

TESE DE
DOUTORADO

Estabilidade e Métrica Efetiva

CLAUDIA ISABEL AZUCENA DEL PILAR RIVASPLATA PAZ

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, MAIO DE 2015

Dedicatória

A mis padres queridos y adorados

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeo ao Prof. Santiago Bergliaffa pela pacincia e por acreditar em mim. Este trabalho de tese no teria sido possvel sem sua determinao e fora. Agradeo tambm ao Prof. Jos Salim quem com seus sbios conselhos me ajudou a seguir enfrente em tempos difceis.

Quero tambm mencionar o meu pilar sem o qual jamais poderia ter completado esta tarefa, minha famlia. Meu pai Antonio Rivasplata M., minha me Victoria Paz Prez e minha irm Ana Luca Rivasplata. Apesar da distncia seu amor me segurou todos os dias. A Pablo Gutirrez quem me surpreendeu nesta ltima jornada me injetando um pouco da sua disposio e energia. No posso deixar de mencionar aos amigos, essas pessoas que fizeram desta etapa de ps-graduao uma das mais bonitas da minha vida, me presenteando de boas experincias e maravilhosas lembranas. Karina Saavedra, Virginia Torres, Sadi Khodae, Jos Molina, Ignacio Hamad, Glen Tobar, Paula Ferraro, Rachel Ferreira dos Santos e os amigos distantes Helio Arteaga e Augusto Lachi. Aos colegas Josephine Rua e Eduardo Bittencourt.

Agradeo ao CNPq e CBPF pelo financiamento do meu doutorado e oportunidade de me formar nesta grande instituio

Resumo

Estudamos a estabilidade linear da acreo simtrica e estacionria de um condensado fantasma (descrito por uma teoria no linear de um campo escalar) no buraco negro de Schwarzschild. Usamos dois mtodos: O primeiro, mtodo da integral, introduzido por Moncrief que deduzido por meio da conservao do tensor energia momento das perturbaes onde se determina a estabilidade mediante a deduo do sinal da variao temporal da energia das perturbaes, dada por uma integral de superfcie. O segundo, mais tradicional, analisa a positividade do potencial efetivo. Veremos que o sistema estvel sob a aplicao de ambos mtodos. No entanto o segundo envolve clculos longos e para utiliza-lo necessrio conhecer a forma explcita da soluo do fundo do campo escalar de fundo.

Abstract

We study the linear stability of the spherically symmetric accretion of a ghost condensate (described by a non linear scalar field) onto a Schwarzschild black hole. We use two methods: The first one, introduced by Moncrief, is deduced from the conservation of the energy momentum tensor of the perturbations, and the stability is determined by means of the signal analyses of a surface integral which describes the temporal derivative of the energy perturbations. The second method employs the positivity of the effective potential. Both methods yield the result that the system is stable. Nevertheless the latter requires lengthier calculations and the explicit form of the background solution of the scalar field.

Sumário

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
1 Introdução	1
2 Métrica Efetiva	5
2.1 Perturbações num fluido em movimento.	6
2.2 Modelo lagrangiano	11
2.2.1 Cálculo da métrica efetiva para uma teoria escalar não linear	12
2.2.2 Tensor momento energia das perturbações	18
2.2.3 O caso de N campos escalares	19
2.3 Algumas aplicações da métrica efetiva	24
2.3.1 Métrica efetiva em Gravitação	24
2.3.2 Métrica efetiva em Cosmologia	25
2.3.3 Métrica efetiva em Astrofísica	26
3 Estabilidade utilizando a métrica efetiva	27
3.1 Método da integral da superfície	28
3.2 Estabilidade e positividade do potencial efetivo.	32

4	Aplicação dos métodos apresentados no Capítulo 3	36
4.1	Acreção do condensado fantasma	36
4.2	Aplicação do Método da Integral	41
4.3	Método do Potencial Efetivo	44
4.4	Comparação dos dois métodos	50
5	Conclusões e Perspectivas	52
A	Soluções estacionárias e Simetria de Shift	54
B	Acreção de Bondi	57

Capítulo 1

Introdução

Em mecânica clássica um sistema físico atinge o ponto de equilíbrio quando a soma das forças que agem sobre ele se anulam. Uma vez conseguido este ponto é necessário definir se é um equilíbrio estável ou instável. Em teoria clássica de campos a noção de equilíbrio é mais sutil. Mas, no entanto, podemos afirmar que um sistema estacionário está sempre em equilíbrio. Para determinar a estabilidade do equilíbrio é usada a teoria de perturbações¹.

No caso de sistemas gravitacionais, a estabilidade de soluções relevantes das equações de Einstein tem sido bastante analisada. Em particular, a estabilidade linear das soluções cosmológicas mais representativas foi estudada em [2]. A análise da estabilidade das soluções de buraco negro de Schwarzschild na Relatividade Geral foi iniciada por Regge e Wheeler em 1957 [3], utilizando uma decomposição tensorial das perturbações lineares da métrica em harmônicos esféricos. Foram obtidas perturbações de dois tipos segundo a sua paridade: ímpares e pares. A equação que rege as perturbações ímpares é uma equação diferencial ordinária que hoje leva o nome dos autores [3], e ela permitiu estabelecer que o buraco negro de Schwarzschild é estável frente aos dois tipos de perturbações lineares.

A estabilidade linear da generalização da solução de Schwarzschild no caso com carga não nula (isto é, a solução de Reissner-Nordstrom) foi estudada em várias ocasiões [4],[5]. As perturbações são divididas em perturbações de paridade ímpar e par, e foi mostrado que não existem soluções instáveis. E finalmente a solução de buraco negro de Kerr foi

¹Para o caso dos fluidos veja [1].

estudada em [6] e [7] onde foi provado que é estável.

É importante ressaltar que todas estas análises de estabilidade ficaram restritas ao caso linear. Algumas instâncias do caso não linear foram contempladas em [8] e [9] no caso do Kerr-Newman (através da evolução não linear das perturbações usando cálculo numérico).

Enquanto as soluções exatas de buracos negros da Relatividade Geral têm relevância desde o ponto de vista teórico, os buracos negros astrofísicos estão freqüentemente cercados por matéria. Isto faz importante o estudo da estabilidade das soluções onde há acreção da matéria no buraco negro (e em objetos compactos em geral). O caso mais simples de acreção é aquele com simetria esférica, conhecido como acreção de Bondi [10]. A acreção em estrelas foi estudada inicialmente por Hoyle e Lyttleton [11] dentro do marco newtoniano. Eles assumiram acreção esférica e desprezaram efeitos da pressão. Estes foram incorporados ao modelo por Bondi [10]. Embora este tipo de acreção seja uma forma simplificada de descrever o fenômeno, aplicações recentes ([12], [13], [14], [15]) mostram que o modelo de Bondi ainda pode ajudar a compreensão e classificação dos comportamentos da acreção [16]. Portanto, é um ponto de partida para o estudo de situações mais reais². Estudos de estabilidade da acreção no buraco negro de Schwarzschild envolvendo técnicas de sistemas dinâmicos foram apresentado em [17].

Analisaremos a acreção de um campo escalar não linear num buraco negro de Schwarzschild. Tais teorias escalares têm adquirido importância nas últimas décadas em vista da quantidade de dados consistentes com a expansão acelerada do universo (quando analisados com o modelo padrão da cosmologia que tem como hipótese a isotropia e homogeneidade). Muitos modelos foram propostos para explicar tal fenômeno, como a constante cosmológica, energia escura, dentro da qual temos, quintessência, e a k-essência. Temos ainda as teorias que generalizam a Relatividade Geral (como as teorias $f(R)$ [18]) e os modelos não homogêneos [19]. Dentro dessas novas propostas estão as teorias de campos escalares não lineares que quando acoplados minimamente com a gravitação, o tensor

²Ver [16] para uma revisão sobre acreção e suas aplicações

energia momento tem sempre a estrutura de um fluido perfeito [20]. Por isso a correspondência entre campos escalares e fluidos é muito conveniente, fazendo destas teorias modelos úteis para muitos fenômenos em Cosmologia. Se o universo está preenchido por esse tipo de matéria, se faz importante entender seu comportamento em relação aos buracos negros. Assim, neste contexto estudaremos a estabilidade da acreção do fluido, equivalente ao campo escalar na teoria do chamado condensado fantasma, ao buraco negro de Schwarzschild. O condensado fantasma foi proposto por Arkani-Hamed como uma modificação da gravitação no regime infravermelho motivado por observações cosmológicas [21].

O objetivo principal deste trabalho é estudar a estabilidade da acreção estacionária de um condensado fantasma no buraco negro de Schwarzschild descrito em [22], usando o método da integral introduzido por Moncrief em [23]. Este método utiliza as simetrias do sistema para obter uma expressão integral da variação da energia das perturbações com o tempo, sendo que o sinal da mesma permite determinar se o sistema é estável ou instável. A característica principal desta abordagem radica em que não é necessário o cálculo explícito, da integral nem da solução de fundo, mas somente do sinal da mesma. O resultado foi que a acreção estacionária do condensado no buraco negro de Schwarzschild é estável sob perturbações lineares. Mostramos ainda que o método tradicional do potencial efetivo [24] reafirmam nosso resultado. Além disso, os dois resultados concordam com a análise do regime não linear feito usando cálculo numérico [25].

No capítulo 2 apresentaremos uma introdução à métrica efetiva, bem como algumas das suas características e usos. Veremos que a métrica efetiva emerge naturalmente de teorias não lineares. Tais como fluidos, campos escalares não lineares, N campos. Faremos ainda uma breve revisão dos trabalhos realizados pelo grupo de Cosmologia e Gravitação do CBPF nesta área.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo de dois métodos de análise da estabilidade linear. O método de Moncrief envolve o uso da conservação do tensor momento energia das perturbações, enquanto que o método do potencial usa a positividade deste para analisar

a estabilidade.

No capítulo 4 faremos a aplicação dos métodos num modelo específico de campo escalar não linear, o condensado fantasma acrescido num buraco negro de Schwarzschild. Mostraremos que este sistema é estável frente a perturbações lineares sob análise de ambos. E no capítulo 5 apresentaremos as conclusões e perspectivas para desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Métrica Efetiva

A métrica efetiva governa a propagação das perturbações de um fundo fixo em teorias não lineares de origem física diversa [26]. Ela desempenha um papel importante nos modelos análogos, pois é a ferramenta fundamental na sua geração, dado que os modelos análogos visam reproduzir as características cinemáticas dos sistemas gravitacionais e fornecem a possibilidade de reproduzi-los no laboratório. O primeiro trabalho em discutir os modelos análogos data do ano 1923 por Gordon [27], que estudou a propagação da luz em meios dielétricos, regida pela métrica hoje conhecida como métrica de Gordon. Nos anos seguintes Landau e Lifshitz, no livro "The Classical Theory of Fields" [1], analisaram as equações eletrodinâmicas sob a influência de um campo gravitacional num enfoque complementar ao de Gordon, já que utilizaram o meio dielétrico para simular o campo gravitacional [28]. Dentro do marco acústico houve diversos trabalhos como o de Moncrief [23] cuja técnica é altamente relevante neste trabalho de tese. Mas talvez o artigo que iniciou à etapa moderna, onde os modelos análogos começaram a ter mais relevância na comunidade científica foi o trabalho de Unruh [29] em 1981. Ele usou o poder da analogia dos fluidos para explorar assuntos fundamentais relacionados à radiação de Hawking. Entre os modelos que conformam a ampla lista encontramos desde modelos clássicos, como os fluidos newtonianos até modelos quânticos como o condensado de Bose-Einstein [28].

Veremos neste capítulo o surgimento da métrica efetiva numa teoria escalar não linear

genérica. Especificamente ela provém da linearização, com relação a um fundo fixo. Como resultado deste processo a métrica efetiva carrega uma dependência da geometria do fundo e da configuração da solução de fundo da teoria em questão. Esta nova geometria descrita pela métrica efetiva descreve um espaço-tempo curvo e lorentziano. Inclusive se o espaço de fundo é newtoniano a geometria efetiva é sempre curva. Assim, as perturbações evoluem neste espaço-tempo efetivo.

O exemplo mais simples para entender o procedimento de linearização e obtenção da métrica efetiva é o caso das perturbações (som) num fluido barotrópico e irrotacional em movimento [28]. Neste caso a métrica efetiva se manifesta de maneira natural a partir das equações da dinâmica newtoniana, como veremos em detalhe na seção subsequente. Neste modelo a métrica efetiva (ou métrica acústica) governa a propagação das ondas de som no fluido. Caso o fluido se torne supersônico, surge um buraco mudo, que é o análogo acústico dos buracos negros na Relatividade Geral. Dado que fluidos irrotacionais e barotrópicos como os do exemplo anterior são descritos por uma lagrangiana veremos no final do capítulo como a noção de métrica acústica pode ser estendida a qualquer sistema que seja descrito por uma lagrangiana genérico.

2.1 Perturbações num fluido em movimento.

A base do modelo explora o domínio da dinâmica de fluidos newtonianos [26]. A representação esquemática da propagação das perturbações num fluido em movimento é mostrada na Fig. ??

As equações fundamentais da dinâmica newtoniana dos fluidos são a equação de continuidade

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

e a equação de Euler

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \rho \left[\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \vec{F}, \quad (2.2)$$

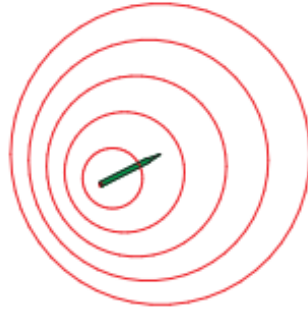


Figura 2.1: Representação de um fluido em movimento (linha verde) que arrasta as ondas de som (linhas vermelhas)

onde ρ e \vec{v} são respectivamente a densidade e a velocidade do fluido, \vec{F} é a força total volumétrica que inclui a força devida à pressão, à gravidade newtoniana e eventuais forças externas arbitrarias.

Supondo que o fluido não tem viscosidade e não está sob influência de forças externas, tal que a única força presente é a força devida a pressão dada por $\vec{F} = -\vec{\nabla}p$, a equação de Euler se escreve como

$$\partial_t \vec{v} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2. \quad (2.3)$$

Partimos da suposição de um fluido irrotacional, com a qual podemos definir o potencial da velocidade $\vec{v} \equiv \vec{\nabla}\phi$. Ainda, se consideramos o fluido como fluido barotrópico, onde a densidade depende somente da pressão, $\rho = \rho(p)$, a entalpia h é definida em função de p unicamente, ou seja,

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')} \implies \vec{\nabla}h = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p.$$

Com estas considerações sobre o fluido a equação de Euler se reduz a

$$-\partial_t \phi + h + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 = 0. \quad (2.4)$$

A linearização das quantidades ρ , p e ϕ se realiza em torno do fundo representado por ρ_0 , p_0 , ϕ_0 .

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \epsilon\rho_1 + O(\epsilon^2, \epsilon^3, \dots), \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2, \epsilon^3, \dots), \\ \phi &= \phi_0 + \epsilon\phi_1 + O(\epsilon^2, \epsilon^3, \dots),\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde ϵ é uma quantidade pequena cuja potência representa a ordem da perturbação. Desprezando os termos com ordens maiores que um, e usando a equação (2.5), a entalpia toma a forma

$$h = h_0 + \epsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \dots\tag{2.6}$$

Substituindo as equações (2.5) na equação de continuidade (2.1), obtemos

$$\left[\partial_t \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\nabla} \phi_0) \right] \epsilon^0 + \left[\partial_t \rho_1 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{\nabla} \phi_0 + \rho_0 \vec{\nabla} \phi_1) \right] \epsilon^1 = 0.\tag{2.7}$$

O termo com o fator ϵ^0 é a equação de continuidade (2.1) para as soluções do fundo,

$$\partial_t \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\nabla} \phi_0) = 0,\tag{2.8}$$

com isto, temos que

$$\partial_t \rho_1 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{\nabla} \phi_0 + \rho_0 \vec{\nabla} \phi_1) = 0.\tag{2.9}$$

A equação de Euler (2.4), analogamente à equação de continuidade, resulta também em um par de equações, depois de considerada a equação (2.5), isto é,

$$-\partial_t \phi_0 + h_0 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi_0)^2 = 0,\tag{2.10}$$

$$-\partial_t \phi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{\nabla} \phi_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 = 0.\tag{2.11}$$

Da equação de estado e da equação (2.11), temos

$$\rho_1 = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 p_1 = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 \rho_0 \left(\partial_t \phi_1 + \vec{\nabla} \phi_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right). \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) na equação linearizada de continuidade [28] obtemos

$$-\partial_t \left[\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 \rho_0 \left(\partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho_0 \vec{\nabla} \phi_1 - \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 \rho_0 \vec{v}_0 \left(\partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \right] = 0. \quad (2.13)$$

Esta equação linearizada descreve a propagação das perturbações ϕ_1 do potencial escalar linear. Note que ρ_0 , p_0 , ϕ_0 são coeficientes dependentes da posição e do tempo limitados a satisfazer as equações de Euler e de continuidade para um fluido barotrópico, sem viscosidade e irrotacional. Uma vez obtido ϕ_1 é possível obter ρ_1 e p_1 usando as equações (2.11) e (2.9). Conseqüentemente esta equação descreve completamente o comportamento das perturbações.

Introduzindo a matriz simétrica

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{bmatrix} -1 & -v_0^j \\ -v_0^i & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde "i" e "j" são índices que indicam coordenadas espaciais e

$$c_s^{-2} \equiv \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0,$$

com c_s sendo a velocidade de som. A equação (2.13) pode ser escrita como

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0, \quad (2.15)$$

e onde foram utilizadas as coordenadas $x^\mu \equiv (t, x^i)$. Com isto a equação (2.15) é completamente equivalente à equação (2.13), na notação 4-dimensional que permite facilidade operacional e correspondência com a equação de D'Alembert para um campo escalar ϕ

com uma métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, dada por

$$\square\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \right). \quad (2.16)$$

Esta correspondência mostra que podemos definir a métrica efetiva $\tilde{g}^{\mu\nu}$ como

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

A partir de agora os termos com tilde indicam às quantidades definidas usando a métrica efetiva. Segue da equação (2.14) e da equação (2.17) que

$$\tilde{g} = \det(f^{\mu\nu}) = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2}, \quad \sqrt{-\tilde{g}} = \frac{\rho_0^2}{c_s}. \quad (2.18)$$

Portanto

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(t, x^i) \equiv \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{bmatrix} -1 & -v_0^j \\ -v_0^i & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

que é a métrica efetiva inversa. Podemos determinar a métrica efetiva simplesmente invertendo a equação (2.19). Usando $\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}_{\mu\alpha}^{-1} = \delta_\alpha^\nu$,

$$\tilde{g}_{\mu\nu}^{-1}(t, x^i) \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & -v_0^j \\ -v_0^i & \delta_{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

e o intervalo acústico se expressa, como segue

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[-c_s^2 dt^2 + \delta_{ij} (dx^i - v_0^i dt) (dx^j - v_0^j dt) \right]. \quad (2.21)$$

Segue que a propagação do som num fluido barotrópico, sem viscosidade e irrotacional é governado pela métrica efetiva (2.21), a qual descreve um espaço-tempo efetivo de Lorentz em $(3 + 1)$ dimensões. Esta métrica depende das funções do fundo, ou seja fica completamente determinada pela densidade, velocidade do fluido e velocidade do

som. É notável que a métrica acústica herde algumas propriedades da métrica do fundo como causalidade, assinatura e simetrias, como veremos na seção (3.1). Outro aspecto a observar é que uma métrica lorentziana geral possui 6 graus de liberdade (em $3 + 1$ dimensões) enquanto a métrica acústica é mais restrita, possui 2, ϕ_0 e c_s . Assim, o espaço-tempo acústico desta seção não pode representar mais que um subconjunto dos possíveis espaço-tempos que soluções de uma teoria gravitacional visa descrever). É importante notar ainda que no contexto do espaço-tempo acústico a métrica efetiva inversa $\tilde{g}^{\mu\nu}$ tem maior relevância no sentido que, nas equações de movimento ou no tensor momento e energia ela aparece de forma explícita. A métrica acústica incorpora(para casos com as simetrias necessárias) várias noções da Relatividade Geral como ergo-esferas, horizontes de eventos, etc.

A dedução da métrica efetiva neste caso foi construída através das equações fundamentais da dinâmica de fluidos mas, como veremos na seção seguinte, o processo pode ser estendido ao caso de uma teoria descrita por qualquer lagrangiana não linear¹.

2.2 Modelo lagrangiano

Na seção precedente foi introduzida a noção de métrica efetiva, derivada a partir das equações fundamentais da dinâmica newtoniana no caso de um fluido barotrópico, sem viscosidade e irrotacional. Como, em geral os campos físicos são descritos através de uma lagrangiana, surge a questão se a noção de métrica efetiva pode ser estendida a todos os sistemas que sejam descritos por uma lagrangiana. Nesta seção veremos que, de fato, a métrica efetiva emerge em diferentes teorias não lineares descritas por uma lagrangiana.

¹De fato, o fluido desta seção também admite uma descrição lagrangeana [28].

2.2.1 Cálculo da métrica efetiva para uma teoria escalar não linear

Consideremos um campo escalar $\phi(x)$ cuja dinâmica é governada pela ação

$$S(W) = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}(W, \phi) d^4x, \quad (2.22)$$

onde g é o determinante da métrica do fundo, $W = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ e \mathcal{L} é uma função arbitrária de W e ϕ . O tensor momento energia associado é

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 2\mathcal{L}_W \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.23)$$

onde $\mathcal{L}_W \equiv \frac{d\mathcal{L}}{dW}$. A densidade de energia é dada por

$$\rho = 2W \mathcal{L}_W. \quad (2.24)$$

Impondo que ela seja positiva, a lagrangeana deve satisfazer,

$$\mathcal{L}_W > 0 \quad \forall W > 0, \quad (2.25)$$

ou

$$\mathcal{L}_W < 0 \quad \forall W < 0.$$

A equação de movimento, obtida da variação da ação apresentada na equação (2.22) com relação ao campo ϕ , vem dada por

$$2 \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_W g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \right)_{,\nu} - \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi = 0, \quad (2.26)$$

onde $\mathcal{L}_\phi = \partial \mathcal{L} / \partial \phi$. Perturbando linearmente a solução de fundo, de maneira que

$$\phi(t, x^i) \rightarrow \phi_0(t, x^i) + \varepsilon \phi_1(t, x^i), \quad (2.27)$$

onde ϕ_0 é o campo de fundo e ϕ_1 a perturbação e ε é uma constante que indica a ordem da perturbação. Podemos expandir a lagrangiana em torno de ϕ_0 da seguinte forma [26]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(W, \phi) = & \varepsilon^0 \mathcal{L}(W_0, \phi_0) + \varepsilon^1 (\mathcal{L}_\phi \phi_1 + 2\mathcal{L}_W \phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu}) + \\ & + \varepsilon^2 \left[\mathcal{L}_W \phi_{1,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \phi_1^2 + 2\mathcal{L}_{W\phi} \phi_1 \phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} (\phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu})^2 \right] + \\ & + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.28)$$

A ação perturbada é dada por

$$\begin{aligned} S = & \int \sqrt{-g} \{ \mathcal{L}(W_0, \phi_0) + \varepsilon^1 (\mathcal{L}_\phi \phi_1 + 2\mathcal{L}_W \phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu}) + \\ & + \varepsilon^2 \left[\mathcal{L}_W \phi_{1,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \phi_1^2 + 2\mathcal{L}_{W\phi} \phi_1 \phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} (\phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu})^2 \right] + \\ & + O(\varepsilon^3) \} d^4x. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} S = & \int \sqrt{-g} \{ \mathcal{L}(W_0, \phi_0) + \varepsilon^2 [\mathcal{L}_W \phi_{1,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \phi_1^2 + 2\mathcal{L}_{W\phi} \phi_1 \phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} (\phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu})^2] + O(\varepsilon^3) \} d^4x, \end{aligned}$$

onde temos usado a equação (2.26) para eliminar o termo de ordem ε^1 na equação (2.29).

O termo de ordem ε^0 na equação (??) corresponde à ação do campo de fundo, e o termo de ordem ε^2 é a ação das perturbações,

$$S_2 = \int \sqrt{-g} \left(\mathcal{L}_W \phi_{1,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \phi_1^2 + 2\mathcal{L}_{W\phi} \phi_1 \phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} (\phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} g^{\mu\nu})^2 \right) d^4x. \quad (2.30)$$

Desta ação podemos agora obter a equação de movimento correspondente ao campo ϕ_1 :

$$\left[\sqrt{-g} (\mathcal{L}_W g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \phi_{0,\alpha} \phi_{0,\beta}) \phi_{1,\nu} \right]_{,\mu} + \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\phi W} g^{\mu\nu} \phi_{0,\mu} \phi_{1,\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\phi\phi} \phi_1 = 0. \quad (2.31)$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes dependentes da configuração de fundo ϕ_0 e \mathcal{L} . Se definirmos

$$f^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} (\mathcal{L}_W g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \phi_{0,\alpha} \phi_{0,\beta}) \Big|_0, \quad (2.32)$$

a equação (2.31) toma a forma

$$[f^{\mu\nu} \phi_{1,\nu}]_{,\mu} + \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\phi W} g^{\mu\nu} \phi_{0,\mu} \phi_{1,\mu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\phi\phi} \phi_1 = 0. \quad (2.33)$$

A métrica efetiva $\tilde{g}^{\mu\nu}$ se define de maneira equivalente ao caso estudado na seção anterior

$$f^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Introduzindo a matriz $M^{\mu\nu} \equiv [\mathcal{L}_W g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \phi_{0,\alpha} \phi_{0,\beta}]_0$, temos que

$$\sqrt{-\tilde{g}} = -g [-\det (\mathcal{L}_W g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{WW} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \phi_{0,\alpha} \phi_{0,\beta})]_0^{\frac{1}{2}} = -g \sqrt{-M},$$

que nos leva a escrever

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{M^{\mu\nu}}{\sqrt{-g} \sqrt{-M}}. \quad (2.35)$$

Com isto escrevemos a equação de movimento das perturbações como segue

$$\left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \phi_{1,\nu} \right)_{,\mu} + \mathcal{L}_{\phi W} g^{\mu\nu} \phi_{0,\mu} \phi_{1,\mu} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \phi_1 = 0. \quad (2.36)$$

Este resultado é bastante geral, já que é aplicável a qualquer lagrangeana que dependa somente de um campo escalar e da combinação de derivadas primeiras dadas por W . A equação de movimento será hiperbólica somente se a métrica efetiva for lorentziana. Neste caso as equações terão soluções de tipo onda [30].

Utilizando o método da eikonal, a partir da equação (2.36), veremos que as per-

turbações de alta energia são governadas pela métrica efetiva. Seja

$$\phi_1 = a \exp [i\psi (x)],$$

onde ψ é a eikonal e a amplitude [31]. Através dela definimos

$$k_\mu \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \quad (2.37)$$

que é normal às superfícies definidas por $\psi = \text{constante}$. Depois de substituí-la na equação (2.36) obtemos

$$\tilde{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + k_\nu (\partial^\nu a + a \mathcal{L}_{\phi W} g^{\mu\nu} \phi_{0,\mu}) + \left[\tilde{g}^{\mu\nu} (a_{,\mu,\nu} + a \psi_{,\mu,\nu}) + \mathcal{L}_{\phi W} g^{\mu\nu} \phi_{0,\mu} a_{,\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \right] = 0. \quad (2.38)$$

Considerando perturbações de alta energia podemos descartar termos não quadráticos em k , obtendo assim a equação

$$\tilde{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \quad (2.39)$$

O cone de luz efetivo é formado por vetores N^μ , que são tangentes à superfície $\psi = \text{constante}$ e devem cumprir a condição $N^\mu k_\mu = 0$. Pode-se então, a partir da equação (2.39), definir

$$N^\mu = \tilde{g}^{\mu\nu} k_\nu. \quad (2.40)$$

Se $\tilde{g}_{\mu\nu}^{-1}$ é inversa de $\tilde{g}^{\mu\nu}$, tal que $\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\mu\alpha}^{-1} = \delta_\alpha^\mu$, da equação (2.40) temos

$$k_\mu = (\tilde{g}_{\mu\nu})^{-1} N^\nu, \quad (2.41)$$

e substituindo isto na equação (2.39) obtemos

$$(\tilde{g}_{\mu\nu})^{-1} N^\mu N^\nu = 0. \quad (2.42)$$

Isto mostra que as perturbações de alta energia se movimentam sobre o cone de luz efetivo

definido pela métrica efetiva $(\tilde{g}_{\mu\nu})^{-1}$ e, conseqüentemente, a propagação das perturbações de menor energia tem lugar dentro deste cone. Então, podemos escrever a equação de movimento para perturbações de alta energia como segue:

$$\left(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\phi_{1,\nu}\right)_{,\mu} = 0. \quad (2.43)$$

Como mencionamos, as equações de movimento das perturbações serão hiperbólicas se a métrica efetiva for lorentziana. Esta hiperbolicidade, portanto, impõe novas condições sobre a lagrangiana (levando em conta que a métrica efetiva depende tanto do campo do fundo como da forma explícita de \mathcal{L}). Veremos quais condições devem ser satisfeitas para garantir a hiperbolicidade das equações de movimento. Considere a expressão [32]

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + 2\frac{\mathcal{L}_{WW}}{\mathcal{L}_W}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}, \quad (2.44)$$

que é proporcional à métrica efetiva, para $\mathcal{L}_W \neq 0$. A inversa é

$$(h_{\mu\nu})^{-1} \equiv g_{\mu\nu} - K\frac{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{1 - K\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}. \quad (2.45)$$

O coeficiente K vem dado por

$$K = -2\frac{\mathcal{L}_{WW}}{\mathcal{L}_W}. \quad (2.46)$$

Definindo dois vetores unitários, um de tipo tempo T_μ e o outro de tipo espaço S_μ , portanto ortogonais entre si, tais que:

$$g^{\mu\nu}T_\mu T_\nu = 1 \quad (2.47)$$

$$g^{\mu\nu}S_\mu S_\nu = -1 \quad (2.48)$$

$$g^{\mu\nu}T_\mu S_\nu = 0, \quad (2.49)$$

podemos distinguir diferentes casos:

1. O gradiente de ϕ é de tipo tempo $\longrightarrow \partial_\mu\phi = AT_\mu$ e temos que

$$h^{\mu\nu}T_\mu T_\nu = 1 - KA^2 \quad (2.50)$$

e

$$h^{\mu\nu}S_\mu S_\nu = -1, \quad (2.51)$$

$$h^{\mu\nu}T_\mu S_\nu = 0. \quad (2.52)$$

Se $KA^2 < 1$ a métrica efetiva é hiperbólica e portanto lorentziana e se $KA^2 > 1$ a métrica é de assinatura $(+, +, -, -)$.

2. Se o gradiente de ϕ for tipo espaço, temos que $\partial_\mu\phi = AS_\mu$ e um cálculo análogo ao anterior mostra que se $KA^2 > -1$ a métrica é lorentziana e para $KA^2 < -1$ a métrica é positiva definida.

3. Se o gradiente for nulo, a assinatura é sempre lorentziana.

A seguinte tabela resume a análise

KA^2	$W > 0$	$W < 0$	$W = 0$
< 1	lorentziana	-	lorentziana
> 1	ass. $(+, +, -, -)$	-	todos os
> -1	-	lorentziana	casos
< -1	-	negativa	

(2.53)

Da tabela podemos ver que a condição que descreve todos os casos para os quais a métrica efetiva é sempre lorentziana é

$$K\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi < 1, \quad (2.54)$$

onde temos $A^2 = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ para gradiente tipo tempo e $A^2 = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ para gradiente de

tipo espaço. Substituindo a expressão para K , obtém-se

$$\mathcal{L}_W + 2W\mathcal{L}_{WW} > 0, \quad (2.55)$$

com $\mathcal{L}_W \neq 0$. Assim, uma lagrangiana fisicamente admissível deve cumprir as condições (2.25) e (2.55).

É possível calcular a posição do cone de luz da métrica efetiva com relação ao cone de luz da métrica do fundo também através da derivada da lagrangiana [32]. Seja v^μ um vetor nulo no espaço efetivo $\tilde{g}_{\mu\nu}$, tal que

$$\tilde{g}_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0. \quad (2.56)$$

quando substituída na expressão (2.45) temos que

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -K \frac{(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2}{(1 - K \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2}, \quad (2.57)$$

e segue então que se $K \geq 0$ o cone de luz de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ está dentro ou coincide com o cone de $g_{\mu\nu}$, e para $K < 0$ o cone está fora. O cone de luz efetivo foi analisado em detalhe em [33] para campos escalares não lineares e em [34] em eletrodinâmica não linear

2.2.2 Tensor momento energia das perturbações

Da ação das perturbações definida na equação (2.30) o tensor momento energia das perturbações se deduz a partir da definição,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{\delta S_2}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}, \quad (2.58)$$

que resulta na expressão

$$\tilde{T}_\nu^\mu = \tilde{g}^{\mu\lambda} \phi_{1,\lambda} \phi_{1,\nu} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu \tilde{g}^{\alpha\beta} \phi_{1,\alpha} \phi_{1,\beta}. \quad (2.59)$$

Mostramos neste capítulo como é obtida a métrica efetiva em teorias não lineares para um campo escalar. Este pode ser considerado como um caso particular de uma teoria que abrange múltiplos campos escalares, podendo levar ao surgimento de múltiplas métricas efetivas, o que traz como consequência multirefringência e/ou multimetricidade [35] como veremos na seção seguinte

2.2.3 O caso de N campos escalares

Nesta seção veremos como a métrica efetiva não só é resultado natural de teorias não lineares com um campo escalar mas também pode surgir em teorias com N campos. Esta adição resulta em refringência e, em alguns casos, em multimetricidade [35].

Seja $\phi^A = \{\phi^1, \phi^2, \dots\}$ uma coleção de campos escalares cuja dinâmica é governada por uma lagrangiana $\mathcal{L}(\partial_\mu \phi^A, \phi^A)$. Da mesma maneira como no caso de um campo escalar, consideramos flutuações em torno da solução da equação de movimento do fundo. Escrevemos, $\phi^A(t, \vec{x}) = \phi_0^A(t, \vec{x}) + \epsilon \phi_1^A(t, \vec{x}) + \frac{\epsilon^2}{2} \phi_2^A(t, \vec{x}) + O(\epsilon^3)$ e expandimos a lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi^A, \phi^A) &= \mathcal{L}(\partial_\mu \phi_0^A, \phi_0^A) + \epsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \partial_\mu \phi_1^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \phi_1^A \right] + \\ \frac{\epsilon^2}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \partial_\mu \phi_2^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \phi_2^A \right] &+ \frac{\epsilon^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial(\partial_\nu \phi^B)} \partial_\mu \phi_1^A \partial_\nu \phi_1^B + \right. \\ &\left. 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial \phi^B} \partial_\mu \phi_1^A \phi_1^B + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^A \partial \phi^B} \phi_1^A \phi_1^B \right] + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (2.60)$$

A ação correspondente é

$$S(\phi^A) = \int d^4x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi^A, \phi^A). \quad (2.61)$$

Novamente, como no caso de um campo escalar, usamos as equações de movimento do

fundo para eliminar termos lineares, obtendo assim

$$\begin{aligned}
S(\phi^A) = S(\phi_0^A) + \frac{\epsilon^2}{2} \int^{d+1} & \left[\left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial(\partial_\nu \phi^B)} \right\} \partial_\mu \phi_1^A \partial_\nu \phi_1^B + \right. \\
& + 2 \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial \phi^B} \right\} \partial_\mu \phi_1^A \phi_1^B + \\
& \left. + \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^A \partial \phi^B} \right\} \phi_1^A \phi_1^B \right] + O(\epsilon^3).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

As equações de movimento para as perturbações agora são dadas por

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial(\partial_\nu \phi^B)} \right\} \partial_\nu \phi_1^B \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial \phi^B} \phi_1^B \right) + \\
- \partial_\mu \phi_1^B \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^B) \partial \phi^A} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^A \partial \phi^B} \right) \phi_1^B = 0.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Vamos introduzir a matriz

$$f^{\mu\nu}{}_{AB} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial(\partial_\nu \phi^B)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^A) \partial(\partial_\mu \phi^B)} \right), \tag{2.64}$$

que é simétrica sob μ, ν e A, B . Definimos ainda,

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu{}_{AB} \equiv & + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial \phi^B} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^B) \partial \phi^A} + \\
& + \frac{1}{2} \partial_\nu \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^A) \partial(\partial_\mu \phi^B)} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^A) \partial(\partial_\mu \phi^B)} \right),
\end{aligned} \tag{2.65}$$

que é uma quantidade antissimétrica em A, B . Equivalentemente escrevemos

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu{}_{AB} \equiv & + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial \phi^B} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^B) \partial \phi^A} + \\
& - \frac{1}{2} \partial_\nu \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial(\partial_\nu \phi^B)} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^B) \partial(\partial_\nu \phi^A)} \right),
\end{aligned} \tag{2.66}$$

e

$$\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{AB} = \partial_\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A) \partial \phi^B} - \partial_\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^B) \partial \phi^A}. \tag{2.67}$$

Finalmente definimos

$$K_{AB} = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^A \partial \phi^B} + \frac{1}{2} \partial_\mu \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^A) \partial \phi^B} \right) + \frac{1}{2} \partial_\mu \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^B) \partial \phi^A} \right), \quad (2.68)$$

que por construção é simétrica em A, B . Com isto podemos reescrever a equação 2.63 em termos de $f_{AB}^{\mu\nu}$, Γ_{AB}^μ , e K_{AB} como

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu}_{AB} \partial_\nu \phi_1^B) + \frac{1}{2} [\Gamma_{AB}^\mu \partial_\mu \phi_1^B + \partial_\mu (\Gamma_{AB}^\mu \phi_1^B)] + K_{AB} \phi_1^B = 0. \quad (2.69)$$

Esta expressão simplificada descreve um sistema de equações diferenciais parciais, onde as quantidades $f^{\mu\nu}_{AB}$, Γ_{AB}^μ , K_{AB} podem ser interpretadas como a métrica efetiva, a conexão e o termo de massa, respectivamente. Agora, queremos construir a noção de métrica efetiva através das quantidades $f^{\mu\nu}_{AB}$ (como no caso com um campo escalar), mas veremos que isto não é sempre possível.

Consideremos a aproximação eikonal

$$\phi^A(x) = \epsilon^A(x) \exp[-i\varphi(x)], \quad (2.70)$$

onde $\epsilon^A(x)$ é uma amplitude que varia lentamente, e $\varphi(x)$ é a fase que varia rapidamente.

Temos

$$\{f^{\mu\nu}_{AB} k_\mu k_\nu + \Gamma_{AB}^\mu k_\mu + K_{AB}\} \epsilon_1^B = 0. \quad (2.71)$$

onde $k_\mu = \partial_\mu \varphi(x)$ e ϵ_1^B representa os diferentes direções de "polarização". Esta equação tem solução não trivial somente se $\epsilon^A(x)$ é um autovetor nulo da matriz

$$f^{\mu\nu}_{AB} k_\mu k_\nu + \Gamma_{AB}^\mu k_\mu + K_{AB}. \quad (2.72)$$

A condição para este autovetor nulo existir é

$$\det \{f^{\mu\nu}_{AB} k_\mu k_\nu + \Gamma_{AB}^\mu k_\mu + K_{AB}\} = 0. \quad (2.73)$$

No caso particular de altas energias podemos descartar termos não quadráticos em k_μ e escrever a expressão (2.71) como

$$\{f^{\mu\nu}{}_{AB} k_\mu k_\nu\} \epsilon_1^B = 0.$$

A situação mais simples e ideal possível com relação ao surgimento de uma estrutura geométrica efetiva é que todas as polarizações possam ser descritas mediante uma única métrica. Para isto a matriz $f^{\mu\nu}{}_{AB}$ deve satisfazer a condição

$$f^{\mu\nu}{}_{AB} = h_{AB} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \quad (2.74)$$

Uma segunda situação possível é o caso de multimetricidade onde todas as polarizações são descritas por métricas independentes. Isto significa que a matriz $f^{\mu\nu}{}_{AB}$ deve ter uma representação diagonal da forma,

$$f^{\mu\nu}{}_{AB} = \text{diag}\{f^{\mu\nu}{}_1, f^{\mu\nu}{}_2, \dots, f^{\mu\nu}{}_N\} = \text{diag}\{\sqrt{-g_1} g_1^{\mu\nu}, \sqrt{-g_2} g_2^{\mu\nu}, \dots, \sqrt{-g_N} g_N^{\mu\nu}\}. \quad (2.75)$$

Quando $f^{\mu\nu}{}_{AB}$ não satisfaz a condição 2.75 a descrição geométrica não é possível e teremos somente refração.

Para ilustrar este assunto veremos o exemplo de dois campos escalares. Fazemos uso da equação (2.64), cuja matriz é

$$(f^{\mu\nu}{}_{AB}) = \begin{bmatrix} f^{\mu\nu}{}_{11} & f^{\mu\nu}{}_{12} \\ f^{\mu\nu}{}_{21} & f^{\mu\nu}{}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

e escrevemos o determinante

$$\det[f^{\mu\nu}{}_{AB} k_\mu k_\nu] = (f^{\mu\nu}{}_{11} f^{\rho\sigma}{}_{22} - f^{\mu\nu}{}_{12} f^{\rho\sigma}{}_{21}) k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma = 0. \quad (2.77)$$

Se $f_{AB}^{\mu\nu}$ satisfaz a condição (2.74), podemos escrever

$$\begin{aligned} f^{\mu\nu}_{11} &= h_{11} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \\ f^{\mu\nu}_{22} &= h_{22} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \\ f^{\mu\nu}_{12} &= h_{12} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Com isto, substituindo na equação (2.77), obtemos

$$h_{11}h_{22} (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu)^2 - h_{12}^2 (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu)^2 = 0, \tag{2.79}$$

$$(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu)^2 = 0, \tag{2.80}$$

o que reflete claramente em unimetricidade. Quando $f_{AB}^{\mu\nu}$ satisfaz a condição (2.75) a equação (2.77) resulta na expressão

$$(f_{11}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu)(f_{22}^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma) = 0, \tag{2.81}$$

e portanto indica bimetricidade. Quando nenhuma das condições anteriores for satisfeita não será possível a descrição efetiva, mas ainda haverá birrefringência

Vimos neste capítulo o surgimento da métrica efetiva na teoria de campos escalares e algumas das suas propriedades. Mas, na realidade, a métrica efetiva não é apenas uma particularidade de teorias escalares, ela aparece também em outras teorias não lineares como, por exemplo, a eletrodinâmica não linear [34], [36], [37]. A abordagem geral destas teorias é baseada em ações com termos adicionais à ação usual de Maxwell induzidos por diferentes processos. Aplicações da métrica efetiva também tem aparecido em áreas como a Gravitação, Cosmologia e Astrofísica. A continuação, faremos uma pequena revisão sobre alguns trabalhos onde a métrica efetiva é aplicada em cada uma destas áreas.

2.3 Algumas aplicações da métrica efetiva

2.3.1 Métrica efetiva em Gravitação

Teorias escalares não lineares têm sido usadas em fenômenos físicos, especialmente em Gravitação. Nestas teorias escalares a métrica efetiva foi classificada segundo o tipo do gradiente do campo escalar, estudando também as diferentes assintotas permitidas [30]. Ao mesmo tempo, em eletrodinâmica não linear, a métrica efetiva resultante foi expressada através do tensor energia momento o qual, por ser um tensor simétrico de segunda ordem, permite usar a classificação de Segrè [34].

No regime não linear da eletrodinâmica a métrica efetiva tem sido usada para descrever a propagação da luz. As não linearidades no campo eletromagnético mudam o comportamento das geodésicas dos fótons, as quais não são mais nulas no espaço-tempo de fundo mas sim numa geometria efetiva. Esta abordagem permitiu desenvolver toda uma nova estrutura de tratamento da propagação da luz. Assim, é possível obter condições gerais para o cone de luz para diferentes polarizações para uma classe de teorias construídas a partir dos invariantes de gauge com aplicações a estudos de birrefringência [38], [39]. O uso da técnica de métricas efetivas neste regime também tem possibilitado o estudo de processos análogos aos que ocorrem em gravitação, tais como buracos negros. Os materiais dielétricos são bons meios para conseguir esta analogia pois são fontes de espaço-tempo curvos efetivos. O exemplo mais antigo e simples é obtido considerando um meio contínuo com permissividade constante, o qual gera uma geometria dada pela métrica de Gordon. Resultados gerais foram obtidos ao considerar a variação da permissividade em [40]. Apesar da birrefringência ambas métricas possuem o mesmo horizonte e ainda tanto os fótons que regidos por uma têm uma propagação qualitativamente similar aos fótons que regidos pela outra métrica efetiva. Isto permitiu obter um novo buraco negro análogo que depende do campo elétrico aplicado. O modelo análogo exato foi reproduzido usando aspectos de ótica geométrica conseguindo ainda reduzir a temperatura de Hawking em [41], [42]. Adicionalmente, a eletrodinâmica não linear pode também induzir os fótons a terem

trajetórias fechadas de tipo espaço [43]. Outras soluções obtidas das equações de Einstein correspondem à descrição de buracos de minhoca. Estes vem de configurações específicas do campo no eletromagnetismo de Born-Infeld num espaço-tempo plano [44]. Buracos de minhoca também foram reproduzidos usando a lagrangiana com correções quânticas em one-loop. Tais soluções somente são possíveis por meio de um campo magnético. Além disso, estudos sobre a estabilidade termodinâmica e dinâmica de buracos negros análogos provenientes de fontes não lineares eletromagnéticas mostraram ser estáveis, sugerindo ainda que existe uma equivalência entre ambos os tipos de estabilidade termodinâmica e estabilidade dinâmica [45].

2.3.2 Métrica efetiva em Cosmologia

A Cosmologia é um área que também tem se beneficiado pela aplicação da métrica efetiva em teorias não lineares. A ressonância de Feshbach no condensado de Bose-Einstein foi usada como sistemas de geração de um modelo análogo cosmológico para reproduzir o espaço-tempo FRW em [46]. Cenários cosmológicos produzidos por eletrodinâmica não linear (EDNL) foram usados no estudo de algumas características do universo. Certos tipos de não linearidade levaram a equações de estado negativa e, conseqüentemente, à expansão acelerada [47], [48] e ainda evitaram universos com singularidade [37]. O "Re-Bouncing" é outra característica de universos produzidos por EDNL. Sob extensões da teoria de Born-Infeld o universo entra num ciclo colapso-bouncing-expansão-aceleração-re-bouncing-colapso conhecida como universo cíclico [49], [50]. Também, a bariogênese e a amplificação do campo magnético primordial dentro do mesmo marco da EDNL são assuntos onde a métrica efetiva é determinante [51].

Por outro lado, campos escalares não lineares também fornecem luz a problemas cosmológicos. Dentro deste regime, a teoria de Born-Infeld escalar estendida proporciona a unificação da matéria escura e energia escura, assim como também uma possível explicação à formação de estrutura [52].

2.3.3 Métrica efetiva em Astrofísica

A Astrofísica é outro campo onde a métrica efetiva pode ser utilmente aplicada. Através da eletrodinâmica não linear a métrica efetiva permite fazer correções no redshift gravitacional de uma estrela de nêutrons num campo magnético forte em [53], [54] [55]. Por sua vez, a hidrodinâmica também tem sido usada no estudo da estabilidade dos discos de acreção do buraco negro de Schwarzschild [23]. Outros exemplos de aplicação são os efeitos de lentes em buracos negros com carga [56], a influência das não linearidades na velocidade das ondas gravitacionais em [57] e a estabilidade de coroas estelares em (E. Parker1966). Por outro lado, tentativas de resolver anomalias nas frequências da nave espacial Pioneer 10/11 usando EDNL foram feitas em [58].

Ao longo deste capítulo analisamos algumas propriedades e características da métrica efetiva e vimos que esta é de muita utilidade em diferentes áreas da física para estudar diversos problemas. A utilidade provém do surgimento natural desta nas teorias não lineares que fazem da métrica efetiva uma ferramenta fundamental.

Capítulo 3

Estabilidade utilizando a métrica efetiva

Nos capítulos prévios vimos vários exemplos que ilustram a utilidade do conceito de métrica efetiva. Neste capítulo veremos como é possível incorporar a métrica efetiva ao estudo da estabilidade de um dado sistema físico. Como foi mostrado por Moncrief em [23], é possível obter uma expressão para a taxa de variação temporal da energia das perturbações num fundo fixo, em função de uma integral de superfície, e determinar o sinal desta última sem resolver a equação de movimento das perturbações nem a do fundo. O método é bastante geral, desde que o sistema tenha as simetrias apropriadas (e pode ser usado para determinar a estabilidade linear de qualquer sistema descrito por uma lagrangeana não linear que dependa do campo e do termo cinético W). Em [23] o sistema estudado foi um fluido perfeito acrescentando num buraco negro de Schwarzschild. Aplicaremos o método ao caso do fluido que descreve o condensado fantasma (que será introduzido no capítulo 4) em acreção num buraco negro de Schwarzschild. Mostraremos que tal sistema é estável sob perturbações lineares. A fim de sustentar o resultado obtido pela aplicação do método de Moncrief, analisaremos a estabilidade através do método da positividade do potencial efetivo, introduzido por Wald [24]. Em ambos métodos se consideram campos teste suficientemente fracos, isto é, que não alteram a geometria do

buraco negro.

3.1 Método da integral da superfície

A análise de Moncrief começa usando a lei de conservação do tensor momento energia das perturbações, dada por

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}_\nu^\mu = 0. \quad (3.1)$$

Se \tilde{X}^ν é um vetor de Killing de $\tilde{g}_{\mu\nu}$, mostraremos a seguir que

$$\tilde{\nabla}_\mu \left(\tilde{X}^\nu \tilde{T}_\nu^\mu \right) = 0. \quad (3.2)$$

O vetor de Killing satisfaz por definição, $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{X}_\nu = -\tilde{\nabla}_\nu \tilde{X}_\mu$. Portanto,

$$\tilde{\nabla}_\mu \left(\tilde{X}^\nu \tilde{T}_\nu^\mu \right) = \tilde{T}_\nu^\mu \tilde{\nabla}_\mu \left(\tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{X}_\alpha \right) + \tilde{X}^\nu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}_\nu^\mu = 0, \quad (3.3)$$

já que o primeiro termo do lado direito se anula devido à antissimetria de $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{X}_\nu$ e a simetria de $\tilde{T}^{\mu\nu}$ e o segundo termo se anula por causa da equação (3.1).

Se $\tilde{X}^\nu = \delta_t^\nu$, que corresponde às translações temporais numa métrica estacionária, a equação (3.2) se reduz a

$$\tilde{\nabla}_\mu \left(\delta_t^\nu \tilde{T}_\nu^\mu \right) = \tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}_t^\mu = 0, \quad (3.4)$$

que, usando a identidade, pode ser reescrita como segue

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}_t^\mu = \partial_\mu \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^\mu \right) = 0. \quad (3.5)$$

Integrando esta equação num 3 - volume V ,

$$\int_V \partial_\mu \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^\mu \right) d^3x = 0, \quad (3.6)$$

e separando as componentes temporal t e espaciais i , obtemos

$$\int_V \partial_t \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^t \right) d^3x + \int_V \partial_i \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^i \right) d^3x = 0, \quad (3.7)$$

que ainda pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^t d^3x = - \int_V \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^i \right)_{,i} d^3x. \quad (3.8)$$

Por definição, a energia das perturbações é

$$\tilde{E} = \int_V \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^t d^3x. \quad (3.9)$$

Com isto temos, da equação (3.8) que

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = - \int_V \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_t^i \right)_{,i} d^3x, \quad (3.10)$$

que é a variação da energia das perturbações com o tempo no volume V . Depois de aplicar o teorema de Gauss no lado direito da equação, e de substituir o tensor energia-momento escrito na equação (2.59), temos,

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = - \oint_S \sqrt{-\tilde{g}} \left(\phi_{1,i} \phi_{1,t} \tilde{g}^{ii} + (\phi_{1,t})^2 \tilde{g}^{it} \right) dS_i, \quad (3.11)$$

onde S é a superfície que envolve o volume V . Tendo em mente as aplicações ao buraco negro de Schwarzschild, a superfície de integração pode ser separada em duas superfícies concêntricas que encerram o volume V : uma superfície S_R com raio R , que será tomado como o infinito ao final do cálculo, com uma normal apontada para fora da superfície, e uma superfície menor S_ε com normal apontada para o centro, de radio ε , como se vê na figura 3.1 .

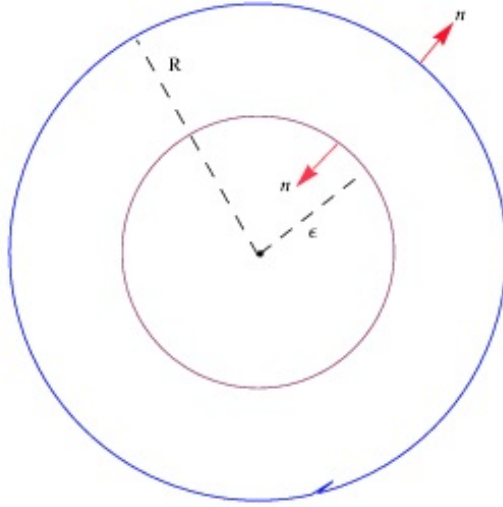


Figura 3.1: Superfícies concêntricas que contém volume V enquanto seus raios tendem a $\epsilon \rightarrow r_s$ e $R \rightarrow \infty$ respectivamente.

Utilizando estas superfícies, a equação (3.11) toma a forma

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = I = I_1 + I_2, \quad (3.12)$$

onde

$$I_1 = - \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S_R} \sqrt{-\tilde{g}} (\phi_{1,r} \phi_{1,t} \tilde{g}^{rr} + (\phi_{1,t})^2 \tilde{g}^{rt}) dS_R, \quad (3.13)$$

$$I_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow r_s} \oint_{S_\epsilon} \sqrt{-\tilde{g}} (\phi_{1,r} \phi_{1,t} \tilde{g}^{rr} + (\phi_{1,t})^2 \tilde{g}^{rt}) dS_\epsilon. \quad (3.14)$$

Note que o índice i foi substituído por r levando em conta a simetria radial das superfícies escolhidas. I_1 é calculada na superfície exterior fazendo R tender ao infinito e I_2 é calculada na superfície interior fazendo ϵ ir para r_s , sendo este o valor que no Capítulo 4 será definido como o horizonte sônico, que limita a região da qual as perturbações não podem sair. Note-se também que as normais das superfícies são opostas, dando lugar à diferença de sinais entre I_1 e I_2 . A expressão (3.12) nos indicará se o sistema estudado é linearmente estável ou instável através do sinal que a integral possa ter.

Supondo que no infinito a métrica efetiva se reduz à métrica de Minkowski (veremos que de fato isto ocorre no exemplo analisado no capítulo seguinte), isto é

$$\sqrt{-\tilde{g}\tilde{g}^{rr}} \rightarrow \sqrt{-g}g^{rr} = -r^2 \sin \theta, \quad (3.15)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}\tilde{g}^{rt}} \rightarrow 0, \quad (3.16)$$

a primeira integral I_1 toma a forma

$$I_1 = - \int \sqrt{-\tilde{g}\tilde{g}^{rr}} \phi_{1,r} \phi_{1,t} \Big|_{\infty} dS_r. \quad (3.17)$$

O requisito da finitude da energia das perturbações, dada na expressão (3.9), é que esta deve ser finita [23] e que as perturbações devem cair em uma potência de $1/r^p$, onde $p > 0$, leva ao seguinte comportamento no infinito

$$\phi_{1,t} \sim \frac{a}{r^{\frac{3}{2}+\epsilon}}; \quad \phi_{1,r} \sim \frac{a'}{r^{\frac{5}{2}+\epsilon}}, \quad (3.18)$$

onde $\epsilon > 0$, e a e a' são constantes. Substituindo as equações (3.15) e (3.18) na equação (3.17), vemos que $I_1 = 0$.

Conseqüentemente o sinal da variação temporal da energia das perturbações é totalmente determinado pela integral

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = I_2 = \oint_{\tilde{S}_\epsilon} \sqrt{-\tilde{g}} (\phi_{1,r} \phi_{1,t} \tilde{g}^{rr} + (\phi_{1,t})^2 \tilde{g}^{rt}) \Big|_{r_s} dS_r. \quad (3.19)$$

No horizonte sônico o termo \tilde{g}^{rr} se anula e obtemos

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \int \sqrt{-\tilde{g}} (\phi_{1,t})^2 \tilde{g}^{rt} \Big|_{r_s} d\theta d\varphi. \quad (3.20)$$

Deste modo a taxa da variação da energia com o tempo é determinada pelo sinal da integral avaliada no horizonte sônico, sem precisar integrar, mais especificamente pelo

sinal do coeficiente da métrica efetiva \tilde{g}^{rt} . Mas caso o sinal de $d\tilde{E}/dt$ seja negativo, é preciso ainda provar que \tilde{E} é positivo para demonstrar que o sistema é estável. Devemos então analisar a energia das perturbações definida na equação (3.9),

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \int_V \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{g}^{tt} \phi_{1,t}^2 - \tilde{g}^{ii} \phi_{1,i}^2) d^3x, \quad (3.21)$$

onde substituímos o tensor momento energia da equação (2.59). Por sua vez, para que \tilde{E} seja positiva, devemos ter que \tilde{g}^{tt} é positivo e que as componentes $\tilde{g}^{rr}, \tilde{g}^{\theta\theta}, \tilde{g}^{\varphi\varphi}$ são negativas. Finalmente é importante notar a simplicidade e cálculo quase direto da estabilidade. Deste modo, para qualquer sistema que seja definido por uma lagrangiana genérica dependente de W e do campo escalar acrescentando com simetria esférica num buraco negro.

3.2 Estabilidade e positividade do potencial efetivo.

Nesta seção veremos que a positividade do potencial efetivo é condição suficiente para a estabilidade linear do sistema. Como introdução ao método consideraremos um campo escalar teste sem massa, com a geometria de Schwarzschild como fundo [59]. O campo escalar satisfaz a equação de Klein-Gordon,

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0, \quad (3.22)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$, dada por

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.23)$$

onde $f(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$. Para resolver a equação utilizaremos o método de separação de variáveis de forma tal que a função ϕ se escreve

$$\phi = \hat{u}(r, t) \Psi_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (3.24)$$

onde $\Psi_{l,m}$ são os harmônicos esféricos. A equação de movimento toma a forma

$$\frac{f}{r^2 \hat{u}} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r^2 f \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \right) + f \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.25)$$

onde l é a constante que provém da separação de variáveis. A partir daqui é conveniente introduzir a coordenada tartaruga, definida como segue:

$$\frac{d}{dr_*} \equiv f(r) \frac{d}{dr}. \quad (3.26)$$

Com isto a equação (3.25) fica

$$\frac{d^2 u}{dr_*^2} + 2f(r) \frac{du}{dr_*} - \left[\frac{f(r) l(l+1)}{r^2} - \omega^2 \right] u = 0, \quad (3.27)$$

onde usamos $\hat{u} = u(r) \exp(i\omega t)$. Esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem da forma [60],

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0, \quad (3.28)$$

Usando a transformação

$$u(r) = \beta(r) \exp \left[-\frac{1}{2} \int^r c(z) dz \right], \quad (3.29)$$

a equação (3.27) torna-se

$$\frac{d\beta}{dr_*^2} + I \beta = 0, \quad (3.30)$$

onde I é dado pela expressão

$$I = b - \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} \frac{da}{dr_*}. \quad (3.31)$$

Logo, temos que a equação (3.30) fica como

$$\frac{d\beta}{dr_*^2} + \{\omega^2 - V_{ef}\} \beta = 0, \quad (3.32)$$

com V_{ef} sendo o potencial efetivo dado por

$$V_{ef} = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (3.33)$$

Note que $r = r(r^*)$, dado por

$$r_* = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) + const. \quad (3.34)$$

A expressão do potencial (3.33) nos servirá para determinar a estabilidade mediante o método de Wald [24], na equação (3.39)

A seguir, depois da transformação (3.29), a equação de movimento (3.25) toma a forma

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r_*^2} + V_{ef} \hat{u} = 0. \quad (3.35)$$

Define-se o operador

$$\hat{O} = -\frac{d^2}{dr_*^2} + V_{ef}, \quad (3.36)$$

que é positivo e autoadjunto no espaço de Hilbert $L^2(r_*)$ de funções de quadrado integrável de r_* . Multiplicando por $\partial \bar{\hat{u}} / \partial t$, onde $\bar{\hat{u}}$ é conjugada, e integrando em r_* , obtemos

$$\int \frac{\partial \bar{\hat{u}}}{\partial t} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} dr_* = - \int \frac{\partial \bar{\hat{u}}}{\partial t} \hat{O} \hat{u} dr_*. \quad (3.37)$$

Adicionando a esta equação a sua conjugada complexa e levando em conta que \hat{O} é autoadjunto, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial r_*} \right|^2 + V_{ef} |\hat{u}|^2 \right] dr_* = 0 \quad (3.38)$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial r^*} \right|^2 + V_{ef} |\hat{u}|^2 \right) dr^* = C \quad (3.39)$$

Esta equação é válida para qualquer t . Quando o potencial V_{ef} é positivo, as perturbações são limitadas por C , elas não podem aumentar exponencialmente, a fim de satisfazer (3.39). Assim, as perturbações não podem crescer. Se o potencial V_{ef} for negativo, perturbações irão aumentar para satisfazer a relação. Isto quer dizer que para qualquer sinal de V_{ef} a variação $\partial_t \hat{u}$ deve de alguma forma compensar o valor do potencial para que (3.38) continue constante. Com o potencial positivo a estabilidade das perturbações é garantida. Este critério somente descarta perturbações que cresçam exponencialmente com o tempo mas não é indicativo de estabilidade para perturbações que tenham outro tipo de dependências como a dependência linear, por exemplo.

Deste modo, neste capítulo introduzimos o método de Moncrief para analisar a estabilidade linear de um sistema esférico simétrico. Este método baseia-se na conservação do tensor energia momento das perturbações, o qual foi obtido por meio da métrica efetiva, onde não são necessários maiores cálculos, salvo a determinação do sinal da integral (3.20). Com o fim de comparar o resultado, o método da positividade do potencial também foi descrito. No seguinte capítulo ambos métodos serão aplicados a um mesmo sistema e veremos que o método de Moncrief é muito mais simples e rápido.

Capítulo 4

Aplicação dos métodos apresentados no Capítulo 3

4.1 Acreção do condensado fantasma

Este capítulo é dedicado à análise do comportamento da acreção do condensado fantasma sob a influência de um buraco negro de Schwarzschild. Este condensado, introduzido por Arkani-Hamed [21], representa uma modificação da gravitação no regime infravermelho, e consiste no uso de um termo cinético não canônico para campo escalar¹. O fluido tem uma equação de estado $p = -\rho$, que descreve o condensado durante algum momento da evolução cosmológica (que poderia ser ajustado para ser hoje) que leva o universo a expandir aceleradamente. A lagrangiana do campo escalar se acopla minimamente com a ação de Einstein, tal que

$$S = \int \{R + \mathcal{L}(W)\} d^4x. \quad (4.1)$$

Um exemplo simples para a lagrangiana do condensado fantasma é dado por [22]

$$\mathcal{L}(W) = \frac{1}{2}(W - A)^2. \quad (4.2)$$

¹considerada anteriormente em modelos hoje conhecidos como K-inflação [61]

A é uma constante que, como veremos adiante, será restrita ao intervalo $A \leq 1$. Sendo descrito por uma teoria escalar o condensado fantasma tem por equação de movimento a equação (2.26) e que, no caso da lagrangiana dada em 4.2, toma a forma

$$(\sqrt{-g}\mathcal{L}_W g^{\mu\nu}\phi_{,\mu})_{,\nu} = 0. \quad (4.3)$$

O tensor momento energia é dado pela equação (2.23) e pode ser reinterpretado em termos de um fluido perfeito irrotacional. A velocidade deste fluido pode ser escrita em termos de uma 4-velocidade $u_\mu \equiv \frac{\nabla_\mu\phi}{\sqrt{W}}$, com $W > 0$. Assim o tensor é dado por [62].

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

onde

$$\rho = (\mathcal{L}_W - \mathcal{L}), \quad p = \mathcal{L}. \quad (4.5)$$

O "parâmetro" da equação de estado e a velocidade do som, que são quantidades importantes na descrição do fluido, vêm dados respectivamente por

$$\omega \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{W - A}{3W + A}, \quad c_s^2 \equiv \frac{dp}{d\rho} = \frac{W - A}{3W - A}. \quad (4.6)$$

Da primeira expressão vemos que quando $W \gg A$ o fluido se comporta como radiação, quando $W = A$ o fluido se torna do tipo poeira e para $W < A$ se torna instável por conta da negatividade de c_s^2 . Note que a positividade da velocidade do som pode ser usada para determinar estabilidade somente no caso de perturbações de frequências baixas comparadas com o potencial efetivo [63].

Daqui em diante faremos a hipótese de que o fluido está sendo acrescido num buraco negro de Schwarzschild, cuja geometria é descrita pela métrica

$$ds^2 = fdt^2 - f^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (4.7)$$

onde $f(r) = (1 - \frac{r_g}{r})$.

Para a acreção ser considerada estacionária o fluxo do campo do fundo não deve variar com o tempo, isto é $\mathcal{L}_{\partial_t}(\nabla_\mu\phi) = \partial_\mu\partial_t\phi = 0$. Esta condição limita a configuração do campo do fundo à forma

$$\phi_0 = t + \psi(r). \quad (4.8)$$

Substituindo isto na equação de movimento para ϕ_0 (4.3), obtemos

$$\mathcal{L}_W \partial_r^* \psi = \alpha \frac{r_g^2}{r^2}, \quad (4.9)$$

onde $\partial_r^* \psi \equiv f \partial_r \psi$, r^* é a coordenada tartaruga [22], e α é uma constante de integração que determina a taxa de acreção do condensado através de

$$\dot{m} = 4\pi r^2 T_t^r = 4\alpha \pi r_g^2 M^4. \quad (4.10)$$

Introduzindo a notação²,

$$v \equiv \partial_r^* \psi = f \partial_r \psi, \quad (4.11)$$

e substituindo-a na equação (4.9), obtemos

$$\left(\frac{1-v^2}{f} - A \right) \frac{v}{(1-f)^2} = \alpha. \quad (4.12)$$

Longe do buraco negro onde $f \approx 1$, esta equação se reduz a

$$v^2 = 1 - A, \quad (4.13)$$

deste modo devemos nos restringir a valores de $A \leq 1$, caso contrário as soluções da equação (4.9) seriam complexas. Assim, escolhemos $A = \frac{3}{4}$ e construiremos o gráfico para as curvas $v(f)$ para diferentes valores de α em Fig.4.1 ³

²No apêndice B se demonstra que v é a velocidade radial do fluido

³Estas trajetórias foram obtidas de forma analítica em [10] para o caso de acreção de um fluido numa estrela newtoniana, como discutido no apêndice C

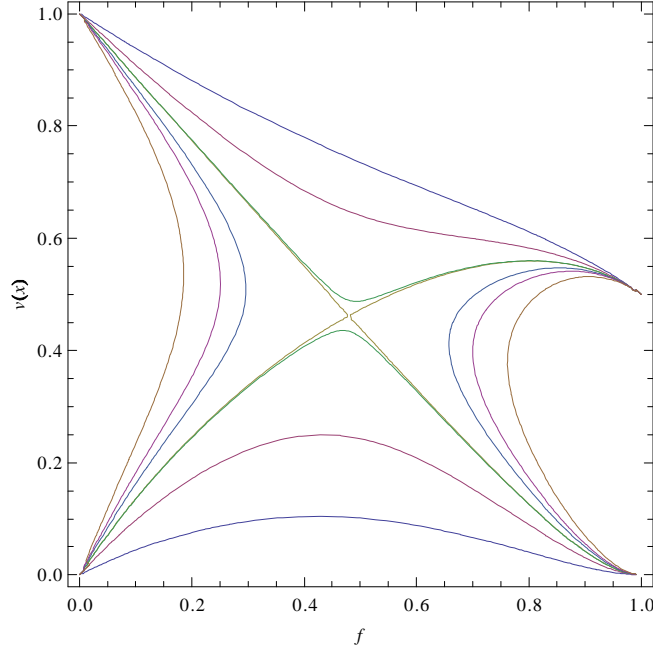


Figura 4.1: Diagrama de fase da solução do fundo da equação (4.12)

Todas as trajetórias convergem no horizonte ($f = 0$) e no infinito ($f = 1$) aos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $1, \sqrt{1 - A}$, para $A = \frac{3}{4}$ (a parte negativa de v representa a trajetória inversa e não é mostrada na figura). Existe um ponto onde as duas curvas se cortam, o chamado ponto crítico. As curvas na Fig.4.2 correspondem a um α específico, $\alpha = 1.51833455$.

A particularidade destas curvas é que podem representar o processo de acreção do fluido em acreção. A curva (1) começa no ponto $(1, \sqrt{1 - A})$ e termina no horizonte de Schwarzschild $(0, 0)$, passando pelo ponto crítico; e a curva (2) descreve o fluxo que vem do infinito, passa pelo ponto crítico até chegar no horizonte. A curva que mais se adapta à configuração que desejamos descrever é a trajetória (2), ou seja um fluido homogeneamente distribuído no infinito que vai se precipitando no horizonte. O ponto crítico é definido como aquele que o diferencial total da equação (4.12) se torna degenerado [22], ou seja, quando os coeficientes da seguinte expressão

$$\frac{3v^2 - 1 + Af}{f(1-f)^2} dv - \frac{(1-v^2)(1-3f) + 2Af^2}{f^2(1-f)^3} v df = 0,$$

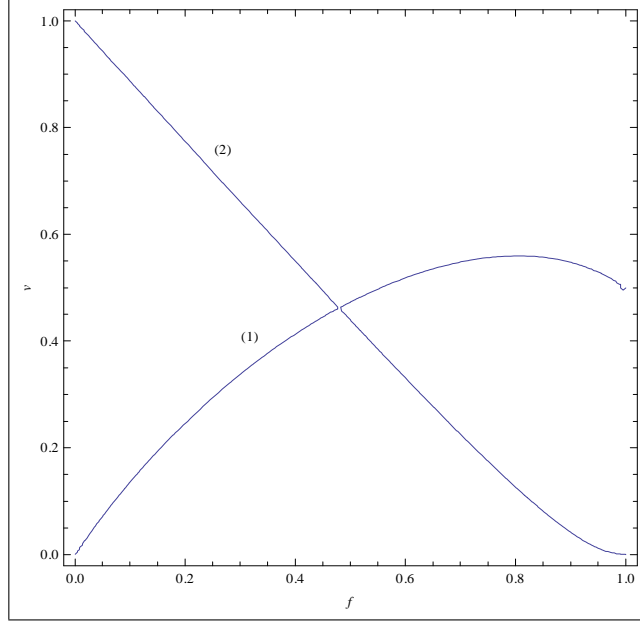


Figura 4.2: Solução para $\alpha = 1.51833455$

se anulam. Assim, o ponto crítico é dado pelos pontos (v_*, f_*) dados por

$$v_*^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 36A + 36}}{18}, \quad f_*^2 = \frac{1 - 3v_*^2}{A}. \quad (4.14)$$

Quando o valor de $A = \frac{3}{4}$ é substituído em (4.14) obtemos o ponto crítico $(v_*, f_*) = (0.46, 0.52)$. Este ponto crítico é na verdade o horizonte sônico, r_s que por definição satisfaz

$$\tilde{g}^{rr}(r_s) = 0. \quad (4.15)$$

Em termos de v e f este é escrito, usando (2.35) e (4.11), como segue:

$$\tilde{g}^{rr}(v, f) = \frac{f(3v^2 + Af - 1)}{(1 - v^2 - A)\sqrt{(1 - v^2 - A)(3(1 - v^2) - A)}}. \quad (4.16)$$

Assim, podemos substituir os pontos (4.14) em $\tilde{g}^{rr}(v, f)$ e verificar a sua anulação,

$$\tilde{g}^{rr}(v_*, f_*) = 0. \quad (4.17)$$

Lembre que v e f são funções de r . Portanto, da Fig.4.2, a trajetória (2) se torna su-

persônica depois de passar pelo ponto crítico até o horizonte de Schwarzschild.

Ao substituir os pontos críticos dados pela equação (4.14) na equação (4.12) obtemos a variação de α em função de A em (Fig. 4.3). O coeficiente α vai aumentando a partir do mínimo conforme A diminui. Por outro lado, a densidade do condensado no infinito tende a zero, o que resulta numa acreção independente da massa do fluido como esperado neste tipo de acreção (acreção de Bondi) [10]. Deste modo, o parâmetro α é aquele que determina a acreção do fluido.

Com isto completaremos a breve descrição do sistema e na seção seguinte analisaremos, usando estas definições, a estabilidade do sistema com os dois métodos diferentes apresentados no capítulo anterior.

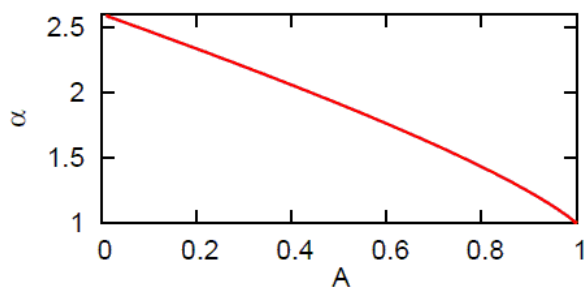


Figura 4.3: Dependência de α com a parâmetro A (figura reproduzida de [22])

4.2 Aplicação do Método da Integral

Nesta seção estudaremos a estabilidade do modelo de Frolov descrito na seção 4.1. Vimos que a taxa de variação da energia das perturbações é dada pela equação

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \int \sqrt{-\tilde{g}}(\phi_{1,t})^2 \tilde{g}^{rt} \Big|_{r_s} d\theta d\varphi, \quad (4.18)$$

aplicável a qualquer lagrangeano dependente do termo cinético W e do campo escalar ϕ . Se substituirmos a forma da métrica efetiva da equação (2.35), temos,

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \int (\phi_{1,t})^2 [r^2 \sin \theta (\mathcal{L}_W g^{rt} + 2\mathcal{L}_{WW} g^{r\alpha} g^{t\beta} \phi_{0,\alpha} \phi_{0,\beta})] \Big|_{r_s} d\theta d\varphi. \quad (4.19)$$

Lembrando que o modelo de Frolov considera uma métrica de fundo com simetria esférica, (a métrica de Schwarzschild) os elementos não diagonais que aparecem em (4.19) se anulam. Isto nos deixa com a expressão,

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = -2 \int r^2 \sin \theta \psi_{,r} \phi_{1,t}^2 d\theta d\varphi \Big|_{r_s}. \quad (4.20)$$

Como já foi salientado, o importante é saber o sinal da equação (4.20). Na integral vemos que o termo que define o sinal de $d\tilde{E}/dt$ é a função $\psi_{,r}$. Segue da curva da Fig. 4.2 que ele tem sinal positivo. Portanto, $d\tilde{E}/dt < 0$. Isto significaria que o sistema é estável, porém, antes é preciso definir se a energia das perturbações \tilde{E} é positiva para poder garantir estabilidade. Vê-se da equação (2.59) que a energia é positiva se as componentes espaciais \tilde{g}^{ii} são negativas. Da definição da métrica efetiva dada na expressão (2.35) o sinal das componentes é determinado unicamente por

$$M^{\mu\nu} = L_W g^{\mu\nu} + 2L_{WW} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}.$$

As componentes angulares $\tilde{g}^{\phi\phi}$ e $\tilde{g}^{\theta\theta}$ são facilmente reconhecidas como positivas levando em conta que L_W satisfaz a expressão (2.25),

$$M^{\theta\theta} = -\frac{L_W}{r^2}, \quad (4.21)$$

$$M^{\varphi\varphi} = -\frac{L_W}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.22)$$

Entretanto a componente radial \tilde{g}^{rr} é composta de dois termos:

$$M^{rr} = -L_W f + 2L_{WW} f^2 (\partial_r \psi)^2, \quad (4.23)$$

o que torna difícil a determinação mediante apenas esta expressão. Para poder dizer que a componente \tilde{g}^{rr} é negativa, é necessário que esta satisfaça as condições

$$\tilde{g}^{rr}(R_s) = 0, \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{d\tilde{g}^{rr}}{dR} \right|_{R_s} \leq 0, \quad (4.25)$$

onde $R_s = 2Mr_s$ é o horizonte sônico dimensional. $\tilde{g}^{rr}(R_s)$, em termos de $v \equiv f \partial_r \psi$ e f , $\tilde{g}^{rr}(v_*, f_*)$, é dado pela equação (4.16) que se anula para qualquer A num só ponto, o horizonte sônico, e continua diminuindo até o infinito como mostra a Fig. 4.6

Considerando que $\tilde{g}^{rr} = \tilde{g}^{rr}(v(f))$ a segunda condição se escreve como,

$$\left. \frac{d\tilde{g}^{rr}}{dR} \right|_{R_s} = \frac{d\tilde{g}^{rr}}{df} \frac{df}{dr} \leq 0, \quad (4.26)$$

na qual o ponto crítico (horizonte sônico) v^* , f^* é substituído para obter uma função dependente de A . A expressão da função resultante é bastante extensa, mas o comportamento decrescente é mostrado no gráfico a seguir:

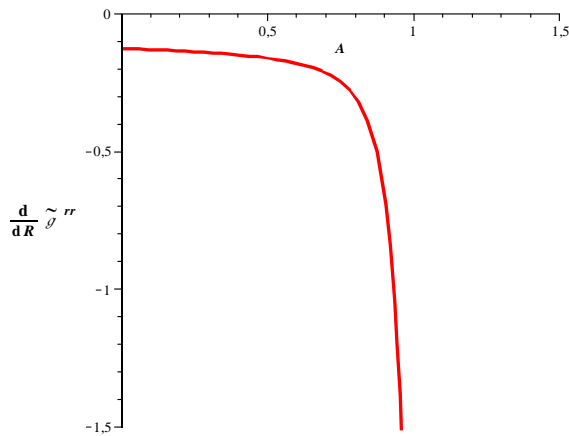


Figura 4.4: Variação de $d\tilde{g}^{rr}/dR$ com relação a A

Claramente podemos observar que $\frac{d\tilde{g}^{rr}}{dR}$ é negativa para qualquer valor de $A < 1$. Com este resultado as condições (2.55) são satisfeitas e se comprova que \tilde{g}^{rr} é negativa para todo A fora do horizonte sônico. Tendo comprovado a positividade da energia das perturbações podemos concluir, com isto, que a derivada de $d\tilde{E}/dt$ é negativa o que garante a estabilidade do sistema. Este método é simples e direto e constitui uma maneira alternativa aos métodos convencionais para o estudo de estabilidade. A vantagem deste método está em não ser preciso resolver a equação de movimento do fundo nem a das perturbações, e ele é genérico já que pode ser aplicado a qualquer teoria não linear escalar que satisfaça as condições (2.55).

4.3 Método do Potencial Efetivo

Nesta parte faremos uma aplicação do método do potencial descrito na seção 3.2. Para poder resolver analiticamente a equação de movimento (3.22) para obter o potencial efetivo. Precisamos primeiro diagonalizar a métrica efetiva que apresenta elementos não diagonais na equação (2.35). Ter elementos não diagonais na métrica é inconveniente na hora de resolver a equação de movimento por que faz com que apareçam elementos cruzados, dificultando a aplicação do método de separação de variáveis. A diagonalização da métrica se faz mediante a transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} dt &= dt' - \frac{\tilde{g}_{rt}}{\tilde{g}_{tt}} dr', \\ dr &= dr'. \end{aligned} \tag{4.27}$$

utilizaremos $R = r/2m$ como coordenada adimensional, onde r é a coordenada radial de Schwarzschild. A transformação em (4.27) tem como resultado para cada componente da

métrica a seguinte mudança (a nova métrica efetiva será denotada por $\tilde{G}^{\mu\nu}$) :

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{tt} &= \frac{\tilde{g}^{tt}\tilde{g}^{rr} - (\tilde{g}^{rt})^2}{\tilde{g}^{rr}}, \\ \tilde{G}^{rr} &= \tilde{g}^{rr}, \\ \tilde{G}^{\theta\theta} &= \tilde{g}^{\theta\theta}, \\ \tilde{G}^{\varphi\varphi} &= \tilde{g}^{\varphi\varphi}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

A nova métrica efetiva diagonalizada é $\tilde{G}^{\mu\nu}$, apresenta um comportamento muito similar com a métrica do fundo $g^{\mu\nu}$. As componentes temporais da métrica efetiva e do fundo respectivamente, são mostradas na figura 4.5.

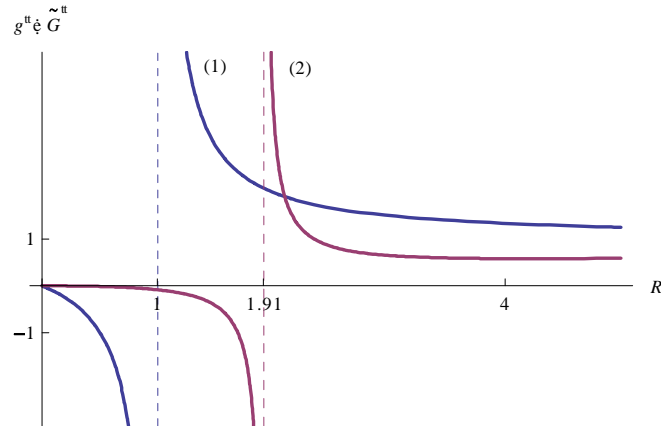


Figura 4.5: Diagrama da componente temporal tt da métrica de fundo g^{tt} (curva 1) e da métrica efetiva \tilde{G}^{tt} (curva 2).

As componentes radiais \tilde{G}^{rr} e g^{rr} , como esperado, se anulam nos horizontes e no infinito se tornam constantes, mostradas em Fig. 4.6.

Da definição do horizonte podemos encontrar a posição do horizonte sônico por meio de

$$\tilde{G}^{rr}(R_s) = 0,\tag{4.29}$$

que fornece o valor de $R_s = 1.91$, conforme o encontrado na seção 4.1.

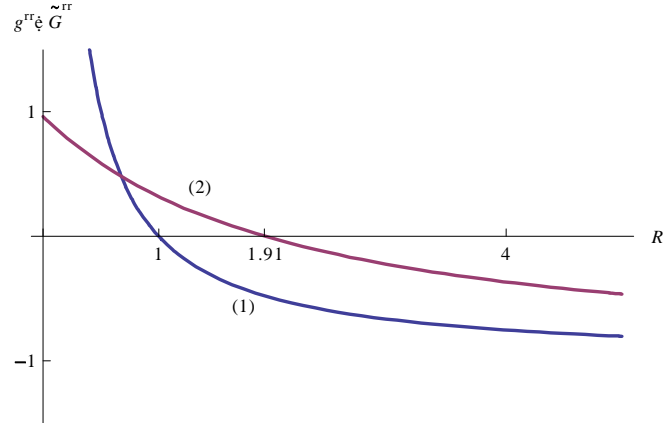


Figura 4.6: Diagrama da componente rr da métrica de fundo g^{rr} (curva 1) e da métrica efetiva \tilde{G}^{rr} (curva 2)

Substituindo a métrica efetiva diagonalizada $\tilde{G}_{\mu\nu}$ na equação de movimento, temos,

$$\partial_\mu \left(\sqrt{\tilde{G}} \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1 \right) = 0. \quad (4.30)$$

Pelo método de separação de variáveis escrevemos,

$$\phi_1 = \exp(-i\omega t) \beta(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.31)$$

(de agora em diante dispensaremos as "tildes" das coordenadas r' e t'), que substituída na equação (4.30), fornece

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \mathcal{L}_W}{\sigma} \tilde{G}^{rr} \frac{d\beta(r)}{dr} \right) + \left(\frac{l(l+1)\sigma}{r^2 \tilde{G}^{tt}} - \omega^2 \right) \frac{r^2 \tilde{G}^{tt}}{\sigma} \mathcal{L}_W \beta(r) = 0 \quad (4.32)$$

com

$$\sigma \equiv \left(-(M^{tt} M^{rr} - M^{rt}) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

Como na seção 3.2, é conveniente definir a coordenada ρ^* de tal maneira que

$$dr = -\tilde{G}^{rr} \mathcal{L}_W d\rho^*. \quad (4.34)$$

Esta coordenada é análoga à coordenada tartaruga definida na seção 3.2, utilizada para analisar o problema da estabilidade dos buracos negros [59]. A relação entre as coordenadas radiais ρ^* e r é mostrada na Fig. 4.7. Vemos que o horizonte de Schwarzschild foi deslocado para $\rho^* = -\infty$ de forma tal que o intervalo $(2m, \infty)$ na coordenada R corresponde ao intervalo $(-\infty, \infty)$ na coordenada ρ^* . De fato a integral de (4.34) não pode ser calculada

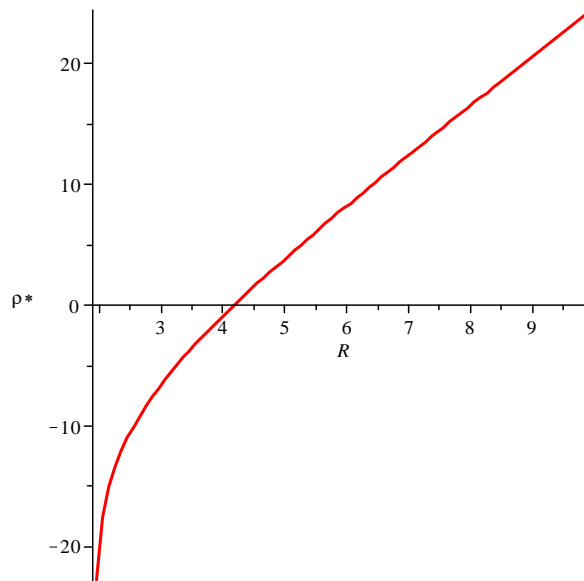


Figura 4.7: Comportamento de ρ^* em função de R

analiticamente, a figura é obtida através de cálculos numéricos usando um ajuste da trajetória do campo do fundo. A proposta para tal função é a expressão

$$v = \frac{(f - 1)^2}{1 - 0.8599f} - 0.0003f. \quad (4.35)$$

O gráfico desta função, comparado com a curva correspondente do diagrama de fluxo da Fig. 4.2, permite ver que a equação (4.35) fornece um bom ajuste (Fig. 4.8).

Usando a coordenada tartaruga a equação (4.32) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\rho^*} \left(\frac{r^2}{\sigma} \frac{d\beta}{d\rho^*} \right) - \left(\frac{l(l+1)\sigma}{r^2 \tilde{G}^{tt}} - \omega^2 \right) F \tilde{G}^{tt} \mathcal{L}_W^2 \beta = 0, \quad (4.36)$$

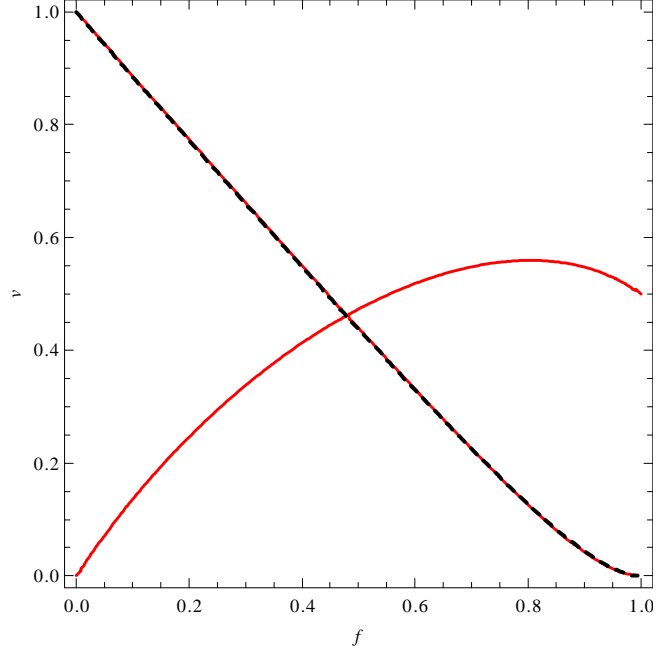


Figura 4.8: Comparação das curvas das soluções das equações (4.12) representada pela curva de cor vermelho e (4.35) representada pela curva tracejada.

ou ainda

$$\frac{d^2\beta}{d\rho^*} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\rho^*} \left(\frac{r^2}{\sigma} \right) \frac{d\beta}{d\rho^*} + \left(\frac{l(l+1)\sigma}{r^2 \tilde{G}^{tt}} - \omega^2 \right) F \tilde{G}^{tt} \mathcal{L}_W^2 \beta = 0. \quad (4.37)$$

Novamente nos deparamos com um termo em primeira derivada o qual pode ser eliminado por meio de uma nova mudança de coordenadas [60]. Esta equação têm a forma (3.28), assim a transformação (3.29) é aplicável. Depois da transformação a equação (4.37) toma a forma de uma equação diferencial de segunda ordem sem derivada primeira,

$$\frac{d^2\beta}{d\rho_*^2} + I \beta = 0.$$

Novamente

$$I = (\omega^2 - V_{ef}(r)),$$

onde o potencial efetivo é dado por

$$V_{ef} = \frac{l(l+1)\sigma}{\widetilde{G}^{tt}r^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\rho^*} \left(\frac{r^2}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho^*} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\rho^*} \left(\frac{r^2}{\sigma} \right) \right). \quad (4.38)$$

V_{ef} é representado em função de R na Fig 4.9 para vários valores de l .

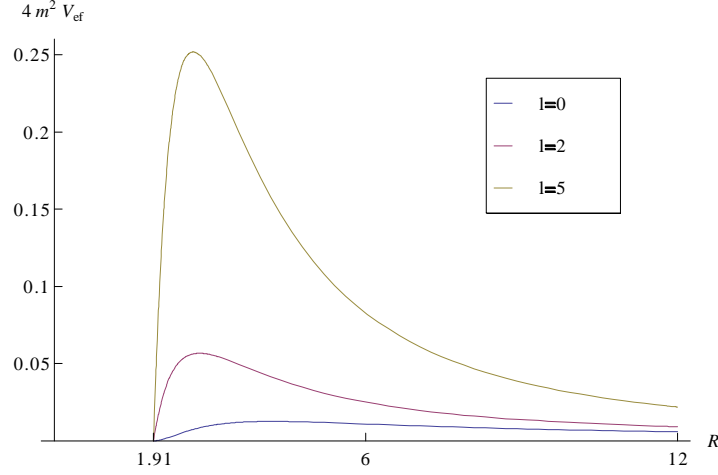


Figura 4.9: Potencial efetivo das perturbações em função da coordenada R

Como no caso de Schwarzschild, o potencial é zero no horizonte sônico. O gráfico de V_{ef} em função da coordenada ρ^* para diferentes valores de l se apresenta na Fig. 4.10. Mas para o propósito de análise da estabilidade precisamos do potencial na coordenada ρ^* . Este, foi obtido numericamente e comprova a positividade do potencial das perturbações o que é suficiente para estabelecer estabilidade do sistema, como visto em [24]. O potencial efetivo das perturbações pode ser comparado com o potencial efetivo de Schwarzschild, V_s , se obtemos este em função da mesma coordenada ρ^* . Na equação (3.33) o potencial V_s é dado na coordenada R , mas fazendo uso da transformação da equação (4.34) da coordenada tartaruga cujo gráfico é mostrado na Fig.4.11. Este gráfico foi obtido também numericamente e parece estar incompleto, dado que o horizonte sônico está fora da região do horizonte de Schwarzschild para qualquer transformação. Agora que obtivemos o V_s em função de ρ^* , podemos comparar ambos os gráficos e observar que o potencial de Schwarzschild é maior que o potencial das perturbações.

4.4 Comparação dos dois métodos

Nas seções anteriores, descrevemos uma aplicação de dois métodos para a analisar estabilidade linear. No método da integral da energia foi notável a facilidade. Usando a métrica efetiva é possível separar as perturbações do campo de fundo. Com isto as perturbações se propagam num espaço-tempo efetivo, que herda propriedades da métrica do fundo, por exemplo a assintarua e as simetrias da mesma. O método é aplicável à qualquer teoria de campos escalares que satisfaça as condições (2.25, 2.55) para garantir admissibilidade física. A variação da energia com o tempo, definida pela integral (3.20), é dependente unicamente do sinal da integral, sendo que esta é uma condição suficiente para garantir estabilidade linear. É importante salientar que não é necessário conhecer a forma da perturbação nem da solução do fundo, já que ela aparece na integral como sua derivada ao quadrado, garantindo a positividade.

O método da positividade do potencial efetivo serve para estudar a estabilidade linear do sistema. O potencial efetivo pode ser relativamente simples no caso descrito na seção 3.2, mas nos casos mais complexos como o do nosso (a acreção esférica de um campo escalar num buraco de Schwarzschild) se torna um trabalho que precisa de muitos cálculos frequentemente pesados. A função explícita do campo escalar de fundo e das perturbações são necessárias neste método.

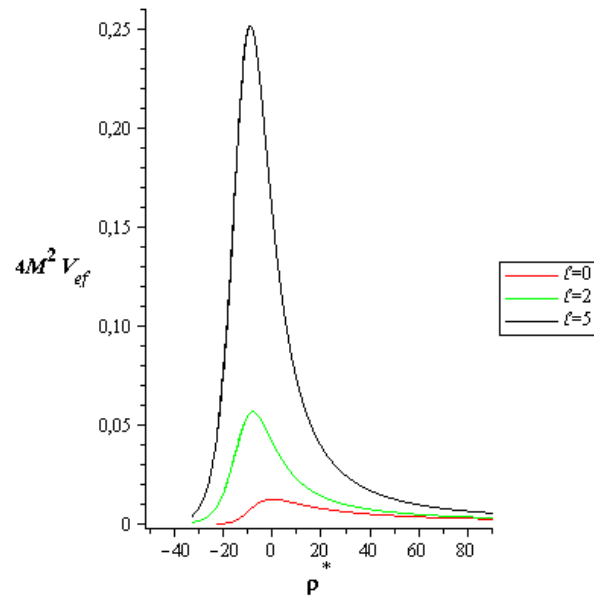


Figura 4.10: Potencial efetivo na coordenada ρ^*

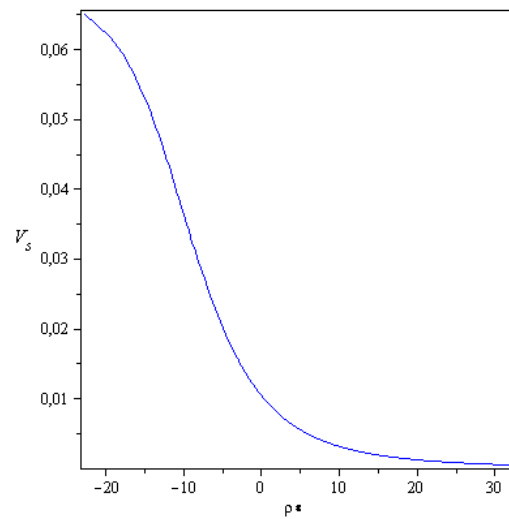


Figura 4.11: Potencial efetivo de Schwarzschild em coordenada ρ^*

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho analisamos a estabilidade de um sistema formado pela acreção de um fluido fantasma ao buraco negro de Schwarzschild. Este sistema resultou ser estável sob perturbações lineares. Usamos dois métodos para analisar a estabilidade. O método da integral de energia das perturbações, estudado por Moncrief, que consiste em estabelecer o sinal da variação da energia com o tempo, dado por uma integral de superfície. A análise através deste método é direta e permite resolver o problema da estabilidade em poucos passos. A integral de superfície é obtida a partir do vetor de Killing temporal do sistema. A generalidade do método também reside em que não é necessário conhecer a função explícita do fundo nem resolver as equações de movimento das perturbações do campo escalar. O segundo método utilizado foi o da positividade do potencial efetivo das perturbações. Este implica, em oposição ao primeiro, conhecer as soluções de fundo através da resolução da equação de movimento e conhecer também a dependência da perturbação. Esta tarefa requer cálculos muito mais complexos. É importante notar ainda que o método da integral de Moncrief fornece uma condição necessária e suficiente para a estabilidade, enquanto o método da positividade do potencial fornece somente uma condição necessária.

Este trabalho pode ser estendido para estudar a estabilidade de sistemas que envolvem outros vetores de Killing, que, quando combinados com outros tensores conservados no

espaço-tempo gerado pela métrica efetiva, podem relacionar a derivada temporal de quantidades conservadas a integrais de superfície. Assim, seria possível avaliar a estabilidade do sistema em questão frente a perturbações de um tipo diferente das escalares. Por exemplo, a generalização poderia ser aplicada a sistemas onde as perturbações tenham momento angular não nulo. Existe ainda a possibilidade de estudar a estabilidade associada a tensores de Killing, tal como o associado à métrica de Kerr, que dá origem a constante de Carter [64]. Por último, é importante notar que o método da integral pode ser aplicado ao caso de sistemas nos quais a dinâmica das perturbações é caracterizada pela métrica efetiva mais outros graus de liberdade. Este é o caso dos fluidos com vorticidade não nula [65], e das estrelas newtonianas politrópicas [66]. No primeiro caso, as perturbações da velocidade estão acopladas com as perturbações da vorticidade. Já no segundo, as perturbações ao potencial newtoniano se acoplam com as associadas à densidade. Em regimes tais que estas quantidades se desacoplam, é possível determinar a estabilidade usando o método integral.

Apêndice A

Soluções estacionárias e Simetria de Shift

Foi apontado no capítulo 1 que as soluções estacionárias das teorias de campos escalares devem necessariamente apresentar simetria de shift [67]. Esta simetria pode se manifestar através do próprio campo escalar original ou através de uma redefinição. Como veremos, a exploração desta simetria nos permitirá obter as condições que as configurações estacionárias devem satisfazer e assim encontrar um conjunto de soluções admissíveis e a forma da lagrangiana que as rege. Primeiro, estabelecendo que a redefinição do campo escalar, não afeta nenhum observável e segundo que os campos ϕ e $\tilde{\phi}$, relacionados pela expressão $\phi = \phi(\tilde{\phi})$, descreverão o mesmo fenômeno. As quantidades como a energia, densidade e velocidade do som depois desta redefinição se transformarão de forma covariante, enquanto outras quantidades como a métrica efetiva se transformarão conformalmente, isto é sem afetar a causalidade.

Veremos as condições de estacionariedade. Se por definição a configuração estacionária vem dada por $\mathcal{L}_t T_{\mu\nu} = 0$, substituindo o tensor momento energia se tem

$$\mathcal{L}_t T_{\mu\nu} = (\mathcal{L}_t \mathcal{L}_W) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_t \mathcal{L} + \mathcal{L}_W [(\mathcal{L}_t \partial_\mu \phi) \partial_\nu \phi + (\mathcal{L}_t \partial_\nu \phi) \partial_\mu \phi] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Multiplicando $g^{\mu\nu}$ obtemos

$$g^{\mu\nu} \mathcal{L}_t T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_t T_{\mu}^{\mu} = \mathcal{L}_t (W \mathcal{L}_W - 4\mathcal{L}) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Se introduz o projetor

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi}{W}, \quad (\text{A.3})$$

que, multiplicado à eq A.1, resulta em $P^{\alpha\nu} \mathcal{L}_t T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_W P^{\alpha\nu} (\mathcal{L}_t \partial_{\nu}\phi) \partial_{\mu}\phi = 0$. A estacionariedade então implica em

$$P^{\alpha\nu} (\mathcal{L}_t \partial_{\nu}\phi) = 0, \quad (\text{A.4})$$

que pode ser rescrito como

$$\mathcal{L}_t \left(\frac{\nabla^{\alpha}\phi}{\sqrt{2X}} \right) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Com isto chegamos à condição que o campo escalar deve satisfazer para ter soluções estacionárias. Para o caso hidrodinâmico onde $u^{\mu} = \frac{\nabla^{\alpha}\phi}{\sqrt{2X}}$ implica também,

$$\mathcal{L}_t \varepsilon = \mathcal{L}_t u^{\mu} = \mathcal{L}_t p = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde $\varepsilon = W \mathcal{L}_W - \mathcal{L}$ é a densidade de energia e p a pressão. A equação (A.5) tem como solução geral uma função do tipo

$$\phi = \Phi(t + \psi(x^i)). \quad (\text{A.7})$$

Para obter as lagrangianas que admitem este tipo de soluções estacionárias partimos novamente de $\mathcal{L}_t T_{\mu\nu} = 0$ que, multiplicada por $P^{\mu\nu}$, resulta em $P^{\mu\nu} \mathcal{L}_t T_{\mu\nu} = -3\mathcal{L}_t \mathcal{L} = 0$. Isto leva à

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L} = 0, \quad (\text{A.8})$$

que para o caso hidrodinâmico significa que a pressão é constante. Combinando (A.8) e

(A.2) se tem

$$\mathcal{L}_t(W\mathcal{L}_W) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Ambas as equações, (A.8) e (A.9) proporcionam uma equação diferencial parcial de segunda ordem

$$2W\mathcal{L}_{W\phi} - (2W\mathcal{L}_{WW} + \mathcal{L}_W) \frac{\mathcal{L}_\phi}{\mathcal{L}_W} = 0, \quad (\text{A.10})$$

que reescrita é

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}_\phi/\mathcal{L}_W)}{\partial \ln(2W)} = 1. \quad (\text{A.11})$$

Esta equação fornece uma solução de uma lagrangiana geral do tipo

$$\mathcal{L}(\phi, X) = F(X \exp[f(\phi)]). \quad (\text{A.12})$$

Este tipo de lagrangiana guarda uma simetria de shift, por exemplo, é possível redefinir o campo tal que

$$\tilde{\phi} = \int d\phi \exp\left[\frac{f(\phi)}{2}\right]$$

esta redefinição faz com que $\mathcal{L}(\phi, X) = F(\tilde{X})$. Desta maneira todas as teorias escalares que permitem configuração estacionária têm necessariamente simetria de shift, diretamente ou depois de aplicar uma redefinição.

Apêndice B

Acreção de Bondi

A acreção esférica simétrica e estacionária por uma estrela newtoniana foi investigada por Bondi [10]. Mais especificamente, uma estrela em repouso de massa M embebida num fluido de extensão infinita, com pressão p_∞ e densidade ρ_∞ no infinito. O fluido se movimenta radialmente com velocidade v em direção à estrela. Assumindo que não há transferência de calor entre o sistema e o entorno, a pressão e a densidade se relacionam mediante a expressão

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma, \quad (\text{B.1})$$

onde γ é a constante adiabática. As equações que regem o problema são as equações de continuidade e de Bernoulli, respectivamente. Tomando r como a coordenada radial e v a velocidade entrante, estas se reduzem à

$$4\pi r^2 \rho v = A, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{v^2}{2} + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{GM}{r}, \quad (\text{B.3})$$

onde a equação (B.1) foi usada na equação (B.2) e A é a taxa de acreção e G a constante de gravitação universal. Estas equações podem ser escritas de forma adimensional mediante

as seguintes transformações.

$$\begin{aligned} r &= xGM/c^2 \\ v &= yc \\ \rho &= z_\infty. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Assim, equações (B.2) e (B.3) transformam-se em

$$x^2yz = \lambda, \tag{B.5}$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{(z^{\gamma-1} - 1)}{\gamma - 1} = \frac{1}{x}, \tag{B.6}$$

onde λ se relaciona com a taxa de acreção como segue

$$A = 4\pi\lambda(GM)^2 c^{-3}\rho_\infty. \tag{B.7}$$

Temos duas equações (B.5) e (B.6) para três variáveis x, y, z . Portanto, é necessário introduzir uma nova variável auxiliar u ,

$$u = yz^{-\frac{(\gamma-1)}{2}}. \tag{B.8}$$

Substituindo (B.8) em (B.5) e resolvendo para y e z , temos

$$y = u^{\frac{2}{\gamma-1}} (\lambda/x^2)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)} \tag{B.9}$$

$$z = (\lambda/x^2u)^{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{B.10}$$

Esta nova transformação (B.8) permite escrever ambas equações numa equação só, tal que

$$f(u) = \lambda^{-2\frac{(\gamma-1)}{\gamma+1}} g(x), \tag{B.11}$$

onde

$$f(u) = u^{\frac{4}{\gamma+1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma+1} \frac{1}{u^2} \right), \quad (\text{B.12})$$

$$g(x) = \frac{x^{4(\gamma-1)/(\gamma+1)}}{\gamma-1} + x^{-(5-3\gamma)/(\gamma+1)}. \quad (\text{B.13})$$

Mediante (B.4) podemos ver que a forma como a variável u é construída para auxiliar a resolução das equações (B.5) e (B.6) tem um significado físico de taxa entre a velocidade do fluido v e a velocidade do som c . O estudo das funções $f(u)$ e $g(x)$ fornecerá a evolução de u com x . Os mínimos das funções $f(u)$ e $g(x)$ respectivamente são

$$f(u_m = 1) = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = f_m, \quad (\text{B.14})$$

e

$$g\left(x_m = \frac{1}{4}(5-3\gamma)\right) = \frac{1}{4} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[\frac{1}{4}(5-3\gamma) \right]^{(5-3\gamma)/(\gamma+1)} = g_m, \quad (\text{B.15})$$

onde u_m e x_m são os valores das variáveis onde f e g tem valor mínimo. Introduzindo Estes valores na equação (B.11) vemos que λ não pode exceder um valor crítico dado por

$$\lambda_c = \left(\frac{f_m}{g_m} \right)^{(\gamma+1)/(2\gamma-2)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{(\gamma+1)/(2\gamma-2)} \left(\frac{5-3\gamma}{4} \right)^{-(5-3\gamma)/(2\gamma-2)}. \quad (\text{B.16})$$

Dado que a acreção se relaciona com o parâmetro λ , então podemos dizer que a acreção também não pode exceder o valor dado por

$$A = 4\pi\lambda_c (GM)^2 c^{-3} \rho_\infty, \quad (\text{B.17})$$

em vista da relação (B.7). Este ponto crítico nos brinda uma forma de analisar as diferentes trajetórias da solução para poder entender a evolução de u .

Fixando o valor de $\gamma = 7/5$ procedemos a fazer o gráfico. Primeiro assumimos um valor $\lambda = \frac{1}{4}\lambda_c$ que substituído na equação (B.11) fornece uma relação de x e u . A curva obtida é representada na figura (B.1) pelas linhas (1). O processo se repete para $\lambda = \lambda_c$ linhas (2), $4\lambda_c$ linhas (3).

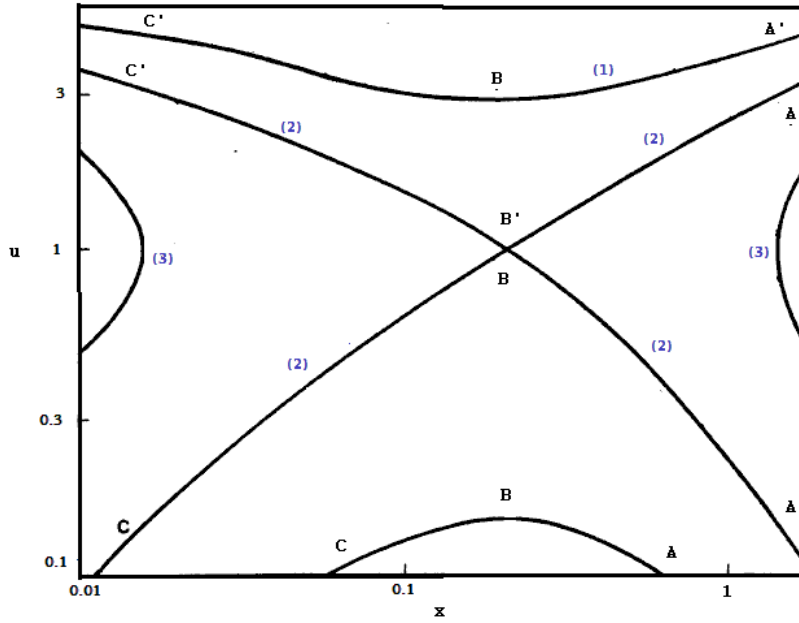


Figura B.1: u como função de x para $\gamma = 7/5$

A condição de contorno no infinito implica que u deve ser muito pequeno quando aproxima-se ao infinito, isto descarta a curva $A'B'C'$.

Para curvas com $\lambda < \lambda_c$ (trajetórias 1) o máximo, B , fica mais alto conforme x vai diminuindo. Por sua vez u é sempre menor que 1 descrevendo um fluido subsônico.

Para $\lambda = \lambda_c$ (trajetórias 2) há duas trajetórias possíveis vindo de A , ir para o ponto C ou continuar até o ponto C' . A primeira alternativa é descartada por ter uma tangente descontínua. A segunda é uma curva contínua e monótona a qual descreve um estado do sistema diferente ao do caso para $\lambda < \lambda_c$.

Para $\lambda > \lambda_c$ as curvas tem um comportamento indicado na figura (trajetórias 3) onde não existe soluções possível.

Este apêndice mostra como é possível fazer o gráfico (4.1) de maneira qualitativa para cada trajetória. Embora a equação (B.11) seja diferente da equação (4.12), esta análise pode ser aplicada mediante a relação do parâmetro α e o λ , ambos relacionados com a taxa de acreção. No procedimento feito em Frolov a equação de movimento provém do tratamento do problema através do formalismo lagrangiano que resulta diretamente numa equação só e não foi necessário fazer as transformações de variáveis feitas no trabalho de

Bondi. Além disso o parâmetro γ não está envolvido explicitamente na análise.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Landau and . Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. No. v. 2 in Course of theoretical physics, Butterworth Heinemann, 1975.
- [2] V. F. Mukhanov, H. Feldman, and R. H. Brandenberger, “Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions,” *Phys.Rept.*, vol. 215, pp. 203–333, 1992.
- [3] T. Regge and J. A. Wheeler, “Stability of a schwarzschild singularity,” *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 1063–1069, Nov 1957.
- [4] V. Moncrief, “Odd-parity stability of a Reissner-Nordström black hole,” *prd*, vol. 9, pp. 2707–2709, May 1974.
- [5] V. Moncrief, “Stability of Reissner-Nordström black holes,” *prd*, vol. 10, pp. 1057–1059, Aug. 1974.
- [6] B. F. Whiting, “Mode stability of the Kerr black hole.,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 30, pp. 1301–1305, June 1989.
- [7] F. Finster and H. Schmid, “Spectral estimates and non-selfadjoint perturbations of spheroidal wave operators,” *J.Reine Angew.Math.*, vol. 601, pp. 71–107, 2006.
- [8] M. Dafermos and I. Rodnianski, “Lectures on black holes and linear waves,” *Clay Math.Proc.*, vol. 17, pp. 97–205, 2013.

- [9] M. Zilhão, V. Cardoso, C. Herdeiro, L. Lehner, and U. Sperhake, “Testing the non-linear stability of Kerr-Newman black holes,” *Phys.Rev.*, vol. D90, no. 12, p. 124088, 2014.
- [10] H. Bondi, “On spherically symmetrical accretion,” *MNRAS*, vol. 112, p. 195, 1952.
- [11] F. Hoyle and R. A. Lyttleton, “On the accretion theory of stellar evolution,” *mnras*, vol. 101, p. 227, 1941.
- [12] J. A. Font and J. Ibanez, “Nonaxisymmetric relativistic Bondi-Hoyle accretion onto a Schwarzschild black hole,” *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 1998.
- [13] J. A. Font, J. M. Ibanez, and P. Papadopoulos, “Nonaxisymmetric relativistic Bondi-Hoyle accretion onto a Kerr black hole,” *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 1998.
- [14] L. I. Petrich, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, “Accretion onto a moving black hole: An exact solution,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 60, pp. 1781–1784, 1988.
- [15] C. Struck, B. E. Cohanin, and L. A. Willson, “Continuous and burst - like accretion onto substellar companions in Mira Winds,” *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, vol. 347, p. 173, 2004.
- [16] R. G. Edgar, “A Review of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion,” *New Astron.Rev.*, vol. 48, pp. 843–859, 2004.
- [17] I. Mandal, A. K. Ray, and T. K. Das, “Critical properties of spherically symmetric black hole accretion in Schwarzschild geometry,” *MNRAS*, vol. 378, pp. 1400–1406, July 2007.
- [18] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “f(R) Theories Of Gravity,” *Rev.Mod.Phys.*, vol. 82, pp. 451–497, 2010.
- [19] A. Coley, “Structures in the universe by exact methods: Formation, evolutions, interactions (cambridge monographs on mathematical physics),” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 27, no. 10, p. 109002, 2010.

- [20] M. S. Madsen, “Scalar fields in curved spacetimes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 5, no. 4, p. 627, 1988.
- [21] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. A. Luty, and S. Mukohyama, “Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity,” *JHEP*, vol. 0405, p. 074, 2004.
- [22] A. V. Frolov, “Accretion of ghost condensate by black holes,” *Phys.Rev.*, vol. D70, p. 061501, 2004.
- [23] V. Moncrief, “Stability of stationary, spherical accretion onto a Schwarzschild black hole,” *apj*, vol. 235, pp. 1038–1046, Feb. 1980.
- [24] R. M. Wald, “Note on the stability of the Schwarzschild metric,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 20, pp. 1056–1058, June 1979.
- [25] R. Akhoury, D. Garfinkle, R. Saotome, and A. Vikman, “Nonstationary dark energy around a black hole,” *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 084034, Apr 2011.
- [26] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, “Analog gravity from field theory normal modes?,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 18, pp. 3595–3610, 2001.
- [27] W. Gordon, “Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 377, pp. 421–456, 1923.
- [28] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser, “Analogue gravity,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 8, no. 12, 2005.
- [29] W. G. Unruh, “Experimental black-hole evaporation,” *Physical Review Letters*, vol. 46, pp. 1351–1353, May 1981.
- [30] E. Goulart and S. E. P. Bergliaffa, “Effective metric in nonlinear scalar field theories,” *Phys.Rev.*, vol. D84, p. 105027, 2011.

- [31] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. No. vol. 2 in Course of theoretical physics, Butterworth-Heinemann, 1975.
- [32] A. D. Rendall, “Dynamics of k-essence,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 23, pp. 1557–1570, 2006.
- [33] E. Goulart and S. E. P. Bergliaffa, “Effective metric in nonlinear scalar field theories,” *Phys.Rev.*, vol. D84, p. 105027, 2011.
- [34] E. Goulart de Oliveira Costa and S. Esteban Perez Bergliaffa, “A Classification of the effective metric in nonlinear electrodynamics,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 26, p. 135015, 2009.
- [35] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, “Refringence, field theory, and normal modes,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 19, pp. 2961–2982, 2002.
- [36] V. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, and J. Salim, “Light propagation in nonlinear electrodynamics,” *Phys.Lett.*, vol. B482, pp. 134–140, 2000.
- [37] M. Novello, J. Salim, V. De Lorenci, and R. Klippert, “Effective Lagrangian for electrodynamics and avoidance of the singular origin of the universe,” 1998.
- [38] V. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, and J. Salim, “Light propagation in nonlinear electrodynamics,” *Phys.Lett.*, vol. B482, pp. 134–140, 2000.
- [39] M. Novello, V. De Lorenci, J. Salim, and R. Klippert, “Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics,” *Phys.Rev.*, vol. D61, p. 045001, 2000.
- [40] M. Novello, S. E. Perez Bergliaffa, J. Salim, V. De Lorenci, and R. Klippert, “Analog black holes in flowing dielectrics,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 20, pp. 859–872, 2003.
- [41] E. Bittencourt, V. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, and J. Salim, “Analogue black holes for light rays in static dielectrics,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 31, p. 145007, 2014.

- [42] M. Novello and S. E. Perez Bergliaffa, “Effective geometry,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 668, no. 1, 2003.
- [43] M. Novello, J. M. Salim, V. A. De Lorenci, and E. Elbaz, “Nonlinear electrodynamics can generate a closed space - like path for photons,” *Phys.Rev.*, vol. D63, p. 103516, 2001.
- [44] F. Baldovin, M. Novello, S. E. Perez Bergliaffa, and J. Salim, “A Nongravitational wormhole,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 17, pp. 3265–3276, 2000.
- [45] N. Bretón and S. E. P. Bergliaffa, “On the stability of black holes with nonlinear electromagnetic fields,” 2014.
- [46] C. BARCEL, S. LIBERATI, and M. VISSER, “Analogue models for frw cosmologies,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 12, no. 09, pp. 1641–1649, 2003.
- [47] M. Novello, E. Goulart, J. Salim, and S. Perez Bergliaffa, “Cosmological Effects of Nonlinear Electrodynamics,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 24, pp. 3021–3036, 2007.
- [48] M. Novello, S. E. Perez Bergliaffa, and J. Salim, “Non-linear electrodynamics and the acceleration of the universe,” *Phys.Rev.*, vol. D69, p. 127301, 2004.
- [49] M. Novello, A. N. Araujo, and J. Salim, “Cyclic Magnetic Universe,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A24, pp. 5639–5658, 2009.
- [50] M. Novello, J. M. Salim, and A. N. Araújo, “Extended born-infeld theory and the bouncing magnetic universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 023528, Jan 2012.
- [51] H. J. Mosquera Cuesta and G. Lambiase, “Primordial magnetic fields and gravitational baryogenesis in nonlinear electrodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 023013, Jul 2009.
- [52] M. Novello, M. Makler, L. Werneck, and C. Romero, “Extended born-infeld dynamics and cosmology,” *Phys.Rev.*, vol. D71, p. 043515, 2005.

- [53] H. J. Mosquera Cuesta and J. M. Salim, “Nonlinear electrodynamics and the surface redshift of pulsars,” *Astrophys.J.*, vol. 608, pp. 925–929, 2004.
- [54] H. J. Mosquera Cuesta and J. M. Salim, “Nonlinear electrodynamics and the gravitational redshift of pulsars,” *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, vol. 354, pp. L55–L59, 2004.
- [55] S. E. P. Bergliaffa, “Effective geometry in astrophysics,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 13, no. 07, pp. 1469–1476, 2004.
- [56] V. De Lorenci, N. Figueiredo, H. Fliche, and M. Novello, “Dyadosphere bending of light,” *Astron.Astrophys.*, vol. 369, p. 690, 2001.
- [57] S. E. Perez Bergliaffa, “Propagation of perturbations in nonlinear spin-2 theories,” 2003.
- [58] J. P. Mbelek, H. J. Mosquera Cuesta, M. Novello, and J. M. Salim, “Nonlinear electrodynamics and the Pioneer 10/11 spacecraft anomaly,” *Europhys.Lett.*, vol. 77, p. 19001, 2007.
- [59] V. Frolov and I. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Fundamental Theories of Physics, Springer Netherlands, 1998.
- [60] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*. No. v. 1, Academic Press, 1998.
- [61] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, “k - inflation,” *Phys.Lett.*, vol. B458, pp. 209–218, 1999.
- [62] O. F. Piattella, J. C. Fabris, and N. Bili, “Note on the thermodynamics and the speed of sound of a scalar field,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 31, p. 055006, 2014.
- [63] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, “k - inflation,” *Phys.Lett.*, vol. B458, pp. 209–218, 1999.
- [64] D. Garfinkle and E. Glass, “Killing Tensors and Symmetries,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 27, p. 095004, 2010.

- [65] S. E. P. Bergliaffa, K. Hibberd, M. Stone, and M. Visser, “Wave equation for sound in fluids with vorticity,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 191, no. 12, pp. 121 – 136, 2004.
- [66] D. Bini, C. Cherubini, and S. Filippi, “Effective geometries in self-gravitating polytropes,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 064024, Sep 2008.
- [67] R. Akhoury, C. S. Gauthier, and A. Vikman, “Stationary Configurations Imply Shift Symmetry: No Bondi Accretion for Quintessence / k-Essence,” *JHEP*, vol. 0903, p. 082, 2009.