \xi^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{q}/2) \vec{\sigma}_i}{2m} \xi \right\}, \quad (3.13)$$

de forma que,

$$J_{V(s=1/2)}^i = g_V \left[\frac{\delta}{m} \vec{p}_i - \frac{i}{2m} \epsilon_{ijk} \vec{q}_j \langle \vec{\sigma}_k \rangle \right]. \quad (3.14)$$

Corrente Pseudo-Vetorial

A corrente pseudo-vetorial para férmions é definida por

$$J_{PV(s=1/2)}^\mu = g_{PV} \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 u. \quad (3.15)$$

Sua componente temporal pode ser facilmente desenvolvida pois $\bar{u} \gamma^0 \gamma_5 u = u^\dagger \gamma_5 u$, logo,

$$J_{PV(s=1/2)}^0 = \frac{g_{PV}}{m} \vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle. \quad (3.16)$$

Para $\mu = i$ em (3.15), temos

$$J_{PV(s=1/2)}^i = g_{PV} u^\dagger \gamma^0 \gamma^i \gamma_5 u = g_{PV} \left[\xi^\dagger \vec{\sigma}_i \xi + \frac{1}{4m^2} \xi^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_1 \vec{\sigma}_i \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \xi \right]. \quad (3.17)$$

Essas três matrizes σ que aparecem no segundo termo da equação acima levam a um cálculo laborioso que resulta em,

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_1 \sigma_i \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 = -\vec{p}^2 \sigma_i + \frac{\vec{q}^2}{4} \sigma_i - i(\vec{q} \times \vec{p})_i + 2\vec{p}_i (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) - \frac{\vec{q}_i}{2} (\vec{q} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.18)$$

e logo obtemos

$$\begin{aligned} J_{PV(s=1/2)}^i &= g_{PV} \left\{ \left[1 - \frac{1}{4m^2} \left(\vec{p}^2 - \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right) \right] \langle \vec{\sigma}_i \rangle - \frac{i\delta}{4m^2} (\vec{q} \times \vec{p})_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2m^2} \left[(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle) \vec{p}_i - \frac{1}{4} (\vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle) \vec{q}_i \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Corrente Tensorial

Definimos a corrente tensorial fermiônica como

$$J_{T(s=1/2)}^{\mu\nu} = g_T \bar{u} \Sigma^{\mu\nu} u \quad (3.20)$$

Para $\mu = 0$ e $\nu = i$ temos

$$J_{T(s=1/2)}^{0i} = \frac{-ig_T}{4} (u^\dagger \gamma u - u^\dagger \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 u), \quad (3.21)$$

onde obtemos,

$$J_{T(s=1/2)}^{0i} = \frac{ig_T}{4m} \vec{q}_i \delta + \frac{g_T}{2m} \epsilon_{ijk} \vec{p}_j \langle \vec{\sigma}_k \rangle. \quad (3.22)$$

Para $\mu = i$ e $\nu = j$ ganhamos a expressão

$$J_{T(s=1/2)}^{ij} = -\frac{ig_T}{4} \xi^\dagger \left\{ -\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i + \frac{1}{4m^2} \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_1 \sigma_i \sigma_j \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_1 \sigma_j \sigma_i \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \right] \right\} \xi \quad (3.23)$$

que tornaria o cálculo bastante laborioso por causa das quatro matrizes σ que aparecem em um só produto. Entretanto, ao desenvolver $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$ assim como $\sigma_j \sigma_i = \delta_{ij} - i\epsilon_{ijk} \sigma_k$, obtemos,

$$J_{T(s=1/2)}^{ij} = \frac{g_T}{2} \xi^\dagger \left\{ -\epsilon_{ijk} \sigma_k + \frac{\epsilon_{ijk}}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_1 \sigma_k \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \right\} \xi, \quad (3.24)$$

e lembrando do resultado (3.18), temos

$$\begin{aligned} J_{T(s=1/2)}^{ij} &= \frac{g_T}{2} \left\{ \left[-1 - \frac{1}{4m^2} \left(\vec{p}^2 - \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right) \right] \epsilon_{ijk} \langle \vec{\sigma}_k \rangle - \epsilon_{ijk} \frac{i\delta}{4m^2} (\vec{q} \times \vec{p})_k + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{ijk} \frac{1}{2m^2} \left[(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle) \vec{p}_k - \frac{1}{4} (\vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle) \vec{q}_k \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Corrente Pseudo-Tensorial

A corrente pseudo-tensorial é definida novamente com o auxílio da matriz γ^5 ,

$$J_{PT(s=1/2)}^{\mu\nu} = g_{PT} \bar{u} i \Sigma^{\mu\nu} \gamma^5 u \quad (3.26)$$

Para $\mu = 0$ e $\nu = i$ temos,

$$\begin{aligned} J_{PT(s=1/2)}^{0i} &= \frac{g_{PT}}{4} u^\dagger \left(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^5 - \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^5 \right) u \\ &= \frac{g_{PT}}{2} \left[\langle \vec{\sigma}_i \rangle - \frac{1}{4m^2} \xi^\dagger \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_1 \vec{\sigma}_i \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \right) \xi \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Analogamente aos casos da corrente pseudo-vetorial (3.19) e corrente tensorial (3.25), nos deparamos com um termo que contém três matrizes σ . Utilizando (3.18), podemos achar o resultado facilmente. A corrente encontrada se diferencia apenas por não apresentar o símbolo de Levi-Civita e por uma mudança de sinal global em relação a equação (3.25):

$$J_{PT(s=1/2)}^{0i} = \frac{g_{PT}}{2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4m^2} \left(\vec{p}^2 - \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right) \right] \langle \vec{\sigma}_i \rangle + \frac{i\delta}{4m^2} (\vec{q} \times \vec{p})_i + \right. \\ \left. - \frac{1}{2m^2} \left[(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle) \vec{p}_i - \frac{1}{4} (\vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle) \vec{q}_i \right] \right\}. \quad (3.28)$$

E para finalizar as correntes fermiônicas, calculamos a componente totalmente espacial de uma fonte pseudo-tensorial, ou seja, o caso em que $\mu = i$ e $\nu = j$, de forma que encontramos,

$$J_{PT(s=1/2)}^{ij} = \frac{g_{PT}}{8m} \xi^\dagger \left\{ -(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) + (\vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_i) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 (\vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_i) \right\} \xi. \quad (3.29)$$

Temos novamente um produto de três matrizes σ . No entanto, neste caso, com apenas um *momentum* nos termos, o que facilita os cálculos e ganhamos,

$$J_{PT(s=1/2)}^{ij} = \frac{i g_{PT}}{4m} \epsilon_{ijk} \vec{q}_k \delta + \frac{g_{PT}}{2m} (\vec{p}_i \langle \vec{\sigma}_j \rangle - \vec{p}_j \langle \vec{\sigma}_i \rangle). \quad (3.30)$$

Interessante notar que, para correntes de spin-1/2, não existem termos que apresentem três *momenta*. De forma que todas as aproximações encontram-se no fato de $u_{lab} = \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E+m} \xi \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{2m} \xi \end{pmatrix}$. Apesar de estarmos querendo sondar a interação de partículas em baixas energias, os termos de segunda ordem nos *momenta* podem ser o diferencial na comparação entre os potenciais de partículas com diferentes spins e nos trazer alguma informação relevante.

Vale ressaltar que os campos de spin-1/2 não necessitam de uma normalização, como veremos ser necessário para o caso dos campos de spin-1. Observamos ainda que todas as constantes de acoplamento das correntes desenvolvidas nesta seção são adimensionais, ou seja, $[g_V] = [g_{PV}] = [g_T] = [g_{PT}] = M^0$, diferentemente do que veremos na próxima seção para o caso das correntes de spin-1.

3.2 Correntes de Spin-1

Nesta seção, vamos considerar a descrição da partícula de spin-1 pelo formalismo de Proca, já que estamos considerando a partícula como matéria sem nos preocupar com seu propagador. Nossas considerações partem do lagrangeano abaixo,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^*W^{\mu\nu} + m^2W_\mu^*W^\mu \quad (3.31)$$

onde $W^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu$ e analogamente $W^{*\mu\nu} = \partial^\mu W^{*\nu} - \partial^\nu W^{*\mu}$. Fazendo a variação de (3.31) através de δW_μ^* , encontramos a equação de campo

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} + m^2W^\nu = 0, \quad (3.32)$$

que pode ser derivada para obtermos a relação,

$$\partial_\mu W^\mu = 0. \quad (3.33)$$

Essa última equação, chamada de condição subsidiária, é responsável por nos mostrar que de fato o campo W^μ carrega apenas três graus de liberdade, visto que desenvolvendo (3.33) no espaço dos *momenta* temos $W^0 = \frac{1}{E}\vec{p}_1 \cdot \vec{W}$.

Se considerarmos o referencial de repouso dessa partícula, temos $\vec{p}_1 = 0$, e definindo $\vec{W}_{repouso} \equiv \vec{\epsilon}$ podemos escrever,

$$W_{repouso}^\mu = (0, \vec{\epsilon}). \quad (3.34)$$

Interessante considerar primeiramente esse referencial, pois com uma transformação de Lorentz para o referencial de laboratório, encontramos uma forma explícita para essa função de onda,

$$W_{lab}^\mu = N_W \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{\epsilon}}{m}; \vec{\epsilon} + \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{\epsilon})\vec{p}_1}{m(E+m)} \right). \quad (3.35)$$

Observamos que os operadores de spin que vamos usar nesta seção nada mais são do que os geradores do grupo de Lorentz na representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e são dados por

$$(\Sigma^{\mu\nu})_{\kappa\lambda} = i(\delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu \delta_\kappa^\nu). \quad (3.36)$$

Sua parte espacial pode ser reescrita como,

$$(\Sigma_{ij})_{kl} = \epsilon_{ijn}(S_n)_{kl}, \quad (3.37)$$

onde $(S_n)_{kl} = i\epsilon_{kl n}$. Definimos ainda o valor médio do spin,

$$\vec{\epsilon}_k^*(S_n)_{kl}\vec{\epsilon}_l \equiv \langle \vec{S}_n \rangle, \quad (3.38)$$

e que

$$\vec{\epsilon}_k^* \cdot \vec{\epsilon}_l = \delta. \quad (3.39)$$

Corrente Vetorial

A corrente conservada de Noether, calculada a partir da densidade de lagrangeano (3.31), é exatamente a corrente vetorial abaixo.

$$J_{V(s=1)}^\mu = -ig_V (W^{*\mu\nu}W_\nu - W^{\mu\nu}W_\nu^*), \quad (3.40)$$

No final desta subseção vamos utilizá-la para obtenção do potencial de Coulomb, que por sua vez é o guia para a fixação da constante de normalização. No espaço dos *momenta* temos

$$J_{V(s=1)}^\mu = g_V (W^{*\mu\nu}W_\nu + W^{\mu\nu}W_\nu^*), \quad (3.41)$$

onde agora $W^{\mu\nu} = p_1^\mu W^\nu - p_1^\nu W^\mu$. Usamos a mesma, W , letra para representar o campo nos dois espaço para não carregar a notação.

A decomposição de Gordon (vide [46] eq. (17)) apresenta um papel facilitador na obtenção do limite não-relativístico das componentes da corrente vetorial para o spin-1. Usando (3.2) e (3.36) temos que

$$\begin{aligned} J_{V(s=1)}^\mu &= g_V \left(2p^\mu W^{*\nu}W_\nu + q_\nu (W^{*\nu}W^\mu - W^{*\mu}W^\nu) \right) \\ &= g_V \left(2p^\mu W^{*\nu}W_\nu + iq_\nu W^{*\alpha}W^\beta (\Sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde também utilizamos a condição subsidiária no espaço dos *momenta*, $p^\mu W_\mu = 0$.

Neste ponto podemos fixar a constante de normalização N_W . Vamos considerar o conhecido potencial de Coulomb [61],

$$V_{coulomb}(r) = g_1 g_2 \frac{\delta_1 \delta_2}{4\pi r}, \quad (3.43)$$

onde g_1 e g_2 são constantes de acoplamento, e $\delta_i, i = 1, 2$, tem valor igual a 1 se o spin da partícula se mantiver e 0 caso se modifique. Somente vamos abordar os potenciais de forma mais abrangente no próximo capítulo, no entanto, podemos calcular o potencial eletromagnético considerando duas correntes vetoriais de spin-1 trocando um fóton (ver Figura 3.1). Para calcular um potencial seguimos o seguinte procedimento: primeiro calculamos a amplitude que é dada por

$$\mathcal{A} = iJ_1^\mu \langle A_\mu A_\nu \rangle J_2^\nu, \quad (3.44)$$

onde o propagador do fóton é $\langle A_\mu A_\nu \rangle = -i\eta_{\mu\nu}/q^2$. Desenvolvendo, temos

$$\mathcal{A} = \frac{J_1^\mu J_{2\mu}}{q^2}. \quad (3.45)$$

As componentes das correntes J_1^μ e $J_{2\mu}$ são aquelas encontradas fazendo $\mu = 0$ e $\mu = i$ em (3.42). Ressaltamos que somente para o cálculo das constantes de normalização vamos desprezar termos da ordem $\mathcal{O}(v^2/c^2)$. Como $J_1^i J_{i2} \cong \mathcal{O}(v^2/c^2)$ temos a amplitude dada por:

$$\mathcal{A} = -4m^2 g_{V1} g_{V2} N_W^4 \delta_1 \delta_2 \frac{1}{q^2} \quad (3.46)$$

De acordo com a primeira aproximação de Born, o potencial interpartícula pode ser obtido a partir da transformada de Fourier de uma amplitude calculada no espaço dos *momenta*,

$$V(r, v) = - \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \mathcal{A}(q, \vec{p}), \quad (3.47)$$

onde \vec{r} é o vetor que indica a posição relativa entre as fontes e \vec{p} o *momentum* médio da partícula 1. Substituindo (3.46) em (3.47) temos

$$V(r) = 4m^2 g_{V1} g_{V2} N_W^4 \delta_1 \delta_2 \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{1}{q^2}. \quad (3.48)$$

A integral que surge é dada por

$$\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{4\pi r}. \quad (3.49)$$

Logo, o potencial de Coulomb tem a forma:

$$V(r) = 4m^2 g_{V1} g_{V2} N_W^4 \frac{\delta_1 \delta_2}{4\pi r}. \quad (3.50)$$

Igualando-o a (3.43), obtemos,

$$N_W = \frac{1}{\sqrt{2m}}. \quad (3.51)$$

De forma que nossa função de onda (3.35) fica:

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{\epsilon}}{m}; \vec{\epsilon} + \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{\epsilon})\vec{p}_1}{m(E+m)} \right). \quad (3.52)$$

E o complexo conjugado:

$$W^{*\mu} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{\epsilon}^*}{m}; \vec{\epsilon}^* + \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{\epsilon}^*)\vec{p}_1}{m(E+m)} \right). \quad (3.53)$$

Utilizando os resultados (3.52) e (3.53) em (3.42), a parte temporal da corrente vetorial no limite não-relativístico fica dada por,

$$J_{V(s=1)}^0 = -g_V \left[\delta + \delta \left(\frac{\vec{p}^2}{2m^2} + \frac{\vec{q}^2}{8m^2} \right) \right]. \quad (3.54)$$

Para o setor espacial, ganhamos,

$$J_{V(s=1)}^i = -g_V \left[\frac{\delta}{m} \vec{p}_i + \frac{i}{2m} \epsilon_{ijk} \vec{q}_j \langle \vec{S}_k \rangle \right]. \quad (3.55)$$

As igualdades (3.54) e (3.55) são de fato aproximações para baixas energias, onde termos de terceira ordem ou superior nos *momenta* foram desprezados.

Corrente Pseudo-Vetorial

A corrente axial (pseudo-vetorial) para o caso das partículas de spin-1, é definida com o auxílio do dual do tensor intensidade de campo $\tilde{W}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}W_{\kappa\lambda}$, já que não temos aqui a matriz γ^5 , como no caso fermiônico. O bilinear pseudo-vetorial tem então a seguinte forma:

$$J_{PV(s=1)}^\mu = -ig_{PV} \left[\tilde{W}^{*\mu\nu}W_\nu - \tilde{W}^{\mu\nu}W_\nu^* \right]. \quad (3.56)$$

No espaço dos *momenta* ficamos com

$$J_{PV(s=1)}^\mu = g_{PV} \left[\tilde{W}^{*\mu\nu}W_\nu + \tilde{W}^{\mu\nu}W_\nu^* \right]. \quad (3.57)$$

Aqui, a decomposição de Gordon também desempenha um papel facilitador. Calculando-a temos,

$$J_{PV(s=1)}^\mu = \frac{ig_{PV}}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} q_\nu (\Sigma_{\kappa\lambda})_{\alpha\beta} W^\alpha W^{*\beta}. \quad (3.58)$$

O limite não-relativístico para $\mu = 0$ fica,

$$\begin{aligned} J_{PV(s=1)}^0 &= \frac{ig_{PV}}{2} \epsilon^{0ijk} q_i W_m W_n^* \epsilon_{jkl} (S_l)^{mn} \\ &= -\frac{ig_{PV}}{4m} \epsilon_{ijk} \vec{q}_i \vec{\epsilon}_m \vec{\epsilon}_n^* \epsilon_{jkl} (S_l)_{mn} \\ &= \frac{ig_{PV}}{2m} \vec{q}_i \vec{\epsilon}_m \vec{\epsilon}_n^* (S_i)_{nm}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

de forma que podemos escrever,

$$J_{PV(s=1)}^0 = \frac{ig_{PV}}{2m} \vec{q} \cdot \langle \vec{S} \rangle. \quad (3.60)$$

Para a componente espacial, o cálculo fica um pouco mais longo, mas chegamos em,

$$J_{PV(s=1)}^i = -\frac{g_{PV}}{2m^2} \left\{ \left[\left(\vec{p} - \frac{1}{2} \vec{q} \right) \cdot \vec{\epsilon} \right] (\vec{q} \times \vec{\epsilon}^*)_i - \left[\left(\vec{p} + \frac{1}{2} \vec{q} \right) \cdot \vec{\epsilon}^* \right] (\vec{q} \times \vec{\epsilon})_i \right\}. \quad (3.61)$$

Corrente Tensorial

O bilinear tensorial para partícula de spin-1 é definido como

$$J_{T(s=1)}^{\mu\nu} = g_T W^{*\alpha} (\Sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} W^\beta. \quad (3.62)$$

Dispensamos qualquer decomposição de Gordon e calculamos diretamente o limite não-relativístico de cada componente no espaço dos *momenta*. Para $\mu = 0$ e $\nu = i$ temos,

$$\begin{aligned} J_{T(s=1)}^{0i} &= ig_T (W^{*0} W^i - W^{*i} W^0) \\ J_{T(s=1)}^{0i} &= \frac{ig_T}{2m^2} \left[(\vec{p} + \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon}^* \vec{\epsilon}_i - (\vec{p} - \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon} \vec{\epsilon}_i^* \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Para $\mu = i$ e $\nu = j$ os cálculos ficam um pouco mais longos,

$$\begin{aligned} J_{T(s=1)}^{ij} &= g_T (\Sigma^{ij})_{kl} W^{*k} W^l \\ &= \frac{g_T}{2m} (\Sigma^{ij})_{kl} \left[\left(\vec{\epsilon}_k^* + \frac{(\vec{p} + \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon}^* (\vec{p} + \vec{q}/2)_k}{2m^2} \right) \left(\vec{\epsilon}_l + \frac{(\vec{p} - \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon} (\vec{p} - \vec{q}/2)_l}{2m^2} \right) \right], \end{aligned}$$

e utilizando as relações (3.36), (3.37) e (3.38), temos

$$\begin{aligned} J_{T(s=1)}^{ij} &= \frac{g_T}{2m} \left\{ \epsilon_{ijk} \langle \vec{S}_k \rangle + \frac{i}{2m^2} \left[\left((\vec{p} + \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon}^* \right) \left((\vec{p} + \vec{q}/2)_i \vec{\epsilon}_j - (\vec{p} + \vec{q}/2)_j \vec{\epsilon}_i \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left((\vec{p} - \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon} \right) \left((\vec{p} - \vec{q}/2)_j \vec{\epsilon}_i^* - (\vec{p} - \vec{q}/2)_i \vec{\epsilon}_j^* \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Corrente Pseudo-Tensorial

No caso do bilinear pseudo-tensorial, não podemos o definir através do tensor dual, de forma que, com auxílio do símbolo de Levi-Civita, definimos

$$J_{PT(s=1)}^{\mu\nu} = \frac{g_{PT}}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} W_\alpha^* (\Sigma_{\kappa\lambda})^{\alpha\beta} W_\beta. \quad (3.65)$$

Assim como para a corrente tensorial, aqui também dispensamos qualquer decomposição de Gordon e calculamos diretamente o limite não-relativístico de cada componente no espaço dos *momenta*. Para $\mu = 0$ e $\nu = i$ temos um cálculo bastante parecido com (3.64),

$$\begin{aligned} J_{PT(s=1)}^{0i} &= \epsilon_{ijk} \frac{g_{PT}}{4m} \left\{ \epsilon_{jkl} \langle \vec{S}_l \rangle + \frac{i}{2m^2} \left[\left((\vec{p} + \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon}^* \right) \left((\vec{p} + \vec{q}/2)_j \vec{\epsilon}_k - (\vec{p} + \vec{q}/2)_k \vec{\epsilon}_j \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left((\vec{p} - \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon} \right) \left((\vec{p} - \vec{q}/2)_k \vec{\epsilon}_j^* - (\vec{p} - \vec{q}/2)_j \vec{\epsilon}_k^* \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

e logo,

$$\begin{aligned} J_{PT(s=1)}^{0i} &= \frac{g_{PT}}{4m} \left\{ 2 \langle \vec{S}_i \rangle + \frac{i}{m^2} \left[\left((\vec{p} + \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon}^* \right) \left((\vec{p} + \vec{q}/2) \times \vec{\epsilon} \right)_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left((\vec{p} - \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon} \right) \left((\vec{p} - \vec{q}/2) \times \vec{\epsilon}^* \right)_i \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

Para $\mu = i$ e $\nu = j$ ganhamos

$$J_{PT(s=1)}^{ij} = \frac{ig_{PT}}{2m^2} \epsilon_{ijk} \left((\vec{p} - \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon} \vec{\epsilon}_k^* - (\vec{p} + \vec{q}/2) \cdot \vec{\epsilon}^* \vec{\epsilon}_k \right). \quad (3.68)$$

Ao finalizar o cálculo desta corrente, notamos que existe uma similaridade entre as componentes tensorial e pseudo-tensorial dos diferentes setores. Ou seja, a componente tensorial $0i$ exibe uma correspondência com a componente pseudo-tensorial ij e vice-versa. Isso tanto para as correntes de spin-1, quanto para aquelas de spin-1/2. Essa similaridade se reflete também nos potenciais. Como a corrente, em geral, deve ser adimensional, verificamos que as constantes de acoplamento têm as seguintes dimensões canônicas: $[g_V] = [g_{PV}] = 0$ enquanto $[g_T] = [g_{PT}] = 1$.

3.3 Considerações Finais do Capítulo

Todas as correntes foram construídas de forma a serem bilineares em um dado campo e em seu correspondente conjugado complexo. Notamos que as correntes bosônicas são de-

finidas de forma que sempre apresentam uma derivada explícita. Logo, em altas energias, esse *momentum* deve dominar, mas não no limite não-relativístico. O caso fermiônico é diferente e todos os *momenta* estão implícitos nos campos. Essa derivada extra, no caso das correntes de bósons, marca a diferença entre elas e as correntes de férmions. Isto leva a consequências na forma em que essas fontes lidam com o setor de calibre. Esse ponto ficará mais evidente na seção 4.4 do próximo capítulo, onde vamos desenvolver uma aplicação para as Equações de Maxwell ao se considerar partículas bosônicas carregadas. Preferimos deixar as análises físicas para o capítulo 4, mas já aqui podemos notar algumas similaridades, como aquelas apresentadas pelas correntes tensorial e pseudo-tensorial de cada spin, bem como algumas diferenças: vide as correntes vetoriais do spin-1/2 comparadas com as do spin-1. O setor temporal do spin-1/2 tem um termo gerador de acoplamento spin-orbita que não existe no caso do spin-1. Com todos os resultados encontrados no decorrer deste capítulo, estamos aptos a calcular os potenciais interpartícula.

Capítulo 4

Potenciais de Interação

Interpartícula

As correntes vetoriais são aquelas extraídas diretamente dos lagrangeanos e chamadas de correntes conservadas de Noether. Além desse bilinear, construímos outros no capítulo 3, tanto para o caso de spin-1/2 quanto spin-1. Eles foram propostos de forma que se transformassem sobre a operação de paridade de forma adequada, a depender se fossem pseudo-vetorial, tensorial ou pseudo-tensorial. A observação que deve ser feita é que todas essas correntes propostas anteriormente são conservadas, ou seja, devemos ter sempre $\partial_\mu J^\mu = 0$ e no caso de rank-2 $\partial_\mu J^{\mu\nu} = 0$.

Neste capítulo, vamos calcular os potenciais de fontes de spin-1/2 e 1, trocando um bóson massivo de spin-1. Esta partícula mediadora é descrita através do propagadores calculados no capítulo 2, (2.79) e (2.82), pois vai nos permitir trabalhar com as correntes de rank-2 de forma que produziremos resultados muito mais ricos em relação a termos dependentes do spin e da velocidade. Além de toda motivação dada na introdução para se trabalhar com partícula de spin-1 mediando as possíveis novas interações, vale ressaltar que três das quatro interações fundamentais da natureza são mediadas por partículas de spin-1. São doze os potenciais desenvolvidos, seis para cada spin, são eles: potencial entre duas fontes vetoriais; entre uma vetorial e uma pseudo-vetorial; entre duas pseudo-vetoriais; entre duas tensoriais; entre uma tensorial e uma pseudo-tensorial e finalmente entre duas fontes pseudo-tensoriais.

De acordo com a primeira aproximação de Born, o potencial interpartícula pode ser obtido a partir da transformada de Fourier de uma amplitude calculada no espaço dos *momenta*,

$$V(r, v) = - \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \mathcal{A}(q, \vec{p}), \quad (4.1)$$

onde \vec{r} é o vetor que indica a posição relativa entre as fontes e \vec{p} o *momentum* médio da partícula 1. Abaixo, enumeramos algumas integrais que vão ser necessárias no desenvolvimento deste capítulo:

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{q}^2 + a^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \frac{e^{-ar}}{4\pi r} \quad (4.2)$$

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}_i}{\vec{q}^2 + a^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \frac{i}{4\pi r^2} (1 + ar) \vec{r}_i e^{-ar} \quad (4.3)$$

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}_i \vec{q}_j}{\vec{q}^2 + a^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -\frac{1}{4\pi r^3} \left[a^2 r^2 \vec{r}_i \vec{r}_j + (1 + ar)(3\vec{r}_i \vec{r}_j - \delta_{ij}) \right] e^{-ar}. \quad (4.4)$$

Este capítulo é dividido em cinco seções, sendo a primeira e a segunda reservadas ao cálculo dos potenciais associados a fontes de spin-1/2 e 1, respectivamente. A terceira seção é destinada a discussão e a comparação entre os resultados obtidos. A seção 4.4 traz a discussão do caso eletromagnético. Por fim, na quinta seção, fazemos as conclusões do capítulo.

4.1 Fontes de Spin-1/2

Todas as fontes consideradas nesta seção se referem à partícula de spin-1/2, de forma que evitaremos carregar a notação com o rótulo ($s = 1/2$) nas correntes.

Potencial V-V

Vamos calcular o potencial entre duas fontes vetoriais. Para isto, primeiramente encontramos a amplitude de espalhamento no espaço dos *momenta*. Esta amplitude é definida por,

$$\mathcal{A} = iJ_1 \langle \text{propagador} \rangle J_2. \quad (4.5)$$

No caso de fontes de rank-1, como é o caso da corrente vetorial temos,

$$\mathcal{A}_{V-V}^{(s=1/2)} = iJ_{1V}^\mu \langle A_\mu A_\nu \rangle J_{2V}^\nu, \quad (4.6)$$

onde o propagador é dado pela equação (2.79). Reescrevendo-o abaixo substituindo k pelo *momentum transfer* temos,

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{i}{q^2 - m_0^2} \eta_{\mu\nu} + i \left(\frac{1}{q^2 - m_0^2} + \frac{\alpha}{q^2} \right) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \quad (4.7)$$

onde m_0 é a massa da partícula intermediadora.

Como $q^0 = 0$ e as correntes são conservadas temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{V-V}^{(s=1/2)} &= -iJ_{1V}^\mu \frac{i}{q^2 - m_0^2} \eta_{\mu\nu} J_{2V}^\nu \\ &= -\frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} J_{1V}^\mu J_{\mu 2V} \\ &= -\frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(J_{1V}^0 J_{2V}^0 - J_{1V}^i J_{2V}^i \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vamos desenvolver separadamente $J_{1V}^0 J_{2V}^0$ e $J_{1V}^i J_{2V}^i$. Usando (3.11) temos,

$$\begin{aligned} J_{1V}^0 J_{2V}^0 &= g_1^V g_2^V \left\{ \delta_1 \delta_2 + \frac{\delta_1 \delta_2 \vec{p}^2}{4m_2^2} + \frac{\delta_1 \delta_2 \vec{p}^2}{4m_1^2} - \frac{\delta_1 \delta_2 \vec{q}^2}{16m_2^2} - \frac{\delta_1 \delta_2 \vec{q}^2}{16m_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\delta_1}{4m_2^2} (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 + \frac{i\delta_2}{4m_1^2} (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e usando (3.14) temos,

$$\begin{aligned} J_{1V}^i J_{2V}^i &= g_1^V g_2^V \left\{ -\frac{\delta_1 \delta_2 \vec{p}^2}{m_1 m_2} + \frac{i\delta_1}{2m_1 m_2} \epsilon_{ijk} \vec{p}_i \vec{q}_j \langle \vec{\sigma}_k \rangle_2 + \frac{i\delta_2}{2m_1 m_2} \epsilon_{ijk} \vec{p}_i \vec{q}_j \langle \vec{\sigma}_k \rangle_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4m_1 m_2} \epsilon_{ijk} \vec{q}_j \langle \vec{\sigma}_k \rangle_1 \epsilon_{ilm} \vec{q}_l \langle \vec{\sigma}_m \rangle_2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Podemos definir,

$$V_{V-V}^{(s=1/2)} = V_1 + V_2, \quad (4.11)$$

onde,

$$V_1 = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(J_{1V}^0 J_{2V}^0 \right), \quad (4.12)$$

$$V_2 = -\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(J_{1V}^i J_{2V}^i \right). \quad (4.13)$$

Utilizando as integrais tabeladas (4.2), (4.3) e (4.4) obtemos V_1 ,

$$V_1 = \frac{g_1^V g_2^V e^{-m_0 r}}{4\pi r} \left\{ \delta_1 \delta_2 \left[1 + \left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{4m_2^2} \right) \left(\vec{p}^2 + \frac{m_0^2}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. - \frac{(1+m_0 r)}{2r^2} \vec{L} \cdot \left(\frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma}_2 \rangle}{2m_2^2} + \frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{2m_1^2} \right) \right\}. \quad (4.14)$$

Utilizando novamente (4.2), (4.3) e (4.4) obtemos V_2 ,

$$V_2 = \frac{g_1^V g_2^V e^{-m_0 r}}{4\pi r} \left\{ \frac{\delta_1 \delta_2 \vec{p}^2}{m_1 m_2} - \frac{(1+m_0 r)}{2r^2} \vec{L} \cdot \left(\frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma}_2 \rangle}{m_1 m_2} + \frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{m_1 m_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4m_1 m_2} \langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \langle \vec{\sigma}_2 \rangle \left(m_0^2 + \frac{m_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{4m_1 m_2} \left(\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \hat{r} \right) \left(\langle \vec{\sigma}_2 \rangle \cdot \hat{r} \right) \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \right\}. \quad (4.15)$$

De forma que ficamos com,

$$V_{V-V}^{(s=1/2)} = \frac{g_1^V g_2^V e^{-m_0 r}}{4\pi r} \left\{ \delta_1 \delta_2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} + \left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{4m_2^2} \right) \left(\vec{p}^2 + \frac{m_0^2}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. - \frac{(1+m_0 r)}{2r^2} \vec{L} \cdot \left[\left(\frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma}_2 \rangle}{2m_2^2} + \frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{2m_1^2} \right) + \left(\frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma}_2 \rangle}{m_1 m_2} + \frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{m_1 m_2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4m_1 m_2} \langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \langle \vec{\sigma}_2 \rangle \left(m_0^2 + \frac{m_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{4m_1 m_2} \left(\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \hat{r} \right) \left(\langle \vec{\sigma}_2 \rangle \cdot \hat{r} \right) \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \right\}. \quad (4.16)$$

Definimos o *momentum* angular orbital $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$.

Potencial V-PV

O potencial entre uma fonte vetorial e outra pseudo-vetorial tem sua amplitude dada por,

$$\mathcal{A}_{V-PV}^{(s=1/2)} = -\frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(J_{1V}^0 J_{2PV}^0 - J_{1V}^i J_{2PV}^i \right). \quad (4.17)$$

Com o auxílio de (3.11) e (3.16) calculamos

$$J_{1V}^0 J_{2PV}^0 = -g_1^V g_2^{PV} \frac{\delta_1}{m_2} \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \cdot \vec{p}, \quad (4.18)$$

e com o auxílio de (3.14) e (3.19) temos

$$J_{1V}^i J_{2PV}^i = g_1^V g_2^{PV} \left\{ \frac{\delta_1}{m_1} \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \cdot \vec{p} - \frac{i}{2m_1} \epsilon_{ijk} \vec{q}_j \langle \vec{\sigma}_k \rangle_1 \langle \vec{\sigma}_i \rangle_2 \right\}. \quad (4.19)$$

Finalmente, utilizando os resultados acima e as equações (4.2), (4.3) e (4.4) obtemos

$$V_{V-PV}^{(s=1/2)} = -\frac{g_1^V g_2^{PV}}{4\pi} \left\{ \vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \frac{\delta_1}{r} \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right] + \frac{(1+m_0 r)}{2m_1 r^2} [\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \times \langle \vec{\sigma}_2 \rangle] \cdot \hat{r} \right\} e^{-m_0 r}. \quad (4.20)$$

Potencial PV-PV

A amplitude associada a duas correntes pseudo-vetorial tem a forma

$$\mathcal{A}_{PV-PV}^{(s=1/2)} = -\frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(J_{1PV}^0 J_{2PV}^0 - J_{1PV}^i J_{2PV}^i \right), \quad (4.21)$$

e desenvolvendo separadamente $J_{1PV}^0 J_{2PV}^0$ e $J_{1PV}^i J_{2PV}^i$, usando (3.16) e (3.19), temos

$$J_{1PV}^0 J_{2PV}^0 = -g_1^{PV} g_2^{PV} \frac{(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1)(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1)}{m_1 m_2}, \text{ e} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} J_{1PV}^i J_{2PV}^i &= \frac{g_1^{PV} g_2^{PV}}{4m_2^2} \left[-\vec{p}^2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 + \frac{\vec{q}^2}{4} \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 - i \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) \delta_2 + \right. \\ &+ \left. 2(\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \vec{p})(\langle \vec{\sigma} \rangle_2 \cdot \vec{p}) - 2(\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \vec{q})(\langle \vec{\sigma} \rangle_2 \cdot \vec{q}) \right] + \\ &+ \frac{g_1^{PV} g_2^{PV}}{4m_1^2} \left[-\vec{p}^2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 + \frac{\vec{q}^2}{4} \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 - i \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) \delta_1 + \right. \\ &+ \left. 2(\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \vec{p})(\langle \vec{\sigma} \rangle_2 \cdot \vec{p}) - \frac{1}{2}(\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \vec{q})(\langle \vec{\sigma} \rangle_2 \cdot \vec{q}) \right] + \\ &+ g_1^{PV} g_2^{PV} \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Com os desenvolvimentos acima e usando as integrais tabeladas (4.2), (4.3) e (4.4) obtemos o potencial

$$\begin{aligned} V_{PV-PV}^{(s=1/2)} &= \frac{g_1^{PV} g_2^{PV}}{4\pi} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \left\{ \langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \langle \vec{\sigma}_2 \rangle \left[-1 + \left(\frac{\vec{p}^2}{4} + \frac{m_0^2}{16} + \frac{m_0}{8r} + \frac{1}{8r^2} \right) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \right] + \right. \\ &- \left(\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \vec{p} \right) \left(\langle \vec{\sigma}_2 \rangle \cdot \vec{p} \right) \left(\frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{2m_1^2} + \frac{1}{2m_2^2} \right) + \\ &- \frac{(1+m_0 r)}{4r^2} \vec{L} \cdot \left(\frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{m_2^2} + \frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma}_2 \rangle}{m_1^2} \right) + \\ &- \left. \frac{1}{8} \left(\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \hat{r} \right) \left(\langle \vec{\sigma}_2 \rangle \cdot \hat{r} \right) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

que apresenta interação spin-orbita, como no caso do potencial V-V. No entanto, aqui surgem menos termos exibindo esse comportamento.

Potencial T-T e Potencial PT-PT

Para desenvolver as amplitudes associadas a duas correntes de rank-2, devemos utilizar o propagador encontrado em (2.82). Substituindo o k pelo *momentum transfer*, ele fica,

$$\langle B_{\mu\nu} B_{\kappa\lambda} \rangle = \frac{i}{(q^2 - m_0^2)} (P_b^1)_{\mu\nu, \kappa\lambda} + \frac{2i\beta}{q^2} (P_e^1)_{\mu\nu, \kappa\lambda}. \quad (4.25)$$

A amplitude de espalhamento para duas correntes de rank-2 é dada por

$$\mathcal{A}_{X-Z}^{(s=1/2)} = i J^{\mu\nu} \langle B_{\mu\nu} B_{\kappa\lambda} \rangle J^{\kappa\lambda}. \quad (4.26)$$

Devido à conservação de corrente, o setor longitudinal do propagador não contribui, e logo,

$$\mathcal{A}_{X-Z}^{(s=1/2)} = i J^{\mu\nu} \frac{i}{(q^2 - m_0^2)} (P_b^1)_{\mu\nu, \kappa\lambda} J^{\kappa\lambda}, \quad (4.27)$$

desenvolvendo, obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{X-Z}^{(s=1/2)} &= -\frac{1}{(q^2 - m_0^2)} J_1^{\mu\nu} J_{2\mu\nu}, \\ \mathcal{A}_{X-Z}^{(s=1/2)} &= \frac{1}{(\bar{q}^2 + m_0^2)} (-2J_{1X}^{0i} J_{2Z}^{0i} + J_{1X}^{ij} J_{2Z}^{ij}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Onde os índices X e Z podem ser substituídos por Tensorial ou Pseudo-Tensorial, ou seja, $X - Z = T - T$, ou $= PT - PT$, ou $= T - PT$. De fato, o resultado (4.28) pode ser usado para a obtenção de todos os potenciais associados a duas correntes de rank-2, seja de spin-1/2 ou spin-1.

Vamos agora calcular o potencial interpartícula entre duas fontes tensoriais. A amplitude fica,

$$\mathcal{A}_{T-T}^{(s=1/2)} = \frac{1}{(\bar{q}^2 + m_0^2)} (-2J_{1T}^{0i} J_{2T}^{0i} + J_{1T}^{ij} J_{2T}^{ij}). \quad (4.29)$$

Desenvolvendo $J_{1T}^{0i} J_{2T}^{0i}$ temos,

$$\begin{aligned} J_{1T}^{0i} J_{2T}^{0i} &= g_1^T g_2^T \left\{ \frac{\bar{q}^2 \delta_1 \delta_2}{16m_1 m_2} - \frac{i\delta_1}{8m_1 m_2} \bar{q} \cdot (\vec{p} \times \langle \vec{\sigma} \rangle_2) - \frac{i\delta_2}{8m_1 m_2} \bar{q} \cdot (\vec{p} \times \langle \vec{\sigma} \rangle_1) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4m_1 m_2} \bar{p}^2 (\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) + \frac{1}{4m_1 m_2} (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Desenvolvendo $J_{1T}^{ij} J_{2T}^{ij}$ temos,

$$\begin{aligned}
J_{1T}^{ij} J_{2T}^{ij} &= \frac{g_1^T g_2^T}{4} \left\{ 2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 - \frac{2}{4m_2^2} \langle \vec{\sigma}_k \rangle_1 \left[-\vec{p}^2 \langle \vec{\sigma}_k \rangle_2 + \frac{\vec{q}^2}{4} \langle \vec{\sigma}_k \rangle_2 - i(\vec{q} \times \vec{p})_k \delta_2 + \right. \right. \\
&+ 2\vec{p}_k (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) - \frac{\vec{q}_k}{2} (\vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) \left. \right] - \frac{2}{4m_1^2} \left[-\vec{p}^2 \langle \vec{\sigma}_k \rangle_1 + \frac{\vec{q}^2}{4} \langle \vec{\sigma}_k \rangle_1 + \right. \\
&\left. \left. - i(\vec{q} \times \vec{p})_k \delta_1 + 2\vec{p}_k (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) - \frac{\vec{q}_k}{2} (\vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) \right] \langle \vec{\sigma}_k \rangle_2 \right\}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Da mesma forma feita anteriormente nesta seção, podemos definir,

$$V_{T-T}^{(s=1/2)} = V_{1T-T} + V_{2T-T}, \tag{4.32}$$

onde,

$$V_{1T-T} = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(2J_{1T}^{0i} J_{2T}^{0i} \right), \text{ e} \tag{4.33}$$

$$V_{2T-T} = - \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(J_{1T}^{ij} J_{2T}^{ij} \right). \tag{4.34}$$

Utilizando o resultado encontrado para $J_{1T}^{0i} J_{2T}^{0i}$ e as integrais (4.2), (4.3) e (4.4) obtemos V_{1T-T} , dado por

$$\begin{aligned}
V_{1T-T} &= \frac{g_1^T g_2^T e^{-m_0 r}}{4\pi r} \left\{ \frac{1}{2m_1 m_2} \left[(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) - \vec{p}^2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 - \frac{\delta_1 \delta_2 m_0}{4} \right] + \right. \\
&\left. + \frac{(1 + m_0 r)}{4r^2 m_1 m_2} \vec{L} \cdot \left(\langle \vec{\sigma} \rangle_2 \delta_1 + \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \delta_2 \right) \right\}. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado encontrado para $J_{1T}^{ij} J_{2T}^{ij}$ e as integrais (4.2), (4.3) e (4.4) obtemos V_{2T-T} , dado por

$$\begin{aligned}
V_{2T-T} &= - \frac{g_1^T g_2^T e^{-m_0 r}}{8\pi r} \left\{ \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \left[1 + \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{4} + \frac{m_0}{16} + \frac{(1 + m_0 r)}{8r^2} \right) \right] + \right. \\
&- (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) - \frac{(1 + m_0 r)}{4r^2} \vec{L} \cdot \left(\frac{\delta_2}{m_2^2} \langle \vec{\sigma} \rangle_1 + \frac{\delta_1}{m_1^2} \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \right) + \\
&\left. - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) (\hat{r} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) (\hat{r} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) \right\}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Somando (4.35) com (4.36), encontramos,

$$\begin{aligned}
V_{T-T}^{(s=1/2)} &= \frac{g_1^T g_2^T e^{-m_0 r}}{8\pi r} \left\{ -\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} + \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{4} + \frac{m_0}{16} + \frac{(1 + m_0 r)}{8r^2} \right) \right] + \right. \\
&+ \frac{(1 + m_0 r)}{2r^2} \vec{L} \cdot \left[\left(\frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1}{2m_2^2} + \frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma} \rangle_2}{2m_1^2} \right) + \left(\frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1}{m_1 m_2} + \frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma} \rangle_2}{m_1 m_2} \right) \right] + \\
&+ (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) (\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) - \frac{\delta_1 \delta_2 m_0}{4m_1 m_2} + \\
&\left. + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) (\hat{r} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) (\hat{r} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \right\}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Interessante notar, a partir das correntes pseudo-tensorial (3.28) e (3.30), que, a menos das constantes de acoplamento, temos

$$J_{PT}^{0i} J_{PT}^{0i} \propto \frac{1}{2} J_T^{ij} J_T^{ij}, \quad (4.38)$$

e

$$J_{PT}^{ij} J_{PT}^{ij} \propto 2 J_T^{0i} J_T^{0i}. \quad (4.39)$$

De forma que a amplitude PT-PT fica,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{PT-PT}^{(s=1/2)} &= \frac{1}{(\bar{q}^2 + m_0^2)} (-2 J_{1PT}^{0i} J_{2PT}^{0i} + J_{1PT}^{ij} J_{2PT}^{ij}) \\ &\propto \frac{1}{(\bar{q}^2 + m_0^2)} (-J_{1T}^{ij} J_{2T}^{ij} + 2 J_{1T}^{0i} J_{2T}^{0i}) \\ &\propto -\mathcal{A}_{T-T}^{(s=1/2)}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

o que resultada em potenciais iguais a menos de um sinal global e das constantes de acoplamento

$$V_{PT-PT}^{(s=1/2)} \propto -V_{T-T}^{(s=1/2)}. \quad (4.41)$$

De fato, podemos escrever exatamente,

$$\begin{aligned} V_{PT-PT}^{(s=1/2)} &= -\frac{g_1^{PT} g_2^{PT} e^{-m_0 r}}{8\pi r} \left\{ -\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} + \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{4} + \frac{m_0}{16} + \frac{(1+m_0 r)}{8r^2} \right) \right] + \right. \\ &+ \frac{(1+m_0 r)}{2r^2} \vec{L} \cdot \left[\left(\frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1}{2m_2^2} + \frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma} \rangle_2}{2m_1^2} \right) + \left(\frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1}{m_1 m_2} + \frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma} \rangle_2}{m_1 m_2} \right) \right] + \\ &+ \left(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \right) \left(\vec{p} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \right) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) - \frac{\delta_1 \delta_2 m_0}{4m_1 m_2} + \\ &\left. + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\hat{r} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \right) \left(\hat{r} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2 \right) \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ao comparar os resultados (4.37) e (4.42) com os mesmos potenciais encontrados em [25], percebemos que aqui surgem muito mais acoplamentos. Este fato é devido aos termos de segunda ordem que foram mantidos nesta tese.

Potencial T-PT

O potencial interpartícula entre uma corrente tensorial e outra pseudo-tensorial, até segunda ordem nos *momenta*, é exatamente igual àquele resultado encontrado na referência [25], onde apenas os termos lineares são considerados.

$$V_{T-PT}^{(s=1/2)} = \frac{g_1^T g_2^{PT} e^{-m_0 r}}{8\pi r} \left\{ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{p} \cdot (\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \times \langle \vec{\sigma} \rangle_2) + \frac{(1 + m_0 r)}{2r} \left(\frac{\delta_2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1}{m_2} - \frac{\delta_1 \langle \vec{\sigma} \rangle_2}{m_1} \right) \cdot \hat{r} \right\}. \quad (4.43)$$

4.2 Fontes de Spin-1

Nesta seção, devemos proceder de forma análoga à seção 4.1. No entanto, agora vamos calcular os potenciais associados às fontes de spin-1. Novamente, vamos evitar o rótulo ($s = 1$) usado no capítulo 3 para as correntes bosônicas, mas vamos mantê-lo para as amplitudes e potenciais.

Observando as equações (3.54), (3.55), (3.60), (3.61), utilizando as integrais (4.2), (4.3) e (4.4), considerando o propagador (4.7) e procedendo de forma similar à seção passada, somos capazes de encontrar os Potenciais V-V, V-PV e PV-PV associados às fontes de spin-1. A amplitude para estes três casos é a mesma encontrada para o spin-1/2, ou seja,

$$\mathcal{A}_{X-Z}^{(s=1)} = -\frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \left(J_{1X}^0 J_{2Z}^0 - J_{1X}^i J_{2Z}^i \right), \quad (4.44)$$

onde os índices X e Z representam fontes Vetoriais ou Pseudo-Vetoriais, agora de spin-1. Neste contexto, que encontramos os seguintes potenciais:

Potencial V-V

$$V_{V-V}^{(s=1)} = \frac{g_1^V g_2^V e^{-m_0 r}}{4\pi r} \left\{ \delta_1 \delta_2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} + \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{2} - \frac{m_0^2}{8} \right) \right] + \frac{(1 + m_0 r)}{2m_1 m_2 r^2} \vec{L} \cdot (\delta_1 \langle \vec{S} \rangle_2 + \delta_2 \langle \vec{S} \rangle_1) + \frac{1}{4m_1 m_2} \left(m_0^2 + \frac{m_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \langle \vec{S} \rangle_1 \cdot \langle \vec{S} \rangle_2 + \frac{1}{4m_1 m_2} \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) (\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_1) (\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_2) \right\}; \quad (4.45)$$

Potencial V-PV

$$V_{V-PV}^{(s=1)} = -\frac{g_1^V g_2^{PV} \delta_1}{8\pi m_2} \frac{(1 + m_0 r) e^{-m_0 r}}{r^2} \hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_2; \quad (4.46)$$

Potencial PV-PV

$$\begin{aligned} V_{PV-PV}^{(s=1)} &= -\frac{g_1^{PV} g_2^{PV}}{16\pi m_1 m_2} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \left\{ \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) (\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_1) (\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_2) + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{m_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \langle \vec{S} \rangle_1 \cdot \langle \vec{S} \rangle_2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Observando as equações (3.63), (3.64), (3.67), (3.68), utilizando as integrais (4.2), (4.3) e (4.4), considerando o propagador (4.25) e procedendo de forma análoga ao que já foi feito anteriormente, encontramos os Potenciais T-T, T-PT e PT-PT associados a fontes de spin-1. A amplitude para estes três casos é a mesma encontrada para o spin-1/2, isto é,

$$\mathcal{A}_{X-Z}^{(s=1)} = \frac{1}{(\vec{q}^2 + m_0^2)} (-2J_{1X}^{0i} J_{2Z}^{0i} + J_{1X}^{ij} J_{2Z}^{ij}). \quad (4.48)$$

onde os índices X e Z representam fontes Tensoriais ou Pseudo-Tensoriais, neste caso, de spin-1. De forma que encontramos os seguintes potenciais:

Potencial T-T

$$\begin{aligned} V_{T-T}^{(s=1)} &= -\frac{g_1^T g_2^T}{2m_1^2 m_2^2} \left\{ \left\{ (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_1) \left[(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) - (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) \right] + C.C. \right\} + \right. \\ &\quad + \left\{ \left[(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_1) \left[(\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) + (\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) \right] - C.C. \right] + \right. \\ &\quad + \left. \left[(\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_1) \left[-(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) + (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) \right] - C.C. \right] \right\} \frac{i(1 + m_0 r)}{r} + \\ &\quad + \left\{ \left[m_0^2 r^2 + 3(1 + m_0 r) \right] \left[(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \hat{r}) (\vec{\epsilon}_2^* \cdot \hat{r}) + (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \hat{r}) (\vec{\epsilon}_2 \cdot \hat{r}) + C.C. \right] + \right. \\ &\quad - (1 + m_0 r) \left[(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) + (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) + C.C. \right] \left. \right\} \frac{1}{4r^2} + \\ &\quad + m_1 m_2 \langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle \left. \right\} \frac{e^{-m_0 r}}{4\pi r}; \end{aligned} \quad (4.49)$$

Potencial T-PT

$$\begin{aligned}
V_{T-PT}^{(s=1)} &= \frac{ig_1^T g_2^{PT} e^{-m_0 r}}{2m_1^2 m_2^2 4\pi r} \left\{ \left[m_2 (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_1^*) (\vec{\epsilon}_1 \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle) + m_1 (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_2 \cdot \langle \vec{S}_1 \rangle) - C.C. \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[m_2 (\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_1^*) (\vec{\epsilon}_1 \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle) + m_1 (\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_2 \cdot \langle \vec{S}_1 \rangle) + C.C. \right] \frac{i(1+m_0 r)}{r} \right\}; \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Potencial PT-PT

$$\begin{aligned}
V_{PT-PT}^{(s=1)} &= \frac{g_1^{PT} g_2^{PT}}{2m_1^2 m_2^2} \left\{ \left\{ (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_1) \left[(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) - (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) \right] + C.C. \right\} \right. \\
&\quad + \left\{ \left[(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_1) \left[(\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) + (\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) \right] - C.C. \right] \right. \\
&\quad + \left. \left[(\hat{r}/2 \cdot \vec{\epsilon}_1) \left[-(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) + (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) \right] - C.C. \right] \right\} \frac{i(1+m_0 r)}{r} + \\
&\quad + \left\{ \left[m_0^2 r^2 + 3(1+m_0 r) \right] \left[(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \hat{r}) (\vec{\epsilon}_2^* \cdot \hat{r}) + (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \hat{r}) (\vec{\epsilon}_2 \cdot \hat{r}) + C.C. \right] \right. \\
&\quad - (1+m_0 r) \left[(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2^*) + (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2^*) (\vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{\epsilon}_2) + C.C. \right] \left. \right\} \frac{1}{4r^2} + \\
&\quad \left. + m_1 m_2 \langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle \right\} \frac{e^{-m_0 r}}{4\pi r}. \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Já havíamos notado uma semelhança entre os diferentes setores das correntes tensoriais e pseudo-tensoriais de ambos spin no capítulo 3. Vejamos agora como isto se refletiu nos potenciais: o caso PT-PT é igual ao T-T a menos de um sinal global e das constantes de acoplamento. O mesmo resultado encontra-se no caso do spin-1/2, vide equação (4.41). A diferença no sinal tem uma explicação. O setor $\langle B_{ij} B_{kl} \rangle$ do propagador troca um spin-1 *off-shell*, enquanto o setor $\langle B_{0i} B_{0j} \rangle$ troca um spin-0, também *off-shell*. Ou seja, o setor do potencial interpartícula entre duas fontes pseudo-tensoriais que troca um escalar é o mesmo do setor do potencial interpartícula entre duas fontes tensoriais que troca um spin-1 e vice-versa. É sabido que a troca de partículas escalares ou bosônicas de spin-1 por fontes de cargas iguais tem comportamentos distintos, criando um potencial atrativo ou repulsivo respectivamente, o que explica a diferença no sinal global.

Antes de entrar na seção de Discussão, mencionamos um fato interessante. O potencial T-PT exhibe um novo tipo de interação do spin. A interação da matriz de spin com o próprio vetor de polarização do spin. Esta é uma interação nova, não vista em caso algum de potencial por fontes de spin-1/2.

4.3 Discussão

Considerar termos até a segunda ordem nos *momenta* acaba gerando um potencial entre fontes vetoriais dependente dos spins e da velocidade. Se tivéssemos desprezado os termos de segunda ordem teríamos $V_{V-V} = g^2 \delta_1 \delta_2 \frac{e^{-im_0 r}}{4\pi r}$, independente das fontes. No entanto, ao considerar a ordem quadrática, surgem interações entre fontes de spin-1/2 do tipo $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$, $(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r})$ e $\vec{L} \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$, assim como entre fontes de spin-1 surgem $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, $(\vec{S}_1 \cdot \hat{r})(\vec{S}_2 \cdot \hat{r})$ e $\vec{L} \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$.

Além disso, ainda analisado a interação V-V, percebemos que o potencial gerado a partir de fontes de spin-1/2 exibe mais termos de interação spin-orbita do que o mesmo tipo de potencial gerado por fontes de spin-1. Esta diferença de comportamento já poderia ser prevista desde a obtenção dos bilineares, já que a corrente fermiônica apresenta um termo de produto vetorial entre *momenta* que a corrente bosônica não tem. Ou seja, agora percebemos diferenças nos potenciais V-V entre fontes de spin-1/2 e de spin-1 que vão além dos valores das constantes de acoplamento. Em experimentos com alta precisão esse resultado pode ser de grande valia.

Outra característica interessante ao considerar termos de ordem quadrática está nos potenciais PV-PV do caso de spin-1/2. Comparando o resultado (4.24) com a equação (10) da referência [25] que despreza termos de segunda ordem nos *momenta*, percebemos uma grande incongruência. Além da interação $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$, que aparece em ambos os casos, surgem aqui interações de spin do tipo $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})$, e como no caso do V_{V-V} , $(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})$ e $\vec{L} \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$.

Essa maior quantidade de interações também atinge os potenciais T-T e PT-PT entre fontes de spin-1/2. No caso T-T, se considerarmos apenas a primeira ordem nos *momenta* (ver equação (26) de [25]) somente temos a interação de spin do tipo $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$. Por outro lado, ao considerarmos a ordem quadrática, surgem as outras interações já mencionadas: $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})$, $(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})$ e $\vec{L} \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$.

Comparando os resultados entre fontes de spin-1/2 e spin-1 de potenciais PV-PV, a diferença marcante se encontra no não aparecimento de interação spin-orbita para fontes bosônicas. Observamos que essa interação tem duas origens diferentes. A primeira delas

é reservada apenas para potenciais formados a partir de componentes de corrente que tenham termos do tipo $\frac{(\vec{q} \times \vec{p})}{m^2}$ ou $\frac{(\vec{q} \times \vec{p})}{m^2} \cdot spin$. Este é o caso dos seguintes potenciais formados por fontes de spin-1/2: V-V, PV-PV, T-T e PT-PT. Esse acoplamento é caracterizado por ter m_1^2 e m_2^2 nos denominadores dos termos dos potenciais. A segunda delas é reservada àqueles potenciais formados por componentes de corrente do tipo $\frac{\vec{p}}{m} + \frac{\vec{q} spin}{m}$ ou $\frac{\vec{q}}{m} + \frac{\vec{p} spin}{m}$. Este é o caso dos seguintes potenciais formados por fontes de spin-1/2: V-V, T-T e PT-PT. É também o caso do potencial V-V formado por fontes de spin-1. Esse acoplamento é identificado nos potenciais por termos que sempre carregam $m_1 m_2$ nos denominadores. O potencial PV-PV por fontes de spin-1 não é formado por nenhuma corrente que tenha termos dos tipo mencionados.

Os potenciais T-T, T-PT e PT-PT formado a partir de fontes bosônicas têm vários termos com as polarizações surgindo explicitamente. Esta situação foge do padrão dos resultados encontrados. No entanto, o fato do potencial T-T ser oposto à PT-PT, comportamento igual ao caso desses potenciais gerados por fontes fermiônicas, ratifica nosso resultado. A questão é que já era esperado esse comportamento dos potenciais bosônicos T-T e PT-PT, pois a componente $0i$ da corrente T é análoga à componente ij da corrente PT. E este comportamento das correntes já era visto no caso fermiônico.

Analisamos ainda aqueles potenciais gerados por fontes de spin-1, que misturam uma corrente de rank-1 com outra de rank-2, a fim de comparar com os resultados de [25]. Utilizando o propagador (2.83), encontramos a seguinte expressão para a amplitude,

$$\mathcal{A}_{X-Z} = \frac{i}{\sqrt{2}m_0} \left(\frac{1}{\vec{q}^2} - \frac{1}{\vec{q}^2 + m_0^2} \right) \left(2J_{1X}^i J_{2Z}^{0j} - J_{1X}^0 J_{2Z}^{ij} \right) \epsilon_{ijk} \vec{q}_k, \quad (4.52)$$

onde agora X poderá ser Vetorial ou Pseudo-Vetorial e Z Tensorial ou Pseudo-Tensorial.

Dos quatro potenciais calculados, destacamos três deles. O potencial V-T, que tem sua forma quase que idêntica ao caso do spin-1/2, vide equação (29) de [25],

$$V_{V-T}^{(s=1)} = \frac{g_1^V g_2^T \delta_1}{4\sqrt{2}\pi m_0 m_2} \frac{\langle \vec{S}_2 \rangle \cdot \hat{r}}{r^2} \left(1 - (1 + m_0 r) e^{-m_0 r} \right). \quad (4.53)$$

O potencial PV-T, que é totalmente diferente do caso de spin-1/2, mas que curiosamente é bem similar ao caso PV-PV por fontes de spin-1, confira equação acima (4.47). Ao analisar as correntes de spin-1 PV e T, percebemos que suas componentes são parecidas

e isso se refletiu nos potenciais.

$$\begin{aligned}
V_{PV-T}^{(s=1)} &= \frac{g_1^{PV} g_2^T}{8\sqrt{2}\pi r^3 m_0 m_1 m_2} \left\{ \left((3 + 3m_0 r + m_0^2 r^2) e^{-m_0 r} - 3 \right) (\langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \hat{r}) (\langle \vec{S}_2 \rangle \cdot \hat{r}) + \right. \\
&\quad \left. - \left((1 + m_0 r) e^{-m_0 r} - 1 \right) (\langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle) \right\}. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Por último, destacamos o potencial V-PT por ser muito similar ao caso desse mesmo potencial gerado por fontes de spin-1/2, vide equação (32) de [25]. Todas as interações de spin do caso fermiônico estão presentes no caso bosônico, inclusive a interação $\vec{L} \cdot \vec{S}_2$, que é, especificamente, do *momentum* angular orbital com a matriz de spin da segunda corrente (aquela que carrega a simetria pseudo-tensorial).

$$\begin{aligned}
V_{V-PT}^{(s=1)} &= \frac{g_1^V g_2^{PT}}{\sqrt{2} m_0 m_1 m_2^2} \left\{ \frac{\delta_1 m_1}{4\pi r^3} [(\vec{\epsilon}_2 \cdot \hat{r})(\vec{\epsilon}_2 \cdot \hat{r}) e^{-m_0 r} (3 - (3 + 3m_0 r + m_0^2 r^2))] + \right. \\
&\quad + \delta_2 \left[(1 + m_0 r) e^{-m_0 r} - 1 \right] + \frac{i\delta_1 m_1}{4\pi r^2} [(\vec{P} \cdot \vec{\epsilon}_2)(\hat{r} \cdot \vec{\epsilon}_2) - C.C.] \left(1 - (1 + m_0 r) e^{-m_0 r} \right) + \\
&\quad + \frac{\delta_1 m_2}{4\pi r^3} (\vec{L} \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle) \left[(1 + m_0 r) e^{-m_0 r} - 1 \right] + \\
&\quad + \frac{m_2}{8\pi r^3} \left[\left(3 - (3 + 3m_0 r + m_0^2 r^2) e^{-m_0 r} \right) (\langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \hat{r}) (\langle \vec{S}_2 \rangle \cdot \hat{r}) + \right. \\
&\quad \left. + \left((1 + m_0 r + m_0^2 r^2) e^{-m_0 r} - 1 \right) \langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \langle \vec{S}_2 \rangle \right] \left. \right\}. \tag{4.55}
\end{aligned}$$

O potencial PV-PT, gerado por fontes de spin-1, somente traz contribuições de ordem superior: $V_{PV-PT}^{(s=1)} = \mathcal{O}(v^3/c^3) + \mathcal{O}(v^5/c^5)$.

No final da seção 4.2 pontuamos que o potencial T-PT exhibe um novo tipo de interação de spin, entre a matriz e o próprio vetor de polarização de spin. Este acoplamento não é visto em caso algum de potencial por fontes de spin-1/2. É bom, entretanto, chamar a atenção para as interações que aparecem apenas nos potenciais gerados por fontes de spin-1/2, são elas: $\vec{p} \cdot \vec{\sigma}$, $(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2) \cdot \hat{r}$, $(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{p}$ e $(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}_1)(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}_2)$. Este último é apenas encontrado no caso PV-T e não está explicitado nesta tese, porém pode ser encontrado em [25] equação (30). Os casos de interação de spin que aparecem em ambos potenciais, gerados por fontes de spin-1/2 ou spin-1, são: $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ ou $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$; $\vec{\sigma} \cdot \hat{r}$ ou $\vec{S} \cdot \hat{r}$; e $\vec{L} \cdot \vec{\sigma}$ ou $\vec{L} \cdot \vec{S}$. Os potenciais gerados por fontes de spin-1/2 ou spin-1 foram bem caracterizadas. Deixamos claro quais são os acoplamentos comum aos dois tipos de potenciais e quais são aqueles peculiares a apenas um dos tipos de potencial. As diferenças podem auxiliar, por

exemplo, na determinação do tipo de fonte de um determinado experimento onde não se tenha inicialmente essa informação.

4.4 O Caso Eletromagnético

Todos os potenciais que calculamos acima trocam uma partícula de spin-1 massiva. Se considerássemos essa partícula mediadora sem massa, seu propagador seria o do fóton, e teríamos, por exemplo, o potencial V-V em primeira ordem nos *momenta* dado por,

$$V_{V-V} = \frac{g_1^V g_2^V}{4\pi r} \delta_1 \delta_2, \quad (4.56)$$

tanto para férmions, quanto para bósons. Podemos concluir que a interação eletromagnética depende apenas das cargas? A massa e o spin não influenciam? Para responder essas questões vamos considerar o lagrangeano de Maxwell,

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (4.57)$$

que aplicando o princípio variacional resulta na equação:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (4.58)$$

A teoria macroscópica não se interessa por quem forma a corrente J . O caso padrão é uma corrente composta por férmions, de forma que teríamos o lagrangeano,

$$\mathcal{L}_{Maxwell}^{Dirac} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieqA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (4.59)$$

Variando este lagrangeano em relação ao campo de calibre A_μ ganhamos,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = eq\bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \quad (4.60)$$

onde a corrente é explicitamente formada por matéria fermiônica.

Quando consideramos a matéria formada por bósons, as equações de Maxwell são alteradas. O caso mais simples é do spin-0. Considerando o lagrangeano,

$$\mathcal{L}_{Maxwell}^\phi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D^\mu\phi^*)(D_\mu\phi) + m^2\phi^*\phi, \quad (4.61)$$

onde $D^\mu = \partial^\mu + ieqA^\mu$, e variando com respeito a A^μ , temos,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -ieq(\phi\partial^\nu\phi^* + \phi^*\partial^\nu\phi) + 2e^2q^2A^\nu(\phi^*\phi). \quad (4.62)$$

Analisando a equação acima, já fica evidente como as equações de Maxwell foram alteradas. Comparando as equações (4.60) e (4.62), percebemos que as correntes apresentam um termo em comum, no entanto, a corrente bosônica revela o aparecimento de um segundo termo que acopla, além da carga, a densidade de matéria, ao eletromagnetismo. O caso escalar já começa a responder a nossa pergunta inicial, quando revela uma dependência da massa no acoplamento eletromagnético. E o spin? Existe alguma influência do spin na interação eletromagnética? Para responder essa questão vamos desenvolver o caso vetorial.

Para matéria composta por partículas de spin-1, o lagrangeano tem a forma,

$$\mathcal{L}_{Maxwell}^W = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}'^*W'^{\mu\nu} + m^2W_\mu^*W^\mu + ieW_\mu^*W_\nu F^{\mu\nu}, \quad (4.63)$$

onde $W'^{\mu\nu} = D^\mu W^\nu - D^\nu W^\mu$ e $D^\mu = \partial^\mu + ieqA^\mu$. Como estamos considerando o caso eletromagnético, é necessário que se acrescente o termo de acoplamento não-mínimo, que surge naturalmente da Teoria Eletrofraca de Salam, Weinberg e Glashow [57]. De fato, dentro desta teoria que é não-Abeliana, este termo pode ser considerado como um acoplamento mínimo. O que estamos fazendo é considerar um recorte desta teoria mais ampla, já que queremos trabalhar apenas com o eletromagnetismo.

Variando (4.63) com respeito a A_μ , ganhamos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -ieq(W^{*\nu\mu}W_\mu - W^{\nu\mu}W_\mu^*) - 2e^2q^2A^\nu(W^{*\mu}W_\mu) \\ &+ e^2q^2A^\mu(W_\mu^*W^\nu + W^{*\nu}W_\mu) - ieq\partial_\mu(W^{*\nu}W^\mu - W^{*\mu}W^\nu), \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde $W^{\nu\mu} = \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu$. As equações de Maxwell (4.64) alteram (4.60), através de três novos termos. Além da parte da corrente já conhecida, $J^\nu = ieq(W^{*\nu\mu}W_\mu - W^{\nu\mu}W_\mu^*)$, que faz o papel das cargas e correntes usuais como no caso fermiônico, temos dois novos termos acoplados com os potenciais eletromagnético escalar e vetor, e um novo termo advindo do acoplamento não-mínimo. Os dois primeiros não contribuem a nível de árvore,

pois apresentam três campos, mas contribuem para efeito em fenômenos com energias mais altas, onde deve-se considerar *loops* quânticos. Diferentemente, o último termo contribui no potencial V-V induzido pela troca de um fóton já a nível de árvore. A corrente vetorial de spin-1 corrigida com o termo de acoplamento não-mínimo, no espaço dos *momenta*, tem a forma,

$$J_{V(s=1)}^{\mu}/q = e(W^{*\mu\nu}W_{\nu} + W^{\mu\nu}W_{\nu}^*) + ieq_{\nu}W^{*\kappa}W^{\lambda}(\Sigma^{\mu\nu})_{\kappa\lambda}. \quad (4.65)$$

Vamos utilizar esta corrente para calcular o potencial V-V. Antes, no entanto, devemos explicitar o limite NR da corrente (4.65). Para $\mu = 0$ e $\mu = i$, temos respectivamente:

$$J_{V(s=1)}^0 = -e \left[\delta + \delta \left(\frac{\vec{p}^2}{2m^2} + \frac{\vec{q}^2}{8m^2} \right) \right] + \frac{e}{2m^2} \left[i(\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \langle \vec{S} \rangle + (\vec{q} \cdot \vec{\epsilon}^*)(\vec{q} \cdot \vec{\epsilon}) \right] \quad (4.66)$$

$$J_{V(s=1)}^i = -e \left[\frac{\delta}{m} \vec{p}_i + \frac{i}{m} \epsilon_{ijk} \vec{q}_j \langle \vec{S}_k \rangle_1 \right]. \quad (4.67)$$

Comparando os resultados acima com as correntes (3.54) e (3.55), vemos novos termos devido ao acoplamento não-mínimo em (4.66), além do fator 2 que aparece em (4.67). Estas alterações vão refletir no potencial V-V calculado abaixo.

Primeiramente, consideramos um fóton massivo, já que é interessante também comparar esse novo potencial com o caso já calculado, (4.45).

$$\begin{aligned} V_{V-V}^{\text{mass}} = & \frac{e^2 q^2 e^{-m_0 r}}{4\pi r} \left\{ \delta_1 \delta_2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} + \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{2} - \frac{m_0^2}{8} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{(1 + m_0 r)}{r^2} \vec{L} \cdot \left[\frac{1}{m_1 m_2} \left(\delta_1 \langle \vec{S} \rangle_2 + \delta_2 \langle \vec{S} \rangle_1 \right) + \left(\frac{\delta_1 \langle \vec{S} \rangle_2}{2m_2^2} + \frac{\delta_2 \langle \vec{S} \rangle_1}{2m_1^2} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{m_1 m_2} \left(m_0^2 + \frac{m_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \langle \vec{S} \rangle_1 \cdot \langle \vec{S} \rangle_2 + \\ & - \frac{1}{m_1 m_2} \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) (\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_1) (\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_2) + \frac{\zeta}{2} \left[\frac{\delta_1}{m_2^2} \left(-\delta_2 \frac{(1 + m_0 r)}{r^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(m_0^2 + \frac{3m_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) (\hat{r} \cdot \vec{\epsilon}_2)(\hat{r} \cdot \vec{\epsilon}_2^*) \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] \left. \right\}. \quad (4.68) \end{aligned}$$

Introduzimos uma constante ζ somente por conveniência, neste caso, $\zeta = 1$. Percebemos que alguns fatores da segunda, terceira e quarta linha da equação acima são corrigidos em relação a (4.45), bem como surge dois novos termos de acoplamento spin-orbita devido exclusivamente ao acoplamento não-mínimo do campo de matéria de spin-1 com o campo eletromagnético. Interessante notar que esse novo potencial apresenta todos os termos de

acoplamento spin-orbita que aparecem no potencial V-V por fontes fermiônicas, compare com a equação (4.16). Para o fóton sem massa, temos,

$$\begin{aligned}
V_{V-V_{\text{eletro}}}^{\text{massless}} &= \frac{e^2 q^2}{4\pi r} \left\{ \delta_1 \delta_2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} + \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \frac{\vec{p}^2}{2} \right] + \right. \\
&+ \frac{1}{r^2} \vec{L} \cdot \left[\frac{1}{m_1 m_2} \left(\delta_1 \langle \vec{S} \rangle_2 + \delta_2 \langle \vec{S} \rangle_1 \right) + \left(\frac{\delta_1 \langle \vec{S} \rangle_2}{2m_2^2} + \frac{\delta_2 \langle \vec{S} \rangle_1}{2m_1^2} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{m_1 m_2 r^2} \langle \vec{S} \rangle_1 \cdot \langle \vec{S} \rangle_2 - \frac{3}{m_1 m_2 r^2} \left(\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_1 \right) \left(\hat{r} \cdot \langle \vec{S} \rangle_2 \right) \\
&+ \left. \frac{\zeta}{2} \left[\frac{\delta_1}{m_2^2} \left(\frac{3}{r^2} (\hat{r} \cdot \vec{\epsilon}_2) (\hat{r} \cdot \vec{\epsilon}_2^*) - \frac{\delta_2}{r^2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\}. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Todos os acoplamentos spin-orbita se mantêm para o caso do fóton comum sem massa, (4.69). Aqui, assim como na equação (4.68), temos $\zeta = 1$.

Os termos que desprezamos em (4.64), por não contribuírem a nível de árvore, podem ser analisados através de uma interessante comparação. A Teoria de London [62, 63] para os supercondutores, que é o primeiro modelo teórico que tenta explicar o efeito Meissner (expulsão do campo magnético de dentro do supercondutor), se ajusta exatamente a um desses termos. A corrente de London tem a forma,

$$\vec{J}_L = -\frac{n e^{*2}}{m^*} \vec{A}, \tag{4.70}$$

onde n é a densidade de partículas, $e^* = 2e$, $m^* = 2m$ e \vec{A} é o potencial vetor. Vamos desenvolver a equação (4.64) para $\nu = j$,

$$\partial_t \vec{E} - \nabla_j \epsilon_{ijk} \vec{B} = -\vec{J}_{Wj} + 2e^2 q^2 \frac{2m}{2m} (W^{*\mu} W_\mu) \vec{A}_j - e^2 q^2 A^\mu (W_\mu^* W^j + W^{*j} W_\mu), \tag{4.71}$$

e logo,

$$\nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E} + \vec{J}_W - \frac{e^{*2} q^2}{m^*} n_W \vec{A} + e^2 q^2 A^\mu (W_\mu^* \vec{W} + \vec{W}^* W_\mu), \tag{4.72}$$

onde $\vec{J}_W = -ieq (W^{*j\mu} W_\mu - W^{j\mu} W_\mu^*) - ieq \partial_\mu (W^{*j} W^\mu - W^{*\mu} W^j)$ e $n_W = m W^{*\mu} W_\mu$ é a densidade de partículas.

Ao compararmos o termo $\frac{e^{*2} q^2}{m^*} n_W \vec{A}_j$ com a corrente de London, percebemos que são idênticos. O parcial sucesso obtido pelo modelo de London foi devido à acertada corrente que ele propôs para descrever os "super-elétrons", que são, na verdade, os elétrons que

formam os pares de Cooper. De fato, estes pares se comportam como partículas bosônicas de spin-0 ou -1. Por isso sua corrente com a forma proposta pelos irmãos London conseguiu descrever o efeito Meissner na presença de campos magnéticos externos. Observamos que, se desenvolvêssemos o caso do spin-0, ou seja, considerar a equação (4.62) para $\nu = j$, poderíamos fazer a mesma comparação com a corrente de London, pois o que ocorre é um acoplamento da matéria bosônica com o eletromagnetismo, e isto é comum aos dois tipos de bóson.

O que estamos chamando a atenção é que partículas bosônicas apresentam uma interação com o eletromagnetismo diferente da interação padrão dos férmions. O caso do spin-1 é ainda mais interessante, pois o termo $e^2 q^2 A^\mu (W_\mu^* W^\nu + W^{*\nu} W_\mu)$, é onde temos novos efeitos envolvendo, além da massa, o spin. Os potenciais eletromagnético vetor e escalar se acoplam à polarização do spin, já que o A^μ está saturado com os campos W_μ^* e W_μ . Para $\nu = i$, por exemplo, temos,

$$e^2 q^2 A^\mu (W_\mu^* W^i + W^{*i} W_\mu) = e^2 q^2 \left(\vec{\epsilon}_i^* \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{\epsilon}}{2m^2} \Phi + \vec{\epsilon}_i \frac{\vec{p}'_1 \cdot \vec{\epsilon}^*}{2m^2} \Phi - \vec{\epsilon}_i^* \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{A}}{2m} - \vec{\epsilon}_i \frac{\vec{\epsilon}^* \cdot \vec{A}}{2m} \right). \quad (4.73)$$

Fica claro o porquê da ausência deste termo quando trabalhamos com partículas de spin-0 carregadas, já que para elas não há polarização.

4.5 Conclusões do Capítulo

Mostramos, neste capítulo, que existem diferenças marcantes entre os potenciais por fontes de spin-1 e por fontes de spin-1/2. O comportamento monopolo-dipolo e dipolo-dipolo, aparece em potenciais por fontes de ambos os spins, mas com muitas restrições para aqueles potenciais gerados por correntes bosônicas. Termos do tipo $\vec{p} \cdot \vec{\sigma}$, $(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2) \cdot \hat{r}$, $(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{p}$ e $(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}_1)(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}_2)$ são encontrados apenas em interação spin-1/2-spin-1/2, enquanto a peculiaridade mais marcante dos potenciais bosônicos é interação entre o vetor de polarização e a matriz de spin encontrada no potencial T-PT. Esses traços podem ser fundamentais em experimentos que não consigam diferenciar se suas fontes apresentam o spin inteiro ou semi-inteiro. Além disso, este trabalho considera uma aproximação até a segunda ordem nos *momenta*, algo não realizado explicitamente nem para o spin-1/2, e

que revela de forma mais evidente as diferenças e semelhanças entres os potenciais. Em caso de descoberta de alguma nova força, poderemos verificar a importância dos termos até esta ordem, se, por exemplo, for detectado um acoplamento spin-orbita, já que quase todos eles são advindos de termos bilineares nos *momenta*.

A questão eletromagnética discutida no fim do capítulo, deve ser colocada em evidência nessas conclusões, pois levanta um problema de grande importância para a física. Aparentemente, apenas a carga pode se acoplar ao eletromagnetismo, no entanto, vimos que isso é apenas para o caso da matéria fermiônica. Os bósons se acoplam ao eletromagnetismo de varias formas, além da carga, a massa e o spin também contribuem na interação, o que leva a teoria eletromagnética a um diferente paradigma, que vai além da carga. Desta forma, podemos levantar a seguinte questão: as partículas bosônicas neutras podem se acoplar ao fóton? Através da análise desse formalismo, nada indica que sim, mas uma abordagem feita considerando *loops* quânticos podem indicar um acoplamento indireto entre fótons e partículas neutras. Exemplo: um fóton se acoplando a um elétron e um pósitron, e cada um desses férmions se acoplando a um neutrino massivo em dois outros vértices, que estariam ligados pelo propagador fraco $\langle W^+W^- \rangle$.

Uma partícula de spin-1 massiva pode ser descrita por diferentes formas dentro das teorias de campos. Ao menos três descrições foram feitas no decorrer desta tese, dois métodos envolvendo uma massa do tipo Proca, e um terceiro que tem a sua massa gerada por um termo topológico que não quebra a invariância de calibre. Interessante notar que ao descrever o spin-1 massivo, intermediário da interação, usamos o formalismo topológico (2.49), já que havia a preocupação com o propagador (depois vamos argumentar porque esta preocupação não é necessária). Para descrever a partícula de matéria de spin-1 massiva e carregada, que faz o papel das fontes, não há preocupação com a geração da massa. Utilizamos a representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz, caracterizada por ter um campo vetorial, W^μ , para a construção da correntes e por conseguinte para o calculo dos potenciais. Chamamos essa descrição de representação de campo vetorial. Com a finalidade de sondar o comportamento dos potenciais utilizando uma diferente representação de campo para as fontes de spin-1, construímos algumas correntes e calculamos os potenciais associados, utilizando um campo tensorial antissimétrico de rank-2 de CSKR, $B_{\mu\nu}$.

Chamamos essa descrição de representação de campos tensorial. Fizemos isso para os três casos iniciais, os potenciais V-V, V-PV e PV-PV e percebemos que eles são iguais aos potenciais desenvolvidos através da chamada representação vetorial, equações (4.45), (4.46) e (4.47). Para finalizar este estudo, desenvolvemos a mesma aplicação eletromagnética da seção passada, caracterizada pela corrente (4.65) e pelos potenciais (4.68) e (4.69). Agora utilizando a representação de campo tensorial, a corrente obtida foi:

$$J_V^{T\rho} = 2ep^\rho B_{\mu\nu}^* B^{\mu\nu} + (g + 1)ieq_\sigma B^{*\mu\nu} (\Sigma^{\rho\sigma})_{\mu\nu,\alpha\beta} B^{\alpha\beta}. \quad (4.74)$$

Fazendo $g = 2$, para $\rho = 0$ e $\rho = i$, temos respectivamente,

$$J_V^{T0} = e \left[\delta + \delta \left(\frac{\vec{p}^2}{2m^2} + \frac{\vec{q}^2}{8m^2} \right) \right] - \frac{e}{2m^2} \left[i(\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \langle \vec{S} \rangle - (\vec{q} \cdot \vec{\epsilon})(\vec{q} \cdot \vec{\epsilon}^*) + \delta \vec{q}^2 \right] \quad (4.75)$$

$$J_V^{Ti} = e \frac{\delta}{m} \vec{p}_i + \frac{ie}{m} (\vec{q} \times \langle \vec{S} \rangle)_i. \quad (4.76)$$

O potencial V-V na representação tensorial fica dado por,

$$V_{V-V_{\text{eletro}}}^T = V_{V-V_{\text{eletro}}} \Big|_{\zeta=-1} + \frac{e^2 \delta_1 \delta_2 m_A^2}{8\pi} \frac{e^{-m_A r}}{r} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right), \quad (4.77)$$

onde $V_{V-V_{\text{eletro}}} \Big|_{\zeta=-1}$ se refere a equação (4.68) com $\zeta = -1$. Chamamos a atenção para o destaque do caso eletromagnético em relação aos outros potenciais induzidos por uma nova força macroscópica, pois o eletromagnetismo tem o poder de alterar o perfil dos potenciais a depender da representação de campo utilizada. É possível que a partícula mediadora seja capaz de suscitar as diferenças entre as duas representações, e de fato podemos obter diferentes potenciais, como foi o caso de $V_{V-V_{\text{eletro}}}^T$ e $V_{V-V_{\text{eletro}}}$. Este resultado pode levar a distinguir qual a representação mais adequada para se descrever uma partícula de spin-1. No entanto, em geral, não podemos diferenciar entre a representação de campo vetorial e a tensorial se considerarmos apenas o setor de spin dos potenciais. As diferenças, para além do setor de monopolos, entre $V_{V-V_{\text{eletro}}}^T$ e $V_{V-V_{\text{eletro}}}$ podem se tornar evidentes caso estendamos nossos cálculos para incluir efeitos de quadrupolo no potencial V-V. Isto pois, previsões distintas do momento de quadrupolo elétrico da partícula de spin-1 foram obtidas para diferentes formalismos [64]. Apenas contribuições de dipolo foram consideradas até aqui, mas esperamos reportar novos resultados que abarquem as

contribuições que podem surgir dos momentos de quadrupolo em trabalho futuro que já está sendo preparado [65].

Em relação aos propagadores, apesar de termos usado aqueles obtidos no capítulo 2, (2.79), (2.82) e (2.83), para o cálculo dos potenciais interpartícula, percebemos que os resultados não se alterariam se tivéssemos usado propagadores associado a lagrangeanos do tipo Proca, como o propagador (1.23) para o caso de correntes de rank-1, assim como o propagador (1.49) para correntes de rank-2 (podemos verificar uma mudança de sinal para este caso que é estritamente devido as diferenças nas definições dos lagrangeanos). Isso ocorre pois o que é alterado nos propagadores é a parte longitudinal (responsável pelas inconsistências), como as correntes são conservadas, estes setores não contribuem para os potenciais. No entanto, vale ressaltar que apenas o propagador, (2.83), advindo do modelo que preserva a simetria de calibre, é capaz de dar forma aos potenciais que misturam correntes de diferentes ordens.

Capítulo 5

Considerações Finais e Perspectivas

Ao final de cada capítulo desta tese houve uma tentativa de compilar os resultados ali encontrados. Nestas Considerações Finais e Perspectivas, concentramo-nos principalmente em fazer uma auto-análise de cada parte do trabalho. Em geral, podemos dizer que esta tese foi desenvolvida para culminar no estudo de potenciais macroscópicos induzidos por uma nova força (provavelmente não-fundamental, mas efetiva) e gerados por fontes associadas a partículas de spin-1. É certo que, dentro deste esforço, esteve presente como um guia a única força macroscópica bem descrita pela Teoria Quântica de Campos até os dias atuais: o Eletromagnetismo. Deve-se observar que iniciamos e concluímos esta tese trabalhando com a Eletrodinâmica. No capítulo 1, abordamos modelos e aspectos da eletrodinâmica para partículas com carga e spin-1, onde associamos as inconsistências dos propagadores ao termo de massa do tipo Proca, que não é invariante de calibre. No capítulo 4, mais especificamente, na seção 4.4, trabalhamos em detalhe um dos pontos centrais desta tese: diz respeito ao acoplamento entre cargas com spin-1 e o fóton. Vimos que a massa e o estado de polarização do spin-1 têm papéis fundamentais neste acoplamento, levando a uma forte diferenciação na eletrodinâmica de partículas de spin-1, quando comparada às Equações de Maxwell usuais, onde a densidade de carga e a densidade de corrente são aquelas para matéria carregada com spin-1/2.

No capítulo 2, propusemos um modelo no qual a massa do bóson vetorial considerado é gerada através de um termo topológico. Este apresenta propagadores consistentes com o critério da contagem de potências e é invariante de calibre. Aqui, duas questões limitantes

devem ser apontadas: a importância da invariância de calibre foi muito pouco explorada; e nenhuma consideração a nível de quantização dos campos foi realizada. Assim, sugerimos dois seguimentos de trabalho:

1. estudar e revelar, a partir de princípios da Teoria de Grupos, qual a importância da invariância de calibre para descrever corretamente partículas massivas de spin-1, sobretudo quando se trata de potenciais de calibre descritos por 2-formas, o que nos sugere que se teria que buscar uma extensão dos grupos clássicos a fim de se incluir parâmetros que não sejam de natureza meramente escalar. A questão relevante aqui é associar cargas à matéria que se transforme não-trivialmente sob um grupo de simetria com parâmetro de natureza vetorial.

Uma outra questão de pesquisa seria:

2. explorar a dinâmica de partículas massivas de spin-1, a partir do modelo proposto no capítulo 2, escolhendo-se adequadamente a base de campos que diagonalize o termo de massa e que será usada na quantização, procurando uma solução que evite a não-localidade, o que é um problema nada trivial e que pode comprometer todo o processo aqui delineado.

O capítulo 3 compila, de forma direta, todas as correntes que foram necessárias para os cálculos dos potenciais desenvolvidos no capítulo 4. No entanto é interessante notar que, apesar de não haver nenhuma partícula de matéria genuinamente elementar estável com spin igual a 1, existem estruturas físicas, como os pares de Cooper, citados na seção 4.4, que, em estado de onda-p, reproduzem o comportamento de uma partícula com este spin, de forma que o estudo das correntes de spin-1 se torna relevante e foi considerado, aqui, pela primeira vez. Apesar da nossa iniciativa, algumas lacunas ainda ficaram abertas, como calcular as correntes escalar e pseudo-escalar, comparando os resultados com aqueles encontrados por Moody e Wilczek [1]. O trabalho mais completo, com resultados apresentados no capítulo 4, encontra-se publicado em [46]. Aí, são apresentados os principais resultados da tese, porém algumas questões ficaram intocadas. Por exemplo, somente abordamos potenciais induzidos por uma partícula massiva de spin-1. No entanto, outra candidata a mediadora de nova interação macroscópica, citada na Introdução, é a partícula de spin-0. Este estudo poderá ser realizado em tese de outro membro do nosso

Grupo de Pesquisa. Outro aspecto limitante do nosso trabalho é o fato de não explorarmos as configurações clássicas de campos que são soluções das equações de Maxwell para partículas de spin-1, (4.64). De forma que encaminhamos:

3. estudar as equações modificadas de Maxwell (4.64), pelo menos, à ordem de um loop e obter propriedades específicas das configurações de campos que podem ser gerados a partir de correntes de partículas de spin-1, carregadas ou neutras. Há uma interação fonte de singularidade devido ao acoplamento da densidade de partículas com os potenciais eletromagnéticos, e esta questão pode levar a um encaminhamento da discussão sobre a extensibilidade de fontes bosônicas.

Ao calcularmos o potencial eletromagnético em duas representações de campo distintas, vetorial e tensorial, nas seções 4.4 e 4.5, não fomos capazes de diferenciá-los ao considerarmos apenas o setor de spin. Para além do setor de monopolos, as diferenças entre $V_{V-V_{\text{eletro}}}^T$ e $V_{V-V_{\text{eletro}}}$ podem se tornar evidentes caso estendamos nossos cálculos para incluir efeitos de quadrupolo no potencial V-V. Um outro aspecto associado que podemos investigar são os potenciais gerados por fontes de spin-2 massiva e carregada, já que, para uma partícula com este spin, o primeiro termo da expansão em multipolos é um termo de quadrupolo. Recentemente, a Colaboração LIGO detectou buracos negros do tipo Kerr que se fundiram e geraram ondas gravitacionais [66]. Caso fossem encontrados buracos negros do tipo Reissner-Nordstrom, possivelmente grávitons massivos e carregados surgiriam como excitações associadas a ondas gravitacionais que viriam a ser produzidas [67]. Além disto, existem outras motivações para se estudar um gráviton massivo [68–72]. Abaixo, encaminhamos um trabalho que pode ser continuado imediatamente após a finalização desta tese:

4. obter as correntes conservadas de Noether, a partir de um lagrangeano de spin-1, que considere interação de quadrupolo, nas representações de campo vetorial e tensorial. Após, calcular os potenciais eletromagnéticos e comparar com os resultados trabalhados sem os termos quadrupolares. Em seguida, a partir de um lagrangeano que descreva campos massivos e carregados com spin-2, caracterizados por uma interação quadrupolar, estudar a corrente conservada de Noether. Com isto, passa-se ao cálculo dos potenciais macroscópicos gerados por fontes associadas a bósons carregados de spin-2, tendo o fóton

como intermediador da interação. Este problema é motivado pela possibilidade de que modelos estendidos além da Física do Modelo Padrão apresentem excitações do tipo grávitons massivos e carregados. A sua interação e seus decaimentos são objetos de interesse em conexão com medidas a serem realizadas nas Colocações ATLAS e CMS do LHC. Além disso, cabe comparar a estrutura quadrupolar dos potenciais associados ao spin-1 com os quadrupolos inerentes ao spin-2.

Na introdução desta tese citamos a teoria DKP como uma alternativa para descrever partículas vetoriais, bem como sua versão galileana como uma ferramenta para trabalhar com potenciais obtidos nesta tese. A sugestão de trabalho está em:

5. Selecionar quais dos potenciais por fontes de spin-1 encontrados no capítulo 4 podem ser inseridos diretamente na equação DKPNR [56], já que existem condições específicas para fazê-lo, e em seguida obter as soluções destas equações. Os resultados obtidos podem ser comparados com trabalhos que utilizam a DKP relativística associado ao potencial de Yukawa [73, 74].

Para finalizar, pontuamos mais um tema que já vem sendo desenvolvido por outros membros de nosso Grupo:

6. Dirac já havia levantado a questão sobre relação entre massa, carga e spin para a estabilidade do elétron e do múon [75]. Pensando agora em uma partícula de spin inteiro, se conseguíssemos uma estrutura deste tipo estável e carregada, de acordo com o que vimos a respeito da influência da massa e do spin no eletromagnetismo de fontes bosônicas, seria oportuno trabalhar o potencial e o campo associados a esta partícula. O centro da questão estaria em estudar se esta análise não viria a indicar que bósons vetoriais massivos e carregados devam ser compostos a partir de férmions mais elementares, tendo uma estrutura efetivamente mais complexa do que apenas o seu spin. São questões que permanecem em aberto e vêm mobilizando uma literatura mais recente.

Referências Bibliográficas

- [1] J. E. Moody and F. Wilczek, “New macroscopic forces?”, *Phys. Rev. D* 30 (1984) 130.
- [2] G. Raffelt, “Limits on a CP-violating scalar axion-nucleon interaction”, *Phys. Rev. D* 86 (2012) 015001.
- [3] B. A. Dobrescu, “Massless gauge bosons other than the photon”, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 151802.
- [4] H. Georgi, “Unparticle physics”, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 221601.
- [5] J. Ipser and P. Sikivie, “Can galactic halos be made of axions?”, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 925.
- [6] P. W. Graham and S. Rajendran, “New Observables for Direct Detection of Axion Dark Matter”, [arXiv:1306.6088v2](https://arxiv.org/abs/1306.6088v2)[hep-ph].
- [7] B. A. Dobrescu and I. Mocioiu, “Spin-dependent macroscopic forces from new particle exchange”, *J. High Energy Phys.* 11 (2006) 005.
- [8] B. R. Heckel, W. A. Terrano and E. G. Adelberger, “Limits on exotic long-range spin-spin interactions of electrons”, *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013) 151802.
- [9] L. Hunter, J. Gordon, S. Peck, D. Ang, and J.-F. Lin, “Using the earth as a polarized electron source to search for long-range spin-spin interactions”, *Science* 339 (2013) 928.

- [10] M. P. Ledbetter, M.V. Romalis and D. F. Jackson Kimball, “Constraints on short-range spin-dependent interactions from scalar spin-spin coupling in deuterated molecular hydrogen”, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 040402.
- [11] F. M. Piegsa and G. Pignoll, “Limits on the axial coupling constant of new light bosons”, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2013) 181801.
- [12] A. G. Glenday, C. E. Cramer, D. F. Phillips and R. L. Walsworth, “Limits on anomalous spin-spin couplings between neutrons”, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 261801.
- [13] G. Vasilakis, J. M. Brown, T.W. Kornack and M.V. Romalis, “Limits on new long range nuclear spin-dependent forces set with a K-³He comagnetometer”, *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009) 261801.
- [14] L. R. Hunter and D. G. Ang, “Using geoelectrons to search for velocity-dependent spin-spin interactions”, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2009) 091803.
- [15] B. R. Heckel, E. G. Adelberger, C. E. Cramer, T. S. Cook, S. Schlamminger and U. Schmidt, “Preferred-frame and CP-violation tests with polarized electrons”, *Phys. Rev. D* 78 (2008) 092006.
- [16] S. A. Hoedl, F. Fleischer, E.G. Adelberger and B. R. Heckel, “Improved constraints on an axion-mediated force”, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 041801.
- [17] C. B. Fu, T. R. Gentile and W. M. Snow, “Limits on possible new nucleon monopole-dipole interactions from the spin relaxation rate of polarized ³He gas”, *Phys. Rev. D* 83 (2011) 031504.
- [18] H. Yan, G. A. Sun, J. Gong, B. B. Pang, Y. Wang, Y. W. Yang, J. Zhang and Y. Zhang, “Probing the short range spin dependent interactions by polarized ³He atom beams”, *Eur. Phys. J. C* 74 (2014) 3088.
- [19] T. M. Leslie, E. Weisman, R. Khatiwada and J. C. Long, “Prospects for electron spin-dependent short-range force experiments with rare earth iron garnet test masses”, *Phys. Rev. D* 89 (2014) 114022.

- [20] D. F. J. Kimball, “Nuclear spin content and constraints on exotic spin-dependent couplings”, *New J. Phys.* 17 (2015) 073008, arXiv:1407.2671v5[physics.atom-ph].
- [21] S. Kotler, R. Ozeri, and D. F. J. Kimball, “Constraints on exotic dipole-dipole couplings between electrons at the micrometer scale”, *Phys. Rev. Lett.* 115 (2015) 081801, arXiv:1501.07891v2[physics.atom-ph].
- [22] P.-H. Chu, E. Weisman, C.-Y. Liu, and J. C. Long, “Search for exotic short-range interactions using paramagnetic insulators”, *Phys. Rev. D* 91 (2015) 102006.
- [23] Y. V. Stadnik and V. V. Flambaum, “Nuclear spin-dependent interactions: searches for WIMP, axion and topological defect dark matter, and tests of fundamental symmetries”, *Eur. Phys. J. C* 75 (2015) 110.
- [24] Y. V. Stadnik and V. V. Flambaum, “New generation low-energy probes for ultralight axion and scalar dark matter”, arXiv:1506.08364v1[hep-ph].
- [25] F. A. Gomes Ferreira, P. C. Malta, L. P. R. Ospedal and J. A. Helayël-Neto, “Topologically massive spin-1 particles and spin-dependent potentials”, *Eur. Phys. J. C* 75 (2015) 238.
- [26] G. Velo and D. Zwanzinger, “Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential”, *Phys. Rev.* 186 (1969) 1337.
- [27] G. Velo and D. Zwanzinger, “Noncausality and other defects of interaction lagrangians for particles with spin one and higher”, *Phys. Rev.* 188 (1969) 2218.
- [28] W-Y. Tsai and A. Yildiz, “Motion of charged particles in a homogeneous magnetic field”, *Phys. Rev. D* 4 (1971) 3643.
- [29] T. Goldman and W-Y. Tsai, “Motion of charged particles in a homogeneous magnetic field. II”, *Phys. Rev. D* 4 (1971) 3648.
- [30] W-Y. Tsai, “Motion of spin-1 particles in a homogeneous magnetic field - multispinor formalism”, *Phys. Rev. D* 4 (1971) 3652.

- [31] P. M. Mathews, “Stationary states of a spin-1 particle in a homogeneous magnetic field”, *Phys. Rev. D* 9 (1974) 365.
- [32] M. Seetharaman, J. Prabhakaran and P. M. Mathews, “Rarita-Schwinger particles in homogeneous magnetic fields, and inconsistencies of spin- $\frac{3}{2}$ theories”, *Phys. Rev. D* 12 (1975) 458.
- [33] J. Prabhakaran, M. Seetharaman and P. M. Mathews, “Causality of propagation of spin- $\frac{3}{2}$ fields coupled to spinor and scalar fields”, *Phys. Rev. D* 12 (1975) 3191.
- [34] P. M. Mathews, M. Seetharaman and J. Prabhakaran, “Inconsistencies in the symmetric tensor field description of spin-2 particles in an external homogeneous magnetic field”, *Phys. Rev. D* 14 (1976) 1021.
- [35] P. Federbush, “Minimal electromagnetic coupling for spin two particles”, *Nuovo Cim.* 19 (1961) 572.
- [36] B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman and P. M. Mathews, “Consistency of spin-1 theories in external electromagnetic fields”, *J. Phys. A* 12 (1979) 665.
- [37] H. C. Corben and J. Schwinger, “The electromagnetic properties of mesotrons”, *Phys. Rev.* 58 (1940) 953.
- [38] S. Weinberg, “Lectures on elementary particles and quantum field theory”, *Proceedings of the Summer Institute, Brandeis University, 1970*, edited by S. Deser (MIT Press) Cambridge, MA, (1970) Vol I.
- [39] S. Ferrara and M. Porrati, “ $g = 2$ as the natural value of the tree-level gyromagnetic ratio of elementary particles”, *Phys. Rev. D* 46 (1992) 3529.
- [40] J. Beringer et al. (Particle Data Group), “Review of particle physics”, *Phys. Rev. D* 86 (2012) 010001 and 2013 partial update for the 2014 edition.
- [41] I. L. Buchbinder and V. A. Krykhtin “Quartic interaction vertex in the massive integer higher spin field theory in a constant electromagnetic field”, *Eur. Phys. J. C* 75 (2015) 454.

- [42] M. Porrati and R. Rahman, “Causal propagation of a charged spin 3/2 field in an external electromagnetic background”, *Phys. Rev. D* 80 (2009) 025009; arXiv:0906.1432v2[hep-th].
- [43] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, and P. M. Lavrov, “On manifolds admitting the consistent lagrangian formulation for higher spin fields”, *Mod. Phys. Lett. A* 26 (2011) 1183.
- [44] R. Rahman and M. Taronna, “Comments on higher-spin fields in nontrivial backgrounds”, arXiv:1603.03050v2[hep-th].
- [45] E. Gabrielli, L. Marzola, M. Raidal and H. Veermäe, “Dark matter and spin-1 milli-charged particles”, *J. High Energy Phys.* 1508 (2015) 150; arXiv:1507.00571v2[hep-ph].
- [46] P. C. Malta, L. P. R. Ospedal, K. Veiga and J. A. Helayël-Neto, “Comparative aspects of spin-dependent interaction potentials for spin-1/2 and spin-1 matter fields”, *Adv. High Energy Phys.* 2016 (2016) 2531436; arXiv:1510.03291v3[hep-th].
- [47] E. Cremmer and J. Scherk, “Spontaneous dynamical breaking of gauge symmetry in dual models”, *Nucl. Phys. B* 72 (1974) 117.
- [48] M. Kalb and P. Ramond, “Classical direct interstring action”, *Phys. Rev. D* 9 (1974) 2273.
- [49] R. J. Duffin, “On the characteristic matrices of covariant systems”, *Phys. Rev.* 54 (1938) 1114.
- [50] N. Kemmer, “The particle aspect of meson theory”, *Proc. Roy. Soc. A* 173 (1939) 91.
- [51] G. Petiau, “Contribution à la théorie des équations d’ondes corpusculaires”, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* 8 (1936) 16.

- [52] M. de Montigny, F.C. Khanna, A.E. Santana, E.S. Santos and J.D.M. Vianna, “Galilean covariance and the Duffin-Kemmer-Petiau equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 (2000) L273.
- [53] M. de Montigny, F.C. Khanna, A.E. Santana and E.S. Santos, “Galilean covariance and non-relativistic Bhabha equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 34 (2001) 8901.
- [54] M.C.B. Fernandes, A.E. Santana and J.D.M. Vianna, “Galilean Duffin-Kemmer-Petiau algebra and symplectic structure”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 (2003) 3841.
- [55] J.A. Swansson and B.H.J. McKellar, “Relativistic Aharonov-Casher phase in spin 1”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 34 (2001) 1051.
- [56] E. A. Reis, “Estudo de interações na teoria Duffin-Kemmer-Petiau não relativística”, *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia* (2013).
- [57] S. L. Glashow, “Partial symmetries of weak interactions”, *Nucl. Phys.* 22 (1961) 579; S. Weinberg, “A model of leptons”, *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1264; A. Salam, “Elementary particle theory”, *The Nobel Symposium n° 8*, edited by N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968), p. 367.
- [58] R. Jackiw, “ $g = 2$ as a gauge condition”, *Phys. Rev. D* 57 (1998) 2635.
- [59] T. D. Lee and C. N. Yang, “Theory of charged vector mesons interacting with the electromagnetic field”, *Phys. Rev.* 128 (1962) 885.
- [60] C. Pinheiro, G. O. Pires and F. A. B. Rabelo de Carvalho, “Some quantum aspects of D=3 space-time massive gravity” *Braz. J. Phys.* 27 (1997) 14.
- [61] M. Maggiore, “A modern introduction to quantum field theory”, Oxford University Press, Oxford, UK, 2005.
- [62] F. London and H. London, “The electromagnetic equations of the superconductor”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 149 (1935) 71.

- [63] S. H. Pereira and M. G. Felix, “100 anos de supercondutividade e a teoria de Ginzburg-Landau”, *Rev. Bras. Ens. Fís.* 35 (2013) 1313.
- [64] E. G. Delgado-Acosta, M. Kirchbach, M. Napsuciale and S. Rodríguez, “Electromagnetic multipole moments of elementary spin-1/2, 1, and 3/2 particles”, *Phys. Rev. D* 85 (2012) 116006.
- [65] P. C. Malta, L. P. R. Ospedal, K. Veiga and J. A. Helayël-Neto, trabalho em progresso.
- [66] B. P. Abbott et al (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger”, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 061102.
- [67] A. H. Chamseddine, “Complexified gravity in noncommutative spaces”, *Comm. Math. Phys.* 218 (2001) 283.
- [68] L. Bernard, C. Deffayet and M. von Strauss, “Consistent massive graviton on arbitrary backgrounds”, *Phys. Rev. D* 91 (2015) 104013.
- [69] D. Dalmazi, “Massive spin-2 particle from a rank-2 tensor”, *Phys. Rev. D* 87 (2013) 125027; arXiv:1305.1513[hep-th]; D. Dalmazi, A. L. R. dos Santos and E. L. Mendonça, “Massive spin-2 particles via embedment of the Fierz–Pauli equations of motion”, *Class. Quant. Grav.* 32 (2015) 015022; arXiv:1305.1513[hep-th].
- [70] R. Brito, V. Cardoso and P. Pani, “Massive spin-2 fields on black hole spacetimes: Instability of the Schwarzschild and Kerr solutions and bounds on the graviton mass”, *Phys. Rev. D* 88 (2013) 023514.
- [71] A. Accioly, J. Helayel-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati and B. Pereira-Dias, “Some interesting features of new massive gravity”, *Class. Quant. Grav.* 28 (2011) 225008; A. Accioly, J. Helayel-Neto, J. Morais, E. Scatena and R. Turcati, “Investigations in massive 3D gravity”, *Phys. Rev. D* 83 (2011) 104005.

- [72] I. Oda, “Remarks on Higgs mechanism for gravitons”, *Phys. Lett. B* 690 (2010) 322; I. Oda, “Higgs Mechanism for Gravitons”, *Mod. Phys. Lett. A* 25 (2010) 2411; arXiv:1003.1437v2[hep-th].
- [73] M. Hamzavi and S. M. Ikhdaïr, “Approximate Solution of the Duffin–Kemmer–Petiau Equation for a Vector Yukawa Potential with Arbitrary Total Angular Momenta”, *Few-Body Syst.* 54 (2012) 1753.
- [74] N. Salehi and H. Hassanabadi, “Scattering amplitude of the Duffin–Kemmer–Petiau equation for the Yukawa potential for $J = 0$ ”, *Eur. Phys. J. A* 51 (2015) 100.
- [75] P. A. M. Dirac, “A new classical theory of electrons”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 209 (1951) 291; P. A. M. Dirac, “An extensible model of the electron”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 268 (1962) 57.