

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
ICRA

Tese de Doutorado

A Teoria de Bohm-de  
Broglie e as Singularidades  
Cosmológicas

Diego Moraes Pantoja

Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto  
Rio de Janeiro  
2014

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
ICRA

Tese de Doutorado

A Teoria de Bohm-de  
Broglie e as Singularidades  
Cosmológicas

Diego Moraes Pantoja

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto  
Rio de Janeiro  
2014

## Resumo

Este trabalho consiste em estudar possíveis configurações quânticas de singularidades para o universo que, uma vez modelado classicamente através da constituição de um espaço de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, é conduzido para diferentes tipos de singularidades clássicas dependendo da natureza da matéria que é composto. Para uma matéria, ou seja, campo escalar de natureza fantasma, que é regida por uma equação de estado do tipo  $p = \omega\rho$  onde  $\omega < -1$  aparecerá o Grande Rasgo(Big Rip). Para a matéria, podendo depender de campo escalar padrão ou fantasma, que é regida por uma equação de estado do tipo gás generalizado de Chaplygin  $p = -\frac{A}{\rho^\beta}$ , surgirão singularidades denominadas de Grande Parada(Big Brake), Grande Arranque(Big Démarrage) e Grande Congelamento(Big Freeze). Todas essas singularidades serão levadas a um nível quântico através do procedimento de quantização de Dirac-Wheeler-DeWitt, para modelos de minisuperespaço de FLRW e, via interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica.

## Abstract

This work is intended to study possible quantum configurations of singularities to the universe that, once classically modeled by forming a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime, is conducted for different types of classical singularities, depending on the nature of matter it contain. For a scalar field of phantom nature, which is governed by an equation of state of the type  $p = \omega\rho$  where  $\omega < -1$ , appears the Big Rip. To the matter that can be either ordinary scalar field or phantom scalar field, which is governed by an equation of state of the type generalized Chaplygin gas  $p = -\frac{A}{\rho^\beta}$ , singularities named Big Brake, Big Démarrage and Big Freeze will appear. All these singularities will be taken to a quantum level through the Dirac-Wheeler-DeWitt quantization of such FLRW minisuperspace models, and, interpreted following the Bohm-de Broglie theory of quantum mechanics.

## Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por todo tipo de ajuda nas horas difíceis e por todas as conquistas alcançadas.
- Agradeço especialmente a minha esposa Nilma Alaíde por me proporcionar essa fascinante experiência de ser o pai da Nina Alaíde, por todo esse tempo juntos, pelo companheirismo, pela paciência e gostaria de dizer que sem você eu não conseguiria terminar essa tese.
- Agradeço aos meus pais Carlos Alberto e Maria Do Carmo, que conseguiram com toda dificuldade me proporcionar uma ótima educação, aos meus irmãos Danilo e Dayane por sempre torcerem por mim, aos meus sobrinhos, aos meus avós Izolino Pantoja e Maria Célia, aos meus avós Mário Moraes e Senhorinha Saldanha, e ao restante da minha família por sempre me apoiar.
- Agradeço ao professor Nelson Pinto Neto pela orientação deste trabalho bem como sua paciência para comigo.
- Agradeço a oportunidade de expressar a enorme gratidão aos amigos: Alan Martins Oliveira, Cláudio, Márcio.
- Agradeço ao CNPQ pela bolsa de estudos.
- Agradeço a todos os funcionários e professores do ICRA por o todo apoio.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral</b>	<b>8</b>
2.1	Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral . . .	8
2.2	O Universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	15
2.3	O Modelo clássico do Grande Rasgo . . . . .	17
2.4	O Modelo clássico da Grande Parada . . . . .	25
2.5	O Modelo clássico do Grande Arranque . . . . .	29
2.6	O Modelo clássico do Grande Congelamento . . . . .	35
2.6.1	O Grande Congelamento sem Matéria Fantasma	36
2.6.2	O Grande Congelamento com Matéria Fantasma	41
<b>3</b>	<b>Quantização de Dirac-Wheeler-DeWitt</b>	<b>48</b>
3.1	A Equação de Wheeler- DeWitt . . . . .	48
3.1.1	Minisuperespaço Quântico das Singularidades	51
3.1.2	A Aproximação WKB para o Modelo de Minisuperespaço	53
3.2	Minisuperespaço do Grande Rasgo . . . . .	54
3.2.1	Aproximação WKB Para o Modelo Grande Rasgo	56
3.3	Minisuperespaço da Grande Parada . . . . .	57
3.3.1	A Solução Aproximada WKB Para a Grande Parada	59
3.4	Minisuperespaço do Grande Arranque . . . . .	63
3.5	Minisuperespaço do Grande Congelamento . . . . .	65
3.5.1	Minisuperespaço com Matéria Ordinária . . .	65
3.5.2	Minisuperespaço com Matéria Fantasma . . .	68
<b>4</b>	<b>Trajetórias Bohmianas e Singularidades</b>	<b>70</b>
4.1	Mecânica quântica de Bohm-de Broglie . . . . .	70
4.2	Interpretação de Bohm-de Broglie da Cosmologia Quântica	73
4.3	O Minisuperespaço BdB da Cosmologia Quântica e as soluções WKB	75

*SUMÁRIO*

3

4.4	Trajeto�rias Bohmianas do Grande Rasgo . . . . .	77
4.5	Trajeto�rias Bohmianas da Grande Parada . . . . .	82
4.6	Trajeto�rias Bohmianas do Grande Arranque . . . . .	90
4.7	Trajeto�rias Bohmianas do Grande Congelamento . . .	94
4.7.1	Trajeto�rias Bohmianas com Mat�ria Ordin�ria	94
4.7.2	Trajeto�rias Bohmianas com Mat�ria Fantasma	97

**5 Conclusões**

**104**

# Capítulo 1

## Introdução

A cosmologia quântica<sup>1</sup> deu um grande salto técnico a partir da segunda metade do século passado até os dias de hoje. Aspectos da natureza quântica da gravidade surgem naturalmente em um estado humano de curiosidade, principalmente após o estabelecimento das bases da mecânica quântica dados por Plank, Bohr, Heisenberg, Schrodinger e Von Neumann e, além disso, dos trabalhos de Dirac sobre sistemas vinculados [2]. A pergunta que deve ter surgido a um tempo atrás foi “por que não tentamos quantizar a gravitação?”. A gravitação foi estabelecida através da Teoria da Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein. Essa teoria modela a dinâmica do espaço-tempo sob ação da matéria em que, a vemos repousar sobre uma variedade lorentziana, que é o análogo à variedade riemanniana exceto pelo fato que a métrica definida positiva deve ser trocada pela métrica de assinatura  $(-, +, +, +)$ .

Propostas para a descrição da gravitação quântica existem cujo podemos encontrar detalhes nos livros [3, 4]. Contudo, estamos interessado exclusivamente em gravitação canônica e, coube aos físicos John Wheeler e Bryce DeWitt [5, 6] sistematizar as bases do que chamamos hoje de geometrodinâmica quântica, que será a base do nosso trabalho a seguir.

O ponto onde queremos chegar é na impressionante lacuna deixada/surgida pela TRG para a descrição do problema que po-

---

<sup>1</sup>Para ter uma boa compreensão a respeito deste assunto, o leitor é convidado a ler o livro “Quantum Cosmology and Baby Universes”[1].



deria ocorrer singularidades no espaço-tempo. Uma singularidade significa que quantidades físicas, invariantes sob quaisquer transformações de coordenadas, como densidade de energia e curvatura do espaço-tempo, teriam valores infinitos e, matematicamente falando, isso implicaria que no entorno da singularidade não poderíamos recobrir essa região por geodésicas contínuas, ou seja, não conseguiríamos observar partículas livres atravessando essa região.

O interesse nos estudos sobre as consequências catastróficas para o espaço-tempo, da existência de singularidades, aumentou significativamente depois da descoberta em 1998 e 1999 que o universo está experimentando uma fase de expansão acelerada [7, 8]. As observações parecem permitir também que a densidade de energia  $\rho$  e a pressão  $p$  podem estar relacionadas tanto por  $\rho + 3p < 0$  quanto por  $\rho + p < 0$ , onde a primeira leva a uma descrição de matéria denominada de quintessência [9] e a segunda equação leva a um campo fantasma [11, 12], uma forma estranha de matéria, descrita por um potencial exponencial e com a característica de fazer surgir uma singularidade chamada de Grande Rasgo (Big Rip) [10, 11, 12, 13], caracterizada pela divergência do fator de escala  $a(t)$  e da densidade energia  $\rho(t)$  para um tempo futuro finito. Historicamente, campos fantasmas foram primeiro introduzidos por Hoyle na teoria do campo estacionário [23, 24, 25].

Outro tipo de singularidade que surge é a Grande Parada (Big Brake), que também é conhecida como “Soft”, “Quiescent” ou “Sudden” [14, 15, 16, 48]. Diferentemente do Grande Rasgo (Big Rip), a Grande Parada (Big Brake) ocorre para um valor finito do fator de escala na qual o parâmetro de Hubble e sua primeira derivada divergem e, nesse caso, o universo sofre um repentina parada na sua expansão experimentando uma grande desaceleração  $\ddot{a} \rightarrow -\infty$ . Esse tipo de singularidade pode surgir em modelos simples que obedecem a uma equação de estado do tipo gás Anti-Chaplygin  $p = -\frac{A}{\rho}$ . Equações de estado do tipo gás de Chaplygin surgiram no intuito de unificar o setor escuro da matéria no universo [17, 18].

Uma evolução do gás de Chaplygin é o gás de Chaplygin generalizado [17] que possui equação de estado  $p = -\frac{A}{\rho^\beta}$ . Esse tipo de equação de estado dá como consequência o surgimento das singulari-

dades denominadas de Grande Congelamento (Big Freeze) e Grande Arranque (Big Démarrage) [49]. Essas singularidades se caracterizam pelo fato de que, para o fator de escala e tempo finitos, existe uma divergência do parâmetro de Hubble e sua primeira derivada, levando a divergência da densidade energia e da curvatura.

É fundamental atacarmos o problema das singularidades que ocorrem na relatividade geral, em especial, aquelas que surgiram recentemente com as descobertas da atual fase de aceleração do universo. Uma maneira de fazermos isso é através da cosmologia quântica, que se utiliza de descrições da gravitação quântica para dar uma configuração de estudo a esses problemas. Então, estando munido dessas descrições, seria interessante analisarmos tais singularidades sob o ponto de vista da gravidade quântica (lembrando que fazemos isso nas imediações da singularidades quando as energias envolvidas são da ordem da energia de Plank). . O que ocorre ao observarmos os estudos na literatura é que um dos critérios utilizados para tal abordagem é construir soluções das equações de Wheeler-deWitt de tal maneira que o pacote de ondas não passe pelo ponto onde localiza-se a singularidade [5, 44, 48, 52]. Contudo, como garantir que grandezas físicas tais como densidade de energia e volume não explodam? Lembramos aqui que não há uma clara interpretação de  $\psi$  como uma densidade de probabilidade, já que não é possível construir um espaço de Hilbert para as soluções das equações de Wheeler-DeWitt no caso geral do superespaço quântico. Podemos fazer uma outra pergunta, uma nova configuração quantum cosmológica não poderia apenas deslocar a singularidade para um momento posterior/anterior da ocorrência da clássica. Tais perguntas podem ser, em parte, respondidas utilizando-se a interpretação da mecânica quântica de Bohm-de Broglie. Essa interpretação é ontológica e assume que as partículas são reais e caminham sobre uma trajetória bem definida, sendo defendida por Bohm e Hiley em [19]. É importante ressaltar que essa interpretação não contradiz o teorema de Bell [20] porque, a teoria é claramente não local. Além disso, a interpretação de Born é não local também. Uma outra interpretação frequentemente utilizada na teoria quântica é a interpretação de vários mundos [21].

Dessa forma, essa tese discutirá todos esses elementos apresentados até aqui e, serão sistematizados da seguinte maneira. No cap.

(II) estabeleceremos as bases clássicas do formalismo hamiltoniano da gravitação via foliação do espaço-tempo pelo método ADM. Além disso, daremos a configuração do surgimento das singularidades Grande Rasgo(Big Rip), Grande Parada(Big Brake), Grande Congelamento(Big Freeze) (com e sem matéria fantasma) e Grande Arranque(Big Démarrage), tudo isso para o modelo de universo clássico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW). Para o cap.(III), apresentaremos o contexto quântico em que essas singularidades estão inseridas. Para isso, desenvolveremos o procedimento de quantização de Dirac-Wheeler-DeWitt da teoria da relatividade geral e, mostraremos a solução da equação de Wheeler-DeWitt para cada singularidade em modelos de minisuperespaço de FLRW. Já para o cap.(IV), vamos discutir os aspectos técnicos da interpretação de Bohm-de Broglie (BdB) da mecânica quântica para dar sentido à cosmologia quântica e, apresentar a equação de Wheeler-DeWitt via equação de Hamilton-Jacobi que, é a mesma equação da TRG com a adição do potencial quântico. Além disso, utilizaremos a interpretação BdB da cosmologia quântica, na aproximação do minisuperespaço de FLRW, para encontrar as trajetórias Bohmianas de cada uma das singularidades e, então, poder concluir com mais propriedade argumentativa se as singularidade em questão ainda sobrevivem aos efeitos quânticos.

## Capítulo 2

# Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

A Relatividade Geral, uma teoria que descreve a gravitação, apresenta singularidades em soluções das equações de campo de Einstein. Essas singularidades são uma ruptura no contínuo espaço-tempo, ou seja, algumas grandezas físicas como curvatura espacial e densidade de energia assumem valores que tendem ao infinito nesses pontos. Então, acabam-se as maneiras de trabalharmos na descrição de fenômenos da natureza relacionados a gravitação. Dessa forma, nas seções seguintes deste capítulo, iremos estabelecer as bases do formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral, para assim, levarmos a teoria no contexto de algumas singularidades cosmológicas clássicas para o domínio quântico.

### 2.1 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

A formulação Hamiltoniana consiste em construir uma dinâmica para as variáveis canônicas  $(q, \pi_q)$  que são quantidades que formam o espaço de fase das  $2n$ -uplas  $(q, \pi_q) \equiv (q_1, \dots, q_n, \pi_{q_1}, \dots, \pi_{q_n})$ . Para isso, precisamos construir um ambiente geométrico para a Relatividade Geral consistindo num espaço-tempo quadridimensional que precisa ser decomposto em hipersuperfícies do tipo espaço. Em cada hipersuperfície, variáveis canônicas podem ser definidas com

as quais evoluem ao longo de cada foliação<sup>1</sup>. Começaremos de uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  com o espaço-tempo métrico  $g$  de assinatura  $(-, +, +, +)$ . Esta métrica é solução das equações de Einstein derivadas via princípio variacional da ação de Einstein-Hilbert que, acoplada minimamente à matéria, é escrita sem levar em conta os termos de superfícies da seguinte forma,

$$S = \frac{1}{k^2} \left( \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \right) + S_{mat}, \quad (2.1)$$

onde,  $k^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$  é o acoplamento entre a gravitação e matéria,  $R = R^\mu{}_\mu$  é o escalar de Ricci que é a contração do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  da métrica  $g$ ,  $\Lambda$  é a constante cosmológica e  $S_{mat}$  é o termo de matéria.

Queremos estabelecer nesse momento as bases para a foliação do espaço-tempo. Então, iremos proceder com a decomposição da variedade  $\mathcal{M}$  em hipersuperfícies tridimensionais tipo espaço. Essas hipersuperfícies serão na verdade hipersuperfícies de Cauchy: os estabelecimentos das condições iniciais nessas hipersuperfícies determinarão (através dos difeomorfismos) as únicas soluções das equações de Einstein. Hoje sabemos que tais hipersuperfícies não existem para espaços-tempo arbitrários mas apenas para globalmente hiperbólicos [26].

Esses espaços-tempo globalmente hiperbólicos são difeomorfos a um produto de uma variedade tridimensional tipo espaço  $\Sigma$  com a linha real. Esse difeomorfismo é simplesmente a foliação

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \Sigma \times \mathfrak{R} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (x, t) &\longmapsto \mathcal{E}(x, t). \end{aligned}$$

Agora, assumiremos  $\Sigma$  compacta. Para cada  $t \in \mathfrak{R}$ , conseguimos uma incorporação da hipersuperfície  $\Sigma$  em  $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t : \Sigma &\longrightarrow \mathcal{M} \\ x &\longmapsto \mathcal{E}_t(x) = \mathcal{E}(x, t). \end{aligned}$$

Dessa maneira, uma função com um tempo global pode ser definido. Sendo então,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{-1} : \mathcal{M} &\longrightarrow \Sigma \times \mathfrak{R} \\ X &\longmapsto \mathcal{E}^{-1}(X) = (\sigma(X), \tau(X)), \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Este formalismo foi desenvolvido por R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner em 1962 [28].

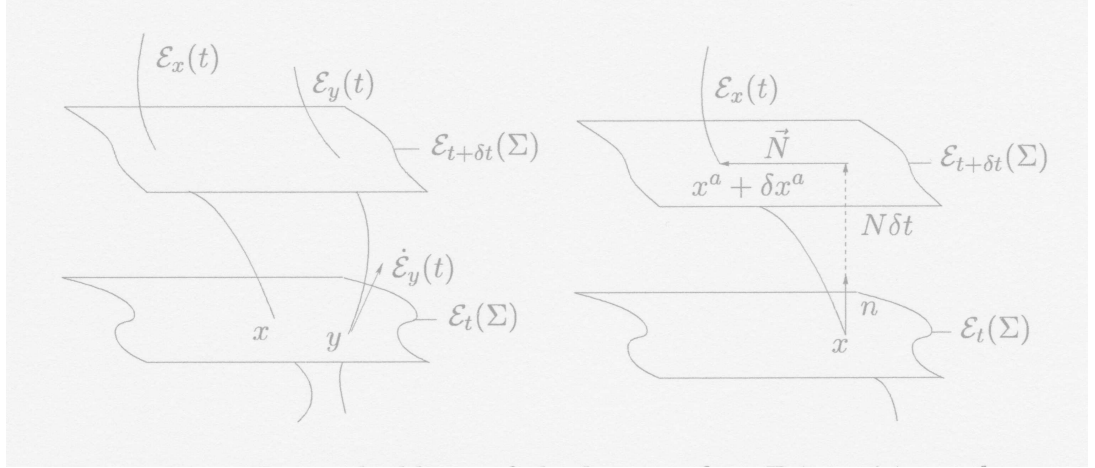


Figura 2.1: Duas imersões das hipersuperfícies  $\Sigma$  em  $\mathcal{M}$  são mostradas. Essas imersões estão separadas por uma foliação temporal com intervalo  $\delta t$ . Do lado esquerdo, as curvas do tipo tempo  $\mathcal{E}_x(t)$  e  $\mathcal{E}_y(t)$  para dois pontos  $x, y \in \mathcal{E}_t(\Sigma)$  são mostrados. O vetor de deformação  $\dot{\mathcal{E}}_y(t)$  é mostrado em  $y$ . A figura no lado direito ilustra a interpretação geométrica do lapso e do vetor deslocamento.

onde,  $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \Sigma$  e  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{R}$ . Então,  $\tau(\mathcal{E}_t(x)) = t$ . Esse mapeamento associa a cada ponto na variedade  $\mathcal{M}$  uma coordenada temporal em  $\mathfrak{R}$ , a foliação do tempo. Para todo  $x \in \Sigma$  a aplicação  $\mathcal{E}_x : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{M}$  define uma curva tipo tempo em  $\mathcal{M}$ . Seu vetor tangente é  $\dot{\mathcal{E}}_x$ , onde o ponto significa uma derivada com relação ao tempo  $t$ . Como isso permanece para cada  $x \in \Sigma$ , isso define um campo vetorial tangente chamado de campo vetorial de deformações. Para cada ponto  $X \in \mathcal{E}_t(\Sigma)$  que descreve a mudança do mergulho como função de  $t$ . Um campo vetorial especifica como uma hipersuperfície  $\mathcal{E}_t(\Sigma)$  é deformada em outra infinitesimalmente vizinha  $\mathcal{E}_{t+\delta t}(\Sigma)$ , ver Fig.(2.1).

Se nós introduzirmos as coordenadas  $X^\alpha$ ,  $\alpha = 0, \dots, 3$ , em  $\mathcal{M}$  (que não devem ser confundidas com o ponto  $X \in \mathcal{M}$ ), esse campo tem componentes  $\dot{\mathcal{E}}_x^\alpha$  onde  $\mathcal{E}^\alpha = X^\alpha(\mathcal{E}_t(x))$  em cada ponto  $x$  na hipersuperfície.

Mantendo em mente que queremos uma teoria que está definida em hipersuperfícies espaciais, teremos que encontrar uma maneira de separar quantidades que estão na hipersuperfície e que estão ortogonais a ela. Isto pode ser feito com a ajuda do campo vetorial

hipersuperfície normal  $n$ . Então, para cada imersão  $\Sigma_t$  é definido via

$$n_\alpha(x)\mathcal{E}_t^\alpha{}_{,\alpha}(x) = 0, \quad (2.2)$$

onde  $\mathcal{E}_t^\alpha{}_{,\alpha}(x) = \frac{\partial \mathcal{E}^\alpha(x,t)}{\partial x^\alpha}$  e  $x \in \Sigma$ . Além do mais, como estamos interessados em imersões do tipo espaço, nós queremos que esta normal satisfaça

$$g^{\alpha\beta}(x)n_\alpha(x)n_\beta(x) = -1. \quad (2.3)$$

Ambas as equações implicam que o campo vetorial normal depende do espaço-tempo métrico  $g$  bem como das imersões  $\mathcal{E}_t$ . Assim, para ser correto, nós deveríamos escrever  $n = n(x, \mathcal{E}_t, g)$ .

Com essas quantidades,  $n_\alpha(x)$  e  $\mathcal{E}_t^\alpha{}_{,\alpha}(x)$ , nós podemos decompor cada tensor em suas partes ortogonal à hipersuperfície e normal à hipersuperfície. Então, para o vetor deformação, nós escrevemos

$$\dot{\mathcal{E}}_x^\alpha(t) = N(x,t)g^{\alpha\beta}n_\beta + N^i(x,t)\mathcal{E}_t^\alpha{}_{,i}. \quad (2.4)$$

Chamaremos a função  $N(x,t)$  de função lapso e o trivetor  $\vec{N}$  com componentes  $N^i(x,t)$  de vetor deslocamento. Usamos  $(x,t)$  como uma maneira abreviada para denotar suas dependências na imersão e a localização na hipersuperfície  $\Sigma$ .

Como temos visto, as funções acima definidas descrevem a mudança da hipersuperfície com  $t$  nas direções ortogonal e tangencial, respectivamente. Mais precisamente, para duas imersões  $\mathcal{E}_t(\Sigma)$  e  $\mathcal{E}_{t+\delta t}(\Sigma)$ ,  $N(x,t)\delta t$  dá a separação entre  $\mathcal{E}_t(\Sigma)$  e  $\mathcal{E}_{t+\delta t}(\Sigma)$  normal à  $\mathcal{E}_t(\Sigma)$ , ou seja,  $N(x,t)\delta t = \delta_\perp \tau(x)$ . Similarmente,  $N^i(x,t)\delta t$  descreve o deslocamento de  $\mathcal{E}_{t+\delta t}(x)$  com relação a um ponto que é a intersecção da geodésica normal a  $\mathcal{E}_t(x)$  com  $\mathcal{E}_{t+\delta t}(\Sigma)$ . Deixemos essa intersecção no ponto ter coordenadas  $x^i + \delta x^i$  em  $\Sigma$ . Então, podemos escrever isso como  $N^i(x,t)\delta t = -\delta x^i$ , e tudo isso pode ser observado na fig.(2.1)

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^*g)_{00}(x,t) &= h_{ij}N^iN^j - N^2, \\ (\mathcal{E}^*g)_{i0}(x,t) &= h_{ij}N^j, \\ (\mathcal{E}^*g)_{ij}(x,t) &= h_{ij}. \end{aligned}$$

Assim, o lapso e o deslocamento são basicamente as componentes da métrica do espaço-tempo métrico  $g$ . Sempre que encontrarmos uma versão resumida dessa decomposição, devemos sempre lembrar

dos detalhes conectados com a imersão. Então, a métrica do espaço-tempo é simplesmente dada em sua forma ADM como

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2 + N^k N_k & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

com inversa

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

de tal maneira que o elemento de linha em sua forma padrão (3+1) é dado por

$$ds^2 = - (N^2 - N^i N_i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.7)$$

onde  $h_{ij}$  é a 3-métrica da hipersuperfície. Então, voltando à ação (2.1) de Einstein-Hilbert acoplada minimamente ao campo de matéria e sem constante cosmológica ( $\Lambda = 0$ ), temos

$$S = \frac{1}{k^2} \left( \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x h^{\frac{1}{2}} K \right) + S_{mat}, \quad (2.8)$$

onde  $S_{mat}$  é o termo de matéria para uma dado campo escalar  $\phi$ , de tal forma que

$$S_{mat} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ -l \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.9)$$

com  $l$  uma constante que assume valores  $+1, -1$  dependendo se o campo escalar for de natureza ordinária padrão ou fantasma respectivamente,  $h$  sendo o determinante da 3-métrica  $h_{ij}$  e  $K$  o traço da curvatura extrínseca  $K_{ij}$ , que descreve como as hipersuperfícies espaciais  $\Sigma$  curvam-se com relação à quadrivariiedade espaço-temporal  $\mathcal{M}$  com os quais elas estão imersas, sendo que

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left( D_i N_j + D_j N_i - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right). \quad (2.10)$$

onde os índices latinos ( $i, j = 1, 2, 3$ ). O aparecimento da curvatura extrínseca na ação é devido a termos de derivadas normais não se anularem no contorno  $\partial\mathcal{M}$ . O símbolo  $D_i$  significa a  $i$ -ésima componente da derivada covariante na hipersuperfície  $\Sigma$ . Estamos nesse



momento querendo expressar a ação eq.(2.8) em termos das variáveis (3+1). Então, pode-se mostrar que

$${}^4R = {}^3R - K^2 + K^{ij}K_{ij}, \quad (2.11)$$

e que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}. \quad (2.12)$$

Então, encontramos

$$S = \frac{1}{k^2} \int d^3x dt N \sqrt{h} (K^{ij}K_{ij} - K^2 + {}^3R) + S_{mat}, \quad (2.13)$$

onde  ${}^3R$  é o escalar de Ricci na Hipersuperfície espacial. Escrevendo a métrica de DeWitt[5] dada por

$$G_{ijkl} = \frac{2}{\sqrt{h}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}), \quad (2.14)$$

cuja inversa é

$$G^{ijkl} = \sqrt{h} \left[ \frac{1}{2} (h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk}) - h^{ij}h^{kl} \right], \quad (2.15)$$

podemos identificar a partir da ação eq.(2.13)

$$L = \frac{1}{k^2} N \left( G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + {}^3R \sqrt{h} \right) + N \sqrt{h} \left[ -l \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.16)$$

Calculando os momenta canonicamente conjugados a  $N$ ,  $N_i$ ,  $h_{ij}$  e  $\phi$ , denotados por  $\pi^0$ ,  $\pi^i$ ,  $\pi^{ij}$  e  $\pi_\phi$  respectivamente, a partir da equação acima, obtemos

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (2.17)$$

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = 0, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}} \\ &= \frac{2N}{k^2} G^{klmn} K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \\ &= -\frac{G^{ijkl}}{k^2} K_{kl}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned}\pi_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \\ &= \frac{l\sqrt{h}}{N} \left( \dot{\phi} - N^i \partial_i \phi \right).\end{aligned}\quad (2.20)$$

O fato de os momenta canonicamente conjugados a  $N$  e  $N_i$  se anularem nas equações (2.17) e (2.18), implica a existência de vínculos primários na terminologia de Dirac [2, 27]. Podemos obter a densidade hamiltoniana de uma maneira canônica através de:

$$\begin{aligned}H &= \pi_0 \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i + \pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \pi_\phi \dot{\phi} - L \\ &= \pi^{ij} (D_i N_j + D_j N_i - 2N K_{ij}) \\ &\quad + \pi_\phi \left( \frac{lN\pi_\phi}{\sqrt{h}} + N^i \partial_i \phi \right) - \frac{N}{k^2} \left( G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + {}^3R\sqrt{h} \right) \\ &\quad - N\sqrt{h} \left[ -l\frac{1}{2}g^{00}\partial_0\phi\partial_0\phi - lg^{0i}\partial_0\phi\partial_i\phi - l\frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - V(\phi) \right] \\ &= 2\pi^{ij} D_i N_j - 2N\pi^{ij} K_{ij} \\ &\quad + l\frac{N}{\sqrt{h}}\pi_\phi^2 + N^i \pi_\phi \partial_i \phi - \frac{N}{k^2} \left( k^4 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} + {}^3R\sqrt{h} \right) \\ &\quad - N\sqrt{h} \left[ l\frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - l\frac{N^i}{N^2} \dot{\phi} \partial_i \phi - l\frac{1}{2} \left( h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \right) \partial_i \phi \partial_j \phi - V(\phi) \right] \\ &= N \left( k^2 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{{}^3R\sqrt{h}}{k^2} + l\frac{\pi_\phi^2}{2\sqrt{h}} + l\sqrt{h}\frac{h^{ij}}{2} \partial_i \phi \partial_j \phi + \sqrt{h}V(\phi) \right) \\ &\quad + N^j (-2D_i \pi_j^i + \pi_\phi \partial_j \phi),\end{aligned}\quad (2.21)$$

em que foram utilizadas as expressões eq.(2.17) a eq.(2.20) e o fato de que

$$G_{ijkl} G^{klmn} = \delta_{ij}^{mn}, \quad (2.22)$$

$$\int D_i (\pi^{ij} N_j) d^3x = \int (\pi^{ij} D_i N_j + N_j D_i \pi^{ij}) d^3x = 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}N_j (D_i \pi^{ij}) &= N_j (D_i h^{lj}) \pi_l^i - N_j h^{lj} (D_i \pi_l^i), \\ &= N^j D_i \pi_j^i.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Escrevendo a densidade hamiltoniana sob a forma

$$H = NH_0 + N^j H_j, \quad (2.25)$$

temos que

$$\begin{aligned}
 H_0 = & k^2 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{{}^3R\sqrt{h}}{k^2} + l \frac{\pi_\phi^2}{2\sqrt{h}} \\
 & + l\sqrt{h} \frac{h^{ij}}{2} \partial_i \phi \partial_j \phi + \sqrt{h} V(\phi), \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

e

$$H_j = -2D_i \pi_j^i + \pi_\phi \partial_j \phi. \quad (2.27)$$

Em termos dessas novas variáveis a ação eq.(2.13) torna-se

$$S = \int dt d^3x \left( \pi^0 \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i - NH_0 - N_i H^i \right) \quad (2.28)$$

Se nós variarmos a ação eq.(2.28) com relação a  $\pi^{ij}$  e  $\pi_\phi$  nós obtemos as eqs. (2.19) e (2.20). As funções lapso e deslocamento agem agora como multiplicadores de Lagrange. Variando a ação eq.(2.28) com respeito à função lapso,  $N$ , chegamos ao vínculo hamiltoniano.

$$H_0 = 0. \quad (2.29)$$

Variando a mesma ação com relação ao vetor deslocamento  $N_i$  chegamos ao vínculo do momento

$$H^i = 0. \quad (2.30)$$

Esses são chamados de vínculos secundários ou dinâmicos na terminologia de Dirac. Podemos perceber das eqs.(2.26) e (2.27) que esses vínculos são simplesmente as componentes  $G_{00}$  e  $G_{0i}$  das equações de Einstein. Esses vínculos farão um papel importante no procedimento de quantização.

## 2.2 O Universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Estamos interessados no modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para o universo espacialmente plano, ou seja, de constante de curvatura  $K = 0$ . Sendo assim, a 3-métrica será escrita como

$$h_{ij}(q^\alpha, t) dx^i dx^j = a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.31)$$

onde  $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$  e  $a(t)$  é o fator de escala. Retomando neste momento a densidade lagrangiana (2.16) com o campo escalar sendo homogêneo e isotrópico, obtemos

$$L = \frac{N}{k^2} \left( G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + {}^3R \sqrt{h} \right) + N \sqrt{h} \left[ l \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.32)$$

Utilizando as equações (2.10) e (2.15), e o fato de que

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = -\frac{1}{3} h_{ij} h_{kl} \frac{\partial h^{kl}}{\partial t}, \quad (2.33)$$

podemos expressar a lagrangiana anterior sob a forma

$$L = \sqrt{h} \left( -\frac{1}{6Nk^2} h_{ij} h_{kl} \dot{h}^{ij} \dot{h}^{kl} + \frac{N}{k^2} {}^3R \right) + N \sqrt{h} \left[ l \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.34)$$

O único grau de liberdade de  $h_{ij}$  é o fator de escala  $a(t)$ . Então, para o tempo cósmico  $t$  com  $N = 1$  e o fato de que

$$\dot{h}^{ij} = -2 \frac{\dot{a}}{a^3} \delta^{ij}, \quad (2.35)$$

a lagrangiana eq.(2.34) assume a forma

$$L = -\frac{3}{k^2} \dot{a}^2 a + l \frac{1}{2} a^3 \dot{\phi}^2 - a^3 V(\phi), \quad (2.36)$$

onde o determinante da 3-métrica  $h = a^6$  e a curvatura intrínseca  ${}^3R = 0$ . Os momenta canonicamente conjugados aos graus de liberdade  $(a, \phi)$  são, respectivamente,

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \quad (2.37)$$

$$= -\frac{6}{k^2} \dot{a} a, \quad (2.38)$$

e

$$\pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (2.39)$$

$$= l a^3 \dot{\phi}. \quad (2.40)$$

A hamiltoniana canônica é dada por

$$H = NH_0 = \dot{a} \pi_a + \dot{\phi} \pi_\phi - L \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow H = -\frac{k^2}{12a} \pi_a^2 + l \frac{1}{2a^3} \pi_\phi^2 + a^3 V(\phi), \quad (2.42)$$

que está vinculada a ser nula. O vínculo hamiltoniano  $H_0$  se reduz, quando escrito em termos das velocidades, à equação de Friedmann

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{k^2}{3}\rho. \quad (2.43)$$

A densidade de energia e a pressão associadas ao campo escalar são

$$\rho = l\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.44)$$

e

$$p = l\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.45)$$

Devemos lembrar que a densidade de energia  $\rho$  e a pressão  $p$  guardam uma relação entre si chamada de equação de estado

$$p = p(\rho). \quad (2.46)$$

As equações de Euler-Lagrange aplicadas à eq.(2.36) e depois combinadas com o vínculo eq.(2.43) dão

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{3} \left[ -l\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] = 0, \quad (2.47)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - lV'(\phi) = 0. \quad (2.48)$$

onde a  $(\dot{\phantom{a}})$  significa uma diferenciação com respeito ao  $\phi$ . Então, as eqs.(2.43) e (2.47) formam as equações de Friedmann, que podem ser resolvidas uma vez conhecida a equação de estado (2.46). A eq.(2.48) é simplesmente a equação de Klein-Gordon homogênea e isotrópica.

### 2.3 O Modelo clássico do Grande Rasgo

Iremos examinar o primeiro tipo de singularidade da classificação do trabalho [38]. Então, estudaremos o caso em que a equação de estado será  $p = \omega\rho$  e suas consequências. Já que alguns resultados observacionais indicam que a constante barotrópica de estado pode assumir valores  $w < -1$  [30, 31], e isso leva à hipótese da existência de novos tipos de “matéria” com propriedades não muito usuais tais como constante cosmológica [39, 40], quintessência [39, 41, 42]

e campo fantasma [11, 12], sendo esse último objeto de nosso estudo no momento. Assim, iremos examinar consequências de se ter o campo fantasma como o condutor da aceleração. Como o nome indica, este campo possui propriedades estranhas, tais como possuir uma equação de estado com pressão negativa, violar a condição de energia nula  $\rho + p > 0$  [29] e possuir termo cinético negativo na lagrangiana que descreve a matéria.

Então, estamos interessados em um potencial que possibilite a expansão acelerada. Para isto iremos utilizar um potencial exponencial, já que tais potenciais para campos escalares podem surgir no contexto de teorias de Kaluza-Klein [32], gravidade de ordem superior [33], supergravidade [34] e teorias de supercordas [35]. Porém, tais potenciais apresentam problemas de instabilidades nas soluções das equações cosmológicas, que podem ser resolvidas utilizando-se de valores específicos para os parâmetros em questão [36]. Uma outra característica do campo fantasma é o surgimento de uma singularidade denominada Grande Rasgo (Big Rip), que nada mais seria do que a divergência do fator de escala juntamente com a densidade de energia em um tempo futuro finito. Escreveremos nosso potencial na forma [36, 37]

$$V = V_0 e^{-\lambda k \phi}, \quad (2.49)$$

onde  $k$  está relacionado com a constante de Einstein da gravitação já definida anteriormente como  $k^2$ , e  $\lambda$  é um parâmetro adimensional. Então, trabalharemos no universo de FLRW com um campo fantasma homogêneo e isotrópico. A lagrangiana eq.(2.36) fica

$$L = -\frac{3}{k^2} \dot{a}^2 a - \frac{1}{2} a^3 \dot{\phi}^2 - a^3 V(\phi), \quad (2.50)$$

onde  $l = -1$ . Os momenta canônicos agora são

$$\begin{aligned} \pi_a &= -\frac{6}{\kappa^2} \dot{a} a, \\ \pi_\phi &= -a^3 \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

que dão a hamiltoniana canônica

$$H = H_0 = \left( -\frac{\kappa^2}{12a} \pi_a^2 - \frac{1}{2a^3} \pi_\phi^2 + a^3 V_0 e^{-\lambda \kappa \phi} \right), \quad (2.52)$$

que está vinculada para ser nula. O vínculo hamiltoniano  $H_0 = 0$ , quando escrito em termos das velocidades se reduz à equação de

Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(-\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}\right). \quad (2.53)$$

A densidade de energia e a pressão associadas ao campo fantasma são

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.54)$$

$$p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.55)$$

Depois de combinadas com o vínculo eq.(2.53), as equações de Euler-Lagrange dão

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\kappa^2}{3} \left(\dot{\phi}^2 + V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}\right) = 0, \quad (2.56)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + V_0\lambda\kappa e^{-\lambda\kappa\phi} = 0. \quad (2.57)$$

Há uma solução atratora[43] dada por

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{2}{\lambda\kappa} \ln \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{2} H^0 (t - t_0) \right], \\ \alpha(t) &= -\frac{2}{\lambda^2} \ln \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{2} H^0 (t - t_0) \right] + \alpha_0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde  $\alpha(t) \equiv \ln a(t)$  e  $H^0$  o parâmetro de Hubble tomado em um tempo  $t_0$ . Esta é uma solução que leva à definição da singularidade Grande Rasgo(Big Rip) porque em um tempo futuro finito  $t \rightarrow t_{Rip} = t_0 + \frac{2}{\lambda^2 H^0}$ , o fator de escala  $\alpha(t)$ , o parâmetro de Hubble  $H(t)$  e a densidade de energia  $\rho(a)$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\lambda^2}, \quad (2.59)$$

divergem (ver gráficos fig.(2.2), fig.(2.3) e fig.(2.4)) e como consequência a curvatura do espaço-tempo.

Para efeitos de cálculos, faremos as seguintes escolhas numéricas:  $\lambda = 2/\sqrt{6}$ ,  $V_0 = 1/2$ ,  $\kappa = \sqrt{6}$ , que implicam em  $H^0 = 3/\sqrt{10}$ . Das eqs. (2.58) podemos obter a solução atratora para o Grande Rasgo(Big Rip)

$$\alpha = -3\phi + \alpha_0, \quad (2.60)$$

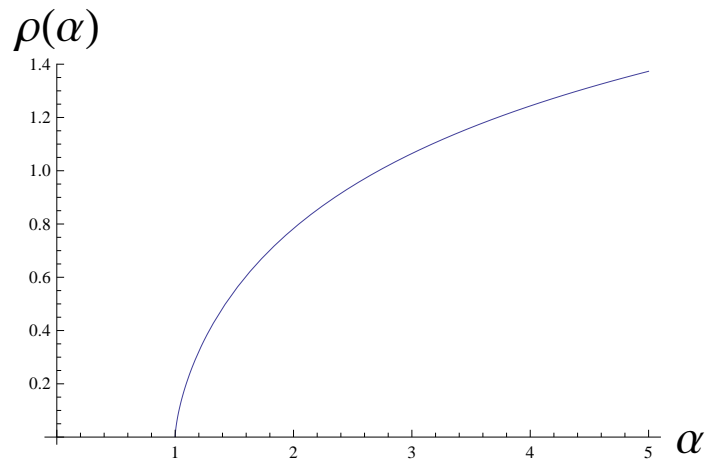


Figura 2.2: Evolução da densidade de energia versus fator de escala.

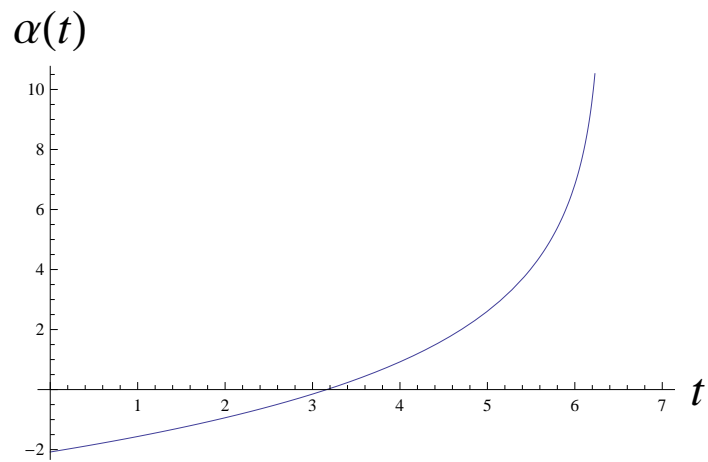


Figura 2.3: Evolução do fator de escala com relação ao tempo.



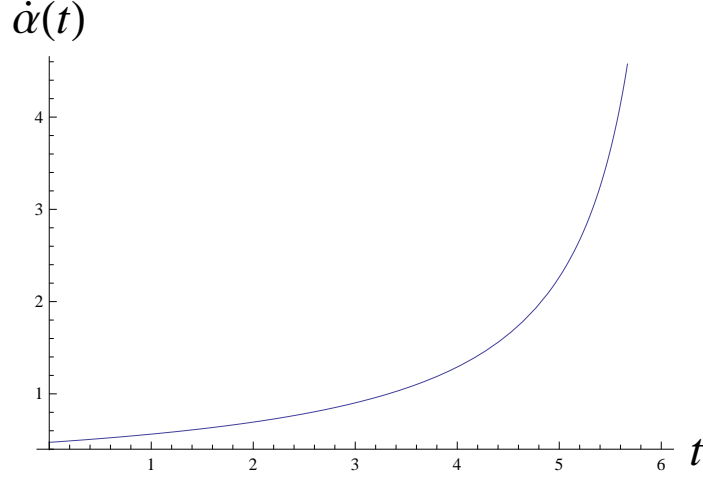


Figura 2.4: Evolução do parâmetro de Hubble versus o tempo.

onde  $\alpha_0$  é uma constante de integração. Para provar que a solução eq.(2.60) é um atrator, nós faremos a seguinte mudança de variável [44],

$$u(\alpha, \phi) \equiv \frac{3}{10} e^{3\alpha - \phi} \left[ \cos(\alpha + 3\phi) + \frac{1}{3} \sin(\alpha + 3\phi) \right], \quad (2.61)$$

$$v(\alpha, \phi) \equiv \frac{3}{10} e^{3\alpha - \phi} \left[ \sin(\alpha + 3\phi) - \frac{1}{3} \cos(\alpha + 3\phi) \right], \quad (2.62)$$

dando o hamiltoniano

$$H = N \left( -\frac{1}{2} \pi_u^2 - \frac{1}{2} \pi_v^2 + 1 \right) e^{3\alpha - 2\phi}. \quad (2.63)$$

As equações de Hamilton-Jacobi são para essas novas variáveis

$$\left( \frac{\partial S_0}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial v} \right)^2 = 1, \quad (2.64)$$

com solução

$$S_{0k} = ku - \sqrt{1 - k^2}v, \quad (2.65)$$

sendo  $|k| \leq 1$  uma constante de integração. Das equações

$$\dot{u} = -N \exp(3\alpha - 2\phi) \pi_u = -N \exp(3\alpha - 2\phi) \frac{\partial S_{0k}}{\partial u},$$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -N \exp(3\alpha - 2\phi) \pi_v = -N \exp(3\alpha - 2\phi) \frac{\partial S_{0k}}{\partial v}, \\ &= -N \exp(3\alpha - 2\phi) k, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$= N \exp(3\alpha - 2\phi) \sqrt{1 - k^2}, \quad (2.67)$$

e das definições eq.(2.61), podemos obter as seguintes equações de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= e^{-\phi} \left[ \sqrt{1 - k^2} \sin(3\phi + \alpha) - k \cos(3\phi + \alpha) \right], \\ \dot{\phi} &= e^{-\phi} \left[ k \sin(3\phi + \alpha) + \sqrt{1 - k^2} \cos(3\phi + \alpha) \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Pode-se verificar facilmente que essas equações são integrais primeiras do sistema eq.(2.56) e do vínculo eq.(2.53), e são equivalentes a elas (em ambos os casos temos três constantes independentes de integração).

Da teoria de Hamilton-Jacobi [45], podemos obter

$$\frac{\partial S_{0k}}{\partial k} = \beta, \quad (2.69)$$

onde,  $\beta$  é uma constante. Usando as definições eq.(2.61) em eq. (2.69), conseguimos

$$\frac{3}{10} e^{3\alpha - \phi} \left[ \frac{\sqrt{1 - k^2} + 3k}{3\sqrt{1 - k^2}} \sin(3\phi + \alpha) + \frac{3\sqrt{1 - k^2} - k}{3\sqrt{1 - k^2}} \cos(3\phi + \alpha) \right] = \beta. \quad (2.70)$$

Podemos verificar que a eq.(2.70) é uma integral implícita vinda da eq. (2.68),

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = \frac{\sqrt{1 - k^2} \tan(3\phi + \alpha) - k}{k \tan(3\phi + \alpha) + \sqrt{1 - k^2}}, \quad (2.71)$$

A solução Grande Rasgo(Big Rip)  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$  corresponde ao  $\beta = 0$  e isto está de acordo com as eqs. (2.70) e (2.71). Neste caso,  $\alpha_0$  e  $k$  estão relacionados através de

$$\tan(\alpha_0) = \frac{k - 3\sqrt{1 - k^2}}{3k + \sqrt{1 - k^2}}, \quad (2.72)$$

com solução  $\alpha_0 = \alpha_{0k} + n\pi$  ( $n$  um inteiro), para cada  $k$ .

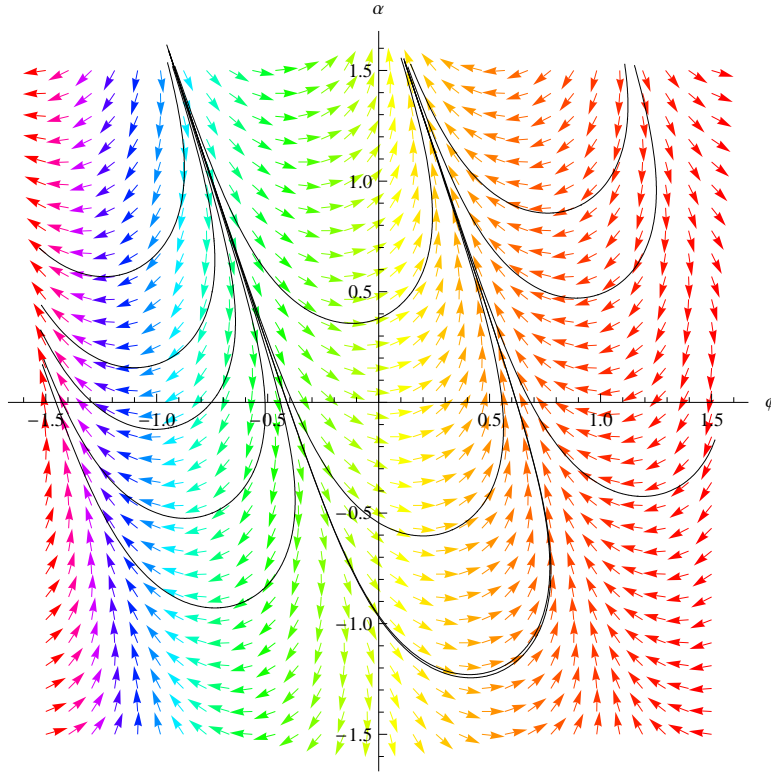


Figura 2.5: Gráfico mostrando  $\alpha$  com relação ao  $\phi$  para o caso clássico com  $k = 0$ . Notemos o comportamento atrator das curvas  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$ .

As soluções das eqs. (2.68) para os casos em que  $k = 0$  e  $k = 1/2$  podem ser vistas nas fig.(2.5) e (2.6). Notemos que existem atratores em  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$  quando  $\phi \rightarrow -\infty, \alpha \rightarrow \infty$ . Os pontos de retorno para pequenos valores de  $\alpha$  não devem ser considerados porque eles estão além do limite de validade do modelo: em tais regiões, outras componentes de matéria se tornam importantes enquanto que o campo escalar fica irrelevante.

Podemos entender o comportamento atrator da seguinte maneira: fazendo a substituição  $3\phi + \alpha \rightarrow \alpha_0 + \epsilon$  na eq. (2.71) com  $\alpha_0$  dado na eq. (2.72); o resultado até primeira ordem em  $\epsilon$ , é

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -3 + 10\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (2.73)$$

que significa que as curvas na vizinhança de  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$ , acima e abaixo, têm inclinação na direção da solução. Portanto as soluções

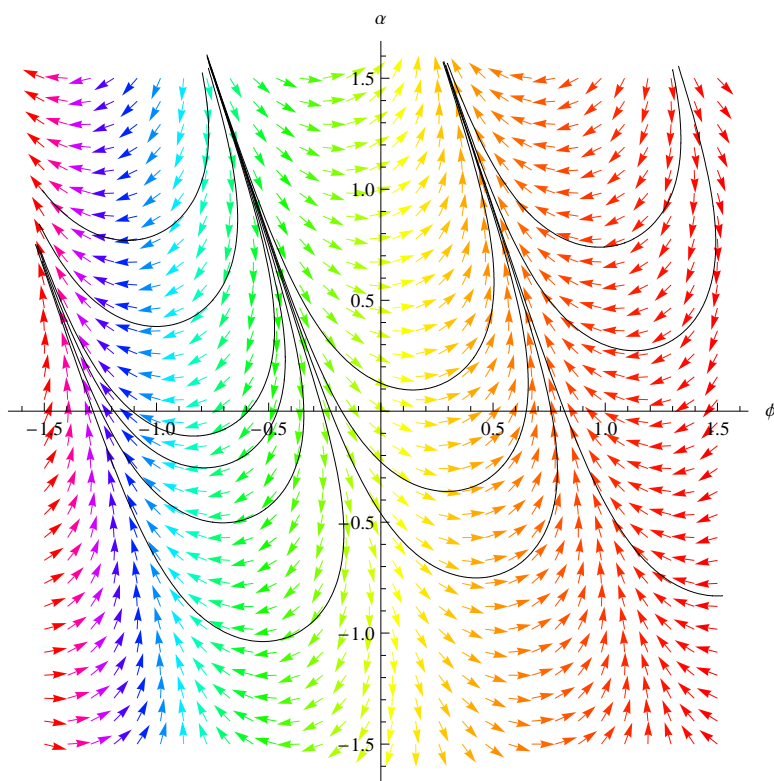


Figura 2.6: Gráfico mostrando  $\alpha$  com relação ao  $\phi$  para o caso clássico com  $k = 0.5$ . Notemos o comportamento atrator das curvas  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$ .

são atratoras nesse sentido.

Notemos que o resultado eq.(2.73) é independente de  $k$ , o primeiro termo na série em  $\epsilon$  é linear e positivo, em que  $\alpha_0$  é dado pela eq. (2.72) e é a única solução de  $d\alpha/d\phi = -3$  (mais adições de  $n\pi$ ).

## 2.4 O Modelo clássico da Grande Parada

Nesta seção, consideraremos uma das duas singularidades em que se enquadram no segundo tipo da classificação do trabalho [38]. A singularidade Grande Parada (Big Brake) é um tipo muito especial que foi primeiro considerado no trabalho [46] e depois discutido com mais detalhes em [47]. Novamente, vamos considerar a mesma geometria de FLRW homogênea e isotrópica, com as seções espaciais

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.74)$$

e um campo escalar homogêneo  $\phi(t)$ , onde para o caso em questão  $l = 1$ , obedecendo uma equação de estado do tipo gás de anti-Chaplygin  $p = A/\rho$ , onde  $A$  é uma constante arbitrária positiva,  $\rho$  a densidade de energia e  $p$  a pressão que, associadas com o campo escalar, são

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.75)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.76)$$

A ação de Einstein-Hilbert, considerando o que foi escrito acima, é dada por

$$S = \int dt \left( -\frac{3}{N\kappa^2} e^{3\alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2N} e^{3\alpha} \dot{\phi}^2 - N e^{3\alpha} V(\phi) \right), \quad (2.77)$$

onde, da mesma forma,  $\alpha \equiv \ln a$  e a constante de acoplamento da gravitação com a matéria  $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ .

Então, a partir da ação eq.(2.77), os momenta canonicamente conjugados às coordenadas  $\alpha$  e  $\phi$  são

$$\pi_\alpha = -\frac{6}{\kappa^2} e^{3\alpha} \dot{\alpha}, \quad (2.78)$$

$$\pi_\phi = e^{3\alpha} \dot{\phi}, \quad (2.79)$$

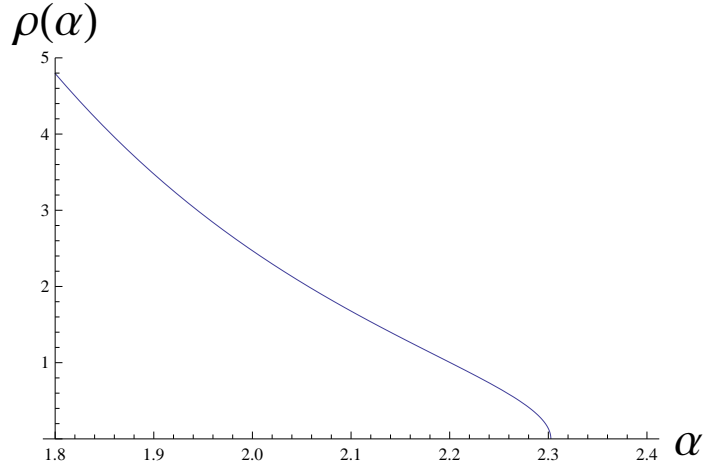


Figura 2.7: Evolução da densidade de energia com respeito ao fator de escala  $\alpha$ .

da qual construímos o hamiltoniana

$$H = H_0 = \left( -\frac{\kappa^2}{12} e^{-3\alpha} \pi_\alpha^2 + \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \pi_\phi^2 + e^{3\alpha} V(\phi) \right), \quad (2.80)$$

que está vinculado a se anular  $H_0 \approx 0$ , que implica a equação de Friedmann

$$\dot{\alpha}^2 \equiv H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) = \frac{\kappa^2}{3} \rho. \quad (2.81)$$

A densidade de energia e a pressão devem satisfazer a equação de conservação

$$\dot{\rho} = -3H(p + \rho). \quad (2.82)$$

Usando a equação de estado,  $p = A/\rho$ , nós podemos escrever a densidade de energia em termos do fator de escala como

$$\rho(\alpha) = \sqrt{B/e^{6\alpha} - A} = \sqrt{A} \sqrt{e^{6(\alpha_* - \alpha)} - 1}, \quad (2.83)$$

ver Fig.(2.7), onde  $B$  é uma constante de integração positiva. Note que a densidade de energia está definida apenas para valores em que  $\alpha < \alpha_* \equiv \ln(B/A)^{\frac{1}{6}}$ . Então, inserindo a eq. (2.83) na eq. (2.81), obtemos

$$\dot{\alpha} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} A^{\frac{1}{4}} \left( e^{6(\alpha_* - \alpha)} - 1 \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.84)$$

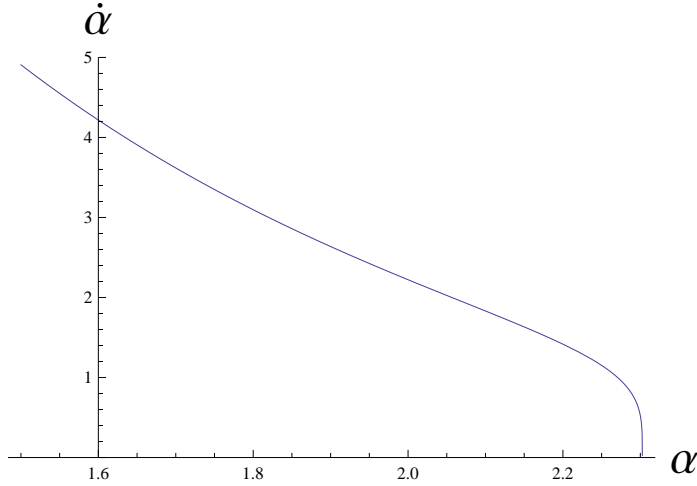


Figura 2.8: O comportamento do parâmetro de Hubble  $\dot{\alpha}$  em termos do fator de escala  $\alpha$ .

ver fig. (2.8). Integrando a eq. (2.84), podemos obter a evolução do fator de escala  $\alpha$  em termos do tempo cósmico  $t$  como mostra a fig. (2.9). Observando o gráfico fig. (2.9) notamos um forte freamento na expansão do universo. Dessa forma, podemos investigar a desaceleração diferenciando a eq.(2.84) com relação ao tempo  $t$ , dando

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\sqrt{A}\kappa^2 e^{6(\alpha_* - \alpha)}}{2\sqrt{e^{6(\alpha_* - \alpha)} - 1}}. \quad (2.85)$$

Podemos notar dessa equação e da fig. (2.10) a divergência dessa quantidade no momento do freio, que implica uma divergência da curvatura do espaço-tempo e da pressão através das equações de Friedmann

$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p). \quad (2.86)$$

Agora, iremos calcular o comportamento do campo escalar em termos do  $\alpha$  em torno de  $\alpha \rightarrow \alpha_*$ . Então, para fazer isto, vamos assumir as equações (2.75) e (2.76) para obtermos

$$\dot{\phi}^2 = \rho + p, \quad (2.87)$$

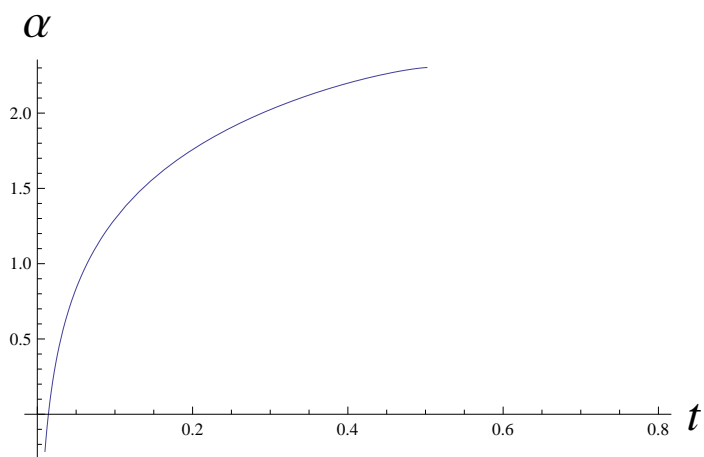


Figura 2.9: Evolução temporal do fator de escala  $\alpha$ .

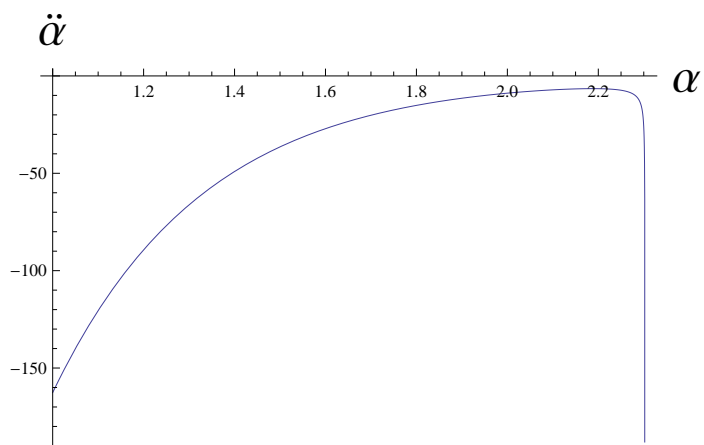


Figura 2.10: Figura mostrando a desaceleração infinita no momento da frenagem para um fator de escala finito  $\alpha$ .



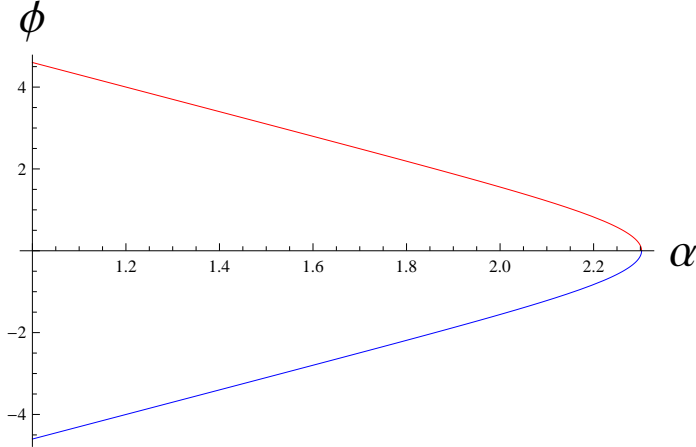


Figura 2.11: Forma de  $\phi(\alpha)$  ao redor da Grande Parada(Big Brake).

e usando  $p = A/\rho$  junto com a eq. (2.81) chegamos a

$$\phi_{\pm}(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{1}{3\kappa^2}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{1 - e^{-6(\alpha_* - \alpha)}} \right). \quad (2.88)$$

Esse comportamento é mostrado na fig. (2.11). Um potencial consistente com esse modelo pode ser escolhido como [48]

$$V(\phi) = V_0 \left( \sinh(\sqrt{3\kappa^2} |\phi|) - \frac{1}{\sinh(\sqrt{3\kappa^2} |\phi|)} \right), \quad (2.89)$$

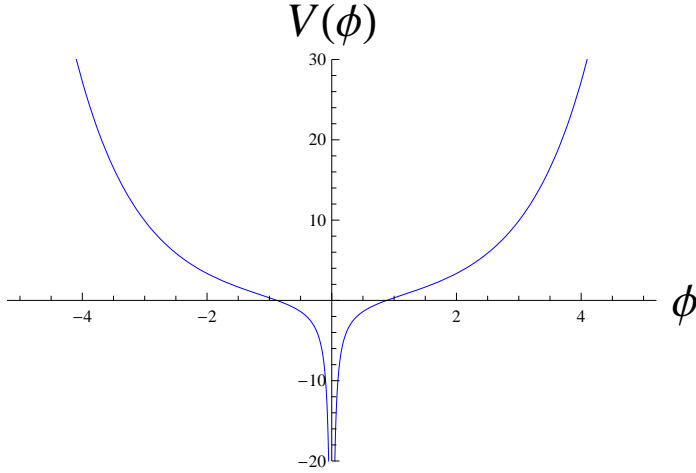
que se comporta da maneira observada na fig. (2.12).

Podemos ver das eqs. (2.83,2.84,2.85,2.88,2.89) que quando  $\alpha \rightarrow \alpha_*$  temos que  $\rho(\alpha) \rightarrow 0$ ,  $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ ,  $\ddot{\alpha} \rightarrow -\infty$ ,  $\phi(\alpha) \rightarrow 0$  e  $V(\phi) \rightarrow -\infty$ , definindo o que chamamos da singularidade da Grande Parada(Big Brake).

## 2.5 O Modelo clássico do Grande Arranque

Nesta seção, iremos exibir a outra das duas singularidades que se enquadram no segundo tipo da classificação de singularidades do trabalho [38], denominado Grande Arranque(Big Démarrage)<sup>2</sup>. Esse

<sup>2</sup>Démarrage, em francês, significa começo, partida ou inicialização


 Figura 2.12: O potencial do campo escalar em termos de  $\phi$ .

tipo foi inicialmente apresentado no trabalho [49]. A entidade material que compõe o universo, nesse modelo, é descrita por um campo escalar fantasma e é regida por uma equação de estado do tipo gás generalizado de Chaplygin

$$p = -\frac{A}{\rho^\beta}, \quad (2.90)$$

onde  $A > 0$  e  $\beta > 0$  são constantes. Esse tipo de matéria foi originalmente introduzido em [50] e [51]. Da mesma maneira, estaremos trabalhando no universo de FLRW isotrópico com um campo fantasma homogêneo. A lagrangeana é a mesma da eq.(2.36), os momenta canônicos são aqueles dados pelas eqs.(2.51), onde  $l = -1$ . O vínculo hamiltoniano, quando escrito em termos das velocidades, dá a equação de Friedmann eq.(2.43) que, associada à eq.(2.90) com a equação oriunda da conservação do tensor momento-energia da matéria

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.91)$$

geram a expressão da densidade de energia

$$\rho = A^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ 1 - \left( \frac{a_{min}}{a} \right)^{3(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad (2.92)$$

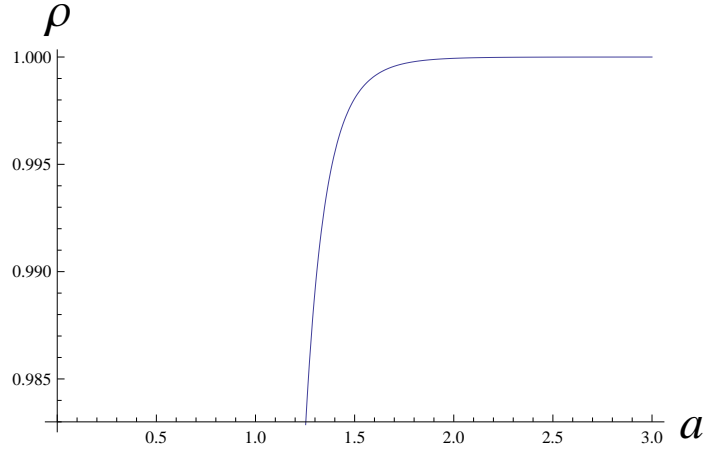


Figura 2.13: Evolução da densidade de energia com relação ao fator de escala.

com o qual chegamos na expressão para a pressão

$$p = -A^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ 1 - \left( \frac{a_{min}}{a} \right)^{3(1+\beta)} \right]^{-\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad (2.93)$$

onde

$$a_{min} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3(1+\beta)}}. \quad (2.94)$$

e  $B$  é uma constante de integração que para esse modelo assume apenas valores  $B < 0$ .

Os gráficos das grandezas acima podem ser vistos nas figs.(2.13) e fig.(2.14). Notemos que, quando o fator de escala se aproxima de um valor mínimo, a densidade de energia se anula e, a pressão diverge indo a menos infinito, o que configura uma grande aceleração inicial.

A densidade de energia e a pressão quando escritas em termos do campo fantasma tomam a forma,

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.95)$$

$$p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.96)$$

Então, das equações acima, levando em conta as eqs.(2.93) e (2.92) podemos chegar às seguintes expressões [52] para a densidade de

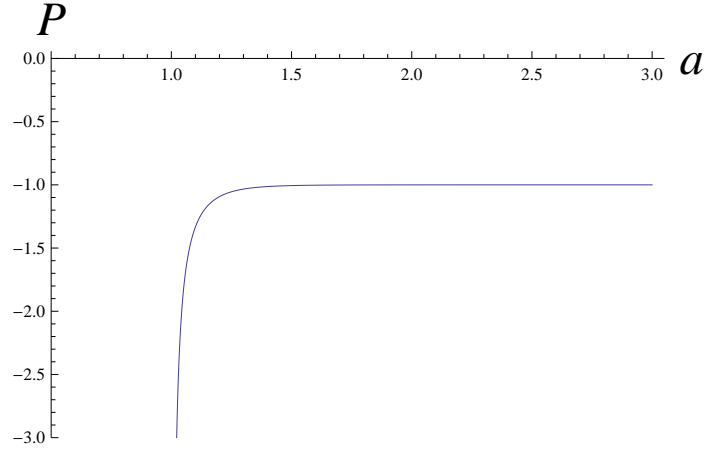


Figura 2.14: Evolução da pressão com relação ao fator de escala.

energia cinética

$$\dot{\phi}^2 = A^{\frac{1}{1+\beta}} \frac{\left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)}}{\left[1 - \left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}}, \quad (2.97)$$

e para o potencial em termos do fator de escala

$$V(a) = \frac{1}{2} A^{\frac{1}{1+\beta}} \frac{2 - \left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)}}{\left[1 - \left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}}. \quad (2.98)$$

Assim, a partir das duas equações acima e relacionando com a eq.(2.43), pode-se encontrar a dependência do campo fantasma em termos do fator de escala

$$\phi = \pm \frac{2}{\kappa\sqrt{3}} \frac{1}{1+\beta} \arccos \left[ \left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{\frac{3(1+\beta)}{2}} \right]. \quad (2.99)$$

Podemos observar através da fig.(2.15) que quando o fator de escala (agora escrito em termos de  $\alpha \equiv \ln(a)$ ) atinge um valor mínimo o campo tende a zero. Podemos encontrar uma expressão para o potencial em termos do campo fantasma utilizando as eqs.(2.95),

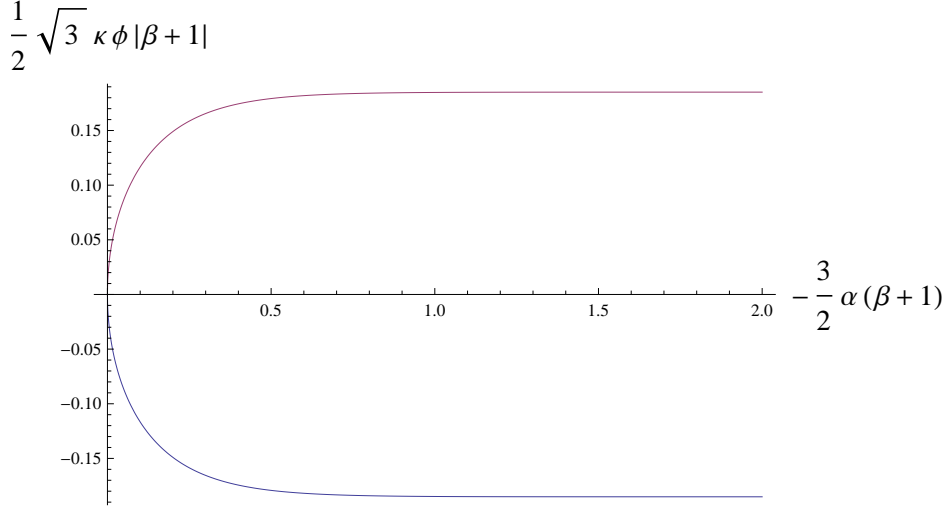


Figura 2.15: Evolução do campo escalar fantasma em termos do fato de escala.

(2.96), (2.93) e (2.92), sendo escrita como

$$V(\phi) = V_{-1} \left[ \frac{1}{\sin^{\frac{2\beta}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)} + \sin^{\frac{2}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right) \right], \quad (2.100)$$

onde  $V_{-1} \equiv \frac{A^{\frac{1}{1+\beta}}}{2}$ , com o qual observamos o comportamento na fig.(2.16) em que o potencial se torna divergente para  $\phi \rightarrow 0$ .

É importante explicitar uma quantidade muito útil para a caracterização da singularidade que é o parâmetro de Hubble  $H$ . Essa quantidade vem das associações das eqs.(2.43) e (2.92) que dão

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} A^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ 1 - (e^{\alpha_{min} - \alpha})^{3(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}. \quad (2.101)$$

Sendo assim, construímos um gráfico da variação do parâmetro de Hubble com o fator de escala  $\alpha$  observado na fig.(2.17) e, que nesse modelo, mostra uma expansão inicial do universo muito rápida.

A derivada do parâmetro de Hubble  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \dot{\alpha}$ , eq.(2.101), que relacionada com as eqs.(2.86), (2.92) e (2.93) dão a seguinte expressão

$$\ddot{\alpha} = \frac{\kappa^2}{2} A^{\frac{1}{1+\beta}} (e^{\alpha_{min} - \alpha})^{3(1+\beta)} \left[ 1 - (e^{\alpha_{min} - \alpha})^{3(1+\beta)} \right]^{-\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad (2.102)$$

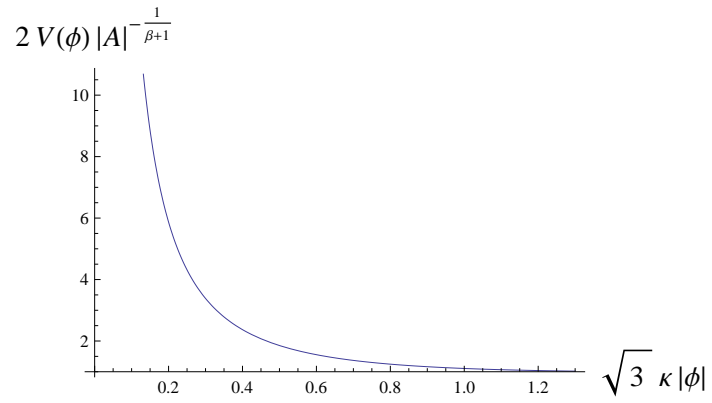


Figura 2.16: Comportamento do potencial frente ao campo fantasma.

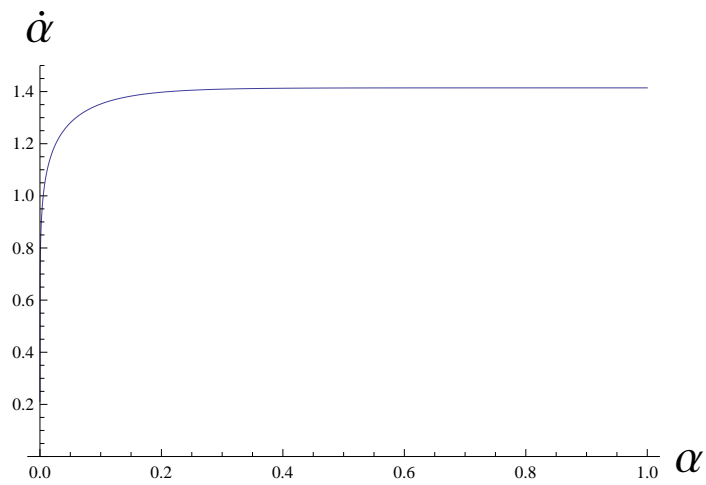


Figura 2.17: Evolução do parâmetro de Hubble com respeito ao fator de escala.

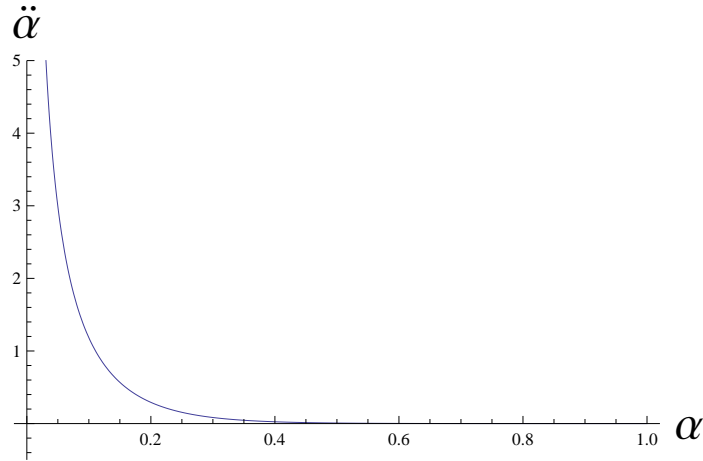


Figura 2.18: Evolução da aceleração  $\ddot{\alpha}$  com relação ao fator de escala.

onde  $a_{min} = e^{\alpha_{min}}$ .

A expressão acima gera a fig.(2.18), na qual podemos notar a grande aceleração sofrida pelo universo nos momentos iniciais da sua expansão. Assim, com tudo isso exposto nesta seção, podemos caracterizar a singularidade Grande Arranque(Big Démarrage) como aquela em que as constantes assumem valores  $A > 0$ ,  $B < 0$  e  $\beta > 0$  e que, quando o fator de escala tende ao valor  $a_{min}$ , a densidade de energia da eq.(2.92) vai à  $\rho \rightarrow 0$ , a pressão eq.(2.93) assume  $p \rightarrow -\infty$ , o campo fantasma eq.(2.99) fica  $\phi \rightarrow 0$ , o potencial eq.(2.100) vai à  $V(\phi) \rightarrow +\infty$ , o parâmetro de Hubble eq.(2.101) dá  $H \rightarrow 0$  e a aceleração eq.(2.102)  $\ddot{\alpha} \rightarrow \infty$ .

## 2.6 O Modelo clássico do Grande Congelamento

Estudaremos o terceiro tipo de singularidade da classificação do trabalho [38] que se chama Grande Congelamento(Big Freeze). Esse nome foi atribuído primeiramente no trabalho [49]. Mais uma vez, o cenário em que se apresentará o modelo será o do universo de FLRW, com a matéria sendo representada por um campo escalar, que será padrão ou de natureza fantasma, dependendo do sinal das constantes  $A$ ,  $B$ ,  $1 + \beta$  que aparecem na equação de estado do tipo

gás generalizado de Chaplygin,

$$p = -\frac{A}{\rho^\beta}. \quad (2.103)$$

Adiante estudaremos a singularidade para os dois tipos de campo escalar.

### 2.6.1 O Grande Congelamento sem Matéria Fantasma

Essa singularidade acontece para o caso em que temos as constantes  $A < 0$ ,  $1 + \beta < 0$ , que aparecem na equação de estado acima. Uma outra constante importante é  $B$ , que aparece ao associamos novamente o vínculo hamiltoniano que dá origem a equação de Friedmann eq.(2.43), com a eq.(2.90) e com a equação oriunda da conservação do tensor momento-energia da matéria

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.104)$$

gerando assim, a expressão da densidade de energia

$$\rho = |A|^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ -1 + \left( \frac{a_{min}}{a} \right)^{3(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad (2.105)$$

com o qual chegamos na expressão para a pressão

$$p = |A|^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ -1 + \left( \frac{a_{min}}{a} \right)^{3(1+\beta)} \right]^{-\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad (2.106)$$

onde,

$$a_{min} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3(1+\beta)}}. \quad (2.107)$$

denota o fator de escala mínimo e para esse modelo a constante de integração  $B$  assume valores  $B > 0$ . Os gráficos das grandezas acima podem ser visto nas figs.(2.19) e fig.(2.20). Notemos que, quando o fator de escala se aproxima de um valor mínimo, a densidade de energia e a pressão divergem para infinito. Podemos perceber que nesse modelo a densidade de energia decresce rapidamente conforme o universo se expande. Como a energia cinética média do gás que compõe o universo vai a zero, e considerando o teorema da equipartição de energia  $\bar{E} = \frac{3}{2}\mathcal{KT}$ , a temperatura  $T$  do universo cai rapidamente,



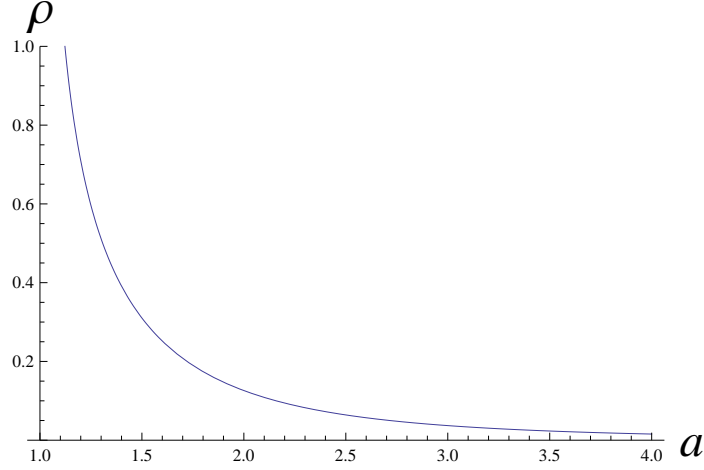


Figura 2.19: Evolução da densidade de energia versus o fator de escala.

tornando o universo muito frio, onde  $\bar{E}$  é a energia cinética média e  $\mathcal{K}$  é a constante universal dos gases. Notemos também que esse modelo não representa um caso realista pois, a pressão, sempre positiva, não descreve a presente aceleração do universo pois o parâmetro de desaceleração  $q$  é sempre positivo.

A densidade de energia e a pressão quando escritas em termos do campo escalar padrão,  $l = 1$ , tomam a forma,

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.108)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.109)$$

Então, das equações acima e das eqs.(2.106) e (2.105) podemos chegar às seguintes expressões [52] para a densidade de energia cinética

$$\dot{\phi}^2 = |A|^{\frac{1}{1+\beta}} \frac{\left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)}}{\left[\left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)} - 1\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}}, \quad (2.110)$$

e para o potencial em termos do fator de escala

$$V(a) = \frac{1}{2} |A|^{\frac{1}{1+\beta}} \frac{\left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)} - 2}{\left[\left(\frac{a_{min}}{a}\right)^{3(1+\beta)} - 1\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}}. \quad (2.111)$$

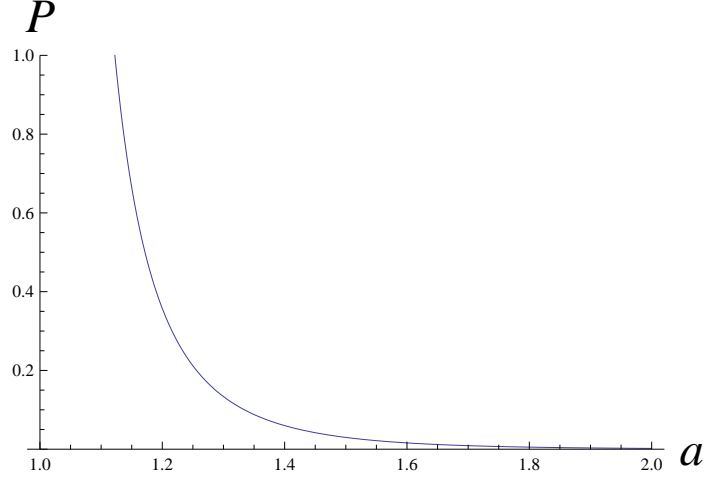


Figura 2.20: Evolução da pressão com relação ao fator de escala.

Assim, a partir das duas equações acima e relacionando-as com a eq.(2.43) pode-se encontrar a dependência do campo escalar em termos do fator de escala

$$|\phi|(a) = \frac{2\sqrt{3}}{3\kappa|1+\beta|} \ln \left[ \left( \frac{a_{min}}{a} \right)^{\frac{3}{2}(1+\beta)} + \sqrt{\left( \frac{a_{min}}{a} \right)^{3(1+\beta)} - 1} \right], \quad (2.112)$$

Podemos observar através da fig.(2.21) que quando o fator de escala (agora escrito em termos de  $\alpha \equiv \ln(\frac{a}{a_{min}})$ ) atinge um valor mínimo o campo escalar tende a se anular.

Da mesma forma feita na seção anterior, podemos encontrar uma expressão para o potencial em termos do campo escalar utilizando as eqs.(2.108), (2.109), (2.106) e (2.105), com o qual chegamos a

$$V(\phi) = V_1 \left[ \sinh^{\frac{2}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1+\beta| |\phi| \right) - \frac{1}{\sinh^{\frac{2\beta}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1+\beta| |\phi| \right)} \right], \quad (2.113)$$

onde  $V_1 \equiv \frac{|A|^{1+\beta}}{2}$ . O comportamento do potencial pode ser visto na fig.(2.22) em que evidenciamos se tornar divergente para  $\phi \rightarrow 0$ .

Podemos encontrar uma expressão para o parâmetro de Hubble

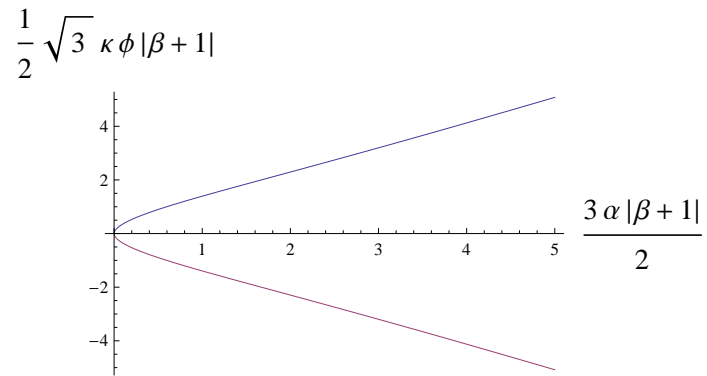


Figura 2.21: Evolução do campo escalar canônico com relação ao fator de escala.

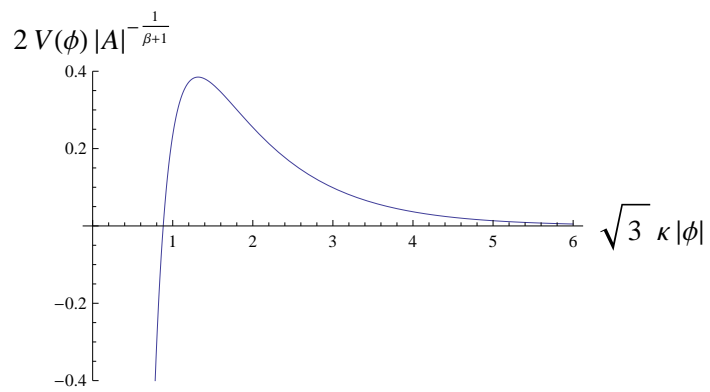


Figura 2.22: Evolução do potencial com respeito ao campo escalar.

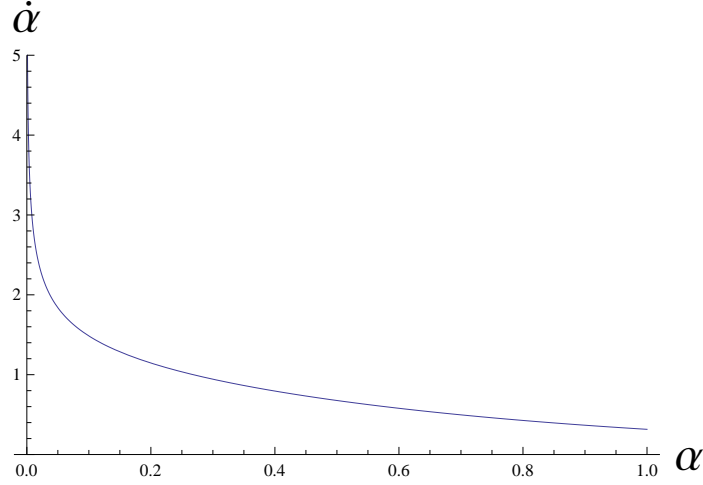


Figura 2.23: Evolução do parâmetro de Hubble com respeito ao fator de escala.

$H$  fazendo as associações das eqs.(2.43) com (2.105) que dão

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} |A|^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ -1 + (e^{\alpha_{min}-\alpha})^{3(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad (2.114)$$

onde  $a_{min} \equiv e^{\alpha_{min}}$ . Um gráfico da variação do parâmetro de Hubble com o fator de escala  $\alpha$  pode ser observado na fig.(2.17), que nesse modelo mostra uma queda muito alta na velocidade da expansão inicial do universo.

A derivada do parâmetro de Hubble  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \dot{\alpha}$ , eq.(2.114), que relacionada com as eqs.(2.86), (2.105) e (2.106) dão a seguinte expressão

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\kappa^2}{2} |A|^{\frac{1}{1+\beta}} (e^{\alpha_{min}-\alpha})^{3(1+\beta)} \left[ -1 + (e^{\alpha_{min}-\alpha})^{3(1+\beta)} \right]^{-\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad (2.115)$$

onde  $a_{min} = e^{\alpha_{min}}$ .

A expressão acima gera a fig.(2.24), com o qual podemos notar a grande desaceleração sofrida pelo universo nos momentos iniciais da sua expansão. Assim, com tudo isso exposto nesta seção, podemos caracterizar a singularidade Grande Congelamento(Big Freeze) sem matéria fantasma como aquela em que as constantes assumem valores  $A < 0$ ,  $B > 0$  e  $1 + \beta < 0$  e que, quando o fator de escala tende ao valor  $a_{min}$ , a densidade de energia eq.(2.105) vai a

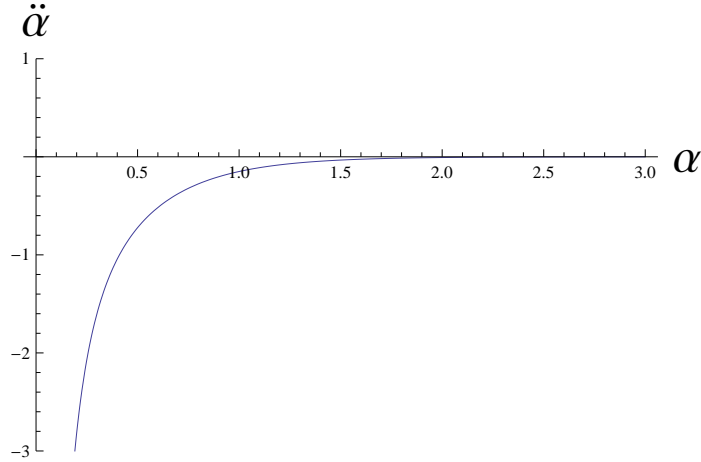


Figura 2.24: Evolução da aceleração versus fator de escala.

$\rho \rightarrow +\infty$ , a pressão eq.(2.106) assume  $p \rightarrow +\infty$ , o campo escalar eq.(2.112) dá  $\phi \rightarrow 0$ , o potencial eq.(2.113) vai a  $V(\phi) \rightarrow -\infty$ , o parâmetro de Hubble eq.(2.101) dá  $H \rightarrow +\infty$  e a aceleração eq.(2.102)  $\ddot{\alpha} \rightarrow -\infty$ .

### 2.6.2 O Grande Congelamento com Matéria Fantasma

Nessa seção, iremos trabalhar na outra singularidade Grande Congelamento(Big Freeze) em que a entidade material que compõe o universo, nesse modelo, é imitada agora por um campo escalar fantasma e sendo regida pela mesma equação de estado do tipo gás generalizado de Chaplygin

$$p = -\frac{A}{\rho^\beta}, \quad (2.116)$$

onde, para esse caso, as constantes assumem valores  $A > 0$  e  $1 + \beta < 0$ . Mais uma vez o universo de FLRW isotrópico com um campo fantasma homogêneo será a nossa configuração. Então, os momenta canônicos são aqueles dados pelas eqs.(2.51), onde  $l = -1$ . O vínculo hamiltoniano dá a equação de Friedmann eq.(2.43) que, associada mais uma vez à eq.(2.116) com a equação oriunda da conservação do tensor momento-energia da matéria

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.117)$$

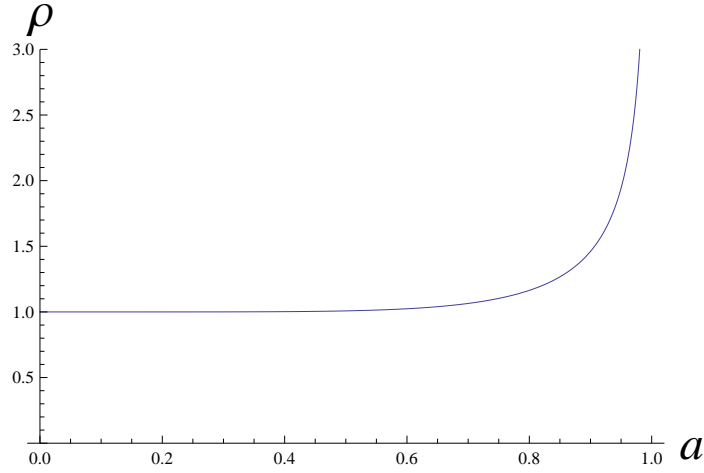


Figura 2.25: Evolução da densidade de energia com relação ao fator de escala.

geram a expressão da densidade de energia para o caso do Grande Congelamento (Big Freeze) fantasma

$$\rho = A^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ 1 - \left( \frac{a_{max}}{a} \right)^{3(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad (2.118)$$

com o qual chegamos na expressão para a pressão

$$p = -A^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ 1 - \left( \frac{a_{max}}{a} \right)^{3(1+\beta)} \right]^{-\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad (2.119)$$

onde

$$a_{max} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3(1+\beta)}}. \quad (2.120)$$

sendo  $B$  uma constante de integração que para esse caso assume valores  $B < 0$ . Podemos perceber que as equações acima mostram a ocorrência de uma região, para um fator de escala finito  $a_{max}$  no futuro, em que a densidade de energia diverge para mais infinito e a pressão diverge para menos infinito, mostrando que o universo está super acelerando. Os gráficos destas grandezas podem ser vistos nas figs.(2.25) e fig.(2.26).

A densidade de energia e a pressão quando escritas em termos

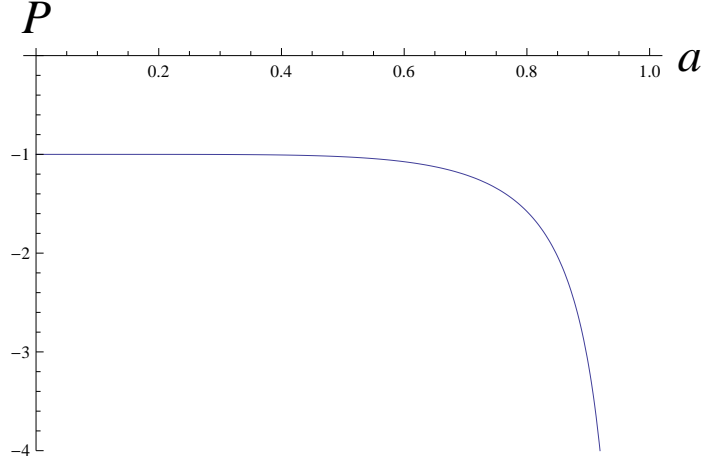


Figura 2.26: Evolução da pressão com relação ao fator de escala.

do campo fantasma tomam a forma,

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.121)$$

$$p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.122)$$

Então, das equações acima, juntando com as eqs.(2.118) e (2.119) podemos chegar às seguintes expressões [52] para a densidade de energia cinética:

$$\dot{\phi}^2 = A^{\frac{1}{1+\beta}} \frac{\left(\frac{a_{max}}{a}\right)^{3(1+\beta)}}{\left[1 - \left(\frac{a_{max}}{a}\right)^{3(1+\beta)}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}}, \quad (2.123)$$

e para o potencial em termos do fator de escala

$$V(a) = \frac{1}{2}A^{\frac{1}{1+\beta}} \frac{2 - \left(\frac{a_{max}}{a}\right)^{3(1+\beta)}}{\left[1 - \left(\frac{a_{max}}{a}\right)^{3(1+\beta)}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}}. \quad (2.124)$$

Da mesma maneira, das duas equações acima, e relacionando com a eq.(2.43) podemos encontrar a dependência do campo fantasma em termos do fator de escala

$$|\phi| = \frac{2}{\kappa\sqrt{3}} \frac{1}{1+\beta} \arccos \left[ \left(\frac{a_{max}}{a}\right)^{\frac{3(1+\beta)}{2}} \right]. \quad (2.125)$$

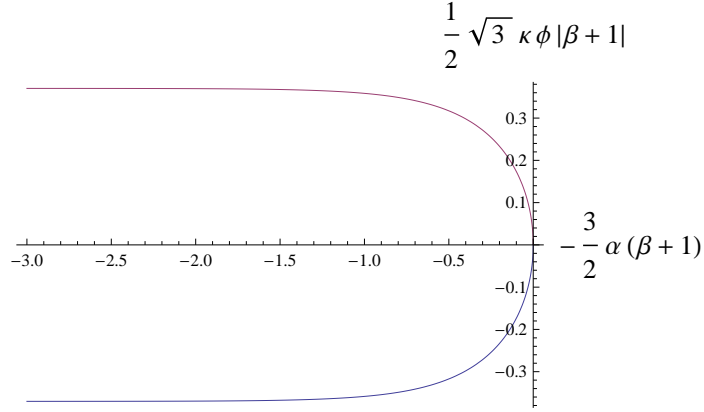


Figura 2.27: Evolução do campo escalar fantasma em termos do fato de escala, onde  $\alpha = \ln\left(\frac{a}{a_{max}}\right)$ .

O comportamento do campo fantasma é mostrado na fig.(2.27), o que evidencia que quando o fator de escala atinge um valor máximo  $a_{max}$  o campo tende a se anular.

O potencial em termos do campo fantasma utilizando as eqs.(2.95), (2.96), (2.119) e (2.118), pode ser escrito como

$$V(\phi) = V_{-1} \left[ \frac{1}{\sin^{\frac{2\beta}{1+\beta}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\kappa|1+\beta||\phi|\right)} + \sin^{\frac{2}{1+\beta}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\kappa|1+\beta||\phi|\right) \right], \quad (2.126)$$

onde  $V_{-1} \equiv \frac{A^{\frac{1}{1+\beta}}}{2}$ , com o qual observamos o comportamento na fig.(2.28) em que o potencial diverge para  $\phi \rightarrow 0$ .

O parâmetro de Hubble  $H$  vem das associações das eqs.(2.43) e (2.118) que dão

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} A^{\frac{1}{1+\beta}} \left[ 1 - (e^{\alpha_{max}-\alpha})^{3(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}. \quad (2.127)$$

O comportamento do parâmetro de Hubble pode ser mostrado na fig.(2.29), em que se mostra uma expansão muito rápida do universo para um fator de escala  $a_{max}$  finito.

A aceleração do fator de escala  $\ddot{a}$  pode ser encontrada fazendo a associação das eqs.(2.127), (2.86), (2.118) e (2.119), dando a seguinte



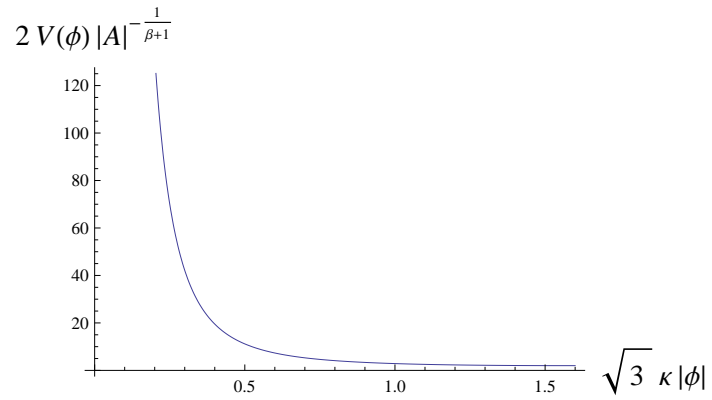


Figura 2.28: Comportamento do potencial com relação ao campo fantasma.

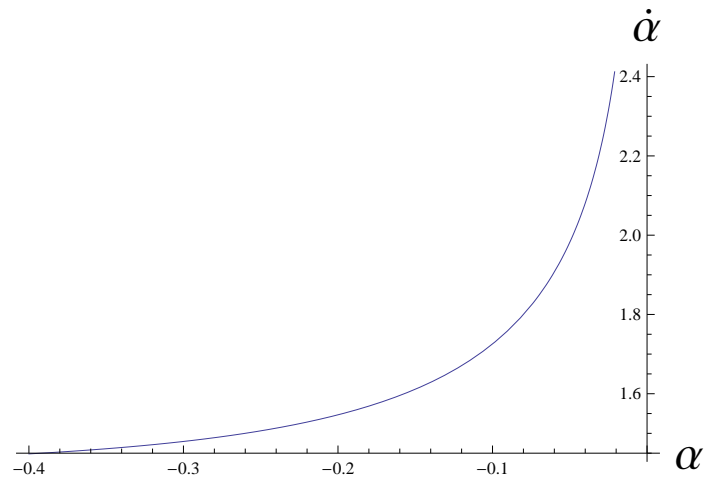
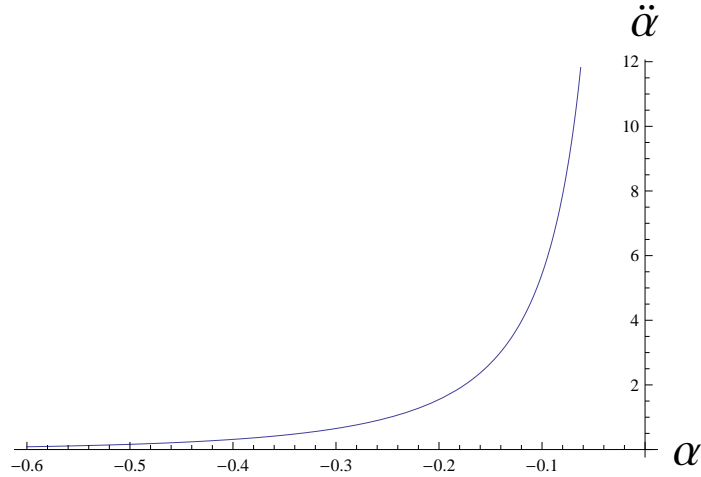


Figura 2.29: Evolução do parâmetro de Hubble com relação ao fator de escala.


 Figura 2.30: Evolução da aceleração  $\ddot{\alpha}$  com relação ao fator de escala.

expressão

$$\ddot{\alpha} = \frac{\kappa^2}{2} A^{\frac{1}{1+\beta}} (e^{\alpha_{max}-\alpha})^{3(1+\beta)} \left[ 1 - (e^{\alpha_{max}-\alpha})^{3(1+\beta)} \right]^{-\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad (2.128)$$

onde  $a_{max} = e^{\alpha_{max}}$ .

Podemos notar o comportamento da aceleração do fator de escala na fig.(2.30), com o qual verificamos a grande aceleração sofrida pelo universo quando a expansão alcança o valor  $a_{max}$ . Dessa forma, podemos definir a singularidade Grande Congelamento(Big Freeze) com matéria fantasma como aquela em que as constantes assumem valores  $A > 0$ ,  $B < 0$  e  $1 + \beta < 0$  e que, quando o fator de escala tende ao valor  $a_{max}$ , a densidade de energia eq.(2.118) vai à  $\rho \rightarrow +\infty$ , a pressão eq.(2.119) assume  $p \rightarrow -\infty$ , o campo fantasma eq.(2.125) dá  $\phi \rightarrow 0$ , o potencial eq.(2.126) vai à  $V(\phi) \rightarrow +\infty$ , o parâmetro de Hubble eq.(2.127) dá  $H \rightarrow +\infty$  e a aceleração eq.(2.128)  $\ddot{\alpha} \rightarrow +\infty$ .

Para finalizar esse capítulo nós poderemos resumir na Tabela abaixo as características de cada tipo de singularidade.

CAPÍTULO 2. FORMALISMO HAMILTONIANO DA RELATIVIDADE GERAL 47

Singularidade	Características
Grande Rasgo	Campo Fantasma $\phi$ . $t \rightarrow t_{Rip} = t_0 + \frac{2}{\lambda^2 H_0}$ . $\rho \rightarrow +\infty$ . $\alpha \rightarrow +\infty$ . $\dot{\alpha} \rightarrow +\infty$ . $\phi \rightarrow -\infty$ . $V(\phi) \rightarrow \infty$ .
Grande Parada	Campo Escalar Padrão $\phi$ . $t \rightarrow t_{Brake}$ . $\rho \rightarrow 0$ . $\alpha \rightarrow \alpha_{Brake}$ . $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ . $\ddot{\alpha} \rightarrow -\infty$ . $\phi \rightarrow 0$ . $V(\phi) \rightarrow -\infty$ .
Grande Arranque	Campo Fantasma $\phi$ . $t \rightarrow t_{min}$ . $\rho \rightarrow 0$ . $\alpha \rightarrow \alpha_{min}$ . $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ . $\ddot{\alpha} \rightarrow +\infty$ . $\phi \rightarrow 0$ . $V(\phi) \rightarrow +\infty$ .
Grande Congelamento	Campo Escalar Padrão $\phi$ . $t \rightarrow t_{min}$ . $\rho \rightarrow +\infty$ . $\alpha \rightarrow \alpha_{min}$ . $\dot{\alpha} \rightarrow +\infty$ . $\ddot{\alpha} \rightarrow -\infty$ . $\phi \rightarrow 0$ . $V(\phi) \rightarrow -\infty$ .
Grande Congelamento	Campo Fantasma $\phi$ . $t \rightarrow t_{max}$ . $\rho \rightarrow +\infty$ . $\alpha \rightarrow \alpha_{min}$ . $\dot{\alpha} \rightarrow +\infty$ . $\ddot{\alpha} \rightarrow +\infty$ . $\phi \rightarrow 0$ . $V(\phi) \rightarrow +\infty$ .

## Capítulo 3

# Quantização de Dirac-Wheeler-DeWitt

A quantização canônica é um esquema desenvolvido para a quantização de sistemas clássicos. Aplicaremos este esquema à quantização da Relatividade Geral.

### 3.1 A Equação de Wheeler- DeWitt

Primeiramente, definiremos o ambiente geométrico onde será inserida o programa de quantização da TRG. Definiremos o espaço das configurações na qual a dinâmica quântica será definida. Vamos considerar o espaço de todas as 3-métricas riemannianas  $h_{ij}(x)$  e das configurações da matéria  $\phi(x)$  na hipersuperfície  $\Sigma$ ,

$$Riem(\Sigma) \equiv \{h_{ij}(x), \phi(x) | x \in \Sigma\}. \quad (3.1)$$

Isto gera a definição de um espaço dimensionalmente infinito na qual  $x = x^i$  especifica um ponto na hipersuperfície. Então, vamos identificar a métrica e os campos relacionados por um difeomorfismo para definir o superespaço como

$$\frac{Riem(\Sigma)}{Diff_0(\Sigma)}, \quad (3.2)$$

onde o  $(_0)$  denota o fato de que apenas estamos considerando difeomorfismos conectados com a identidade. Esse espaço dimensionalmente infinito será a configuração básica para a cosmologia quântica.

A métrica de DeWitt eq.(2.14) estabelece uma métrica no superspaço e que pode ser escrita como

$$g_{AB}(x) \equiv g_{(ij)(kl)}(x), \quad (3.3)$$

onde os índices  $A, B$  passam por todas as componentes independentes da 3-métrica  $h_{ij}$

$$A, B \in h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{22}, h_{23}, h_{33}. \quad (3.4)$$

A métrica de DeWitt tem assinatura  $(- + + + +)$  em cada ponto  $x \in \Sigma$ . Para incorporar todos os graus de liberdade, teremos que aumentar o número de componentes nos índices  $A$  e  $B$  e, incluir os campos de matéria  $g_{(\phi)(\phi)}(x)$ . Portanto, de posse de todos os graus de liberdade, podemos obter a supermétrica  $g_{AB}$  completa.

A métrica de DeWitt inversa,  $g^{AB} = g^{(ij)(kl)}$ , pode ser definida pedindo que

$$g^{(ij)(kl)}g_{(kl)(mn)} = \frac{1}{2} (\delta_m^i \delta_n^j + \delta_n^i \delta_m^j), \quad (3.5)$$

que dá

$$g^{(ij)(kl)} = \sqrt{h} \left[ \frac{1}{2} (h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk}) - h^{ij}h^{kl} \right]. \quad (3.6)$$

Nesse momento, iremos proceder com a quantização canônica estabelecendo o funcional de onda do universo como sendo  $\psi(h_{ij}, \phi)$ , representando o estado quântico do sistema. Note que  $\psi$  não depende explicitamente do tempo. Isto está relacionado com o fato de a TRG ser uma teoria já parametrizada, ou seja, a ação de Einstein-Hilbert é invariante sob reparametrizações no tempo. O tempo está contido implicitamente nas variáveis dinâmicas  $h_{ij}$  e  $\phi$ .

Os momenta  $\pi^0, \pi^i, \pi^{ij}$  e  $\pi_\phi$  se tornam os operadores  $\hat{\pi}, \hat{\pi}^i, \hat{\pi}^{ij}$  e  $\hat{\pi}_\phi$  definidos por

$$\pi^0 \rightarrow \hat{\pi}^0 = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N}, \quad (3.7)$$

$$\pi^i \rightarrow \hat{\pi}^i = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N_i}, \quad (3.8)$$

$$\pi^{ij} \rightarrow \hat{\pi}^{ij} = -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ij}}, \quad (3.9)$$

$$\pi_\phi \rightarrow \hat{\pi}_\phi = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \phi}. \quad (3.10)$$

De acordo com procedimento de quantização de Dirac [2], a função de onda é aniquilada pelos operadores associados aos vínculos clássicos eqs.(2.17), (2.18), (2.26) e (2.27). Para os vínculos primários temos

$$\hat{\pi}^0 \psi = -i\hbar \frac{\delta \psi}{\delta N} = 0, \quad (3.11)$$

$$\hat{\pi}^i \psi = -i\hbar \frac{\delta \psi}{\delta N_i} = 0, \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

o que implica que  $\psi$  independe de  $N$  e  $N^i$ . O funcional de onda também é aniquilado pela versão operador dos vínculos secundários

$$\hat{H}_i \psi(h_{ij}, \phi) = 0, \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow -2h_{ki} D_j \frac{\delta \psi(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{kj}} + \frac{\delta \psi(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (3.15)$$

para o vínculo do momento e,

$$\hat{H}_0 \psi(h_{ij}, \phi) = 0, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\hbar^2 \left( k^2 G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + \frac{l}{2\sqrt{h}} \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} \right) \psi(h_{ij}, \phi) \\ & + \sqrt{h} \left( -\frac{{}^3R}{k^2} + \frac{l}{2} h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + V(\phi) \right) \psi(h_{ij}, \phi) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

para o vínculo hamiltoniano. O vínculo do momento implica que o funcional de onda é invariante sob transformações de coordenadas espaciais. Já o vínculo hamiltoniano dá origem à equação de Wheeler-DeWitt eq.(3.17) [5, 6], que é uma equação diferencial funcional hiperbólica de segunda ordem, que descreve a evolução dinâmica do funcional de onda no superespaço para cada ponto  $x \in \Sigma$ . É importante ressaltar, sem entrar em maiores detalhes, alguns problemas que surgem no procedimento de quantização canônica da gravitação, tais como:

1. A necessidade da positividade da 3-métrica  $h$ . Nominalmente,  $h$  não é apenas um tensor simétrico mas uma métrica. Isto tem que dar uma norma positiva para qualquer campo vetorial em  $\Sigma$ . A questão geral por detrás disso é que as propriedades geométricas dos operadores deveriam ser implementadas no nível quântico.

2. Funções classicamente equivalentes de variáveis do espaço de fase não são equivalentes no nível quântico quando, essas variáveis do espaço de fase se transformam em operadores não comutativos. Isso leva ao problema do fator de ordenamento e pode surgir quando quantizamos um sistema clássico. Contudo, existe uma natural escolha de ordenamento em que os termos de derivada se tornam um laplaciano na supermétrica [5, 53].
3. Os vínculos decidem a priori quais estados são admissíveis na gravidade quântica. Portanto, a sua representação decide sobre o conteúdo físico da teoria.
4. O problema da identificação de um espaço de Hilbert, que é afetado pela restrição dos vínculos. A Wheeler-DeWitt não indica um produto interno e uma noção de uma probabilidade evidente.
5. Temos que ressaltar o problema do tempo na teoria pois ele não se apresenta de maneira explícita nas equações de Wheeler-DeWitt, tal como aparece na equação de Schrödinger.
6. Outro problema muito importante diz respeito ao colapso da função de onda, ou seja, o ato de fazer medidas na teoria da gravidade quântica. Como procederemos para realizar medições se existe a necessidade de um mundo clássico, que dê suporte para as medidas quânticas ao tratarmos o universo como um todo?

### 3.1.1 Minisuperespaço Quântico das Singularidades

Trabalhar no superespaço quântico na prática, com as técnicas disponíveis atualmente, é impossível. Portanto, se faz necessário o emprego de uma aproximação para reduzir os infinitos graus de liberdade a um número finito, obtendo assim algum modelo de minisuperespaço particular. Uma maneira fácil de conseguir isso é considerar métricas homogêneas, pois para cada ponto  $x \in \Sigma$ , há um número finito de graus de liberdade no superespaço.

No entanto, a redução para o minisuperespaço não constitui um esquema de aproximação rigoroso vindo do superespaço da cosmologia quântica. Os trabalhos formulados na aproximação de minisuperespaço, devem portanto, ser vistos como modelos de brinquedo, que nós, no entanto, esperamos que capturem um pouco da essência

da cosmologia quântica. Assim, no momento da redução dos graus de liberdade, estamos definindo que alguns campos e seus momenta conjugados são zero simultaneamente, o que viola o princípio da incerteza. Contudo, na cosmologia clássica, homogeneidade e isotropia são hipóteses simplificadoras importantes que têm uma base observacional. Portanto, não é totalmente irracional a esperança de que uma redução consistente para determinados modelos de minisuperespaço, com simetrias particulares, possa ser encontrada no futuro.

Por simplicidade, vamos considerar cosmologias homogêneas. Então, ao invés de usarmos uma equação de Wheeler-Dewitt para cada ponto de  $\Sigma$ , lidaremos com apenas uma equação para toda a variedade. Para isto, restringiremos a métrica e o campo de matéria a se tornarem homogêneos e isotrópicos. Um minisuperespaço mais geral envolveria as seguintes grandezas: a 3-métrica  $h_{ij}$  homogênea descrita por um número finito de funções de  $t$  e  $q^\alpha(t)$ , onde  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  com  $n$  sendo a dimensão do espaço, a função deslocamento nula  $N^i = 0$ , e a função lapso sendo homogênea  $N = N(t)$ , conduzindo ao elemento de linha:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + h_{ij}(q^\alpha, t) dx^i dx^j. \quad (3.18)$$

Porém, estamos interessados no modelo de FLRW para o universo espacialmente plano, ou seja, de constante de curvatura  $K = 0$ . Sendo assim, a 3-métrica será escrita como

$$h_{ij}(q^\alpha, t) dx^i dx^j = a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.19)$$

onde  $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Desta maneira, faremos a identificação das coordenadas e dos momenta canônicos clássicos com os respectivos operadores. Sendo assim, utilizando o fator de ordenamento de Laplace-Beltrami<sup>1</sup> de tal forma que

$$\pi^2 \rightarrow -\hbar^2 q^{-\eta} \left( \frac{\partial}{\partial q} q^\eta \frac{\partial}{\partial q} \right), \quad (3.20)$$

onde  $\eta$  é o fator de ordenamento, resulta que o operador do hamiltoniano correspondente à (2.42) aplicado na função de onda do minisuperespaço  $\psi(a, \phi)$ , com  $\eta = 1$ , dá

$$\left[ \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2} a \frac{\partial}{\partial a} a \frac{\partial}{\partial a} - l \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + a^6 V(\phi) \right] \psi(a, \phi) = 0. \quad (3.21)$$

<sup>1</sup>Para mais detalhes sobre fator de ordenamento ver "Factor ordering in standard quantum cosmology" [55].



Fazendo a identificação na equação acima de

$$a \equiv e^\alpha, \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow a \frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (3.23)$$

obtemos

$$\left[ \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - l \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + e^{6\alpha} V(\phi) \right] \psi(\alpha, \phi) = 0, \quad (3.24)$$

que é a equação de Wheeler-DeWitt para o modelo de minisuperespaço de FLRW, e essa será a equação base para tratarmos dos casos quânticos.

### 3.1.2 A Aproximação WKB para o Modelo de Minisuperespaço

Podemos chegar às equações clássicas da TRG via a aproximação WKB. Isto pode ser feito se nós assumirmos que a função de onda satisfaz

$$\psi(\alpha, \phi) \cong \sum_n \psi_n(\alpha, \phi) \equiv \sum_n \mathcal{A}_n e^{\frac{i}{\hbar} S_n(\alpha, \phi)}, \quad (3.25)$$

onde os  $\mathcal{A}_n$  são coeficientes da expansão e os  $\psi_n(\alpha, \phi)$  são considerados soluções da eq.(3.24). Então, aplicando na eq.(3.24), temos

$$\begin{aligned} \sum_n \left\{ \left[ \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - l \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + e^{6\alpha} V(\phi) \right] \mathcal{A}_n e^{\frac{i}{\hbar} S_n} \right\} = 0 \quad (3.26) \\ \sum_n \left\{ \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2} \left[ -\frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{\partial S_n}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \alpha^2} \right] \mathcal{A}_n e^{\frac{i}{\hbar} S_n} + \right. \\ \left. -l \frac{\hbar^2}{2} \left[ -\frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{\partial S_n}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \phi^2} \right] \mathcal{A}_n e^{\frac{i}{\hbar} S_n} + \right. \\ \left. + e^{6\alpha} V(\phi) \mathcal{A}_n e^{\frac{i}{\hbar} S_n} \right\} = 0. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Separando, na equação acima, o termo em mais baixa ordem em  $\hbar$ , encontramos

$$-\frac{\kappa^2}{12} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{l}{2} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 + e^{6\alpha} V(\phi) = 0, \quad (3.28)$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi para o caso do minisuperespaço de FLRW. Assim, somos compelidos a lembrar das identificações

$$\pi_\alpha = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \alpha} \right), \quad (3.29)$$

$$\pi_\phi = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right), \quad (3.30)$$

e, das eqs.(3.29) e (3.30) na eq.(3.28), obtemos

$$-\frac{\kappa^2}{12}\pi_\alpha^2 + \frac{l}{2}\pi_\phi^2 + e^{6\alpha}V(\phi) = 0, \quad (3.31)$$

sendo exatamente igual, a menos da transformação  $a = e^\alpha$ , ao clássico eq.(2.42). Dessa forma, a aproximação WKB está levando o sistema quântico para o caso clássico.

### 3.2 Minisuperespaço do Grande Rasgo

Partiremos da equação de Wheeler-DeWitt para o minisuperespaço de FLRW dada pela eq.(3.24), com  $l = -1$  e com o potencial para o campo fantasma eq.(2.49)

$$V = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}, \quad (3.32)$$

que dão

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + V_0 e^{\delta\alpha - \lambda\sqrt{6}\phi} \right] \psi(\alpha, \phi) = 0, \quad (3.33)$$

onde a constante de acoplamento  $\kappa = \sqrt{6}$ . Uma solução pode ser obtida percebendo que a ação clássica eq.(2.65) satisfaz exatamente a equação acima [44]. Assim, a função de onda pode ser escrita como

$$\psi(u, v) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar}[zu - \sqrt{(1-z^2)v}]} + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar}[zu - \sqrt{(1-z^2)v}]}, \quad (3.34)$$

onde as coordenadas  $(u, v)$  são funções de  $(\alpha, \phi)$  dadas através de eq.(2.61) e eq.(2.62). Estamos interessados em soluções sob a forma de uma superposição gaussiana da solução eq.(3.34). Assim escreveremos  $\psi(u, v)$  como

$$\psi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} dz A(z) \left\{ C_1 e^{\frac{i}{\hbar}[zu - \sqrt{(1-z^2)v}]} + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar}[zu - \sqrt{(1-z^2)v}]} \right\}, \quad (3.35)$$

onde  $A(z)$  é a amplitude da gaussiana que é escrita em termos da largura  $\sigma$  e do valor médio  $\bar{z}$  através de

$$A(z) = \frac{\hbar}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2}\hbar^2}. \quad (3.36)$$

Precisamos encontrar uma expressão analítica para a função de onda  $\psi$ . Para isto temos de calcular a integral eq.(3.35). Contudo, uma solução para esta integral não pode ser encontrada nas tabelas conhecidas. Sendo assim, faremos a seguinte consideração: vamos imaginar que o pacote esteja bastante concentrado em torno do valor médio  $\bar{z}$ , ou seja, a largura  $\sigma$  seja suficientemente pequena. Desta forma, podemos fazer uma expansão em Taylor do argumento  $S_{0z}$  nos arredores de  $\bar{z}$  onde

$$S_{0z} = zu - \sqrt{(1-z^2)}v. \quad (3.37)$$

Assim, a expansão fica

$$S_{0z} \approx S_{0z}(\bar{z}) + S'_{0z}(\bar{z})(z - \bar{z}) + S''_{0z}(\bar{z})\frac{(z - \bar{z})^2}{2} + O[(z - \bar{z})^3], \quad (3.38)$$

onde a linha denota diferenciação em relação a  $z$ . Chamando  $S_{0z}(\bar{z}) = S_0$  e substituindo a expressão acima na eq.(3.35) para o caso em que a constante  $C_2 = 0$  e, desprezando termos de terceira ordem, obtemos

$$\psi = C_1 \frac{\hbar}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2}\hbar^2 + \frac{i}{\hbar} [S_0 + S'_0(z-\bar{z}) + S''_0\frac{(z-\bar{z})^2}{2}]}. \quad (3.39)$$

Fazendo  $z - \bar{z} = y$  e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\psi = C_1 \frac{\hbar}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\left[ \left( \frac{1-i\sigma^2\hbar S''_0}{2\sigma^2\hbar^2} \right) y^2 - \frac{iS'_0}{\hbar} y - \frac{iS_0}{\hbar} \right]}. \quad (3.40)$$

Esta integral é da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(Ay^2 + By + C)} dy = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2 - 4AC}{4A}}, \quad (3.41)$$

com

$$A = \frac{1 - i\sigma^2\hbar S''_0}{2\sigma^2\hbar^2}, B = -\frac{iS'_0}{\hbar}, C = -\frac{iS_0}{\hbar}. \quad (3.42)$$

Então, substituindo as últimas expressões (3.41) e (3.42) na integral para o função de onda (3.40) encontra-se que [44]

$$\psi = C_1 \hbar^2 \sqrt{\frac{1}{1 - i\sigma^2 \hbar S_0''}} \exp \left[ \frac{iS_0}{\hbar} - \frac{S_0'^2}{2(\sigma^{-2} - i\hbar S_0'')} \right]. \quad (3.43)$$

### 3.2.1 Aproximação WKB Para o Modelo Grande Rasgo

Nesse momento, iremos proceder com a aproximação WKB através da identificação dada pela eq.(3.25), onde  $S$  é uma função de  $u$  e  $v$ . Inserindo esta identificação na Eq.(3.33) e obtendo-se a equação de mais baixa ordem em  $\hbar$ , encontramos

$$\left( \frac{\partial S_0}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial v} \right)^2 = 1, \quad (3.44)$$

que é a equação clássica de Hamilton-Jacobi eq.(2.64). Esta equação tem a mesma solução eq.(2.65)

$$S_{0z} = zu - \sqrt{(1 - z^2)v}, \quad (3.45)$$

onde  $z$  é uma constante. Substituindo as equações (2.61) e (2.62) na solução acima, encontramos que a ação clássica  $S_{0z}$  pode ser escrita em termos das coordenadas  $(\alpha, \phi)$ , o que nos convida a identificar os momenta através de

$$\pi_\alpha = \frac{\partial S_{0z}}{\partial \alpha}, \quad (3.46)$$

e

$$\pi_\phi = \frac{\partial S_{0z}}{\partial \phi}. \quad (3.47)$$

Escrevendo os momenta (2.38) e (2.40) em termos das coordenada  $\alpha$  e  $\phi$  com a constante de Einstein da gravitação  $\kappa^2 = 6$ , temos

$$\pi_\alpha = -e^{3\alpha} \dot{\alpha}, \quad (3.48)$$

e

$$\pi_\phi = -e^{3\alpha} \dot{\phi}. \quad (3.49)$$

De onde podemos obter

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S_{0z}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{0z}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \quad (3.50)$$

e

$$\dot{\phi} = -e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S_{0z}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial S_{0z}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right). \quad (3.51)$$

Então, calculando as expressões acima para as variáveis eq.(2.61) e eq.(2.62) e para a ação eq.(3.45), obtemos

$$\dot{\alpha} = \sqrt{2V_0} e^{-\frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi} \left[ \sqrt{1-z^2} \operatorname{sen} \left( 3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) - z \operatorname{cos} \left( 3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) \right], \quad (3.52)$$

e

$$\dot{\phi} = \sqrt{2V_0} e^{-\frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\phi} \left[ z \operatorname{sen} \left( 3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) + \sqrt{1-z^2} \operatorname{cos} \left( 3\phi + \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\alpha \right) \right]. \quad (3.53)$$

Podemos perceber, através de um cálculo direto, que as equações acima satisfazem as equações clássicas cosmológicas de Friedmann eq.(2.56), de conservação do campo (2.57) e do vínculo (2.53), o que mostra que as expressões (3.52) e (3.53) são as equações clássicas. Sendo assim, verificamos que o conjunto de trajetórias das figs.(2.5) e (2.6) no plano  $(\alpha, \phi)$ , para os casos em que  $z = 0$  e  $z = 1/2$ , representam as curvas integrais das mesmas equações clássicas mencionadas anteriormente.

### 3.3 Minisuperespaço da Grande Parada

Nesta seção, apresentaremos a quantização canônica do minisuperespaço da Grande Parada (Big Brake). Usaremos o procedimento de quantização de Dirac-Wheeler-DeWitt, onde os operadores associados aos vínculos clássicos aniquilam a função de  $\psi(\alpha, \phi)$ . A equação de Wheeler-DeWitt (3.24) com o potencial escrito sob a forma [48] (2.89) dá

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\kappa^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi(\alpha, \phi) \\ & + V_0 e^{6\alpha} \left( \sinh(\sqrt{3\kappa^2} |\phi|) - \frac{1}{\sinh(\sqrt{3\kappa^2} |\phi|)} \right) \psi(\alpha, \phi) = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como a equação acima é de difícil solução e queremos estudar o comportamento da singularidade na região próxima à Grande Parada (Big Brake), podemos fazer uma aproximação na parte do potencial da equação acima para valores em que  $\sqrt{3\kappa^2}|\phi| \ll 1$

$$\frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\kappa^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi(\alpha, \phi) + \frac{V_0 e^{6\alpha}}{\sqrt{3\kappa^2}|\phi|} \psi(\alpha, \phi) = 0, \quad (3.55)$$

A solução da equação acima pode ser obtida através da aproximação de Born-Oppenheimer [48, 56, 57]. Dessa forma, fazendo  $\psi(\alpha, \phi) = \sum_k C_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi)$ , onde  $\varphi_k(\alpha, \phi)$  é solução da equação

$$-\left( \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{V_0}{\sqrt{3\kappa^2}|\phi|} e^{6\alpha} \right) \varphi_k(\alpha, \phi) = E_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi), \quad (3.56)$$

e  $C_k(\alpha)$  é solução da equação

$$\ddot{C}_k(\alpha) - \frac{6V_\alpha^2}{\hbar^4 k^2 \kappa^2} C_k(\alpha) = 0 \quad (3.57)$$

pode-se encontrar soluções normalizáveis para  $\varphi_k(\alpha, \phi)$  dadas por

$$\varphi_k(x_k) = N_k x_k e^{-\frac{x_k}{2}} L_{k-1}^1(x_k), \quad (3.58)$$

onde,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k = 2\sqrt{-\frac{E_k(\alpha)}{\hbar^2}}|\phi|$ ,  $L_{k-1}^1(x_k)$  são os polinômios associados de Laguerre,  $N_k = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$  é o fator de normalização e  $E_k(\alpha) = -\frac{V_\alpha^2}{2\hbar^2 k^2}$  são os autovalores de energia com  $V_\alpha \equiv \tilde{V}_0 e^{6\alpha}$  e  $\tilde{V}_0 \equiv \frac{V_0}{\sqrt{3\kappa^2}}$ . A solução para a parte em  $C_k(\alpha)$  é dada por

$$C_k(\alpha) = cK_0 \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{V_\alpha}{\hbar^2 k \kappa} \right), \quad (3.59)$$

onde  $c$  é uma constante de integração e  $K_0$  representa a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem zero. Portanto, a solução aproximada completa pode ser dada por

$$\psi(\alpha, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} A(k) N_k K_0 \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{V_\alpha}{\hbar^2 k \kappa} \right) \times \left( 2 \frac{V_\alpha}{k} |\phi| \right) e^{-\frac{V_\alpha}{k|\phi|}} L_{k-1}^1 \left( 2 \frac{V_\alpha}{k} |\phi| \right). \quad (3.60)$$

### 3.3.1 A Solução Aproximada WKB Para a Grande Parada

Iremos proceder com o mecanismo para se chegar no comportamento das equações clássicas a partir de equações quânticas através da aproximação WKB. Sendo assim, fazendo a identificação  $\varphi_k(\alpha, \phi) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{k0}^\phi(\alpha, \phi)}$  na eq.(3.56) e  $C_k(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{k0}^\alpha(\alpha)}$  na eq.(3.57), encontramos a solução aproximada para mais baixa ordem em  $\hbar$  da equação de Hamilton-Jacobi para as partes de  $\phi$  e  $\alpha$  respectivamente. Encontre-se então a fase  $S_{k0}^\phi(\alpha, \phi)$  como

$$S_{k0}^\phi(\alpha, \phi) = \hbar k \left[ \arcsin \left( 1 - \frac{V_\alpha |\phi|}{\hbar^2 k^2} \right) - \frac{\pi}{2} \right] - \sqrt{2V_\alpha |\phi|} \sqrt{1 - \frac{V_\alpha |\phi|}{2\hbar^2 k^2}} - \frac{\pi}{4}, \quad (3.61)$$

e da eq.(3.57) não temos contribuição. Assim, a fase se constitui apenas com  $S_{k0}^\phi(\alpha, \phi)$  da eq.(3.61). De posse da fase, podemos fazer a identificação  $\pi_\alpha = \frac{\partial S_{k0}^\phi}{\partial \alpha}$  e  $\pi_\phi = \frac{\partial S_{k0}^\phi}{\partial \phi}$ . A partir das eq.(2.38) e eq.(2.40) chegamos a

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa^2}{6} e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S_{k0}^\phi}{\partial \alpha} \right), \quad (3.62)$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S_{k0}^\phi}{\partial \phi} \right). \quad (3.63)$$

Diferenciando a eq.(3.61) com respeito a  $\alpha$  e  $\phi$  e substituindo na equação acima, assumindo valores para  $V_\alpha \equiv V_0 e^{6\alpha} = e^{6\alpha}$ ,  $\hbar = 1$  e  $k = 1$ , obtemos

$$\dot{\alpha} = 6\sqrt{-e^{6\alpha}\phi^2 + 2|\phi|} \quad (3.64)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\sqrt{-e^{6\alpha}\phi^2 + 2|\phi|}}{\phi}. \quad (3.65)$$

Das equações acima verificamos que

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{1}{6\phi} \mapsto \phi(\alpha) = -\frac{\sqrt{\alpha_{1*} - \alpha}}{\sqrt{3}}, \quad (3.66)$$

onde  $\alpha_{1*}$  é uma constante de integração.

Podemos observar que a fig.(3.1) se assemelha com a fig.(2.11) no

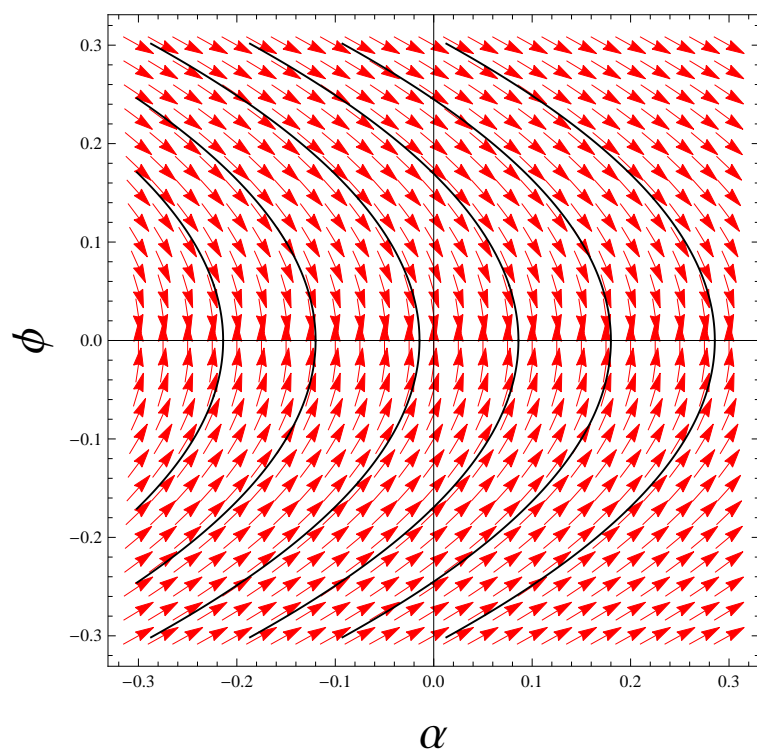


Figura 3.1: Evolução do campo escalar versus fator de escala no regime WKB.



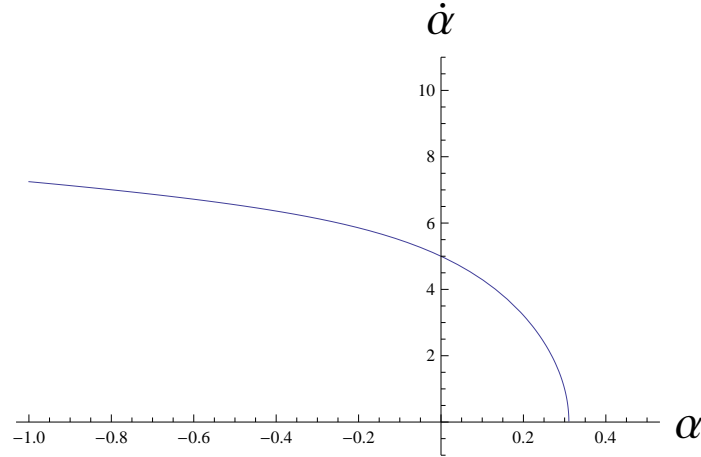


Figura 3.2: Evolução da velocidade versus fator de escala.

regime de pequenos valores de  $\phi$ . Utilizando o resultado de  $\phi(\alpha)$  obtido, verificamos que a eq.(3.64) nos dá o comportamento exato da velocidade clássica  $\dot{\alpha}$  via WKB

$$\dot{\alpha} = 6\sqrt{\frac{2\sqrt{\alpha_{1*} - \alpha}}{\sqrt{3}} - \frac{e^{6\alpha}}{3}(\alpha_{1*} - \alpha)}. \quad (3.67)$$

Dessa forma, podemos fazer o gráfico  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\alpha)$  que pode ser visto na fig.(3.2) e, além disso, integrando a equação acima chegamos ao resultado do comportamento do fator de escala com o tempo obtido no gráfico da fig.(3.4). Derivando com respeito ao tempo "t", a equação da velocidade do fator de escala acima e substituindo  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\alpha)$  pelo resultado encontrado, chegamos a  $\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(\alpha)$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{6}{\sqrt{\alpha_{1*} - \alpha}} \left\{ \sqrt{3} + e^{6\alpha} [-1 + 6(\alpha_{1*} - \alpha)] \sqrt{\alpha_{1*} - \alpha} \right\}. \quad (3.68)$$

Então, podemos encontrar o gráfico  $\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(\alpha)$  que pode ser visto na fig.(3.3). As fig.(3.2) e fig.(3.3) quando comparadas às fig.(2.8) e fig.(2.10) próximas à singularidade em que  $\phi$  é pequeno possuem o mesmo comportamento de condução do sistema à singularidade Grande Parada. Isso nos mostra que a aproximação WKB está reproduzindo o comportamento clássico no regime da aproximação.

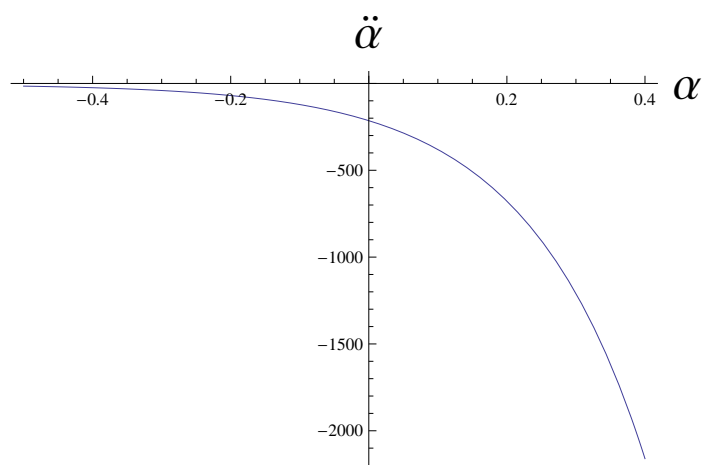


Figura 3.3: Evolução da aceleração versus fator de escala.

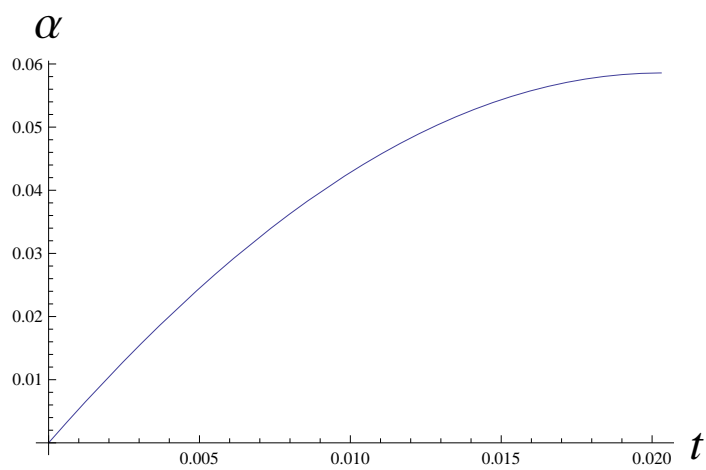


Figura 3.4: Evolução do fator de escala com o tempo no regime WKB.

### 3.4 Minisuperespaço do Grande Arranque

Nesta seção, iremos abordar os aspectos quânticos da singularidade Grande Arranque (Big Démarrage) [52], em que o campo escalar, que imita a matéria, é de natureza fantasma,  $l = -1$ , e as constantes assumem valores  $A > 0$ ,  $B < 0$  e  $\beta > 0$ . Queremos encontrar a solução da equação de Wheeler-DeWitt (3.24) para o potencial fantasma dado pela eq.(2.100)

$$V(\phi) = V_{-1} \left[ \frac{1}{\sin^{\frac{2\beta}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)} + \sin^{\frac{2}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right) \right], \quad (3.69)$$

onde  $V_{-1} = \frac{A^{\frac{1}{1+\beta}}}{2}$  e  $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| < \frac{\pi}{2}$ . Contudo, como o potencial se mostra bastante complicado e queremos estudar o que acontece nos arredores da singularidade, faremos uma aproximação do potencial para valores em que  $|\phi| \ll 1$ . Assim

$$V(\phi) \approx V_{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)^{\frac{-2\beta}{1+\beta}}. \quad (3.70)$$

A equação de Wheeler-DeWitt para o potencial acima será

$$\frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\kappa^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi(\alpha, \phi) + a_0^6 e^{\delta \alpha} V_{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)^{\frac{-2\beta}{1+\beta}} \psi(\alpha, \phi) = 0. \quad (3.71)$$

onde introduzimos uma nova variável  $\alpha = \ln \left( \frac{a}{a_0} \right)$ , e assumimos que  $a_0$  corresponde à localização da singularidade Grande Arranque (Big Démarrage). Daqui por diante, fica implícito que a coordenada  $a$  será  $\hat{a} := \frac{a}{a_0}$  tal que  $\hat{a}_0 = 1$ .

A solução da eq.(3.71) pode ser obtida através da aproximação Born-Oppenheimer [48, 56, 57], com

$$\psi(\alpha, \phi) = C_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi), \quad (3.72)$$

onde  $k$  não está restrito agora a valores reais. A equação que  $\varphi_k(\alpha, \phi)$  deve satisfazer é

$$\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \varphi_k(\alpha, \phi) + a_0^6 e^{\delta \alpha} V(\phi) \varphi_k(\alpha, \phi) = E_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi). \quad (3.73)$$

Introduzindo a notação

$$V_\alpha = a_0^6 e^{6\alpha} V_{-1} \left[ \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} |1 + \beta| \right]^{-\frac{2\beta}{1+\beta}}, \quad (3.74)$$

definindo  $k^2 := \frac{2E_k}{\hbar^2}$ ,  $\tilde{V}_\alpha := \frac{2V_\alpha}{\hbar^2}$  e com a ajuda da eq.(3.70), chegamos à eq.(3.73)

$$\varphi_k'' + \left[ -k^2 + \tilde{V}_\alpha |\phi|^{-\frac{2\beta}{1+\beta}} \right] \varphi_k = 0, \quad (3.75)$$

onde a  $(\cdot)$  significa uma derivação com respeito à  $\phi$ . Como esta equação é formalmente a mesma da parte radial,  $|\phi|$  faz o papel da coordenada radial de uma equação de Schrodinger estacionária para um potencial atrativo, em que potenciais do tipo  $V \propto r^{-\frac{2\beta}{1+\beta}}$  são chamados de singulares [58, 59, 52]; nós focaremos a nossa atenção para o caso em que  $|\beta| \gg 1$ , de tal maneira que  $|1 + \beta| |\phi|$  seja ainda pequeno. Sendo assim, o potencial corresponderá ao tipo de quadrado inverso, com

$$\tilde{V}_\alpha = \frac{2a_0^6 e^{6\alpha} V_{-1}}{\hbar^2} \left[ \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} |\beta| \right]^{-2}. \quad (3.76)$$

Teremos que resolver a seguinte equação

$$\varphi_k'' + \left[ -k^2 + \frac{\tilde{V}_\alpha}{|\phi|^2} \right] \varphi_k = 0, \quad (3.77)$$

que possui solução geral sob a forma [52]

$$\varphi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(ik|\phi|) + c_2 Y_\nu(ik|\phi|)], \quad (3.78)$$

onde  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração que terão uma função muito importante na hora de aplicarmos as condições de contorno. Além disso  $\nu$  é definido como

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha}. \quad (3.79)$$

A equação em que a parte gravitacional  $C_k(\alpha)$  deverá obedecer será construída inserindo a solução da parte de matéria  $\varphi_k(\alpha, \phi)$ ,

eq.(3.78), na equação de Wheeler-DeWitt eq.(3.71), com o qual chegaremos a

$$\frac{\kappa^2}{6} \left( 2\dot{C}_k \dot{\varphi}_k + C_k \ddot{\varphi}_k \right) + \left( \frac{\kappa^2}{6} \ddot{C}_k + k^2 C_k \right) \varphi_k = 0 \quad (3.80)$$

onde o ponto diz respeito a uma diferenciação com relação à  $\alpha$ . Se nós assumirmos que os termos  $\dot{C}_k \dot{\varphi}_k$  e  $C_k \ddot{\varphi}_k$  podem ser desprezados, ou seja, estamos assumindo que  $C_k$  varia muito mais rápido com  $\alpha$  do que com  $\varphi_k$ , e que estamos desprezando termos de contra reação da parte da matéria sobre a parte gravitacional. Em resumo, estamos assumindo que a parte de matéria não influencia na parte gravitacional, ou seja, a parte de matéria simplesmente contribui com as energias  $k^2$ . Dessa forma, chegamos à equação

$$\left( \frac{\kappa^2}{6} \ddot{C}_k + k^2 C_k \right) \varphi_k = 0, \quad (3.81)$$

que possui solução [52]

$$C_k(\alpha) = b_1 e^{i \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-i \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha}, \quad (3.82)$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são constantes de integração, que novamente terão uma função muito importante na hora de aplicarmos as condições de contorno. As equações (3.78) com (3.79) e (3.82) desempenharão um papel central no estudo de como as singularidades se comportam sob efeitos quânticos.

## 3.5 Minisuperespaço do Grande Congelamento

O minisuperespaço quantizado será construído nos mesmos moldes da seção anterior. Estamos buscando determinar o comportamento quântico da singularidade resolvendo a equação de Wheeler-DeWitt eq.(3.24). Nessa seção, daremos atenção para os casos em que os potenciais descrevam o Grande Congelamento(Big Freeze) com Matéria Ordinária e com Matéria Fantasma.

### 3.5.1 Minisuperespaço com Matéria Ordinária

Para esse caso, iremos abordar a singularidade Grande Congelamento(Big Freeze) [52] em que o potencial será escrito em termos

do campo escalar ordinário,  $l = 1$ , e onde as constantes assumem valores  $A < 0$ ,  $B > 0$  e  $1 + \beta < 0$ . Sendo assim, procuraremos a solução da equação de Wheeler-DeWitt eq.(3.24) para o potencial dado pela eq.(2.113)

$$V(\phi) = V_1 \left[ \sinh^{\frac{2}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right) - \frac{1}{\sinh^{\frac{2\beta}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)} \right], \quad (3.83)$$

onde  $V_1 \equiv \frac{|A|^{\frac{1}{1+\beta}}}{2}$ . Contudo, como mais uma vez o potencial se mostra bastante complicado e queremos estudar o comportamento da singularidade nos seus arredores, faremos uma aproximação do potencial para valores em que  $|\phi| \ll 1$ . Assim

$$V(\phi) \approx -V_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)^{-\frac{2\beta}{1+\beta}}. \quad (3.84)$$

A equação de Wheeler-DeWitt para o potencial acima será

$$\frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\kappa^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi(\alpha, \phi) - a_0^6 e^{6\alpha} V_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)^{-\frac{2\beta}{1+\beta}} \psi(\alpha, \phi) = 0. \quad (3.85)$$

onde  $\alpha = \ln \left( \frac{a}{a_0} \right)$ ,  $a_0$  corresponde ao ponto em que a singularidade Grande Congelamento (Big Freeze) fica evidenciada e, novamente  $a$  será  $\hat{a} := \frac{a}{a_0}$  tal que  $\hat{a}_0 = 1$ .

Dessa forma, escrevendo a solução da eq.(3.85) em termos da aproximação Born-Oppenheimer [48, 56, 57], com

$$\psi(\alpha, \phi) = C_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi), \quad (3.86)$$

lembrando que  $k$  não está restrito a valores reais, concluímos que  $\varphi_k(\alpha, \phi)$  deve satisfazer

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \varphi_k(\alpha, \phi) + a_0^6 e^{6\alpha} V(\phi) \varphi_k(\alpha, \phi) = E_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi). \quad (3.87)$$

Fazendo então

$$V_\alpha = -a_0^6 e^{6\alpha} V_1 \left[ \frac{\sqrt{3} \kappa}{2} |1 + \beta| \right]^{-\frac{2\beta}{1+\beta}}, \quad (3.88)$$

definindo  $k^2 := \frac{2E_k}{\hbar^2}$ ,  $\tilde{V}_\alpha := \frac{2V_\alpha}{\hbar^2}$  e com a ajuda da eq.(3.84), chegamos à eq.(3.87)

$$\varphi_k'' + \left[ k^2 + \tilde{V}_\alpha |\phi|^{-\frac{2\beta}{1+\beta}} \right] \varphi_k = 0, \quad (3.89)$$

onde a  $(\cdot)$  significa uma derivação com respeito à  $\phi$ . Com os mesmos argumentos da seção anterior, focaremos a nossa atenção para o caso em que  $|\beta| \gg 1$ , de tal maneira que  $|1 + \beta| |\phi|$  seja ainda pequeno. Sendo assim, o potencial corresponderá ao tipo de quadrado inverso, com

$$\tilde{V}_\alpha = -\frac{2a_0^6 e^{6\alpha} V_1}{\hbar^2} \left[ \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} |\beta| \right]^{-2}, \quad (3.90)$$

e teremos que resolver a seguinte equação

$$\varphi_k'' + \left[ k^2 + \frac{\tilde{V}_\alpha}{|\phi|^2} \right] \varphi_k = 0, \quad (3.91)$$

que possui solução geral sob a forma [52]

$$\varphi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(k|\phi|) + c_2 Y_\nu(k|\phi|)], \quad (3.92)$$

onde  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração que terão uma função muito importante na hora de aplicarmos as condições de contorno. Além disso  $\nu$  é definido como

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha}. \quad (3.93)$$

A parte gravitacional  $C_k(\alpha)$ , com o mesmo raciocínio, deverá obedecer à seguinte equação

$$\left( \frac{\kappa^2}{6} \ddot{C}_k + k^2 C_k \right) \varphi_k = 0, \quad (3.94)$$

que possui a mesma solução [52]

$$C_k(\alpha) = b_1 e^{i\frac{\sqrt{6}k}{\kappa}\alpha} + b_2 e^{-i\frac{\sqrt{6}k}{\kappa}\alpha}, \quad (3.95)$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são constantes de integração que novamente farão uma função muito importante na hora de aplicarmos as condições de contorno.

### 3.5.2 Minisuperespaço com Matéria Fantasma

Temos para esse tipo de singularidade um potencial escrito em termos do campo fantasma  $l = -1$ , e, dessa forma, os resultados obtidos na sec.(3.4) serão os mesmo para essa seção. A única diferença será nas constantes que assumem valores [52]  $A > 0$ ,  $B < 0$  e  $1 + \beta < 0$ . Então, a equação de Wheeler-DeWitt (3.24) para o potencial fantasma dado pela eq.(2.126)

$$V(\phi) = V_{-1} \left[ \frac{1}{\sin^{\frac{2\beta}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)} + \sin^{\frac{2}{1+\beta}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right) \right], \quad (3.96)$$

e onde  $V_{-1} = \frac{A^{\frac{1}{1+\beta}}}{2}$  e  $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| < \frac{\pi}{2}$ , é dado como

$$\frac{\hbar^2}{2} \left( \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi(\alpha, \phi) + a_0^6 e^{6\alpha} V_{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)^{-\frac{2\beta}{1+\beta}} \psi(\alpha, \phi) = 0. \quad (3.97)$$

sendo que foi feita a aproximação do potencial para valores em que  $|\phi| \ll 1$ ,

$$V(\phi) \approx V_{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa |1 + \beta| |\phi| \right)^{-\frac{2\beta}{1+\beta}}. \quad (3.98)$$

A solução da eq.(3.97) poderá ser obtida através da aproximação Born-Oppenheimer [48, 56, 57], em que a equação  $\varphi_k(\alpha, \phi)$  deve satisfazer

$$\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \varphi_k(\alpha, \phi) + a_0^6 e^{6\alpha} V(\phi) \varphi_k(\alpha, \phi) = E_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi). \quad (3.99)$$

Assim, introduzindo a notação

$$V_\alpha = a_0^6 e^{6\alpha} V_{-1} \left[ \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} |1 + \beta| \right]^{-\frac{2\beta}{1+\beta}}, \quad (3.100)$$

e definindo  $k^2 := \frac{2E_k}{\hbar^2}$ ,  $\tilde{V}_\alpha := \frac{2V_\alpha}{\hbar^2}$ , com a ajuda da eq.(3.98), nós chegamos à eq.(3.99)

$$\varphi_k'' + \left[ -k^2 + \frac{\tilde{V}_\alpha}{|\phi|^2} \right] \varphi_k = 0, \quad (3.101)$$



na qual foi feita uma aproximação do potencial (3.98) para o caso em que  $|\beta| \gg 1$ , de tal maneira que  $|1 + \beta| |\phi|$  seja ainda pequeno. O potencial corresponde a um tipo de quadrado inverso. A solução geral da eq.(3.101) será [52]

$$\varphi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(\imath k |\phi|) + c_2 Y_\nu(\imath k |\phi|)], \quad (3.102)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração e, desempenharão uma função muito importante na hora de aplicarmos as condições de contorno. Não devemos esquecer que  $\nu$  é definido como

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha}. \quad (3.103)$$

A equação para a parte gravitacional  $C_k(\alpha)$  será

$$\left( \frac{\kappa^2}{6} \ddot{C}_k + k^2 C_k \right) \varphi_k = 0, \quad (3.104)$$

que possui solução [52]

$$C_k(\alpha) = b_1 e^{\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha}, \quad (3.105)$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são constantes de integração.

## Capítulo 4

# Trajетórias Bohmianas e Singularidades

O surgimento de interpretações alternativas da mecânica quântica se deve ao fato de a construção conhecida como interpretação de Copenhague, provocar uma certa inquietude quanto aos seus pilares básicos. Uma das principais representações históricas que refletem este sentimento foi a célebre frase de Einstein “Deus não joga dados”, mostrando sua contrariedade quanto à perda do determinismo para o mundo quântico. É fato estabelecido que a descrição do muito pequeno é diferente das leis que descrevem o mundo clássico. Desta maneira, sem querer alongar os vários questionamentos que permeiam esta discussão, estaremos interessados neste capítulo na teoria causal da mecânica quântica e suas consequências, proposta por Louis de Broglie e por David Bohm [60, 61, 62]. Posteriormente, iremos aplicar tal interpretação à cosmologia quântica obtendo as trajetórias bohmianas para as singularidades.

### 4.1 Mecânica quântica de Bohm-de Broglie

A interpretação de Bohm-de Broglie<sup>1</sup> é conhecida como uma teoria quântica do movimento de ondas e partículas que coexistem, cuja interpretação é *ontológica*, ou seja, os processos físicos ocorrem independentemente de qualquer observador ou processo externo ao sistema em estudo. Podemos resumir a natureza desta interpretação

---

<sup>1</sup>Para uma abordagem mais completa com várias aplicações, o leitor é convidado a ler o livro do Peter R. Holland [63]

para um sistema simples nos seguintes postulados básicos:

(1) O sistema físico é composto por uma função de onda  $\psi(\vec{x}, t)$  e por uma partícula, que segue uma trajetória contínua, bem definida  $\vec{x}(t)$  e guiada pela função de onda.

(2) A dinâmica da função de onda é dada pela equação de Schroedinger.

Através do postulado (1), percebemos que a função de onda existe como uma entidade constituinte da realidade, assim como a partícula que segue uma trajetória bem definida. O postulado (2) mostra que a dinâmica para a onda ainda se dá através da equação quântica de Schrödinger.

Para começar a construir esta interpretação, iremos escrever a equação de Schroedinger sob a forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \nabla^2 + V \right) \psi, \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{M}$  é a massa inercial e  $V$  a energia potencial clássica. Escreveremos a função de onda sob a forma polar

$$\psi = R e^{i\frac{S}{\hbar}}, \quad (4.2)$$

com  $R$  e  $S$  funções de valores reais do espaço e do tempo. Inserindo na eq.(4.1) e separando a parte real da parte imaginária obtem-se as seguintes equações para  $R$  e  $S$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}} - \frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \frac{(\nabla R)^2}{R} + V = 0, \quad (4.3)$$

que é a equação para a parte real e

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{R^2 \nabla S}{\mathcal{M}} \right) = 0, \quad (4.4)$$

para a parte imaginária, a qual pode ser pensada como uma equação de continuidade.

Podemos identificar a densidade de probabilidade e o fluxo de probabilidade respectivamente por

$$\rho(\vec{x}, t) = R^2(\vec{x}, t), \quad (4.5)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\mathcal{M}} \nabla S, \quad (4.6)$$

já que  $\vec{V} = \frac{\vec{\nabla} S}{\mathcal{M}}$ . Assim, iremos reescrever a eq.(4.4) de uma maneira mais usual como uma equação de conservação

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.7)$$

A equação (4.3) pode ser vista como uma equação clássica de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}} + Q + V = 0, \quad (4.8)$$

onde  $Q$  age como um potencial quântico, dado sob a forma

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (4.9)$$

Com isto, uma importante característica desta interpretação é ganha quando assumimos o limite clássico da aproximação WKB e o comprimento de onda do pacote fica muito maior do que o comprimento de onda individual e portanto o termo  $-\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}} \frac{(\nabla R)^2}{R}$  muito menor do que  $\frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}}$ . Assim, negligenciando-se estes termos pequenos, a eq.(4.3) torna-se a equação clássica de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2\mathcal{M}} + V = 0. \quad (4.10)$$

O ganho é entender então que ao anular o potencial quântico  $Q$  conseguiríamos um limite clássico claro e único na interpretação de Bohm-de Broglie. Uma outra importante característica é que sendo o potencial clássico  $V$  nulo ( $Q$  não nulo) o sistema não poderia ser considerado livre pois forças no sentido Newtoniano dadas por  $-\nabla Q$  ainda agiriam no sistema. Tendo identificado a eq.(4.8) como a de Hamilton-Jacobi, vemos porque escrevem-se a velocidade e o momento da partícula em termos da fase  $S$  como

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \nabla S(\vec{x}, t), \quad (4.11)$$

e

$$\vec{p}(\vec{x}, t) = \nabla S(\vec{x}, t). \quad (4.12)$$

Podemos notar que esta última equação define rigorosamente o momento  $\vec{p}(\vec{x}, t)$ , do qual temos assim uma trajetória bem definida e denominada como trajetória bohmiana. É instrutivo estabelecer um algoritmo facilitando a aplicação da interpretação nos moldes dados abaixo:

1. Resolver a equação de Schroedinger, obtendo-se a função de onda  $\psi(\vec{x}, t)$ .
2. Escrever a função de onda em termos das funções reais  $R(\vec{x}, t)$  e  $S(\vec{x}, t)$  como  $\psi(\vec{x}, t) = R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}$ .
3. Calcular as trajetórias a partir de  $\vec{x} = \frac{1}{M} \nabla S(\vec{x}, t)$ . Podemos observar que uma vez que se conhece  $\psi(\vec{x}, t)$ , as trajetória são univocamente determinadas pelas condições iniciais, através de uma equação diferencial de primeira ordem.
4. Calcular  $R^2$  e se necessário o potencial quântico  $Q$ , que pode ser útil na interpretação dos resultados e na obtenção do limite clássico.

Nesta teoria, o princípio da incerteza de Heisenberg não possui o caracter fundamental que lhe é atribuído na interpretação usual. O princípio apenas se refere à maneira como medimos os observáveis, ou seja, ao que podemos medir, não ao que existe. Para finalizar esta seção, a interpretação de Bohm-de Broglie tem sido chamada de causal pois uma vez definidas as condições iniciais, está determinada a trajetória da partícula e, neste sentido, a interpretação causal é uma versão realista da mecânica quântica.

## 4.2 Interpretação de Bohm-de Broglie da Cosmologia Quântica

A interpretação de Copenhagem da mecânica quântica pressupõe necessariamente um mundo clássico que dê suporte às medições dos observáveis do mundo quântico [64] e pressupõe ainda o chamado colapso da função de onda, onde o fato de medir interfere completamente na história do sistema analisado. Desta maneira, se qui-

sermos estudar aspectos quânticos do universo como um todo, não seria possível aplicar a interpretação padrão, uma vez dados os argumentos acima.

Sendo assim, queremos utilizar a interpretação de Bohm-de Broglie na cosmologia quântica [65, 66, 67, 68, 69], por não possuir problemas de aplicação da teoria para o universo, já que não é necessário a divisão do que é observado e do que é medido.

Iremos aplicar a interpretação de Bohm-de Broglie via substituição do funcional de onda por  $\psi(h_{ij}, \phi) = Re^{iS/\hbar}$  na eq.(3.15) separando a parte real da imaginária,

$$-2h_{ki}D_j \frac{\delta R(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{kj}} + \frac{\delta R(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (4.13)$$

$$-2h_{ki}D_j \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{kj}} + \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (4.14)$$

de onde podemos perceber que as funções  $R$  e  $S$  são invariantes sob transformações de coordenadas espaciais. Substituindo também na equação de Wheeler-DeWitt eq.(3.17) e fazendo uma escolha conveniente do fator de ordenamento, obtemos novamente para as partes real e imaginária

$$k^2 G_{ijkl} \left( \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right) \left( \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) + \frac{l}{2\sqrt{\hbar}} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + \sqrt{\hbar} \left( -\frac{{}^3R}{k^2} + l \frac{h^{ij}}{2} \partial_i \phi \partial_j \phi + V(\phi) \right) + Q = 0, \quad (4.15)$$

e

$$k^2 G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left( R^2 \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) + \frac{l}{2\sqrt{\hbar}} \frac{\delta}{\delta \phi} \left( R^2 \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) = 0, \quad (4.16)$$

onde  $Q$  é o potencial quântico, que para este caso é dado sob a forma

$$Q = -\frac{\hbar^2}{R} \left( k^2 G_{ijkl} \frac{\delta^2 R}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + \frac{l}{2\sqrt{\hbar}} \frac{\delta^2 R}{\delta \phi^2} \right), \quad (4.17)$$

onde  $l = \pm 1$  dependendo se o campo escalar for de natureza padrão ou se for de natureza fantasma.

A primeira eq.(4.15) é a equação de Hamilton-Jacobi para a relatividade geral com a adição do potencial quântico. Contudo, a segunda

eq.(4.16) não pode ser relacionada com uma equação de conservação para a probabilidade, como fizemos na seção anterior. Isto é devido a natureza hiperbólica da métrica de DeWitt  $G_{ijkl}^2$ . Uma vez relacionado este sistema com a equação de Hamilton-Jacobi, esperando que a 3-métrica, o campo escalar e seus momenta canônicos sempre existam, somos novamente conduzidos a identificar as trajetórias através das relações de orientação

$$\pi^{ij} = \frac{\delta S(h_{kl}, \phi)}{\delta h_{ij}}, \quad (4.18)$$

$$\pi_\phi = \frac{\delta S(h_{kl}, \phi)}{\delta \phi}. \quad (4.19)$$

Assim, podemos relacionar a primeira equação com o momento (2.19) e a curvatura extrínseca (2.10) para encontrar a velocidade  $\dot{h}_{ij}$  como

$$\dot{h}_{ij} = 2Nk^2 G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + D_i N_j + D_j N_i, \quad (4.20)$$

e relacionar também o momento  $\pi_\phi$  dado acima com o momento (2.20) para encontrar a velocidade  $\dot{\phi}$  como

$$\dot{\phi} = N^i \partial_i \phi + \frac{lN}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta \phi}. \quad (4.21)$$

Com isto, as equações (4.20) e (4.21) formariam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que, garantindo a existência de solução, definiriam um conjunto de trajetórias no superespaço para este modelo. Para finalizar esta seção, queremos ressaltar mais uma vez a característica da interpretação quanto ao seu claro limite clássico quando o potencial quântico  $Q \rightarrow 0$  e o seu caráter causal que, uma vez que as relações de orientação sejam estabelecidas com as condições iniciais dadas, as trajetórias do sistema podem ser encontradas.

### 4.3 O Minisuperespaço BdB da Cosmologia Quântica e as soluções WKB

Já sabemos, das seções anteriores, que trabalhar no superespaço (3.2) é impossível na prática e, dessa maneira, trabalhar na cosmolo-

<sup>2</sup>Para uma abordagem mais completa da interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica no superespaço ver Pinto-Neto [69].

gia quântica via interpretação de BdB não é diferente. Sendo assim, iremos conduzir o nosso trabalho utilizando a interpretação na aproximação de minisuperespaços. Notemos que o problema da violação do princípio da incerteza na hora em que fazemos a aproximação de minisuperespaço e temos que tornar nulos ao mesmo tempo posição e momento conjugado não existe em BdB. Devemos lembrar que esse princípio não guarda uma posição relevante em BdB. Restringiremos a nossa discussão ao esquema de quantização [73] dos modelos de minisuperespaços homogêneos que têm um número finito de graus de liberdade. A equação de Wheeler-DeWitt para o modelo em questão assume a forma

$$H_0(\hat{p}^\mu, \hat{q}_\mu)\Psi(q) = 0 \quad . \quad (4.22)$$

As quantidades  $\hat{p}^\mu, \hat{q}_\mu$  são os operadores no espaço de fase relacionados aos graus de liberdade homogêneos do modelo. A eq.(4.22) pode ser escrita como

$$-\frac{1}{2}f_{\rho\sigma}(q_\mu)\frac{\partial\Psi(q)}{\partial q_\rho\partial q_\sigma} + U(q_\mu)\Psi(q) = 0 \quad , \quad (4.23)$$

onde  $f_{\rho\sigma}(q_\mu)$  é a métrica de DeWitt do modelo, sendo sua inversa dada por  $f^{\rho\sigma}(q_\mu)$ . Aplicando a interpretação de BdB através da expressão de  $\psi$  na sua forma polar,  $\Psi = R \exp(iS)$ , e substituindo na eq.(4.23), obtemos as seguintes equações

$$\frac{1}{2}f_{\rho\sigma}(q_\mu)\frac{\partial S}{\partial q_\rho}\frac{\partial S}{\partial q_\sigma} + U(q_\mu) + Q(q_\mu) = 0 \quad , \quad (4.24)$$

$$f_{\rho\sigma}(q_\mu)\frac{\partial}{\partial q_\rho}\left(R^2\frac{\partial S}{\partial q_\sigma}\right) = 0 \quad , \quad (4.25)$$

onde

$$Q(q_\mu) \equiv -\frac{1}{2R}f_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 R}{\partial q_\rho\partial q_\sigma}, \quad (4.26)$$

faz o papel aqui do potencial quântico. A teoria de Bohm-de Broglie aplicada à cosmologia quântica faz com que as trajetórias  $q_\mu(t)$  sejam reais, independente de qualquer observador. A eq.(4.24) representa a equação de Hamilton-Jacobi, que é a parte clássica adicionada do termo de potencial quântico (4.26), responsável pelos efeitos quânticos. Isso sugere definir



$$p^\rho = \frac{\partial S}{\partial q_\rho}, \quad (4.27)$$

onde os momenta estão relacionados com as velocidades por

$$p^\rho = f^{\rho\sigma} \frac{1}{N} \frac{\partial q_\sigma}{\partial t}. \quad (4.28)$$

Para obter as trajetórias bohmianas nós teremos de resolver o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem, chamadas de equações guias:

$$\frac{\partial S(q_\mu)}{\partial q_\rho} = f^{\rho\sigma}(q_\mu) \frac{1}{N} \dot{q}_\sigma. \quad (4.29)$$

As eqs.(4.29) são invariantes sob reparametrizações no tempo. Portanto, em um nível quântico, diferentes escolhas de  $N(t)$  dão a mesma geometria espaço-temporal para uma dada solução não clássica  $q_\alpha(t)$ . Dessa maneira, verificamos que não existe o problema do tempo em BdB para os modelos de minisuperespaço da cosmologia quântica<sup>3</sup>.

Como a teoria usa uma abordagem de Hamilton-Jacobi, fica claro que a aproximação WKB sai naturalmente de BdB. O mundo quântico se conecta com o clássico quando o potencial quântico da eq.(4.26) tende ao zero.

Nas seções seguintes iremos abordar cada uma dessas singularidades sob a luz da interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica.

## 4.4 Trajetórias Bohmianas do Grande Rasgo

Estamos interessados em encontrar as trajetórias Bohmianas na região de ocorrência da singularidade Grande Rasgo(Big Rip). Para isso, iremos partir da função de onda eq.(3.43)

$$\psi = C_1 \hbar^2 \sqrt{\frac{1}{1 - i\sigma^2 \hbar S_0''}} \exp \left[ \frac{iS_0}{\hbar} - \frac{S_0'^2}{2(\sigma^{-2} - i\hbar S_0'')} \right]. \quad (4.30)$$

Com uma expressão analítica para a função de onda em mãos, podemos agora indentificá-la com a transformação  $\psi(u, v) = R(u, v) e^{i\frac{S(u, v)}{\hbar}}$ .

<sup>3</sup>Para um estudo acerca desses detalhes ver ref. [73].

Para isto, colocaremos a função eq.(4.30) em uma forma polar. Desta maneira, eliminando-se os números complexos nos denominadores em  $\psi(u, v)$  dado acima, obtemos

$$\psi = \tilde{C}_1 \exp \left[ i \frac{S_0}{\hbar} - \frac{S_0'^2 \sigma^{-2}}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} - \frac{i \hbar S_0'^2 S_0''}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} \right], \quad (4.31)$$

onde

$$\tilde{C}_1 = C_1 \hbar^2 \sqrt{\frac{1}{1 + \sigma^4 \hbar^2 S_0''^2}} \sqrt{1 + i \sigma^2 \hbar S_0''}. \quad (4.32)$$

Notando que

$$\sqrt{1 + i \sigma^2 \hbar S_0''} = \left(1 + \sigma^4 \hbar^2 S_0''^2\right)^{1/4} \exp \left[ \frac{i}{2} \arctan \left( \sigma^2 \hbar S_0'' \right) \right], \quad (4.33)$$

encontramos que a função de onda já pode ser escrito em sua forma polar  $\psi = R e^{i \frac{S}{\hbar}}$  com

$$R = \frac{C_1 \hbar^2}{(1 + \sigma^4 \hbar^2 S_0''^2)^{1/4}} \exp \left[ - \frac{S_0'^2 \sigma^{-2}}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} \right] \quad (4.34)$$

e

$$S = S_0 - \frac{\hbar^2 S_0'^2 S_0''}{2(\sigma^{-4} + \hbar^2 S_0''^2)} + \frac{\hbar}{2} \arctan \left( \sigma^2 \hbar S_0'' \right). \quad (4.35)$$

Usando a equação (3.37)

$$S_0 = zu - \sqrt{1 - z^2} v, \quad (4.36)$$

em que  $\bar{z} \rightarrow z$ , podemos calcular  $S_0'$  e  $S_0''$  como

$$S_0' = u + \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} v, \quad (4.37)$$

$$S_0'' = \frac{v}{(1 - z^2)^{3/2}}. \quad (4.38)$$

De posse das expressões acima, podemos substituí-las na fase (4.35) e escrevê-la em termos dos parâmetros  $u$  e  $v$  como

$$S(u, v) = ku - \sqrt{(1 - k^2)} v - \frac{(1 - k^2)^{3/2} v \sigma^4 \left( u + \frac{kv}{\sqrt{(1 - k^2)}} \right)^2}{2[(1 - k^2)^3 + \sigma^4 v^2]} + \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\sigma^2 v}{(1 - k^2)^{3/2}} \right], \quad (4.39)$$

onde foi feito  $\hbar = 1$  e  $z \equiv k$ . Retringiremos a nossa atenção para o caso em que  $|k| < 1$  de tal maneira a evitar divergências na função de onda.

Assumindo a interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica [70], usaremos a eq.(4.28) para obter as velocidades

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -N \exp(3\alpha - 2\phi)\pi_u = -N \exp(3\alpha - 2\phi)\frac{\partial S}{\partial u}, \\ \dot{v} &= -N \exp(3\alpha - 2\phi)\pi_v = -N \exp(3\alpha - 2\phi)\frac{\partial S}{\partial v},\end{aligned}\quad (4.40)$$

que têm a mesma forma de sua contrapartida clássica eq.(2.66), exceto pelo fato de que a fase  $S$  (função de Hamilton-Jacobi) dada em (4.39), que aparece em (4.40), ser de natureza quântica. Notemos que  $S$  escrito na eq. (4.39) se reduz à  $S_{0k}$  dada na eq. (2.65) quando  $\sigma \rightarrow 0$ , dando assim, um limite clássico direto e imediato.

Retornando às variáveis originais  $\alpha, \phi$  através das eqs. (2.61), (2.62) e (4.40), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -e^{-\phi} \left[ \frac{\partial S}{\partial v} \sin(3\phi + \alpha) + \frac{\partial S}{\partial u} \cos(3\phi + \alpha) \right], \\ \dot{\phi} &= e^{-\phi} \left[ \frac{\partial S}{\partial u} \sin(3\phi + \alpha) - \frac{\partial S}{\partial v} \cos(3\phi + \alpha) \right],\end{aligned}\quad (4.41)$$

lembrando que as eqs. (2.61)e (2.62) devem ser usadas nas derivadas parciais de  $S$ . Vamos focar o nosso interesse na região mais relevante, ou seja, aquela em que  $\phi \rightarrow -\infty$  e  $\alpha \rightarrow \infty$ , correspondendo à  $u \rightarrow \infty$  e  $v \rightarrow \infty$ . Dessa forma, fazendo essa aproximação, a eq. (4.39) se reduz então a

$$S(u, v) = ku - \sqrt{(1 - k^2)}v - \frac{(1 - k^2)^{3/2} \left( u + \frac{kv}{\sqrt{(1 - k^2)}} \right)^2}{2v} + \frac{\pi}{4}.\quad (4.42)$$

Notemos que ela é independente de  $\sigma$  e representa uma região que está sob efeitos quânticos. Sendo assim, obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial u} &= -\frac{\tan(\alpha + 3\phi) + 3}{3 \tan(\alpha + 3\phi) - 1} (1 - k^2)^{3/2} + k^3, \\ \frac{\partial S}{\partial v} &= -\frac{\sqrt{1 - k^2}}{2} \left[ 2 + k^2 - \left( \frac{\tan(\alpha + 3\phi) + 3}{3 \tan(\alpha + 3\phi) - 1} \right)^2 (1 - k^2) \right]\end{aligned}\quad (4.43)$$

Esses termos agora podem ser substituídos nas eqs. (4.41) de tal maneira a obter as trajetórias bohmianas para o Grande Rasgo(Big Rip). Portanto, o comportamento das mesmas ao redor das soluções de Grande Rasgo(Big Rip)  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$  podem ser entendidas quando relacionamos as eqs. (4.41) e (4.43) para obter o nosso resultado [71]

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -\frac{\chi}{\xi} \quad (4.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \chi &= -(17 + 10k^2)\sqrt{1 - k^2}x^3 + 6[3k^3 + (k^2 + 2)\sqrt{1 - k^2}]x^2 \\ &\quad + 3[-4k^3 + (2k^2 - 3)\sqrt{1 - k^2}]x + 2k^3 - 6(k^2 + 1)\sqrt{1 - k^2}, \\ \xi &= 6[-(1 - k^2)^{3/2} + 3k^3]x^3 + [-12k^3 + (26k^2 + 1)\sqrt{1 - k^2}]x^2 \\ &\quad + 2[k^3 - 3(k^2 + 2)\sqrt{1 - k^2}]x - (7 - 10k^2)\sqrt{1 - k^2}, \end{aligned}$$

e  $x = \tan(\alpha + 3\phi)$ . A solução  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$  pôde ser obtida da equação  $d\alpha/d\phi = -3$  da eq. (2.71) para o caso clássico. A diferença no caso quântico é que agora nós temos duas raízes dadas por

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_{01}) &= \frac{(36k^2 + 3)\sqrt{1 - k^2} + 2k(10 - k^2)}{(28k^2 - 1)\sqrt{1 - k^2} + 54k^3}, \\ \tan(\alpha_{02}) &= -\frac{(54k^2 - 3)\sqrt{1 - k^2} + 2k(5 - 14k^2)}{(28k^2 - 1)\sqrt{1 - k^2} + 54k^3}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

com adições de  $n\pi$ . Então, fazendo a substituição  $3\phi + \alpha \rightarrow \alpha_{0i} + \epsilon$  na eq. (4.44), com  $\alpha_{0i}$  dada pela eq. (4.45), obteremos até ordens de  $\epsilon$ ,

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -3 + f(k)\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (4.46)$$

para  $\alpha_{01}$ , e

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -3 + g(k)\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad (4.47)$$

para  $\alpha_{02}$ , onde

$$f(k) = \frac{90k^2}{3k^2 - 2}, \quad (4.48)$$

e

$$g(k) = -\frac{15k}{\sqrt{1 - k^2}}. \quad (4.49)$$

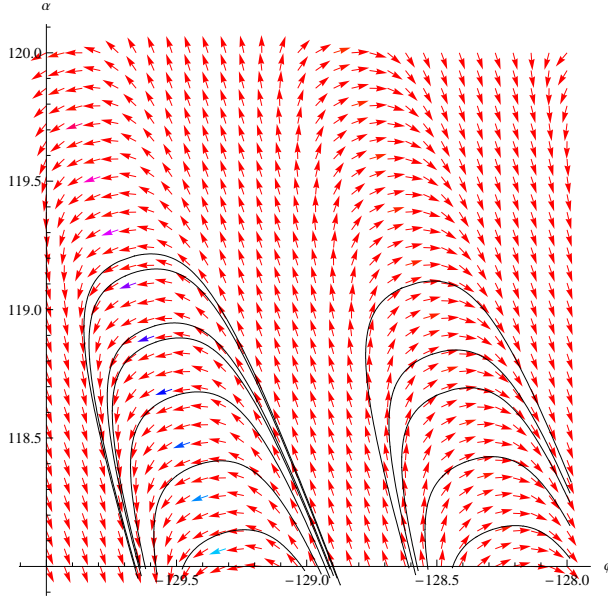


Figura 4.1: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento de  $\alpha$  versus  $\phi$  para o caso quântico de  $k = 0$ . Notemos o comportamento das orientações apontando na direção de afastamento da solução  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$ .

Quando  $k = 0$ , as raízes coincidem e dão  $\tan(\alpha_0) = -3$ . Como para esse caso  $f(k)$  e  $g(k)$  são nulos, nós temos de ir até a terceira ordem em  $\epsilon$  para ver que

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -3 - 5\epsilon^3 + O(\epsilon^4). \quad (4.50)$$

Portanto, as curvas na vizinhança por cima e por baixo de  $\alpha + 3\phi = \alpha_0$ , têm inclinações contrárias às direções de Grande Rasgo (Big Rip), mostrando que, o sistema quântico está funcionando de forma a afastar qualquer curva que vá em direção à singularidade. Podemos observar esse comportamento na fig.(4.1).

Para outros valores de  $k$ , a situação é um pouco diferente. Podemos observar das curvas correspondentes à primeira raiz  $\alpha_{01}$ , da eq. (4.46), que as linhas  $\alpha + 3\phi = \alpha_{01} + n\pi$  se atraem ou se repelem dependendo do sinal de  $f(k)$ . Para  $|k| < (2/3)^{1/2}$ ,  $f(k) < 0$  significa que as curvas se repelem, enquanto que  $(2/3)^{1/2} < |k| < 1$ ,  $f(k) > 0$  se atraem e, isso vale independentemente se os incrementos são  $+\epsilon$  (por cima ou à direita da curva) ou se  $-\epsilon$  (por baixo ou à esquerda da curva) na eq.(4.46).

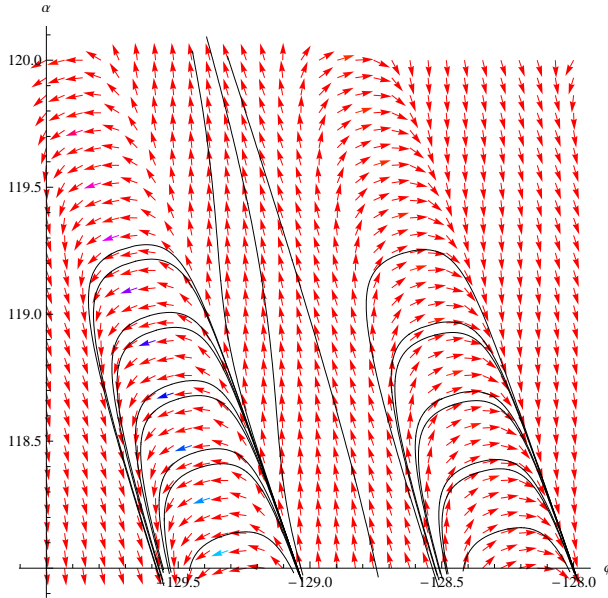


Figura 4.2: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento de  $\alpha$  versus  $\phi$  para o caso quântico de  $k = 0.5$ . Notemos o comportamento das orientações que por cima se aproximam e por baixo se repelem.

Para a segunda raiz  $\alpha_{02}$ , a eq. (4.47) indica que as curvas  $\alpha + 3\phi = \alpha_{02} + n\pi$  são linhas do tipo sela, em que de um lado as linhas se atraem e de outro as linhas se repelem. Para  $0 < k < 1$ ,  $g(k) < 0$  significa que as linhas se repelem por cima e se atraem por baixo, enquanto para  $-1 < k < 0$ ,  $g(k) > 0$  as curvas se atraem por cima e se afastam por baixo.

Todas essas configurações podem ser vistas nas figs.(4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) para os casos  $k = 0$ ,  $k = 1/2$ ,  $k = -1/2$  e  $k = 9/10$  respectivamente. Dessa forma, podemos observar que efeitos quânticos, dentro da abordagem apresentada, podem evitar ou não a singularidade Grando Rasgo.

## 4.5 Trajetórias Bohmianas da Grande Parada

Nesta seção, iremos estudar os aspectos quânticos da singularidade Grande Parada(Big Brake) via interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica. Para isso, iremos construir um pacote de ondas

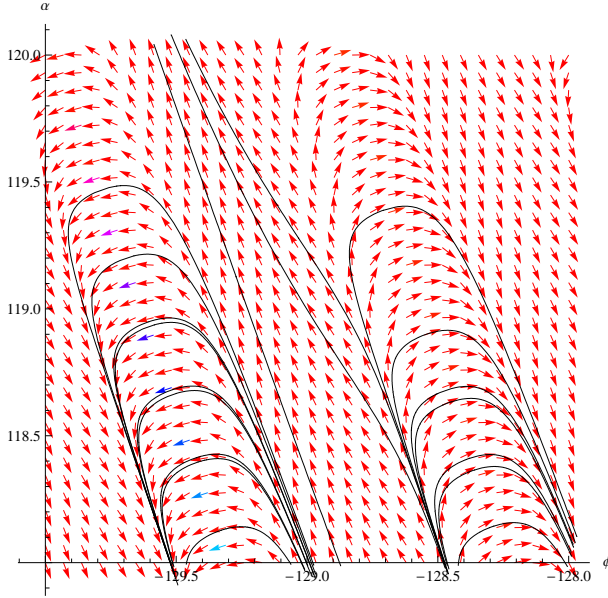


Figura 4.3: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento de  $\alpha$  versus  $\phi$  para o caso quântico de  $k = -0.5$ . Notemos o comportamento das orientações que por cima se repelem e por baixo se aproximam.

da solução (3.60) sob a forma

$$\psi(\alpha, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi). \quad (4.51)$$

Vamos escolher  $\psi(\alpha_0, \phi)$  uma gaussiana centrada em  $\phi_0$  com largura  $\sqrt{\frac{Z_0}{2}}$ , onde  $Z_0 \equiv Z(\alpha_0)$  e,  $\phi_0$  sendo o valor da trajetória clássica em  $\alpha_0$ . Devido à eq.(2.88) precisamos construir duas gaussianas, uma centrada em  $\phi_0$  e, outra centrada em  $-\phi_0$ , para depois superpô-las. Assim

$$\psi(\alpha_0, \phi) = \psi_-(\alpha_0, \phi) + c_1 \psi_+(\alpha_0, \psi), \quad (4.52)$$

onde  $\psi_+$  significa a parte do pacote de onda centrada em  $\phi_0$  e  $\psi_-$  em  $-\phi_0$  no ‘tempo’ inicial  $\alpha_0$ . O pacote será construído a partir da solução WKB eq.(3.57), de tal forma que, com apropriadas condições iniciais, temos

$$C_k(\tau) = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{6} \frac{\tilde{V}_0}{\sqrt{2\hbar^2 k^2}} \sqrt{\frac{6}{\kappa^2}} (\tau - \tau_0) \right], \quad (4.53)$$

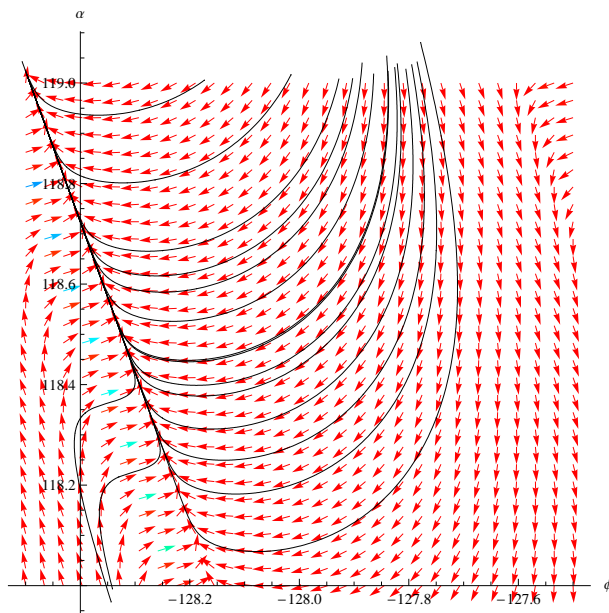


Figura 4.4: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento de  $\alpha$  versus  $\phi$  para o caso quântico de  $k = 0.9$ . Para esse caso observamos que o Grande Rasgo (Big Rip) atrai toda a orientação.



onde  $\tilde{V}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3\kappa^2}}$  e  $\tau \equiv e^{6\alpha}$ . Pode-se encontrar [44] uma expressão para o pacote como

$$\psi(\alpha, \phi) = \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^+ + c_1 A_k^-] C_k(\alpha) \varphi_k(\alpha, \phi), \quad (4.54)$$

onde  $C \equiv \sqrt{\frac{\hbar^2}{\tilde{V}_0 \tau_0} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^+ + c_1 A_k^-]^2}$  é o fator de normalização e os

$$\begin{aligned} A_k^+ &= \frac{N_k}{k} \exp \left[ -\frac{\phi_0^2}{Z_0} + \frac{1}{2Z_0} \left( \frac{1}{2k} - \phi_0 \right)^2 \right] \times \\ &\quad \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m (m+1) \frac{(k!)^2}{(k-m-1)!(m+1)!} \\ &\quad \left( \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{Z_0}} \right)^m D_{-(m+2)} \left[ \sqrt{\frac{2}{Z_0}} \left( \frac{1}{2k} - \phi_0 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

são os coeficientes do pacote com  $D_m$  denotando as funções parabólicas cilíndricas. Os coeficientes  $A_k^-$  dão

$$\begin{aligned} A_k^- &= \frac{N_k}{k} \exp \left[ -\frac{\phi_0^2}{Z_0} + \frac{1}{2Z_0} \left( \frac{1}{2k} + \phi_0 \right)^2 \right] \times \\ &\quad \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m (m+1) \frac{(k!)^2}{(k-m-1)!(m+1)!} \\ &\quad \left( \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{Z_0}} \right)^m D_{-(m+2)} \left[ \sqrt{\frac{2}{Z_0}} \left( \frac{1}{2k} + \phi_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Sendo assim, para  $C_1 = i$  e para o caso em que temos apenas  $k = 2$  termos do pacote, a função de onda apresenta a forma

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \phi) &= \frac{1}{C} \left\{ \frac{1}{4\hbar^4} e^{6\alpha - \frac{e^{6\alpha} |\phi| \tilde{V}_0}{\hbar^2} - \frac{(e^{6\alpha} - e^{6\alpha_0}) \tilde{V}_0}{2\sqrt{3}\kappa\hbar}} \sqrt{e^{-6\alpha + 6\alpha_0} \tilde{V}_0} \right. \\ &\quad \left[ 8|\phi| \hbar^2 A_1^+ + \sqrt{2} \left( 2|\phi| \hbar^2 - e^{6\alpha} \phi^2 \tilde{V}_0 \right) A_2^+ \times \right. \\ &\quad \left. \left. e^{\frac{-\sqrt{3}e^{6\alpha_0} \hbar^2 + e^{6\alpha} (\sqrt{3}\hbar^2 + 6\kappa|\phi|\hbar)}{12\kappa\hbar^3} \tilde{V}_0} \right] + \right. \\ &\quad \left. i \frac{1}{4\hbar^4} e^{6\alpha - \frac{e^{6\alpha} |\phi| \tilde{V}_0}{\hbar^2} - \frac{(e^{6\alpha} - 6\alpha_0) \tilde{V}_0}{2\sqrt{3}\kappa\hbar}} \sqrt{e^{-6\alpha} + e^{6\alpha_0} \tilde{V}_0} \right. \end{aligned}$$

$$\left[ 8|\phi| \hbar^2 A_1^- + \sqrt{2} \left( 2|\phi| \hbar^2 - e^{6\alpha} \phi^2 \tilde{V}_0 \right) A_2^- \times \right. \\ \left. e^{\frac{-\sqrt{3}e^{6\alpha_0} \hbar^2 + e^{6\alpha} (\sqrt{3}\hbar^2 + 6\kappa|\phi|\hbar)}{12\kappa\hbar^3}} \tilde{V}_0 \right], \quad (4.57)$$

De posse da expressão da função de onda acima, podemos aplicar a interpretação de Bohm-de Broglie utilizando a identificação  $\psi(\alpha, \phi) \equiv R(\alpha, \phi) e^{\frac{i}{\hbar} S(\alpha, \phi)}$ . Usando as identidades

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \alpha}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \phi} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \phi}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.59)$$

onde  $\psi^*(\alpha, \phi)$  significa o complexo conjugado de  $\psi(\alpha, \phi)$ , podemos encontrar  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\phi}$  através das equações guias

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa^2}{6} e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} \right), \quad (4.60)$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} \right), \quad (4.61)$$

e que para a função de onda eq.(4.57) apresentamos o nosso resultado [72]

$$\dot{\alpha} = \frac{\kappa}{12\sqrt{2}\hbar^8} \exp\left[9\alpha - \frac{3e^{6\alpha|\phi|\tilde{V}_0}}{2\hbar^2} - \frac{\sqrt{3}(e^{6\alpha} - e^{6\alpha_0})\tilde{V}_0}{4\kappa\hbar} + 6\alpha_0\right] \phi^2 \tilde{V}_0^3 \times \\ \left[ -2\sqrt{3}\hbar^3 + e^{6\alpha} (6\phi^2\kappa + \sqrt{3}|\phi|\hbar) \tilde{V}_0 \right] \times \\ \frac{(A_2^- A_1^+ - A_1^- A_2^+)}{|\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.62)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\hbar^8} \exp\left[15\alpha - \frac{3e^{6\alpha|\phi|\tilde{V}_0}}{2\hbar^2} - \frac{\sqrt{3}(e^{6\alpha} - e^{6\alpha_0})\tilde{V}_0}{4\kappa\hbar} + 6\alpha_0\right] \phi^3 \tilde{V}_0^4 \times \\ \frac{(A_2^- A_1^+ - A_1^- A_2^+)}{|\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.63)$$

Estando de posse das equações acima, podemos desenhar as trajetórias bohmianas na fig. (4.5), onde podemos ver que a singularidade Grande Parada(Big Brake) em  $|\phi| = 0$ , é evitada. O potencial

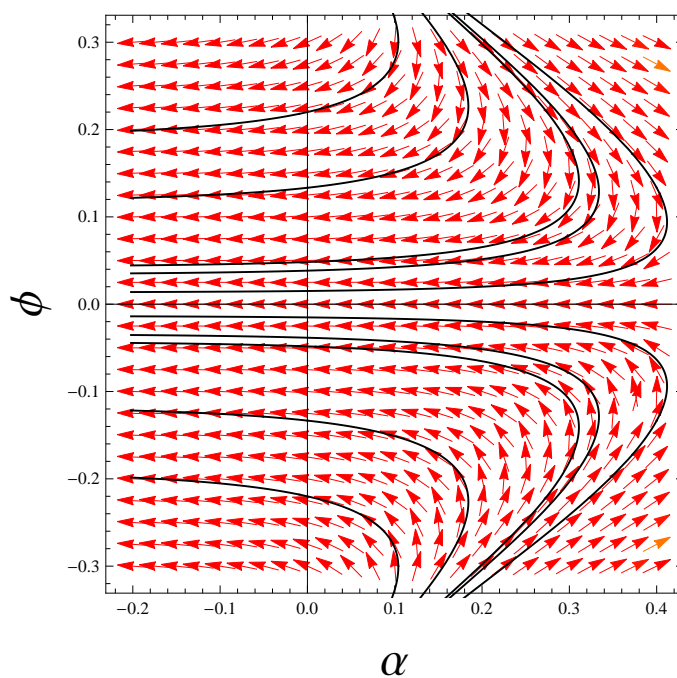


Figura 4.5: Trajetórias bohmianas para a Grande Parada(Big Brake) relacionando o campo escalar  $\phi$  com o fator de escala  $\alpha$ .

$V(\phi)$  do campo escalar não diverge pois  $\phi$  não vai zero. Das eqs.(4.62) e (4.63) podemos encontrar a expressão

$$\frac{d\alpha(\phi)}{d\phi} = -\kappa^2\phi - \frac{\kappa\hbar}{2\sqrt{3}} \frac{|\phi|}{\phi} + \frac{\kappa\hbar^3}{\sqrt{3}\tilde{V}_0} \frac{e^{-6\alpha}}{\phi}. \quad (4.64)$$

Sabendo que o universo pára de se expandir quando  $d\alpha(\phi)/d\phi = 0$ , para a equação acima isso implica [72]

$$e^{-6\alpha} = \frac{\sqrt{3}\tilde{V}_0}{\hbar^3} \left[ \kappa\phi^2 + \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} |\phi| \right]. \quad (4.65)$$

Esta equação é satisfeita para valores finitos de  $\alpha = \alpha_{\text{brake}}$  e  $\phi = \pm\phi_{\text{brake}}$ . Nesse momento, podemos calcular o parâmetro de desaceleração diferenciando a eq.(4.62) com relação ao tempo em  $t_{\text{brake}}$  e, com a ajuda da eq.(4.63), nós chegamos à

$$\ddot{\alpha}_{\text{brake}} = -\frac{F^2(\alpha, \phi)}{|\phi|} \left( 1 + \frac{6\sqrt{2}|\phi|}{6\sqrt{2}|\phi| + 1} \right) \Big|_{t_{\text{brake}}}, \quad (4.66)$$

onde, as quantidades foram tomadas  $\kappa = \sqrt{6}$  and  $\tilde{V}_0 = \hbar = 1$  e,  $F^2(\alpha, \phi)$  é uma função positiva finita em  $t_{\text{brake}}$  (um produto de constantes positivas com exponenciais). Notemos que  $\ddot{\alpha}$  continua negativo mas finito em  $t_{\text{brake}}$ .

Com tudo exposto da análise acima podemos verificar através da fig.(4.5) que, devido aos efeitos quânticos, o universo para de se expandir suavemente, com uma desaceleração finita e, começa a se contrair. Dessa forma, vamos estudar o que acontece com o sistema na região em que  $\alpha \rightarrow -\infty$  na eq.(4.64). Nesse limite, lembremos que foi assumido  $\kappa = \sqrt{6}$  and  $\tilde{V}_0 = \hbar = 1$ , a equação fica

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\phi}{\sqrt{2}e^{-6\alpha}} \Rightarrow \phi(\alpha) = \phi_0 \exp \frac{e^{6\alpha}}{6\sqrt{2}}, \quad (4.67)$$

onde  $\phi_0$  é o valor de  $\phi$  em  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Pegando a solução (4.67) e substituindo na eq. (4.62), podemos obter os parâmetros de desaceleração e de Hubble em termos de  $\alpha$  quando  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -C^2 e^{3\alpha}, \\ \ddot{\alpha} &= 3C^4 e^{3\alpha}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

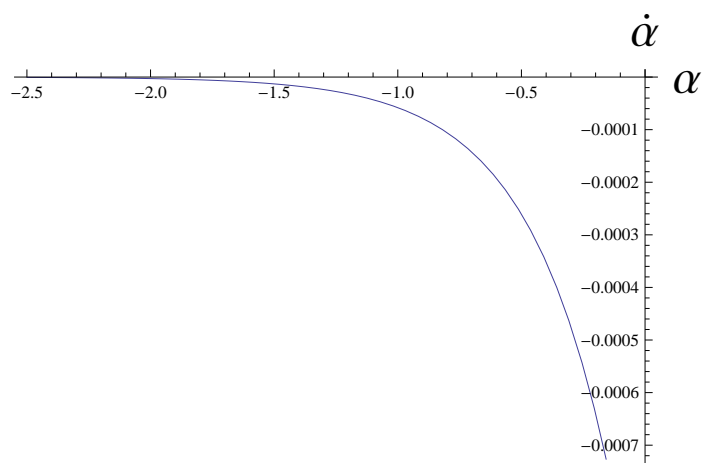


Figura 4.6: Gráfico do parâmetro de Hubble com relação à  $\alpha$  quando  $\alpha \rightarrow -\infty$ .

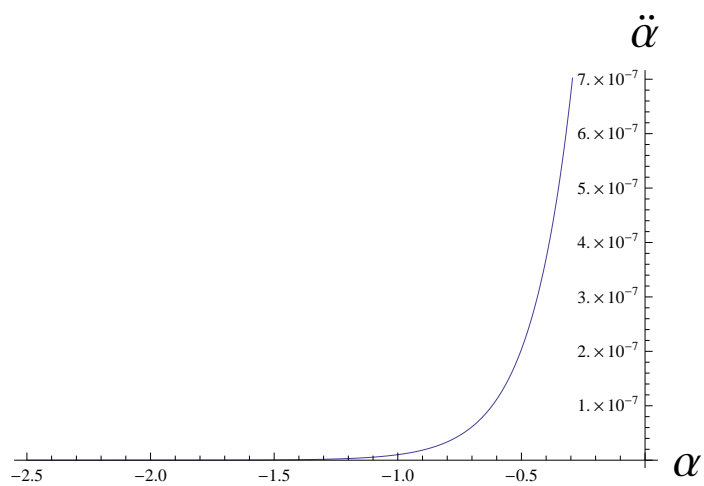
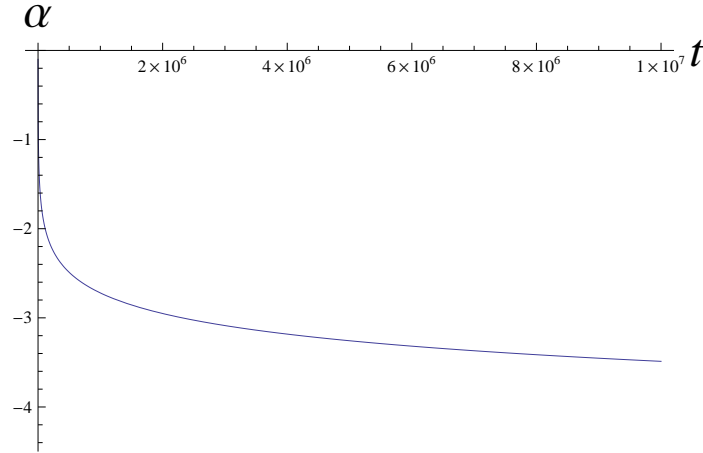


Figura 4.7: Gráfico do parâmetro de desaceleração quando  $\alpha \rightarrow -\infty$ .


 Figura 4.8: Evolução temporal do fator de escala para  $\alpha < -1$ .

onde  $C$  é uma constante, dando assintoticamente, em  $t \rightarrow \infty$ , que  $a \propto t^{-1/3}$ . Podemos observar que o universo se contrai para sempre, mas lentamente de tal maneira que a curvatura do espaço-tempo vai a zero ( $\dot{a}/a$  e  $\ddot{a}/a$  vão ambos a zero), e o universo se aproxima de um pequeno espaço-tempo de Minkowski. Esses comportamentos podem ser vistos nas figs. (4.6, 4.7, 4.8).

## 4.6 Trajetórias Bohmianas do Grande Arranque

Nessa seção, iremos fazer uso da interpretação de Bohm-de Broglie para encontrar as trajetórias bohmianas no modelo em que surge a singularidade Grande Arranque (Big Démarrage). Como existem duas possibilidades na solução, tais que as energias  $E_k = \frac{\hbar^2}{2} k^2$  podem ser positivas ou negativas, isso implica em que  $k^2 > 0$  ou  $k^2 < 0$ <sup>4</sup>. Iremos começar com o caso em que as energias são negativas,  $k^2 < 0$ , ou seja, consideraremos a solução geral

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(k|\phi|) + c_2 Y_\nu(k|\phi|)] \left( b_1 e^{\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right), \quad (4.69)$$

<sup>4</sup>Para mais detalhes ver ref. ([52]).

que é a composição das eqs.(3.78) e (3.82), onde  $k \rightarrow \imath k$  e

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha}. \quad (4.70)$$

Sendo assim, precisamos aplicar condições de contorno na solução acima. Para isso, utilizaremos do argumento que muitos físicos advoam que uma dada teoria fundamental da gravitação quântica deveria ser livre de singularidades e, isso foi defendido por DeWitt em [5]. DeWitt diz que um bom critério seria a de que a função de onda deveria se anular, numa região de interesse, em que a singularidade clássica se manifestasse. Então, um pouco diferente do que foi proposto por DeWitt, vamos buscar, na medida do possível, condições de contorno em que as trajetórias bohmianas não sejam divergentes e, isso é diferente de pedir que a função de onda se anule pois, o fato de  $\psi$  se anular não significa que os observáveis também se anulem. Isso não funciona nem mesmo na mecânica quântica não relativística usando a interpretação de Copenhague. Dessa forma, esperamos que a função de onda e suas primeiras derivadas sejam finitas na região de interesse em que se dá a singularidade clássica. Para o Grande Arranque(Big Démarrage), essa região é aquela em que  $\alpha \rightarrow -\infty$  e  $\phi \rightarrow 0$ , pois é uma região inacessível classicamente. Apresentaremos a solução para o Grande Arranque(Big Démarrage) como uma superposição de dois termos, em que um dos coeficientes da expansão é o número  $\imath$  para garantir que na representação  $\psi = Re^{\frac{\imath}{\hbar}S}$  a fase  $S$  tenha contribuição das duas coordenadas  $\alpha$  e  $\phi$  vindas das partes geométrica e de matéria do sistema. Portanto,

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sum_{k=4}^5 D_k \left\{ \sqrt{|\phi|} b_1 e^{\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} [c_1 J_\nu(\imath k |\phi|)] \right\}, \quad (4.71)$$

onde o somatório se deu para apenas  $k = 4$  e  $k = 5$ . Haverá o crescimento do termo de massa  $e^{-3\alpha}$  nas equações guias, em que  $D_4 = \imath$ ,  $D_5 = 1$ ,  $b_2 = 0$  pois a nossa região de interesse é  $\alpha \rightarrow -\infty$  e,  $c_2 = 0$ . Utilizando a interpretação de Bohm-de Broglie mediante a transformação  $\psi = Re^{\frac{\imath}{\hbar}S}$  fica imediato que

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \alpha}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \phi} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \phi}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}. \quad (4.73)$$

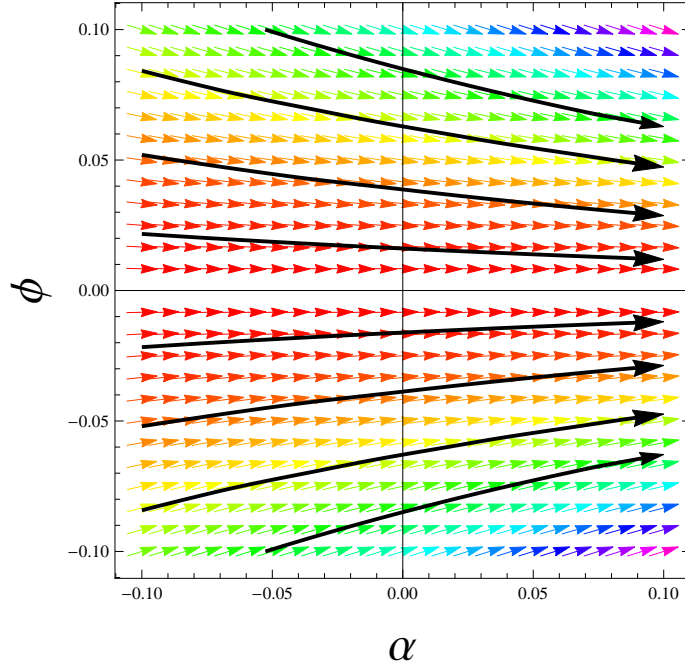


Figura 4.9: Trajetórias bomianas mostrando o comportamento do campo escalar com relação ao fator de escala.

tal que  $\psi^*(\alpha, \phi)$  significa o conjugado complexo de  $\psi(\alpha, \phi)$ . Apartir da eq.(4.71) das equações guias

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa^2}{6} e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} \right), \quad (4.74)$$

$$\dot{\phi} = -e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} \right), \quad (4.75)$$

onde,  $l = -1$  pois o campo escalar é de natureza fantasma, encontramos as trajetórias bohmianas da fig.(4.9). No local em que classicamente ocorria a singularidade Grande Arranque(Big Démarrage) podemos observar que  $\phi$  não tende a zero e o Grande Arranque(Big Démarrage) é evitado.

Por outro lado, vamos verificar o caso em que as energias são positivas, ou seja,  $k^2 > 0$  sendo  $k$  real. Portanto,

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(\imath k |\phi|) + c_2 Y_\nu(\imath k |\phi|)] \left( b_1 e^{\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right), \quad (4.76)$$



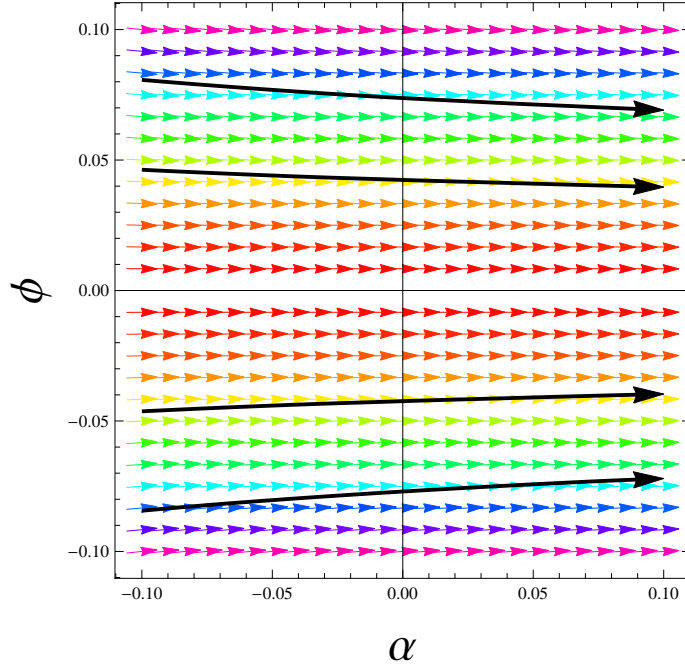


Figura 4.10: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento do campo escalar  $\phi$  com relação à  $\alpha$  no Grande Arranque(Big Démarrage) para  $k$  real.

que é a composição das eqs.(3.78) e (3.82), com

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha}. \quad (4.77)$$

Vamos fazer o estabelecimento das condições de contorno pedindo o mesmo anteriormente. Queremos que a função de onda na região de interesse, que é aquela em que  $\alpha \rightarrow -\infty$  e  $\phi \rightarrow 0$  pois é uma região inacessível classicamente, seja no mínimo finita e que suas primeiras derivadas com relação às coordenadas também. Além disso, a solução para o Grande Arranque(Big Démarrage) com  $k$  real será dada por uma superposição de dois termos, em que um dos coeficientes da expansão é o número  $\iota$  para garantir que na representação  $\psi = Re^{\frac{\iota}{\hbar}S}$  a fase  $S$  tenha contribuição das duas coordenadas  $\alpha$  e  $\phi$  das equações da parte material e da parte geométrica. Então, a

função de onda assume a forma

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sum_{k=1}^2 D_k \left\{ \sqrt{|\phi|} \left( b_1 e^{i \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-i \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right) [c_1 J_\nu(ik|\phi|)] \right\}, \quad (4.78)$$

onde  $c_2 = 0$  pois  $\frac{\partial}{\partial \phi} [Y_\nu(ik|\phi|)]$  é divergente quando  $\phi \rightarrow 0$ . O somatório foi escolhido apenas para os valores  $k = 1$  e  $k = 2$  pois a parte geométrica é oscilatória e não influencia no termo de massa  $e^{-3\alpha}$ . Assumindo valores para os coeficientes  $D_1 = 1$  e  $D_2 = \nu$ , usando as identidades (4.72) e (4.73) para a função de onda acima e as equações guias (4.74) e (4.75), podemos plotar as trajetórias bohmianas, fig.(4.10), mostrando que nessa região do gráfico o Grande Arranque(Big Démarrage) é novamente evitado uma vez que  $\phi$  não passa por zero.

## 4.7 Trajetórias Bohmianas do Grande Congelamento

A seguir, iremos estabelecer as trajetórias bohmianas para as singularidades Grande Congelamento(Big Freeze) nos dois casos. O primeiro será para o caso em que a matéria será dada para um campo escalar ordinário e o segundo será para a matéria com o campo fantasma.

### 4.7.1 Trajetórias Bohmianas com Matéria Ordinária

Primeiramente, vamos começar com o caso das energias negativas  $E_k = \frac{\hbar^2}{2} k^2$ , ou seja  $k^2 < 0$ . Escreveremos a solução geral da equação de Wheeler-DeWitt para a singularidade Grande Congelamento(Big Freeze) sem matéria fantasma como

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(ik|\phi|) + c_2 Y_\nu(ik|\phi|)] \left( b_1 e^{\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right), \quad (4.79)$$

que é a junção das eqs.(3.92) com (3.95) onde  $k \rightarrow ik$ , e

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha}. \quad (4.80)$$

Precisamos aplicar condições de contorno na solução acima. Dessa forma, vamos buscar aquelas em que as trajetórias bohmianas não sejam divergente e isso significa que a função de onda  $\psi$  e suas primeiras derivadas com relação às coordenadas  $\alpha$  e  $\phi$  devem ser finitas. A região de interesse é aquela em que  $\alpha \rightarrow -\infty$  e  $\phi \rightarrow 0$  pois é uma região inacessível classicamente. Então, apresentaremos a solução para o Grande Congelamento (Big Freeze) sem matéria fantasma como uma superposição de dois termos, que um dos coeficientes da expansão é o número  $\iota$  para garantir que na representação  $\psi = Re^{\frac{i}{\hbar}S}$ , a fase  $S$  tenha contribuição das duas coordenadas  $\alpha$  e  $\phi$ . Portanto,

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sum_{k=4}^5 D_k \left\{ \sqrt{|\phi|} b_1 e^{\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} [c_1 J_\nu(\iota k |\phi|)] \right\}, \quad (4.81)$$

onde o somatório se deu apenas para  $k = 4$  e  $k = 5$  pois vão limitar o crescimento do termo de massa  $e^{-3\alpha}$  nas equações guias. Temos também que  $D_4 = \iota$ ,  $D_5 = 1$  e  $b_2 = 0$  pois a nossa região de interesse é  $\alpha \rightarrow -\infty$  e  $c_2 = 0$  pois as trajetórias bohmianas se utilizam das derivadas primeiras das coordenadas e temos uma divergência vindo de  $\partial_\phi [Y_\nu(\iota k |\phi|)]$  quando  $\phi \rightarrow 0$ . Utilizando a interpretação de Bohm-de Broglie mediante a representação  $\psi = Re^{\frac{i}{\hbar}S}$  fica imediato que

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \alpha}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \phi} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \phi}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}. \quad (4.83)$$

tal que  $\psi^*(\alpha, \phi)$  significa o conjugado complexo de  $\psi(\alpha, \phi)$ . Apartir da eq.(4.81) e das equações guias

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa^2}{6} e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} \right), \quad (4.84)$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} \right), \quad (4.85)$$

onde  $l = 1$ , pois o campo escalar é ordinário. Exibimos as trajetórias bohmianas na fig.(4.11). No local em que classicamente

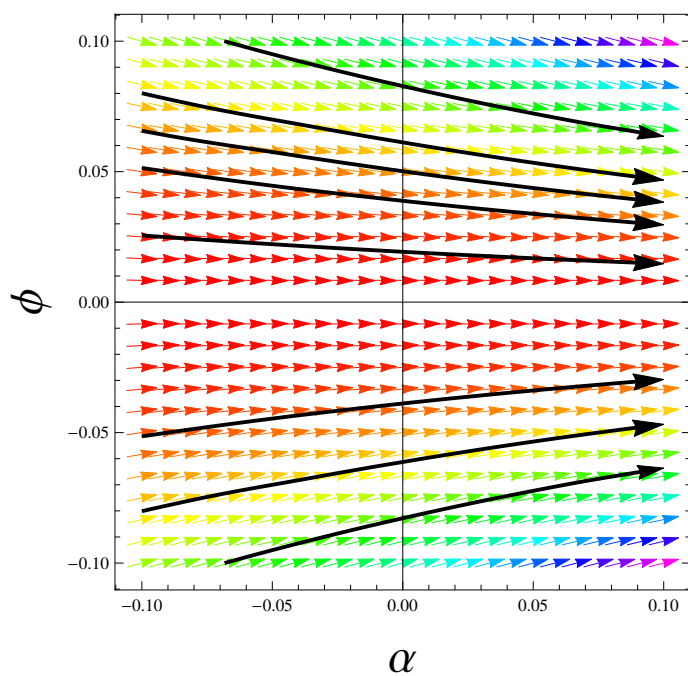


Figura 4.11: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento do campo escalar com relação ao fator de escala.

ocorria a singularidade Grande Congelamento(Big Freeze) podemos observar que  $\phi$  não tende a zero e a singularidade é evitada.

Vamos verificar agora o caso em que as energias são positivas, ou seja,  $k^2 > 0$  sendo  $k$  real. Portanto,

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(k|\phi|) + c_2 Y_\nu(k|\phi|)] \left( b_1 e^{i\frac{\sqrt{6}k}{\kappa}\alpha} + b_2 e^{-i\frac{\sqrt{6}k}{\kappa}\alpha} \right), \quad (4.86)$$

que é a junção das eqs.(3.92) e (3.95), onde

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha}. \quad (4.87)$$

Vamos fazer o estabelecimento das condições de contorno pedindo o mesmo que anteriormente. Queremos que a função de onda na região de interesse, que é aquela onde  $\alpha \rightarrow -\infty$  e  $\phi \rightarrow 0$ , seja no mínimo finita e que suas primeiras derivadas com relação às coordenadas também. Além disso, a solução para o Grande Congelamento(Big Freeze) sem matéria fantasma com  $k$  real será dada por uma superposição de dois termos, em que um dos coeficientes da expansão seja o número  $\iota$  para garantir que na representação  $\psi = R e^{\frac{i}{\hbar} S}$  a fase  $S$  tenha contribuição das parte material e geométrica. Então, a função de onda assume a forma

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sum_{k=-1}^1 D_k \left\{ \sqrt{|\phi|} \left( b_1 e^{i\frac{\sqrt{6}k}{\kappa}\alpha} + b_2 e^{-i\frac{\sqrt{6}k}{\kappa}\alpha} \right) [c_1 J_\nu(\iota k|\phi|)] \right\}, \quad (4.88)$$

onde  $c_2 = 0$  pois  $\frac{\partial}{\partial \phi} [Y_\nu(\iota k|\phi|)]$  é divergente quando  $\phi \rightarrow 0$ , o somatório foi escolhido apenas para os valores  $k = -1$  e  $k = 1$  pois a parte geométrica é oscilatória e não influencia no termo de massa  $e^{-3\alpha}$ . Assumindo valores para os coeficientes  $D_{-1} = 1$ ,  $D_1 = \iota$  e  $D_0 = 0$ , usando as identidades eqs.(4.84) e (4.85) para a função de onda acima e as equações guias eqs.(4.74) e (4.74), podemos desenhar as trajetórias bohmianas, fig.(4.12), mostrando que o Grande Congelamento(Big Freeze) com matéria ordinária é evitado uma vez que  $\phi$  não passa pelo zero.

#### 4.7.2 Trajetórias Bohmianas com Matéria Fantasma

Vamos escrever a solução da equação de Wheeler-DeWitt para o minisuperespaço do Grande Congelamento(Big Freeze) conduzido por um campo fantasma como

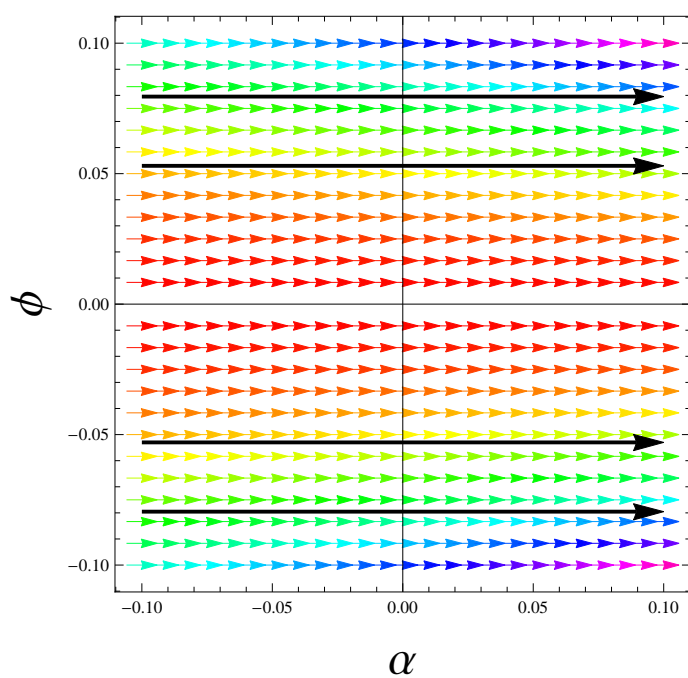


Figura 4.12: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento do campo escalar com relação ao fator de escala.

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_\nu(\imath k |\phi|) + c_2 Y_\nu(\imath k |\phi|)] \left( b_1 e^{\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right), \quad (4.89)$$

onde  $l = -1$  e foram utilizadas as eqs.(3.102) e (3.105). A região de interesse para estudo quântico da singularidade é aquela em que  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\phi \rightarrow 0$  e as energias são positivas  $k^2 > 0$ . Com  $\alpha \rightarrow \infty$  a quantidade  $\nu$  passa a ser complexa. Então vamos fazer a seguinte transformação

$$\nu := \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{V}_\alpha} \longrightarrow \sqrt{(-1) \left( -\frac{1}{4} + \tilde{V}_\alpha \right)} \implies \imath \sqrt{\left( -\frac{1}{4} + \tilde{V}_\alpha \right)}, \quad (4.90)$$

ou seja,  $\nu$  passa a ser  $\imath \nu$  e a eq.(4.89) fica

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_{\imath \nu}(\imath k |\phi|) + c_2 Y_{\imath \nu}(\imath k |\phi|)] \left( b_1 e^{\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right). \quad (4.91)$$

Como o argumento das funções de Bessel acima é complexo, fica melhor escrevê-los em termos das funções de Bessel modificadas linearmente independentes

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [\tilde{c}_1 I_{\imath \nu}(\imath k |\phi|) + \tilde{c}_2 K_{\imath \nu}(\imath k |\phi|)] \left( b_1 e^{\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right), \quad (4.92)$$

onde  $\tilde{c}_1$  e  $\tilde{c}_2$  são novas constantes. As condições de contorno a seguir são aquelas em que a função de onda e suas primeiras derivadas são finitas na região de interesse. Além disso, iremos fazer um somatório de dois termos para garantir que, ao aplicarmos a interpretação de Bohm-de Broglie, teremos contribuição na fase  $S$  das partes geométricas e de matéria e, ainda, poderemos escrever a função de onda  $\psi$  em uma forma genuína  $a + b\imath$ . Portanto,

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sum_{k=1}^2 D_k \left\{ \sqrt{|\phi|} \left( b_1 e^{\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\imath \frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right) [c_1 K_{\imath \nu}(k |\phi|)] \right\}, \quad (4.93)$$

onde foi posto que  $c_2 = 0$  pois a função de onda  $I_{\imath \nu}(\imath k |\phi|)$  não atende as condições de contorno. Assumindo os valores dos coeficientes do somatório como  $D_1 = 1$  e  $D_2 = \imath$ , escrevendo as identidades

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \alpha}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \phi} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \phi}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}. \quad (4.95)$$

tal que  $\psi^*(\alpha, \phi)$  significa o conjugado complexo de  $\psi(\alpha, \phi)$  e, usando a eq.(4.93) com as equações guias

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa^2}{6} e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} \right), \quad (4.96)$$

$$\dot{\phi} = -e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} \right), \quad (4.97)$$

podemos chegar nas trajetórias bohmianas para o modelo de singularidade Grande Congelamento(Big Freeze) com matéria fantasma, que podem ser vistas na fig.(4.13). Percebemos que a singularidade não é evitada pois, o campo fantasma  $\phi$  continua indo a zero o que dá uma divergência no potencial  $V(\phi)$ .

Nesse momento, vamos voltar a nossa atenção para o caso em que as energias são negativas  $k^2 < 0$ . Portanto, o argumento das funções de Bessel volta a ser real e dessa maneira não iremos reescrever a solução em termos de outras funções de Bessel modificadas. Partiremos novamente da solução

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sqrt{|\phi|} [c_1 J_{\nu}(k|\phi|) + c_2 Y_{\nu}(k|\phi|)] \left( b_1 e^{\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} + b_2 e^{-\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right). \quad (4.98)$$

onde  $k \rightarrow ik$  na equação acima. Reescreveremos essa solução em termos da soma de dois termos para garantir que a representação  $\psi = R e^{\frac{i}{\hbar} S}$  tenha contribuição tanto da parte geométrica quanto da matéria. Além disso, queremos escrever a função de onda na forma complexa  $a + bi$ . Dessa forma, encontramos

$$\psi_k(\alpha, \phi) = \sum_{k=1}^2 D_k \left\{ \sqrt{|\phi|} \left( b_2 e^{-\frac{\sqrt{6}k}{\kappa} \alpha} \right) [c_1 J_{\nu}(k|\phi|)] \right\}, \quad (4.99)$$



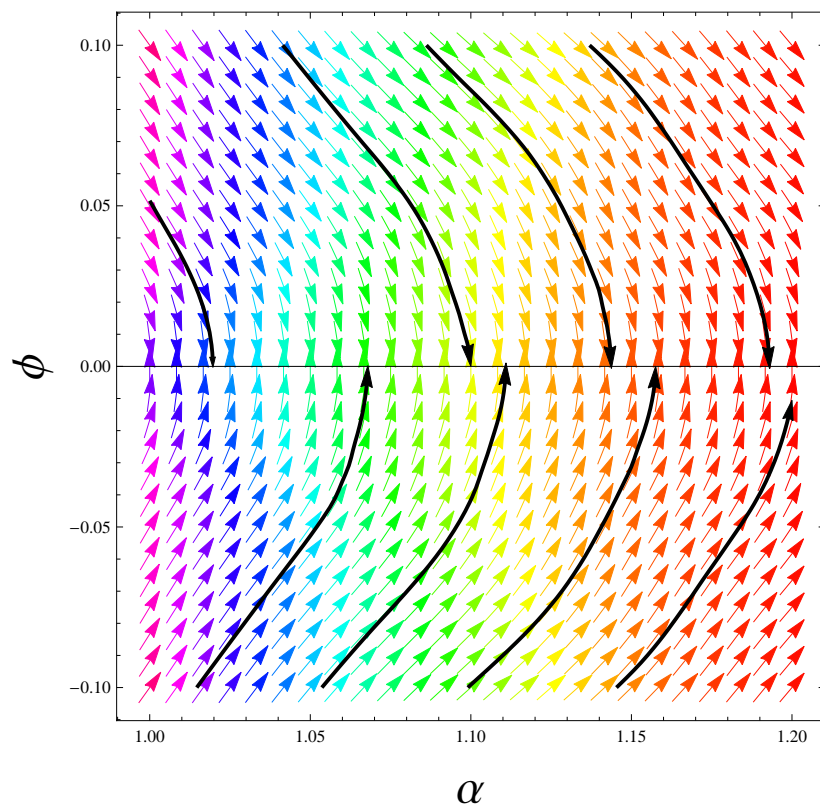


Figura 4.13: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento do campo fantasma com relação ao fator de escala.

onde foi posto que  $b_1 = 0$  devido ao termo  $e^{\frac{\sqrt{6}k}{\kappa}\alpha}$  divergir quando  $\alpha \rightarrow \infty$  e,  $c_2 = 0$  pois a função de onda  $Y_{\nu}(ik|\phi|)$  não atende as condições de contorno. Assumindo os valores dos coeficientes do somatório como  $D_1 = 1$  e  $D_2 = i$ , escrevendo as identidades

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \alpha}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}, \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} = \frac{\psi^*(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi(\alpha, \phi)}{\partial \phi} - \psi(\alpha, \phi) \frac{\partial \psi^*(\alpha, \phi)}{\partial \phi}}{\frac{2i}{\hbar} |\psi(\alpha, \phi)|^2}. \quad (4.101)$$

tal que  $\psi^*(\alpha, \phi)$  significa o conjugado complexo de  $\psi(\alpha, \phi)$ . Usando a eq.(4.99) com as equações guias

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa^2}{6} e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha} \right), \quad (4.102)$$

$$\dot{\phi} = -e^{-3\alpha} \left( \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi} \right), \quad (4.103)$$

chegamos nas trajetórias bohmianas que podem ser vistas na fig.(4.14). Podemos percebermos que a singularidade não é evitada pois o campo fantasma  $\phi$  continua indo a zero, o que dá uma divergência no potencial  $V(\phi)$ .

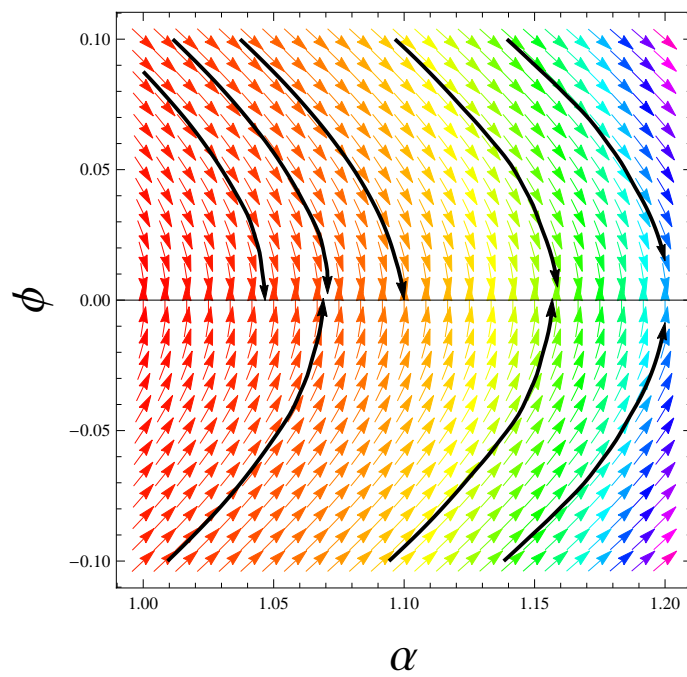


Figura 4.14: Trajetórias bohmianas mostrando o comportamento do campo fantasma com relação ao fator de escala.

## Capítulo 5

# Conclusões

Mostramos nessa tese o desenvolvimento do formalismo hamiltoniano para a Relatividade Geral no cap.(II) e, com o mínimo de detalhes possível, demos o suporte necessário para a construção de uma teoria canônica da gravitação quântica. Para isso, partimos da foliação da variedade lorentziana em hipersuperfícies espaciais para se chegar na métrica escrita na sua forma ADM e, a partir daí, poder escrever todas as quantidades geométricas envolvidas em termos dessa métrica. Nesse momento, fomos capazes de mostrar os vínculos primários e secundários que derivam do formalismo, e que fizeram um papel fundamental para o desenvolvimento do nosso trabalho. Além disso, exibimos o universo de FLRW para seções espacialmente planas, que foi o ambiente geométrico onde fizeram surgir as singularidades clássicas Grande Rasgo(Big Rip), Grande Parada(Big Brake), Grande Congelamento(Big Freeze) e Grande Arranque(Big Démarrage).

No cap.(III), procedemos com a quantização canônica de Dirac-Wheeler-DeWitt. Mostramos que os operadores associados aos vínculos clássicos aniquilam o funcional de onda e implica em ele ser independente das funções lapso e deslocamento e invariante sob transformações de coordenadas espaciais. Um dos vínculos dá origem à equação de Wheeler-DeWitt. Nesse ponto, podemos dizer que a quantização canônica foi um enorme avanço. Contudo, como foi mencionado na tese, existem problemas que cercam esse formalismo, sendo os principais a incapacidade de se construir um espaço de Hilbert para os estados físicos, o problema do ordenamento, o pro-

blema do tempo e o problema da medida no mundo quântico. Nesse mesmo capítulo, mostramos o ambiente quântico em que são abordados as singularidades clássicas para os modelos de minisuperespaço homogêneo e isotrópicos de FLRW e assim, chegamos nas equações de Wheeler-DeWitt para o Grande Rasgo(Big Rip), a Grande Parada(Big Brake), o Grande Congelamento(Big Freeze) e o Grande Arranque(Big Démarrage).

No cap.(IV) apresentamos a interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica em que, mais uma vez, gostaríamos de ressaltar o seu aspecto ontológico, ou seja, posições e amplitudes dos campos existem independentemente de qualquer observador ou processo externo. Em BdB existe uma onda piloto, que guia a partícula ao longo de sua trajetória dada pelas condições iniciais, que usualmente são identificadas como as variáveis escondidas. A teoria tem então seu aspecto causal. É interessante notar certa resistência da comunidade científica com relação à interpretação causal pois, o que todo físico teórico deseja em uma teoria é simplicidade e elegância. Acredito que BdB alcança este objetivo pois a interpretação é simples por não envolver mais aparato matemático para a descrição da mecânica quântica, já que não há a necessidade da construção do espaço de Hilbert dos estados. No quesito elegância, enfatizamos a beleza em escrever uma dinâmica em termos da equação de Hamilton-Jacobi, com uma imediata aplicação do princípio da correspondência já que o quântico vai no clássico na mesma equação e com um limite muito claro (desaparecimento do potencial quântico). Nesse momento, podemos mencionar que a aplicação da interpretação de Bohm-de Broglie à cosmologia quântica foi um extraordinário salto conceitual. Não quer dizer que tudo está bem mas vários problemas são resolvidos ao se lançar mão de BdB tais como: não existe a necessidade da construção do espaço de Hilbert, o problema da identificação do tempo na teoria é resolvido no âmbito dos modelos de minisuperespaço e não há a necessidade da existência de um mundo clássico que dê suporte às medidas quânticas através do colapso do funcional de onda. A interpretação dá sentido às quantidades físicas fator de escala e campo escalar através das trajetórias bohmianas. Aplicamos a interpretação para o modelo com Grande Rasgo(Big Rip) e, descobrimos que essa singularidade é evitada dependendo dos valores assumidos para a constante  $k$  e isso pode ser percebido

claramente nas trajetórias bohmianas do Grande Rasgo(Big Rip) nas fig.(4.1,4.2,4.3,4.4). Isso contraria o que foi estabelecido em [44] que, por argumentos qualitativos, a singularidade seria evitada. Portanto, estamos apresentando um diferente resultado via interpretação BdB mais fino e detalhado.

Para a Grande Parada(Big Brake), mostramos que realmente a singularidade é evitada (evidentemente dentro das condições que usamos) e isso concorda com [48]. Contudo em BdB temos uma visão mais detalhada do mundo quântico. Podemos observar que além de evitar a Grande Parada(Big Brake) o universo, sob efeitos quânticos, tende a se desacelerar a uma taxa finita e após se contrair de maneira suave. Tudo isso pôde ser observado nas trajetórias bohmianas fig.(4.5) e nas figs. (4.6, 4.7, 4.8).

Para o Grande Arranque(Big Démarrage), chegamos à conclusão que o critério de DeWitt usado para o estabelecimento das condições de contorno, com a intenção de evitar a singularidade, não é suficiente pois precisamos garantir também que a primeira derivada da função de onda, com relação às coordenadas envolvidas seja finita. Além disso, tenha um comportamento assintótico convergente superior ao crescimento do termo da componente da métrica de DeWitt que aparece na expressão da equação do momento, tudo isso para garantir a finitude das trajetórias bohmianas. Portanto, observamos que o ponto onde havia o Grande Arranque(Big Démarrage) clássico, em que o campo fantasma ia a zero, é eliminado. Isso pode ser visto claramente para ambos os casos de energias positivas e negativas através das trajetórias bohmianas dadas nas figs.(4.9) e (4.10).

Para o Grande Congelamento(Big Freeze) sem matéria fantasma, levando em consideração as condição de contorno construídas por nós, a singularidade é evitada e, isso é traduzido nas trajetórias bohmianas da fig.(4.11) para a energia negativa e da fig.(4.12) para a positiva, que mostram o campo escalar não se anula na região em questão. Já para o Grande Congelamento(Big Freeze) com matéria fantasma, podemos observar que mesmo utilizando todas as garantias de convergência da função de onda e sua derivada, verificamos que para ambas energias positivas e negativas a singularidade não é

evitada por efeitos quânticos. Isso pôde ser observado nas trajetórias bohmianas das figs.(4.14) e (4.13).

Gostaríamos de enfatizar a importância dos trabalhos [44, 48, 52] em que nos baseamos para estudar as singularidades. Sem eles talvez não tivéssemos a idéia de abordar estas questões. Contudo, utilizando uma interpretação que julgamos ser mais apropriada, verificamos que a trajetória bohmiana é um instrumento bastante útil na caracterização das singularidades cosmológicas e, acreditamos ter acrescentado mais elementos acerca desses assuntos.

Sobre perspectivas futuras, podemos dizer que há uma infinidade de temas a serem abordados dentro da perspectiva da teoria BdB, entre eles, aspectos quânticos de buracos negros, teorias de cordas, teorias M, criação de partículas em espaços curvos, aproximação semi-clássica. Estes serão assuntos de nossos trabalhos futuro.

# Referências Bibliográficas

- [1] Halliwell, J. J., *Quantum Cosmology and Baby Universes*, ed. por S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran e S. Weinberg, (World Scientific. 1991).
- [2] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A246 (1958) 326; 333.
- [3] *Quantum Gravity, Generalized Theory of Gravitation, and Superstring Theory-Based Unification*, ed. por Kursunoglu et al.. (Kluwer Academic / Plenum Publishers. New York. 2000).
- [4] *Quantum Gravity*, ed. por C. Rovelli, (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [5] B. S. DeWitt, Phys. Rev. 160 (1967) 1113.
- [6] J. A. Wheeler, in Batelles Rencontres, eds. C. DeWitt and J. A. Wheeler, (Benjamin, New York, 1968), p. 242.
- [7] Riess, A. G. *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [8] Perlmutter, S. *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1998).
- [9] Aguirregabiria, J. M., Chimento, L. P. e Lazkoz, R., *Phys. Lett* **B631**, 93 (2005).
- [10] E. M. Barboza Jr. and N. A. Lemos, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 1609 (2006).
- [11] Caldwell, R. R., *Phys. Lett.* **545**, 23 (2002).
- [12] Caldwell, R. R., Kamionkowski, M. e Weinberg, N. N., *Phys. Rev.Lett.* **91**, 071301 (2003).
- [13] Starobinsky, A. A., *Grav. Cosmol.* **6**, 157 (2000).



- [14] Yu. Shtanov and V. Sahni, *Class. Quantum Grav.* **19**, L101 (2002).
- [15] J. D. Barrow, *Class. Quantum Grav.* **21**, L79 (2004); *ibid.* **21**, 5619 (2004); J. D. Barrow and C. G. Tsagas, *ibid.* **22**, 1563 (2005).
- [16] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, *Phys. Rev. D* **69**, 123512 (2004).
- [17] A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, *Phys.Lett. B* **511**, 265 (2001).
- [18] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, and P. E. de Souza, *Gen. Rel. Grav.* **34** 53 (2002); N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, *Phys. Lett. B* **535**, 17 (2002); M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen, *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002); V. Gorini, A. Kamenshchik, and U. Moschella, *Phys. Rev. D* **67**, 063509 (2003).
- [19] D. Bohm, *Phys. Rev.* 85, 166, (1952), *Phys. Rev.* 85, 180, (1952); D. Bohm and B.J. Hiley *Phys. Rep.* 144, 323, (1987), D. Bohm, B.J. Hiley, and P.N. Koloyrou *Phys. Rev.* 144, 349, (1987); D. Bohm, B.J. Hiley, *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory*, Routledge and Kegan Paul, London, 1993.
- [20] J. S. Bell *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1987.
- [21] *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, ed. by B. S. DeWitt and N. Graham (Princeton University Press, Princeton, 1973).
- [22] A. B. laut and J. Kowalski-Glikman, *Class.Quant.Grav.* 13, 39-50 (1996).
- [23] F. Hoyle, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **108**, 372 (1948); **109**, 365 (1949).
- [24] F. Hoyle and J. V. Narlikar, *Proc. Roy. Soc. A***282**, 191 (1964); *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **155**, 305 (1972); **155**, 323 (1972).
- [25] Narlikar, J. V. and Padmanabhan, T., *Phys. Rev.D* **32**, 1928 (1985).

- [26] R. M. Wald, *General Relativity*, (Chicago University Press, 1984).
- [27] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).
- [28] Arnowitt R., Deser, S. e Misner, C.W.; *Gravitation: an Introduction to Current Research*, editado por Witten L., Joun Wiley, New York (1962).
- [29] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [30] Tonry, J. L. *et al. Astroph. J.* **594**, 1 (2003).
- [31] Tegmark, M. *et al. Phys. Rev.* **D69**, 103501 (2004).
- [32] Halliwell, J. J., *Nucl. Phys.* **B266**, 228 (1986).
- [33] Barrow, J. e Cotsakis, C., *Phys. Lett.* **B214**, 515 (1988).
- [34] Halliwell, J. J., *Phys. Lett.* **B185**, 341 (1987).
- [35] Yokoyama, J. e Maeda, K., *Phys. Lett.* **B207**, 31 (1988).
- [36] Hao, J. G. and Li, X. Z., *Phys. Rev.* **D70**, 043529 (2004).
- [37] Hao, J. G. and Li, X. Z., *Phys. Rev.* **D67**, 107303 (2003).
- [38] Nojiri Sh, Odintsov S D and Tsujikawa S, *Phys. Rev. D* **71**, 063004 (2005).
- [39] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [40] V. Sahni and A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D* **9**, 373 (2000).
- [41] Je-An Gu and W-Y. P. Hwang, *Phys. Lett. B* **517**, 1 (2001).
- [42] L. A. Boyle, R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, *Phys. Lett. B* **545**, 17 (2002).
- [43] L. P. Chimento and R. Lazkoz, *Phys. Lett.* **91**, 211301 (2003).
- [44] M. P. Dabrowski, C. Kiefer, and B. Sandhofer, *Phys. Rev. D* **74**, 044022 (2006).

- [45] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1972).
- [46] J. D. Barrow, G. J. Galloway, e F. J. Tipler, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **223**, 835 (1986).
- [47] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, e V. Pasquier, *Phys. Rev. D.* **69**, 123512 (2004).
- [48] A. Y. Kamenshchik, C. Kiefer, and B. Sandhofer, *Phys. Rev. D***76**, 064032 (2007).
- [49] M. Bouhmadi-López, P. F. González-Díaz, and P. Martín-Moruno, *Phys. Lett. B* **659**, 1 (2008).
- [50] M. Bouhmadi-López and J. A. Jiménez Madrid, *JCAP***0505**, (2005) 005.
- [51] I. M. Khalatnikov, *Phys. Lett. B* **563**, (2003) 123.
- [52] M. Bouhmadi-López, C. Kiefer, B. Sandhofer, and P. Vargas Moniz, *Phys. Rev. D* **79**, 124035 (2009).
- [53] S. W. Hawking and D. N. Page, *Nucl. Phys.* **B264** (1986) 185.
- [54] Wiltshire, David L., In \*Canberra 1995, Cosmology\* 473-531 gr-qc/0101003 ADP-95-11-M-28, C95-01-16.2.
- [55] Steigl R. e Hinterleitner F., *Class. Quant. Grav.* **23**, 3879 (2006).
- [56] Max Born and J. Robert Oppenheimer, *Annalen der Physik* 389 (20), 457 (1927);
- [57] C. Kiefer, *Phys. Rev. D* 38, 1761 (1988).
- [58] W. Frank, D. J. Land, and R. M. Spector, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 36 (1971).
- [59] K. M. Case, *Phys. Rev.* **80**, 797 (1950).
- [60] Bohm D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, (1951).
- [61] Bohm D., *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952).
- [62] de Broglie L., *J. de Phys.* **8**, 225 (1927).

- [63] Holland, P. R., *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge, (1993).
- [64] Omnès, R., *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1994).
- [65] Valentini, A., *Phys. Lett.* **A156**, 5 (1991).
- [66] Vink, J. C., *Nucl. Phys.* **B369**, 707 (1992).
- [67] Shtanov, Y. V., *Phys. Rev.* **D54**, 2564 (1996).
- [68] Valentini, A., *Phys. Lett.* **A158**, 1 (1991).
- [69] Pinto-Neto, N., *Found. Phys.* **35**, 577 (2005).
- [70] N. Pinto-Neto and E. Sergio Santini, *Phys. Rev. D* **59** 123517 (1999).
- [71] N. Pinto-Neto and D.M. Pantoja, *Phys. Rev. D* **80**, 083509(2009).
- [72] N. Pinto-Neto and D.M. Pantoja, *Int. J. Mod. Phys. D*, No Prelo (2014).
- [73] J. A. de Barros and N. Pinto-Neto, *Int. J. of Mod. Phys. D* **7**, 201 (1998).