

Tese de Doutorado

Incursões Exploratórias nos Domínios do Além-Modelo-Padrão

Denis Cocuroci

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação

de Pós-Graduação em Física para obtenção do

título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Teoria Geral de Campos e Partículas.

Orientador: José Abdalla Helayel-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 2015

Dedicatória

A minha filha, Louise.

Agradecimentos

A minha família, por todo apoio.

Ao professor Helayël, por me inspirar a me tornar uma pessoa excelente;

Aos colaboradores da CFC-CBPF e seus diretores por seus dedicados trabalhos;

Por fim, agradeço ao Povo Brasileiro, através do CNPq, pela Bolsa de Doutorado.

Resumo

Neste trabalho, são explorados alguns elementos da Física além do Modelo-Padrão - dimensões mais altas, supersimetria, matéria escura eletricamente carregada e possíveis efeitos da gravitação com torção no setor de férmions na escala do TeV - e são discutidas as suas respectivas consequências fenomenológicas sobretudo em conexão com o setor eletromagnético do Modelo-Padrão.

Abstract

Some topics of the Physics beyond Standard Model are exploited in this work. Some phenomenological aspects of higher dimensions, supersymmetry, electrically charged dark matter and gravity with torsion are discussed particularly in connection with the electromagnetic sector of the Standard Model.

Sumário

Sumário	7
1 Apresentação e Contextualização	9
2 Sobre a presença de um setor de radiação escura na Eletrodinâmica Clássica	14
2.1 Delimitação de nosso problema de pesquisa.	14
2.2 Eletromagnetismo clássico em 5D.	15
2.3 Tensor de Energia-momentum	17
2.3.1 Equações de Continuidade.	19
2.4 A Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em (1+4)Dimensões	21
2.5 Comparação das formulações	27
2.6 Considerações Finais deste capítulo	35
3 Uma 3-forma de calibre em 5D em conexão com um possível setor escuro da Eletrodinâmica 4D.	37
3.1 Introdução	37
3.1.1 A relevância da 3-forma de calibre.	39
3.2 Descrição do Modelo	41
3.2.1 Um campo 3-forma acoplado a eletrodinâmica de Maxwell em 5D.	41
3.2.2 Decomposição em componentes irreduzíveis de $SO(3)$	44
3.2.3 Campos de radiação em 4D.	47
3.3 O setor de férmions em 5D e sua redução dimensional para 4D.	49
3.3.1 Redução Dimensional da ação	51
3.3.2 Considerando o setor gravitacional	53

3.3.3	Propagadores do multipleteo $\{A^\mu, B^{\mu\nu}, X^\alpha, \phi\}$	56
3.4	Conclusões	66
3.5	Currents in the non-relativistic limit	68
4	Partícula carregada de Spin-1/2 em 1+4 dimensões com supersimetria- N=1.	70
4.1	Introdução	70
4.2	Esclarecimentos	73
4.3	Estabelecendo o Hamiltoniano.	74
4.4	Descrição mecânica supersimétrica	76
4.5	Conclusões	80
5	Discussão sobre possíveis efeitos do parâmetro de Barbero-Immirzi na física de partículas em escala-TeV.	83
5.1	Descrição do Modelo	86
5.2	Acoplamento com campos de matéria fermiônica	92
5.3	Discussões e Conclusões gerais	95
6	Reflexões Finais e Novos Caminhos	97
	Referências	101

1 Apresentação e Contextualização

O histórico trabalho de Dirac, “*A Remarkable Representation of the $(3+2)$ de Sitter Group*”, publicado em 1963 no *J. Math. Phys.* [1], marcou, de forma silenciosa, o início da era da chamada conjectura de Maldacena da correspondência *AdS/CFT*; esta, em 1998 [2], relançou, em bases ligadas às teorias de cordas, o clássico paper de Dirac, que era voltado fundamentalmente para o estudo da questão sob a ótica da teoria de grupos. Várias áreas da Física vêm adotando a correspondência gravitação/gauge para melhor descrever fenômenos de naturezas distintas. Na Física de Interações Fortes e na discussão dos plasmas de quarks/glúons, a questão do confinamento vem sendo correntemente abordada no âmbito da correspondência *AdS₅/QCD₄*; na Física de Matéria Condensada, problemas ligados à matéria em estado topológico vêm sendo discutidos sob a ótica da correspondência *AdS₃/CFT₂*. Os supercondutores topológicos, propostos teoricamente em 2009, têm a sua física descrita também através desta correspondência, como descrito no interessante artigo do *Phys. Rev. D* publicado por Qi, Witten e Zhang em 2013 [3]. Visto o caráter universal da correlação entre espaços de anti-de Sitter e sistemas de gauge, buscar novos modelos físicos além do Modelo-Padrão da Física de Partículas com base na correspondência gravitação/gauge torna-se uma questão de interesse [4, 5]. Muitas características dos modelos gravitacionais 5-dimensionais encontram-se em aberto; por exemplo, gravitação topológica com presença de torção [6], modelos gravitacionais com a presença do dílaton [7] e modelos não-topológicos com termos de potência na curvatura e torção [8]. Logo, seria relevante, no sentido de se compreender possíveis novas extensões de modelos de Yang-Mills em 4 dimensões, buscar os correspondentes 4D destes modelos gravitacionais estendidos em 5D [9]. Este estudo, inicialmente de caráter exploratório, poderia fornecer subsídios para a eventual

formulação de novos modelos de gauge em 4D que venham a acomodar fenômenos – ainda não revelados pelo LHC em seus primeiros anos de operação – além daqueles que prevê e descreve o Modelo-Padrão. Preons, modelos de Higgs compostos e *unparticles* – caso se venha a ter indícios dos mesmos na Física do LHC – catalisariam uma forte atividade na busca de novos modelos de gauge. A nossa proposta, nos trabalhos realizados para a elaboração desta Tese, seria a construção de extensões das teorias de gauge que subsidiam o Modelo-Padrão a partir de modelos de gauge, inclusive com gravitação, em 5D, adotando o ponto-de-vista de Dirac de que a física fundamental em 4D possa ser melhor compreendida a partir dos fenômenos correlatos em 5D. Esta é uma postura que reflete o nosso convencimento de que há, de fato, uma forte correlação entre a gravitação em 5D e as interações fundamentais que percebemos em 4D. Vários outros argumentos trabalham nesta direção, como as soluções de anti-de Sitter da Supergravidade e a conhecida teoria dos chamados pólos de Regge. Definido o contexto e o espírito deste trabalho, passaremos às ideias gerais desenvolvidas nesta Tese, deixando aspectos mais específicos de cada problema abordado para a seção introdutória que cada capítulo comporta. Há um número razoavelmente extenso daquilo que dizemos ser Física além do Modelo-Padrão. Para nós, nas presentes investigações aqui apresentadas e discutidas, a nova caminhada além do Modelo-Padrão comporta a passagem por 4 pontos em particular:

- a adoção de 1 dimensão extra (5D),
- a inclusão de elementos de gravitação (curvatura e torção),
- considerações sobre Supersimetria (SUSY)
- e uma abordagem ao setor de matéria escura, tocando na questão de possíveis componentes eletricamente carregados presentes na fração de matéria escura revelada para o nosso Universo.

Toda a contextualização, a problematização e resultados mais relevantes referentes a esta parte da pesquisa encontra-se ao longo dos dois primeiros Capítulos. Preferimos adotar a postura de uma Introdução mais breve apenas para anunciar ao leitor para o que se fez, por que se fez, como se fez e aonde se chegou. O esforço central dos Capítulos 1 e 2 da Tese está nas considerações sobre possíveis abordagens para a Eletrodinâmica em 5D e a potencialidade que a dimensão extra nos oferece de poder nos conduzir a uma descrição unificada das chamadas ALPs (*Axion-Like Particles*) e os parafótons, ambas as categorias ligadas a Física da Matéria Escura e a setores não-visíveis que complementam o Modelo-Padrão. Todo este material está publicado no trabalho: “*A 3-form gauge potential in 5D in connection with a possible dark sector of 4D-electrodynamics.*” [10]. Consideramos que esta seja a contribuição maior destes dois Capítulos iniciais:

como o estudo de modelos eletrodinâmicos estendidos em 5D podem acomodar de forma unificadora elementos de uma física extra-Modelo-Padrão, como a categoria das chamadas partículas tipo-áxion (ALPs) e os parafótons. Esta unificação ainda não havia sido realizada na literatura da área.

No Capítulo 3, ainda nos mantivemos com a consideração de uma dimensão extra, mas trouxemos um outro elemento extra ao Modelo-Padrão: a SUSY. A ideia aqui foi compreender como um modelo para uma partícula descrita de forma supersimétrica em 5D pode nos levar ao problema da existência de partículas carregadas na composição do que se espera ser a matéria escura de nosso Cosmo. Esta é uma questão bastante debatida na literatura da área, e a nossa contribuição ao debate encontra-se publicada no trabalho “*Spin-1/2 Charged Particle in 1+4 dimensions with N=1-Supersymmetry*” [11]. O resultado central é que

a dinâmica de uma partícula em um cenário supersimétrico em 5 dimensões espaço-temporais possui graus de liberdade suficientes para que, na projeção sobre a brana 4-dimensional que constitui o nosso espaço-tempo, apareça uma entidade que podemos interpretar como um setor eletricamente não-neutro da porção de

matéria escura, e damos a nossa interpretação do porquê tal partícula nos aparece no setor não-visível.

Este trabalho é bastante simples do ponto-de-vista técnico, mas nos oferece espaço para muitas interpretações. A sua eventual relevância está naquilo que ele oferece como possibilidades para possíveis futuras trilhas a percorrer na direção da SUSY em 5D.

Finalmente, no Capítulo 4, trazemos de volta (já havia sido abordada no Capítulo 2) a questão da gravitação como um elemento de Física além do Modelo Padrão. Mas, desta vez, o objeto em evidência é a torção, associada ao conhecido parâmetro de Barbero-Immirzi da teoria conhecida como Gravitação Quântica de Loops. Até então, este parâmetro novo na área da gravitação com torção, só havia aparecido em problemas ligados à Cosmologia e Astrofísica, inclusive com a consideração de buracos negros. O nosso esforço central foi averiguar a possibilidade de se trazer o parâmetro de Barbero-Immirzi, através de um cenário especial que propomos na discussão deste Capítulo, para a Física de Partículas, em especial para a escala de energias do TeV , com o direto intuito de se conectar a gravitação com torção a possíveis processos que possam, eventualmente, vir a ser detectados nas colaborações ATLAS e CMS do LHC. Os esforços empreendidos no Capítulo 4 culminaram com o resultado seguinte:

é possível, sim, que o parâmetro de Barbero-Immirzi, um típico elemento da Gravitação Quântica de Laços, tenha repercussões na escala do TeV da Física de Partículas. As nossas explorações nos permitiram chegar a limites para este parâmetro – baseando-nos na escala do TeV – que são perfeitamente compatíveis com os limites advindos de medidas cosmológicas e astrofísicas.

Este resultado está publicado no trabalho “*Discussion on possible effects of the Barbero-Immirzi parameter at the TeV -scale particle physics*” [12], e nos encoraja a prosseguir na direção de outras repercussões do parâmetro de Barbero-Immirzi e na formulação de um cenário baseado na Gravitação Quântica de Laços para a

Física além do Modelo-Padrão com vistas à detecção no LHC. Tendo sido feita a apresentação geral e tendo procurado deixar claro o contexto onde estabelecemos o nosso debate, podemos passar aos Capítulos específicos onde, em cada um deles, serão fornecidos suficientes detalhes dos objetivos e das motivações por trás dos objetos de pesquisa delimitados e atacados. Ao final de cada Capítulo, deixamos Conclusões Gerais referentes ao debate aí lançado, preferindo concluir a Tese com um Capítulo mais geral onde fazemos uma auto-análise das limitações de nossos estudos e resultados (*Reflexões Finais*) e apresentamos possibilidades de novos estudos que se abrem como futuras perspectivas (*Novos Caminhos*).

2 Sobre a presença de um setor de radiação escura na Eletrodinâmica Clássica

2.1 Delimitação de nosso problema de pesquisa.

O que pretendemos expor é a possibilidade de que o Eletromagnetismo de Maxwell seja a manifestação de um fenômeno mais fundamental no mundo das 5-dimensões. A razão disso vem da concepção de que nosso Universo seja melhor descrito por uma hipersuperfície de uma 5-brana.

Adotamos uma descrição de nosso Universo e das interações fundamentais como se dando numa brana 4-dimensional, fronteira de um mundo 5-dimensional [13].

Vamos estabelecer, com os nossos estudos, que a Eletrodinâmica de Maxwell em 4D seja parte de um sistema mais completo, com um setor extra constituído por campos de pura radiação que não se acoplam a correntes de matéria, e cujo tensor de energia-momentum indica a existência uma componente de uma pressão negativa. Isto nos induz a pensar num Eletromagnetismo que traz consigo, como efeito de uma dinâmica que se processa em 5D, um setor de radiação escondida, que pretendemos identificar como possível candidato a uma parcela da energia escura [14, 15, 16, 17, 18] do Universo.

Procurando compreender o aspecto mais fundamental do Eletromagnetismo em 5D, organizamos a nossa investigação através do estudo dos campos de Maxwell e de Kalb-Ramond [19] (uma 2-forma de gauge) no mundo 5-dimensional, partindo do fato de que ambos, em 5D, podem descrever um quantum com 3 graus de liberdade físicos. Buscamos entender qual dos dois deve ser mais fundamental do ponto-de-vista das interações eletromagnéticas no mundo das 4 dimensões.

O leitor deverá observar, ao longo do texto, que em grande parte do trabalho,

optamos por formular as equações de campo em termos de vetores e tensores de $SO(3)$. O propósito é deixar sempre de maneira explícita o paralelo que procuramos estabelecer com a Eletrodinâmica de Maxwell, expressa em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} . A razão para este procedimento se baseia no fato de que a notação covariante, muito propícia para uma descrição manifestamente relativística, para algumas finalidades, mascara as relações entre os campos em termos dos quais se formula um dado modelo. Portanto, poder-se-á perceber que faremos sempre o esforço de transcrever as equações covariantes no espaço de Minkowski em termos dos campos com caráter tensorial no espaço euclidiano 3-dimensional.

Esperamos que em nosso mundo 4-dimensional possamos encontrar aspectos provenientes de uma teoria física fundamental formulada em 5D.

2.2 Eletromagnetismo clássico em 5D.

O eletromagnetismo clássico e as equações de Maxwell podem ser derivados da ação:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^5x \quad (2.1)$$

onde o Lagrangiano \mathcal{L} é dado por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Se expressarmos as equações de movimento com fonte $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ assim como as equações homogêneas $\partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^\kappa{}_\mu + \partial^\kappa F_\mu{}^\nu = 0$ (conhecidas como identidades de Bianchi) em termos de suas componentes no cenário habitual das (1+3)D obteremos as conhecidas quatro equações de Maxwell. Ou seja, esque-

maticamente, teríamos:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \implies \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ -\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \nabla \times \vec{B} = \vec{j} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^\kappa{}_\mu + \partial^\kappa F_\mu{}^\nu = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Contudo, se essas mesmas equações de movimento do campo forem consideradas no cenário (1+4)D, obteríamos sete equações, ao invés de quatro, sendo que, dessas sete, três possuem fontes, enquanto que as quatro restantes são homogêneas

¹. Portanto, neste caso, teríamos:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu \implies \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} - \frac{\partial b}{\partial s} = \rho \\ -\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{e} = \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial t} b + \nabla \cdot \vec{e} = j_s \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^\kappa{}_\mu + \partial^\kappa F_\mu{}^\nu = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{e} + \nabla b + \frac{\partial}{\partial s} \vec{E} = \vec{0} \\ \nabla \times \vec{e} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{B} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Vale notar que, em 5 dimensões, é necessário estender a definição de 4-corrente para um 5-vetor de correntes j^ν onde o mesmo pode ser descrito da seguinte forma:

$$j^\nu = (\rho, \vec{j}, j_s). \quad (2.7)$$

¹ Prezado leitor, guarde bem esses números (3 equações não-homogêneas e 4 equações homogêneas) pois esta estrutura nos será útil mais adiante.

Para se avaliar a propagação no vácuo (sem fontes), precisamos passar estas equações (2.5) e (2.6) para o espaço dos momenta. Portanto, ficaríamos com o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \cdot \vec{k} - k_s b = 0, \\ \frac{1}{c^2} \omega \vec{E} - \vec{B} \times \vec{k} - k_s \vec{e} = \vec{0}, \\ \frac{1}{c^2} (-\omega b) + \vec{k} \cdot \vec{e} = 0, \\ \omega \vec{B} + \vec{E} \times \vec{k} = \vec{0}, \\ -\omega \vec{e} + \vec{k} b + k_s \vec{E} = \vec{0}, \\ \vec{e} \times \vec{k} + k_s \vec{B} = \vec{0}, \\ \vec{B} \cdot \vec{k} = 0, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

onde $|\vec{\kappa}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + k_s^2}$ ou $\vec{\kappa}^2 = \vec{k}^2 + k_s^2$.

Pode-se mostrar que tal conjunto de expressões, na verdade, descrevem um sistema com 3 graus de liberdade físicos com os quais se pode descrever todos os outros campos mediante apenas do vetor \vec{E} , por exemplo. Em outras palavras, bastaria termos a informação dada pelo vetor \vec{E} que poderíamos obter os outros campos do modelo, \vec{B} , \vec{e} ou b . Na próxima seção, vamos tratar de obter o tensor de energia-momentum.

2.3 Tensor de Energia-momentum

Seja a equação de Maxwell com fontes, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. Podemos saturar o índice livre desta equação multiplicando de ambos os lados por $F_{\nu\kappa}$ e após alguns desenvolvimentos algébricos, obtemos a seguinte expressão:

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\kappa = j^\nu F_{\nu\kappa}. \quad (2.9)$$

onde $\Theta^\mu{}_\kappa = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\kappa} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\kappa F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$.

Esta equação expressa de maneira compacta as Equações de Continuidade que os campos do modelo estão sujeitos. Antes de identificarmos estas equações de continuidade de uma forma mais explícita, vamos decompor as componentes do tensor $\Theta^\mu{}_\kappa$ considerando, em cada caso, sua interpretação física.

Partindo de $\Theta^\mu{}_\kappa = F^{\mu\alpha}F_{\alpha\kappa} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\kappa F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, e avaliando cada conjunto de componentes em separado, temos:

- quando $\mu = i$ e $\kappa = j$, obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta^i{}_j &= F^{i\nu}F_{\nu j} + \frac{1}{4}\delta_j^i F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^i{}_j &= E_i E_j + B_i B_j - e_i e_j - \frac{1}{2}\delta_j^i (E^2 + B^2 + b^2 - e^2),\end{aligned}\tag{2.10}$$

que é interpretado como um “Tensor de tensões”² dos campos e representa, em geral, o fluxo de momentum na direção de i através da superfície j . Em outras palavras, os termos de índices diferentes ($i \neq j$) medem a tensão de cisalhamento no campo; já os termos com índices iguais ($i = j$) medem a pressão em cada uma das direções.

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta^0{}_4 &= F^{0\nu}F_{\nu 4} + \frac{1}{4}\delta_4^0 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^0{}_4 &= \vec{E} \cdot \vec{e},\end{aligned}\tag{2.11}$$

que é interpretada como um novo tipo de “Densidade de momentum-s” dos campos na direção da dimensão extra.

- quando $\mu = i$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta^i{}_4 &= F^{i\nu}F_{\nu 4} + \frac{1}{4}\delta_4^i F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^i{}_4 &= -(b\vec{E} + \vec{e} \times \vec{B})_i,\end{aligned}\tag{2.12}$$

² conhecido como Stress Tensor

que é interpretada como um novo termo de tensão entre os campos mas agora considerando o fluxo de momentum na direção de i através da superfície 4, referente a nossa dimensão extra a qual batizamos de s .

- quando $\mu = 4$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta^4{}_4 &= F^{4\nu} F_{\nu 4} + \frac{1}{4} \delta_4^4 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ \Theta^4{}_4 &= -\frac{1}{2}(E^2 - B^2 + e^2 - b^2)\end{aligned}\tag{2.13}$$

que é interpretada como uma nova “*densidade de pressão*” na direção de nossa dimensão extra s . Note, na expressão geral do tensor, a presença do termo $\Theta^4{}_4$ que pode agregar uma pressão negativa ao sistema, dado que ele não se apresenta como uma grandeza positiva definida.

Na próxima seção, apresentaremos como as equações de continuidade se revelam no cenário (1+4)D do Eletromagnetismo de Maxwell com importantes relações como as versões 5-D do Teorema de Poynting e da Força de Lorentz, além de outras expressões que não possuem nada "comparável" na formulação 4-dimensional.

2.3.1 Equações de Continuidade.

O tensor de energia-momentum, como vimos no início da seção anterior, permite escrever as equações de continuidade do eletromagnetismo de Maxwell de uma forma bastante compacta como na equação (2.9).

Teorema de Poynting

O teorema de Poynting é uma afirmação sobre a conservação de energia para o campo eletromagnético de Maxwell. Ele relaciona a taxa de variação temporal da densidade de energia ao fluxo de energia à razão na qual os campos realizam

trabalho. No nosso estudo do Eletromagnetismo 5D, esse teorema é sumarizado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial s}\xi = -\vec{j} \cdot \vec{E} + j_s b, \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(E^2 + B^2 + b^2 + e^2), \\ \vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e}, \\ \xi &= -\vec{E} \cdot \vec{e}. \end{aligned}$$

sendo \vec{S} o novo Vetor de Poynting representando o fluxo de energia, \vec{j} a densidade de corrente e \vec{E} o campo elétrico, além de u que é a densidade de energia eletromagnética.

Nova Força de Lorentz e Conservação de Momento

A Força de Lorentz é uma força que atua em uma carga pontual devido ao campo eletromagnético. No mundo 5-dimensional, esta força é extraída da seguinte lei de conservação:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial s} = -\rho \vec{E} - \vec{j} \times \vec{B} + j_s \vec{e}, \quad (2.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e}, \\ \sigma &= \Theta^i_j, \\ \vec{\chi} &= (b\vec{E} + \vec{e} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Nesse cenário, 5D, surge ainda uma terceira expressão que congrega a conservação de momentos escalares.

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\chi} + \frac{\partial}{\partial s}\Omega = -\rho b + \vec{j} \cdot \vec{e} \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned}\xi &= -\vec{E} \cdot \vec{e}, \\ \Omega &= -\frac{1}{2}(E^2 - B^2 - b^2 + e^2).\end{aligned}$$

Nesta seção, pudemos verificar que o conteúdo do campo de Maxwell está no vetor \vec{E} . Além disso, pudemos obter as expressões das equações de continuidade que o modelo nos fornece. Na próxima seção, trabalharemos a Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em 5D, ou seja, faremos a formulação do Eletromagnetismo considerando que os potenciais sejam descritos por tensores de rank-2, $B^{\mu\nu}$, ao invés do potencial de rank-1, A^μ , da formulação de Maxwell. Veremos que podemos contabilizar também 3 graus de liberdade físicos para a 2-forma de gauge sinalizando, portanto, a presença de alguma forma de equivalência entre as duas formulações (Maxwell 5D e Kalb-Ramond 5D).

2.4 A Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em (1+4)Dimensões

Nesta seção faremos a formulação do Eletromagnetismo considerando, desta vez, que os potenciais sejam descritos por tensores de rank-2, $B^{\mu\nu}$, ao invés do potencial de rank-1, A^μ , que analisamos na seção anterior.

Como motivação principal desta seção, constata-se em 5D que o campo vetorial e o campo tensorial (de rank-2) de gauge descrevem ambos 3 graus de liberdade físicos. Na seção anterior, através das equações de Maxwell em 5D, pudemos verificar que o conteúdo do campo de Maxwell está no vetor \vec{E} . Nesta seção, trabalharemos a Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em 5D e poderemos contabilizar também 3 graus de liberdade físicos para a 2-forma de gauge.

A questão que se abre é se estes dois campos são, ou não, equivalentes do ponto-de-vista da descrição do fenômeno eletromagnético. Isto nos proporciona a possibilidade de uma discussão referente a qual seria a melhor maneira de se descrever o Eletromagnetismo num Universo 5-dimensional.

Descreveremos o campo tensorial de gauge em 5D e concluiremos a seção mostrando que é possível estabelecer uma equivalência entre as descrições de Maxwell e Kalb-Ramond no caso da radiação eletromagnética no vácuo. A coincidência de se ter o mesmo número de graus de liberdade físicos é apenas o ponto-de-partida que motiva o estudo, pois, na verdade, o campo vetorial de gauge possui $(D - 2)$ graus de liberdade físicos em D dimensões. Ao passo que um campo de gauge tensorial de rank-2 apresenta $\frac{1}{2}(D-2)(D-3)$ de modo que esses números se igualem apenas quando $D = 5$. Com base nisso, procuramos evidenciar que existe um mapeamento de uma formulação para outra; é isto que nos comprometemos a realizar nesta seção.

O campo de Kalb-Ramond $B^{\mu\nu}$ [19, 20, 21, 22] é um campo que se transforma como uma 2-forma, i.e., um tensor anti-simétrico de dois índices. Ele generaliza o potencial eletromagnético A^μ e tem dois índices ao invés de um. A diferença está relacionada ao fato de que o potencial eletromagnético, A^μ , é integrado sobre as linhas-de-mundo unidimensional de partículas para obter sua contribuição à ação, enquanto que, o campo de Kalb-Ramond deve ser integrado sobre as superfícies-de-mundo bidimensional da corda.

O Lagrangiano do eletromagnetismo de Kalb-Ramond é dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} G^{\mu\nu\kappa} G_{\mu\nu\kappa} \quad (2.17)$$

onde $G^{\mu\nu\kappa}$, a intensidade de campo para o campo de Kalb-Ramond, é dada por $\partial^\mu B^{\nu\kappa} + \partial^\nu B^{\kappa\mu} + \partial^\kappa B^{\mu\nu}$.

Equações de movimento do campo

Analogamente ao que fizemos na seção anterior, expressando as equações de movimento com fonte $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}$, assim como as equações homogêneas $\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0$ em termos de suas componentes no cenário das $(1+4)D$, obteremos as equações,

correspondentes à formulação para o campo de Kalb-Ramond. Portanto, temos:

$$\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0 \implies \begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathcal{W}} - \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{B} = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{W}} + \nabla \times \vec{\mathcal{Z}} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{E}} = \vec{0}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa} \implies \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{Z}} - \nabla \times \vec{\mathcal{W}} = \vec{m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} + \nabla \mathcal{B} + \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{W}} = \vec{Q}, \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{Z}} = \vec{l}, \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{Z}} = \zeta. \end{cases} \quad (2.19)$$

Note que, conforme era de se esperar, obtivemos sete equações, sendo que destas, quatro têm fontes, enquanto que as outras três são homogêneas. Portanto, podemos verificar que obtivemos a estrutura “inversa” em relação à homogeneidade obtida na seção anterior (ver equações (2.5) e (2.6)), i.e., quatro equações não-homogêneas e três equações homogêneas.

Vale observar que a estrutura de correntes obtida no caso de Maxwell, discutido no capítulo 2, não é tão rica quanto a da formulação de Kalb-Ramond uma vez que ρ e \vec{j} constituem um 4-vetor no mundo de $(1+3)D$, com j_s sendo uma fonte escalar. Enquanto que, no caso de Kalb-Ramond, há uma corrente 4-vetorial $(j_s; \vec{m})$ e um tensor de rank-2 $(\vec{l}; \vec{Q})$.

Passando as equações (2.18) e (2.19) para o espaço dos momenta, ficaríamos

com o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{W}} \cdot \vec{k} - k_s \mathcal{B} = 0, \\ \omega \vec{\mathcal{W}} - \vec{\mathcal{Z}} \times \vec{k} - k_s \vec{\mathcal{E}} = \vec{0}, \\ -\omega \mathcal{B} + \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0, \\ \omega \vec{\mathcal{Z}} + \vec{\mathcal{W}} \times \vec{k} = \vec{0}, \\ -\omega \vec{\mathcal{E}} + \vec{k} \mathcal{B} + k_s \vec{\mathcal{W}} = \vec{0}, \\ \vec{\mathcal{E}} \times \vec{k} + k_s \vec{\mathcal{Z}} = \vec{0}, \\ \vec{\mathcal{Z}} \cdot \vec{k} = 0. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Mais uma vez, pode-se mostrar que tal conjunto de expressões, na verdade, descreve um sistema com 3 graus de liberdade físicos por meio do vetor $\vec{\mathcal{E}}$ de modo que apenas a informação contida no vetor $\vec{\mathcal{E}}$ nos permite obter o comportamento dos outros campos, $\vec{\mathcal{Z}}$, $\vec{\mathcal{W}}$ ou \mathcal{B} . Na próxima seção, vamos tratar de obter o tensor de energia-momentum, agora, para a formulação de Kalb-Ramond.

Tensor de Energia-momentum

Seja a equação de Kalb-Ramond com fontes, $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}$. Podemos saturar o índice livre multiplicando por $G_{\mu\nu\lambda}$ de ambos os lados e após alguns desenvolvimentos obtemos a seguinte expressão:

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\kappa = j^{\mu\nu} G_{\mu\nu\lambda}, \quad (2.21)$$

onde $\Theta^\mu{}_\kappa = G^{\mu\nu\kappa} G_{\nu\kappa\lambda} - \frac{1}{6} \delta_\lambda^\mu G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma}$.

Analogamente ao que foi exposto na seção anterior, vamos explicitar as componentes do tensor $\Theta^\mu{}_\kappa$. Vale a pena atentar para o fato de que estamos considerando nesta formulação que a interpretação física atribuída a cada componente é a mesma que aquela dada na seção anterior para cada uma das componentes do tensor.

Portanto, partindo de $\Theta^\mu{}_\kappa = G^{\mu\nu\kappa}G_{\nu\kappa\lambda} - \frac{1}{6}\delta_\lambda^\mu G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma}$, e avaliando cada componente em separado, temos:

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 0$:

$$\Theta^0{}_0 = \mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2; \quad (2.22)$$

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = i$:

$$\Theta^0{}_i = 2[(\vec{\mathcal{W}} \times \vec{\mathcal{Z}})_i + \mathcal{B}\vec{\mathcal{E}}_i]; \quad (2.23)$$

- quando $\mu = i$ e $\kappa = j$:

$$\Theta^i{}_j = 2\mathcal{W}^i\mathcal{W}^j + 2\mathcal{Z}^i\mathcal{Z}^j - 2\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \delta_j^i(\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2); \quad (2.24)$$

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 4$:

$$\Theta^0{}_4 = 2\vec{\mathcal{W}} \cdot \vec{\mathcal{E}}; \quad (2.25)$$

- quando $\mu = i$ e $\kappa = 4$:

$$\Theta^i{}_4 = -2(\mathcal{B}\vec{\mathcal{W}} + \vec{\mathcal{Z}} \times \vec{\mathcal{E}})_i. \quad (2.26)$$

E finalmente, quando $\mu = 4$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\Theta^4{}_4 = -(\mathcal{W}^2 - \mathcal{Z}^2 - \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2) \quad (2.27)$$

que é interpretada como uma nova “densidade de pressão” na direção de nossa dimensão extra, $x^4 \equiv s$. Note a presença do termo $\Theta^4{}_4$ que, assim como se viu em (2.13), também pode agregar uma pressão negativa ao sistema. Na próxima seção, assim como fizemos na seção anterior, apresentaremos como as equações de continuidade do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond em (1+4)D se revelam. Obtem-se importantes relações como os análogos 5-dimensional do Teorema de Poynting e da Força de Lorentz, além de expressões que não possuem nada parecido na formulação 4-dimensional do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond.

Leis de Conservação.

O tensor de energia-momentum permite escrever as leis de conservação do eletromagnetismo de uma forma bastante compacta como na eq.(2.21) e desta expressão podemos extrair três relações que se seguem:

Teorema de Poynting

No nosso estudo do Eletromagnetismo de Kalb- Ramond 5D o teorema de Poynting é sumarizado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial \xi}{\partial s} = -\vec{Q} \cdot \vec{\mathcal{E}} - \vec{m} \cdot \vec{\mathcal{Z}}, \quad (2.28)$$

onde S é o “Vetor de Poynting” representando o fluxo de energia, \vec{m} é uma densidade de corrente e $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{Z}}$ são os campos que definimos anteriormente, além de u que é a “densidade de energia” eletromagnética. Onde estes são dados explicitamente por:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2), \\ \vec{S} &= -[(\vec{\mathcal{W}} \times \vec{\mathcal{Z}}) + \mathcal{B} \vec{\mathcal{E}}], \\ \xi &= -\vec{\mathcal{W}} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \\ Q^k &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} q^{ij}. \end{aligned}$$

“Força de Lorentz” e Conservação de Momento

Em nosso mundo 5-dimensional de Kalb-Ramond, as leis de conservação ficam da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial s} = \vec{l} \times \vec{\mathcal{E}} - \zeta \vec{\mathcal{Z}} + \vec{Q} \mathcal{B} + \vec{m} \times \vec{\mathcal{W}}, \quad (2.29)$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{S} &= -[\vec{\mathcal{W}} \times \vec{\mathcal{Z}} + \mathcal{B} \vec{\mathcal{E}}] \\ \sigma &= \mathcal{W}^i \mathcal{W}^j + \mathcal{Z}^i \mathcal{Z}^j - \mathcal{E}^i \mathcal{E}^j - \frac{1}{2} \delta_j^i (\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2) \\ \vec{\chi} &= \mathcal{B} \vec{\mathcal{W}} + \vec{\mathcal{Z}} \times \vec{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

Neste cenário, surge ainda uma terceira expressão que congrega a conservação de momentos escalares:

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\chi} + \frac{\partial}{\partial s} \Omega = -\vec{l} \cdot \vec{\mathcal{Z}} - \vec{Q} \cdot \vec{\mathcal{W}} \quad (2.30)$$

onde

$$\begin{aligned}\xi &= -\vec{\mathcal{W}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{\chi} &= (\mathcal{B} \vec{\mathcal{W}} + \vec{\mathcal{Z}} \times \vec{\mathcal{E}}) \\ \Omega &= -\frac{1}{2}[(\mathcal{W}^2 - \mathcal{Z}^2 - \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2)]\end{aligned}$$

2.5 Comparação das formulações

Comparando as duas formulações apresentadas, percebemos a presença de uma correspondência direta. Em outras palavras, se verifica um “*matching*” entre os campos das duas formulações. Esquemáticamente, queremos dizer o seguinte:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{W}} &\leftrightarrow \vec{E} \\ \mathcal{B} &\leftrightarrow b \\ \vec{\mathcal{Z}} &\leftrightarrow \vec{B} \\ \vec{\mathcal{E}} &\leftrightarrow \vec{e}\end{aligned} \quad (2.31)$$

Quando se faz as correspondências entre as equações das duas teorias percebe-se o mesmo padrão. Na primeira tabela, podemos verificar uma correlação exata entre o lado esquerdo das equações de *Kalb-Ramond com fontes* com o lado esquerdo das equações de *Maxwell homogêneas*.

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa} \leftrightarrow \partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^\kappa{}_\mu + \partial^\kappa F_\mu{}^\nu = 0$$

Tabela 1 –

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{Z}} - \nabla \times \vec{\mathcal{W}} = \vec{m} &\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} + \nabla \mathcal{B} + \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{W}} = \vec{Q} &\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{e} + \nabla b + \frac{\partial}{\partial s} \vec{E} = \vec{0} \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{Z}} = \vec{l} &\leftrightarrow \nabla \times \vec{e} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{B} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{Z}} = \zeta &\leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

Na segunda tabela, também verifica-se a mesma correspondência entre o lado esquerdo das equações de *Kalb-Ramond homogêneas* com o lado esquerdo das equações de *Maxwell com fontes*. A razão para essa estrutura vem da equivalência entre o tensor eletromagnético de uma teoria e o dual do tensor eletromagnético da outra teoria, ou seja: $F^{\mu\nu} \sim \tilde{G}^{\mu\nu}$; $\tilde{F}^{\mu\nu\kappa} \sim G^{\mu\nu\kappa}$.

$$\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0 \leftrightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Tabela 2 –

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{W}} - \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{B} = 0 &\leftrightarrow \frac{1}{c} [(\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{\partial b}{\partial s}] = c\rho \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{W}} + \nabla \times \vec{\mathcal{Z}} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{E}} = \vec{0} &\leftrightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{e} = \vec{j} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 &\leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} b + \nabla \cdot \vec{e} = j_s \end{aligned}$$

Conclusões Preliminares

Neste capítulo, pudemos constatar que, no cenário 5-dimensional, a estrutura de correntes que a formulação do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond nos traz é mais rica que a do Eletromagnetismo de Maxwell.

Também chamamos atenção para uma estrutura de correspondência observadas entre as equações de movimento que as duas teorias nos trazem e que podemos sumarizar da seguinte maneira:

- Kalb-Ramond com fontes \sim Maxwell homogêneas;

- Kalb-Ramond homogêneas \sim Maxwell com fontes;
- Razão: $F^{\mu\nu} \sim \tilde{G}^{\mu\nu}$; $\tilde{F}^{\mu\nu\kappa} \sim G^{\mu\nu\kappa}$.

O próxima seção tem como objetivo comparar adotando um esquema de redução dimensional as teorias eletromagnéticas que aparecem em (1+3)D a partir dos modelos apresentados nas seções anteriores.

As Eletrodinâmicas Geradas em (1+3)D.

O objetivo dessa seção é comparar as teorias eletromagnéticas que aparecem em (1+3)D a partir dos modelos descritos previamente. A idéia é pensar que, no mundo 5-dimensional, a simetria de gauge determina os campos e, num esquema mais simplista, estes campos não dependem da coordenada ortogonal à hipersuperfície 4-dimensional, que é o nosso mundo de (1+3)D. Entretanto, os campos extra à formulação de Maxwell deixam a sua marca nas 4 dimensões e chegamos a formulações estendidas do Eletromagnetismo, buscando identificar a origem do fenômeno eletromagnético em 4D a partir da premissa de que vivemos numa fronteira de um mundo 5-dimensional.

Redução dimensional

Nessa seção adotaremos um esquema de redução dimensional a fim de comparar a projeção das teorias eletromagnéticas (1+4)D que aparecem em (1+3)D. O procedimento que utilizaremos é conhecido como redução “à la Scherk-Schwarz” [23, 24] e considera que todos os potenciais e campos não dependem da coordenada $x^4 \equiv s$. Em outras palavras, consideramos que $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ em cada uma das equações sendo φ um campo de qualquer ordem.

Nesse esquema de redução dimensional os potenciais assumem a seguinte forma na teoria de Maxwell:

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \nabla\Phi\right) &\mapsto \vec{E}, \\
 \nabla \times \vec{A} &\mapsto \vec{B}, \\
 \frac{\partial}{\partial t}\psi &\mapsto b, \\
 -\nabla\psi &\mapsto \vec{e}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ao passo que na teoria de Kalb-Ramond, os potenciais assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{Y} - \nabla \times \vec{X} &\mapsto \vec{\mathcal{E}}, \\
 -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{R} - \nabla S &\mapsto \vec{\mathcal{Z}}, \\
 \nabla \times \vec{X} &\mapsto \vec{\mathcal{W}}, \\
 \nabla \cdot \vec{Y} &\mapsto \mathcal{B}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Aplicação da Redução dimensional nas duas teorias.

O sistema de equações que se segue disposto mais a esquerda corresponde ao conjunto de equações de movimento do campo obtido na teoria de Maxwell em (1+4)D e discutido no Capítulo 2 desse texto. Do lado direito, separamos esse conjunto de equações em dois setores após passarem pelo procedimento de redução dimensional que descrevemos no início desta seção.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{\partial b}{\partial s} = c^2 \rho \\
 \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \\
 \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
 -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial s}\vec{e} = \vec{j} \\
 \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}b + \nabla \cdot \vec{e} = j_s \\
 \nabla \times \vec{e} - \frac{\partial}{\partial s}\vec{B} = \vec{0} \\
 \frac{\partial}{\partial t}\vec{e} + \nabla b + \frac{\partial}{\partial s}\vec{E} = \vec{0}
 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Maxwell}_- \left\{ \begin{array}{l}
 \nabla \cdot \vec{E} = c^2 \rho \\
 \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\
 \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
 \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}
 \end{array} \right. \\
 \text{Extra-Maxwell}_- \left\{ \begin{array}{l}
 \nabla \cdot \vec{e} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}b + j_s \\
 \nabla \times \vec{e} = \vec{0} \\
 \nabla b = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{e}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

O sistema de equações que se segue disposto a esquerda corresponde ao conjunto de equações de movimento obtido na teoria de Kalb-Ramond em (1+4)D e discutido na seção seguinte desse texto. Do lado direito, separamos esse conjunto de equações em dois setores após passarem pelo procedimento de redução dimensional.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{\mathcal{W}} - \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{B} = 0 \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{Z}} - \nabla \times \vec{\mathcal{W}} = \vec{m} \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{Z}} = \zeta \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{W}} + \nabla \times \vec{\mathcal{Z}} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{E}} = \vec{0} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{Z}} = \vec{k} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} + \nabla \mathcal{B} + \frac{\partial}{\partial s} \vec{\mathcal{W}} = \vec{q} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Extra-K.R.}_- \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{\mathcal{Z}} = \zeta \\ \nabla \times \vec{\mathcal{Z}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{W}} \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{W}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{W}} = -\vec{m} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{Z}} \end{array} \right. \\ \text{K.R.}_- \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B} \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \vec{k} \\ \nabla \mathcal{B} = \vec{q} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Como se pode perceber o setor extra da teoria de Kalb-Ramond após passar pelo procedimento de redução dimensional é idêntico ao setor principal da teoria de Maxwell considerando as devidas renomeações ($\vec{E} \mapsto \vec{\mathcal{Z}}; -\vec{B} \mapsto \vec{\mathcal{W}}; c^2 \rho \mapsto \zeta; \vec{m} \mapsto \vec{j}$).

Similarmente, o setor extra da teoria de Maxwell, após também passar pela redução dimensional, se apresenta idêntico ao setor principal da teoria de Kalb-Ramond considerando que, neste caso, aplica-se um procedimento de truncamento das correntes das duas teorias, ou seja, considera-se simultaneamente $\vec{l} = \vec{0}, \vec{q} = \vec{0}$ e $j_s = 0$. Deve-se observar que tal procedimento não viola a simetria de Lorentz pois, $j^{\nu\kappa}$ é invariante de Lorentz o que significa dizer, em outras palavras, que mesmo sob o ponto-de-vista de observadores diferentes as correntes serão nulas. Como consequência, temos um setor desacoplado da matéria, ou seja, puramente energético.

Pela comparação entre os resultados obtidos, observa-se que a redução do Eletromagnetismo de Maxwell de 5D para 4D reproduz o eletromagnetismo maxwelliano ordinário mais um escalar (um Klein-Gordon genuíno) e não gera o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond em (1+3)D (vide Apêndice B). É importante observar que o escalar que aparece em 4D vindo de Maxwell em 5D é um Klein-Gordon genuíno, diferente do Kalb-Ramond em 4D. O Kalb-Ramond em 4D é também um escalar, mas não do tipo Klein-Gordon.

Por outro lado, percebe-se que o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D como uma estrutura mais rica de correntes dadas pelos vetores \vec{l} e \vec{q} . Soma-se a isso o fato dele englobar seu concorrente direto, o caso do Eletromagnetismo de Maxwell reduzido de 5D para 4D. Sendo, portanto, o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D uma descrição mais geral e que consideramos por esse motivo mais interessante.

Redução dimensional no tensor de energia-momento.

Se aplicarmos o procedimento de redução dimensional no tensor de energia-momento $\Theta^\mu{}_\kappa$ das duas teorias obteríamos com o seguinte :

$$\Theta^\mu{}_\kappa = \begin{bmatrix} \Theta^0_0 & \Theta^0_1 & \Theta^0_2 & \Theta^0_3 & \Theta^0_4 \\ \Theta^1_0 & \Theta^1_1 & \Theta^1_2 & \Theta^1_3 & \Theta^1_4 \\ \Theta^2_0 & \Theta^2_1 & \Theta^2_2 & \Theta^2_3 & \Theta^2_4 \\ \Theta^3_0 & \Theta^3_1 & \Theta^3_2 & \Theta^3_3 & \Theta^3_4 \\ \Theta^4_0 & \Theta^4_1 & \Theta^4_2 & \Theta^4_3 & \Theta^4_4 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \Theta^0_0 & \Theta^0_1 & \Theta^0_2 & \Theta^0_3 \\ \Theta^1_0 & \Theta^1_1 & \Theta^1_2 & \Theta^1_3 \\ \Theta^2_0 & \Theta^2_1 & \Theta^2_2 & \Theta^2_3 \\ \Theta^3_0 & \Theta^3_1 & \Theta^3_2 & \Theta^3_3 \end{bmatrix}$$

Onde, para o caso do Eletromagnetismo de Maxwell:

$$\begin{aligned} \Theta^0_0 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{E^2}{c^2} \right) + B^2 + \left(\frac{b^2}{c^2} \right) + e^2 \right] \\ \Theta^0_i &= -\frac{1}{c} \left[(\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e} \right]_i \\ \Theta^i_j &= \frac{1}{c^2} E_i E_j + B_i B_j - e_i e_j - \frac{1}{2} \delta_j^i \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 + \frac{b^2}{c^2} - e^2 \right) \end{aligned}$$

Enquanto que no caso do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond, obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta^0_0 &= \mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2 \\ \Theta^0_i &= 2[(\vec{W} \times \vec{Z}) + \mathcal{B}\vec{E}] \\ \Theta^i_j &= 2\mathcal{W}^i\mathcal{W}^j + 2\mathcal{Z}^i\mathcal{Z}^j - 2\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \delta_j^i(\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)\end{aligned}$$

Agora, aplicando procedimento de truncamento da corrente no 5-vetor corrente j^ν definido na seção e nas Leis de Conservação obtidas nessa mesma seção chegamos ao seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla \cdot \vec{S} &= -\vec{j} \cdot \vec{E} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma &= -\rho\vec{E} - \vec{j} \times \vec{B} \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\chi} &= -\rho b + \vec{j} \cdot \vec{e}\end{aligned}$$

onde

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{E^2}{c^2}\right) + B^2 + \left(\frac{b^2}{c^2}\right) + e^2\right] \\ \vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e} \\ \xi &= -\vec{E} \cdot \vec{e} \\ \sigma &= \frac{1}{c^2}E_iE_j + B_iB_j - e_ie_j - \frac{1}{2}\delta_j^i\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 + \frac{b^2}{c^2} - e^2\right) \\ \vec{\chi} &= \left(\frac{1}{c^2}b\vec{E} + \vec{e} \times \vec{B}\right) \\ \Omega &= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{E^2}{c^2}\right) - B^2 - \left(\frac{b^2}{c^2}\right) + e^2\right] \end{aligned} \right.$$

Se aplicarmos o procedimento de truncamento de correntes no tensor de correntes $j^{\nu\kappa}$ obteríamos com o seguinte resultado:

$$j^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & l_x & l_y & l_z & \zeta \\ -l_x & 0 & q_z & -q_y & m_x \\ -l_y & -q_z & 0 & q_x & m_y \\ -l_x & q_y & -q_x & 0 & m_z \\ -\zeta & -m_x & -m_y & -m_z & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & l_x & l_y & l_z \\ -l_x & 0 & q_z & -q_y \\ -l_y & -q_z & 0 & q_x \\ -l_x & q_y & -q_x & 0 \end{bmatrix}$$

E em seguida, aplicando a redução dimensional nas Leis de Conservação obtidas no Capítulo 3 obtemos o seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \nabla \cdot \vec{S} &= -\vec{Q} \cdot \vec{\mathcal{E}} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma &= \vec{l} \times \vec{E}^j + \vec{Q} \mathcal{B} \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\chi} &= -\vec{l} \cdot \vec{Z} - \vec{Q} \cdot \vec{W} \end{aligned}$$

$$\text{onde } \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2) \\ \vec{S} &= -[(\vec{\mathcal{W}} \times \vec{Z}) + \mathcal{B} \vec{\mathcal{E}}] \\ \xi &= -\vec{W} \cdot \vec{\mathcal{E}} \\ Q^k &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk}(q)^{ij} \\ \sigma &= \mathcal{W}^i \mathcal{W}^j + \mathcal{Z}^i \mathcal{Z}^j - \mathcal{E}^i \mathcal{E}^j - \frac{1}{2} \delta_j^i [\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2] \\ \vec{\chi} &= (\mathcal{B} \vec{W} + \vec{Z} \times \vec{E}) \\ \Omega &= -\frac{1}{2}[(\mathcal{W}^2 - \mathcal{Z}^2 - \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2)] \end{aligned} \right.$$

Conclusões preliminares

Sumarizamos as conclusões desse capítulo pelos seguintes itens:

- setor extra da teoria de Kalb-Ramond é idêntico ao setor principal da teoria de Maxwell.
- o setor extra da teoria de Maxwell se apresenta idêntico ao setor principal da teoria de Kalb-Ramond considerando que, neste caso, aplica-se um procedimento de truncamento das correntes das duas teorias, ou seja, considera-se simultaneamente $\vec{l} = \vec{0}$, $\vec{q} = \vec{0}$ e $j_s = 0$. Como consequência, temos um setor desacoplado da matéria, ou seja, puramente energético.
- Pela comparação entre os resultados obtidos, observa-se que a redução do Eletromagnetismo de Maxwell de 5D para 4D reproduz o eletromagnetismo

maxwelliano ordinário mais um escalar (um Klein-Gordon genuíno) e não gera o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond em (1+3)D.

- percebe-se que o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D fornece uma estrutura mais rica de correntes dadas pelos vetores \vec{l} e \vec{q} . Soma-se a isso o fato dele englobar seu concorrente direto, o caso do Eletromagnetismo de Maxwell reduzido de 5D para 4D.
- Constatamos que o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D é uma descrição mais geral.

2.6 Considerações Finais deste capítulo

A Cosmologia de branas afirma que o universo 4-dimensional (visível) está restrito a uma brana dentro de um espaço de mais alta dimensão. Em outras palavras, vivemos em 4D, na periferia de um mundo 5D. A nossa argumentação nesse trabalho, é que o fenômeno eletromagnético em 4D seja o reflexo de alguma física mais fundamental em 5D. Identificamos, então, que o objeto fundamental em 5D é a 2-forma de gauge e esta se manifesta, em nosso mundo 4-dimensional, na teoria eletromagnética usual de Maxwell, como um setor extra, determinado pelos campos \vec{E} e \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2) \\
 \vec{S} &= -\mathcal{B}\vec{E} \\
 \sigma &= -\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \frac{1}{2}\delta_j^i[\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2]
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Propomos um cenário em que o Eletromagnetismo de Maxwell seja acompanhado, como consequência das 5 dimensões, de um setor extra, desacoplado da matéria, puramente energético .

Deixamos, como passo imediatamente sucessivo a esta tese, a averiguação da hipótese que levantamos, ou seja, de que o setor extra da teoria de Maxwell em

4D possa descrever alguma parcela daquilo que são os cerca de 74% de energia escura de nosso Universo. Propomos o seguinte encaminhamento:

A partir do tensor de energia-momento do setor extra com $\vec{\mathcal{E}}$ e \mathcal{B} (2.34) estudar a sua contribuição às equações de Einstein e verificar se este setor extra pode conduzir a um modelo cosmológico com expansão acelerada. Há uma expectativa positiva em relação a este resultado. Comparando-se a pressão associada ao campo de Maxwell usual, (\vec{E}, \vec{B}) , com a pressão obtida do tensor de energia-momento do setor extra, $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{B})$, vê-se que, neste segundo caso, pode-se ter pressão negativa, o que nos encoraja a ir à frente, esperando se obter uma expansão acelerada.

3 Uma 3-forma de calibre em 5D em conexão com um possível setor escuro da Eletrodinâmica 4D.

3.1 Introdução

A possibilidade de um Universo multidimensional tem atraído crescente interesse ao longo dos anos. Atualmente, as razões para tal interesse vêm principalmente de modelos como a teoria de supercordas que é capaz de incorporar a gravitação de uma maneira confiável e natural [25].

Como consequência do panorama introduzido pela teoria das supercordas, atualmente é amplamente aceito que a estrutura do espaço-tempo é concebido como o produto de um espaço de um espaço de Anti-de Sitter 5-dimensional por uma hiperesfera 5-dimensional, ou seja, em um cenário 10-dimensional, formado pelo produto $AdS_5 \times S^5$. Portanto, adotamos o ponto-de-vista de que uma física fundamental pode ser derivada de cinco dimensões espaço-temporais e cinco dimensões internas compactificadas.

Somado a isto, a possibilidade de haver uma equivalência entre uma teoria clássica de Gravitação, definida num *bulk* 5-dimensional (espaço-temporal), e uma teoria quântica de calibre (Yang-Mills) definida na fronteira 4-dimensional correspondente foi proposta em 1997 por Maldacena [2]. Aspectos importantes da correspondência gravitação-calibre foram elaborados nos trabalhos de Gubser, Klebanov e Polyakov, and by Edward Witten [26, 4, 27].

Contudo, não iremos adotar a equivalência AdS_5/CFT_4 em seu sentido pleno. O que absorveremos da equivalência é simplesmente o ponto-de-vista de que uma Física fundamental se processa em 5D; se esta deve ser analisada especificamente

em um cenário AdS_5 ou Minkowski 5D, vai depender, na verdade, do tipo de fenômeno em questão. Aqui, consideraremos que, contanto que a escala de energia para as interações eletromagnéticas seja considerada, nós não precisamos considerar a presença de uma constante cosmológica no mundo 5-dimensional. Para a investigação que pretendemos seguir, nosso ponto de partida é de fato um espaço-tempo de Minkowski 5-dimensional.

Na verdade, no presente estudo, exploramos as consequências de uma dimensão extra [28], considerando simplesmente o espaço de Minkowski como o background espaço-temporal, dado que o efeito da curvatura do espaço de Anti-de Sitter (induzido pela constante cosmológica, que pelo modelo Lambda-CDM $10^{-47} GeV^4$ [29]) produz correções negligenciáveis frente a escala de massas e comprimentos da QED [30]. Ao negligenciar a constante cosmológica, o grupo de isometria do AdS_5 (isto é, $SO(2, 4)$) reduz ao grupo de Poincaré em cinco dimensões. Assim, consideraremos aqui um modelo para interações eletromagnéticas em um espaço de Minkowski 5-dimensional e nossa física 4-dimensional deverá emergir como resultado de um esquema de redução dimensional ao invés de um projeção holográfica.

Vale ressaltar que, se estivéssemos considerando efeitos quânticos da gravitação, não poderíamos desprezar a constante cosmológica, uma vez que do estudo da Gravitação Quântica constata-se que a constante cosmológica induz a produção de grávitons com massa de ordem Planckiana [31, 32]. Entretanto, no caso particular que estamos considerando, os grávitons não se acoplam às flutuações associadas ao elétron ou fóton devido ao fato deles serem altamente massivos, tal que, no regime energético em que a QED se processa, esses grávitons com tamanha massa (induzida pela constante cosmológica) não são excitados. Em outras palavras, no regime de validade da QED não se tem energia suficiente disponível para excitar aqueles grávitons induzidos pela constante cosmológica.

Sob esta perspectiva, neste trabalho, partimos de um modelo baseado na

associação de um potencial de 3-forma de gauge com a expansão acelerada do Universo [33]. A introdução do conceito de energia escura é na verdade uma das principais abordagens para considerar o fenômeno de um Universo em expansão acelerada [34]. Nosso modelo particular, formulado em cinco dimensões espaço-temporais, como já antecipamos, também produz, em consequência de um mecanismo de redução dimensional, o aparecimento de um bóson extra massivo e neutro no espaço de Minkowski 4-dimensional [35, 36, 37]. Isto será apresentado em detalhes na sequência. Nós estamos, de fato, interessados no termo de massa invariante de calibre que faz o papel de um termo de massa topológica misto do tipo-Chern-Simons, no sentido de que ele pode nos prover um cenário (em quatro dimensões espaço-temporais) onde uma partícula axiônica e um parafóton emergem juntos. O pseudo-escalar (áxion) e o pseudo-vetor estão unificados no mundo 5-dimensional por meio de um termo de massa topológico.

3.1.1 A relevância da 3-forma de calibre.

Em conexão com o estudo do potencial da 3-forma [33, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52], a massa do fóton é inserida a fim de buscar uma situação que seja a mais abrangente possível, i.e., capaz de explorar todas as possibilidades que a 3-forma possa oferecer. De acordo com o trabalho de Koivisto e Nunes, a 3-forma pode ser empregada na modelagem de fração da energia escura de nosso presente Universo em expansão [33]. Devemos, no entanto, apontar que a 3-forma foi inicialmente estudada apenas de maneira isolada por esses autores, avaliando somente seu termo cinético (minimamente acoplado à gravitação de Einstein) adicionado a um termo de potencial [49]. Posteriormente, a 3-forma foi reavaliada para incluir partículas pontuais [51]. Aqui, pretendemos investigar a 3-forma em associação com o campo de Maxwell, em um cenário de 5D, pela introdução de um termo topológico (misto) do tipo Chern-Simons.

Por outro lado, em um trabalho recente [53], os autores mostraram como um

campo de gauge associado a vórtices, quando acoplado a férmions carregados, induzem, por correções radiativas, um termo de massa invariante de gauge para o fóton. Ao invés de um efeito dinâmico como no trabalho supracitado [53], em nosso trabalho, esse termo de massa surge da redução dimensional de um modelo 5D com um termo de massa topológica, como será mostrado nas próximas seções.

Uma teoria de Chern-Simons 5-dimensional, em sua versão Abelian, foi recentemente utilizada por Qi, Witten e Zhang (QWZ) no contexto da modelagem dos supercondutores topológicos [3]. Como é sabido, num processo de supercondutividade, um fóton massivo precisa estar presente para acomodar o efeito Meissner, responsável pela expulsão do campo magnético do interior de materiais supercondutores. Portanto, devido à física dos supercondutores topológicos se processar em 5D, em conformidade com a formulação de QWZ, o fóton, neste caso, poderia também obter a massa através de um mecanismo de geração de massa topológica como a nossa proposta que iremos apresentar aqui.

Em suma, neste trabalho pretendemos explorar um modelo de eletrodinâmica que utiliza tanto as 3-formas quanto as 1-formas de gauge de maneira acoplada a fim de gerar campos massivos num cenário 5-dimensional. Por redução dimensional [23], chegamos a um modelo que apresenta em seu espectro um bóson vetorial massivo neutro (proveniente do mixing entre uma 1-forma e uma 3-forma de gauge) e degenerado (i.e., de mesma massa) com um escalar neutro associado ao “mixing” entre um genuíno campo escalar e um campo vetorial de natureza longitudinal. Este trabalho segue o esquema abaixo.

Na seção 3.2, apresentamos o modelo que adotamos para prosseguir a nossa investigação. Nós o dividimos em duas subseções nas quais nós obtemos as equações de campo, discutimos as leis de conservação e realizamos a redução dimensional do modelo a 4D. Na seção seguinte, 3.3, nós adicionamos férmions com carga de simetria $U(1)$ a ação do modelo em 5D discutido na seção anterior, 3.2. Nós obtemos as correntes fermiônicas conservadas em 5D e as conectamos ao pseudo-

tensor corrente do trabalho [53]. O acoplamento do modelo à gravitação em 5D também é considerado. A ação 5-dimensional é reduzida para 4D e nós calculamos os propagadores do setor bosônico para coletar o espectro de excitações. Como uma aplicação, também são trabalhados potenciais gerados pela intermediação dos campos bosônicos trocados por correntes externas. Para finalizar, apresentamos as considerações e conclusões finais na seção 3.4.

3.2 Descrição do Modelo

3.2.1 Um campo 3-forma acoplado a eletrodinâmica de Maxwell em 5D.

Tomando como certa a importância de entender física em nosso mundo 4-dimensional a partir de um física mais fundamental 5-dimensional, aqui, nos concentramos no estudo de um modelo eletrodinâmico específico em 5 dimensões visando as possíveis consequências que possam produzir no espaço tempo 4-dimensional.

Nesta seção apresentamos o modelo que consiste de uma densidade de Lagrangeano contendo os termos cinéticos para cada campo de gauge (um vetorial e um tensorial de rank-3) além de um termo de *mixing* entre eles. Este termo de *mixing* é capaz de garantir que a massa da partícula associada seja independente das características métricas do espaço. Ele é conhecido na literatura como um termo topológico [54, 55, 56]. Exibimos também as equações de campo, as identidades de Bianchi, as equações de continuidade e as leis de conservação.

Considere a ação em 5D cuja densidade de Lagrangeano é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \alpha H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} + \beta \epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}}A_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}}C_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}}, \quad (3.1)$$

onde $A_{\bar{\mu}}$ é o campo de Maxwell e $C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}}$ é a 3-forma de calibre, um dos elementos centrais deste estudo. A notação dos índices em 5 dimensões é $\bar{\mu} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. O tensor $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ é a intensidade de campo eletromagnético usual, e o tensor $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$ é a intensidade de campo, completamente anti-simétrica, associada com o campo

3-forma, $C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}}$:

$$H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = \partial_{\bar{\mu}}C_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} - \partial_{\bar{\nu}}C_{\bar{\lambda}\bar{\kappa}\bar{\mu}} + \partial_{\bar{\kappa}}C_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\lambda}}C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} . \quad (3.2)$$

Os parâmetros α e β são reais. É simples verificar que o parâmetro β tem dimensão de massa. A ação definida através do Lagrangeano (3.1) é invariante sob as transformações de gauge abelianas em 5D:

$$A_{\bar{\mu}} \longmapsto A'_{\bar{\mu}} = A_{\bar{\mu}} + \partial_{\bar{\mu}}\Lambda , \quad (3.3a)$$

$$C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} \longmapsto C'_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} = C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} + \partial_{\bar{\mu}}\xi_{\bar{\nu}\bar{\kappa}} + \partial_{\bar{\nu}}\xi_{\bar{\kappa}\bar{\mu}} + \partial_{\bar{\kappa}}\xi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} , \quad (3.3b)$$

onde Λ e $\xi_{\mu\nu}$ são funções reais e $\xi_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ é um tensor anti-simétrico. A transformação (3.3a) é a já conhecida da eletrodinâmica, $U(1)_{A_{\bar{\mu}}}$, enquanto que (3.3b) é a versão anti-simetrizada da transformação de calibre para um tensor de rank-3, $U(1)_{C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}}}$. Assim, a ação é dita invariante por $U(1)_{A_{\bar{\mu}}} \otimes U(1)_{C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}}}$. O Lagrangeano (3.1) nos fornece as equações de campo

$$\partial_{\bar{\mu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + 6\beta\tilde{H}^{\bar{\nu}} = 0 , \quad (3.4a)$$

$$8\alpha \partial_{\bar{\mu}}H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} - \beta\tilde{F}^{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = 0 , \quad (3.4b)$$

onde as relações entre os tensores duais $\tilde{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}}$ e $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ são dadas pelas expressões (3.5a)

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = -\frac{1}{3!} \epsilon_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tilde{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} \quad \text{e} \quad \tilde{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} F^{\bar{\lambda}\bar{\rho}} . \quad (3.5a)$$

Assim como as relações entre $\tilde{H}^{\bar{\mu}}$ and $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$ são dadas por (3.5b)

$$H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = \epsilon_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} \tilde{H}^{\bar{\rho}} \quad \text{e} \quad \tilde{H}_{\bar{\mu}} = \frac{1}{4!} \epsilon_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} H^{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} . \quad (3.5b)$$

Por sua vez, as identidades de Bianchi associadas aos campos $F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ e $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$ são, respectivamente

$$\partial_{\bar{\mu}}F_{\bar{\nu}\bar{\kappa}} + \partial_{\bar{\nu}}F_{\bar{\mu}\bar{\kappa}} + \partial_{\bar{\kappa}}F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0 , \quad (3.6a)$$

$$\partial_{\bar{\mu}} H_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} + \partial_{\bar{\nu}} H_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\mu}} + \partial_{\bar{\kappa}} H_{\bar{\nu}\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\mu}} + \partial_{\bar{\lambda}} H_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\rho}\bar{\mu}} + \partial_{\bar{\rho}} H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = 0 . \quad (3.6b)$$

A expressão (3.6b) também pode ser colocada de modo mais compacto em termos do dual de $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$:

$$\partial_{\bar{\mu}} \tilde{H}^{\bar{\mu}} = 0 . \quad (3.7)$$

As equações de campo (3.4a) e (3.4b) estão acopladas e devemos necessariamente desacoplá-las a fim de implementar o procedimento que irá revelar a massa da(s) partícula(s) associada(s) para ambos os campos. O procedimento usado para desacoplar consiste em multiplicar a equação (3.4a) por $\epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma\sigma}\partial^{\sigma}$ e proceder de forma analoga com a equação (3.4b). Desta maneira, obtemos:

$$\left(\square - \frac{3}{4\alpha}\beta^2 \right) F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0 , \quad (3.8)$$

e

$$\left(\square - \frac{3}{4\alpha}\beta^2 \right) H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = 0 . \quad (3.9)$$

Portanto, se nota de (3.8) e (3.9) que ambos os campos exibem os mesmos termos de massa, o qual é dado por $\xi = \frac{-3\beta^2}{4\alpha}$. Onde, se considera que o parâmetro α deve se restringir a um número real negativo. O tensor de energia-momentum é obtido multiplicando a equação (3.4a) por $F_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}$ e usando a seguinte relação (3.10) entre os campos duais

$$\tilde{F}^{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} H_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\alpha}} = -6F_{\bar{\nu}\bar{\alpha}} \tilde{H}^{\bar{\nu}} . \quad (3.10)$$

Em seguida, inserimos a equação (3.4b) e após a aplicação da regra de Leibnitz, obtemos

$$\begin{aligned} -\partial_{\bar{\mu}} (8\bar{\alpha} H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} H_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\alpha}}) + 8\alpha H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} \partial_{\bar{\mu}} H_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\alpha}} + \\ + \partial_{\bar{\mu}} (F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} F_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}) - F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} F_{\bar{\nu}\bar{\alpha}} = 0 . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, substituindo as identidades de Bianchi (3.6a) e (3.6b) e usando a seguinte relação

$$2F_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\mu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \partial_{\bar{\mu}}(16\alpha H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}H_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\alpha}}) + \partial_{\bar{\alpha}}(2\alpha H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}^2), \quad (3.12)$$

obtemos, portanto, a seguinte equação de continuidade

$$\partial_{\bar{\mu}}\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} = 0. \quad (3.13)$$

onde $\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}}$, tensor de energia-momento associado ao Lagrangeano (3.1), é dado por

$$\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} = -8\alpha \left(H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}H_{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\alpha}} + \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} \frac{1}{8} H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}^2 \right) + F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}F_{\bar{\nu}\bar{\alpha}} + \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} \frac{1}{4} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^2. \quad (3.14)$$

Comparando o segundo termo de $\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}}$ com o termo cinético do campo de rank-3 em (3.1), podemos fixar o valor do parâmetro $\alpha = -1/8$. Assim, nós reescrevemos a massa como $m^2 := \frac{-3\beta^2}{4\alpha}$ e, com isso, se fixa o valor do parâmetro em $\beta = m/\sqrt{6}$.

Portanto, o termo de massa topológica é dado por:

$$\Delta = \frac{m}{\sqrt{6}} \epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} A_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}}C_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}}. \quad (3.15)$$

O tensor de energia-momento é escrito em termos dos tensores intensidade de campo, então ele é naturalmente invariante sob as transformações de gauge (3.3a) e (3.3b). Ele é também simétrico.

A expressão (3.14) pode ser reescrita em termos do campo dual de $H_{\mu\nu\kappa\lambda}$ conforme expresso por (3.16):

$$\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} = 6\tilde{H}^{\bar{\mu}}\tilde{H}_{\bar{\alpha}} - \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} 3\tilde{H}_{\bar{\mu}}^2 + F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}F_{\bar{\nu}\bar{\alpha}} + \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} \frac{1}{4} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^2. \quad (3.16)$$

3.2.2 Decomposição em componentes irreduzíveis de $SO(3)$.

Para efetuar a decomposição do tensor de energia-momento (3.16), das equações de campo (3.4a) e (3.4b) e das identidades de Bianchi (3.6a) e (3.7) em termos de componentes irreduzíveis de $SO(3)$, fazemos inicialmente a identificação de

cada setor de $F^{\mu\nu}$ e \tilde{H}^μ com a componente correspondente irredutível de $SO(3)$ conforme listado a seguir 3:

$F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$	$\tilde{H}^{\bar{\mu}}$
$F^{0i} = -\vec{E}_i$	$\tilde{H}^0 = \chi$
$F_{ij} = -\epsilon_{ijk}\vec{B}_k$	$\tilde{H}^i = \vec{Y}_i$
$F^{04} = -b$	$\tilde{H}^4 = S$
$F^{i4} = \vec{e}_i$	

Tabela 3 – Componentes do campo tensorial $F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ e do tensor dual de $H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\lambda}}$.

De (3.13) podemos extrair as componentes conservadas do tensor energia-momento Θ^0_α , de modo que a energia, o vetor de Poynting, e a uma nova densidade de pressão associada à dimensão extra são expressas, respectivamente, por:

$$\Theta^0_0 = \frac{1}{2}(E^2 + B^2 + b^2 + e^2) - 3(\chi^2 + Y^2 + S^2) \quad (3.17a)$$

$$\Theta^0_i = -(\vec{E} \times \vec{B})_i + b\vec{e}_i + 6\chi\vec{Y}_i \quad (3.17b)$$

$$\Theta^0_4 = -\vec{E} \cdot \vec{e} + 6\chi S. \quad (3.17c)$$

Dando sequência ao procedimento de extração das componentes do tensor de energia-momento, temos que os tensores de cisalhamento (ou stress tensors) se configuram da seguinte maneira:

$$\Theta_{ij} = -\vec{E}_i\vec{E}_j - \vec{B}_i\vec{B}_j + \vec{e}_i\vec{e}_j - 6\vec{Y}_i\vec{Y}_j \quad (3.18a)$$

$$\Theta_{i4} = (b\vec{E} + \vec{e} \times \vec{B})_i - 6\vec{Y}_i S \quad (3.18b)$$

$$\Theta_{44} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2 + e^2 - b^2) - 3(S^2 + \chi^2 - Y^2). \quad (3.18c)$$

Na tabela 3, \vec{E} , \vec{B} , χ e \vec{Y} são os campos de intensidade associados aos campos tipo-Maxwell e o **potencial 2-forma**, respectivamente. Por outro lado, \vec{e} ,

b , e S constituem aquilo que chamamos de setor escuro de nossa eletrodinâmica 4-dimensional estendida [35]. Nós o batizamos de “setor escuro” porque ele está conectado ao potencial 3-forma cuja simetria de calibre não é associada a qualquer tipo de carga de matéria, ao contrário da simetria $U(1)$ dos bósons vetoriais cuja carga correspondente aparece na fase das transformações de simetria. Neste ponto, gostaríamos de apontar o trabalho da Referência [57], onde o autor introduz um segundo fóton, ao qual ele se refere como um fóton-sombra ou parafóton, um fóton não-observado. No nosso caso, o que nós apelidamos como setor escuro é a partícula associada a propagação de \vec{e} e b . Em nosso modelo, também há um escalar, S , que é também parte do que chamamos de setor escuro. Embora não estejamos fazendo esta análise aqui, seria interessante que trabalhássemos os vínculos astrofísicos deste setor escuro a fim de obter alguma informação a cerca do campo S . Análise semelhante é feita em uma série de artigos citados nas referências [58, 59, 60].

O lado direito da equação de Einstein é descrito essencialmente pelo tensor de energia-momentum. Este constitui-se numa relação unificada (oriunda da simetria espaçotemporal) entre a densidade de energia e a pressão no sistema. Num modelo 5-dimensional, identifica-se no tensor de energia-momentum a presença de um setor capaz de submeter o sistema, mediante uma configuração particular dos campos (3.18c), a uma pressão negativa que, por sua vez, caracteriza o efeito acelerado da inflação do Universo, efeito característico da chamada energia escura. Como resultado de observações, o perfil inflacionário do Universo pode mudar com o passar do tempo [15, 16]. Atualmente, ele se apresenta como um perfil acelerado [14, 61]. Este comportamento mutável do perfil inflacionário pode ser o resultado de alterações na configuração de campos presentes em determinada fase da história do Universo.

No artigo da Referência [33], o autor argumenta que o valor pequeno da constante cosmológica pode ser fenomenologicamente explicado pelo uso da 3-forma.

Nós, por outro lado, utilizamos o fato da constante cosmológica ser bastante pequena para negligenciar a curvatura intrínseca do espaço AdS, permitindo nos assim adotar o espaço de Minkowski como *background* espaçotemporal. Com isso, em seguida, atribuímos à presença de um setor do tensor de energia-momento em 5D, o efeito que se assemelha a energia escura, em virtude do uso da 3-forma em nosso modelo. Em vista disso, nosso trabalho se estabelece como uma possível fundamentação teórica ao trabalho da Ref. [33] a fim de prover uma justificativa para o fato da 3-forma compreender uma constante cosmológica negativa conforme sugere a presença do setor Θ^4_4 do tensor de energia-momento o qual pode se tornar negativo conforme a configuração dos campos \vec{E} , \vec{B} , \vec{e} e b ou χ , S , e \vec{Y} (3.18c)

O termo de massa topológica (3.15) usado em nossa ação não afeta - por construção - o tensor de energia-momento (3.16), uma vez que ele é independente da métrica. Assim sendo, se o setor Θ^4_4 se apresenta negativo, ele o faz independentemente do termo de massa que adotamos. Esse Θ^4_4 , que é negativo em 5D, pode fazer o papel de uma pressão negativa associada a uma constante cosmológica (positiva) em 4D, o que configura um panorama para suportar uma expansão acelerada de nosso Universo.

3.2.3 Campos de radiação em 4D.

A seguir exibimos as equações de campo em 5D extraídas a partir do Lagrangeano (3.1) onde se considera as constantes fixadas α e β conforme foi detalhado em seção anterior. As equações estão expressas em função das componentes \vec{E} , \vec{B} , \vec{e} e b de $F^{\mu\nu}$ e das componentes χ , S , e \vec{Y} de $H_{\mu\nu\kappa\lambda}$ incluindo os termos de massa. Adotaremos um esquema de redução dimensional conhecido como redução “à la Scherk-Schwarz” [23] onde se considera que todos os potenciais e campos não dependem da dimensão extra, $x_4 \equiv s$. Ou seja, se considera *que as derivadas de qualquer campo em relação à quinta coordenada é nula*, $\partial_4(\text{campo}) = 0$. A

equação (3.4a) na presença de uma fonte externa, J^μ , quando decomposta nos revela as seguintes equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + m\sqrt{6}\chi = \rho \quad (3.19)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + m\sqrt{6}\vec{Y} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} + m\sqrt{6}S = j_s + \frac{\partial b}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Ao passo que a equação (3.4b) ao ser decomposta se mostra da seguinte maneira:

$\partial_\mu H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} + \frac{m}{\sqrt{6}}\tilde{F}^{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = J^{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$	$J^{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$
$-\vec{\nabla} S + \frac{m}{\sqrt{6}}(\vec{e}) = \vec{\lambda}$	$\lambda_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{0ij}$
$\vec{\nabla} \times \vec{Y} + \frac{m}{\sqrt{6}}\vec{B} = \vec{\zeta}$	$\zeta^i = J^{0i4}$
$\frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} + \vec{\nabla}\chi + \frac{m}{\sqrt{6}}\vec{E} = \vec{\sigma}$	$\sigma_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{jk4}$
$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{m}{\sqrt{6}}b = \tau$	$\tau = -\epsilon_{ijk}J^{ijk}$

Tabela 4 – Equações de Campo e suas fontes

Já as identidades de Bianchi (3.6a), se decompõe em:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.23)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = 0, \quad (3.24)$$

$$\vec{\nabla} b = \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} . \quad (3.25)$$

E finalmente, a segunda identidade de Bianchi nos dá apenas uma expressão:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Y} = 0 . \quad (3.26)$$

Esta é uma equação de continuidade que envolve as componentes (χ, \vec{Y}) . Isto indica que

$$\Xi := \int_{\mathcal{R}} d^3 \mathbf{x} \chi(\mathbf{x}, t) \quad (3.27)$$

é uma quantidade conservada do modelo. É importante que fique claro que embora estejamos apresentando e estudando as equações de Maxwell nas 5 dimensões, nós, na verdade, aplicamos uma redução dimensional para (1+3)D e onde quer que consideremos nossos campos eletromagnéticos confinados no espaço 4-dimensional, ali aparecem campos extra que são herdados das 5 dimensões sob nossa redução dimensional. Assim, nós estamos verdadeiramente considerando nossa interação eletromagnética em (1+3)D, mas levamos em consideração novos campos que surgem como um subproduto do espaçotempo 5-dimensional onde definimos nosso cenário físico.

3.3 O setor de férmions em 5D e sua redução dimensional para 4D.

Nessa seção, nós adicionamos à ação correspondente ao Lagrangeano (3.1) um setor fermiônico em 5 dimensões:

$$S_{5D} = \int d^5 x \left[\bar{\psi} (i\gamma^{\bar{\mu}} D_{\bar{\mu}} - m_f) \psi - \frac{1}{4} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \right. \\ \left. - \frac{1}{8} H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} + \frac{m}{\sqrt{6}} \epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} A_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} C_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} \right] , \quad (3.28)$$

onde nós inserimos a derivada covariante para estudar a interação do campo de Dirac com os campos de gauge $A_{\bar{\mu}}$

$$D_{\bar{\mu}} := \partial_{\bar{\mu}} + ieA_{\bar{\mu}} + ig\tilde{H}_{\bar{\mu}} , \quad (3.29)$$

e o espinor ψ é um campo fermiônico de Dirac em 5D. As matrizes- γ são definidas como $\gamma^{\bar{\mu}} = (\gamma^{\mu}, \gamma^4)$, com $\gamma^4 = i\gamma^5$ e $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ tal que elas satisfazem a relação de anticomutação

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} , \quad \{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = 0 , \quad (3.30)$$

e as condições $(\gamma^5)^{\dagger} = \gamma^5$, e $(\gamma^5)^2 = 1$.

Como já foi colocado anteriormente, a matéria fermiônica está carregada apenas sob a simetria $U(1)$ do campo vetorial. Não há carga sob a simetria Abeliana do potencial de calibre 3-forma; isto porque o último está apenas não-minimamente acoplado ao campo 3-forma $C_{\mu\nu\kappa}$. As equações de campo obtidas para os campos de gauge na presença de férmions são dadas por

$$\partial_{\bar{\mu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \sqrt{6}m\tilde{H}^{\bar{\nu}} = e\bar{\psi}\gamma^{\bar{\nu}}\psi , \quad (3.31a)$$

$$\partial_{\bar{\mu}}H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} + \frac{m}{\sqrt{6}}\tilde{F}^{\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = 4ge^{\bar{\mu}\bar{\rho}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}\partial_{\bar{\mu}}(\bar{\psi}\gamma_{\bar{\rho}}\psi) . \quad (3.31b)$$

das quais identificamos os termos-fonte de cada equação:

$$J_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} = e\bar{\psi}\gamma^{\bar{\mu}}\psi \quad \text{and} \quad J_H^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} = 4ge^{\bar{\mu}\bar{\rho}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}\partial_{\bar{\lambda}}(\bar{\psi}\gamma_{\bar{\rho}}\psi) . \quad (3.32)$$

Podemos notar que tais correntes surgem devido à presença do termo de *mixing* entre os campos de gauge no Lagrangeano. Trata-se de uma corrente topológica, ou seja, nós temos uma corrente que é conservada independentemente de usarmos as equações de movimento ou independentemente de termos uma simetria contínua do Lagrangeano ou da ação. É como se nós tivéssemos uma corrente identicamente conservada. A corrente $J_H^{\mu\nu\kappa}$ acima, quando reduzida dimensionalmente a 4D, faz surgir uma corrente pseudo-tensorial ao qual o campo de gauge associado a vórtices de [53] se acopla. Em nosso caso, as correntes originam-se

do **acoplamento não-mínimo** presente na derivada covariante (3.29) como uma característica das cinco dimensões. **Assim, a corrente topológica em 5D faz um papel crucial de induzir o termo de massa invariante de gauge da referência [53] em consequência de seu acoplamento ao campo de gauge associado a vórtices.**

3.3.1 Redução Dimensional da ação

A seguir, rerepresenta-se a ação completa, porém tendo sido submetida a um procedimento de redução dimensional de cinco para quatro dimensões. Os índices gregos seguirão a notação $\bar{\mu} = (\mu, 4)$ onde os índices μ indicam as quatro dimensões usuais e os índices $\bar{\mu}$ indicam cinco dimensões i.e., as quatro usuais mais uma dimensão espacial extra. Com isso, a 1-forma $A^{\bar{\mu}}$ pode ser subdividida em dois setores, um vetorial e um escalar: $A^{\bar{\mu}} = (A^\mu, A^4)$. Por sua vez, a 3-forma pode ser subdividida em dois setores tensoriais, ou seja: $C^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}} = (C^{\mu\nu\kappa}, C^{\mu\nu 4})$. Aqui se faz uma renomeação da componente escalar como $A^4 = \phi$ e se identifica o setor $C^{\mu\nu 4}$ àquele conhecido na literatura como campo de Kalb-Ramond, ou seja, $C^{\mu\nu 4} = \frac{1}{\sqrt{3}}B^{\mu\nu}$ [19]. Assim, a ação em 5D é reduzida para 4D e pode ser expressa da seguinte maneira:

$$S_{4D} = \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{6} G_{\mu\nu\kappa}^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} m \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\mu \partial_\nu B_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu X^\mu)^2 - m \phi \partial_\mu X^\mu + i e \bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi + \frac{i}{\sqrt{6}} g \bar{\psi} \gamma_5 \psi (\partial_\mu X^\mu) \right] \quad (3.33)$$

onde

$$G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu} , \quad (3.34)$$

é a intensidade de campo associada ao campo de Kalb-Ramond. Ao considerar transformações de paridade em 5D, podemos ver que tanto ϕ quanto $\partial_\mu X^\mu$ se comportam como pseudoescalares em 4D. Portanto, a ação (3.33) é absolutamente

invariante de paridade em 4D. O campo vetorial X_μ é o dual de $C_{\mu\nu\kappa}$

$$X^\mu := \frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} C_{\nu\kappa\lambda}, \quad (3.35)$$

e usando a transformação de gauge (3.3b) de $C_{\mu\nu\kappa}$ nós obtemos

$$X^{\mu'} = X^\mu + \frac{1}{2\sqrt{6}} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \partial_\nu \xi_{\kappa\lambda}, \quad (3.36)$$

e conseqüentemente

$$\partial_\mu X^{\mu'} = \partial_\mu X^\mu, \quad (3.37)$$

isto é, o campo vetorial X^μ é puramente longitudinal. Usando as equações de campo (3.8) e (3.9), essa redução dimensional mostra que os campos bosônicos na ação reduzida (3.33) adquirem uma massa m^2 . O campo $\tilde{H}^{\bar{\mu}} = (\tilde{G}^\mu, \tilde{H}^4)$ pode ser dividido no campo $\tilde{H}^4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \partial_\mu X^\mu$ e no dual de $G^{\mu\nu\kappa}$

$$\tilde{G}_\mu = \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} G^{\nu\kappa\lambda}. \quad (3.38)$$

Portanto, a derivada covariante de (3.33) em quatro dimensões é

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + ig\tilde{G}_\mu. \quad (3.39)$$

Aqui a 3-forma de gauge em 4D nada mais é do que um vetor longitudinal, pois propaga a parte longitudinal e suprime a parte transversa. Os experimentos LSW (*Light-Shining-through-a-Wall*) são capazes de detectar radiação longitudinal [62].

Em conexão com os trabalhos de Antoniadis *et al.* [63, 64] e Ringwald *et al.* [62] o que eles consideram em 4D como um pseudo-escalar (uma Eletrodinâmica axial), se origina, em nosso caso, da 3-forma de gauge (X^μ), e do $\phi \equiv A^4$ (pseudo-escalar). Assim, o áxion de Antoniadis é para nós um remanescente dos campos 5-dimensional na forma deste *mixing*.

Efetivamente, os artigos de Antoniadis [63, 64] mostram que nossa 3-forma que aparece em 4D deve ser na verdade um escalar. Nosso campo vetorial X^μ só propaga a parte longitudinal porque esta é sua componente invariante de gauge,

ou seja, o campo vetorial engloba o spin-0 e spin-1, mas a simetria de gauge (3.36) suprime precisamente o spin-1.

Estes **dois novos bósons** (vetorial e escalar) que aparecem simultaneamente em nosso modelo podem ser interpretados, na verdade, como sendo “duas faces de uma mesma moeda”. Uma “moeda” que é cunhada em um cenário 5-dimensional, e que, do ponto de vista 4-dimensional de nosso mundo, nos induz a vê-la como se ela fosse dois entes distintos. Entretanto, do ponto de vista do *bulk* 5-dimensional, trata-se de um só ente, uma vez que as 5 dimensões dão uma visão unificada a estes dois campos. Em 4D, vemos dois entes, o bóson vetorial e o escalar, como resultados da redução dimensional invocada pela compactificação da dimensão extra. Sob esta interpretação unificada, a massa de cada uma das "duas partículas" configurando-se como sendo a mesma, seria também uma indicação de tratar-se do mesmo ente coexistindo na fronteira entre branas. Mais adiante, na seção 3.3.3, discutiremos o *splitting* dessa massa degenerada.

3.3.2 Considerando o setor gravitacional

A introdução do acoplamento gravitacional na ação (3.28) para posteriormente realizar uma redução dimensional para 4D é um questão a ser considerada. Para esta proposta, analisamos a ação (3.28), agora na presença **da gravidade**, sendo dada por

$$S_{5D} = \int d^5x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2\kappa^2} + \bar{\psi} (i\gamma^{\bar{\mu}} \mathcal{D}_{\bar{\mu}} - m_f) \psi - \frac{1}{4} g^{\bar{\mu}\bar{\alpha}} g^{\bar{\nu}\bar{\beta}} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \frac{1}{8} g^{\bar{\mu}\bar{\alpha}} g^{\bar{\nu}\bar{\beta}} g^{\bar{\rho}\bar{\gamma}} g^{\bar{\lambda}\bar{\sigma}} H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}} H_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\sigma}} + \frac{m}{\sqrt{6}} \frac{\epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}}}{\sqrt{-g}} A_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} C_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} \right], \quad (3.40)$$

onde κ é o acoplamento gravitacional (que se relaciona a constante de Newton por $\kappa^2 = 8\pi G$), R é o escalar de Ricci, e a derivada covariante, $\mathcal{D}_{\bar{\mu}}$, agindo nos férmion inclui a conexão de spin, $\Omega_{\bar{\mu}}$, conforme a eq. (3.41).

$$\mathcal{D}_{\bar{\mu}} = \partial_{\bar{\mu}} + ieA_{\bar{\mu}} + ig\tilde{H}_{\bar{\mu}} + ig'\Omega_{\bar{\mu}}. \quad (3.41)$$

O acoplamento da gravidade aos férmions requer o formalismo da *vielbein*, o chamado formalismo de primeira-ordem. Aqui nós implementamos uma extensão natural do formalismo para cinco dimensões. É conhecido na literatura que a métrica do espaço-tempo é escrita como $e_a^{\bar{\mu}} e_b^{\bar{\nu}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta_{ab}$ onde $\eta^{ab}(+, -, -, -, -)$ é a métrica de Minkowski no espaço plano, e $e_a^{\bar{\mu}}$ é a 5-bein em 5D.

A conexão de spin é expandida na base dos geradores do grupo de Lorentz, $\Sigma^{ab} = \frac{i}{4} [\gamma^a, \gamma^b]$, como $\Omega_{\bar{\mu}}(x) = \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \omega_{\bar{\mu}}^{ab}(x)$, onde $a, b = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ são os índices de *frame* do grupo de Lorentz no espaço plano. As matrizes gama, $\gamma^{\bar{\mu}}$, são definidas como $\gamma^{\bar{\mu}} = \gamma^a e_a^{\bar{\mu}}$ e satisfazem a álgebra de Clifford $\{\gamma^{\bar{\mu}}, \gamma^{\bar{\nu}}\} = e_a^{\bar{\mu}} e_b^{\bar{\nu}} \{\gamma^a, \gamma^b\} = 2 g^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$. As componentes da conexão de spin estão relacionadas a vielbein e a métrica da seguinte forma:

$$\omega_{\bar{\mu}}^{ab} = \frac{1}{2} e_{\bar{\nu}}^a \partial_{\bar{\mu}} e^{b\bar{\nu}} + \frac{1}{2} e^{a\bar{\nu}} e^{b\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{2} e_{\bar{\nu}}^b \partial_{\bar{\mu}} e^{a\bar{\nu}} - \frac{1}{2} e^{b\bar{\nu}} e^{a\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}. \quad (3.42)$$

No setor de campos de gauge, o tensor $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ permanece inalterado quando acoplado a derivada covariante do espaçotempo curvo. O mesmo é verdade para a 3-forma $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\lambda}}$. As formas $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ e $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\lambda}}$, mesmo se definidas com derivadas usuais, se comportam como tensores e assim não há necessidade de redefinir pela substituição das derivadas ordinárias pelas derivadas covariantes. Além disso, se as últimas forem usadas para redefinir F e G , as simetrias de gauge para $A_{\bar{\mu}}$ e $C_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}}$ seriam explicitamente quebradas na presença de torção. E este é o caso, uma vez que temos férmions. Assim, a expressão para F e H não foram alteradas na presença de gravidade, e covariância sob transformação geral de coordenadas é mantida normalmente.

Para obter informação sobre o espectro de excitação do setor gravitacional, tomamos a aproximação linear para o campo gravitacional:

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x) = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \kappa h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x), \quad (3.43)$$

onde consideramos apenas termos lineares na constante κ . Usando esta aproximação, obtemos a versão linearizada da ação (3.40) em 5D:

$$S_{5D} = \int d^5x \left[-\frac{1}{4} (\partial_{\bar{\mu}} h_{\bar{\nu}\bar{\rho}})^2 + \frac{1}{2} (\partial_{\bar{\mu}} h^{\bar{\mu}\bar{\nu}})^2 + \frac{1}{2} \bar{h} \partial_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} h^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \frac{1}{4} (\partial_{\bar{\mu}} \bar{h})^2 + \right. \\ \left. + \bar{\psi} (i\gamma^{\bar{\mu}} D_{\bar{\mu}} - m_f) \psi - \frac{1}{4} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^2 - \frac{1}{8} H_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}^2 + \frac{m}{\sqrt{6}} \epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} A_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} C_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}\bar{\rho}} + \mathcal{O}(\kappa) \right] \quad (3.44)$$

onde $\bar{h} := h_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}}$; **Incluimos as interações gravitação-férmion no termos $\mathcal{O}(\kappa)$ da ação, pois pretendemos observar a interferência, em 4D, entre os graus de liberdade decorrentes do setor gravitacional e dos campos bosônicos no setor de calibre, portanto aqui omitimos os termos de ordem $\mathcal{O}(\kappa)$ que representam a interação gravitacional com os férmions e os campos de calibre, uma vez que eles não são importantes para o que discutiremos em seguida. (3.44). Nesta ação, o Lagrangeano- h é invariante sob transformações de calibre**

$$h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \longmapsto h'_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \kappa^{-1} (\partial_{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\nu}} + \partial_{\bar{\nu}} \xi_{\bar{\mu}}) , \quad (3.45)$$

onde $\xi_{\bar{\mu}}$ é qualquer função vetorial em 5D.

Agora, investigamos a redução dimensional para 4D nos termos cinéticos do campo- h por separar as componentes $h^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \{h^{\mu\nu}, h^{\mu 4}, h^{44}\}$, no qual renomeamos as componentes $h^{\mu 4} := V^{\mu}$, $h^{44} := \chi$, e usamos a condição de que $\partial_4(\text{campo}) = 0$, assim a ação 5D toma a forma

$$S_{4D} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_{\mu} h_{\nu\rho})^2 + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h^{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} h \partial_{\mu} \partial_{\nu} h^{\mu\nu} + \frac{1}{4} (\partial_{\mu} h)^2 \right. \\ - \frac{1}{4} (\partial_{\mu} V_{\nu} - \partial_{\nu} V_{\mu})^2 + \bar{\psi} (i\gamma^{\mu} D_{\mu} - m_f) \psi \\ - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{6} G_{\mu\nu\kappa}^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} m \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_{\mu} \partial_{\nu} B_{\kappa\lambda} \\ \left. + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} X^{\mu})^2 - m \phi \partial_{\mu} X^{\mu} + \mathcal{O}(\kappa) \right] , \quad (3.46)$$

onde $h := h_{\mu}^{\mu}$. Nesta expressão, nós temos o aparecimento de um novo campo vetorial, V^{μ} , e um termo misto de um campo escalar, χ , com um campo gravitacional fraco $h^{\mu\nu}$. O termo cinético para o campo- χ naturalmente desaparece. Portanto, é razoável a prescrição de truncar o campo- χ na redução, já que $\chi = 0$.

O termo cinético para o campo vetorial V^μ é invariante sob a transformação de calibre, $V_\mu \mapsto V'_\mu = V_\mu + \kappa^{-1} \partial_\mu \xi_4(x)$. Isto é facilmente verificado realizando a redução dimensional em (3.45).

Portanto, nós obtivemos uma ação 4D com três campos vetoriais A^μ, V^μ, X^μ , na qual não há termo de massa associado ao campo- V^μ . Além disso, poderíamos introduzir um termo como $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} V_\mu \partial_\nu B_{\rho\lambda}$ na ação 4D, o qual é invariante de gauge, e gera um termo de massa para o campo V^μ .

3.3.3 Propagadores do multipletto $\{A^\mu, B^{\mu\nu}, X^\alpha, \phi\}$

Os propagadores associados ao Lagrangeano (3.33) são obtidos após a inserção dos correspondentes termos de fixação de calibre dados por (3.47)

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu B^{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4\xi} (\partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu)^2 . \quad (3.47)$$

em adição à parte livre de (3.33). Temos, portanto $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{4D} + \mathcal{L}_{gf}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0_{4D}} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{6} G_{\mu\nu\kappa}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu B^{\mu\nu})^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} m \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\mu \partial_\nu B_{\kappa\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_\mu X^\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - m \phi \partial_\mu X^\mu . \end{aligned} \quad (3.48)$$

No setor de campos de gauge, nós colocamos o Lagrangeano da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0_{4D}} &= \frac{1}{2} A^\mu \square \left(\theta_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} \omega_{\mu\nu} \right) A^\nu \\ &\quad - \frac{1}{2} B^{\mu\nu} \square \left[(P_b^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} + \frac{1}{2\beta} (P_e^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} \right] B^{\kappa\lambda} \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi \square \phi - \frac{1}{2} X^\mu \square \omega_{\mu\nu} X^\nu - \frac{\sqrt{2}}{3} m A^\mu S_{\mu\kappa\lambda} B^{\kappa\lambda} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{3} m B^{\kappa\lambda} S_{\kappa\lambda\mu} A^\mu - \frac{1}{2} m \phi \partial_\mu X^\mu \\ &\quad + \frac{1}{2} m X^\mu \partial_\mu \phi , \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde ele está escrito em termos dos operadores de projeção:

$$\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \quad (3.50)$$

$$(P_b^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa} \theta_{\nu\lambda} - \theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\kappa}) \quad , \quad (3.51)$$

$$(P_e^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa} \omega_{\nu\lambda} - \theta_{\mu\lambda} \omega_{\nu\kappa} - \theta_{\nu\kappa} \omega_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda} \omega_{\mu\kappa}) \quad , \quad (3.52)$$

$$S_{\mu\nu\kappa} = -m \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \partial^\lambda \quad , \quad (3.53)$$

os quais satisfazem as seguintes relações

$$(P_b^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} (P_b^1)^{\kappa\lambda}{}_{,\rho\sigma} = (P_b^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} \quad , \quad (3.54)$$

$$(P_e^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} (P_e^1)^{\kappa\lambda}{}_{,\rho\sigma} = (P_e^1)_{\mu\nu,\rho\sigma} \quad , \quad (3.55)$$

$$(P_b^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} (P_e^1)^{\kappa\lambda}{}_{,\rho\sigma} = 0 \quad , \quad (3.56)$$

$$(P_e^1)_{\mu\nu,\kappa\lambda} (P_b^1)^{\kappa\lambda}{}_{,\rho\sigma} = 0 \quad , \quad (3.57)$$

$$S_{\mu\nu\alpha} S^{\alpha\kappa\lambda} = -2 \square (P_b^1)_{\mu\nu}{}^{,\kappa\lambda} \quad , \quad (3.58)$$

$$(P_b^1)_{\mu\nu,\alpha\beta} S^{\alpha\beta\kappa} = S_{\mu\nu}{}^\kappa \quad , \quad (3.59)$$

$$S^{\kappa\alpha\beta} (P_b^1)_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = S^{\kappa\mu\nu} \quad , \quad (3.60)$$

$$(P_e^1)_{\mu\nu,\alpha\beta} S^{\alpha\beta\kappa} = 0 \quad , \quad (3.61)$$

$$(P_e^1)_{\mu\nu,\alpha\beta} S^{\alpha\beta\kappa} = 0 , \quad (3.62)$$

$$S^\kappa_{\alpha\beta} (P_e^1)^{\alpha\beta,\mu\nu} = 0 . \quad (3.63)$$

É conveniente escrever o Lagrangiano sob a forma matricial. Para esta tarefa, precisamos definir os seguintes elementos de matriz:

$$P_{\mu\nu} = \square \left(\theta_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} \omega_{\mu\nu} \right) , \quad (3.64)$$

$$Q_{\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma} = \frac{2\sqrt{2}}{3} m S_{\mu\rho\sigma} , \quad (3.65)$$

$$\mathbb{S}_{\kappa\lambda,\rho\sigma} = -\square \left[(P_b^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} + \frac{1}{2\beta} (P_e^1)_{\kappa\lambda,\rho\sigma} \right] . \quad (3.66)$$

$$W_{\alpha\beta} \equiv -\square \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{\xi} \square \theta_{\alpha\beta} \quad (3.67)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \mathbb{N}^t \mathbb{M} \mathbb{N}, \text{ onde } \mathbb{N}^t = \left(A^\mu \quad B_{\kappa\lambda} \quad X^\alpha \quad \phi \right) \text{ e}$$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} P_{\mu\nu} & R_{\mu\rho\sigma} & 0 & 0 \\ Q_{\kappa\lambda\nu} & \mathbb{S}_{\kappa\lambda,\rho\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{\alpha\beta} & m\partial_\alpha \\ 0 & 0 & -m\partial_\beta & -\square \end{pmatrix} . \quad (3.68)$$

e, em seguida, invertemos a matriz- \mathbb{M} para encontrar os seguintes propagado-

res:

$$\langle \phi \phi \rangle = \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (3.69)$$

$$\langle X^\mu X^\nu \rangle = \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - i \frac{\xi}{k^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (3.70)$$

$$\langle \phi X^\mu \rangle = -\langle X^\mu \phi \rangle = \frac{m}{k^2 - m^2} \frac{k^\mu}{k^2} \quad (3.71)$$

$$\langle A_\mu B_{\nu\kappa} \rangle = -\langle B_{\mu\nu} A_\kappa \rangle = \frac{m}{k^2 - m^2} \frac{\epsilon_{\mu\nu\kappa\alpha} k^\alpha}{k^2} \quad (3.72)$$

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{i}{k^2 - m^2} \left[\eta_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] + \alpha \frac{im^2}{k^2 - m^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \quad (3.73)$$

$$\langle B_{\mu\nu} B_{\kappa\lambda} \rangle = \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \left[\mathbf{1}_{\mu\nu,\kappa\lambda} + \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \mathbb{K}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \right] - \frac{i\beta m^2}{k^2 - m^2} \frac{\mathbb{K}_{\mu\nu,\kappa\lambda}}{k^2} \quad (3.74)$$

$$\text{onde } \mathbb{K}_{\mu\nu,\kappa\lambda} := \eta_{\mu\kappa} \frac{k_\nu k_\lambda}{k^2} - \eta_{\mu\lambda} \frac{k_\kappa k_\nu}{k^2} - \eta_{\nu\kappa} \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} + \eta_{\nu\lambda} \frac{k_\mu k_\kappa}{k^2}$$

$$\text{e } \mathbf{1}_{\mu\nu,\kappa\lambda} := \frac{1}{2} (\eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa}).$$

Em 5D, a 1-forma de calibre contém *on-shell* 3-graus de liberdade (g.l.); uma 3-forma de calibre propaga apenas *on shell* 1 g.l.. Portanto, dispomos de 4 g.l. físicos no setor de bósons de calibre. Em 4D, teremos, então, estes 4 g.l. distribuídos entre os campos que encontramos por redução dimensional. Considerando-se os propagadores dos setores ϕ e X^μ (lembrando-se que ϕ provem do campo de Maxwell em 5D e se comporta como um pseudo-escalar em 4D, e que X^μ provem da 3-forma em 5D e é o dual de uma 3-forma em 4D, portanto não propaga graus de liberdade) fica claro que o setor de calibre descreve 4 graus de liberdade como deveria ser. Os outros 3 g.l. são transportados pelo sistema combinado $\{A^\mu, B^{\mu\nu}\}$ de tal forma que A_μ propaga 2 g.l., enquanto que $B^{\nu\kappa}$ transporta 1 g.l.. devido a sua simetria de calibre; então, isto significa que estes dois campos combinados descrevem juntos uma única partícula de calibre de spin-1 massiva e neutra, a qual interpretamos como um tipo de parafóton. Ao invés de aparecer em um termo-FF [65], nosso parafóton é uma partícula associada ao sistema $\{A^\mu, B^{\mu\nu}\}$ com uma massa invariante de calibre.

Antes de finalizar a seção, devemos esclarecer dois pontos. O primeiro tem

a ver com a partícula pseudo-escalar massiva descrita pelo sistema $\{\phi, X^\mu\}$. A redução de 5D para 4D mostra claramente que o campo X^μ aparece em 4 dimensões apenas através do seu divergente. Todos os termos com X^μ na equação (3.40) exibem um $\partial \cdot X$; X^μ não aparece em outro lugar. Isto significa que estamos autorizados a redefinir um novo campo $s \equiv \partial_\mu X^\mu$, que é um campo auxiliar e pode, portanto, ser eliminado através de sua equação de campo clássica:

$$s - m\phi + \frac{i}{\sqrt{6}}g\bar{\psi}\gamma_5\psi = 0. \quad (3.75)$$

Já que s é um campo auxiliar, é correto substituí-lo na ação original (3.40) através da equação algébrica acima, de onde obtem-se a ação de Klein-Gordon canônica ($\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$), juntamente com um termo de interação fermiônica, $(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2$. Isto confirma que o sistema $\{\phi, X^\mu\}$ descreve nada além de um pseudo-escalar massivo, o qual associamos com o áxion. O sistema $\{A^\mu, B^{\nu\kappa}\}$ descreve os 3 graus de liberdade *on-shell* de uma partícula de spin-1 massiva neutra. Entretanto, ela é degenerada em massa com ϕ . No entanto, o modelo 4-dimensional não se sustenta sozinho. **Embora não seja nosso objetivo aqui, e, portanto, não adentramos em detalhes, sugerimos que A^μ possa se acoplar ao setor de Higgs de tal modo que sob uma quebra espontânea de simetria induzida pelo setor de Higgs, sua massa se separe (*split*) da massa do áxion.**

Nós tomamos aqui o acoplamento de Higgs com A^μ como dado pelo mixing do parâmetro- χ cinético usual do fóton-parafóton [65]. De acordo com a discussão do trabalho de Jaeckel e Ringwald [66] [67] [68], χ se estende entre 10^{-16} e 10^{-4} , como apontam considerações baseadas em teoria de cordas. No nosso caso, como colocado acima, se o acoplamento Higgs-parafóton é dado pelo parâmetro χ na faixa de 10^{-16} a 10^{-12} , a separação da massa (*splitting*) repousa sobre a faixa do sub-eV (lembrando que $\langle Higgs \rangle = 246$ GeV), de modo que a degenerescência é levantada (*lifted*). Assim, em nosso modelo áxion-parafóton, o parâmetro χ está também presente, mas ele aparece no acoplamento Higgs-parafóton, e ele é

compatível com as massas do áxion e do parafóton ambas na escala sub-eV.

Potenciais dependentes do Spin

Nesta seção, estudamos os perfis de potenciais interpartículas (não-relativísticas, mas dependentes do spin e da velocidade) quando são trocadas partículas virtuais associadas aos campos envolvidos nos propagadores acima. Estes potenciais poderiam ser estendidos adequadamente para situações macroscópicas se a massa trocada, m , for pequena o suficiente. O perfil dependente do spin e da velocidade poderia encontrar alguma aplicação para uma física testável na escala submilimétrica, da ordem de $10^{-1}mm$. Mas no caso considerado aqui, a massa não quebra a simetria de calibre, assim seria não-trivial manter o controle da influência de um particular mecanismo de massa sobre a forma da interação da partícula. Nós consideramos a metodologia usada em [69] e [70], para o qual o potencial pode ser obtido, na primeira aproximação de Born, efetuando uma integral de Fourier da amplitude,

$$V(\vec{r}, \vec{v}) = - \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \mathcal{A}(\vec{q}, m\vec{v}). \quad (3.76)$$

A seguir, usaremos o sistema do centro de massa, cujas atribuições de momentum estão fixadas como na figura abaixo.

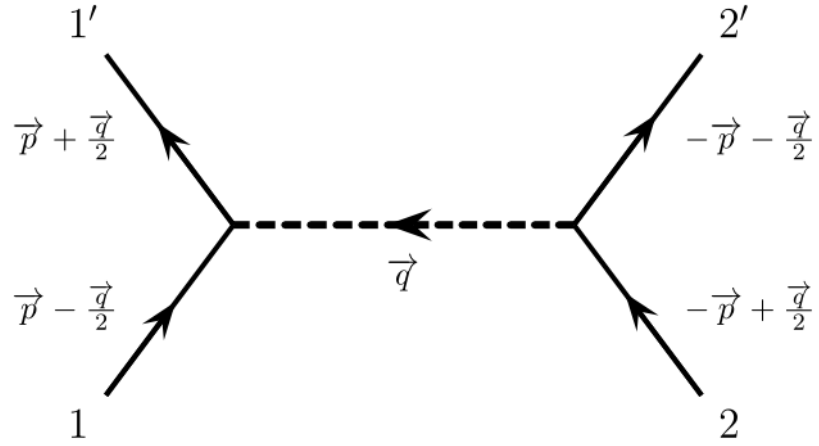


Figura 1 –

Começamos revendo um caso bem conhecido: duas correntes fermiônicas pseudo-escalares interagindo via propagador escalar $\langle\phi\phi\rangle$, eq. (3.69). Aplicando as regras de Feynman, obtemos

$$i\mathcal{A}^{\langle\phi\phi\rangle} = \bar{u}\left(p + \frac{q}{2}\right) (-e_1\gamma_5) u\left(p - \frac{q}{2}\right) \langle\phi\phi\rangle \times \\ \times \bar{u}\left(-p - \frac{q}{2}\right) (-e_2\gamma_5) u\left(-p + \frac{q}{2}\right), \quad (3.77)$$

que pode ser reescrita em termos das correntes pseudo-escalares como

$$\mathcal{A}^{\langle\phi\phi\rangle} = e_1 e_2 \frac{J_1^{PS} J_2^{PS}}{\vec{q}^2 + m^2}. \quad (3.78)$$

Assim, tomamos o limite não-relativístico para uma corrente pseudo-escalar 3.92) para obter:

$$\mathcal{A}^{\langle\phi\phi\rangle} = \frac{e_1 e_2}{4m_1 m_2} \frac{(\vec{q} \cdot \langle\vec{\sigma}\rangle_1) (\vec{q} \cdot \langle\vec{\sigma}\rangle_2)}{\vec{q}^2 + m^2}. \quad (3.79)$$

Finalmente, efetuamos a integral de Fourier e obtemos [69]:

$$V_{PS-PS}^{\langle\phi\phi\rangle} = -\frac{e_1 e_2}{4m_1 m_2} \mathcal{V}^{\langle\phi\phi\rangle}, \quad (3.80)$$

onde definimos

$$\mathcal{V}^{\langle\phi\phi\rangle} = \left[(1 + mr) (\langle\vec{\sigma}\rangle_1 \cdot \langle\vec{\sigma}\rangle_2) - (3 + 3mr + m^2 r^2) (\hat{r} \cdot \langle\vec{\sigma}\rangle_1) (\hat{r} \cdot \langle\vec{\sigma}\rangle_2) \right] \frac{e^{-mr}}{4\pi r^3}. \quad (3.81)$$

Vamos agora tratar do próximo caso, onde tomamos o propagador $\langle AB \rangle$ da eq. (3.72). A amplitude é dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}^{\langle AB \rangle} &= \bar{u} \left(p + \frac{q}{2} \right) (-ie_1 \gamma^\mu) u \left(p - \frac{q}{2} \right) \langle A_\mu B_{\kappa\lambda} \rangle \times \\ &\quad \times \bar{u} \left(-p - \frac{q}{2} \right) \left(\frac{g_2}{2} \gamma_\rho \epsilon^{\rho\nu\kappa\lambda} q_\nu \right) u \left(-p + \frac{q}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Após alguma manipulação algébrica, a amplitude $A^{\langle AB \rangle}$ pode ser reescrita em termos das correntes vetoriais:

$$\mathcal{A}^{\langle AB \rangle} = -\frac{e_1 g_2 m}{\vec{q}^2 + m^2} (J_1^V)^\mu (J_2^V)_\mu. \quad (3.83)$$

Se tomarmos a contração entre estas correntes, (??), e efetuarmos a integral de Fourier, obteremos

$$V^{\langle AB \rangle} = e_1 g_2 m \delta_1 \delta_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} + e_1 g_2 m \mathcal{V}_{(2)}^{\langle AB \rangle}, \quad (3.84)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{(2)}^{\langle AB \rangle} &= \delta_1 \delta_2 \left[\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{4} + \frac{m^2}{16} \right) + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} \right] \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \\ &\quad - \left\{ \vec{p} \times \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\delta_1}{m_2^2} \langle\vec{\sigma}\rangle_2 + \frac{\delta_2}{m_1^2} \langle\vec{\sigma}\rangle_1 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{(\delta_1 \langle\vec{\sigma}\rangle_2 + \delta_2 \langle\vec{\sigma}\rangle_1)}{m_1 m_2} \right] \right\} \cdot \hat{r} (1 + mr) \frac{e^{-mr}}{4\pi r^2} + \\ &\quad + \left\{ \frac{(\langle\vec{\sigma}\rangle_1 \cdot \langle\vec{\sigma}\rangle_2)}{4m_1 m_2} [1 + mr + m^2 r^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\langle\vec{\sigma}\rangle_1 \cdot \hat{r})(\langle\vec{\sigma}\rangle_2 \cdot \hat{r})}{4m_1 m_2} [3 + 3mr + m^2 r^2] \right\} \frac{e^{-mr}}{4\pi r^3}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

δ_1 e δ_2 (como explicado em detalhes no [Apêndice](#)) desaparecem se a partícula-1 ou a partícula-2 sofrem um *spin-flip* na interação.

Portanto, notamos que o primeiro termo na equação (3.84) se comporta como um termo de Yukawa, enquanto $\mathcal{V}_{(2)}^{<AB>}$ é suprimido por um fator de $\mathcal{O}(v^2/c^2)$.

Finalmente, calculamos o potencial mais elaborado, o potencial associado ao propagador da eq. (3.74). A amplitude adquire a forma

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}^{<BB>} &= \bar{u} \left(p + \frac{q}{2} \right) \left(-\frac{g_1}{2} \gamma^\rho \epsilon_{\rho\xi\mu\nu} q^\xi \right) u \left(p - \frac{q}{2} \right) \langle B^{\mu\nu} B_{\kappa\lambda} \rangle \times \\ &\times \bar{u} \left(-p - \frac{q}{2} \right) \left(\frac{g_2}{2} \gamma_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda} q_\beta \right) u \left(-p + \frac{q}{2} \right) \\ &= -\frac{g_1 g_2}{4} \epsilon_{\rho\xi\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda} q^\xi q_\beta (J_1^V)^\rho (J_2^V)_\alpha \langle B^{\mu\nu} B_{\kappa\lambda} \rangle. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Após expressar o produto $\epsilon_{\rho\xi\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda}$ em termos de deltas de Kronecker, esta amplitude simplifica-se como a seguir:

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}^{<BB>} &= \frac{g_1 g_2}{4} \left\{ (J_1^V)^\mu (J_2^V)_\mu [2q^2 \langle B^{\kappa\lambda} B_{\kappa\lambda} \rangle + 4q_\beta \langle B^{\beta\kappa} B_{\kappa\lambda} \rangle q^\lambda] + \right. \\ &\left. + 4q^2 (J_2^V)_\alpha \langle B^{\alpha\lambda} B_{\lambda\kappa} \rangle (J_1^V)^\kappa + 4 (J_2^V)_\alpha q_\beta \langle B^{\alpha\beta} B_{\kappa\lambda} \rangle (J_2^V)^\kappa q^\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

É possível mostrar, após cálculos extensos, que os termos associados com o operador \mathbb{K} , eq. (3.74), não contribuem para a amplitude. Portanto, a amplitude não depende dos termos de fixação de calibre. Então poderíamos tomar

$$\langle B_{\mu\nu} B_{\lambda\kappa} \rangle = \frac{i}{q^2 - m^2} \mathbf{1}_{\mu\nu, \lambda\kappa}, \quad (3.88)$$

que conduziria ao seguinte resultado

$$\mathcal{A}^{<BB>} = \frac{g_1 g_2}{2} \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + m^2} (J_1^V)^\mu (J_2^V)_\mu. \quad (3.89)$$

Mais uma vez, usamos a contração $??$. A integral de Fourier produz o resultado:

$$V^{<BB>} = \frac{g_1 g_2 m^2}{4} \delta_1 \delta_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} + \frac{g_1 g_2 m^2}{4} \mathcal{V}_{(2)}^{<AB>}. \quad (3.90)$$

Este potencial tem a mesma forma funcional e comportamento daquela obtida no caso $\langle AB \rangle$, eq. 3.84.

Agora, nos iremos esclarecer alguns pontos. Enfatizamos que, ao adotar um esquema de redução dimensional *à la* Scherk-Schwarz, tal que decomposmos $\bar{\mu} = (\mu, 4)$ e admitimos que $\partial_4(\text{campo}) = 0$, nós negligenciamos os modos não-nulos de Kaluza-Klein e, conseqüentemente, a massa de Planck de mais altas dimensões não tem qualquer papel em nossa abordagem. Portanto, a física 4-dimensional deveria receber apenas informação sobre o raio da dimensão extra. Este parâmetro não apareceu explicitamente nos potenciais simplesmente porque usamos a mesma notação para as constantes de acoplamento em 5D e 4D. Efetuando uma análise dimensional dos campos presentes nas ações S_{5D} e S_{4D} , deveríamos concluir que, por exemplo, $g^{5D}/\sqrt{L} = g^{4D}$, onde $L = \int dx_4$ representa o comprimento da dimensão extra (a coordenada x_4). A fim de impor vínculos ao raio da dimensão extra, devemos notar que os acoplamentos g sempre aparecem juntos com a massa m nos potenciais. Assim, precisamos combinar experimentos diferentes envolvendo estes potenciais. Nós não estamos trilhando esta rota aqui uma vez que este não é o escopo do presente trabalho. Mas, entendemos que este ponto deveria ser objeto de nossa atenção em um trabalho futuro.

A principal herança da física 5-dimensional aparece nas interações de vórtices. Os termos dependentes de spin se mostram apenas a $\mathcal{O}(v^2/c^2)$, já que a redução dimensional fixa as interações de vórtices como um resultado do que temos em 5D. Se estudarmos o Lagrangeano livre diretamente em 4D, eq. (3.33), temos a liberdade de fixar a interação por meio de correntes (pseudo-)vetoriais ou (pseudo-)tensoriais. Estes resultados estão no trabalho da Ref. [71] com termos dependentes de spin em primeira e segunda ordem em v/c .

Se adotamos outro esquema de redução dimensional, esperamos obter resultados diferentes para os potenciais. Apontamos um novo caminho: nós pretendemos calcular o potencial interpartículas diretamente em 5D e, então, tomarmos a redu-

ção dimensional do potencial 5D, ao invés de primeiramente reduzir de 5D para 4D e depois computar o potencial em 4D. A principal razão é que, no espaço de Minkowski 5D, temos dois spins associados com o *little group* $SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ do grupo de Poincaré em 5D, enquanto que em 4D temos apenas um spin, já que $SO(3) \cong SU(2)$.

Nós temos resultados preliminares que levam em consideração a contribuição deste novo spin nos potenciais interpartículas. Em algumas situações, aparecerão novas correções para os potenciais monopolo-dipolo e dipolo-dipolo, os quais crescem com uma dependência de lei de potencia sobre o raio da dimensão extra, o qual agora tem um papel mais fundamental do que a constante de acoplamento renormalizada. Esperamos reportar tais resultados em breve.

Em 4 dimensões, o bóson vetorial A^μ aparece como uma excitação massiva, tal que, ao invés de um potencial tipo-Coulomb, temos um potencial tipo-Yukawa. A lei de Newton é reproduzida da inspeção do setor gravitacional, pois ele vem da linearização de $\sqrt{-g}R$ e nenhum parâmetro de massa surge que **dote a gravitação de uma massa**.

Se interpretarmos A^μ como um parafóton em 4D, então o parâmetro de massa m deveria estar vinculado pelos experimentos que fixam um limite superior sobre a massa do áxion. O *splitting* áxion-parafóton é assumido pelo parâmetro χ , o qual propomos governar o acoplamento Higgs-parafóton.

3.4 Conclusões

Nossa proposta aqui é investigar um modelo eletromagnético 5D com um termo de massa topológica (Abeliano) para o fóton construído em termos de potenciais de gauge do tipo 1-forma e 3-forma.

Este estudo pode oferecer alguma dica em relação a modelagem da chamada energia escura devido a presença da componente Θ^4_4 de nosso tensor de energia-

momentum que pode corresponder a uma pressão negativa e pode, portanto, descrever um sistema em expansão acelerada.

Passando para o 4D ao adotar um procedimento de redução dimensional particular, identificamos a emergência de um setor ao qual nos referimos como setor escuro extra. Este setor estende a Eletrodinâmica de Maxwell por incluir uma excitação que age como um fóton **escalar**, para o qual um campo escalar tipomagnético está associado. Neste cenário, se obtém, em 4D, um bóson vetorial neutro massivo (massa m) juntamente com um pseudo-escalar (com a mesma massa).

A 3-forma que produz uma contribuição negativa para a pressão é responsável (com o *mixing* com o bóson de calibre Abelian 4D herdado da 1-forma 5D) pelo aparecimento de dois bósons: um vetorial longitudinal, que é um campo auxiliar, e uma partícula de spin-1 massiva, que interpretamos como um parafóton.

Em nossa formulação, o áxion (o componente pseudo-escalar identificado com A^4) e o parafóton resultam degenerados em massa, ambos considerados na escala sub-eV. **Nós propusemos acoplar o parafóton ao escalar de Higgs eletrofraco com o parâmetro χ como o acoplamento de calibre de Higgs, assim o áxion e o parafóton têm sua degenerescência elevada com um *splitting* também na escala sub-eV.** Por outro lado, o escalar massivo pode ser interpretado como o áxion remanescente da Eletrodinâmica em 5D considerando que o termo de Chern-Simons (Abeliano) em 5D é definido como $\epsilon^{\bar{\mu}\nu\bar{\lambda}\bar{\kappa}\bar{\mu}\bar{\rho}} A_{\bar{\nu}} F_{\bar{\lambda}\bar{\kappa}} F_{\bar{\mu}\bar{\rho}}$ e sua redução dimensional para 4D conduz a um termo tipo-axiônico $\theta F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ onde $\theta = A^4$ [72].

Fixando $g = 0$, i.e., eliminando o acoplamento não-mínimo descrito por \tilde{G}^μ na derivada covariante, o campo X^μ desacopla dos férmions; entretanto, a partícula tipo-axiônica permanece acoplada, pois seu acoplamento é eletromagnético. **NÓS ENTÃO ASSINALAMOS QUE É POSSÍVEL DESACOPLAR O CAMPO X^μ , E, AO MESMO TEMPO, MANTER O ÁXION ACOPLADO COM A MATÉRIA FERMIÔNICA CARREGADA.** Nós acreditamos que seria interessante considerar, desde o início,

um termo de Chern-Simons em cinco dimensões o qual induziria naturalmente o acoplamento axiônico em 4D: $\theta F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$.

O termo de Chern-Simons Abelian 5D é cúbico no campo de gauge e pode prover um cenário natural para discutir auto-interações de fótons e efeitos não-lineares, com consequências potencialmente interessantes para a interação eletromagnética em 4 dimensões. Concentraremos esforços nesta questão em particular e pretendemos reportá-la em um trabalho futuro.

Como uma questão final em aberto, destacamos o estudo de monopólos magnéticos no cenário 5-dimensional, onde eles se tornam objetos estendidos unidimensionais (i.e., cordas) que aparecem como o dual de cargas pontuais. Assim, em 5D, monopólos magnéticos têm sua interação mediada pelos campos de 2-forma de Kalb-Ramond.

Como **seguimento** deste trabalho, concentraremos esforços na investigação de uma Eletrodinâmica 5D na presença de monopólos magnéticos (estendidos), tal que uma 1-, uma 2- e uma 3-forma devam todas estar presentes e seus efeitos em conexão com a pressão negativa e da expansão acelerada do Universo deva ser reavaliado.

3.5 Currents in the non-relativistic limit

In this section, we collect the currents and their contractions. We consider the same conventions and notations as in Ref. [71]. In the non-relativistic limit, the solution to the Dirac equation, with positive energy, is given by [73]:

$$u(p) \approx \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

We take ξ' for the Dirac conjugate $\bar{u}(p)$. The pseudo-scalar current (PS), following the parametrization for the first vertex of Figure (??), can be written

as

$$J_1^{PS} = \bar{u} \left(p + \frac{q}{2} \right) i\gamma_5 u \left(p - \frac{q}{2} \right) = -\frac{i}{2m_1} \vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1, \quad (3.92)$$

where we use $\langle \sigma_i \rangle_1 := \xi'^{\dagger} \sigma_i \xi$ to denote the expectation value of the spin matrix, σ_i , of the the particle one.

For the vector current (V),

$$(J_1^V)^\mu := \bar{u} \left(p + \frac{q}{2} \right) \gamma^\mu u \left(p - \frac{q}{2} \right); \quad (3.93)$$

the $\mu = 0$ -component yields:

$$\bar{u} \left(p + \frac{q}{2} \right) \gamma^0 u \left(p - \frac{q}{2} \right) = \delta_1 + \frac{\delta_1}{2m_1^2} \left(\vec{p}^2 - \frac{\vec{q}^2}{8} \right) + \frac{i}{4m_1^2} (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \quad (3.94)$$

where $\delta_1 := \xi'^{\dagger} \xi$, with $\delta_1 = 0$ if the particle-1 changes the spin orientation; otherwise $\delta_1 = 1$. The same is true for δ_2 .

For the space component, $\mu = i$, we have:

$$\bar{u} \left(p + \frac{q}{2} \right) \vec{\gamma} u \left(p - \frac{q}{2} \right) = \frac{\vec{p}}{m_1} \delta_1 - \frac{i}{2m_1} \vec{q} \times \langle \vec{\sigma} \rangle_1. \quad (3.95)$$

The second current, associated with the particle-2 or second vertex of Figure ?? can be obtained by taking $q \rightarrow -q$, $p \rightarrow -p$ and by exchanging the labels $1 \rightarrow 2$.

Finally, we present the result for the contraction of vector currents, neglecting terms of the order $\mathcal{O}(v^3/c^3)$,

$$\begin{aligned} (J_1^V)^\mu (J_2^V)_\mu &\approx \delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_2 \left[\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{4} - \frac{\vec{q}^2}{16} \right) + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} \right] + \\ &+ (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \left[\frac{i}{4} \left(\frac{\delta_1}{m_2^2} \langle \vec{\sigma} \rangle_2 + \frac{\delta_2}{m_1^2} \langle \vec{\sigma} \rangle_1 \right) + \frac{i}{2} \frac{1}{m_1 m_2} (\delta_1 \langle \vec{\sigma} \rangle_2 + \delta_2 \langle \vec{\sigma} \rangle_1) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{1}{m_1 m_2} \left\{ \vec{q}^2 (\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) - (\vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_1) (\vec{q} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

4 Partícula carregada de Spin-1/2 em 1+4 dimensões com supersimetria- N=1.

4.1 Introdução

Neste capítulo, pretende-se formular um modelo de mecânica quântica de partícula supersimétrica em 5D. Por que supersimétrica? Porque a abordagem supersimétrica automaticamente fornece uma dinâmica para o spin; ela não descreve apenas as coordenadas espaço-temporais da partícula, mas a coordenada fermiônica começa a fazer o papel do grau de liberdade de spin. Estamos, portanto, descrevendo uma partícula que na literatura é conhecida por *spinning particle* em cinco dimensões.

No estudo desta mecânica quântica, ou seja, desta dinâmica, tocou-se na questão da radiação de backreaction. A possibilidade da partícula penetrar na 5.a dimensão e assim descrever algo que pode ser interpretado como matéria escura carregada.

Esta partícula pode estar associada a algum campo do Modelo Padrão (MP), mas estes campos descrevem partículas, de modo que, se poderia tomar qualquer partícula carregada do Modelo Padrão como, por exemplo, o elétron ou o fotino, mas a intenção aqui é trabalhar no limite de partícula e não no limite de campo. Essa partícula é remanescente do MP no sentido de que ela é uma partícula associada a um campo do MP, mas não se está na descrição de altas energias que permita descrição por campos.

O fato da partícula ficar restrita ao bulk vai depender da dinâmica em x_4 .

Em suma, a proposta deste capítulo é estudar o movimento de um partícula carregada de spin 1/2 em um cenário supersimétrico com eletrodinâmica 5-dimensional.

A presença de uma hipotética forma de matéria a qual chamamos de matéria escura fria que interage muito fracamente com radiação eletromagnética (escura) e cuja maioria das partículas se move lentamente em comparação com a velocidade da luz [14, 74, 75, 76] (fria) ainda carece de explicação.

Conforme motivado no capítulo de introdução desta tese, a introdução de dimensões extra para modelar as forças fundamentais da Natureza remonta aos primórdios da Relatividade Geral. Atualmente, seguindo a abordagem multidimensional do espaço-tempo, destacam-se os modelos de branas. Este modo de lidar com o questão introduz a ideia de que a matéria poderia estar restrita a uma brana 3D a qual, por sua vez, está imersa em um *manifold* com mais dimensões espaciais. Nossa estratégia para acessar a 5.a dimensão será inicialmente através do estudo do Eletromagnetismo.

Para investigar a possibilidade de que a interação eletromagnética em (1+3)D esteja restrita em uma subvariedade de uma brana (1+4)D, neste trabalho, estudaremos a eletrodinâmica de Maxwell em um cenário de 5-dimensões.

Não podemos nos ater apenas ao setor bosônico, precisamos também estudar como a matéria se apresenta neste contexto 5-dimensional.

Na busca por um *framework* adequado para o estudo da matéria escura, a supersimetria recebe papel de destaque. A razão para isso está no fato de que se a supersimetria é, de fato, uma simetria da Natureza, verifica-se, em seu contexto teórico, a emergência de uma escala de massa e com isso o surgimento de uma cisão na banda de energia conhecida na literatura como “*mass gap*”. Devido a esta cisão na banda de energia, uma parcela da matéria do Universo não é observada com as escalas de energia acessíveis em aceleradores atualmente. Contudo, o que se observa atualmente – do ponto de vista cosmológico – pode ser o remanescente

de baixa energia da SUSY. Para justificar a ausência de manifestação concreta de uma parcela das partículas supersimétricas na Natureza é necessário se evocar um mecanismo de quebra de simetria [77, 78, 79].

Motivados pelas perspectivas apontadas pela SUSY em relação ao estudo da Matéria Escura, planejamos explorar os eventuais remanescentes do MSSM. Tais remanescentes podem ter sua transição de fase ocorrendo aproximadamente entre 10^9 e 10^{11} GeV se for a gravidade a mediar a quebra até a escala do TeV. Alternativamente, se houver uma mediação de gauge, então a quebra ocorre em torno de 10^6 GeV [80, 81, 82].

A fim de sondar um eventual efeito do MSSM, pretendemos estabelecer um cenário físico bastante específico.

Considera-se, portanto, uma partícula carregada de spin-1/2 massiva. Porém, tal partícula deve ser massiva o suficiente para poder ser tratada como uma partícula não-relativística. Esta partícula obterá uma energia cinética alta, mas não o suficiente para alcançar o limiar para a formação de pares.

: Além disso, a partícula será submetida a um campo magnético de magnitude típica à presente em aceleradores de partículas como o LHC (~ 10 T) e nós podemos considerar sua massa na escala TeV, tal que, podemos também esperar alguma manifestação emergente da hipótese das LED's (large extra dimensions) [83].

O cenário que traçamos para prosseguir a nossa investigação é a seguinte: nós adotamos o ponto de vista das dimensões extra tão extensas quanto TeV^{-1} , de acordo com o quadro estabelecido por Dvali et al. [75]. Nós então consideramos que estamos na escala TeV, tal que possamos acessar a quinta dimensão e implementar nossas considerações físicas em uma brana 5-dimensional. Nesta brana, nós concentramos nossa atenção na dinâmica mecanico-quântica de uma partícula carregada minimamente acoplada ao campo eletromagnético 5-dimensional.

4.2 Esclarecimentos

Claramente, a partícula teste deve ser massiva o suficiente até o ponto em que ainda faça sentido considerar sua dinâmica descrita por Mecânica Quântica. Então, nós consideramos que a massa m de nossa partícula teste (carregada) é da ordem de TeV, mas ainda maior que a escala de energia que está alimentando o sistema. Isto significa que não há energia suficiente para penetrar o comprimento de onda de Compton da partícula, tal que a abordagem mecânico-quântica é justificável. Nós estamos, portanto, considerando uma situação na qual uma partícula massiva carregada é investigada em uma escala de energia ε ($\varepsilon \leq 2m$) para a qual a quinta dimensão se mostra e, então, a dinâmica da partícula é governada por um tratamento mecânico-quântico. A partícula sente a ação do campo de Maxwell 5-dimensional que engloba os campos elétrico e magnético da teoria de Maxwell 4-dimensional ordinária, e inclui dois campos extra tipo-elétrico e tipo-magnético genuinamente ligados à quinta dimensão, mas cujos possíveis efeitos são observáveis em nosso mundo 4-dimensional.

Sobre a questão dos Efeitos quânticos originados pelo campo magnético, a magnitude do campo magnético em tal tratamento mecânico-quântico não é necessária: o raio ciclotron é maior que o comprimento de onda de Compton de nossa partícula teste. De fato, para uma partícula com massa de repouso da orde de 1 TeV, o campo magnético crítico para que efeitos quânticos se tornem importantes seria da ordem de 10^{24} G [30] e, o que nunca é produzido, mesmo em ambientes de eventos astrofísicos. Portanto, em nossas considerações aqui, do ponto de vista exclusivo da interação magnética, nós não precisamos adotar uma descrição mecânico-quântica. Por isso, procedemos para uma descrição clássica das equações de movimento.

4.3 Estabelecendo o Hamiltoniano.

Uma vez estabelecido nosso cenário físico, iniciamos nossas considerações sobre a dinâmica de nossa partícula-teste sob a ação de um campo eletromagnético 5-dimensional. Pretendemos investigar a eletrodinâmica 5D. O Eletromagnetismo de Maxwell no espaçotempo 4-dimensional poderia ser derivado de uma teoria mais fundamental em 5 dimensões.

É importante esclarecer desde já que, ainda que estejamos apresentando as equações de Maxwell nas 5 dimensões, nós, na verdade, as submetemos a uma redução dimensional para (1+3)D e onde quer que consideremos nossos campos eletromagnéticos confinados no espaço 4-dimensional, lá permanecem os campos adicionais que são herdados das 5 dimensões. Assim, nós estamos verdadeiramente considerando nossa interação eletromagnética em (1+3)D, mas levamos em consideração os campos que surgem como um subproduto do espaço-tempo 5-dimensional onde definimos nosso cenário físico.

Considera-se a seguinte ação para o campo de férmions em (1+4)-dimensões,

$$L = \bar{\Psi}(i\Gamma^\mu D_\mu - m)\Psi; \quad (4.1)$$

Onde a representação explícita das matrizes gama é dada por:

$$\Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}; \quad \Gamma^4 = i\Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i_2 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nós mencionamos acima as matrizes- Γ representando a algebra de Clifford de (1+4)D. Nós definimos o espinor de Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Gamma^0. \quad (4.2)$$

Toma-se a equação de movimento para o campo Ψ (4.1). Assume-se a solução estacionária,

$$\Psi(x, t) = \exp(-i\epsilon t)\chi(x); \quad (4.3)$$

aqui, considera-se que o campo externo é independente do tempo, e que $A_0 = 0$.

Para estudar as propriedades da matéria em escala de baixa energia, nós trabalhamos o limite não-relativístico.

A equação de Dirac 5D assume a seguinte forma em termos dos campos componentes definidos acima:

$$(\epsilon - m)\chi_1 + (i\sigma^i(\partial_i + ieA_i) + (\partial_4 + ieA_4))\chi_2 = 0, \quad (4.4)$$

$$(i\sigma^i(\partial_i + ieA_i) - (\partial_4 + ieA_4))\chi_1 + (\epsilon + m)\chi_2 = 0. \quad (4.5)$$

Aqui, não adotamos as transformações de Foldy-Wolthuisen para obter o limite não-relativístico. Nós seguimos o procedimento usual para obter a equação de Pauli e obtivemos:

$$H = -\frac{1}{2m} \left[\left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + (\partial_4 - ieA_4)^2 + e\vec{\sigma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} + 2\vec{\mathcal{B}} \right) + e\phi \right] \quad (4.6)$$

Com $p_i = -i\vec{\nabla}$, nós escrevemos (4.6) como segue:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\vec{p} - e\vec{A} \right)^2 + (p^4 - eA_4)^2 \right] - e \left(\vec{B} + 2\vec{\mathcal{B}} \right) \cdot \vec{S} + e\phi; \quad (4.7)$$

$$\vec{S} = \frac{e}{2m} \vec{\sigma}, \quad (4.8)$$

e obtemos o Hamiltoniano de Pauli revelando as contribuições emergentes da dimensão extra.

4.4 Descrição mecânica supersimétrica

A Mecânica Quântica Supersimétrica está presente em nossa abordagem, pois sabemos que o tratamento de partículas spin- $\frac{1}{2}$ pode ser associado a uma abordagem supersimétrica na qual os spins variáveis são identificados com o parceiro Grassmanniano das variáveis descrevendo a posição da partícula. Entretanto, a SUSY que consideramos aqui não é aquela das altas energias; é simplesmente um tipo de simetria dinâmica que está subjacente a descrição de aspectos mecânico-quânticos de partículas spin- $\frac{1}{2}$. Como referências para tal discussão, citamos [84].

Construímos uma ação superespacial para este modelo e removemos as transformações de supersimetria das coordenadas componentes para escrever, ao final, uma ação invariante sob SUSY para a partícula.

Iremos estabelecer uma abordagem de supercampos. Nós podemos definir o modelo N-1 supersimétrico em analogia com o modelo apresentado acima, eq.(4.6). Começamos por definir os supercampos como abaixo:

$$\begin{aligned}\Phi_i(t, \theta) &= x_i(t) + i\theta\psi_i(t), \\ \Phi_4(t, \theta) &= x_4(t) + i\theta\psi_4(t).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Os operadores de supercampo e as derivadas covariantes são dadas por:

$$\begin{aligned}Q &= \partial_\theta + i\theta\partial_t \\ D &= \partial_\theta - i\theta\partial_t\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$H = i\partial_t.$$

É preciso definir um Lagrangeano em termos dos campos Φ_i 's e Φ_4 a fim de recuperar o Hamiltoniano da equação (4.6).

O Lagrangeano supersimétrico N-1 que gera o setor bosônico é dado por:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{i}{2}m \left(\dot{\Phi}_i D\Phi_i + \dot{\Phi}_4 D\Phi_4 \right) + ie \left[(D\Phi_i)A_i(\Phi_j, \Phi_4) + (D\Phi_4)A_4(\Phi_j, \Phi_4) \right]. \quad (4.11)$$

Integrando sobre as variáveis grassmanianas, obtemos:

$$L_1 = \frac{1}{2}m \left((\dot{x}_i)^2 + (\dot{x}_4)^2 \right) - \frac{i}{2} \left(\psi_i \dot{\psi}_i + \psi_4 \dot{\psi}_4 \right) + e \left(A_i \dot{x}_i + A_4 \dot{x}_4 \right) + e\phi - \frac{ie}{2} (B_i + 2\mathcal{B}_i) \epsilon_{ijk} \psi_j \psi_k, \quad (4.12)$$

Pode-se reescrever

$$L_1 = \frac{1}{2}m \left((\dot{x}_i)^2 + (\dot{x}_4)^2 \right) - \frac{i}{2} \left(\psi_i \dot{\psi}_i + \psi_4 \dot{\psi}_4 \right) + e \left(A_i \dot{x}_i + A_4 \dot{x}_4 \right) + e\phi + eB_i S_i + e2\mathcal{B}_i S_i, \quad (4.13)$$

onde definimos o spin pelo produto abaixo:

$$S_i = -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \psi_j \psi_k. \quad (4.14)$$

Escrever algo sobre a o Hamiltoniano que vem a seguir.

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}m \left((\dot{x}_i)^2 + (\dot{x}_4)^2 \right) + i \left(\psi_i \dot{\psi}_i + \psi_4 \dot{\psi}_4 \right) + e\phi + \frac{ie}{2} (B_i + 2\mathcal{B}_i) \epsilon_{ijk} \psi_j \psi_k, \quad (4.15) \\ H_1 &= \frac{1}{2m} \left[\left(\vec{p} - e\vec{A} \right)^2 + (p^4 - eA^4)^2 \right] + \frac{ie}{2} (B_i + 2\mathcal{B}_i) \epsilon_{ijk} \psi_j \psi_k + e\phi + i \left(\psi_i \dot{\psi}_i + \psi_4 \dot{\psi}_4 \right) \end{aligned}$$

onde observamos um novo acoplamento de Pauli com o campo \mathcal{B}_i e as contribuições das coordenadas fermiônicas ψ_j e ψ_4 .

O que isso significa? O que se quer mostrar com este desenvolvimento?

As equações de movimento no setor fermiônico são:

$$\dot{\psi}_4 = 0, \quad (4.17)$$

$$\dot{\psi}_i = e \left(\vec{B} + 2\vec{\mathcal{B}} \right)_j \epsilon_{ijk} \psi_k, \quad (4.18)$$

onde é manifesto o acoplamento tipo-Pauli no setor fermiônico.

Para as coordenadas \vec{x} e x^4 , as equações de movimento são:

$$m \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} = e \vec{v} \times \vec{B} - e \vec{B} \dot{x}^4 + e \vec{E}, \quad (4.19)$$

$$m \frac{\partial^2 x^4}{\partial t^2} = -e \vec{B} \cdot \vec{v} - e \mathcal{E}. \quad (4.20)$$

Onde a expressão da Força de Lorentz estendida (4.19) adquire um termo indicando a contribuição do campo \vec{B} . Para focar as possíveis novidades que este modelo pode revelar, é preciso se ater à contribuição da dimensão extra.

No intuito de isolar seu efeito, selecionamos uma configuração de campos mais simples na qual $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$, e $\mathcal{E} = 0$. Desta maneira, obtemos que:

$$m \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} = -e \vec{B} \dot{x}_4, \quad (4.21)$$

$$m \frac{\partial^2 x^4}{\partial t^2} = -e \vec{B} \cdot \vec{v}. \quad (4.22)$$

Da manipulação das expressões 4.21 e 4.22, é possível se obter a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^3 x^4}{\partial t^3} = \alpha^2 \dot{x}_4, \quad (4.23)$$

$$\alpha = \frac{e}{m} \left| \vec{B} \right|. \quad (4.24)$$

As três soluções são:

$$(i) \quad \dot{x}^4 \sim \exp(+\alpha t),$$

$$(ii) \quad \dot{x}^4 \sim \exp(-\alpha t).$$

Levando em consideração a solução *tipo-runaway* (i), e substituindo em (4.21), obtemos:

$$m \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \sim -\vec{\mathcal{B}} \exp(+\alpha t), \quad (4.25)$$

$$\vec{x} \sim -\vec{\mathcal{B}} \exp(+\alpha t). \quad (4.26)$$

Em forma mais explícita, temos:

$$F_+ = m \frac{\partial^2 x_+}{\partial t^2} = -e\vec{\mathcal{B}}|\alpha| \exp\left(+e\frac{|\vec{\mathcal{B}}|}{m}t\right),$$

Neste caso, a partícula se move na direção oposta de $\vec{\mathcal{B}}$ e tem um crescimento exponencial da força F_+

$$F_- = m \frac{\partial^2 x_-}{\partial t^2} = e\vec{\mathcal{B}}|\alpha| \exp\left(-e\frac{|\vec{\mathcal{B}}|}{m}t\right),$$

Neste caso, a partícula se move na mesma direção de $\vec{\mathcal{B}}$ e tem um decrescimento exponencial da força F_- .

Por (4.21), podemos supor que o termo extra na força de Lorentz ($\vec{\mathcal{B}}\dot{x}^4$) pode estar associado com a força de backreaction conhecida por força de Abraham-Lorentz. Então, poderíamos interpretar a força de backreaction como um efeito da quinta dimensão do espaçotempo onde o campo $\vec{\mathcal{B}}$ é a projeção 3-dimensional do verdadeiro campo magnético em (1+4)D.

Por outro lado, levando em conta (ii), e substituindo em (4.21), obtemos:

$$m \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \sim \vec{\mathcal{B}} \exp(-\alpha t), \quad (4.27)$$

$$\vec{x} \sim \vec{\mathcal{B}} \exp(-\alpha t). \quad (4.28)$$

Mas, se estudamos o caso no qual $\vec{\mathcal{B}} = 0$, e $\mathcal{E} \neq 0$. De (), obtemos:

$$\frac{\partial^2 x^4}{\partial t^2} = -\frac{e\mathcal{E}}{m},$$

que mostra que a partícula escapa indefinidamente da dimensão extra x^4 . Aqui, podemos concluir que a partícula pode descrever alguma componente da matéria escura, e o campo \mathcal{E} , a peça remanescente do campo elétrico 5D conduz a partícula para fora da brana de Minkowski. Matéria escura carregada tem sido considerada por vários autores na literatura. Voltaremos a esse ponto e citaremos referencias relevantes no final de nossas observações finais.

Três questões que abordamos neste nosso estudo do movimento de uma partícula carregada em um cenário supersimétrico 5-dimensional consistem em verificar como a interação eletromagnética pode governar seu movimento no setor espacial 3-dimensional que corresponde ao nosso mundo ou pode conduzir a partícula para o bulk, através da dimensão extra. Se ela é levada para o bulk, ($x^1 = x^2 = x^3 = 0, x^4 \neq 0$), nós devemos entender sob quais circunstâncias o campo eletromagnético externo em 5D determina que a partícula se comporta como matéria escura. Por matéria escura aqui, queremos dizer partículas que estão presas para viverem confinadas ao bulk; sua dinâmica não permite que se mostrem no espaço 3D observado. Por outro lado, em conexão com o movimento referido acima, emerge uma terceira questão possível: este estudo pode nos permitir relacionar a força de backreaction que aparece no problema de partículas sob a ação de campos eletromagnéticos em (1+3)D com a potência mecânica da força magnética em 5D. Vamos falar mais sobre isso na seqüência, mas antecipamos que o nosso exemplo pode apontar para um modo de interpretar os campos como agindo nos bastidores da força de backreaction que é manifesta em nos espaço 3-dimensional.

4.5 Conclusões

Uma partícula carregada sujeita aos campos externos de tipo eletromagnético oriundos de um cenário 5D pode transitar entre o nosso Universo 3D e o bulk

4D do qual supostamente o primeiro faz parte. O fato da partícula poder migrar para o bulk é o que nos faz considerá-la como uma possível constituinte da chamada matéria escura. Esse escape é justificado pelo surgimento de soluções tipo-runaway quando se estuda a dinâmica da partícula em relação a coordenada extra. Estas soluções nos remetem a um tema já muito estudado: a chamada força de backreaction de Abraham-Lorentz. Sua expressão é obtida de forma completamente independentemente da hipótese da coordenada extra. Entretanto, o emergir deste resultado sob a hipótese da 5.a dimensão espacial nos faz suspeitar de que pode haver alguma conexão mais do que hipotética em relação a adoção da coordenada extra. Ponto de vista que adotamos como ponto de partida deste trabalho.

O efeito da quinta coordenada é sentida por meio de uma extensão da força de Lorentz em 4 dimensões.

E, ao focar na evolução da coordenada extra, nós identificamos duas possíveis situações relevantes em conexão com o tempo de evolução da coordenada extra.

Na situação, x^4 é do tipo-runaway e nós associamos seu efeito a Abraham-Lorentz back reaction force em nosso mundo 4-dimensional.

Ao adotar este ponto de vista, nós propomos que o efeito de uma dimensão extra pode aparecer sob o pretexto da força de BACK REACTION na dinâmica de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético.

Por outro lado, a presença de um campo elétrico pode conduzir a partícula carregada para o bulk e, em virtude deste mecanismo, propomos que a partícula carregada, neste regime, tem comportamento similar a partículas de matéria escura.

É claro, a partícula não é eletricamente neutra; assim, neste caso, ela não pode ser um constituinte genuíno da matéria escura. Entretanto, o campo elétrico extra, também confinado no bulk, conduz a partícula teste da brana de Minkowski

e, uma vez no bulk, ela interage com o campo do bulk $\vec{\mathcal{B}}$.

Embora esteja carregada, ele escapa para o bulk e esta é a razão de dizermos que ela é similar a partículas de matéria escura. Em conexão com este mecanismo, nós apontamos um série de trabalhos onde a possibilidade de matéria escura eletricamente carregada é bastante discutida e um considerável número de vínculos é assentado no caso das partículas de matéria escura não serem neutras.

5 Discussão sobre possíveis efeitos do parâmetro de Barbero-Immirzi na física de partículas em escala-TeV.

A Loop Quantum Gravity (LQG), seguindo uma abordagem não-perturbativa, surge como uma alternativa para quantizar a gravitação . O parâmetro de Barbero-Immirzi (B-I) aparece naturalmente no contexto de surgimento da LQG, cumprindo a tarefa de uma constante de acoplamento no termo que acopla a família de variáveis canônicas (tetrada e conexão de Lorentz) introduzidas inicialmente por Barbero e, posteriormente, por Immirzi . A discussão a cerca do papel do parâmetro de B-I ainda se concentra ao âmbito da Cosmologia, como se pode constatar pelos trabalhos que pretendem estimar seu valor Pretendemos, aqui, explorar uma possível atuação do parâmetro de B-I em processos virtuais de modo a identificar sua sensibilidade à Física de Partículas. Nesse sentido, podemos identificar que todo o setor de férmions massivos compatíveis com a escala TeV, tais como, os charginos e neutralinos, se configuram numa sonda inerente à Física de Partículas para o parâmetro de B-I. O que se verifica é que os limites apresentados na literatura para o parâmetro de B-I são compatíveis com o espectro de férmions cujas massas estão na escala do LHC. Os léptons carregados e os quarks do Modelo Padrão, em contrapartida, não se mostram sensíveis ao parâmetro de B-I. É importante, no entanto, que nos lembremos que existem metodologias para quantização da gravitação independentes do parâmetro de B-I . Por esta razão, a identificação de seu papel sob o ponto de vista da física de partículas pode eventualmente nos esclarecer sobre a real necessidade da presença desse parâmetro numa teoria de gravitação quântica.

Em uma abordagem Lagrangeana, o parâmetro de B-I (que, de agora em diante, será representado por simplesmente por β) é considerado um parâmetro adimensional novo, introduzido como uma constante de acoplamento de um termo topológico de paridade ímpar que aparece através da ação, generalizando assim a ação de primeira ordem de Hilbert-Palatini e conduzindo à ação de Holst . Este termo topológico não afeta, na RG, as equações de movimento na ausência de torção, uma vez que ele aparece como um fator no termo que se cancela on-shell. Embora β seja não-físico em um nível clássico, percebe-se que ele se torna essencial em nível quântico, aparecendo em diversos contextos, tais como, o espectro dos operadores área e volume , na fórmula da entropia de buracos negros e na dinâmica apresentada por modelos de espumas de spin

Por esta razão, fazendo uso de abordagens não-perturbativas para a Gravitação Quântica (GQ), se verifica na literatura a presença de uma série de tentativas de estimar o valor de β . Dreyer, por exemplo, motivado pelo trabalho de Hod sobre modos quasi-normais assintóticos de buracos negros, propôs uma nova forma de corrigir o parâmetro- β . Neste caso, a fim de que os resultados da fórmula da entropia de Bekenstein-Hawking e do modo quasi-normal cheguem à mesma resposta, o parâmetro de Barbero-Immirzi deve ser dado por $\beta = \ln 3 / (2\sqrt{2}\pi)$. Em um paper recente , que considera a formulação de Fadeev da gravitação, Khatsymovsky descobriu que o espectro da área elementar é proporcional ao β com valor de $\beta = 0,39\dots$. A. Majhi *et al* obtiveram a seguinte faixa para β : $0,159 < \beta < 0,225$ ao requerer a validade da lei da área de Bekenstein-Hawking, relacionando os dois parâmetros que caracterizam os estados quânticos de horizontes de buracos negros, modelados como horizontes quânticos isolados. No trabalho da referência, os autores obtiveram o valor $\beta = \ln 3/\pi$ por meio do cálculo da entropia para um horizonte isolado não-rotativo arbitrário.

Certos modelos que vem trazendo bons resultados para o avanço da GQ têm sido o de teorias de invariantes de curvatura ou torção de mais alta ordem, se-

gundo os quais, as ações contêm termos quadráticos na curvatura e na torção. Portanto, seguindo esta linha, adotamos como ponto de partida o modelo discutido na referência e o enriquecemos com a adição do termo de Holst com o acoplamento mínimo entre férmions e torção. Logo, estamos diante de um modelo com torção dinâmica, advinda de termos com derivadas mais altas, as quais nos trazem grávitons massivos. Vale a pena salientar que o termo de Holst, na ausência de férmions, não apresenta torção. No entanto, ao se introduzirem os férmions, a torção do termo de Holst é excitada. Ou seja, a escolha é motivada pelo fato de que na teoria de Einstein-Cartan, o campo de torção torna-se relevante apenas na presença de uma corrente fermiônica. Além disso, o fato do acoplamento mínimo de férmions à RG clássica torna a gravitação sensível ao parâmetro- β

Atacando o problema do mecanismo de geração de massa a 1-loop para férmions acoplados aos graus de liberdade quânticos da gravitação, buscamos compreender a possível influência do parâmetro de Barbero-Immirzi neste mecanismo de geração de massa, esperando, assim, investigar o possível papel do parâmetro- β no contexto da física de partículas. Dentro desta perspectiva, esta é uma contribuição original, uma vez que as discussões que aparecem na literatura da área dizem respeito apenas ao papel do parâmetro de Barbero-Immirzi no contexto da Cosmologia.

Este capítulo obedece a seguinte organização: na primeira seção, revemos brevemente os PRINCIPAIS RESULTADOS DA AÇÃO DE HOLST EM NÍVEL DE LAGRANGEANO e apresentamos uma descrição do modelo discutido na referência. Apresentamos também nossas convenções e os propagadores do modelo. Na seção III, estudamos uma extensão de nosso modelo a fim de incluir o acoplamento mínimo entre a torção e o espinor de Dirac. Na seção IV apresentamos discussões e conclusões.

5.1 Descrição do Modelo

Trabalhamos com o formalismo de primeira-ordem, no qual a configuração do espaço consiste de duas variáveis de campo independentes: a conexão de spin ω_μ^{ab} no espaço $SO(1, 3)$ e a vielbein e_μ^a . Esta escolha é justificada por entendermos que esta seja uma abordagem mais fundamental para a gravitação, uma vez que ela é baseada na abordagem de Yang-Mills. O Lagrangeano gravitacional no vácuo (termo de Einstein-Cartan), juntamente com o invariante de Holst, multiplicado pelo parâmetro de Barbero-Immirzi, dado pela constante de acoplamento $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_{EC} + \mathcal{L}_H = e(-\alpha R - \frac{\alpha}{2\beta} e_a^\mu e_b^\nu \epsilon^{ab}_{cd} R_{\mu\nu}{}^{cd}) \quad (5.1)$$

onde $\alpha = \frac{1}{16\pi G}$ e e denota o valor absoluto do determinante da co-tetrada. O tensor de curvatura $R_{\mu\nu}{}^{cd}$ está associado à conexão de spin ω_μ^{ab} que não está livre de torção. Por fim, ϵ_{abcd} denota o tensor de Levi-Civita 4-dimensional.

Em GRAVITAÇÃO PURA, o parâmetro- β não afeta a equação de movimento do gráviton. Este não é o caso quando férmions estão presentes. Neste aspecto, a ação de Dirac efetiva contém uma interação axial corrente-corrente cuja dependência de β se torna não-trivial e que não pode ser um valor arbitrário uma vez que podemos ter efeitos observáveis.

Nossa motivação neste capítulo é investigar a relevância do parâmetro de Barbero-Immirzi no nível quântico, considerando a densidade de Lagrangeano mais geral que preserve paridade e que descreva os grávitons massivos estudados

nas referências com um termo adicional de Holst, i.e.:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & e(-\alpha R + \chi R^2 + \rho R_{\mu a} R^{\mu a} + \gamma R_{\mu a} R^{a\mu} + \\
 & \xi R_{\mu\nu ab} R^{\mu\nu ab} + \kappa R_{\mu\nu ab} R^{ab\mu\nu} + \lambda R_{\mu\nu ab} R^{\mu a\nu b} + \\
 & x T_{\mu ab} T^{\mu ab} + y T_{\mu ab} T^{ab\mu} + z T_{\mu a}{}^a T^{\mu b}{}_b + \\
 & -\frac{\alpha}{2\beta} e_a^\mu e_b^\nu \epsilon^{ab}{}_{cd} R_{\mu\nu}{}^{cd}).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde χ , γ , ξ , κ , λ e β são parâmetros arbitrários adimensionais e os demais parâmetros são dados por

$$[s] = [t] = [r] = 1.$$

Nossas convenções são:

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^{cb} - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^{cb} \tag{5.3}$$

$$R_\mu{}^a = e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab} \tag{5.4}$$

$$R = e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab} \tag{5.5}$$

$$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \tag{5.6}$$

onde os índices gregos se referem ao índices de mundo (world manifold) e os índices latinos indicam os índices de sistema de referência local.

Em 4 dimensões, o tensor de torção tem 24 graus de liberdade e pode ser decomposto em relação ao grupo de Lorentz em 3 tensores irredutíveis: um vetor traço v^μ , um vetor traço axial a^μ e um tensor de rank-3 $q_{\mu\nu\alpha}$ que satisfaz as $q_{\mu\alpha}{}^\alpha = 0$ e $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\alpha\beta\mu} = 0$. De posse destas informações, a torção genérica pode ser expressa por:

$$T_{\nu\mu\alpha} = q_{\nu\mu\alpha} + \frac{1}{3} (\eta_{\nu\alpha} v_\mu - \eta_{\mu\alpha} v_\nu) + \epsilon_{\nu\mu\alpha\lambda} a^\lambda. \tag{5.7}$$

Ao longo deste capítulo, consideraremos a geometria restrita de Cartan na qual $q_{\nu\mu\alpha} = 0$. O significado físico desta hipótese é que a componente do tensor de torção não está acoplada ao campo espinorial de Dirac conforme discutido na referência [REF_&].

A seguir fazemos uma divisão da vielbein de acordo com

$$e_a^\mu = \delta_a^\mu + h_a^\mu \quad (5.8)$$

no background de Minkowski e flutuação h_a^μ .

Além disso, a flutuação pode ser decomposta como

$$h_{ab} = \frac{1}{4}\eta_{ab}s + \epsilon_{abcd}\partial^c W^d \quad (5.9)$$

Antes de prosseguir, lembramos que a conexão de spin ω_μ^{ab} pode ser expressa como

$$\omega_\mu^{ab} = \tilde{\omega}_\mu^{ab} + K_\mu^{ab} \quad (5.10)$$

onde $\tilde{\omega}_\mu^{ab}$ é a parte Riemanniana da conexão de spin

$$\tilde{\omega}_\mu^{ab} = \frac{1}{2}e_{\mu c}(\Omega^{cab} + \Omega^{acb} - \Omega^{bac}) \quad (5.11)$$

onde $\Omega_{cba} = e_c^\mu e_b^\nu (\partial_\mu e_{\nu a} - \partial_\nu e_{\mu a})$ referem-se aos coeficientes de rotação.

K_μ^{ab} são as componentes do tensor contorção

$$K_\mu^{ab} = \frac{1}{2}(T_\mu^{ab} - T_\mu^{ba} + T_{\mu a}^b) \quad (5.12)$$

Usando as equações (5.7-5.12), a flutuação da conexão de spin pode ser colocada de uma forma mais útil:

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{\alpha\beta} = & \frac{1}{8}(\delta_\mu^\beta \partial^\alpha s - \delta_\mu^\alpha \partial^\beta s) + \frac{1}{2}(\epsilon_{\mu\rho\lambda}^\beta \partial^\alpha \partial^\rho W^\lambda - \epsilon_{\mu\rho\lambda}^\alpha \partial^\beta \partial^\rho W^\lambda) \\ & + \frac{1}{3}(\delta_\mu^\beta v^\alpha - \delta_\mu^\alpha v^\beta) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} a^\lambda \end{aligned} \quad (5.13)$$

Em virtude do teorema de Gauss-Bonnet, como consideramos apenas os termos quadráticos na curvatura e torção no Lagrangeano,

$$\int d^4x e (R_{\mu\nu ab} R^{\mu\nu ab} - 4R_{\mu a} R^{\mu a} + R^2) = 0 \quad (5.14)$$

há um termo redundante entre as possibilidades para D=4.

Finalmente, obtemos a parte relevante da expansão bilinear do Lagrangeano (5.2). Fazendo uso das equações (5.13) e (5.14) e após um cálculo direto, porém longo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & s \left[\frac{3}{16} (\rho + \gamma + \xi + k + \frac{\lambda}{2}) \square - \frac{39\alpha}{32} \right] \square s + v^\mu \left[\frac{7\alpha}{2} - \left(\frac{7\rho}{6} + \gamma + \xi + k + \frac{5\lambda}{12} \right) \square \right] \partial_\mu s + \\ & v^\mu \left[-\left(\frac{\rho}{4} + \frac{2\lambda}{9} + \frac{8\xi}{9} \right) \eta_{\mu\nu} \square - \frac{4}{3} \left(\frac{2\rho}{3} + \gamma - \frac{\xi}{3} + k + \frac{\lambda}{3} \right) \partial_\mu \partial_\nu + \left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} + z \right) \eta_{\mu\nu} \right] v^\nu + \\ & w^\mu \left[\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\gamma}{2} + 2\xi - 2k \right) \eta_{\mu\nu} \square^2 + \left(-\frac{\rho}{2} - \frac{\gamma}{2} - 2\xi + 2k - \lambda \right) \square \partial_\mu \partial_\nu - \frac{5\alpha}{2} \eta_{\mu\nu} \square + \frac{5\alpha}{2} \partial_\mu \partial_\nu \right] \square w^\nu + \\ & a^\mu \left[\rho - \gamma + 4\xi - 4k - \frac{\lambda}{2} \right] \square^2 + 2\alpha \eta_{\mu\nu} \square + 2\alpha \partial_\mu \partial_\nu + \left(-\rho + \gamma - 4\xi + 4k - \frac{5\lambda}{2} \right) \square \partial_\mu \partial_\nu \right] w^\nu + \\ & a^\mu \left[\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\gamma}{2} + 2\xi - 2k \right) \square + \left(-\frac{\rho}{2} + \frac{\gamma}{2} + \xi + 2k - \frac{3\lambda}{2} \right) \partial_\mu \partial_\nu - 3 \left(\frac{\alpha}{2} + 2x + 2y \right) \eta_{\mu\nu} \right] a^\nu + \\ & a^\mu \left(\frac{21\alpha}{8\beta} \right) \partial_\mu s + a^\mu \left(\frac{2\alpha}{\beta} \right) \eta_{\mu\nu} v^\nu. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Seguem duas importantes observações. A primeira é uma situação particular baseada na sensibilidade ao β segundo a qual, o campo w^μ não sente o β , de modo que podemos eliminá-lo da decomposição da métrica. A segunda observação refere-se ao acoplamento mínimo na presença de campos de Dirac massivos, tópico que consideraremos na próxima seção. Como se sabe, uma partícula fermiônica do tipo-Dirac interage apenas com a parte totalmente anti-simétrica da torção, assim podemos desprezar a componente vetorial da torção. Portanto, o Lagrangeano (5.12) pode ser reescrito apenas em termos da componente escalar da métrica e

da componente pseudo-vetorial da torção.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{3}{16}(\rho + \gamma + \xi + k + \frac{\lambda}{2})s\Box^2s - \frac{39\alpha}{32}s\Box s + \\
 & (-\frac{\rho}{2} + \frac{\gamma}{2} - 2\xi + 2k)(\partial_\mu a^\nu)^2 + \\
 & (\frac{\rho}{2} - \frac{\gamma}{2} - \xi - 2k + \frac{3\lambda}{2})(\partial_\mu a^\mu)^2 - \\
 & 3(\frac{\alpha}{2} + 2x + 2y)a^\mu a_\mu + \frac{21\alpha}{4\beta}a^\mu \partial_\mu s.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Com exceção da constante α , os coeficientes na expressão (5.6) são constantes arbitrárias.

Definindo

$$\begin{aligned}
 -\frac{\rho}{2} + \frac{\gamma}{2} - 2\xi + 2k &= 0, \\
 \frac{\rho}{2} - \frac{\gamma}{2} - \xi - 2k + \frac{3\lambda}{2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$x + y = 0,$$

obtemos $\xi = \lambda/2$. O Lagrangeano (5.16) pode ser reescrito em termos de novas constantes como

$$\mathcal{L} = As\Box^2s + Fs\Box s + Ba^\mu a_\mu + Ha^\mu \partial_\mu s \tag{5.18}$$

onde

$$A = \frac{3}{16} \left(\rho + \gamma + \xi + k + \frac{\lambda}{2} \right), \quad B = -3 \left(\frac{\alpha}{2} + 2x + 2y \right), \quad F = -\frac{39\alpha}{32} \quad \text{e} \quad H = \frac{21\alpha}{4\beta}. \tag{5.19}$$

Se usamos a equação (5.18), podemos obter imediatamente as equações de movimento para o campo vetorial axial a^μ :

$$a^\mu = -\frac{H}{2B}\partial_\mu s. \quad (5.20)$$

Conseqüentemente, o Lagrangeano (5.18) toma a forma

$$\mathcal{L} = As\Box^2 s + \left(F + \frac{H^2}{4B}\right)s\Box s. \quad (5.21)$$

Antes de CONTINUAR, é preciso fazer uma observação: o próximo passo é extraído do propagador de Feynman para o campo escalar s . Após um cálculo direto de (5.21), obtemos

$$D_F(p) = \frac{i}{2\left(F + \frac{H^2}{4B}\right)}\left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 - m^2}\right) \quad (5.22)$$

onde

$$m_1^2 = \frac{1}{A}\left(F + \frac{H^2}{4B}\right). \quad (5.23)$$

Já que estamos trabalhando em cenários que vão desde baixas escalas até vários TeV 's, e a massa m_1 pertence a escala de Planck, o teorema de Appelquist-Carazzone assegura que os efeitos dos loops Planckianos não são detectáveis na escala TeV .

Assim, em vista da supressão dos efeitos de uma excitação massiva planckiana ($p^2 = m^2$) pelas potências de $1/m^2$, por causa de nossas considerações, o propagador do campo escalar pode ser tomado como segue:

$$D_F(p) = -\frac{i}{2\left(F + \frac{H^2}{4B}\right)p^2} \quad (5.24)$$

Uma que tenhamos analisado o espectro de excitações que surgem no setor de gravitação, estaremos ocupados com a introdução de férmions e nossa meta principal será o cálculo dos efeitos de modelos de gravidade (virtuais) na auto-energia de férmions e, ao fazê-lo, estaremos seguindo a trilha para a contribuição do parâmetro- β para a massa do férmion.

5.2 Acoplamento com campos de matéria fermiônica

Nos últimos anos, muita atenção foi dedicada ao estudo de campos de Dirac em espaços-tempo curvos [REF]. Particularmente, Foi mostrado por Perez e Rovelli [85] e por Freidel, Minic e Takenchi [86] que quando campos espinoriais minimamente acoplados estão presentes na teoria de Einstein-Cartan com o termo de Holst, este, EM GERAL, DEIXA DE SER TOPOLÓGICO. Na presença de férmions, temos uma modificação na estrutura do espaço-tempo que faz com que os campos de torção não desapareçam. Portanto, temos uma interpretação de nível clássico deste parâmetro, A qual está relacionada com interações de corrente axial-axial. Agora, a fim de um melhor entendimento do efeito do parâmetro de Immirzi em física de partículas, vamos calcular as correções para a massa dos férmions devido a este parâmetro para o modelo descrito na seção anterior.

A densidade de Lagrangeano que corresponde à equação de Dirac em espaços-curvos é

$$\mathcal{L}_D = e \left(\frac{i}{2} e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a D_\mu \psi - \frac{i}{2} e_a^\mu D_\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi - m_0 \bar{\psi} \psi \right). \quad (5.25)$$

A derivada covariante que age no espinor é

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{g}{8} \omega_\mu^{ab} \quad (5.26)$$

onde $\gamma_\mu = e_\mu^a \gamma_a$, γ_a são as matrizes de Dirac ($a, \mu = 0, 1, 2, 4$) no espaço-tempo plano usual, g é uma constante de acoplamento adimensional e m_0 é a massa do campo de Dirac.

De acordo com o que foi discutido na seção anterior, estamos trabalhando apenas com o campo escalar s e o pseudo-vetor a^μ tal que a conexão de spin pode ser escrita como

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{8} (\delta_\mu^\beta \partial^\alpha s - \delta_\mu^\alpha \partial^\beta s) + \frac{1}{2} \epsilon_\mu^{\alpha\beta}{}_\lambda a^\lambda \quad (5.27)$$

Substituindo (5.26) e (5.27) em (5.25) e fazendo uso da identidade (5.28)

$$\gamma^a \gamma^b \gamma^c = \gamma^a \eta^{bc} + \gamma^c \eta^{ab} - \gamma^b \eta^{ab} + i \epsilon^{abcd} \gamma_5 \gamma_d \quad (5.28)$$

e após alguma algebra, chegamos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = & \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m_0\bar{\psi}\psi + \frac{is}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \\ & \frac{3g}{4}a^\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi + \frac{3g}{4}sa^\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi - m_0s\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando a equação (5.20), o resultado para o Lagrangeano efetivo de Dirac pode ser convenientemente expresso na forma

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{is}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + a\partial_\mu s\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi + as\partial_\mu s\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi - m_0s\bar{\psi}\psi. \quad (5.30)$$

Onde, por uma questão de simplicidade, definimos $a = -3gH/8B$. Logo, podemos observar que a constante de acoplamento desta interação depende do parametro de Immirzi através de H . Vamos considerar as regras de Feynman para o Lagrangeano (5.25). OS MOMENTA, NESTE TRABALHO, ESTÃO INDO EM DIREÇÃO AOS VÉRTICES. Assim, os 3-VÉRTICES férmion-escalar tomam a forma

$$\frac{i}{2}(p+p)_\mu\gamma^\mu - aq_\mu\gamma_5\gamma^\mu - im_0 \quad (5.31)$$

e os vértices que descrevem uma quadri-interação escalar-férmion são dados por

$$aq_\mu\gamma_5\gamma^\mu. \quad (5.32)$$

O propagador para o campo fermiônico de matéria é dado por

$$S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m}. \quad (5.33)$$

Destes resultados, convertemos o cálculo das correções de auto-energia nos propagadores nus e discutimos o mecanismos de geração de massa para os campos fermiônicos atentando para os pólos dos propagadores corrigidos a 1-loop. Para o GRÁFICO da auto-energia do férmion, encontramos

$$-i\Sigma(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{i}{2}(2\not{p} - \not{q}) - a\gamma_5\not{q} - im_0 \right\} \times i \frac{\not{p} - \not{q} + m_0}{(p-q)^2 - m_0^2} i \left(-\frac{1}{2\tilde{F}q^2} \right) \left\{ \frac{i}{2}(2\not{p} - \not{q}) - a\gamma_5\not{q} - im_0 \right\} \quad (5.34)$$

onde definimos $\tilde{F} = F + \frac{H^2}{4B}$. O parâmetro de regularização dimensional é dado por $\varepsilon^{-1} = \ln(\Lambda^2/\mu^2)$. Onde Λ é o cut-off e μ é um parâmetro de massa arbitrário.

O resultado para a parte divergente da auto-energia do férmion a 1-loop tem a seguinte forma:

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{1}{16\pi^2 \tilde{F} \varepsilon} \{ m_0 [m_0^2 (\frac{1}{4} + a^2) - 3p^2] I_{4 \times 4} + \frac{1}{2} [\frac{1}{3} (\frac{79}{4} - 7a^2) p^2 + (\frac{1}{4} - a^2) m_0^2] p_\mu \gamma^\mu + \frac{ia}{2} (\frac{19}{3} p^2 + m_0^2) p_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \}. \quad (5.35)$$

A inserção deste gráfico a 1-loop conduz ao seguinte Lagrangeano corrigido a 1-loop

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\gamma^\mu p_\mu - m_0 - \tilde{\Sigma}) \psi = \bar{\psi} \mathcal{O} \psi. \quad (5.36)$$

Estamos, agora, prontos para encontrar o propagador do férmion corrigido e, conseqüentemente, a relação entre a massa nua e a massa física do férmion em nosso modelo. O esquema de cálculo deste resultado segue a metodologia padrão para a obtenção de contribuições a 1-loop e, por esta razão, não expusemos os detalhes explícitos das manipulações analíticas e algébricas. O resultado é a relação *on-shell*

$$(D^2 - E^2 + C^2 - 2E \cdot C)(D^2 - E^2 + C^2 + 2E \cdot C) + 4E^2 C^2 = 0 \quad (5.37)$$

onde usamos as notações compactas $E^2 = E_\mu E^\mu$ e o fato de que $p^2 = m^2$. Nós omitimos o resultado estendido da equação (5.37) que é muito longo e reportamos, a seguir, apenas as partes de maior interesse .

$$D = -m_0 \left\{ \frac{2\beta^2}{3\pi^2 \alpha \varepsilon (13\beta^2 + 49)} [3m^2 - \frac{1}{4} (1 + \frac{441g^2}{64\beta^2}) m_0^2] + 1 \right\} \quad (5.38)$$

$$E_\mu = \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{12\pi^2 \alpha \varepsilon (13\beta^2 + 49)} \left[\frac{1}{3} (79 - \frac{3087}{64\beta^2}) m^2 + (1 - \frac{441g^2}{64\beta^2}) m_0 \right] \right\} \quad (5.39)$$

$$C_\mu = -\frac{ia\beta^2}{9\pi^2\alpha\epsilon(13\beta^2 + 49)}(19m^2 + 3m_0^2)p_\mu \quad (5.40)$$

É claro, não poderíamos obter a expressão analítica para a massa m como uma função do parâmetro- β da equação (5.37). Portanto, na próxima seção, o restante de nossos cálculos serão feitos usando sistemas de computação algébrica MAPLE. Na próxima seção, apresentamos os resultados de nossa análise numérica do modelo que estamos lidando e os comparamos com os resultados conhecidos do parâmetro-BI mencionados na introdução.

5.3 Discussões e Conclusões gerais

Nosso principal interesse neste trabalho foi estudar o efeito do parâmetro de Barbero-Immirzi, β , sobre a massa do férmion no contexto de uma Teoria de Gravitação Estendida com termos de torção explícitos. Para esta proposta, nós realizamos cálculos a 1-loop nesta teoria quando gravidade e férmions estão minimamente acoplados. Procedendo desta maneira e conhecendo a massa física do férmion de dados experimentais obtidos no LHC, esperavamos obter uma estimativa para o parâmetro-BI. Infelizmente, isso não pôde ser feito porque a equação (5.37) depende de três parâmetros, que são o cut-off Λ , o parâmetro de massa arbitrário μ e a massa nua do férmion m_0 . Por esta razão, tivemos que adotar uma estratégia alternativa. Como um passo inicial, nós fixamos os parâmetros Λ , μ e m_0 , escolhendo uma escala de energia apropriada, como a do LHC. Com base nisso, obtivemos uma relação entre m e β . Assim, pudemos verificar que a faixa de valores para β que vem sendo reportada na literatura é compatível com a massa observada para o férmion sob a escala de energia fixada. Na figura 5.3 está retratado os resultados obtidos para $\Lambda = 250$ MeV (correspondendo ao cut-off da Cromodinâmica Quântica) e como era de se esperar, as correções para a massa do férmion são extremamente pequenas. Por inspeção do gráfico, verifica-se que

Figura 2 – The running of β , com $\Lambda = 250$ MeV , $\mu = 1$ MeV e $m_0 = 250$ MeV

Figura 3 – The running of β , depicted in the previous figure, in the interval $0,159 < \beta < 0,225$. Note the almost linear behavior.

a massa do férmion decresce com o aumento do parâmetro de Barbero-Immirzi, β , e quando o mesmo tende a zero, a massa do férmion é finita.

Por outro lado, quando γ tende a infinito, a equação (5.37) não exibe uma solução real para a massa do férmion. A figura 1 exibe um resultado intrigante que é válido para certa faixa de valores do β a qual corresponde a mesma daquela que tem sido reportada nas referências , i.e., $0,159 < \beta < 0,225$. Como conclusão, nosso modelo é compatível com os resultados conhecidos na literatura para o parâmetro de Barbero-Immirzi . O ponto de vista que procuramos transmitir é que os limites estabelecidos presentes para o parâmetro de Barbero-Immirzi, são compatíveis com o espectro de férmions cujas massas estão na escala do LHC. Os léptons carregados e os quarks do Modelo Padrão não seriam sensíveis ao parâmetro de Barbero-Immirzi, mas consideramos que todo o setor de férmions massivos compatíveis com a escala TeV, tais como, os charginos e neutralinos, são como uma boa sonda para o parâmetro-BI entre os domínios da Física de Partículas. Entendemos que o modelo que apresentamos aqui ainda é insuficiente . Temos claramente, como um próximo passo, a inclusão do parâmetro-BI no âmbito da Supersimetria, e, possivelmente, no modelo SUGRA mínimo que seriam os cenários corretos para esta investigação. Estamos agora concentrando esforços nesta direção e esperamos reportar em breve nos primeiros resultados nesse sentido noutra publicação.

6 Reflexões Finais e Novos Caminhos

Como já havíamos antecipado na Apresentação Geral desta Tese, houve um esforço para que cada capítulo fosse auto-contido, com uma introdução específica para o mesmo, com a contextualização, as motivações e a delimitação da questão de pesquisa a ser tratada. Ao final do mesmo, foram sempre apresentadas as discussões gerais dos resultados ali encontrados. Neste capítulo final, pretendemos apresentar a nossa percepção crítica dos objetos que investigamos e, a partir destes estudos, apontar possíveis novas trilhas a serem percorridas sucessivamente. O nosso Projeto de Tese apontou para a investigação de alguns ingredientes que se situam além das fronteiras do Modelo-Padrão:

dimensões extra, potenciais de gauge de natureza tensorial, supersimetria, matéria escura e efeitos gravitacionais transmitidos à escala de operação do LHC.

Todas as nossas explorações estavam colimadas para um único foco: *efeitos de possíveis físicas não-padrão no setor das interações eletromagnéticas.* Após a leitura de todo o material aqui contido, esta é a mensagem que se espera ter sido observada.

Elaboramos um conjunto de discussões referentes ao fenômeno eletromagnético em 5D. Limitamo-nos ao caso Abelian, justamente por quisermos tratar da Eletrodinâmica. Um de nossos limitantes neste aspecto foi não termos explorado a fundo o interessante termo de Chern-Simons em 5D, cuja característica marcante é a o aparecimento de auto-interação fotônica em um cenário eminentemente Abelian. Este fato quebra o senso-comum de que formulações Abelianas não apresentam fótons auto-interagentes. Tal questão não foi devidamente trabalhada ao longo dos Capítulos 2 e 3. Este limitante pode ser o ponto-de-partida para uma pesquisa futura. Deixamos, então, como Sugestão-1:

explorar o aspecto da auto-interação para campos de spin-1 em regime Abeli-

ano, o que nos obriga a rever a proposta de Salam – Shaw na base da construção das Teorias de Yang – Mills – Shaw. Seria realmente estimulante verificar se o procedimento de construção que se realiza em 4D levaria à ação de Yang – Mills mais geral em 5D, inclusive com o aparecimento do termo de Chern – Simons não-Abeliano completo, que comporta um termo quártico no potencial de gauge. Fica esta primeira sugestão de trabalho.

Um outro caminho que se delineia a partir dos resultados dos Capítulos 2 e 3 seria o cômputo explícito do potencial inter-partícula dos férmions carregados que se acoplam minimamente e não-minimamente ao setor de gauge em 5D. Seria de interesse trabalhar a Sugestão-2:

chegar à expressão explícita do potencial entre cargas e observar, em 5D, a dependência do mesmo nos spins das fontes carregadas. Isto nos força a compreender exatamente o que é o spin em 5D, e, de posse do potencial, proceder à redução dimensional do mesmo, no sentido de compreender se o cálculo dos potenciais inter-partícula e a redução dimensional são dois procedimentos comutantes. Esta é uma questão em aberto na literatura da área.

No Capítulo 4, o estudo do modelo mecânico supersimétrico em 5D tem muitas potencialidades, mas, aqui nesta Tese, ficou bastante limitado; sobretudo a discussão da solução com interpretação de matéria escura eletricamente carregada. Esta é uma questão muito debatida, e até mesmo controversa, na literatura do tópico. Aqui, não aprofundamos a questão. Apenas compreendemos como pode ser colocada em 4D a partir de um cenário 5-dimensional, mas não trabalhamos qualquer aspecto fenomenológico que pudesse nos trazer algum vínculo a partir de medidas astrofísicas. Desta limitação, emerge a nossa Sugestão-3 de um possível novo encaminhamento:

relacionar o setor fermiônico descrito no Capítulo 3, e acoplado minimamente e não-minimamente ao setor de gauge, à partícula fermiônica carregada descrita no Capítulo 4 e, então, com o cômputo do potencial inter-partícula (a nossa

Sugestão-2) mencionado acima, apresentar uma proposta explícita de interação entre partículas carregadas do setor invisível. Esta é uma questão não-trabalhada na literatura do tópico. Seria um problema em aberto que poderia trazer algum dado novo para discutir a questão.

Finalmente, no Capítulo 5, onde trouxemos o parâmetro de Barbero-Immirzi e os correlatos efeitos da torção para a física de férmions na escala de operação do LHC, temos consciência de que a nossa aproximação de considerar a gravitação portada pelos graus de liberdade da torção, enquanto os graus de liberdade da métrica ficam congelados, mereceria um maior refinamento. Propusemos este cenário com base na percepção de que a alta densidade de spin no regime anterior à re-hadronização dos quarks liberados nas colisões próton – próton pode excitar os graus de liberdade da torção. Com o propósito de termos um primeiro resultado, congelamos o setor métrico e consideramos apenas o setor de torção para verificar se o parâmetro de Barbero-Immirzi chegaria ao setor de férmions na faixa dos TeV. Caso não acontecesse isto, o estudo terminaria aqui. Porém, vimos que o parâmetro que traz a torção tem efeitos na escala do TeV; com este resultado, tem-se caminho aberto para se contemplar a questão da gravitação de forma plena, isto é, reacendendo-se os graus de liberdade da métrica, que se mixam de forma não-trivial com o setor de torção. A metodologia para se levar adiante este estudo é não-trivial e nos traz a Sugestão-4 abaixo como uma nova perspectiva vislumbrada:

considerar a gravitação completa, com as excitações métricas e os modos dinâmicos da conexão-de-spin, com o claro objetivo de acompanhar a influência da métrica nos limites estipulados para o parâmetro de Barbero-Immirzi. Fisicamente, esta investigação estaria trazendo para nós um indício de qual setor da gravitação – o setor métrico ou o setor da torção – pode ser mais relevante para a física do LHC. Este aspecto pode trazer alguma luz para a discussão sobre a formação de mini-buracos-negros no LHC, e esta é a motivação por trás do inte-

resse na questão. Na literatura, pouca atenção é dada ao setor de torção quando se discute gravitação, grávitons massivos e os jatos de seus decaimentos no LHC.

Ficam lançadas estas propostas de futuras explorações.

Após estes anos de estudos e concentração nas questões de pesquisa aqui relatadas, fica o otimismo de se constatar que existe uma vasta amplitude de efeitos interessantes nas terras do além-Modelo-Padrão. Certamente, o LHC em sua nova fase de experimentos, recentemente iniciada (Abril de 2015), nos orientará muito nesta navegação no alto-mar da Física de Interações Fundamentais.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, *Journal of Mathematical Physics* **4**, 901 (1963).
- [2] J. Maldacena, *International Journal of Theoretical Physics* **38**, 1113 (1999).
- [3] X.-L. Qi, E. Witten, and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. B* **87**, 134519 (2013).
- [4] E. Witten, *ArXiv e-prints* (1998).
- [5] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **82**, 045031 (2010).
- [6] M. B. nados, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **88**, 17 (2000).
- [7] U. Gürsoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti, and F. Nitti, *Journal of High Energy Physics* **2009**, 033 (2009).
- [8] A. Mardones and J. Zanelli, *Classical and Quantum Gravity* **8**, 1545 (1991).
- [9] B. Zumino, *Physics Reports* **137**, 109 (1986).
- [10] D. Cocuroci, M. Neves, J. Helayël-Neto, and L. Ospedal, *The European Physical Journal C* **75**, 322 (2015), 10.1140/epjc/s10052-015-3540-4.
- [11] H. Belich, D. Cocuroci, G. S. Dias, J. Helayël-Neto, and M. Orlando, *JOURNAL OF ADVANCES IN PHYSICS* **8** (2015).
- [12] N. Panza, H. Rodrigues, D. Cocuroci, and J. A. Helayël-Neto, *Phys. Rev. D* **90**, 125007 (2014).
- [13] R. Durrer, *Braneworlds*, arXiv e-print hep-th/0507006 (2005).
- [14] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [15] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **560**, 49 (2001).
- [16] M. S. Turner and A. G. Riess, *Astrophys. J.* **569**, 18 (2002).

-
- [17] J. L. Sievers *et al.*, *Astrophys. J.* **591**, 599 (2003).
- [18] V. N. Lukash and V. A. Rubakov, *Phys. Usp.* **51**, 283 (2008).
- [19] M. Kalb and P. Ramond, *Physical Review D* **9**, 2273 (1974).
- [20] E. Cremmer and J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B72**, 117 (1974).
- [21] D. Z. Freedman and P. K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B177**, 282 (1981).
- [22] A. A. Slavnov and S. A. Frolov, DFPD-13/87.
- [23] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Physics Letters B* **82**, 60 (1979).
- [24] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, *Nucl. Phys.* **B122**, 253 (1977).
- [25] M. B. Green, *Classical and Quantum Gravity* **16**, A77 (1999).
- [26] S. Gubser, I. Klebanov, and A. Polyakov, *Physics Letters B* **428**, 105 (1998).
- [27] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Physics Reports* **323**, 183 (2000).
- [28] Nima Arkani-Hamed and Savas Dimopoulos and Gia Dvali, *Physics Letters B* **429**, 263 (1998).
- [29] M. Tegmark, M. A. Strauss, M. R. Blanton, K. Abazajian, S. Dodelson, H. Sandvik, X. Wang, D. H. Weinberg, I. Zehavi, N. A. Bahcall, F. Hoyle, D. Schlegel, R. Scoccimarro, M. S. Vogeley, A. Berlind, T. Budavari, A. Connolly, D. J. Eisenstein, D. Finkbeiner, J. A. Frieman, J. E. Gunn, L. Hui, B. Jain, D. Johnston, S. Kent, H. Lin, R. Nakajima, R. C. Nichol, J. P. Ostriker, A. Pope, R. Scranton, U. c. v. Seljak, R. K. Sheth, A. Stebbins, A. S. Szalay, I. Szapudi, Y. Xu, J. Annis, J. Brinkmann, S. Burles, F. J. Castander, I. Csabai, J. Loveday, M. Doi, M. Fukugita, B. Gillespie, G. Hennessy, D. W. Hogg, i. c. v. Ivezić, G. R. Knapp, D. Q. Lamb, B. C. Lee, R. H. Lupton, T. A. McKay, P. Kunszt, J. A. Munn, L. O'Connell, J. Peoples,

- J. R. Pier, M. Richmond, C. Rockosi, D. P. Schneider, C. Stoughton, D. L. Tucker, D. E. Vanden Berk, B. Yanny, and D. G. York, *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004).
- [30] P. Mazurek, "*High-Energy Radiation from Magnetized Neutron Stars*" (University of Chicago Press, 1992).
- [31] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [32] E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. D* **21**, 3269 (1980).
- [33] T. S. Koivisto and N. J. Nunes, *Phys. Rev. D* **80**, 103509 (2009).
- [34] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [35] J. Blas, J. Lizana, and M. Perez-Victoria, *Journal of High Energy Physics* **2013**, 1 (2013).
- [36] B. Döbrich, K. Daumiller, R. Engel, M. Kowalski, A. Lindner, *et al.*, ArXiv e-prints (2014), arXiv:1410.0200 [physics.ins-det] .
- [37] D. Kazanas, R. N. Mohapatra, S. Nussinov, V. L. Teplitz, and Y. Zhang, *Nuclear Physics B* **890**, 17 (2015).
- [38] B. A. Ovrut and D. Waldram, *Nuclear Physics B* **506**, 236 (1997).
- [39] N. Hitchin, ArXiv Mathematics e-prints (2000), math/0010054 .
- [40] D. Youm, *Phys. Rev. D* **63**, 045004 (2001).
- [41] M. Graña and J. Polchinski, *Phys. Rev. D* **65**, 126005 (2002).
- [42] A. A. Gerasimov and S. L. Shatashvili, *Journal of High Energy Physics* **2004**, 074 (2004).
- [43] A. Aurilia and E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **69**, 105005 (2004).
- [44] G. Dvali, ArXiv e-prints (2005), arXiv:hep-th/0507215 [hep-th] .

-
- [45] C. Bizdadea, E.-M. Cioroianu, and S. C. Săraru, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 6477 (2006).
- [46] Y. M. S. S. Pei-Ming Ho, Yosuke Imamura, *J. High Energy Phys.* **2008**, 014 (2008).
- [47] Cioroianu, E.M. and Diaconu, E. and Săraru, S.-C., *Fortschritte der Physik* **57**, 535 (2009).
- [48] J. B. Jimenez, T. S. Koivisto, A. L. Maroto, , and D. F. Mota, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2009**, 029 (2009).
- [49] T. S. Koivisto and N. J. Nunes, *Physics Letters B* **685**, 105 (2010).
- [50] T. Ngampitipan and P. Wongjun, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2011**, 036 (2011).
- [51] T. S. Koivisto and N. J. Nunes, *Phys. Rev. D* **88**, 123512 (2013).
- [52] J. Schmude, *ArXiv e-prints* (2012), arXiv:1201.1621 [hep-th] .
- [53] M. C. Diamantini, G. Guarnaccia, and C. A. Trugenberger, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47**, 092001 (2014).
- [54] L. F. Abbott, *Acta Phys. Polon. B* **13**, 5 (1982).
- [55] H. R. Christiansen, M. S. Cunha, J. A. Helay-Neto, L. R. U. Manssur, and A. L. M. A. Nogueira, *International Journal of Modern Physics A* **14**, 147 (1999).
- [56] C.N. Ferreira and J.A. Helay-Neto and M.B.D.S.M. Porto, *Nuclear Physics B* **620**, 181 (2002).
- [57] B. Holdom, *Physics Letters B* **166**, 196 (1986).
- [58] B. Holdom, *Phys.Lett.* **B259**, 329 (1991).

- [59] S. Davidson, B. Campbell, and D. Bailey, *Phys. Rev. D* **43**, 2314 (1991).
- [60] S. Davidson and M. Peskin, *Phys. Rev. D* **49**, 2114 (1994).
- [61] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [62] P. Arias, J. Jaeckel, J. Redondo, and A. Ringwald, *Phys. Rev. D* **82**, 115018 (2010).
- [63] I. Antoniadis, A. Boyarsky, and O. Ruchayskiy, *ArXiv HEP - Phenomenology* (2006), hep-ph/0606306 .
- [64] I. Antoniadis, A. Boyarsky, and O. Ruchayskiy, *Nuclear Physics B* **793**, 246 (2008).
- [65] M. Ahlers, H. Gies, J. Jaeckel, J. Redondo, and A. Ringwald, *Phys. Rev. D* **77**, 095001 (2008).
- [66] J. Jaeckel, J. Redondo, and A. Ringwald, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 131801 (2008).
- [67] J. Jaeckel, *Frascati Phys.Ser.* **56**, 172 (2012), arXiv:1303.1821 [hep-ph] .
- [68] J. Jaeckel and A. Ringwald, *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* **60**, 405 (2010), arXiv:1002.0329 [hep-ph] .
- [69] J. E. Moody and F. Wilczek, *Phys. Rev. D* **30**, 130 (1984).
- [70] B. A. Dobrescu and I. Mocioiu, *Journal of High Energy Physics* **2006**, 005 (2006).

-
- [71] F. A. G. Ferreira, P. C. Malta, L. P. R. Ospedal, and J. A. Helayël-Neto, (2014), arXiv:1411.3991 [hep-th] .
- [72] J. Redondo and A. Ringwald, *Contemporary Physics* **52**, 211 (2011).
- [73] L. H. Ryder, *Quantum field theory* (Cambridge university press, 1996).
- [74] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, *Physics Reports* **405**, 279 (2005).
- [75] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, *Physics Letters B* **485**, 208 (2000).
- [76] E. K. Park and P. S. Kwon, *Physical Review D* **82**, 046001 (2010).
- [77] E. Witten, *Nuclear Physics B* **202**, 253 (1982).
- [78] P. Salomonson and J. Van Holten, *Nuclear Physics B* **196**, 509 (1982).
- [79] D. Lancaster, *Il Nuovo Cimento A* **79**, 28 (1984).
- [80] H. Nilles, *Physics Reports* **110**, 1 (1984).
- [81] H. Haber and G. Kane, *Physics Reports* **117**, 75 (1985).
- [82] G. Giudice and R. Rattazzi, *Physics Reports* **322**, 419 (1999).
- [83] V. A. Rubakov, *Physics-Uspekhi* **44**, 871 (2001).
- [84] F. Cooper, A. Khare, and U. P. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics* (World Scientific, 2001).
- [85] A. Perez and C. Rovelli, *Physical Review D* **73**, 044013 (2006).
- [86] L. Freidel, D. Minic, and T. Takeuchi, *Physical Review D* **72** (2005), 10.1103/PhysRevD.72.104002, arXiv:hep-th/0507253.