

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF

COORDENAÇÃO DE FÍSICA EXPERIMENTAL DE ALTAS ENERGIAS - LAFEX

GRUPO DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS ELEMENTARES

TESE DE DOUTORADO

ASPECTOS QUÂNTICOS DE TEORIAS DE GRAVITAÇÃO
COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

BRUNO PEREIRA DIAS

RIO DE JANEIRO, RJ

DEZEMBRO DE 2012

O que é, pois, o tempo?

*Se ninguém me pergunta, sei o que é; mas se
quero explicá-lo a quem me pergunta, não sei.*

Santo Agostinho

Agradecimentos

A Deus, que faz possível todas as coisas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A todos os funcionários do CBPF pela acolhida e as condições de trabalho concedidas. Em especial, à Cristiana Oliveira, José Ricardo e Elisabete de Souza pela amizade e prontidão na solução de inúmeros problemas. Também, agradeço ao Prof. Ivan dos Santos Oliveira Júnior pela seriedade, preocupação com os pós-graduandos e pela confiança na conclusão de meu doutorado.

Expresso meus agradecimentos ao Prof. José Abdalla Helayël-Neto pela excelente orientação e o estímulo para desvendar os mistérios da Física. Uma pessoa por quem tenho muita admiração, não só por seus valiosos ensinamentos científicos, mas também pelo seu lado humano. Humildade, consciência social e respeito ao ser humano são valores que eu sempre o terei como referência.

Aos professores Antonio José Accioly e Sebastião Alves Dias, pela atenção prestativa e gentil nas inúmeras discussões científicas. Muito desta tese se deve aos seus ensinamentos.

Reitero o agradecimento aos professores José Abdalla Helayël-Neto, Antonio José Accioly e Sebastião Alves Dias pela preocupação e atuação exemplar na formação científica dos alunos de pós-graduação do CBPF. Os cursos básicos e avançados ministrados e a organização de seminários e congressos foram indispensáveis para a edificação de uma postura crítica e madura perante os desafios propostos pela Física.

Gostaria de agradecer aos meus pais pelo apoio e confiança em todos os momentos da minha vida. Minha mais profunda gratidão a vocês. Agradeço também aos meus queridos irmãos Diego e Francis pelo companheirismo e carinho fraterno.

Aos colegas do CBPF: Ana Paula, Alan Spinoza, Alfredo Vargas, André Nicolai, Azucena Rivasplata, Bruno Silva, Carolina Cerqueira, César Raitz, Danielle Tostes, Daniel Santos, Denis Cocuroci, Edgar Carvalho, Eduardo Bittencourt, Esley Escatena, Enrique Arias, Gabriel Santiago, Grasielle Santos, Guilherme Bremm, Jefferson Moraes, José Chauca, Juan Dueñas, Kim Veiga, Lucas Cardoso, Luis Bernald, Márcio Nunes, Marcus Fonseca, Maria Elidaiana, Martha Monique, Maury Duarte, Max Jáuregui, Naiara Klein, Rafael Nardi, Rodrigo Turcati, Roberta Dutra, Saulo Sousa e Thamys Abrahão, que tornaram os anos de convivência mais agradáveis e divertidos. Em particular, ao meu amigo Carlos André Hernaski pela parceria científica e amizade. Seu grande apoio, discussões e confiança numa grande colaboração foram indispensáveis para a elaboração desta tese.

A minha gatinha Marília Carneiro, por toda felicidade e carinho que trouxe a minha vida.

Resumo

Neste trabalho, abordamos alguns aspectos perturbativos em teorias de gravitação com a violação da simetria de Lorentz. Propomos um conjunto de operadores de projeção para modelos de gravitação com um vetor de fundo e da classe da gravitação de Hořava-Lifshitz. Utilizando esses operadores, desenvolvemos um procedimento de fácil implementação para obter o propagador e analisar a unitariedade de modelos Lagrangianos, que é especialmente adequado para modelos com violação de paridade. Interessantemente, esse método simplifica a tarefa de estudar as propriedades do espectro de partículas do modelo, que em geral pode ser bastante dispendiosa. Além disso, esta proposta torna mais clara a interpretação física dos modos propagantes.

Como aplicações importantes do método proposto, investigamos o efeito combinado da ação quadridimensional de Chern-Simons e Ricci-Cotton para a gravitação de Einstein-Hilbert, modificada com termos de derivada superior. As consequências para o espectro de partículas são analisadas. Surpreendentemente, inferimos que as condições para ausência de táquions e fantasmas impõe restrições sobre o vetor de violação de fundo para a gravitação de Chern-Simons em $(1+3)D$, que são drasticamente diferentes quando comparadas com as teorias de calibre com violação de Lorentz. Também, discutimos as propriedades espectrais para um modelo geral de gravitação de Hořava-Lifshitz. Uma atenção especial é dada ao modo de spin-0, que aparece naturalmente na teoria devido a violação da simetria de Lorentz. Por fim, com os resultados obtidos, investigamos algumas consequências experimentais no limite de baixas energias da teoria.

Abstract

In this work, we deal with some perturbative aspects of gravity models with Lorentz symmetry violation. We propose a set of projection operators to deal with gravity models with a background vector and the class of Hořava-Lifshitz gravity models. Using these operators, an uncomplicated and easily procedure for obtaining the propagator and to analyze the unitarity of the aforementioned systems is built up. This is specially suitable for parity violating models. Interestingly enough, this method converts the task of probing the unitarity of a given 3D system, that is in general a time-consuming work, in a simplified manner; besides, it also greatly clarifies the physical interpretation of the propagating modes.

As important applications of the proposed method, we investigate the combined effect of four-dimensional Chern-Simons and Ricci-Cotton terms for the Einstein-Hilbert gravity modified with higher-derivative terms. The consequences for the particle spectrum is analyzed. Surprisingly, we infer that (1+3)D Chern-Simons gravity imposes a drastically different constraint on the background if compared to ordinary Lorentz violating gauge theories whenever conditions for the suppression of tachyons and ghosts are imposed. Also, we discuss spectral properties of a general model of Hořava-Lifshitz model. A special attention is given for the spin-0 mode, which naturally appears due to the Lorentz symmetry violation. Finally, with the obtained results, some experimental effects on the low energy regime are investigated.

Sumário

1	Introdução e Contextualização do Tema	1
2	Um Novo Conjunto de Operadores Projeção de Spin em 3D	5
2.1	Um Novo Conjunto de Operadores de Projeção de Spin para Modelos 3D	6
2.2	Obtenção dos Propagadores	12
2.3	Prescrição para Análise da Consistência Espectral	13
2.4	Aplicação para Modelos Planares com Violação de Paridade	14
2.4.1	Eletromagnetismo com Derivadas Superiores	14
2.4.2	Gravitação de Ordem Superior	19
2.5	Conclusão	22
3	Análise Espectral de um Modelo de Gravitação com Violação da Simetria de Lorentz	23
3.1	Violação da Simetria de Lorentz através de um Vetor de Fundo	23
3.2	Gravitação com Violação da Simetria de Lorentz através de um Vetor de Fundo	25
3.3	Construção de uma Base Ortonormal de Operadores	29
3.3.1	Blocos Construtores dos Operadores	30
3.3.2	Operadores nos Graus de Liberdade para Modelos de Gravitação	31
3.4	Obtenção dos Propagadores	34
3.5	Análise do Espectro de Partículas	36
3.5.1	Gráviton Não-Massivo	40
3.6	Conclusão	41
4	Considerações sobre os Modos de Excitação de um Modelo Geral da Gravitação de Hořava-Lifshitz	44
4.1	Propriedade de Escala Anisotrópica do Espaço-Tempo e Difeomorfismos que Preservam a Foliação	45
4.2	Formulações da Gravitação de Hořava-Lifshitz	48
4.3	Decomposição dos Modos Propagantes do Gráviton	51

4.4	Obtenção dos Propagadores e Análise do Espectro de Partículas para um Modelo Geral da Gravitação de Hořava-Lifshitz	53
4.5	Aspectos do Modos Propagantes da Gravitação de Hořava-Lifshitz num Regime de Baixas Energias	60
4.6	Conclusão	64
5	Reflexões Finais	65
A	Operadores de Projeção de Spin 3D e Relações Tensoriais	69
A.1	<i>Operadores para Campos Vetoriais: $A - A$</i>	69
A.2	Operadores para Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2: $h - h$	69
B	Método Alternativo para Obtenção do Propagador	71
C	Relações Tensoriais entre Operadores de Projeção para Gravitação de Hořava-Lifshitz	73
C.1	<i>Operadores para Campos Vetoriais: $N^i - N^i$</i>	73
C.2	Operadores para Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2: $h - h$	73
C.3	Operadores entre Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2 e Campos Vetoriais: $h - N$	74
C.4	Operadores entre Campos Vetoriais e Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2: $N - h$	74
D	Publicações vinculadas a tese	75

Capítulo 1

Introdução e Contextualização do Tema

Apesar do papel consagrado que a simetria de Lorentz desempenha na Física de Altas Energias, nas últimas duas décadas tem havido grande atividade em se considerar modelos em que essa simetria é violada. Um motivo para todo esse entusiasmo vem da necessidade de uma revisão da estrutura do espaço-tempo no regime em que a intensidade da força gravitacional é relevante quando comparada com as outras interações fundamentais. Nesse regime de energia, o espaço-tempo pode ser discreto com a presença de um comprimento fundamental mínimo $l_P = 1,6 \times 10^{-35}$ m. Isso sugere uma violação da simetria de Lorentz.

Mais entusiasmante ainda seria a possibilidades de detectar resquícios de uma violação da simetria Lorentz, advindos das teorias mais fundamentais de gravitação quântica, em medidas experimentais de baixas energias. De fato, Collins, Pérez, Sudarsky, Urrutia e Vucetich [1, 2] sugerem que diminutos efeitos de violação de Lorentz na escala de Planck ($E_P = 1,2 \times 10^{19}$ GeV), podem ser relevantes a um nível de baixas energias, quando se leva em consideração efeitos não-perturbativos ou renormalização a laços de ordens mais altas. (Para uma opinião contrária, veja [3]). Essa postura tem derrubado o folclore-padrão de que indícios experimentais da natureza da gravitação quântica são impraticáveis, baseado no argumento simplista que esses efeitos só devam aparecer em energias da ordem da escala de Planck, muito além da capacidade dos aparatos experimentais atualmente. Mesmo se não detectarmos experimentalmente sinais de uma violação de Lorentz, permanece como um grande problema teórico entender os mecanismo que fazem emergir a simetria de Lorentz num regime de baixas energias.

Tais observações, além de estabelecerem restrições físicas aos parâmetros dessas teorias, poderiam servir como guia para a construção de teorias a níveis de energias mais altos. Os principais modelos candidatos a uma teoria de gravitação quântica podem apresentar indícios de uma violação da simetria de Lorentz. A gravitação quântica em laços [4, 5, 6] exhibe uma fase em que a simetria de Lorentz é violada¹. Nesse contexto, foi sugerido que efeitos de gravitação quântica possam ser observados experimentalmente. Efeitos da discretização do espaço-tempo podem resultar em variações mensuráveis na estrutura de propagação de fótons e neutrinos de fontes distantes como *Gamma Ray Bursts* e *Neutrino Bursts*[9]. Os trabalhos

¹Existem opiniões distintas na literatura. A Referência [7] propõe conciliar a simetria de Lorentz com espaço-tempo discretizado por meio do conceito de conjuntos causais. Outra visão é apresentada por Rovelli e Speziale [8]. Eles afirmam que na gravitação quântica em laços, o comprimento fundamental mínimo não aparece como uma propriedade fixa da geometria, mas como um autovalor mínimo (e não nulo) de um observável quântico. Assim, a simetria de Lorentz local não seria violada, da mesma maneira que a discretização dos autovalores dos operadores de momento angular não viola invariância rotacional na mecânica quântica.

seminais nessa linha de investigação são [10, 11, 12, 13]. Gostaríamos de ressaltar que não contemplaremos a gravitação quântica em laços nessa tese.

A violação da simetria de Lorentz também é possível ser decorrente de teorias de cordas. Kostelecký e Samuel sugerem que campos tensoriais, advindos de teorias de campos de cordas, possam obter valores esperados não-nulos e, conseqüentemente, quebrar a simetria de Lorentz espontaneamente [14]. Dentro do contexto da teoria de cordas de Liouville, a flutuação do espaço-tempo de fundo pode induzir propriedades óticas não-triviais do vácuo, interferindo na estrutura de propagação das partículas relativísticas [15, 16, 17, 18].

Outro cenário possível de violação de simetria de Lorentz vem das teorias de campos não-comutativas. Nessa classe de modelos, assume-se que as coordenadas do espaço-tempo formam uma álgebra não-comutativa, induzindo uma violação na simetria de Lorentz. Uma conexão entre alguns limites específicos de teorias de cordas e teorias de campos não-comutativas foi apresentada por Seiberg e Witten [19]. O estudo das conseqüências da violação de Lorentz em teorias de campos não-comutativas, pode indicar fortes restrições a energias muitas ordens de grandeza acima da escala de energia experimental [20, 21, 22, 23]. Também, efeitos de violação da simetria de Lorentz no setor gravitacional podem surgir em conexão com modelos baseados nos cenários de branas-mundo [24].

Tendo em vista a possibilidade de uma violação da simetria de Lorentz no setor gravitacional, investigamos, nesta tese, alguns aspectos perturbativos de modelos de gravitação com violação de Lorentz por um vetor de fundo [25, 26, 27] e a gravitação de Hořava-Lifshitz [28, 29]. A gravitação com violação de Lorentz por um vetor de fundo é motivada dentro de um cenário de teoria de campos efetiva advindo de uma teoria de gravitação quântica consistente (teoria de cordas). A gravitação Hořava-Lifshitz pretende ser um modelo de gravitação quântica consistente independente da teoria de cordas, analogamente às teorias de Yang-Mills. Mesmo que a teoria de cordas forneça ferramentas poderosas para estudar propriedades das teorias de Yang-Mills via dualidade AdS/CFT, a imersão das teorias de Yang-Mills dentro da teoria de cordas não é um requisito para a sua consistência quântica.

Também é importante destacar que o mecanismo de violação da simetria de Lorentz por um vetor de fundo é fundamentalmente distinto da proposta de Hořava para a gravitação. Ainda que ambos se encaixem na categoria de modelos não-invariantes pela simetria de Lorentz, no caso da gravitação de Hořava-Lifshitz a violação da simetria de Lorentz é realizada através de uma estrutura preferencial de foliação de hipersuperfícies tridimensionais tipo-espaço. Isso induz a separação das coordenadas espacial e temporal, que explicitamente quebra o grupo de transformações gerais de coordenadas ao subgrupo de transformações

$$x^i \mapsto \tilde{x}^i(t, x^j), \quad t \mapsto \tilde{t}(t). \quad (1.1)$$

Já a violação de Lorentz proposta por Kostelecký e colaboradores é implementada através de um quadrivetor de fundo oriundo de uma condensação não-trivial. É esperado que o módulo desse vetor seja muito pequeno num regime de baixas energias devido a uma série de restrições experimentais [30]. Em contrapartida, espera-se que a gravitação de Hořava-Lifshitz evolua para um regime relativístico em baixas energias.

A busca por modelos de gravitação quântica foi ditada principalmente pela dificuldade de se obter, simultaneamente, uma teoria quântica de campos renormalizável e unitária para descrever a gravitação. Tentativas de se acrescentar termos com derivadas superiores à Lagrangiana de Einstein-Hilbert não resolveram tal problema. Ainda que esses termos melhorem as divergências no regime ultravioleta, estes podem trazer excitações fantasmas que prejudicam a propriedade de unitariedade da matriz S e uma interpretação apropriada das probabilidades nos processos de espalhamento. (Para uma discussão mais aprofundada, encaminhamos o

leitor às Referências [31, 32, 33]). Com isso em mente, julgamos que um teste inicial e importante para a consistência quântica de qualquer teoria modificada da gravitação é requerer unitariedade, no sentido que o espectro de partículas não contenha táquions e nem fantasmas.

Essa discussão sofreu um interesse renovado devido a possibilidade de produção e detecção de grávitons massivos na escala de energia do LHC (*Large Hadron Collider*) e do ILC (*International Linear Collider*) [34, 35, 36, 37]. Grávitons podem adquirir massa através do mecanismo de Kaluza-Klein, oriundo dos efeitos das grandes dimensões extras [38] ou em conexão com os cenários de branas-mundo [39]. Destacamos, no entanto, o mecanismo de geração de grávitons massivo advindo de modos de torção propagante, que foram objeto de pesquisa nas Referências [40, 41].

Nesse contexto julgamos ser necessário e conveniente desenvolver um método geral para a obtenção dos propagadores de modelos de gravitação com violação de Lorentz. Esse é o principal objetivo dessa tese. Com os propagadores em mãos, é possível obter uma descrição do espectro de partículas do modelo e propriedades quânticas e relativísticas dos processos de espalhamento. Mais exatamente, pode-se distinguir cada modo de excitação e, com isso, determinar condições sobre os parâmetros livres do modelo Lagrangiano a fim de restringir a propagação de táquions e fantasmas.

Existem vários métodos para a obtenção dos propagadores, mas, particularmente para o caso da gravitação quântica na aproximação de campo fraco, que é nosso interesse, os métodos algébricos foram desenvolvidos intensivamente, especialmente os métodos baseados nos operadores de projeção de spin [42, 43, 44, 45]. Os operadores de projeção de spin para modelos invariantes por transformações de Lorentz em 4D têm a propriedade interessante de decompor os campos em setores de spin-paridade definidos. Nessa tese, seguimos a linha de trabalhos anteriores [40, 46, 47, 48] para construir um conjunto ortonormal de operadores, que é adequado para lidar com modelos com violação de Lorentz por um vetor de fundo e da classe dos modelos de Hořava-Lifshitz, incluindo os modelos com violação de paridade. Com esse resultado, a discussão sobre as propriedades espectrais dos modos propagantes e a identificação dos modos físicos e não-físicos fica facilitada, assim como a determinação da estrutura das simetrias de calibre.

A organização da tese é como segue:

O Capítulo 2 serve de sustentação teórica para os Capítulos 3 e 4. Embora, os resultados apresentados sejam conhecidos da literatura, a técnica apresentada é fruto de uma linha de pesquisa realizada no Grupo de Teoria de Campos e Partículas Elementares do CBPF [49, 50, 51, 40, 46, 52, 47, 41, 53, 54]. Um novo conjunto de operadores de projeção para modelos tridimensionais é apresentado. Utilizando esses operadores, desenvolvemos um procedimento de fácil implementação para analisar a unitariedade de modelos Lagrangianos planares de eletromagnetismo e gravitação, com possível violação de paridade. Interessantemente, esse método converte a tarefa de estudar a análise de unitariedade para um sistema em 3D, que em geral pode ser bastante dispendiosa num problema algébrico mais simples de se lidar. Além disso, esta proposta torna mais clara a interpretação física dos modos propagantes. Para testar a eficácia do algoritmo proposto, a unitariedade de alguns sistemas relevantes, acrescido de termos de derivada superiores e do termo de Chern-Simons são investigados.

No Capítulo 3, é investigado o efeito combinado da ação quadridimensional de Chern-Simons e Ricci-Cotton para a gravitação de Einstein-Hilbert, modificada com termos de derivada superior. As consequências para o espectro de partículas são analisadas. Surpreendentemente, inferimos que as condições impostas sobre o vetor de violação de fundo são drasticamente diferentes quando comparadas com as teorias de calibre com violação de Lorentz. Os resultados originais desse capítulo foram publicados na Referência [48].

O Capítulo 4 segue das considerações apresentadas na Referência [55]. Discutimos as propriedades do espectro de partículas para um modelo geral de gravitação de Hořava-Lifshitz. Uma atenção especial é dada ao modo de spin-0, que aparece naturalmente na teoria devido à violação da simetria de Lorentz. Por fim, com os resultados obtidos, investigamos alguns efeitos no limite de baixas energias da teoria.

Considerações finais e perspectivas futuras sobre o problema da gravitação quântica em conexão com a violação da simetria de Lorentz são realizadas no Capítulo 5.

Os Apêndices A, B e C apresentam os operadores de projeção de spin 3D, um método alternativo para obtenção do propagador da gravitação com violação da simetria de Lorentz e relações tensoriais entre operadores de projeção para gravitação de Hořava-Lifshitz, respectivamente.

Devido ao fato que cada capítulo estuda-se modelos em contextos de espaços-tempo diferentes, deve-se atentar a notação que será usada: $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\rho} \dots$ denotam índices (1+2)-dimensionais no espaço de Minkowski, μ, ν, ρ, \dots representam índices (1+3)-dimensionais no espaço de Minkowski e i, j, k, \dots denotam índices tridimensionais espaciais.

Capítulo 2

Um Novo Conjunto de Operadores Projeção de Spin em 3D

As conhecidas complexidades das teorias de campos em 4D tem forçado frequentemente os físicos teóricos a testar modelos em espaço-tempos de dimensões inferiores. Em geral, o fundamento de tais modelos foram obtidos através de uma projeção da dimensão física, o que, de fato, pode não deixar clara as sutilezas inerentes à dimensão particular da teoria. Conforme indicado corretamente por Binengar [56], um desenvolvimento teórico das teorias em sua dimensão nativa é algo imprescindível. Nesse sentido, teorias tridimensionais merecem um destaque dada suas aplicações no mundo real.

Surpreendentemente, a física planar sofreu um considerável desenvolvimento nas últimas décadas. Uma série de novos resultados experimentais advindos principalmente da Física da Matéria Condensada, acompanhado por uma convergência de ideias teóricas trouxeram um interesse renovado ao assunto. Dentre os inúmeros e interessantes modelos planares que foram investigado, vale destacar o grafeno¹. Esse sistema de carbono genuinamente planar se demonstrou um bom ambiente para a verificação de ideias e ferramentas de teorias quânticas de campos planares. Conseqüentemente, podemos esperar que as técnicas da QED₃ quando aplicadas a sistemas de matéria condensada em dimensões mais baixas possam levar a resultados interessantes [57]. Com relação a modelos gravitacionais, existem bons motivos para se fazer pesquisa em gravitação planar: a gravitação (1+2)-dimensional tem relevância física direta com modelos que são confinados a uma dimensionalidade inferior. De fato, a física de modelos gravitacionais na presença de cordas cósmicas (infinitamente longa e com simetria cilíndrica) é descrita adequadamente por modelos tridimensionais [58].

Por outro lado, modelos eletromagnéticos e gravitacionais acrescidos do termo de Chern-Simons tem sido objeto de muita discussão. No caso vetorial, esse termo fornece massa ao fóton de maneira invariante de calibre; enquanto que, para a gravitação planar, o termo de Chern-Simons é responsável pela violação de paridade e a presença de um modo de spin-2 massivo no espectro de partículas do modelo [59].

Além disso, sistemas eletromagnéticos e gravitacionais de ordem superior sofreram um renovado interesse. Um exemplo é a eletrodinâmica proposta por Lee e Wick [60, 61] em 4D, cuja versão não-abeliana tem sido explorada como uma possível extensão do modelo padrão [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72]. Também, recentemente, Bergshoeff, Hohm e Townsend (BHT) propuseram uma ação para gravitação em 3D [73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80],

¹Grafeno é um sistema bidimensional plano consistindo de uma monocamada de átomos de carbono num arranjo hexagonal.

cujo limite de campo fraco não propaga táquions e fantasmas. De fato, o modelo BHT é um dos raros exemplos de sistema de ordem superior que não propaga modos fantasmas [81, 82].

Dadas essas considerações, é natural sugerir uma investigação aprofundada de modelos eletromagnéticos e gravitacionais com o termo de Chern-Simons acrescido de termos com derivadas de ordem mais altas em 3D. A introdução de derivadas mais altas pode pôr em risco a unitariedade desses modelos. Por isso, apresentamos um esquema de fácil implementação, específico para modelos planares, que permite uma discussão construtiva e baseada em princípios físicos das propriedades do espectro de partículas de modelos gerais eletromagnéticos e gravitacionais em 3D.

Tal procedimento é descrito neste capítulo por meio da definição de uma base operadores de projeção de spin específica para modelos em 3D. Isso permite a decomposição do Lagrangiano em seus componentes de spin, a análise do espectro de partículas e a obtenção de condições sobre os coeficientes do modelo Lagrangiano para assegurar unitariedade desse modelo. Além disso, os exemplos considerados neste capítulo servirão como aplicação-modelo do método e como embasamento para o entendimento da utilização dessa formalismo nos capítulos subsequentes.

O arcabouço teórico do formalismo de operadores de projeção de spin é descrito na Seção 2.1. Começamos construindo uma nova classe de operadores para modelos em 3D e discutimos como obter o propagador com o uso desses operadores. Em seguida, apresentamos um algoritmo para análise da consistência espectral de modelos em 3D. Esse formalismo é exemplificado em modelos eletromagnéticos e gravitacionais com derivadas superiores acrescidos o termo de Chern-Simons na Seção 2.4. Estabelecemos as conclusões na Seção 2.5. Os resultados deste capítulo foram apresentados nas Referências [46, 47, 41, 54].

Neste capítulo, as letras gregas com acento circunflexo ($\hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\rho}, \dots$) denotam índices do espaço-tempo $(1+2)D$ e as letras latinas (m, n, m', n') representam índices convencionais. Seguimos a convenção de que a assinatura da métrica é $(+1, -1, -1)$ e $\epsilon_{012} = +1$, onde $\epsilon_{\hat{\rho}\hat{\nu}\hat{\rho}}$ é o símbolo de Levi-Civita.

2.1 Um Novo Conjunto de Operadores de Projeção de Spin para Modelos 3D

Na análise dos aspectos quânticos de qualquer teoria de campos, é dedicado um interesse considerável à descrição do espectro de partículas e às propriedades relativísticas e quânticas dos processos de espalhamento da teoria em investigação. Algumas dessas questões podem ser entendidas por meio da análise dos propagadores da teoria, que são obtidos através da inversão do operador de onda. Portanto, é de fundamental importância realizar essa inversão de maneira criteriosa. Para isso, devemos buscar um conjunto adequado de operadores lineares atuando sobre os campos do modelo.

Começamos buscando uma base no espaço vetorial dos operadores de onda. O espaço vetorial onde esses operadores atuam é formado pelas representações de dimensão finita do grupo de Lorentz. Em 4D, por exemplo, é sempre possível decompor esses espaços vetoriais como a soma direta de subespaços com spin definido, já que localmente o grupo de Lorentz restrito pode ser visto como o produto Cartesiano $SU(2) \times SU(2)$.² Além disso, os únicos operadores de mapeamento que podem ser construídos entre esses projetores são aqueles associados com o mesmo spin. De fato, a existência de operadores de mapeamento implica

²Formalmente, existe um isomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathfrak{so}(1,3) \simeq \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

numa bijeção entre os espaços vetoriais, que pode ser realizado se, e somente se, eles tiverem a mesma dimensão. A construção de operadores que estabeleçam mapeamentos entre espaços de subspin com spin distintos só pode ser realizado através da decomposição em subespaços de spin definido por vetores preferenciais do espaço-tempo. A construção explícita dos operadores de projeção de spin para campos de ranks arbitrários pode ser realizada através do produto tensorial dos operadores de projeção de spin de acordo com as regras da teoria de grupos. Os operadores de projeção de spin em 4D, que decompõe os campos vetoriais pode ser explicitamente construído utilizando a métrica de Minkowski e derivadas parciais, como segue:

$$P(0)_{\mu\nu} \equiv \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu, \quad (2.1a)$$

$$P(1)_{\mu\nu} \equiv \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}. \quad (2.1b)$$

em que μ e ν representam índices do espaço-tempo $(1+3)D$.

Uma análise cuidadosa das definições (2.1a)-(2.1b) permite concluir que a construção de operadores e mapeadores de spin para campos de rank mais alto podem conter apenas métricas e derivadas parciais. No caso de campos simétricos de spin-2 essa construção resulta nos conhecidos operadores de Barnes-Rivers [42, 43, 44, 45]. Conforme veremos nos Capítulos 3 e 4, se houver a existência de coordenadas preferenciais do espaço-tempo na construção do modelo, tal como ocorre em modelos com violação da simetria de Lorentz, então os operadores com spin definido não serão suficientes para formar uma base para os operadores de onda dessa classe de modelos [48, 55].

Para modelos tridimensionais, deve-se ter um cuidado especial na obtenção do operador de onda e, por conseguinte, o propagador. Uma indicação para isso é que em 3D existe a possibilidade de se considerar modelos com violação de paridade. O sinal dessa violação de paridade é a presença do tensor de Levi-Civita, que nos permite definir o operador de Chern-Simons,

$$S^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} \partial_{\hat{\rho}}. \quad (2.2)$$

Esse operador é independente do operador transverso, θ , e longitudinal, ω . Isso pode ser visto na álgebra do operador S com θ e ω :

$$S\theta = \theta S = S, \quad (2.3a)$$

$$S\omega = \omega S = 0, \quad (2.3b)$$

$$S^2 = -\square\theta. \quad (2.3c)$$

Podemos ver que o operador S “vive” no subespaço transverso, no sentido em que é um operador linear que mapeia um vetor arbitrário num vetor no subespaço transverso. Mesmo assim, S é independente de θ ; isso é possível, pois o subespaço transverso é bidimensional em 3D.

No entanto, o principal motivo para a necessidade revisão dos operadores de Barnes-Rivers no mundo planar é devido ao fato que θ não é mais um operador de spin em 3D. De fato, no caso massivo, as representações de spin em 3D correspondem as representações unitárias de $SO(2)$, que são unidimensionais. Os projetores θ e ω dividem o espaço tridimensional numa soma direta de subespaços com dimensão 2 e 1, respectivamente. Portanto, θ não é um operador de projeção num subespaço de spin. Isso quer dizer que não é possível uma interpretação física transparente dos modos relacionados a modelos com violação de paridade mesmo se estes forem expressos em termos da base $\{\theta, \omega, S\}$. Uma maneira consistente de abordar essa questão é através de uma base associada ao spin das partículas em 3D, que será construída em sequência.

Para isso, vamos rever alguns conceitos. Em teoria quântica de campos, as partículas são identificadas como representações unitárias do grupo de Poincaré. Essa identificação fornece dois números quânticos para as partículas: massa e spin. O spin é caracterizado pelas representações unitárias do grupo de isotropia (*little group*) do momento representativo da partícula – o subgrupo do grupo de Lorentz que deixa inalterado um quadrimomento representativo da classe que a partícula pertence (massivo ou não-massivo).

Em 4D, a tarefa de identificar os operadores de spin é mais simples que em 3D. Isso se deve ao fato que em 4D o spin das partículas massivas é dado pelas representações unitárias e irredutíveis do grupo $SO(3)$. Tais representações são associadas com as representações do grupo $SU(2)$, que é o grupo de recobrimento de $SO(3)$. Além disso, a representação fundamental de $SU(2)$ é equivalente a sua representação complexo conjugada. Portanto, todas as representações de $SU(2)$ são reais e, conseqüentemente, as representações de $SO(3)$ estão relacionadas com as representações de $SU(2)$ ($SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$). Isso implica que se o operador de onda é decomposto em operadores que projetam em representações irredutíveis bem definidas de $SO(3)$, então estas são automaticamente identificadas como operadores com spin bem definido.

O spin de partículas massivas em 3D apresenta uma situação distinta, já que as representações unitárias de $SO(2)$ são associadas com $U(1)$. A representação fundamental de $U(1)$ não é equivalente a seu complexo conjugado. Uma vez que as representações de $SO(2)$ são reais, estas não são relacionadas diretamente com as representações de $U(1)$, mas sim com a soma direta das representação fundamental de $U(1)$ e seu conjugado complexo. Porém, todas as representações irredutíveis de $SO(2)$ são bidimensionais e podem ser associadas com as representações de $U(1)$ através da complexificação dos campos.

Consideremos, por exemplo, a representação vetorial de $SO(2)$. Uma transformação de $SO(2)$ sobre um vetor $A = (A_1, A_2)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Os autovetores normalizados dessa transformação são:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

com autovalores $\lambda_1 = e^{-i\theta}$ e $\lambda_2 = e^{i\theta}$, respectivamente. Portanto, podemos definir uma base para o espaço de Minkowski em 3D, com a propriedade de que cada vetor gera um subespaço unidimensional que é o autoespaço das transformações de $U(1)$:

$$e(0)_{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6a)$$

$$e(+1)_{\hat{\mu}} \equiv (e_1)_{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (2.6b)$$

$$e(-1)_{\hat{\mu}} \equiv (e_2)_{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (2.6c)$$

onde $e(0)$ é um vetor tipo-tempo e os vetores $e(\pm 1)$ são tipo-espaço.

Dessa forma, através de uma transformação unitária adequada, mapeamos o campo vetorial real em

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_1 + iA_2 \\ A_1 - iA_2 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Por conseguinte, a transformação de rotação (2.4) sob o vetor \bar{A} é dada por

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Esse raciocínio nos permite concluir que é possível fazer uma identificação das representações vetoriais reais de $SO(2)$, Δ , como uma soma direta da representação fundamental de $U(1)$, \square , e sua respectiva conjugação complexa \square^* :

$$\Delta \sim \square \oplus \square^*. \quad (2.9)$$

O operador θ é a identidade no espaço da representação Δ , que é a soma direta dois subespaços unidimensionais. Tendo em mente essa discussão, propomos que os operadores de projeção de spin-1 estejam associados com os vetores complexos como:

$$\theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \rho_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (2.10)$$

onde

$$\rho_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -(e_1)_{\hat{\mu}} (e_1)_{\hat{\nu}}^*, \quad (2.11a)$$

$$\sigma_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -(e_2)_{\hat{\mu}} (e_2)_{\hat{\nu}}^*. \quad (2.11b)$$

Convencionamos que os operadores ρ e σ sejam os projetores nas representações \square e \square^* , nessa ordem. Levando-se em consideração as definições (2.6b) e (2.6c), pode-se notar que ρ e σ estão relacionados pela conjugação complexa, $\rho^* = \sigma$ e, que além disso, estes são Hermitianos e não-simétricos:

$$\rho_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (e_1)_{\hat{\mu}} (e_1)_{\hat{\nu}}^* = (e_2)_{\hat{\nu}} (e_2)_{\hat{\mu}}^* = \sigma_{\hat{\nu}\hat{\mu}}. \quad (2.12)$$

Isso completa a decomposição e a identificação dos operadores de projeção de spin para campos vetoriais.

Também é importante expressar o operador de Chern-Simons (2.2) em termos dos operadores de projeção de spin. Para tal, notamos que $\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} e_{1\hat{\mu}} e_{2\hat{\nu}} \frac{k_{\hat{\rho}}}{\sqrt{k^2}} = -i$, que pode ser calculado com as expressões (2.6a)-(2.6c), no referencial da partícula. Isso nos permite escrever $S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ no espaço de momenta como:

$$\begin{aligned} S_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= i\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\rho}} k_{\hat{\rho}} = i\epsilon^{\hat{\sigma}\hat{\tau}\hat{\rho}} \eta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} \eta_{\hat{\nu}\hat{\tau}} k_{\hat{\rho}} \\ &= i\epsilon^{\hat{\sigma}\hat{\tau}\hat{\rho}} (\rho_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}) (\rho_{\hat{\nu}\hat{\tau}} + \sigma_{\hat{\nu}\hat{\tau}}) k_{\hat{\rho}} \\ &= i\epsilon^{\hat{\sigma}\hat{\tau}\hat{\rho}} (e_{1\hat{\mu}} e_{2\hat{\sigma}} e_{2\hat{\nu}} e_{1\hat{\tau}} + e_{2\hat{\mu}} e_{1\hat{\sigma}} e_{1\hat{\nu}} e_{2\hat{\tau}}) k_{\hat{\rho}} \\ &= \sqrt{k^2} (\rho_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \sigma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

A expressão resultante (2.13) torna mais clara a interpretação da álgebra entre os operadores $\{\theta, \omega, S\}$ apresentada nas equações (2.3a)-(2.3c).

Existe a possibilidade de se considerar a construção de operadores de mapeamento entre os subespaços definidos por k e e_1 ou k e e_2 . De fato, isso será alvo de discussão no Capítulo 3 uma vez que esses operadores dependem explicitamente nos vetores e_1 e e_2 , e portanto violam

a simetria de Lorentz. Para modelos que preservam a simetria de Lorentz, o operador de onda é construído apenas com objetos covariantes: $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, $\partial_{\hat{\mu}}$ e $\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$.

Antes de prosseguir, é importante rever o significado da paridade em 3D com relação aos operadores aqui definidos. Em 3D, uma representação possível do operador de paridade no espaço de Minkowski é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Das equações (2.6b)-(2.6c) e (2.11a)-(2.11b) temos que $P\rho P^{-1} = \sigma$ e $P\sigma P^{-1} = \rho$. Isso mostra explicitamente que, ao contrário do que ocorre em 4D, não é possível assinalar uma paridade definida para cada projetor de spin. Cabe observar que $P\omega P^{-1} = \omega$ e $P\theta P^{-1} = \theta$, ou seja, ω e θ são invariantes por transformação de paridade. Como os operadores ρ e σ estão relacionados por uma transformação de paridade temos como implicação física que em modelos que preservam paridade, as excitações massivas de spins não-nulos $|s|$ devem se propagar como dubletes de spin $\pm s$ e com a mesma massa m .

Depois dessa pequena digressão, podemos construir os operadores de projeção de spin para tensores de rank 2. Podemos enumerar as representações de spin e as multiplicidades para tensores de rank 2:

$$(\underline{+1} \oplus \underline{-1} \oplus \underline{0}) \otimes (\underline{+1} \oplus \underline{-1} \oplus \underline{0}) = (3 \times \underline{0} \oplus 2 \times \underline{+1} \oplus 2 \times \underline{-1} \oplus \underline{+2} \oplus \underline{-2}), \quad (2.15)$$

onde os algarismos sublinhados denotam o spin e os algarismos não sublinhados estão relacionados com a multiplicidade do spin.

No caso geral, um tensor de rank 2, $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, pode ser escrito como o produto de dois vetores, digamos $A_{\hat{\mu}}$ e $B_{\hat{\nu}}$:

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = A_{\hat{\mu}} B_{\hat{\nu}}. \quad (2.16)$$

Já que um vetor arbitrário pode ser decomposto em suas componentes de spin, $A_{\hat{\mu}} \supset (1 \oplus -1 \oplus 0)$, por meio dos operadores de projeção de spin ρ , σ e ω ,

$$A_{\hat{\mu}} = (\rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}} + \omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}) A^{\hat{\rho}}, \quad (2.17)$$

então um tensor arbitrário de rank 2, pode ser decomposto em suas componentes de spin como segue:

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (\rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}) T^{\hat{\rho}\hat{\sigma}}. \quad (2.18)$$

Notemos que ρ , σ e ω estão associados com o spin $+1$, -1 e 0 , respectivamente, o que implica que $\rho\rho$, $\rho\omega$, $\omega\rho$, $\rho\sigma$, $\sigma\rho$, $\omega\omega$, $\sigma\omega$, $\omega\sigma$, $\sigma\sigma$ (com os índices omitidos) estão associados com o spin $+2$, $+1$, $+1$, 0 , 0 , 0 , -1 , -1 e -2 , nessa ordem.

No caso do campo correspondente ao gráviton $h_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, que é um tensor simétrico de rank

2, a simetrização dos operadores acima levam aos seguintes operadores de projeção de spin:

$$P^{hh} (+2)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}, \quad (2.19a)$$

$$P^{hh} (-2)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}, \quad (2.19b)$$

$$P^{hh} (+1)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} (\rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}), \quad (2.19c)$$

$$P^{hh} (-1)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} (\sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}), \quad (2.19d)$$

$$P_{11}^{hh} (0)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}, \quad (2.19e)$$

$$P_{22}^{hh} (0)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} (\rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}). \quad (2.19f)$$

Conforme esperado, os operadores (2.19a)-(2.19f) são Hermitianos. Além disso, os operadores de projeção que estão associados com spins não nulos são complexos dado que as representações não triviais de $U(1)$ são complexas. Em contrapartida, os operadores relacionados com o spin-0 são reais. Para Lagrangianas reais, as estruturas complexas (2.19a)-(2.19d) não podem aparecer sozinhas na decomposição do operador de onda em termos dos operadores de projeção de spin (essa decomposição será esclarecida posteriormente). Podemos garantir, no entanto, que devido a invariância de Lorentz dos modelos, os projetores das representações irreduzíveis de $SO(2)$ estarão presentes no operador de onda.

Os operadores de Barnes-Rivers são escritos exclusivamente em termos de θ e ω . Usando a decomposição $\theta = \rho + \sigma$, podemos decompor esses operadores em termos dos operadores de projeção de spin. Já que $\rho^* = \sigma$, o operador de onda é explicitamente real. Consideremos, por exemplo, o projetor de Barnes-Rivers advindo de uma redução dimensional para 3D associado com o spin-2 para um tensor simétrico de rank 2:

$$P^{hh} (2)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} (\theta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\theta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \theta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\theta_{\hat{\nu}\hat{\rho}}) - \frac{1}{2}\theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\theta_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}. \quad (2.20)$$

Esse operador projeta numa representação não-trivial e irreduzível de $SO(2)$ (portanto, bidimensional). Levando em consideração a decomposição (2.10), reescrevemos (2.20) em termos dos projetores em graus de liberdade de spin, isto é,

$$P^{hh} (2)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}. \quad (2.21)$$

Isso mostra que o operador de Barnes-Rivers $P^{hh} (2)$ é exatamente a soma dos projetores de spin $P(+2)$ e $P(-2)$ (2.19a)-(2.19b). Esse processo de decomposição pode ser realizado para todos os operadores necessários a fim de exaurir todas as possibilidades de contrações possíveis entre os campos da Lagrangiana livre.

Para o operador de Chern-Simons gravitacional,

$$S_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \theta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}S_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \theta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}S_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \theta_{\hat{\nu}\hat{\rho}}S_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \theta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}S_{\hat{\mu}\hat{\rho}}, \quad (2.22)$$

($S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ definindo na equação (2.2)) esse processo de decomposição resulta em

$$S_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} = -4i\sqrt{k^2} \left(P(+2)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} - P(-2)_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}} \right). \quad (2.23)$$

As relações entre os todos os operadores de projeção de spin e as identidades tensoriais relevantes são apresentadas no Apêndice A.

2.2 Obtenção dos Propagadores

Já estamos em condição de calcular os propagadores de modelos gerais para o eletromagnetismo e gravitação em 3D. Consideremos, desta forma, um modelo Lagrangiano \mathcal{L} em 3D que seja função de um campo vetorial $A_{\hat{\mu}}$ ou de um campo simétrico de rank 2, $h_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. A parte quadrática de \mathcal{L} pode ser escrita como

$$(\mathcal{L})_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \varphi_{\alpha} \mathcal{O}_{\alpha\beta} \varphi_{\beta}, \quad (2.24)$$

onde α, β representam um índices vetoriais ou tensoriais, $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ é um operador diferencial local (operador de onda) e φ_{α} corresponde ao campo quântico do modelo. Por exemplo, para modelos eletromagnéticos $\varphi_{\alpha} = A_{\hat{\mu}}$ e para modelos de gravitação no formalismo de segunda ordem, $\varphi_{\alpha} = h_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ onde a flutuação da métrica pode ser obtida através da expansão em campo fraco $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + h_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

Com auxílio das identidades apresentadas no Apêndice A, podemos expandir o operador de onda na base do operadores de projeção de spin como

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \sum_{mn, J} a(J)_{mn} P_{mn}^{\varphi\varphi}(J)_{\alpha\beta}, \quad (2.25)$$

em que $a(J)_{mn}$ são os coeficientes da expansão do operador de onda. Os operadores diagonais, $P_{mn}^{\varphi\varphi}(J)$, são projetores do campo φ sobre o setor de spin J . Os operadores não diagonais, $P_{mn}^{\varphi\varphi}(J)$ ($m \neq n$) implementam o mapeamento dentro do subespaço de spin correspondente. Os operadores $P_{mn}^{\varphi\varphi}(J)$ satisfazem as propriedades de ortogonalidade multiplicativa e decomposição da unidade:

$$\sum_{\beta} P_{mn}(I)_{\alpha\beta} P_{m'n'}(J)_{\beta\gamma} = \delta_{nm'} \delta^{IJ} P_{mn'}(I)_{\alpha\gamma}, \quad (2.26)$$

$$\sum_{m, J} P_{mm}(J)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.27)$$

As propriedades (2.26) e (2.27) convertem a tarefa de inverter o operador de onda (2.25) num problema algébrico: basta inverter as matrizes dos coeficientes $a(J)_{mn}$. Mas, em geral, $a(J)_{mn}$ pode ser degenerada devido às simetrias de calibre presente no modelo, que aparecem consistentemente devido a vínculos satisfeitos pela fontes físicas. As expressões explícitas para esses vínculos podem ser escritas em termos do autovetores nulos a esquerda $V_j^{(L, N)}$ das matrizes de coeficientes $a(J)_{mn}$ degeneradas [45]:

$$\sum_{\beta} V_n^{(L, N)}(J) P_{mn}(J)_{\alpha\beta} \mathcal{S}_{\beta} = 0, \quad (2.28)$$

que é válido para todo índice m e N , onde N representa a multiplicidade dos autovetores nulos.

Assim, o procedimento apropriado para obter o propagador saturado com fontes físicas, Π , consiste em inverter qualquer submatriz de dimensão igual ao posto de $a(J)_{mn}$. Na prática, basta remover as linha e colunas degeneradas de $a(J)_{mn}$ (denotada por $A(J)_{mn}$) e invertê-la. Como resultado final, obtemos

$$\Pi = i \sum_{J, mn} \mathcal{S}_{\alpha}^* A(J)_{mn}^{-1} P_{mn}(J)_{\alpha\beta} \mathcal{S}_{\beta}. \quad (2.29)$$

Deve ser enfatizado que o propagador saturado com as fontes físicas, Π , é invariante de calibre, devido aos vínculos satisfeitos pelas fontes (2.28). Essa propriedade do método de se conseguir lidar facilmente com as possíveis degenerescências do operador de onda é uma grande virtude comparado com outros métodos que não utilizam os operadores de projeção ortonormais. Nesse procedimento apresentado, a fixação do calibre não é necessária para a obtenção dos propagadores.

2.3 Prescrição para Análise da Consistência Espectral

Por questão de simplicidade, separamos a discussão da prescrição para analisar a consistência espectral de modelos 3D em duas partes: uma relacionada aos polos massivos e a outra aos polos não-massivos.

- *polos massivos*

Para assegurar que não haja a propagação modos de táquions e fantasmas para um dado modelo em 3D, é necessário garantir que, para cada polo simples do propagador ($k^2 = m^2$),

$$\Im m \text{Res}(\Pi|_{k^2=m^2}) > 0 \quad \text{e} \quad m^2 \geq 0. \quad (2.30)$$

(Uma demonstração detalhada desse resultado de teoria quântica de campos é dada no Capítulo 2 da Referência [41]). À luz da equação (2.29), chegamos a conclusão de que a condição para ausência de fantasmas em cada modo de spin está diretamente associada à positividade das matrizes $\left(\sum_{mn} A(J, m^2)_{mn}^{-1} P_{mn}(J)\right)_{\alpha\beta}$, onde $A(J, m^2)_{mn}^{-1} = \text{Res} A(J)_{mn}^{-1}|_{k^2=m^2}$ é a matriz $A(J)_{mn}^{-1}$ com o polo de massa m extraído. Pode-se mostrar que essas matrizes possuem apenas um autovalor não-nulo no polo, igual ao traço de $A^{-1}(J, m^2)|_{k^2=m^2}$. Além disso, os operadores $P_{mn}(J)$ contribuem com um sinal $(-1)^p$, onde p é a soma do número de ρ 's e σ 's em cada termo do propagador. O sinal $(-1)^p$ pode ser compreendido pelo fato que no referencial de repouso da partícula ρ e σ contribuem com um sinal negativo, enquanto que ω contribui com um sinal positivo. Em suma, a condição para ausência de táquions e fantasmas é que para cada polo massivo no propagador tenhamos:

$$(i) \quad m^2 > 0, \quad (2.31a)$$

$$(ii) \quad (-1)^p \text{Tr} A(J, m^2)^{-1} > 0. \quad (2.31b)$$

- *polos não-massivos*

A análise dos polos não-massivos apresentam algumas sutilezas, que requerem alguns cuidados extras. De fato, à primeira vista, a base de operadores aparenta ser mal-definida para momenta tipo-luz. No entanto, as fontes físicas apresentam vínculos oriundos das simetrias de calibre do modelos que torna a expressão para a obtenção do propagador (2.29) bem-definida, mesmo para momenta tipo-luz. As fontes físicas satisfazem os vínculos de conservação da forma $k_{\hat{\mu}} \mathcal{S}^{\hat{\mu}} = 0$ para modelos eletromagnéticos e $k_{\hat{\mu}} \mathcal{S}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$ para os modelos gravitacionais (cuja expressão geral é dada pela equação (2.28)). Consequentemente, uma maneira conveniente para impor a condição de ausência de fantasmas é escrever expressão inversa do operador de onda em termos das estruturas

$$\omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{k_{\hat{\mu}} k_{\hat{\nu}}}{k^2}, \quad \theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}, \quad k_{\hat{\mu}}. \quad (2.32)$$

Essa tarefa pode ser assistida pelas relações apresentadas no Apêndice A. Além disso, as fontes devem ser expandidas numa base de momenta adequada:

$$\mathcal{S}_{\hat{\mu}} = c_1 k_{\hat{\mu}} + c_2 q_{\hat{\mu}} + c_3 \epsilon_{\hat{\mu}}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= c_1 k_{\hat{\mu}} k_{\hat{\nu}} + c_2 (k_{\hat{\mu}} \epsilon_{\hat{\nu}} + k_{\hat{\nu}} \epsilon_{\hat{\mu}}) \\ &+ c_3 (k_{\hat{\mu}} q_{\hat{\nu}} + k_{\hat{\nu}} q_{\hat{\mu}}) + c_4 q_{\hat{\mu}} q_{\hat{\nu}} \\ &+ c_5 (q_{\hat{\mu}} \epsilon_{\hat{\nu}} + q_{\hat{\nu}} \epsilon_{\hat{\mu}}) + c_6 \epsilon_{\hat{\mu}} \epsilon_{\hat{\nu}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde c_i são coeficientes complexos e

$$k_{\hat{\mu}} = (k_0, \vec{k}), \quad (2.35a)$$

$$q_{\hat{\mu}} = (k_0, -\vec{k}), \quad (2.35b)$$

satisfazendo

$$k^2 = q^2 = 0, \quad (2.36a)$$

$$k \cdot q = (k_0)^2 + (\vec{k})^2, \quad (2.36b)$$

$$k \cdot \epsilon = q \cdot \epsilon = 0, \quad (2.36c)$$

$$\epsilon^2 = -1. \quad (2.36d)$$

A expansão (2.33)-(2.34) é a mais geral possível para fontes vetoriais e para tensores simétricos de rank 2, quando suplementadas com os vínculos de conservação (2.28). Por fim, deve-se assegurar positividade do resíduo do propagador

$$\Im m \text{Res}(\Pi|_{k^2=0}) \geq 0. \quad (2.37)$$

2.4 Aplicação para Modelos Planares com Violação de Paridade

A fim de ilustrar explicitamente a utilidade do método proposto, vamos considerar modelos concretos para o eletromagnetismo e a gravitação. Discutiremos a obtenção dos propagadores e as condições para ausência de táquions e fantasmas da eletrodinâmica de Lee–Wick–Chern–Simons adicionada de um termo tipo Chern–Simons de derivada superior. Como exemplo de modelo de gravitação, abordaremos a gravitação de Einstein–Hilbert no formalismo métrico, acrescido de termos com derivadas de ordem superior e o termo de Chern–Simons, que viola paridade. Também, estabeleceremos uma discussão dos modos propagantes com a presença do termo de Ricci–Cotton, que simultaneamente viola paridade e é um termo com derivadas de ordem superior.

2.4.1 Eletromagnetismo com Derivadas Superiores

O primeiro exemplo é a Lagrangiana de Lee–Wick–Chern–Simons

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{\alpha}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{\beta}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \square F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} A_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\rho}}, \quad (2.38)$$

em que $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}}A_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}A_{\hat{\mu}}$ e $\square = \partial_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}$. α e μ são constantes de unidades UV m^2 e $m^{\frac{3}{2}}$, respectivamente, enquanto β é adimensional. Isso, pois, sempre se pode redefinir os campos de tal forma que o termo com o maior número de derivadas, que domina no regime $k^2 \rightarrow \infty$, fique com um parâmetro adimensional.

Queremos assegurar que todos os passos do método sejam cuidadosamente detalhados, pois este exemplo servirá como guia de implementação do método de operadores de projeção de spin para o restante da tese. Primeiramente, devemos escrever a Lagrangiana quadrática, a menos de derivadas parciais na forma da equação (2.24):

$$(\mathcal{L}_{MCS})_2 = \frac{1}{2}A^{\hat{\mu}}\mathcal{O}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}A^{\hat{\nu}} \quad (2.39)$$

onde $\mathcal{O}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ é o operador de onda no espaço de momenta é dado por:

$$\mathcal{O}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (-\alpha k^2 + \beta k^4)\theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - i\mu\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}k^{\hat{\rho}}. \quad (2.40)$$

Com auxílio das respectivas identidades apresentadas no Apêndice A:

$$\theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = P_{11}^{AA}(+1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + P_{22}^{AA}(-1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (2.41a)$$

$$\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}k^{\hat{\rho}} = i\sqrt{k^2}\left(P_{11}^{AA}(+1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - P_{22}^{AA}(-1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\right) \quad (2.41b)$$

podemos expandir o operador de onda (2.40) em termos da base de operadores de projeção de spin em 3D, na forma

$$\mathcal{O}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \sum_{mn,J} a(J)_{mn} P_{mn}^{AA}(J)_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (2.42)$$

donde obtemos as seguintes matrizes de coeficientes da expansão:

$$a(0) = 0, \quad (2.43)$$

$$a(1) = \begin{pmatrix} -\alpha k^2 + \beta k^4 + \mu\sqrt{k^2} & 0 \\ 0 & -\alpha k^2 + \beta k^4 - \mu\sqrt{k^2} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Pode-se observar que o setor de spin-0 é completamente degenerado. Isso já era esperado, uma vez que é conhecido que o modelo (2.38) possui uma simetria de calibre

$$A'_{\hat{\mu}} = A_{\hat{\mu}} + \delta A_{\hat{\mu}}. \quad (2.45)$$

O termo $\delta A_{\hat{\mu}}$ pode ser obtido através da análise geral baseada no método dos operadores de projeção de spin. De fato, podemos relacionar a variação do campo por uma transformação de calibre com os autovetores nulos a direita das matrizes de coeficientes $V_i^{(R,N)}$ [45, 41],

$$\delta\Psi_{\alpha} = \sum_{n,J,\beta} V_i^{(R,N)\psi}(J) P_{mn}^{\Psi\lambda}(J)_{\alpha\beta} f_{\beta}(J), \quad (2.46)$$

que é válida para todo índice de n e N . No exemplo considerado, essa expressão se reduz a

$$\delta A_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}}\left(\partial_{\hat{\nu}}f^{\hat{\nu}}\right), \quad (2.47)$$

para uma função arbitrária $f^{\hat{\nu}}$.

A simetria de calibre do modelo (2.38) surge adequadamente para inibir a propagação do modo de spin-0. Como consequência dessa simetria as fontes físicas satisfazem vínculos

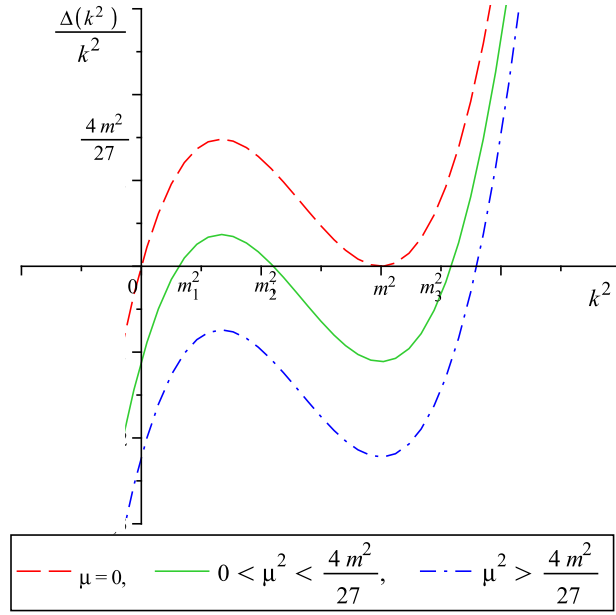


Figura 2.1: Gráfico da polinômio $\Delta(k^2)/k^2$, onde $\Delta(k^2)$ é o termo que aparece no denominador do propagador (2.49) e $m^2 = \frac{\alpha}{\beta}$. A análise do comportamento do gráfico permite distinguir a natureza das raízes desse polinômio.

para inibir a propagação de estados não-físicos. Assim, a expressão geral (2.28) é simplificada para

$$k_{\hat{\mu}}\mathcal{S}^{\hat{\mu}} = 0, \quad (2.48)$$

que é a conhecida relação de conservação da quadricorrente eletromagnética.

O inverso da matriz de coeficientes do setor 1 é dado por:

$$a(1)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\alpha k^2 + \beta k^4 - \mu\sqrt{k^2} & 0 \\ 0 & -\alpha k^2 + \beta k^4 + \mu\sqrt{k^2} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

onde $\Delta = \left[\left(k^2 - \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \beta^2 k^2 - \mu^2 \right] k^2 = (\beta^2 k^6 - 2\alpha\beta k^4 + \alpha^2 k^2 - \mu^2) k^2$. O polo do propagador é um polinômio quártico em k^2 , e portanto, possui quatro raízes. Uma dessas corresponde a um polo não-massivo ($k^2 = 0$) e a massa das outras três denotaremos por m_1, m_2 e m_3 .

Podemos distinguir quatro casos no que diz respeito a natureza das raízes do denominador do propagador (conforme ilustrado na Figura 2.1): 1. $\mu = 0$, se reduz a eletrodinâmica de Lee-Wick, 2. $0 < \frac{\mu^2}{\alpha^2} < \frac{4\alpha}{27\beta}$, temos três polos reais e com massas positivas, 3. $\frac{\mu^2}{\alpha^2} = \frac{4\alpha}{27\beta}$, que implica num polo duplo e, portanto, na violação da unitariedade do modelo, e finalmente, 4. $\frac{\mu^2}{\alpha^2} > \frac{4\alpha}{27\beta}$, surge necessariamente dois polos complexas, resultando em excitações taquiônicas. O primeiro e o segundo caso são candidatos a ter um espectro livre de táquions e fantasmas e os analisaremos minuciosamente.

Caso $\mu = 0$: Eletrodinâmica de Lee-Wick Nesse caso, a matriz de coeficientes $a(1)$ fica simplificada para:

$$a(1) = \begin{pmatrix} -\alpha k^2 + \beta k^4 & 0 \\ 0 & -\alpha k^2 + \beta k^4 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

e a sua inversa é dada por

$$a(1)^{-1} = \frac{1}{\beta \left(k^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right) k^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

A condição para ausência de táquions é, portanto,

$$m^2 = \frac{\alpha}{\beta} > 0. \quad (2.52)$$

A condição para ausência de fantasma lê-se

$$(-1) \text{Tr} A(1, m^2)^{-1}|_{k^2=m^2} = -\frac{1}{\alpha} > 0, \quad (2.53)$$

o que implica imediatamente que $\alpha < 0$.

Para os polos não-massivos, seguimos as instruções dadas na Seção 2.2. O vínculo $k_{\hat{\mu}} \mathcal{S}^{\hat{\mu}} = 0$ nos permite escrever o propagador como:

$$\Pi = \frac{1}{\beta \left(k^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right) k^2} i \mathcal{S}^{*\hat{\mu}} \mathcal{S}_{\hat{\mu}}. \quad (2.54)$$

Expandimos a corrente $\mathcal{S}^{\hat{\mu}}$ numa base de momenta (conforme a expressão (2.34)) e impomos a condição (2.37),

$$\Im m \text{Res}(\Pi|_{k^2=0}) = \frac{1}{\alpha} |c_1|^2 > 0, \quad (2.55)$$

o que obriga $\alpha > 0$. Esse resultado está em clara contradição com a condição de unitariedade obtida no setor massivo. Isso nos permite concluir que a eletrodinâmica de Lee-Wick necessariamente propaga excitações fantasmas em nível de árvore. Apesar disso, existem alternativas para contornar essa situação. Em $(1+3)D$, Lee e Wick propuseram uma interpretação em que essa classe de modelos podem ser unitários e estáveis se os estados associados aos polos massivos dos propagadores possuírem um comprimento de decaimento, e portanto, ausentes do espectro de partículas da teoria (os trabalhos originais são apresentados em [60, 61] e uma revisão é dada em [83]).

Caso $0 < \frac{\mu^2}{\alpha^2} < \frac{4}{27} \frac{\alpha}{\beta}$: Nessa situação, os polos do propagador representam três excitações com massas reais e positivas, que podemos ordená-las $m_1 < m_2 < m_3$, sem perda de generalidade (conforme a Figura 2.1). Também podemos escrever $\Delta(k^2) = (k^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2)(k^2 - m_3^2)\beta^2 k^2$. Assim, por meio da condição $(-1) \text{Tr} A(1, m_i^2)|_{k^2=m_i^2} > 0$, para cada m_i , $i = 1, 2, 3$, obtemos relações contraditórias com a suposição inicial de que $m_1 < m_2 < m_3$:

$$m_1 : \frac{\beta m_1^2 - \alpha}{\beta^2 (m_1^2 - m_2^2) (m_1^2 - m_3^2)} < 0 \Rightarrow \beta m_1^2 < \alpha, \quad (2.56)$$

$$m_2 : \frac{\beta m_2^2 - \alpha}{\beta^2 (m_2^2 - m_1^2) (m_2^2 - m_3^2)} < 0 \Rightarrow \beta m_2^2 > \alpha, \quad (2.57)$$

$$m_3 : \frac{\beta m_3^2 - \alpha}{\beta^2 (m_3^2 - m_1^2) (m_3^2 - m_2^2)} < 0 \Rightarrow \beta m_3^2 < \alpha. \quad (2.58)$$

Portanto, esse modelo também está fadado a conter modos fantasmas.

Outra possibilidade interessante é adicionar à Lagrangiana (2.38) um termo de derivada superior da forma do termo de Chern-Simons,

$$\mathcal{L}_{ECS} = \frac{\lambda}{2} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} \square A_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\rho}}. \quad (2.59)$$

Esse termo foi contemplado na Referência [84]. Embora a estrutura formal do termo \mathcal{L}_{ECS} seja muito similar à \mathcal{L}_{CS} , mantendo a propriedade de violação de paridade, este difere fundamentalmente em dois aspectos: não carrega informação das transformações de calibre “grandes”³ e não é um termo topológico. Isso pode ser visto reescrevendo a ação da extensão do termo de Chern-Simons como:

$$S_{ECS} = \frac{\lambda}{2} \int d^3x \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} \square A_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\rho}} \quad (2.60a)$$

$$= -\frac{\lambda}{2} \int d^3x \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} \partial_{\hat{\sigma}} A_{\hat{\mu}} \partial^{\hat{\sigma}} \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\rho}} \quad (2.60b)$$

$$= -\frac{\lambda}{4} \int d^3x \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} F_{\hat{\sigma}\hat{\mu}} \partial^{\hat{\sigma}} F_{\hat{\nu}\hat{\rho}} \quad (2.60c)$$

$$= -\frac{\lambda}{2} \int d^3x \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} f_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} f_{\hat{\rho}}, \quad f^{\hat{\mu}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} F_{\hat{\nu}\hat{\rho}}, \quad (2.60d)$$

em que foi utilizado: uma integração por partes no passo (2.60a)-(2.60b), a definição do tensor intensidade de campo $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\mu}}$ (juntamente com uma integração por partes) no passo (2.60b)-(2.60c) e a definição do tensor intensidade de campo dual no passo (2.60c)-(2.60d). Pela expressão da ação (2.60d), observa-se que esta depende apenas do tensor intensidade de campo e, portanto, não tem como carregar informação das transformações de calibre “grandes”, em contraposição com a ação de Chern-Simons que depende do vetor potencial. Também, pelas expressões (2.60a) e (2.60d), percebe-se que na covariantização da teoria para espaços-curvos, haverá a explícita dependência da métrica, e conseqüentemente a ação S_{ECS} não é topológica.

Com o termo adicional (2.59), o operador de onda no espaço de momenta fica escrito como

$$\mathcal{O}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (-\alpha k^2 + \beta k^4) \theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - i(\mu + \lambda k^2) \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} k^{\hat{\rho}}, \quad (2.61)$$

Seguindo os mesmos passos indicados na Seção 2.4.1, chegamos a seguinte modificação para a matriz de coeficientes do setor de spin-1:

$$a(1) = \begin{pmatrix} -\alpha k^2 + \beta k^4 + (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} & 0 \\ 0 & -\alpha k^2 + \beta k^4 - (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

A respectiva matriz inversa é dada por

$$a^{-1}(1) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\alpha k^2 + \beta k^4 - (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} & 0 \\ 0 & -\alpha k^2 + \beta k^4 + (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

onde

$$\Delta = [\beta^2 k^6 - (\alpha\beta + \lambda^2) k^4 + (\alpha^2 - 2\lambda\mu) k^2 - \mu^2] k^2. \quad (2.64)$$

³As transformações de calibres “grandes” são definidas como transformações de calibre que não são homotópicas (isto é, não podem ser deformadas continuamente) à identidade. Uma discussão aprofundada sobre o papel das transformações de calibre “grandes”, especialmente em teorias de Chern-Simons não-abelianas, é realizada na Referência [59].

Ainda que nesse caso tenhamos uma análise mais geral, não temos uma perspectiva melhor para garantir a unitariedade do modelo, dada a presença de múltiplos polos no mesmo setor de spin. As condições análogas às equações (2.56)-(2.58) fornecem relações contraditórias para ausência de táquions e fantasmas no mesmo espírito da argumentação realizada na Seção 2.4.1, implicando necessariamente que o modelo não é unitário. Esse resultado está de acordo com a análise independente realizada na Referência [84].

2.4.2 Gravitação de Ordem Superior

A Lagrangiana da gravitação de Einstein-Hilbert no formalismo métrico incluindo derivadas de ordem superior e o termo de Chern-Simons pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{g} \left(\alpha R + \beta R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} R^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \gamma R^2 \right) + \frac{\mu}{2} \mathcal{L}_{CS}, \quad (2.65)$$

onde o termo de Chern-Simons é dado por:

$$\mathcal{L}_{CS} = \varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} \Gamma_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}^{\hat{\lambda}} \left(\partial_{\hat{\nu}} \Gamma_{\hat{\rho}\hat{\lambda}}^{\hat{\sigma}} + \frac{2}{3} \Gamma_{\hat{\nu}\hat{\lambda}}^{\hat{\kappa}} \Gamma_{\hat{\rho}\hat{\kappa}}^{\hat{\sigma}} \right), \quad (2.66)$$

e α , β , γ e μ são coeficientes arbitrários.

Adotando a aproximação de campo fraco para a métrica, $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + h_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, em que consideramos o campo $h_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ como a flutuação quântica da métrica, podemos escrever a parte quadrática do Lagrangiano (2.65) como:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_G)_2 = & \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{2} h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \square h_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{2} h \square h - h \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\rho}} h^{\hat{\rho}}_{\hat{\nu}} \right) \\ & + \frac{\beta}{4} \left(h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \square^2 h_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + h \square^2 h - 2h \square \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - 2h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \square \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\rho}} h^{\hat{\rho}}_{\hat{\nu}} + 2h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \partial_{\hat{\sigma}} h^{\hat{\rho}\hat{\sigma}} \right) \\ & + \gamma \left(h \square^2 h - 2h \square \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} \partial_{\hat{\sigma}} h^{\hat{\rho}\hat{\sigma}} \right) \\ & + \frac{\mu}{4} h_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} \varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\lambda}\hat{\rho}} \partial_{\hat{\lambda}} \left(\square h_{\hat{\nu}\hat{\rho}} - \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\sigma}} h_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}} \right), \end{aligned} \quad (2.67)$$

em que $h = h^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}}$. A expressão (2.67) permite-nos obter o operador de onda $\mathcal{O}_{\hat{\mu}\hat{\nu}, \hat{\rho}\hat{\sigma}}$ para o modelo. Tal operador de onda pode ser expandido em termos da base de operadores em graus de liberdade de spin com auxílio das identidades fornecidas no Apêndice A. Isso permite obter as matrizes dos coeficientes na expansão:

$$a(0) = \begin{pmatrix} ((3\beta + 8\gamma) k^2 - \alpha) k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

$$a(2) = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta k^2 + \mu \sqrt{k^2}) k^2 & 0 \\ 0 & (\alpha + \beta k^2 - \mu \sqrt{k^2}) k^2 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Novamente, devido à simetria de calibre do modelo, a matriz correspondente ao setor de spin-0 é não inversível. Essa propriedade aparece consistentemente devido ao vínculo de conservação das fontes gravitacionais $k_{\hat{\mu}} \mathcal{S}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$.

A maior matriz inversa não degenerada de $a(0)$, ao qual denotamos por $A(0)^{-1}$ é dada por

$$A(0)^{-1} = \frac{1}{[(3\beta + 8\gamma) k^2 - \alpha] k^2}, \quad (2.70)$$

e $a(2)^{-1}$ é escrito como:

$$a(2)^{-1} = \frac{1}{\left[(\alpha + \beta k^2)^2 - \mu^2 k^2\right] k^2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta k^2 - \mu\sqrt{k^2} & 0 \\ 0 & \alpha + \beta k^2 + \mu\sqrt{k^2} \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Donde obtemos as relações de dispersão para dois modos massivos independentes:

$$m_{\pm}^2 = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\mu^2}{2\beta^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu^2}{2\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}} \quad (2.72)$$

Utilizando as restrições (2.31a)-(2.31b) para as matrizes (2.70)-(2.71), a fim de garantir a ausência de táquions e fantasmas, obtemos as seguintes condições sobre os parâmetros da Lagrangiana:

$$\text{Spin-2} : \alpha < 0, \quad \beta > 0, \quad (2.73)$$

$$\text{Spin-0} : \alpha > 0, \quad 3\beta + 8\gamma > 0. \quad (2.74)$$

Para valores arbitrários dos parâmetros α , β e γ o modelo é não unitário. Uma maneira de resolver esse problema é inibir a propagação do modo massivo de spin-0, tomando $3\beta + 8\gamma = 0$. De forma notável, essa é exatamente a condição considerada no modelo de Bergshoeff-Hohm-Townsend (BHT) [73, 74]. Este modelo se propõe a descrever uma partícula massiva de spin-2.

Outra alternativa consiste em inibir o modo massivo de spin-2, impondo $\beta = 0$. Desta forma

$$a(0)^{-1} = \frac{1}{8\gamma k^2 \left(k^2 - \frac{\alpha}{8\gamma}\right)}. \quad (2.75)$$

A condição para ausência de táquions se reduz a $\alpha/\gamma > 0$ e a ausência de fantasmas $\gamma > 0$. Desta forma, concluímos, também, que o modelo $\alpha R + \gamma R^2$ é unitário para valores positivos de α e γ . Inusitadamente, a adição do termo de Chern-Simons ao modelo $\alpha R + \gamma R^2$ torna esta teoria não-unitária [85, 86]. De fato, a matriz inversa do setor de spin-2, para o modelo $\alpha R + \gamma R^2 + \frac{\mu}{2}\mathcal{L}_{CS}$ se reduz a

$$a(2)^{-1} = -\frac{1}{\left(k^2 - \frac{\alpha^2}{\mu^2}\right) \mu^2 k^2} \begin{pmatrix} \alpha - \mu\sqrt{k^2} & 0 \\ 0 & \alpha + \mu\sqrt{k^2} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

donde temos a presença de um modo massivo $m^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2} > 0$. A condição para ausência de fantasmas é dada por

$$\text{Tra}(2, m^2)^{-1} = -\frac{2}{\alpha} > 0, \quad (2.77)$$

que está em discordância com a condição imposta no setor de spin-0 ($\alpha > 0$). Portanto, além do termo de Chern-Simons não ser um elixir para a cura de unitariedade da gravitação, este pode trazer excitações fantasmas em algumas situações especiais.

Para a análise dos polos não-massivos, deve-se utilizar a expressão original do propagador (2.29) para se calcular o resíduo no polo. Os vínculos satisfeitos pelas fontes nos permitem trabalhar consistentemente com as singularidades. Utilizando os vínculos e descartando os termos que não contribuem para o resíduo no polo, obtemos

$$\Pi = \frac{1}{\alpha k^2} i\mathcal{S}^{*\hat{\mu}\hat{\nu}} \left[\frac{1}{2} (\eta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \eta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\rho}} - \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\eta_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}) + i\mu\varepsilon_{\hat{\mu}\hat{\rho}\hat{\lambda}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}k^{\hat{\lambda}} \right] \mathcal{S}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}}. \quad (2.78)$$

Com uma expansão adequada numa base de momenta (2.33), pode se mostrar que essa expressão se anula identicamente e que, por tal motivo, não há a propagação de modos não-massivos para esse modelo de gravitação planar. Com esses resultados inferimos, conforme conhecido na literatura, que o modelo de BHT e $\alpha R + \gamma R^2$ são unitários.

Com efeito, somente o modelo BHT pode ser considerado, de fato, um sistema gravitacional de derivada superior. Pode ser demonstrado que o modelo $\alpha R + \gamma R^2$ é conformalmente equivalente a gravitação de Einstein, e que apesar de possuir derivadas quárticas da métrica, sua versão escalar-tensorial consiste num modelo de segunda ordem [87]. Até agora, o modelo BHT é o único modelo de gravitação de genuinamente ordem superior cuja versão linearizada em 3D seja unitária [73, 74, 81]. Além disso, o modelo BHT não apresenta uma fenomenologia patológica como acontece na gravitação de Einstein-Hilbert em 3D: ausência de força gravitacional no limite não-relativístico, deflexão gravitacional independente do parâmetro de impacto, ausência de dilatação temporal e ausência de desvio espectral gravitacional. Pode se mostrar que esses “testes clássicos da gravitação” estão presentes para o modelo BHT [88, 53].

Além dos termos Lagrangianos considerados, existe a possibilidade de construir um termo de derivada superior do tipo Chern-Simons, através da contração do tensor de Ricci ($R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$) com o tensor de Cotton ($C_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} D^{\hat{\rho}} G_{\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}}$, $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{4} \delta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} R$):

$$\mathcal{L}_{RC} = \lambda \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} R_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} D_{\hat{\nu}} R_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}}. \quad (2.79)$$

Não é conhecido pelo autor desse trabalho um estudo minucioso das propriedades do termo de Ricci-Cotton na gravitação em 3D. Embora, na Referência [75] os autores estabelecem uma interessante relação entre a extensão do termo de Chern-Simons de derivada superior no eletromagnetismo e a gravitação de Ricci-Cotton no contexto da supergravidade $\mathcal{N} = 2$ em 3D. Podemos nos perguntar se esse termo pode ser adicionado consistentemente ao Lagrangiano (2.65), no sentido que haja somente a propagação de modos físicos.

Seguindo a mesma receita da expansão de campo fraco e a obtenção do operador de onda, pode-se mostrar que o termo de Ricci-Cotton afeta apenas o setor de spin-2. A matriz de coeficientes na expansão para o setor de spin-2 é dada por

$$a(2) = \begin{pmatrix} \left[\alpha + \beta k^2 - (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} \right] k^2 & 0 \\ 0 & \left[\alpha + \beta k^2 + (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} \right] k^2 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

e a respectiva inversa é dada por:

$$a(2)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha + \beta k^2 + (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} & 0 \\ 0 & \alpha + \beta k^2 - (\mu + \lambda k^2) \sqrt{k^2} \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

onde o denominador é dado por:

$$\Delta = [-\lambda^2 k^6 + (\beta^2 - 2\mu\lambda) k^4 + (2\alpha\beta - \mu^2) k^2 + \alpha^2] k^2. \quad (2.82)$$

Analisando os polos do propagador, é possível perceber que essa teoria pode descrever até três polos massivos. Acontece que, com a mesma argumentação realizada para o termo tipo Chern-Simons de derivada superior para o eletromagnetismo, essas três excitações não podem se propagar de maneira unitária concomitantemente. Esse resultado está de acordo com a Referência [75] e nos atenta, mais uma vez, para a dificuldade de se conciliar teorias com derivadas superiores e o requerimento da unitariedade.

Esperamos que essa discussão possa ter sido útil para ilustrar a aplicação da proposta da nova classe de operadores de projeção de spin para modelos 3D.

2.5 Conclusão

Neste capítulo, propomos uma base de operadores ortonormais adequada para obter o propagador e avaliar as propriedades espectrais de modelos que incluem termos com violação de paridade. Isso permite avaliar as condições sobre os coeficientes livres da Lagrangiana para garantir a ausência de modos de táquions e fantasmas. A presença de termos com o símbolo de Levi-Civita sugere ser conveniente a separação dos campos nos seus graus de liberdade que correspondam ao spin 3D. Isso é particularmente notório, já que em 3D todas as partículas massivas com spin não-trivial, possuem dois graus de liberdade, e estes se propagam independentemente em modelos que possuam violação de paridade. Assim, como os operadores θ e ω , a base de operadores proposta é explicitamente consistente para momenta tipo-tempo. Para momenta tipo-luz, mostramos como obter corretamente o propagador saturado com fontes físicas, exemplificado em alguns modelos propostos. Os resultados para a análise de unitariedade coincidiram com os resultados apresentados na literatura.

Com relação à base de operadores de projeção de spin, duas características notáveis devem ser enfatizadas: 1) a propriedade de ortogonalidade torna a inversão do operador de onda mais simples e 2) a análise das simetria de calibre do modelo torna possível a descrição de um algoritmo sistemático para a obtenção do propagador e a análise do espectro de partículas. Além disso, o estudo do papel do spin em 3D fornece a esse conjunto de operadores uma interpretação física. Conforme veremos nos Capítulos 3 e 4, uma construção análoga pode ser implementada para lidar com teorias com violação de simetria de Lorentz, dada a intrínseca relação de teorias planares e a violação da simetria de Lorentz em 4D.

Esse método sistemático para analisar a consistência espectral pode ser implementado para outras classes de modelos planares com violação de paridade. Um caminho interessante é considerar termos Lagrangianos que envolvam modos propagantes de torção, como por exemplo $\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}}T_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}^{\hat{a}}R_{\hat{\mu}\hat{a}}$, $R\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}}T_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}}$, $\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}}T_{\hat{\kappa}\hat{a}}^{\hat{a}}R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Outra possibilidade é considerar modelos que conservam paridade, mas fazer uso do campo dual. O formalismo de primeira ordem para a gravitação em 3D é um bom cenário dessa possibilidade, já que pode-se escrever a flutuação da tetrada $e_{\hat{\mu}}^{\hat{a}}$ e da conexão de spin $\omega_{\hat{\mu}}^{\hat{a}\hat{b}}$ como:

$$\tilde{e}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \phi_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}}\chi^{\hat{\kappa}}, \quad (2.83a)$$

$$\tilde{\omega}_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}\hat{\kappa}} = \epsilon^{\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\sigma}} \left(\psi_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\sigma}\hat{\rho}}\lambda^{\hat{\rho}} \right), \quad (2.83b)$$

em que $\phi_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ é a contribuição simétrica da tetrada e $\chi^{\hat{\kappa}}$ é o vetor dual a contribuição antissimétrica. Já $\psi_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}$ corresponde a parte simétrica do campo dual à flutuação da conexão de spin e $\lambda^{\hat{\rho}}$ é o vetor dual à parte antissimétrica do campo dual. De fato, um estudo detalhado sobre modelos gravitacionais em 3D com a presença de torção dinâmica e termos de (curvatura)² junto com o termo de Chern-Simons foi realizado nas Referências [47, 41], mostrando a eficácia dessa nova classe de operadores de projeção de spin.

Capítulo 3

Análise Espectral de um Modelo de Gravitação com Violação da Simetria de Lorentz

O entendimento da estrutura de teorias quânticas de campos em 3D possui aplicações que vão além do mundo planar. O desenvolvimento de uma base de operadores de projeção de spin e o estudo da estrutura do espectro de teorias de calibre e gravitação, realizado no Capítulo 2, fornecem ferramentas para uma análise mais aprofundada de algumas classes de modelos em 4D. Essa conexão é bastante estreita nas teorias com violação da simetria de Lorentz por um campo vetorial de fundo [89, 25], uma vez que esse vetor pode servir como uma coordenada de imersão de modelos planares num espaço-tempo quadridimensional.

Discorremos acerca de tal proposta na Seção 3.1, onde revisamos alguns conceitos gerais sobre a violação da simetria de Lorentz através de um vetor de fundo. Em seguida, concentraremos em descrever a possibilidade dessa violação no setor gravitacional na Seção 3.2. A partir daí, estamos aptos a seguir as linhas gerais do Capítulo 2, a fim de construir uma base de operadores nos graus de liberdade, ao invés de operadores nos modos de spin. Tal construção, feita na Seção 3.3, é compatível com a estrutura de modelos com violação da simetria de Lorentz por um quadrivetor de fundo v^μ . Na Seção 3.4 é obtido os propagadores e feita uma discussão sobre o papel da simetria residual da violação da simetria de Lorentz. Análise do espectro de partículas para um modelo geral de gravitação com derivadas superiores e termos de violação da simetria de Lorentz é realizada na Seção 3.5. Os resultados apresentados nas Seções 3.3, 3.4 e 3.5 correspondem a contribuições originais desse trabalho [48]. Por fim, estabelecemos conclusões finais na Seção 3.6.

Neste capítulo, as letras gregas ($\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$) denotam índices do espaço-tempo $(1 + 3) D$ e as letras latinas (m, n, m', n') representam índices convencionais. Seguimos a convenção de que a assinatura da métrica é $(+1, -1, -1, -1)$ e $\epsilon^{0123} = +1$, onde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é o símbolo de Levi-Civita.

3.1 Violação da Simetria de Lorentz através de um Vetor de Fundo

A possibilidade de se investigar propriedades experimentais de teorias fundamentais, que teriam um papel dominante apenas numa escala de energia da ordem da energia de Planck,

é algo fascinante. Um caminho promissor nesse sentido pode ser feito através do estudo da fenomenologia de violação de simetrias em que acredita-se serem fundamentais, mas que podem ter sido quebradas num regime de altíssimas energias. As relíquias da violação dessas simetrias poderiam ser detectáveis em experimentos de baixas energias fornecendo indícios a respeito de teorias fundamentais subjacentes.

Um problema é que qualquer proposta de uma nova Física e, em particular de uma violação da simetria de Lorentz, sofre muita restrição devido ao fato de que as teorias de campos relativísticas, além de serem o alicerce das teorias das interações fundamentais, estão bastante estabelecida experimentalmente – muitos desses experimentos de alta precisão [30]. Outro fato a que devemos estar atentos quando falamos de violação de simetria de Lorentz é a estreita relação entre a simetria de Lorentz e a invariância por transformações de CPT¹. Um teorema estabelece que, numa teoria quântica de campos de partículas relativísticas, unitária e local, a violação da simetria de CPT implica em violação da simetria de Lorentz, embora a recíproca não seja verdadeira [90]. Além disso, Greenberg [91] estabelece que teorias de campos que violam CPT, por possuírem partículas e antipartículas com massas distintas, devem ser não-locais.

Nesse contexto, a proposta de violação da simetria de Lorentz por um campo de fundo, tem-se consolidado como uma forte linha de investigação nas duas últimas décadas. Conforme proposto por Kostelecký e Samuel [14], essa classe de modelos pode ser gerada como limite de baixas energias de teorias de campos de cordas. Do ponto de vista teórico, esse mecanismo é bastante interessante já que a invariância de Lorentz é quebrada através de uma condensação não-trivial dos campos. Desta maneira, a dinâmica subjacente, advinda de uma teoria mais fundamental, pode permanecer invariante pela simetria de Lorentz. Do ponto de vista experimental, a proposta do modelo padrão estendido por termos de violação da simetria de Lorentz também é atraente, pois representa correções de pequena magnitude ao Lagrangiano do Modelo Padrão da Física de Partículas.

A característica marcante desses modelos é dada pelas propriedades de transformação do vetor de violação da simetria de Lorentz v^μ , que atua como uma coordenada de imersão. Conforme apresentado na Tabela 3.1, v^μ se transforma como um quadri-vetor sob transformações Lorentz de observador (ou passiva), mas como um escalar sob transformações de partículas (ou ativas). As transformações passivas ocorrem quando considera-se o mesmo sistema físico (não-transformado) sob dois observadores relacionados por uma transformação de referencial. A presença da simetria sob transformações passivas acontece quando a descrição de um sistema por observadores diferentes é dado pelo mesmo conjunto de equações. As transformações ativas acontecem quando se considera um sistema físico original e transformado, conforme descrito pelo mesmo observador. Uma simetria do ponto de vista ativo existe quando as probabilidades de transição para todos os estados do sistema original e transformado coincidem [92]. Para a classe de modelos com violação da simetria de Lorentz por um vetor de fundo, a simetria de Lorentz de observador é preservada, mas a simetria por transformações de Lorentz de partículas é violada (uma revisão introdutória ao assunto é apresentada em [93] e uma discussão mais aprofundada é dada em [25]).

¹As transformações de CPT consistem na ação combinada das operações discretas de conjugação de carga (C), inversão de paridade (P) e inversão temporal (T).

Transformação de Observador	Transformação de Partícula
$\varphi'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \varphi^{\nu}$	$\varphi'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \varphi^{\nu}$
$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu}$	$v'^{\mu} = v^{\mu}$

Tabela 3.1: Comparação das propriedades de transformação do vetor de fundo v^{μ} por transformações de observador e partícula. A transformação de observador ou passiva acontece quando deixamos espaço-tempo intacto e transformamos as bases de dois sistemas de referenciais inerciais. Na transformação de partículas ou ativa, o sistema de coordenadas permanece fixo e os campos físicos são transformados. A presença de um vetor de fundo torna essas duas transformações não equivalentes fisicamente.

Com isso, pode ser contemplada a deformação de modelos Lagrangianos em 4D através da imersão de um termo tipo Chern-Simons tridimensional por meio do vetor de fundo v^{μ} . Para o eletromagnetismo tal deformação pode ser dada por

$$\mathcal{L}_{CFJ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_{\mu}A_{\nu}F_{\rho\sigma}, \quad (3.1)$$

conhecido na literatura como modelo de Carroll-Field-Jackiw [89]. Pode-se notar que no caso em que $v^{\mu} = (0, \vec{v})$ recaímos a uma estrutura muito similar ao termo de Chern-Simons em (1+2)D apresentado na Seção 2.4.1.

É interessante citar algumas propriedades desse modelo, que serão útil para posterior comparação com os resultados do modelo de gravitação. Apesar da violação da simetria de Lorentz, o modelo (3.1) é invariante por transformações de calibre na camada de massa [94, 95], isto é, quando se leva em consideração as equações de movimento. Devido a isso, o fóton continua a possuir duas polarizações independentes, porém estas adquirem velocidades de propagação distintas da velocidade da luz (portanto, a invariância por *boosts* de Lorentz não é preservada) e velocidades de propagação diferentes entre si (portanto a invariância por transformação de paridade não é preservada). Esse fato faz com que o vácuo se comporte como um meio birrefringente, uma vez que a luz com essa propriedade tem seu plano de polarização rotacionado ao longo da propagação. Essa propriedade foi comparada com resultados experimentais, impondo grandes restrições sobre a magnitude do vetor v^{μ} [96].

Outro resultado importante é que a natureza do vetor de fundo altera drasticamente o espectro de partículas e as propriedades de unitariedade e causalidade do modelo. Conforme as Referências [97, 50], um vetor tipo-espaço da forma $v^{\mu} = (0, \vec{v})$ possui um propagador consistente com as condições de unitariedade e causalidade. Já para o vetor tipo-tempo da forma $v^{\mu} = (v^0, \vec{0})$ a análise das excitações propagantes evidencia que não é possível impor simultaneamente as condições para ausência de táquions e fantasmas. É um dos nossos objetivos, para as seções subsequentes, avaliar as condições de unitariedade sobre o vetor v^{μ} para modelos de gravitação com violação da simetria de Lorentz.

3.2 Gravitação com Violação da Simetria de Lorentz através de um Vetor de Fundo

O quadrivetor constante, v^{μ} , que resulta numa anisotropia do espaço-tempo e consequentemente na violação da simetria de Lorentz também pode ter um papel relevante no setor

gravitacional. Jackiw e Pi propuseram acoplar o vetor v^μ com um termo tipo Chern-Simons quadridimensional [94]. Dado o efeito notável do termo de Chern-Simons em 3D, que leva a uma descrição invariante de calibre de grávitons massivos, essa proposta tem como objetivo investigar esse mecanismo de geração de massa num espaço-tempo quadridimensional. O termo de Chern-Simons em 4D, também pode surgir como efeito da gravitação quântica: (i) devido a anomalia Adler-Bell-Jackiw (ABJ) no acoplamento de férmions na gravitação, (ii) como contra-termo para o cancelamento da anomalia de Green-Schwarz em teoria de cordas heterótica e (iii) na gravitação quântica em laços devido a efeitos de violação de paridade (P) e carga-paridade (CP) [98]. Uma visão geral sobre a gravitação de Chern-Simons com quebra de simetria de Lorentz é dada em [98]. Para uma discussão mais aprofundada de alguns aspectos particulares desse modelo remetemos às Referências [99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107].

Além disso, juntamente com os termos de Einstein-Hilbert e Chern-Simons, podemos contemplar os efeitos da inclusão de termos de (curvatura)² e do termo de Ricci-Cotton, construído como uma imersão em 4D do termo homônimo em 3D com o vetor v^μ . Assim, consideremos o modelo Lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (\alpha R + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R^2) + \mu \mathcal{L}_{CS} + \lambda \mathcal{L}_{RC}, \quad (3.2)$$

onde α , β , γ , μ e λ são parâmetros arbitrários. O termo de Chern-Simons é dado por:

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa \left(\partial_\rho \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda + \frac{2}{3} \Gamma_{\rho\eta}^\lambda \Gamma_{\sigma\kappa}^\eta \right) \quad (3.3)$$

e o termo de Ricci-Cotton lê-se:

$$\mathcal{L}_{RC} = \sqrt{-g} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\sigma R_{\mu\lambda} \nabla_\nu R_\rho^\lambda, \quad (3.4)$$

em que o tensor de Riemann, a conexão de Christoffel, o tensor de Ricci, o escalar de curvatura e derivada covariante associada com a métrica $g_{\mu\nu}$ são dados, respectivamente por: $R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - (\rho \leftrightarrow \sigma)$, $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$, $R_{\nu\sigma} = R_{\nu\mu\sigma}^\mu$, $R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}$ e ∇_μ .

Algumas observações sobre o modelo Lagrangiano (3.2) devem ser levadas em consideração. Os termos de (curvatura)² contribuem com derivadas superiores às equações de movimento. Ainda que esses termos melhorem as divergências ultravioleta da teoria, estes podem trazer partículas fantasmas, que podem prejudicar a propriedade de unitariedade da matriz S e uma interpretação apropriada das probabilidades nos processos de espalhamento [31, 32, 33]. O espectro de partículas é modificado com o surgimento de modos massivos de spin-2 e spin-0. É interessante verificar essas consequências sob influência dos termos de violação de Lorentz.

Baseado no argumento de isotropia espacial, os autores de [94] restringiram a discussão para quadrivetores da forma $v^\mu = (v^0, \vec{0})$. Com essa escolha, as reparametrizações espaciais das coordenadas espaciais e as transformações de reparametrização temporal permanecem sendo uma simetria da ação modificada pelo termo de Chern-Simons. Nesse caso, as equações de campo da gravitação de Einstein-Hilbert modificada pelo termo de Chern-Simons possui um solução de Schwarzschild [94, 95, 98]. Isso faz com que esse modelo passe pelos testes clássicos da relatividade geral.

Apesar do caso particular $v^\mu = (v^0, \vec{0})$ ter sido amplamente usado na literatura, não existe nada canônico nessa escolha de coordenada de imersão em detrimento de outras possibilidades que podem ser investigadas. Aliás, motivados por recentes trabalhos que indicam uma possível anisotropia espacial em escalas cosmológicas [108, 109], buscaremos seguir a discussão sem nos restringirmos a valores particulares de v^μ .

Outro aspecto importante que deve ser ressaltado é que a ação de Chern-Simons pode ser entendida como proveniente da ação

$$S_{CS} = \frac{\mu}{4} \int d^4x \vartheta *RR \quad (3.5)$$

em que ϑ atua como um campo escalar acoplado à densidade de Pontryagin $*RR$, definida por

$$*RR = *R^\mu{}_\nu{}^{\rho\sigma} R^\nu{}_{\mu\rho\sigma} \quad (3.6)$$

e o dual do tensor de Riemann é dado por:

$$*R^\mu{}_\nu{}^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\sigma\kappa\lambda} R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}. \quad (3.7)$$

Porém, o termo de Pontryagin (3.6) pode ser escrito como uma divergência

$$\partial_\mu K^\mu = \frac{1}{2} *RR \quad (3.8)$$

da corrente topológica de Chern-Simons

$$K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} \left(\partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\sigma\kappa} + \frac{2}{3} \Gamma^\lambda{}_{\rho\eta} \Gamma^\eta{}_{\sigma\kappa} \right) \quad (3.9)$$

Integrando por partes a ação S_{CS} , obtemos

$$S_{CS} = \frac{\mu}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} \vartheta K_\mu dx^\mu - \frac{\mu}{2} \int d^4x (\partial_\mu \vartheta) K^\mu, \quad (3.10)$$

em que o primeiro termo é usualmente descartado, já que este é avaliado na fronteira da variedade quadridimensional do espaço-tempo. O segundo termo depende da derivada da quantidade ϑ . A densidade Lagrangiana da ação (3.10) coincide com a Lagrangiana (3.3) mediante a identificação $v^\mu \equiv \partial^\mu \vartheta = \text{const}$. Formalmente, se $\vartheta = \text{const}$ a ação de Chern-Simons (3.10) se anula identicamente.

Os termos de Chern-Simons e Ricci-Cotton trazem derivadas de ordem terceira e quinta, respectivamente, às equações de movimento. Isso pode modificar significativamente a evolução das soluções não-lineares da teoria. No limite linearizado da teoria o termo de Ricci-Cotton se parece como um termo de Chern-Simons com derivadas superiores, conforme mostraremos na Seção 3.4. Algumas propriedades do análogo ao termo de Ricci-Cotton no eletromagnetismo em 3D são discutidas em [84], onde se argumenta que o termo com derivadas superiores não preserva as propriedades topológicas do termo de Chern-Simons. Em princípio, poderia-se escolher vetores de fundo distintos para os vetores de Chern-Simons e Ricci-Cotton. Assumiremos, no entanto, um ponto de vista simplificador de que a quebra de simetria de Lorentz surge da presença de apenas um vetor de fundo v^μ . Uma resposta mais conclusiva para essa situação só pode ser estabelecida numa abordagem mais fundamental onde o mecanismo de quebra espontânea de simetria é definido explicitamente.

Para valores não triviais de v^μ , o modelo não-linearizado (3.2) não é invariante sob transformações ativas de difeomorfismos. Porém, os autores de [94] mostram que a simetria por difeomorfismos pode ser recuperada dinamicamente por meio das equações de movimento. A argumentação realizada é como segue: qualquer contribuição para a ação gravitacional da forma

$$S_X = \int d^4x \vartheta X, \quad (3.11)$$

em que X é uma densidade escalar por difeomorfismos e

$$\delta S_X \equiv \int d^4x \sqrt{-g} X^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

traz um adição do termo $X^{\mu\nu}$ à equação de Einstein. A consistência das equações de campo exige que

$$\nabla_\mu X^{\mu\nu} = 0. \quad (3.13)$$

Dada uma transformação infinitesimal de coordenadas

$$\delta x^\mu = \xi^\mu(x), \quad (3.14)$$

uma densidade escalar X se transforma como

$$\delta X = \partial_\mu (\xi^\mu X) \quad (3.15)$$

e ϑ sendo um parâmetro externo, não se transforma. Portanto,

$$\delta S_X = \int d^4x \vartheta \partial_\mu (\xi^\mu X) = - \int d^4x v_\mu \xi^\mu X. \quad (3.16)$$

Alternativamente, podemos avaliar δS_X (equação (3.12)) variando $g_{\mu\nu}$ de acordo com

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (3.17)$$

e conseqüentemente

$$\delta S_X = 2 \int d^4x \sqrt{-g} X^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu = -2 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu X^{\mu\nu}) \xi_\nu. \quad (3.18)$$

Comparando as expressões (3.16) e (3.18) concluímos que

$$D_\mu X^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} v^\nu X, \quad (3.19)$$

já que ξ^μ é arbitrário. Dessa forma, para vetores $v^\mu \neq 0$ a condição de consistência implica que $X = 0$, que é equivalente à equação de campo advinda da variação de S_X com relação a ϑ .

Esse fato implica numa simetria de calibre da ação linearizada, isto é, o modelo é invariante sob as transformações de campo da flutuação da métrica,

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad (3.20)$$

dado que o campo $h_{\mu\nu}$ satisfaça as equações de movimento.

Uma discussão importante são as propriedades dos modelos (3.1) e (3.2) sob as transformações discretas de conjugação de carga (C), inversão de paridade (P), inversão temporal (T) e as possíveis combinações dessas simetrias discretas (CP, CT, PT, CPT). As operações de transformação P, T e PT sobre um quadri vetor podem ser representadas, respectivamente, por

$$P_\mu^\nu = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.21a)$$

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}, \quad (3.21b)$$

$$(PT)_\mu^\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.21c)$$

Tendo em vista a propriedade de transformações do vetor de fundo v^μ (apresentado na Tabela 3.1), modelos com um vetor de violação de Lorentz necessariamente viola PT. De fato, uma Lagrangiana com violação da simetria de Lorentz da forma

$$\mathcal{L}_{VSL} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\mu B_{\nu\rho\sigma}, \quad (3.22)$$

onde $B_{\nu\rho\sigma}$ é um tensor, se transforma como

$$\mathcal{L}'_{VSL} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\mu \Lambda_\nu^\alpha \Lambda_\rho^\beta \Lambda_\sigma^\gamma B_{\alpha\beta\gamma}. \quad (3.23)$$

Uma transformação de $\Lambda = PT$ sempre traz um sinal negativo, pois temos 3 operações $\Lambda = -\delta_\mu^\nu$. As transformações de conjugação carga C dos modelos eletromagnéticos e gravitacionais ($\mathcal{C}^\dagger A^\mu \mathcal{C} = -A^\mu$, $\mathcal{C}^\dagger g_{\mu\nu} \mathcal{C} = +g_{\mu\nu}$) implicam que esses modelos preservam C, e consequentemente violam CPT. A violação de P ou de T individualmente, depende da forma específica do vetor de fundo v^μ . Por exemplo, $v^\mu = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \mathcal{L}_{VSL} = \epsilon^{0ijk} T_{ijk}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) é invariante por transformação de $T = \delta_i^j$, mas não de $P = -\delta_i^j$. O caso $v^\mu = (0, 0, 0, 1) \Rightarrow \mathcal{L}_{VSL} = \epsilon^{3\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} T_{\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ ($\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\sigma} = 0, 1, 2$) é invariante por transformação de $P = \eta_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}}$, mas não de $T = -\eta_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}}$.

Alguma evidência experimental da violação de paridade no setor gravitacional pode ser obtida estudando perturbações em torno de uma solução de fundo. Conforme veremos na Seção 3.5.1, a gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons apresenta propriedades de propagação de ondas gravitacionais no vácuo fundamentalmente diferente da gravitação de Einstein-Hilbert. Os modos de helicidade do gráviton se propagam com relações de dispersão distintas entre si, resultando num efeito de birrefringência do vácuo. Para analisar os modos de excitação do modelo (3.2), construiremos uma base ortonormal de operadores em graus de liberdade adequado a modelos de violação de Lorentz.

3.3 Construção de uma Base Ortonormal de Operadores

Por meio de uma inspeção do modelo Lagrangiano (3.2), percebe-se que além da métrica de Minkowski e derivadas, existem termos com a presença do tensor de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ e o vetor de fundo v^μ , que não podem ser expressa em termo dos operadores de Barnes-Rivers (3.24a)-(3.24d) [42]. Tal situação é análoga ao caso discutido no Capítulo 2, em que há uma necessidade de uma extensão do conjunto de operadores de spin para acomodarem adequadamente o tensor de Levi-Civita em 3D. Essa extensão também se faz necessária para modelos 4D com violação da simetria de Lorentz pela presença de um vetor de fundo.

Os operadores de Barnes-Rivers formam uma base ortonormal de operadores para modelos 4D invariantes por transformações de Lorentz e CPT, para campos simétricos de rank

2:

$$P(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho}\theta_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\theta_{\nu\rho}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}; \quad (3.24a)$$

$$P(1)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho}\omega_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\omega_{\nu\rho} + \theta_{\nu\rho}\omega_{\mu\sigma} + \theta_{\nu\sigma}\omega_{\mu\rho}); \quad (3.24b)$$

$$P_{11}(0)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}; \quad P_{12}(0)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}; \quad (3.24c)$$

$$P_{21}(0)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}; \quad P_{22}(0)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}. \quad (3.24d)$$

Porém, quando acrescentam-se termos que violam essas simetrias deve-se estender esse conjunto para acomodar novos operadores que aparecem na Lagrangiana linearizada. Já que almejamos efetuar a análise com um vetor de fundo v^μ arbitrário, vamos definir uma base de operadores ortonormais que separem os campos de acordo com os seus graus de liberdade individuais. Isso é mais conveniente devido ao fato que diferentes escolhas de vetor de fundo podem levar a um espectro de partículas distinto, haja visto que o grupo de simetria residual da quebra da simetria de Lorentz depende explicitamente da forma do vetor de fundo.

Como ponto de partida para estabelecer uma base de operadores nos graus de liberdade adequados, devemos decompor os operadores de Barnes-Rivers de maneira a acomodar operadores que violam a simetria de Lorentz tais como

$$S_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} + \theta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} + \theta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}), \quad (3.25)$$

em que $S_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\rho\partial^\sigma$, que aparecem nos termos de Chern-Simons e Ricci-Cotton na versão linearizada da teoria.

A primeira dica para realizar essa tarefa é notar que o operador $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$ “vive” inteiramente no setor de spin-2. Isso pode ser visto pelo fato que $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$ é aniquilado pelos operadores de spin-1 e spin-0, mas permanece inalterado pelos operadores de spin-2, como evidenciado pelas seguintes relações:

$$P(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} S^{\rho\sigma}_{,\kappa\lambda} = S_{\mu\nu,\kappa\lambda}, \quad (3.26a)$$

$$P(1)_{\mu\nu,\rho\sigma} S^{\rho\sigma}_{,\kappa\lambda} = 0, \quad (3.26b)$$

$$P_{mn}(0)_{\mu\nu,\rho\sigma} S^{\rho\sigma}_{,\kappa\lambda} = 0, \quad m, n = 1, 2. \quad (3.26c)$$

Feitas essas ressalvas, podemos prosseguir na tarefa da obtenção de uma base de operadores nos graus de liberdade para modelos de gravitação. Para isso, devemos definir os blocos construtores desses operadores.

3.3.1 Blocos Construtores dos Operadores

Num contexto de violação de simetria de Lorentz existe a necessidade da redefinição dos blocos construtores para os operadores nos graus de liberdade. Sabidamente, os blocos construtores podem ser construídos a partir do quadrimomento relativístico k^μ e de três outros vetores normalizados tipo-espaço e_i^μ , $i = 1, 2, 3$. Motivados pela necessidade da inclusão do vetor de quebra de simetria de Lorentz v^μ podemos escolher, sem perda de generalidade, $e_3^\mu = \sqrt{\frac{k^2}{k_*^2}} \left[v^\mu - \frac{(v \cdot k)}{k^2} k^\mu \right]$ ($k_*^2 = (v \cdot k)^2 - v^2 k^2$) de modo a decompor v^μ num termo proporcional ao momento k^μ e seu complemento ortogonal,

$$v^\mu = \frac{(v \cdot k)}{k^2} k^\mu + \sqrt{\frac{k^2}{k_*^2}} e_3^\mu, \quad (3.27)$$

Suponhamos, por ora, que o quadrimomento k^μ seja tipo-tempo. Com cuidados devidos, toda discussão pode ser adaptada também para o caso em que o quadrimomento k^μ é tipo-luz. Essa situação estará presente na análise dos polos não-massivos realizada na Seção 3.5.1.

Também escolhemos e_1^μ e e_2^μ tais que sejam ortogonais entre si e ortogonais a k^μ e a e_3^μ . É necessário, também, que $k_*^2 \neq 0$, já que $k_*^2 = 0$ implica que $v^\mu \parallel k^\mu$ e portanto os termos de Chern-Simons (3.3) e Ricci-Cotton (3.4) se anulam identicamente.

De posse dos quadrivetores k^μ , e_i^μ , $i = 1, 2, 3$ pode-se definir os seguintes operadores de projeção:

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad (3.28a)$$

$$\rho^{\mu\nu} = -e_1^\mu e_1^\nu, \quad (3.28b)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = -e_2^\mu e_2^\nu, \quad (3.28c)$$

$$\tau^{\mu\nu} = -e_3^\mu e_3^\nu = -\frac{1}{k_*} \left[k^2 v^\mu v^\nu - (v \cdot k) (k^\mu v^\nu + v^\mu k^\nu) + (v \cdot k)^2 \omega^{\mu\nu} \right]. \quad (3.28d)$$

Deve-se notar que o operador transverso, $\theta^{\mu\nu}$, pode ser relacionado com esses operadores por

$$\theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu} = \rho^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}. \quad (3.29)$$

O operador de Chern-Simons que viola a simetria de Lorentz, $S^{\mu\nu} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho k_\sigma$, pode ser escrito em termos dos blocos construtores. Utilizando-se as relações (3.27), (3.29) e $\epsilon^{\rho\sigma\kappa\lambda} e_{1\rho} e_{2\sigma} e_{3\kappa} \frac{k_\lambda}{\sqrt{k^2}} = 1$ pode-se mostrar que

$$S^{\mu\nu} = i\sqrt{k_*^2} (e_1^\mu e_2^\nu - e_2^\nu e_1^\mu). \quad (3.30)$$

Com a base de operadores nos graus de liberdade (3.28a)-(3.28d) pode-se obter o propagador e analisar a consistência espectral da teoria de Maxwell-Chern-Simons-Proca com violação da simetria de Lorentz (3.1). Esse problema foi considerado em [50, 97] utilizando abordagens distintas. Em vez disso, vamos para águas mais profundas em enfrentar a construção do operadores análogos para modelos de gravitação.

3.3.2 Operadores nos Graus de Liberdade para Modelos de Gravitação

Os operadores do setor de spin-2 resultam da decomposição do operador $P(2)_{\mu\nu,\rho\sigma}$ (3.24a). Uma maneira eficiente de decompor esse operador de projeção de spin em seus autovetores normalizados $\psi_{\mu\nu}^m$

$$P(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \sum_m \psi_{\mu\nu}^m \psi_{\rho\sigma}^m, \quad (3.31)$$

(para valores arbitrários de spin, essa decomposição deve incluir um fator oriundo da paridade P do setor de spin: $P(J) = (-1)^J \sum_m \psi^m \psi^m$), onde

$$P(2)_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}^m = \psi_{\mu\nu}^m. \quad (3.32)$$

De posse dos autovetores $\{\psi^m\}$, podemos definir um conjunto de operadores de projeção ($m = n$) e mapeamento ($m \neq n$) nos graus de liberdade:

$$P_{mn} \equiv \psi^m \psi^n. \quad (3.33)$$

Uma observação importante é que por meio de uma transformação de rotação pode-se definir conjunto de operadores nos graus de liberdade equivalente [45]. De fato, uma rotação no conjunto dos autovetores,

$$\tilde{\psi}^m = \sum_n U_{mn} \psi^n, \quad (3.34)$$

com U_{mn} ortogonais ($UU^T = 1$), redefine um conjunto de projetores rotacionados

$$\tilde{P}_{mn} = \tilde{\psi}^m \tilde{\psi}^n = U_{mm'} \psi^{m'} U_{nn'} \psi^{n'} = U_{mm'} P_{m'n'} U_{n'm}^T. \quad (3.35)$$

Mas, como esperado, os projetores de spin permanecem inalterados por tal rotação. De fato, utilizando a decomposição (3.31) com o conjunto de autovetores rotacionados temos que

$$\tilde{P} = \sum_m \tilde{\psi}^m \tilde{\psi}^m = \sum_{m,n,n'} U_{mn} U_{mn'} \psi^n \psi^{n'} = \sum_m \psi^m \psi^m = P. \quad (3.36)$$

Por meio da identidade (3.29) obtemos que

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu,\rho\sigma}(2) &= \frac{1}{2} [(\rho_{\mu\rho}\sigma_{\nu\sigma} + \rho_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho} + \sigma_{\mu\rho}\rho_{\nu\sigma} + \sigma_{\mu\sigma}\rho_{\nu\rho}) + (\sigma \leftrightarrow \tau) + (\rho \leftrightarrow \tau)] \\ &+ \frac{2}{3} (\rho_{\mu\sigma}\rho_{\nu\rho} + \sigma_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho} + \tau_{\mu\sigma}\tau_{\nu\rho}) - \frac{1}{3} [(\rho_{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma} + \sigma_{\mu\nu}\rho_{\rho\sigma}) + (\sigma \leftrightarrow \tau) + (\rho \leftrightarrow \tau)]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Definindo $\psi_{\rho\sigma}^m e_j^\rho e_k^\sigma = \alpha_{jk}^m$

$$\begin{aligned} P(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}^m &= \alpha_{12}^m (P_{12} + P_{21})_{\mu\nu} + \alpha_{13}^m (P_{13} + P_{31})_{\mu\nu} + \alpha_{23}^m (P_{23} + P_{32})_{\mu\nu} \\ &+ \tilde{\alpha}_{11}^m \rho_{\mu\nu} + \tilde{\alpha}_{22}^m \sigma_{\mu\nu} + \tilde{\alpha}_{33}^m \tau_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$\tilde{\alpha}_{11}^m = \frac{1}{3} (2\alpha_{11}^m - \alpha_{22}^m - \alpha_{33}^m), \quad (3.39a)$$

$$\tilde{\alpha}_{22}^m = \frac{1}{3} (-\alpha_{11}^m + 2\alpha_{22}^m - \alpha_{33}^m), \quad (3.39b)$$

$$\tilde{\alpha}_{33}^m = \frac{1}{3} (-\alpha_{11}^m - \alpha_{22}^m + 2\alpha_{33}^m). \quad (3.39c)$$

A fim de obtermos um conjunto de autovetores $\{\psi_{\mu\nu}^m\}$ que satisfaça a condição (3.32), devemos encontrar um conjunto de coeficientes

$$\vec{\alpha}^m = (\alpha_{12}^m, \alpha_{13}^m, \alpha_{23}^m, \tilde{\alpha}_{11}^m, \tilde{\alpha}_{22}^m, \tilde{\alpha}_{33}^m). \quad (3.40)$$

satisfazendo

$$\vec{\alpha}^m \cdot \vec{\alpha}^n = \delta_{mn}, \quad (3.41)$$

e sob a condição de que $\tilde{\alpha}_{11}^m + \tilde{\alpha}_{22}^m + \tilde{\alpha}_{33}^m = 0$.

Uma escolha possível e conveniente dos coeficientes $\vec{\alpha}^m$ associados a decomposição do operador $P(2)$, que posteriormente levará a uma interpretação adequada dos modos propagantes é

$$\{\vec{\alpha}^m\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0, 0 \right); \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \right); \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0 \right); \right. \quad (3.42)$$

$$\left. \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}. \quad (3.43)$$

Assim, o conjunto de autovetores $\{\psi_{\mu\nu}^m\}$ fica escrito,

$$\psi_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{1\mu}e_{2\nu} + e_{2\mu}e_{1\nu}), \quad (3.44a)$$

$$\psi_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{1\mu}e_{3\nu} + e_{3\mu}e_{1\nu}), \quad (3.44b)$$

$$\psi_{\mu\nu}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{2\mu}e_{3\nu} + e_{3\mu}e_{2\nu}), \quad (3.44c)$$

$$\psi_{\mu\nu}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}), \quad (3.44d)$$

$$\psi_{\mu\nu}^5 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\rho_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} - 2\tau_{\mu\nu}). \quad (3.44e)$$

Com os autovetores (3.44a)-(3.44e), podemos construir os operadores de projeção nos graus de liberdade através da relação (3.33):

$$P_{11}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \psi_{\mu\nu}^1 \psi_{\rho\sigma}^1 = \frac{1}{2} (\rho_{\mu\rho} \sigma_{\nu\sigma} + \rho_{\mu\sigma} \sigma_{\nu\rho} + \sigma_{\mu\rho} \rho_{\nu\sigma} + \sigma_{\mu\sigma} \rho_{\nu\rho}), \quad (3.45a)$$

$$P_{22}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \psi_{\mu\nu}^2 \psi_{\rho\sigma}^2 = \frac{1}{2} (\rho_{\mu\rho} \tau_{\nu\sigma} + \rho_{\mu\sigma} \tau_{\nu\rho} + \tau_{\mu\rho} \rho_{\nu\sigma} + \tau_{\mu\sigma} \rho_{\nu\rho}), \quad (3.45b)$$

$$P_{33}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \psi_{\mu\nu}^3 \psi_{\rho\sigma}^3 = \frac{1}{2} (\tau_{\mu\rho} \sigma_{\nu\sigma} + \tau_{\mu\sigma} \sigma_{\nu\rho} + \sigma_{\mu\rho} \tau_{\nu\sigma} + \sigma_{\mu\sigma} \tau_{\nu\rho}), \quad (3.45c)$$

$$P_{44}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \psi_{\mu\nu}^4 \psi_{\rho\sigma}^4 = \frac{1}{2} (\rho_{\mu\nu} \rho_{\rho\sigma} + \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} (\rho_{\mu\nu} \sigma_{\rho\sigma} + \sigma_{\mu\nu} \rho_{\rho\sigma}), \quad (3.45d)$$

$$P_{55}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \psi_{\mu\nu}^5 \psi_{\rho\sigma}^5 = \frac{1}{6} [\rho_{\mu\nu} \rho_{\rho\sigma} + \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\rho\sigma} + 4\tau_{\mu\nu} \tau_{\rho\sigma} + \rho_{\mu\nu} \sigma_{\rho\sigma} + \sigma_{\mu\nu} \rho_{\rho\sigma} - 2(\rho_{\mu\nu} \tau_{\rho\sigma} + \tau_{\mu\nu} \rho_{\rho\sigma}) - 2(\sigma_{\mu\nu} \tau_{\rho\sigma} + \tau_{\mu\nu} \sigma_{\rho\sigma})]. \quad (3.45e)$$

Analogamente, os operadores de mapeamento são dados por $P_{mn}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \psi_{\mu\nu}^m \psi_{\rho\sigma}^n$ ($m \neq n$). Por exemplo,

$$P_{14}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \psi_{\mu\nu}^1 \psi_{\rho\sigma}^4 = \frac{1}{2} (e_{1\mu}e_{2\nu} + e_{2\mu}e_{1\nu}) (\rho_{\rho\sigma} - \sigma_{\rho\sigma}). \quad (3.46)$$

Os operadores de mapeamento podem ser expressos em termos dos objetos ϵ , v , ρ e σ de modo a facilitar a expansão do operador de onda em termos dos operadores nos graus de liberdade (3.52). Por exemplo, $P_{14}(2)$ pode ser escrito como

$$P_{14}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\tau\eta} (\rho_{\mu\rho} \sigma_{\nu\lambda} \rho_{\sigma\kappa} + \rho_{\nu\sigma} \sigma_{\mu\lambda} \rho_{\rho\kappa} - \sigma_{\nu\sigma} \rho_{\mu\kappa} \sigma_{\rho\lambda} - \sigma_{\mu\rho} \rho_{\nu\kappa} \sigma_{\sigma\lambda}) \frac{v_\tau k_\eta}{\sqrt{k_*^2}}. \quad (3.47)$$

Caso necessário, os outros operadores de mapeamento também podem ser expressos dessa forma.

O modelo de nosso interesse (3.2), é invariante pelas transformações de calibre (3.20). Por esse motivo, o setor de spin-1 se mostrará ausente na análise dos modos propagantes. Apesar disso, o setor de spin-1 pode ser relevante para modelos gravitacionais sem essa simetria de calibre ou com a presença de outros campos propagantes. Portanto, por questão de completude, listamos os projetores de graus de liberdade para o setor de spin-1:

$$P_{11}(1)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\rho_{\mu\rho} \omega_{\nu\sigma} + \rho_{\nu\rho} \omega_{\mu\sigma} + \rho_{\mu\sigma} \omega_{\nu\rho} + \rho_{\nu\sigma} \omega_{\mu\rho}), \quad (3.48a)$$

$$P_{22}(1)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\rho} \omega_{\nu\sigma} + \sigma_{\nu\rho} \omega_{\mu\sigma} + \sigma_{\mu\sigma} \omega_{\nu\rho} + \sigma_{\nu\sigma} \omega_{\mu\rho}), \quad (3.48b)$$

$$P_{33}(1)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\tau_{\mu\rho} \omega_{\nu\sigma} + \tau_{\nu\rho} \omega_{\mu\sigma} + \tau_{\mu\sigma} \omega_{\nu\rho} + \tau_{\nu\sigma} \omega_{\mu\rho}). \quad (3.48c)$$

Estes podem ser obtidos através da decomposição do projetor (3.24b) utilizando a mesma linha de argumentação apresentada nessa subseção.

3.4 Obtenção dos Propagadores

Por meio da aproximação de campo fraco em torno de uma métrica de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, podemos escrever a parte quadrática da Lagrangiana (3.2), a menos de derivadas totais, como

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L})_2 = & \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \square h - h \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\rho h^\rho{}_\nu \right) \\
& + \frac{\beta}{4} (h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} + h \square^2 h - 2h \square \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - 2h^{\mu\nu} \square \partial_\mu \partial_\rho h^\rho{}_\nu + 2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma}) \\
& + \gamma (h \square^2 h - 2h \square \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma}) \\
& + \frac{\mu}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\mu h_\sigma{}^\kappa \partial_\nu (\partial_\kappa \partial_\lambda h^\lambda{}_\rho - \square h_{\kappa\rho}) \\
& + \frac{\lambda}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\mu h_\sigma{}^\kappa \square \partial_\nu (\partial_\kappa \partial_\lambda h^\lambda{}_\rho - \square h_{\kappa\rho}).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Em seguida escrevemos a Lagrangiana quadrática (3.49) na forma

$$(\mathcal{L})_2 = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} h^{\rho\sigma}, \tag{3.50}$$

onde o operador de onda $\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}$ no espaço de momenta é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} = & \frac{1}{2} (\alpha + \beta k^2) k^2 P(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} + [(6\beta + 2\gamma) k^2 - \alpha] k^2 P_{11}(0)_{\mu\nu,\rho\sigma} \\
& + \frac{1}{4} (\mu k^2 + \lambda k^4) S_{\mu\nu,\rho\sigma},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

em que $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$ é dado pela Equação (3.25)

A base dos operadores em graus de liberdade permite expandir o operador de onda como

$$\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} = \sum_{J,mn} a(J)_{mn} P_{mn}(J)_{\mu\nu,\rho\sigma}. \tag{3.52}$$

Vamos esclarecer a notação. Os coeficientes da expansão do operador de onda são dados por $a(J)_{mn}$. Os operadores diagonais $P_{mm}(J)$ são projetores para cada grau de liberdade m no setor de spin J relacionado ao campo $h_{\mu\nu}$, enquanto $P_{mn}(J)$ com $m \neq n$ são operadores de mapeamento entre os projetores $P_{mm}(J)$ e $P_{nn}(J)$. A nomenclatura dos operadores como projetores e mapeadores são oriundos das relações de ortonormalidades que esses operadores satisfazem:

$$\sum_{\rho\sigma} P_{mm'}(I)_{\mu\nu,\rho\sigma} P_{n'n}(J)^{\rho\sigma}{}_{,\kappa\lambda} = \delta_{m'n'} \delta^{IJ} P_{mn}(I)_{\mu\nu,\kappa\lambda}. \tag{3.53}$$

A propriedade de decomposição da unidade pode ser expressa como:

$$\sum_{J,m} P_{mm}(J)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \delta_{\mu\nu,\rho\sigma}. \tag{3.54}$$

Os coeficientes $a(J)_{mn}$ podem ser organizados como matrizes que representam a estrutura do operador de onda relacionado a um spin particular, J . Quando essas matrizes não são singulares, o propagador saturado é dado por:

$$\Pi = i \sum_{J,m,n} a_{mn}^{-1}(J) \mathcal{S}^{*\mu\nu} P_{mn}(J)_{\mu\nu,\rho\sigma} \mathcal{S}^{\rho\sigma}, \tag{3.55}$$

onde $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ são fontes físicas que satisfazem vínculos de conservação.

Acontece que a Lagrangiana (3.2) na sua forma linearizada pode ser invariante sob transformações locais dos campos (3.20). Como consequência da simetria de calibre, as matrizes de coeficientes se tornam degeneradas. Conforme a discussão da Seção 2.2, a receita correta para obter o propagador invariante por transformações de calibre é efetuar a inversa de qualquer submatriz não degenerada com dimensão igual ao posto de $a(J)_{mn}$, na qual denotamos por $A(J)_{mn}$, e saturá-la com fontes físicas.

Para o modelo (3.2), os coeficientes $a(J)_{mn}$ formam matrizes 2×2 , 3×3 e 5×5 para os setores de spin-0, -1 e -2, respectivamente, correspondendo aos 10 graus de liberdade contidos num tensor simétrico de rank 2,

$$a(0) = \begin{pmatrix} 2(3\beta + \gamma)k^4 - \alpha k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

$$a(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

$$a(2) = \frac{k^2}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta k^2 & 0 & 0 & -i\sqrt{k_*^2}(\mu + \lambda k^2) & 0 \\ 0 & \alpha + \beta k^2 & -i\frac{\sqrt{k_*^2}}{2}(\mu + \lambda k^2) & 0 & 0 \\ 0 & i\frac{\sqrt{k_*^2}}{2}(\mu + \lambda k^2) & \alpha + \beta k^2 & 0 & 0 \\ i\sqrt{k_*^2}(\mu + \lambda k^2) & 0 & 0 & \alpha + \beta k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta k^2 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

em que $k_*^2 = (v \cdot k)^2 - v^2 k^2$.

A matriz de spin-0 é degenerada, enquanto a matriz de spin-1 se anula identicamente, manifestando a simetria de calibre do modelo. Para o setor de spin-2, temos uma estrutura tipo bloco-diagonal com as linhas e colunas 1-4, 2-3 e 5. Isso permite a inversão de cada bloco independentemente. As inversas das matrizes de coeficientes, necessárias para a obtenção dos propagadores, com a degenerescência devidamente extraída no setor de spin-0, são dadas por:

$$A(0) = \frac{1}{k^2(2(3\beta + \gamma)k^2 - \alpha)}, \quad (3.59)$$

$$a(2)_{1-4}^{-1} = \frac{2}{\Delta_{14}k^2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta k^2 & i\sqrt{k_*^2}(\mu + \lambda k^2) \\ -i\sqrt{k_*^2}(\mu + \lambda k^2) & \alpha + \beta k^2 \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

$$a(2)_{2-3}^{-1} = \frac{2}{\Delta_{23}k^2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta k^2 & i\frac{\sqrt{k_*^2}}{2}(\mu + \lambda k^2) \\ -i\frac{\sqrt{k_*^2}}{2}(\mu + \lambda k^2) & \alpha + \beta k^2 \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

$$a_5^{-1}(2) = \frac{2}{(\alpha + \beta k^2)k^2}, \quad (3.62)$$

onde $\Delta_{14} = (\alpha + \beta k^2)^2 - k_*^2(\mu + \lambda k^2)^2$, $\Delta_{23} = (\alpha + \beta k^2)^2 - \frac{k_*^2}{4}(\mu + \lambda k^2)^2$. Uma maneira alternativa para se obter o propagador é descrita no Apêndice B. Esse método suplementar é, de certa forma, algebricamente mais simples, de modo que pode ser utilizado para fins conferência com os cálculos realizados aqui; infelizmente, este fornece um menor compreensão sobre as propriedades físicas dos modos propagantes.

À primeira vista, percebe-se que o setor de spin-0 não é afetado pelos termos de violação da simetria de Lorentz. Uma explicação vem do fato que o operador $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$ reside inteiramente no setor de spin-2 como assinalado pelas equações (3.26a)-(3.26c).

Por outro lado, no setor de spin-2 aparecem excitações independentes devido a violação da simetria de Lorentz. Em teorias de campos relativísticas, o spin das partículas é definido como representações unitárias do grupo de isotropia (*little group*) definido por um momento representativo da classe na qual a partícula pertence. Um vetor de fundo que quebra a isotropia do espaço-tempo, e portanto, modifica a estrutura de spin da teoria. Isso fica explícito no setor de spin-2, em que alguns graus de liberdade se propagam independentemente.

Um fenômeno análogo ocorre em teoria de gravitação em (1+2)D com termos de violação de paridade. Já que o spin é representado por um operador pseudo-escalar em (1+2)D, deve-se haver um dublete de spins com o mesmo valor da massa absoluta, $|m|$, para que sejam formadas as representações irredutíveis do grupo de Lorentz estendido por inversão temporal e transformação de paridade. Já na teoria com violação de paridade, tal como a gravitação de Chern-Simons apresentada no Capítulo 2, essa estrutura de dubletes é perdida e cada componente de spin adquire uma massa distinta, na qual interpretamos como graus de liberdade que se propagam independentemente. Para uma discussão mais aprofundada, remetemos às Referências [47, 41].

Uma conexão clara entre a teoria com violação da simetria de Lorentz e a teoria tridimensional com violação da paridade é estabelecida quando considera-se um vetor de fundo com componente espaciais $v^\mu = (0, \vec{v})$. Nesse caso, existe a quebra de simetria

$$SO(1, 3) \rightarrow SO(1, 2); \quad (3.63)$$

portanto, as partículas massivas não devem ser definidas como a imersão $SU(2) \hookrightarrow SO(1, 3)$, mas como $U(1) \hookrightarrow SO(1, 2)$. Além disso, se a simetria do modelo considerado for estendida através da conservação de paridade, as partículas podem ser definidas por dubletes de spins $(+s, -s)$, já que por transformação de paridade, o spin $+s$ é mapeado no spin $-s$. Esse é o motivo pelo qual a matriz penta-dimensional (3.58) é dividida na soma direta de representações fundamentais de $U(1)$ e sua representação complexo conjugada (ou equivalentemente representações de $SO(2)$).

Os três blocos que aparecem no setor de spin-2 podem ser vistos como provenientes de uma redução dimensional. Se designarmos o operador τ com papel de helicidade 0, a decomposição do operador de spin-2 (conforme as equações (3.45a)-(3.45e)) podem ser comparados com os operadores tridimensionais definidos no artigo [46]. Por exemplo, os projetores $P_{11}(2)$ e $P_{44}(2)$ são, respectivamente, $P(2^{++})$ e $P(2^{--})$ na Referência [46]. Nesse caso, o spin-2 é dividido em três setores de spin tridimensionais: o spin-2 corresponde ao bloco 1-4 ($P(2) = P_{11}(2) + P_{44}(2)$), o spin-1 corresponde ao bloco 2-3 ($P(1) = P_{22}(2) + P_{33}(2)$) e o spin-0, corresponde ao setor 5 ($P(0) = P_{55}(2)$).

3.5 Análise do Espectro de Partículas

Nessa seção, analisamos a consistência do espectro de partículas do modelo (3.2). Como resultado desse estudo, poderemos impor condições sobre os parâmetros da Lagrangiana (3.2) de forma a inibir a propagação dos modos não-físicos, isto é, táquions e fantasmas.

Numa teoria quântica de campos com invariância relativística, é conhecido que a condição para ausência de táquions é $m^2 \geq 0$, onde $k^2 = m^2$ é um polo do respectivo propagador. A

condição para ausência de modos fantasmas é dada por

$$\Im m \text{Res}(\Pi|_{k^2=m^2}) > 0. \quad (3.64)$$

Com o formalismo dos operadores de projeção, podemos nos aproveitar da decomposição geral dos operadores de projeção de graus de liberdade,

$$P_{mn}(J) = (-1)^P \psi^m \psi^n, \quad (3.65)$$

onde P está relacionado com a paridade do operador de spin, para reescrever o propagador (3.55) como

$$\Pi = i(-1)^P \sum_{J,m,n,N} \mathcal{S}_m^* A(J, m_N^2)_{mn} \mathcal{S}_n (k^2 - m_N^2)^{-1}, \quad (3.66)$$

em que $\mathcal{S}_m = \psi_{\rho\sigma}^m \mathcal{S}^{\rho\sigma}$ e $A(J, m_N^2)_{mn}$ são as inversas das submatrizes não degeneradas com o polo extraído.

Percebe-se pela equação (3.66) que a condição de positividade (3.64), para fontes arbitrárias, é garantida se os autovalores da matriz $A(J, m^2)_{mn}$ forem positivos. Ademais, pode-se mostrar que essas matrizes, para polos massivos, tem apenas um autovalor não-nulo no polo, que coincide com o traço de $A(J, m^2)_{mn}$. Portanto, a condição para ausência de fantasmas para cada spin fica simplificada para:

$$(-1)^P \text{tr} A(J, m^2)|_{k^2=m^2} > 0. \quad (3.67)$$

Por outro lado, numa teoria com violação da simetria de Lorentz, essas condições dever ser revisitadas, já que, por exemplo, a relação de dispersão é modificada e pode ser mais geral do que simplesmente $k^2 = m^2$. Nesse caso, seria interessante reavaliar a caracterização das excitações taquiônicas e fantasmas para uma teoria não for invariante por transformações de Lorentz. Devido a algumas peculiaridades que aparecem para diferentes escolhas de vetor de fundo, vamos adiar a discussão da caracterização de táquions e fantasmas para cada caso particular.

O setor de spin-0 não é afetado pelos termos de violação de simetria de Lorentz. Então, a metodologia usual para a análise da unitariedade permanece válida. O polo de spin-0 massivo permanece como $m^2 = \frac{\alpha}{6\beta+2\gamma}$ e as condições para a ausência de táquions e fantasmas são dadas por:

$$\text{Spin } 0: \alpha > 0; 3\beta + \gamma > 0. \quad (3.68)$$

É interessante notar que o bloco 5 do setor de spin-2 fornece um gráviton massivo com contribuição do termo $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$. Porém, o polo massivo $m^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ leva a condições de ausência de táquions e fantasmas

$$\text{Spin } 2, \text{ Bloco } 5: \alpha < 0; \beta > 0, \quad (3.69)$$

que são contraditórias com a positividade da constante de gravitação de Newton ($\alpha > 0$). Sendo inconsistente com as condições de unitariedade, requereremos daqui em diante que $\beta = 0$, isto é, a ausência do termo Ricci ao quadrado, $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$. Antes de continuar a análise geral para assegurar a ausência de táquions e fantasmas na teoria com o termo de Chern-Simons e Ricci-Cotton, é instrutivo estudar um caso especial, em que o termo de Ricci-Cotton não é considerado ($\lambda = 0$). Nessa situação, a submatriz correspondente ao bloco 1-4 é dada por

$$a(2)_{1-4}^{-1} = \frac{2}{\mu^2 k^2 \left(\frac{\alpha^2}{\mu^2} - k_*^2 \right)} \begin{pmatrix} \alpha & i\mu\sqrt{k_*^2} \\ -i\mu\sqrt{k_*^2} & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

O conteúdo de partículas do modelo é estabelecido pelos polos do propagador. Para o bloco 1-4 da matriz de spin-2, os polos são dados pelas raízes da relação de dispersão

$$\frac{\alpha^2}{\mu^2} - \left((v \cdot k)^2 - v^2 k^2 \right) = 0. \quad (3.71)$$

A solução dessa equação para os modos propagantes é

$$k_0 = \frac{|\vec{k}|}{|\vec{v}|} \left[v_0 \cos \theta \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu^2 k^2} - v^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (3.72)$$

onde θ é o ângulo entre \vec{v} e \vec{k} . Deve-se notar que só ocorre a presença de polos massivos se $|\vec{v}| \neq 0$. A esse ponto, convém abrir a discussão para a interpretação dos modos de energia negativa, a fim de garantir que não haja a propagação de táquions.

Em teorias de campos relativísticas, as relações de dispersão são da forma $k_0 = \pm E(\vec{k})$, com $E(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. As soluções de energia negativa são incorporadas de maneira natural na teoria com a definição do propagador causal de Feynman que leva em conta a contribuição de um modo de energia negativa como sendo a aniquilação de um modo de energia positiva. Além disso, a invariância por transformações de CPT do modelo sugere a interpretação dos modos de energia negativa que se propagam para o passado como sendo um modo de energia positiva se propagando para o futuro.

Porém, no problema aqui em questão, a invariância por transformações de CPT é perdida e as relações de dispersão podem ser mais gerais da forma $k_0 = E_{\pm}$ com $|E_+| \neq |E_-|$ (por exemplo, (3.72)). As diferentes massas para a partícula e antipartícula gera uma situação problemática para garantir a propriedade de localidade na teoria quântica, conforme discutido em [91].

Analisando a relação (3.72), percebemos que no caso $v_0 \neq 0$, temos massas diferentes para a partícula e antipartícula e, nesse caso, a positividade da energia não pode ser garantida para direções arbitrárias de propagação, pelo fato da explícita dependência em $\cos \theta$. Devemos, portanto, concluir que é incompatível assumir que $v_0 \neq 0$ e $|\vec{v}| \neq 0$ simultaneamente, para garantir a consistência quântica da teoria.

No caso particular em que $v_0 = 0$ e $|\vec{v}| \neq 0$, os polos são dados por:

$$k_0 = \pm \frac{1}{|\vec{v}|} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu^2} + \vec{v}^2 \vec{k}^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.73)$$

A relação de dispersão é do tipo $k_0 = \pm E$ e, potencialmente, a interpretação dos modos de energia negativos podem ser consistentemente associados como antipartículas, nesse caso. Apesar da ausência de invariância por transformações de CPT, no caso de um vetor de fundo com componentes espaciais a quebra de simetria de Lorentz preserva uma simetria $SO(1,2)$ residual, conforme discutido na Seção 3.4. De fato, existe uma estreita ligação entre os modos massivos de spin-2 e o gráviton massivo que aparece na gravitação topológica massiva em 3D. Isso força uma interpretação dos modos de energia negativo, que são consistentemente discutidos na gravitação planar. Sabemos que no modelo em 4D, permanece uma simetria por transformações de $C\tilde{P}T$, onde C e T são as usuais conjugação de carga e inversão temporal, \tilde{P} é uma transformação de Lorentz discreta e imprópria que inverte apenas uma componente espacial no plano ortogonal definido pelo vetor de violação de simetria de Lorentz \vec{v} . \tilde{P} é a transformação usual de paridade em $(1+2)D$. Portanto, podemos concluir que o modo de energia negativo pode ser consistentemente interpretado como um modo de energia positivo

com polarização de spin oposta. O fato desse modo de excitação ser não-taquiônico está em concordância com resultados obtidos anteriormente na literatura [51].

Para concluir a análise espectral, devemos garantir a positividade dos resíduos dos polos dos propagadores. Primeiramente, deve-se observar que, fora da camada de massa, a matriz residual $a(2)_{1-4}^{-1}$ (equação (3.70)) tem dois autovalores distintos, a saber, $C\left(\alpha + \mu\sqrt{k_*^2}\right)$ e $C\left(\alpha - \mu\sqrt{k_*^2}\right)$, com $C = 2\left[\mu^2 k^2\left(\frac{\alpha^2}{\mu^2} - k_*^2\right)\right]^{-1}$. Na camada de massa, isto é, em $k_*^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2}$, um dos autovalores se anula dependendo do sinal de α/μ . Fisicamente, interpretamos esse fato como a propagação de apenas uma polarização de spin: $+2$ para $\alpha/\mu > 0$ ou -2 para $\alpha/\mu < 0$. Esse fato remete a gravitação topologicamente massiva em 3D em que ocorre a propagação de apenas um modo de helicidade ± 2 dependendo do sinal do termo de Chern-Simons [59].

Conforme discutido, a condição para a positividade dos autovalores no polo é simplificada à condição de positividade do traço da matriz de coeficientes (vide equação (3.67)). Nesse caso,

$$\text{Res tra } a(2)_{1-4}^{-1}\Big|_{k_0^2=E^2} = -\frac{2\alpha}{\mu^2 v^2 k^2}, \quad (3.74)$$

em que no polo,

$$k^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v^2} - \vec{k}^2 \cos^2 \theta. \quad (3.75)$$

Para valores de momento pequeno, $\vec{k}^2 < \frac{\alpha^2}{\mu^2 v^2}$, a condição para ausência de modos fantasmas, expresso pela equação (3.74), impõe:

$$\alpha < 0. \quad (3.76)$$

Pode-se questionar se o modelo seria consistente para $\alpha > 0$ para valores específicos de $\vec{k} \cos^2 \theta$. Nós entendemos que a dependência explícita na direção de propagação para a consistência do modelo é uma situação estranha e tal possibilidade deve ser descartada. De fato, no caso em que a dinâmica das partículas fica restrita ao plano ortogonal a \vec{v} , $\cos \theta$ se anula e k^2 se torna positivo definido. Curiosamente, o requerimento de uma constante de Newton negativa é consistente com a relação obtida na gravitação topologicamente massiva, mostrando mais uma vez a estreita relação entre essas duas teorias.

No caso mais geral, em que o termo de Ricci-Cotton está presente ($\lambda \neq 0$), os modos massivos do propagador do bloco 1-4 é dado pelas raízes do polo

$$\Delta_{1-4} = \alpha^2 - k_*^2 (\mu + \lambda k^2)^2. \quad (3.77)$$

A condição para ausência de fantasmas é dada por

$$\text{Res } \left(\text{tra } a(2)_{14}^{-1} \right)\Big|_{k_0^2=E^2} = \frac{2\alpha (k_0^2 - E^2)}{k^2 \Delta_{1-4}} > 0. \quad (3.78)$$

Porém, a condição (3.78) está condenada a propagar modos fantasmas. A razão é simples: devido a natureza do termo de Ricci-Cotton trazer derivadas superiores, o denominador (3.77) possui três polos massivos $\Delta_{1-4} = C(k_0^2 - E_1^2)(k_0^2 - E_2^2)(k_0^2 - E_3^2)$, com $E_1^2 < E_2^2 < E_3^2$ ou dois polos massivo dependendo da escolha de v^μ , $\Delta_{1-4} = C'(k_0^2 - E_1^2)(k_0^2 - E_2^2)$, com $E_1^2 < E_2^2$. Em ambos os casos, se $\text{tr } a(2)_{1-4}^{-1}\Big|_{k_0^2=E_1^2}$ é positivo (negativo), então $\text{tr } a(2)_{1-4}^{-1}\Big|_{k_0^2=E_2^2}$ é negativo (positivo). Portanto, a positividade do resíduo em todos os polos não pode ser assegurada simultaneamente. Tal problema é recorrentes em teorias com derivadas superiores. É comum o aparecimento de partículas fantasmas quando existe mais de um polo massivo no

mesmo setor de spin. Tendo em vista essa discussão somos obrigados a impor que $\lambda = 0$, isto é, eliminar o termo de Ricci-Cotton da teoria.

A análise da consistência espectral para o bloco 2-3 segue a mesma linha de argumentação do bloco 1-4 e os principais resultados permanecem inalterados. Isso encerra a discussão desta análise para os polos massivos. Vamos abordar, em seguida, a análise para o polo não-massivo.

3.5.1 Gráviton Não-Massivo

Os polos não-massivos devem ser tratados com cuidados adicionais. A primeira vista, aparenta-se que a base de operadores é mal definida para quadrimomento tipo-luz ($k^2 = 0$). Porém, pode-se mostrar que as fontes físicas satisfazem vínculos ($k_\mu \mathcal{S}^{\mu\nu} = 0$) devido a simetria de calibre do modelo. Esses vínculos tornam o propagador saturado uma expressão bem-definida mesmo para momento tipo-luz. De fato, as estruturas que sobrevivem quando os projetores são saturados com fontes físicas para momenta tipo-luz são dados por:

$$P_{11}(0)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \text{t.q.n.c.r.}, \quad (3.79a)$$

$$P_{11}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\rho_{\mu\rho}\sigma_{\nu\sigma} + \rho_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho} + \sigma_{\mu\rho}\rho_{\nu\sigma} + \sigma_{\mu\sigma}\rho_{\nu\rho}) + \text{t.q.n.c.r.}, \quad (3.79b)$$

$$P_{22}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \text{t.q.n.c.r.}, \quad (3.79c)$$

$$P_{33}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \text{t.q.n.c.r.}, \quad (3.79d)$$

$$P_{44}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\rho_{\mu\nu}\rho_{\rho\sigma} + \sigma_{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2}(\rho_{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma} + \sigma_{\mu\nu}\rho_{\rho\sigma}) + \text{t.q.n.c.r.}, \quad (3.79e)$$

$$P_{55}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \text{t.q.n.c.r.}, \quad (3.79f)$$

onde t.q.n.c.r. é um acrônimo para “termos que não contribuem para o resíduo”. Da expressão de $\tau_{\mu\nu}$ em termos de v_μ e k_μ (equação (3.28d)), pode-se mostrar que $\tau_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\nu\rho} = 0$. Por isso $P_{22}(2)$ e $P_{33}(2)$ não contribuem para o resíduo, e apenas ρ 's, σ 's e η 's aparecem na expressão final.

Outra observação que deve ser feita é que, para os operadores de mapeamento, a contribuição dos operadores pode ser diagonalizada ($\tilde{P}_{mn} = U_{mm'}P_{m'n'}U_{n'n}^T$) de tal maneira que os projetores rotacionados contribuam com o correspondente autovalor. Dessa maneira, os propagadores podem ser escritos como

$$\Im m \text{Res}(\Pi|_{k^2=0}) = \tilde{\mathcal{S}}^{*\mu\nu} \left[\frac{2}{\alpha - \mu |v \cdot k|} \tilde{P}_{11}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} + \frac{2}{\alpha + \mu |v \cdot k|} \tilde{P}_{44}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \right] \tilde{\mathcal{S}}^{\rho\sigma}. \quad (3.80)$$

É interessante notar que a contribuição dos operadores de mapeamento são responsáveis pela separação dos dois graus de liberdade usuais do gráviton. Isso resulta no fenômeno de birrefringência do vácuo [94, 98]. No caso em que o parâmetro de violação da simetria de Lorentz μ se anula, recuperamos o conhecido propagador do gráviton em 4D.

A separação da dinâmica em graus de liberdades independentes para o modo não-massivo é análogo ao fenômeno que ocorre com as partículas massivas em 3D, na presença de termos de quebra de paridade. Existe, de fato, uma grande semelhança entre partículas massivas em 3D e partículas sem massa em 4D, já que estes compartilham a mesma estrutura de representação do grupo de Poincaré. Assim como em 3D, termos de quebra de paridade fornecem diferentes massas para partículas que propagar-se-iam como dubletes de spin, conforme discutido em [47]. O mesmo papel de quebra de paridade aparece com o propagador do gráviton não-massivo

(3.80) em 4D, onde os modos de helicidades não estão mais relacionados por transformações de CPT.

Para analisar a unitariedade, deve-se lembrar que as fontes são arbitrárias e que \tilde{P}_{11} (2) e \tilde{P}_{44} (2) são operadores independentes. A fim de garantir a positividade da expressão (3.80), devemos impor que os autovalores sejam positivo definidos, independentemente. Isso implica que

$$|\mu(v \cdot p)| < \alpha. \quad (3.81)$$

A condição (3.81) significa, em particular, que as restrições para garantir que essa teoria com violação da simetria de Lorentz esteja de acordo com o requerimento usual da positividade da constante de Newton em 4D. Porém, tal condição é conflitante com o requerimento da equação (3.76). Isso não deveria ser uma surpresa a luz da estreita relação estabelecida entre as teorias com violação da paridade em 3D e a violação da simetria de Lorentz em 4D, com um vetor de quebra com componentes espaciais. De fato, é conhecido que as gravitações topologicamente massivas são consistentes apenas se $\alpha < 0$. No entanto, em 3D o gráviton não-massivo não se propaga e, portanto, não há conflito de unitariedade. Em uma gravitação de Chern-Simons com quebra de simetria de Lorentz em 4D, concluímos, portanto que a propagação de grávitons sem massa e modos massivos advindos da violação da simetria de Lorentz não são compatíveis se formos forçados a impor o requerimento da não-propagação de modos fantasmas.

Ainda que os nossos esforços tenham sido para encontrar as relações corretas dos parâmetros livres da teoria e o vetor de fundo de violação de Lorentz a fim de garantir a ausência de táquions e fantasmas, deve-se enfatizar que essas condições são válidas em nível de árvore, advindo da nossa inspeção dos polos e resíduos dos propagadores livres. Interações e correções em laços podem trazer modos não-físicos que, por sua vez, podem ser suprimidos através de uma nova análise do espectro e encontrando novas condições nos parâmetros corrigidos, de maneira a eliminar os táquions e fantasmas na ação corrigida por *loops*. Portanto, a supressão de fantasmas e táquions deve ser reavaliada em cada ordem em laços na teoria de perturbação.

3.6 Conclusão

Consideramos um modelo Lagrangiano geral para gravitação com derivadas superiores e violação de simetria de Lorentz através da inclusão de termos de Chern-Simons e Ricci-Cotton no formalismo de segunda ordem da gravitação. Foi de nosso interesse investigar as consequências da violação da simetria de Lorentz no espectro de partículas e nas propriedades de unitariedade do modelo.

Para esse objetivo, desenvolvemos um método baseado nos operadores de projeção em graus de liberdades. Essa base proposta torna a análise algebricamente conveniente e a interpretação física dos resultados mais clara. A sugestão de definir operadores nos graus de liberdade fornecem uma flexibilidade maior para a identificação dos modos de excitação da teoria. Essa generalidade é especialmente interessante se o vetor de fundo não for fixado *a priori*, já que nessa situação não temos adiantadamente uma definição para a representação das partículas. No caso em que a violação da simetria de Lorentz é realizada por um vetor de fundo com apenas componentes espaciais, uma simetria residual $SO(1, 2)$ permanece. Nesse caso, os projetores de graus de liberdade se estruturam de tal maneira que excitações planares podem ser prontamente identificadas. Vagamente falando, podemos interpretar esse fato como uma geração dinâmica dos spins das partículas através dos graus de liberdades independentes dos campos.

A violação da simetria CPT ameaça a interpretação dos modos de energia negativos que aparecem nas teorias quânticas de campos. Isso é assunto de debate aprofundado na literatura [91]. Concluimos que um vetor de fundo com $v_0 \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ traz inconsistências para a teoria quântica, já que a energia não é positiva definida para direções arbitrárias de propagação. A situação onde $v_0 = 0$ e $\vec{v} \neq 0$ apresentou excitações não taquiônicas depois de uma revisão dos papéis das simetrias discretas do modelo. Apesar disso, mostramos que esses modos são estados de norma negativa (isto é, fantasmas) e possuem massas da ordem da massa de Planck. Esse fato é um alerta para possíveis inconsistências na versão quântica do modelo. Não obstante, esse modo problemático não deve ser excitado em processos de baixas energias e possivelmente deve-se obter resultados consistente se o modelo for visto como uma teoria efetiva advindo de uma teoria mais fundamental (consistente). O caso restante, onde $v_0 \neq 0$ e $\vec{v} = 0$, que foi objeto de investigação em [94], especificamente a gravitação modificada de Einstein-Hilbert-Chern-Simons propaga somente o gráviton sem massa. Os nossos resultados estão de acordo com Jackiw e Pi que mostraram que as duas polarizações do gráviton se propagam independentemente para essa teoria. O comportamento geral dos termos de (curvatura)² não são alterados pelo termo de Chern-Simons, no sentido que o termo R^2 propaga um modo de spin-0 massivo e o termo de $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ propaga um modo de spin-2 fantasma. O termo de derivada superior de Ricci-Cotton inevitavelmente traz modos fantasmas.

Quando comparado com o resultado da análise da consistência espectral para modelos de eletromagnetismo, temos uma restrição drasticamente diferente para a forma do vetor de fundo. No modelo eletromagnético de Chern-Simons com violação da simetria de Lorentz, foi constatado que um vetor de fundo do tipo-espaço $v^\mu = (0, \vec{v})$ deixa a teoria livre de táquions e fantasmas, mas que um vetor tipo-tempo $v^\mu = (v^0, \vec{0})$ leva a uma teoria quântica inconsistente [97, 110]. Nessa tese, surpreendentemente, concluimos justamente o oposto para modelos gravitacionais estendidos por um termo tipo Chern-Simons com violação de Lorentz: o único modelo livre de táquions e fantasmas é dado por um vetor tipo-tempo da forma $v^\mu = (v^0, \vec{0})$. Isso representa um conflito nas condições de unitariedade, no sentido em que se supusermos que ambas teorias se acoplam com um mesmo vetor v^μ advindo de uma teoria mais fundamental, então o modelo de gravitação e eletromagnético adicionados do termo de Chern-Simons não podem satisfazer a condição de ausência de táquions e fantasmas simultaneamente.

Possíveis extensões que incluam tensores de fundos mais gerais, como considerado na Extensão do Modelo Padrão (*Standard Model Extension*) proposto por Kostelecký e colaboradores [25, 26, 27], poderiam ser abordadas também. No caso de dois vetores de fundo linearmente independentes, teríamos uma violação da simetria de Lorentz da forma $SO(1, 3) \rightarrow U(1)$ e espera-se as excitações não se organizem de forma planar. Tal cenário pode ser relevante quando a violação da simetria de Lorentz for desencadeada por um mecanismo de quebra espontânea da supersimetria [111, 110], uma vez que o segundo vetor de fundo pode aparecer a partir de uma condensação fermiônica. Além disso, presumimos que os operadores nos graus de liberdade podem ser definidos e que o segundo vetor de violação da simetria de Lorentz deve dividir os vetores construtores em três contribuições ortogonais: k_μ , $e_{3\mu}$ e $e_{2\mu}$ de acordo com uma decomposição de Gram-Schmidt.

Uma outra investigação possível, seria de um problema análogo, mas no formalismo de primeira ordem da gravitação, onde a tetrada e a conexão de spin são consideradas como campos independentes. Nessa situação, espera-se uma dificuldade muito maior, já que com a presença dos modos de torção uma pletera de modos de excitação, 2^+ , 2^- , 1^+ , 1^- , 0^+ , 0^- [45, 40] são esperados. No caso, de violação de Lorentz com torção, os modos de polarização de spin poderão se propagar independentemente. Apesar dessa dificuldade, essa linha

de investigação pode ser bastante interessante, haja visto que nesse formalismo existe a possibilidade de se incluir além do termo de Chern-Simons no formalismo de primeira ordem, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_\sigma(R_{\mu\nu\tau\kappa}\omega_\rho^{\tau\kappa} + \frac{2}{3}\omega_{\mu\kappa}^\lambda\omega_{\nu\lambda}^\tau\omega_{\rho\tau}^\kappa)$, outras combinações que não foram contempladas na literatura envolvendo o tensor de Ricci e o tensor de torção: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_\mu T_{\nu\rho}^\tau R_{\sigma\tau}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_\mu R T_{\nu\rho\sigma}$ e $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}v_\mu T_{\nu\tau}^\tau R_{\rho\sigma}$. Certamente, os efeitos da torção dinâmica irão revelar consequências interessantes nesse cenário.

Capítulo 4

Considerações sobre os Modos de Excitação de um Modelo Geral da Gravitação de Hořava-Lifshitz

A recente proposta de Petr Hořava de uma nova classe de modelos para gravitação [28, 29, 112, 113] foi recebida com grande entusiasmo pela comunidade de teoria de campos, gravitação e cosmologia. A grande apreciação por essa classe de modelos, cunhada de gravitação de Hořava-Lifshitz, veio do fato de que esta proposta é candidata a uma teoria quântica de campos consistente para gravitação, uma vez que possui um melhor comportamento no regime ultravioleta. Para chegar a esse resultado, Hořava propôs abandonar a invariância por difeomorfismos como uma simetria fundamental para a gravitação e construir um modelo com propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo no regime ultravioleta. Esta mudança de paradigma na gravitação é discutida na Seção 4.1.

Apesar desse grande furor, logo se percebeu que a formulação original e mais simples da gravitação de Hořava-Lifshitz que impõe a condição de *projetabilidade* e de *balanço detalhado*¹, pode apresentar dificuldades para a descrição fenomenológica e o seu limite de baixas energias pode não corresponder à Relatividade Geral. Essa questão fez surgir uma série de possíveis formulações da gravitação de Hořava-Lifshitz com a inclusão de inúmeros termos com coeficientes arbitrários na formulação da Lagrangiana ou com a introdução de campos auxiliares a fim de modificar a estrutura das simetrias do modelo. Tais diferentes formulações da gravitação de Hořava-Lifshitz são abordadas na Seção 4.2.

A contribuição original desse trabalho é realizada nas Seções 4.3, 4.4 e 4.5 [55]. Buscamos estender os métodos baseados nos operadores de spin compatíveis com as simetrias da gravitação de Hořava-Lifshitz, incluindo os modelos com violação de paridade. Assim como discutido nos Capítulos 2 e 3, a vantagem desse método é poder obter o propagador, que em geral é uma tarefa dispendiosa, de uma maneira sistemática e sem a necessidade de fixação de calibre. Com isso, pode-se avaliar os modos propagantes da teoria, bem como estabelecer condições sobre os coeficientes do Lagrangiano a fim de evitar a propagação de táquions e fantasmas. Por fim, destacamos alguns efeitos dos modos propagantes da gravitação de Hořava-Lifshitz no limite de baixas energias.

Neste capítulo, as letras minúsculas do alfabeto latino (i, j, k, \dots) denotam índices do espaciais $3D$. Usaremos, também, um ponto sobre a variável para representar a derivada

¹As condições de *projetabilidade* e de *balanço detalhado* são possíveis restrições, que podem ser impostas ao modelo, cujas definições serão apresentadas na Seção 4.2.

temporal e ∇_i representa a derivada covariante associada a métrica espacial g_{ij} . R^i_{jkl} , $R_{ij} = R^k_{ikj}$ e $R = g^{ij}R_{ij}$ denotam o tensor de Riemann, Ricci e escalar de curvatura associados a métrica espacial g_{ij} , nessa ordem.

4.1 Propriedade de Escala Anisotrópica do Espaço-Tempo e Difeomorfismos que Preservam a Foliação

Uma das grandes motivações em se considerar modelos estendidos para gravitação, como a gravitação de Hořava-Lifshitz, vêm da dificuldade de se obter uma teoria de gravitação quântica em 4D, que seja simultaneamente renormalizável e unitária. A gravitação de Einstein-Hilbert é uma descrição consistente para gravitação ao nível clássico, porém é conhecido que esta teoria não é renormalizável perturbativamente [114, 33, 115]. Existem modelos relativísticos para a gravitação com termos de derivada superior que são renormalizáveis em 4D [32], porém que esbarram no problema de serem não-unitários.

Vamos olhar essa questão mais de perto. Resultados gerais de teoria de campo, mostram que se a constante de acoplamento de uma teoria possui dimensão [massa]^d, então um diagrama de Feynman de ordem L se comporta no regime de alto momenta como $\int dk k^{A-Ld}$, onde A depende do processo específico, mas não em L [115]. Portanto, em teorias que possuem constante de acoplamento com unidade de massa negativa, como é o caso da constante de Newton ($[G_N] = 1/m^2$), as integrais de espalhamento devem divergir para processos de ordem mais altas. Além disso, o propagador do gráviton na gravitação de Einstein-Hilbert assume a forma geral de

$$\frac{1}{(k^\mu)^2}, \quad (4.1)$$

onde $(k^\mu)^2 = k_\mu k^\mu = \omega^2 - (k^i)^2$ e $k^\mu = (\omega, k^i)$ representa o quadrimomento. Isso faz com que a gravitação de Einstein-Hilbert não satisfaça os testes usuais de renormalizabilidade: Pode ser mostrado que um diagrama com L laços possui termos divergentes proporcionais a uma potência $L + 1$ do tensor de curvatura [115]. Portanto, para que haja o cancelamento das divergências ultravioleta seria necessário um número infinito de contra-termos. Tal fato, caracteriza a teoria como não-renormalizável, ao menos em nível de teoria de perturbação. Mesmo que a gravitação de Einstein-Hilbert possa ser tratada como uma teoria de campos efetiva, o seu regime ultravioleta ainda precisa ser definido consistentemente para uma descrição adequada dos fenômenos de gravitação quântica.

Existe a alternativa de se adicionar termos relativísticos de derivada superior a Lagrangiana da gravitação de Einstein-Hilbert [32, 31], que teriam influência desprezível no domínio de baixa frequência dos experimentos clássicos. Esses termos, além de trazerem novas interações, modificam a estrutura do propagador, que pode ser representado esquematicamente como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k^\mu)^2} + \frac{1}{(k^\mu)^2} G_N (k^\mu)^4 \frac{1}{(k^\mu)^2} + \frac{1}{(k^\mu)^2} G_N (k^\mu)^4 \frac{1}{(k^\mu)^2} G_N (k^\mu)^4 \frac{1}{(k^\mu)^2} + \dots \\ & = \frac{1}{(k^\mu)^2 - G_N (k^\mu)^4}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

No regime de alto momenta, o propagador é dominado pelo fator $1/(k^\mu)^4$, o que melhora as divergências ultravioleta da teoria. De fato, por contagem de potências mostra-se que todas as divergências envolvendo grávitons possuem grau de divergências menor ou igual a quatro [32]. Por outro lado, essa nova estrutura do propagador apresenta outro problema para a

consistência quântica desse modelo – a presença de uma excitação fantasma. O propagador (4.2) possui dois polos

$$\frac{1}{(k^\mu)^2 - G_N (k^\mu)^4} = \frac{1}{(k^\mu)^2} - \frac{1}{(k^\mu)^2 - G_N^{-1}}, \quad (4.3)$$

que correspondem aos grávitons com e sem massa. A diferença de sinal dos termos do lado direito da equação (4.3) implica que um desses modos necessariamente corresponde a um fantasma e, portanto, na violação da unitariedade, ao menos na abordagem de teoria de perturbação. Olhando dessa maneira podemos constatar que o problema da não-unitariedade da gravitação com derivadas de ordem superior parece ser oriundo da introdução de derivadas temporais de ordens mais altas na estrutura do propagador.

Uma alternativa para resolver esse impasse consiste em abandonar a premissa que os propagadores sejam formado por invariantes de Lorentz. Assim, podemos introduzir derivadas espaciais de ordens mais altas, sem necessariamente ter que introduzir derivadas temporais de ordem superior. Desta forma, evitamos a introdução de partículas fantasmas e garantimos que o propagador tenha um comportamento melhor no regime ultravioleta, concomitantemente. Tal solução, já conhecida em sistemas de matéria condensada [116], foi introduzida por Petr Hořava como proposta de teoria quântica de gravitação consistente dentro do contexto das teorias de campos [28, 29].

Para essa nova classe de modelos, os propagadores podem ser escritos esquematicamente como

$$\frac{1}{\omega^2 - c^2 (k^i)^2 - g (k^i)^{2z}}, \quad (4.4)$$

onde consideramos explicitamente a velocidade da luz c , a constante de acoplamento g e o expoente crítico $z > 1$. O denominador do propagador pode conter, também, potências de $(k^i)^2$ entre 1 e z , que não afetam a ideia geral da discussão a seguir.

No regime de altas energias, o termo $c^2 (k^i)^2$ é suprimido em relação a $g (k^i)^{2z}$ e a parte dominante do propagador fica sendo:

$$\frac{1}{\omega^2 - g (k^i)^{2z}}. \quad (4.5)$$

O modelo passa a ter uma propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo definido por um *expoente crítico* $z > 1$, uma vez que nesse regime as transformações de escala devem ser anisotrópicas. Em tal regime, a teoria possui uma propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo:

$$x^i \rightarrow b x^i, \quad t \rightarrow b^z t. \quad (4.6)$$

Além disso, a análise dimensional é colocada num novo contexto: as dimensões canônicas dos objetos serão medidas em unidades de momento espacial $[k^i]$. Também postula-se que as dimensões do espaço-tempo são dadas por:

$$[x^i] = [k^i]^{-1}, \quad [t] = [k^i]^{-z}, \quad (4.7)$$

refletindo uma anisotropia do espaço-tempo.

Essa modificação melhora o comportamento a pequenas distâncias, podendo, para valores apropriados de z , tornar a teoria renormalizável por contagem de potências. O termo

$c^2 (k^i)^2$ pode ser considerado como uma deformação importante desse propagador, que deve ser ressomado como correções perturbativas

$$\frac{1}{\omega^2 - c^2 (k^i)^2 - g (k^i)^{2z}} = \frac{1}{\omega^2 - g (k^i)^{2z}} + \frac{1}{\omega^2 - g (k^i)^{2z}} c^2 (k^i)^2 \frac{1}{\omega^2 - g (k^i)^{2z}} + \dots \quad (4.8)$$

Em baixas energias, o termo $c^2 (k^i)^2$ predomina sobre $g (k^i)^{2z}$, retornando ao regime relativístico, onde $z = 1$. Do ponto de vista do regime infravermelho, os termos de curvatura mais altas representam uma correção à propriedade de escala $z = 1$ e o propagador pode ser interpretado como

$$\frac{1}{\omega^2 - c^2 (k^i)^2 - g (k^i)^{2z}} = \frac{1}{\omega^2 - c^2 (k^i)^2} + \frac{1}{\omega^2 - c^2 (k^i)^2} g (k^i)^{2z} \frac{1}{\omega^2 - c^2 (k^i)^2} + \dots \quad (4.9)$$

Olhando dessa perspectiva, o polo do propagador (4.9) não apresenta modos fantasmas e, ao contrário das teorias relativísticas com derivada superior, derivadas temporais de ordem mais altas não aparecem. Entende-se, também, que a simetria de Lorentz deve aparecer como uma simetria emergente a longas distâncias, mas que pode estar ausente no regime de altas energias.

Com essas ideias em mente, podemos buscar um modelo Lagrangiano para gravitação que possa ter a estrutura do propagador (4.4) em (1+3)-dimensões. Além disso, a teoria deve ter propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo $z > 1$ no regime ultravioleta, com z apropriado para assegurar a renormalização por contagem de potências. Em tal situação, a invariância por difeomorfismos

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu (t, x^i) \quad (4.10)$$

não pode ser uma simetria fundamental da teoria, haja visto que a dimensão temporal tem um papel privilegiado em teorias com propriedade anisotrópica do espaço-tempo. Assim, deve-se introduzir uma estrutura adicional à variedade espaço-temporal \mathcal{M} : uma foliação tridimensional preferencial de superfícies tipo-espaço \mathcal{F} . O grupo de transformações adaptado as foliações é um subgrupo dos difeomorfismos caracterizado por reparametrizações temporais sem dependência espacial e os difeomorfismos puramente espaciais:

$$t \mapsto \tilde{t} (t), \quad x_i \mapsto \tilde{x}^i (t, x^i), \quad (4.11)$$

Este conjunto de transformações é conhecido na literatura como *difeomorfismos que preservam a foliação* e denotado por $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Localmente, as transformações $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ são dadas por:

$$\delta t = f (t), \quad \delta x^i = \xi^i (t, x^j). \quad (4.12)$$

Para definir um modelo Lagrangiano com tal simetria é conveniente utilizar a decomposição ADM (Arnowitt-Deser-Misner) [117]. Na convenção que adotaremos, a métrica espaço-temporal 4D ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ é decomposta em termos dos campos lapso \mathcal{N} , deslocamento N_i e a métrica espacial g_{ij} como

$$ds^2 = (\mathcal{N}^2 - N_i N^i) dt^2 - 2N_i dx^i dt - g_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.13)$$

Dada a equação (4.13), podemos relacionar os campos da decomposição ADM com o inverso da métrica quadridimensional por

$${}^{(4)}g^{00} = \frac{1}{\mathcal{N}^2}, \quad {}^{(4)}g^{0i} = -\frac{N^i}{\mathcal{N}^2}, \quad {}^{(4)}g^{ij} = -g^{ij} + \frac{N^i N^j}{\mathcal{N}^2}, \quad (4.14)$$

e o determinante da métrica espaço-temporal é dada por

$$\sqrt{-\det^{(4)}g_{\mu\nu}} = \mathcal{N} \sqrt{\det g_{ij}}. \quad (4.15)$$

Sob as transformações de reparametrização infinitesimais dada pelas equações (4.12), os campos da decomposição ADM se transformam como:

$$\delta\mathcal{N} = \xi^j \partial_j \mathcal{N} + \dot{f} \mathcal{N} + f \dot{\mathcal{N}}, \quad (4.16a)$$

$$\delta N_i = \partial_i \xi^j N_j + \xi^j \partial_j N_i + \dot{\xi}^j g_{ij} + \dot{f} N_i + f \dot{N}_i, \quad (4.16b)$$

$$\delta g_{ij} = \partial_i \xi^k g_{jk} + \partial_j \xi^k g_{ik} + \xi^k \partial_k g_{ij} + f \dot{g}_{ij}. \quad (4.16c)$$

Com as dimensões do espaço-tempo anisotrópicas (4.7), devemos ter necessariamente que a unidade da função deslocamento N^i tenha a dimensão de

$$[N^i] = [c] = \frac{[dx^i]}{[dt]} = [k]^{z-1}. \quad (4.17)$$

Já o campo lapso \mathcal{N} e a métrica espacial, podem ser escolhidos como sendo adimensionais,

$$[\mathcal{N}] = [g_{ij}] = 1. \quad (4.18)$$

4.2 Formulações da Gravitação de Hořava-Lifshitz

Uma vez estabelecido os princípios básicos da teoria, podemos buscar classes de modelos compatíveis com a invariância por difeomorfismos que preservam a foliação (4.11) e que possuam propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo (4.6) com $z > 1$ no regime ultravioleta. Essas duas condições possibilitam a construção de uma grande quantidade de termos independentes, que possuem coeficientes arbitrários no modelo Lagrangiano.

Para isso, vamos enumerar os possíveis termos Lagrangianos compatíveis com a simetria de difeomorfismos que preservam a foliação (4.11). Começemos com $K_{ij}K^{ij}$ e $K^2 = (g^{ij}K_{ij})^2$, que são escritos em termos da curvatura extrínseca

$$K_{ij} = \frac{1}{2\mathcal{N}} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i). \quad (4.19)$$

K_{ij} é covariante sob difeomorfismos espaciais e transforma-se como um escalar sob reparametrizações temporais. Os termos $K_{ij}K^{ij}$ e $K^2 = (g^{ij}K_{ij})^2$ são designados de *termos cinéticos*, devido ao fato de possuírem derivadas temporais da métrica espacial.

A ação cinética é montada com esses dois termos e o elemento de volume invariante $dt d^3x \sqrt{g} \mathcal{N}$,

$$\mathcal{S}_K = g_K \int dt d^3x \sqrt{g} \mathcal{N} (K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2), \quad (4.20)$$

em que λ é um parâmetro livre na gravitação de Hořava-Lifshitz. O limite $\lambda = 1$ corresponde aos termos cinéticos da ação de Einstein-Hilbert na decomposição ADM. Utilizando as dimensões do espaço-tempo anisotrópicas (4.7), (4.17) e (4.18) mostra-se que $[K_{ij}] = [k]^z$ e, então

$$[\mathcal{S}_K] = [g_K] [t] [x]^3 [K_{ij}]^2 = [g_K] [k]^{z-3} \quad (4.21)$$

A ação cinética é escolhida ser adimensional por definição e, por conseguinte, para que a constante de acoplamento seja adimensional é necessário impor que $z = 3$. Esta é justamente

a condição mínima para que a gravitação de Hořava-Lifshitz seja renormalizável por contagem de potências em (1+3)D.

Os termos que não contêm derivadas temporais são denominados de *termos potenciais*. Os termos construídos somente com a métrica espacial g_{ij} (até a dimensão canônica $[k]^6$) foram enumerados na Referência [118]:

$$[k]^6 : R^3, \quad RR^i{}_j R^j{}_i, \quad R^i{}_j R^j{}_k R^k{}_i, \quad R\nabla^2 R, \quad \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} \quad (4.22a)$$

$$[k]^5 : \epsilon^{ijk} R_{il} D_j R_k^l, \quad K_{ij} R^{ij}, \quad (4.22b)$$

$$[k]^4 : R^2, \quad R^{ij} R_{ij}, \quad \nabla^2 R, \quad (4.22c)$$

$$[k]^3 : \epsilon^{ijk} \left(\Gamma_{im}^l \partial_j \Gamma_{kl}^m + \frac{2}{3} \Gamma_{il}^n \Gamma_{jm}^l \Gamma_{kn}^m \right), \quad (4.22d)$$

$$[k]^2 : R, \quad (4.22e)$$

$$[k]^0 : 1. \quad (4.22f)$$

Os termos quadráticos do tensor de Riemann não aparecem nessa lista devido ao fato de que em 3D o tensor de Riemann pode ser escrito em termos do tensor de Ricci e do escalar de curvatura.

A lista dos termos (4.22a)-(4.22f) não esgota todas as possibilidades de termos potenciais. De fato, Blas, Pujolás e Sibiryakov mostraram nas Referências [119, 120] que termos envolvendo o objeto

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{\mathcal{N}} \partial_i \mathcal{N} \quad (4.23)$$

forneem deformações relevantes e que, portanto, devem ser incluídos na ação da gravitação de Hořava-Lifshitz. O objeto (4.23) se transforma covariantemente sob difeomorfismos que preservam a foliação. As Referências [119, 120] indicam que a gravitação Hořava-Lifshitz incrementada desse objeto tem a possibilidade de resolver o problema do acoplamento forte do modo de spin-0 e tornar a teoria viável do ponto de vista fenomenológico.

Os termos potenciais construídos com \mathcal{A}_i são:

$$[k]^6 : (\mathcal{A}_i \mathcal{A}^i)^3, \quad (\mathcal{A}_i \mathcal{A}^i)^2 R, \quad \mathcal{A}^i \mathcal{A}_i \mathcal{A}^j \mathcal{A}^k R_{jk}, \quad \mathcal{A}_i \nabla^4 \mathcal{A}^i, \quad (4.24a)$$

$$[k]^5 : K^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j, \quad K^{ij} \nabla_i \mathcal{A}_j, \quad K \nabla_i \mathcal{A}^i, \quad \epsilon^{ijk} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_l \nabla_j R^l{}_k, \quad (4.24b)$$

$$[k]^4 : \mathcal{A}_i \nabla^2 \mathcal{A}_i, \quad (\mathcal{A}_i \mathcal{A}^i)^2, \quad \mathcal{A}^i \mathcal{A}^j R_{ij}, \quad (4.24c)$$

$$[k]^2 : \mathcal{A}_i \mathcal{A}^i. \quad (4.24d)$$

Os termos que se acoplam com a curvatura K_{ij} têm a propriedade de serem ímpares sob transformação T e CPT. Além desses, existe a possibilidade de se adicionar termos contendo derivadas mais altas do objeto \mathcal{A}_i ,

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_n} = \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \dots \nabla_{i_n} \ln(\mathcal{N}), \quad (4.25)$$

cujas listas de termos contém:

$$[k]^6 : (\mathcal{A}^i{}_i)^3, \quad \mathcal{A}_{ijk} \mathcal{A}^{ijk}, \quad (\mathcal{A}^i{}_i) R, \dots \quad (4.26a)$$

$$[k]^5 : K^{ij} \mathcal{A}_{ij}, \quad (4.26b)$$

$$[k]^4 : (\mathcal{A}^i{}_i)^2, \quad (\mathcal{A}_i \mathcal{A}^i) \mathcal{A}^j{}_j, \quad \mathcal{A}^{ij} \mathcal{A}_{ij}, \quad R \mathcal{A}^i{}_i. \quad (4.26c)$$

O número de termos independentes compatíveis com os difeomorfismos que preservam a foliação de dimensão ≤ 6 é superior a 70 [121, 122].

Dado esse grande número de termos independentes, algumas simetrias adicionais podem ser impostas a fim de restringir a teoria. Por isso, ao se referir a gravitação de Hořava-Lifshitz deve ser especificar claramente qual formulação está sendo considerada. Uma restrição que foi considerada na formulação original de Hořava é a condição de balanço detalhado (*detailed balance*), que impõe que os termos dependentes da métrica espacial sejam da forma

$$\mathcal{L}_V = \mathcal{E}^{ij} \mathcal{G}_{ijkl} \mathcal{E}^{kl}, \quad (4.27)$$

onde \mathcal{E}^{ij} é advindo de um princípio variacional,

$$\sqrt{g} \mathcal{E}^{ij} = \frac{\delta W_g}{\delta g_{ij}}, \quad (4.28)$$

e \mathcal{G}_{ijkl} denota a métrica generalizada de De Witt, definida por

$$\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{1}{2} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) - \lambda g_{ij} g_{kl}, \quad (4.29)$$

em que λ é uma constante de acoplamento. A motivação por tal restrição tem suas origens em modelos de teoria de campos na matéria condensada [123]. Tal condição, além de diminuir o número de constantes arbitrárias do modelo, pode implicar numa simplificação das propriedades de renormalização da teoria [29, 124].

Outra restrição que modifica significativamente a estrutura da gravitação de Hořava-Lifshitz é a condição de projetabilidade. Esta condição impõe que a função lapso \mathcal{N} seja dependente apenas da coordenada temporal,

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(t). \quad (4.30)$$

Interpretando a função lapso como o campo de calibre associado às transformações $t \mapsto \tilde{t}(t)$, parece natural restringir esse campo com a mesma dependência do espaço-tempo que as reparametrizações temporais. Evidentemente, a condição de projetabilidade evita a presença de termos no Lagrangiano que envolvam a derivadas espacial de \mathcal{N} e, portanto, diminui o número de parâmetros livres da teoria. Além disso, com essa condição é possível estabelecer $\mathcal{N} = 1$ por fixação de calibre. Tal condição pode ser obtida na Relatividade Geral com as reparametrizações por difeomorfismos. Com a invariância por difeomorfismos que preservam a foliação (4.11), isso não seria possível, haja visto que esta envolve apenas reparametrizações temporais, que não dependem das coordenadas espaciais.

A condição de balanço detalhado e de projetabilidade não são mandatórias na gravitação de Hořava-Lifshitz e modificam consideravelmente as propriedades da teoria. Apesar dessas duas condições simplificarem a estrutura da teoria, estas podem não ser compatíveis com considerações fenomenológicas [125, 126, 127]. A condição de balanço detalhado implica na ausência de uma solução de vácuo de de Sitter [128] e em possíveis dificuldades de se acoplar matéria à teoria [129]. Já a condição de projetabilidade, implica que o modo extra de spin-0 seja um modo fantasma [127], que traz instabilidades na teoria quântica. Além disso, esse modo spin-0 se acopla fortemente, o que pode trazer dificuldades para ter um limite infravermelho compatível com as observações fenomenológicas [130, 126]. Conforme discutido nos trabalhos de Mukohyama [131], a condição de projetabilidade também traz uma descontinuidade vDVZ (van Dam-Veltman-Zakharov) [132, 133] semelhante ao que ocorre na gravitação massiva de Pauli-Fierz [134, 135]. Algumas considerações sobre o espectro da teoria com a condição de projetabilidade são realizadas na Seção 4.4.

Hořava e Melby-Thompson propuseram uma abordagem completamente diferente para a gravitação de Hořava-Lifshitz [112, 113]. Sabendo dos problemas advindos do modo propagante de spin-0, eles propuseram estender a simetria de difeomorfismos que preservam a foliação para

$$U(1) \times \text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{F}). \quad (4.31)$$

Tal simetria está presente na versão linearizada da teoria com $\lambda = 1$ (na equação (4.20)) e pela contagem dos graus de liberdade o modo de spin-0 não deve se propagar nessa situação. De fato, isso foi mostrado explicitamente em [112]. Para estender essa simetria para a versão não-linear da teoria é necessário a introdução de um campo de calibre A e de um campo escalar auxiliar ν , conhecido como prepotencial Newtoniano. Esse modelo possui o mesmo número de graus de liberdade que a gravitação de Einstein-Hilbert e, por isso, é conhecido na literatura como gravitação covariante de Hořava-Lifshitz.

Ao contrário do que pensavam em sua formulação original, a gravitação de Hořava-Lifshitz com a simetria estendida (4.31) não implica necessariamente que $\lambda = 1$. De fato, da Silva demonstrou que é possível construir uma classe de modelos compatíveis com (4.31), inclusive com acoplamento com a matéria [136, 137]. A versão dessa teoria sem a condição de projetabilidade é estudada na Referência [122].

Ainda que considerações bastante interessantes possam ser feitas na gravitação de Hořava-Lifshitz com restrições, estaremos interessados principalmente na formulação sem as condições de balanço detalhado e projetabilidade. Também não analisaremos a gravitação covariante de Hořava-Lifshitz. Permitir inúmeros termos Lagrangianos pode tornar a tarefa de se obter o propagador e analisar as propriedades espectrais numa tarefa bastante árdua. Usando métodos de operadores de spin, esta análise pode ser feita de um modo sistemático e simplificado.

4.3 Decomposição dos Modos Propagantes do Gráviton

Tendo definido a estrutura dos modelos de gravitação de Hořava-Lifshitz e seus campos fundamentais, podemos nos concentrar em construir, de modo análogo aos capítulos anteriores, um conjunto de operadores para a decomposição e análise dos modos de excitação da teoria. Neste trabalho, consideraremos como campo de fundo o espaço de Minkowski. Em torno dessa solução podemos realizar uma expansão de campo fraco

$$\mathcal{N} = 1 + n, \quad g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}, \quad (4.32)$$

onde n e h_{ij} são as flutuações quânticas do modelo da função lapso e da métrica espacial, respectivamente. A função deslocamento N_i é a própria flutuação quântica.

A quebra da simetria de Lorentz $SO(1,3)$ da teoria linearizada para $SO(3)$ tem consequências não-triviais, especialmente na interpretação dos modos propagantes. Uma teoria quântica de campos relativística usual é invariante sob transformações de Poincaré. Isso provê a classificação para as partículas como representações unitárias e irredutíveis do grupo de Poincaré pelos números quânticos: massa e spin. O spin é caracterizado pelas representações unitárias de grupo de isotropia (*little group*) de $SO(1,3)$, isto é, o subgrupo do grupo de Lorentz que deixa invariante o quadrimomento representativo que a partícula pertença. Para o caso de partículas massivas em $1 + 3$ dimensões, podemos escolher um representante do quadrimomento da classe de equivalência por $k^\mu = (m, \vec{0})$, de modo que o grupo de isotropia é dado por $SO(3)$. Para o caso não massivo, o quadrimomento característico pode ser $k^\mu = (E, 0, 0, E)$. Nesse caso, o grupo de isotropia é o grupo Euclidiano bidimensional, $ISO(2)$, consistindo das rotações e translações em duas dimensões (vide [138]).

Para as classes de modelo da gravitação de Hořava-Lifshitz podemos proceder da mesma maneira. Separamos os modos propagantes “no que seria o spin”, definido pelo subgrupo do grupo das rotações que deixam um vetor representativo de momento espacial invariante. Então, para separar os graus de liberdade nesses modos de spin podemos construir um conjunto completo de operadores para modelos com propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo. Para tal, é sensato utilizar os operadores de Barnes-Rivers para modelos relativísticos tridimensionais ($SO(1,2)$) [40] e adaptá-los para modelos que tenham simetria do grupo de rotações tridimensional ($SO(3)$). Isso pode implementado através da substituição

$$\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \rightarrow \delta_{ij}, \quad k_{\hat{\mu}} \rightarrow k_i, \quad (4.33)$$

onde $\hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, 1, 2$ e $i, j = 1, 2, 3$. $k_{\hat{\mu}}$ é o momento relativístico em (1+2)D e k_i é o momento espacial em 3D. Por exemplo, nessa situação o operadores transverso θ_{ij} e longitudinal ω_{ij} , que são os blocos construtores para os operadores de Barnes-Rivers, podem ser escritos como

$$\theta_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij}, \quad (4.34a)$$

$$\omega_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (4.34b)$$

com $k^2 = k_i k_i$.

Desta maneira, podemos organizar em forma de matriz os operadores de projeção para gravitação de Hořava-Lifshitz de acordo com o respectivo setor de spin ($P(0)$, $P(1)$, $P(2)$), já que as possíveis representações de spin contidas nos campos dessa teoria são $n \in \underline{0}$, $N_i \in \underline{0} \oplus \underline{1}$, $h_{ij} \in \underline{0} \oplus \underline{1} \oplus \underline{2}$. No caso de modelos Lagrangianos que preservam a paridade esses operadores são dados por:

$$P(0) = \begin{matrix} h_{ij} \\ h_{ij} \\ N_i \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} h_{kl} & h_{kl} & N_k & n \\ \frac{1}{2}\theta_{ij}\theta_{kl} & \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{ij}\omega_{kl} & \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{ij}\bar{k}_k & \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{ij} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{ij}\theta_{kl} & \omega_{ij}\omega_{kl} & \omega_{ij}\bar{k}_k & \omega_{ij} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}_i\theta_{kl} & \bar{k}_i\omega_{jk} & \omega_{ik} & \bar{k}_i \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{kl} & \omega_{kl} & \bar{k}_k & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.35a)$$

$$P(1) = \begin{matrix} h_{ij} \\ N_i \end{matrix} \begin{bmatrix} h_{kl} & N_k \\ \frac{1}{2}(\theta_{ik}\omega_{jl} + \theta_{jk}\omega_{il} + \theta_{il}\omega_{jk} + \theta_{jl}\omega_{ik}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_{ik}\bar{k}_j + \theta_{jk}\bar{k}_i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_{ik}\bar{k}_l + \theta_{il}\bar{k}_k) & \theta_{ik} \end{bmatrix}, \quad (4.35b)$$

$$P^{hh}(2) = \frac{1}{2}(\theta_{ik}\theta_{jl} + \theta_{il}\theta_{jk} - \theta_{ij}\theta_{kl}), \quad (4.35c)$$

onde definimos $\bar{k}_i = \frac{k_i}{\sqrt{k^2}}$ para simplificar a notação.

Acontece que existe a possibilidade de inclusão de termos que violam paridade na gravitação de Hořava-Lifshitz. Essas deformações aparecem tanto na formulação original proposta por Hořava como em subsequentes modificações. Em geral, tais termos são caracterizados pela presença do símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} e estes não podem ser escritos em função dos projetores de Barnes-Rivers $SO(3)$, uma vez que o tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} é um bloco construtor independente de θ e ω .

Uma maneira de lidar com essa situação é notar que com a presença de termos que violam paridade, os modos transversos podem se propagar independentemente e não como dubletes de paridade (conforme discutido na Referência [46], testado na Referência [47] e

apresentado com detalhes em [41]). Na prática, os dois graus de liberdade do operador θ podem ser divididos por dois operadores ortonormais

$$\theta_{ij} = \rho_{ij} + \sigma_{ij}, \quad (4.36)$$

satisfazendo $\rho^2 = \rho$, $\sigma^2 = \sigma$ e $\rho \cdot \sigma = 0$. Essa decomposição é útil para lidar com termos que violam paridade, inclusive os termos contendo o símbolo ϵ , já que ρ e σ podem ser definidos de tal modo a satisfazer

$$\epsilon_{ijk} k_k = \epsilon_{pqr} (\rho_{ip} \sigma_{jq} + \sigma_{ip} \rho_{jq}) k_r. \quad (4.37)$$

Os operadores nos graus de liberdade para modelos relativísticos planares (teorias com simetria $SO(1,2)$) com termos que violam paridade foram desenvolvidos na Referência [46] e podem ser adaptados convenientemente para modelos de gravitação Hořava-Lifshitz com violação de paridade. No caso particular desses operadores para os campos da decomposição ADM, obtém-se,

$$P(1) = \begin{matrix} h_{ij}(+) \\ h_{ij}(-) \\ N_i(+), N_i(-) \end{matrix} \begin{bmatrix} h_{kl}(+) & h_{kl}(-) & N_k(+) & N_k(-) \\ 2\rho_{ik}\omega_{jl} & 2\epsilon_{pqr}\rho_{ip}\sigma_{kq}\omega_{jl}\bar{k}_r & \sqrt{2}\rho_{ik}\bar{k}_j & \sqrt{2}\epsilon_{pqr}\rho_{ip}\sigma_{kq}\omega_{jr} \\ 2\epsilon_{pqr}\sigma_{iq}\rho_{kp}\omega_{lj}\bar{k}_r & 2\sigma_{ik}\omega_{jl} & \sqrt{2}\epsilon_{pqr}\sigma_{iq}\rho_{kp}\omega_{jr} & \sqrt{2}\sigma_{ik}\bar{k}_j \\ \sqrt{2}\rho_{ik}\bar{k}_l & \sqrt{2}\epsilon_{pqr}\sigma_{kq}\rho_{ip}\omega_{lr} & \rho_{ik} & \epsilon_{pqr}\rho_{ip}\sigma_{kq}\bar{k}_r \\ \sqrt{2}\epsilon_{pqr}\rho_{kp}\sigma_{iq}\omega_{lr} & \sqrt{2}\sigma_{ik}\bar{k}_l & -\epsilon_{pqr}\sigma_{ip}\rho_{jq}\bar{k}_r & \sigma_{ik} \end{bmatrix} \quad (4.38a)$$

$$P(2) = \begin{matrix} h_{ij}(+) \\ h_{ij}(-) \end{matrix} \begin{bmatrix} h_{kl}(+) & h_{kl}(-) \\ \frac{1}{2}(\rho_{il}\rho_{jk} + \sigma_{il}\sigma_{jk} - \rho_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\rho_{kl}) & \epsilon_{pqr}(\rho_{ki}\sigma_{lq}\rho_{jp} - \sigma_{kj}\rho_{lp}\sigma_{iq})\bar{k}_r \\ \epsilon_{pqr}(\rho_{ik}\sigma_{jq}\rho_{lp} - \sigma_{il}\rho_{jp}\sigma_{kq})\bar{k}_r & 2\rho_{ik}\sigma_{jl} \end{bmatrix} \quad (4.38b)$$

Nas matrizes (4.38a)-(4.38b) fica subentendido que os operadores possuem as mesmas propriedades de simetria (com o fator numérico) dos campos associados.

Vale a pena enfatizar que os operadores de projeção adaptado a gravitação de Hořava-Lifshitz (4.35a)-(4.35c) e (4.38a)-(4.38b) foram construídos de modo a satisfazer a relação de ortogonalidade e a decomposição da unidade:

$$\sum_{\beta} P_{mm'}(I)_{\alpha\beta} P_{n'n}(J)_{\beta\gamma} = \delta_{m'n'} P_{mn}(I)_{\alpha\gamma}, \quad I, J = 0, 1, 2 \quad (4.39a)$$

$$\sum_{m,J} P_{mm}(J)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.39b)$$

em que os índices latinos m, n, m', n' indexam os operadores e os índices gregos $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ representam genericamente índices tensoriais, vetoriais ou ausência de índices espaciais.

4.4 Obtenção dos Propagadores e Análise do Espectro de Partículas para um Modelo Geral da Gravitação de Hořava-Lifshitz

O estudo dos propagadores de uma teoria fornece os ingredientes principais para o entendimento dos processos de espalhamento de uma teoria. A análise das propriedades do espectro de partículas para modelos de gravitação de Hořava-Lifshitz pode ser seguida da mesma maneira que a análise dos Capítulos 2 e 3, dada as modificações necessárias. Em particular,

a teoria em questão não é covariante pela simetria de Lorentz. Isso implica que as condições para garantir a ausência de táquions e fantasmas em nível de árvore devem ser revistas cuidadosamente.

O primeiro fato que devemos atentar é que a estrutura geral da Lagrangiana quadrática é dada por

$$(\mathcal{L})_2 = \sum_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \mathcal{O}_{\alpha\beta} \varphi_\beta + \sum_{\alpha} \varphi_\alpha \mathcal{S}_\alpha, \quad (4.40)$$

onde o operador de onda $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ é um operador diferencial local, $\varphi_\alpha = \{h_{ij}, N_i, n\}$ são as flutuações quânticas do modelo e $\mathcal{S}_\alpha = \{\mathcal{S}_{ij}, \mathcal{S}_i, \mathcal{S}\}$ são as fontes de matéria da métrica espacial, do campo deslocamento e lapso, respectivamente. Com o conjunto de operadores adaptado à gravitação de Hořava-Lifshitz $P_{mn}^{\varphi\psi}(J)$ (Eqs. (4.35a)-(4.35c) e (4.38a)-(4.38b)) podemos decompor o operador de onda $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ no espaço de momenta:

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \sum_{mn,J} a(J)_{mn} P_{mn}^{\varphi\psi}(J)_{\alpha\beta}, \quad (4.41)$$

onde $a_{mn}(J)$ são os coeficientes da expansão do operador de onda. Os operadores diagonais $P_{mn}^{\varphi\varphi}$ são projetores no setor de spin- J associados ao campo φ e os operadores fora da diagonal $P_{mn}^{\varphi\psi}(J)$ ($m \neq n$) implementam o mapeamento dentro do subespaço de spin- J entre os campos φ e ψ . As propriedades (4.39a) e (4.39b) satisfeitas pelos operadores facilitam a tarefa da inversão do operador. No caso em que as matrizes de coeficientes são inversíveis, o propagador saturado com fontes externas \mathcal{S}_α é dado por:

$$\Pi = i \sum_{\alpha\beta, mn, J} \mathcal{S}_\alpha^* a(J)_{mn}^{-1} P_{mn}(J)_{\alpha\beta} \mathcal{S}'_\beta. \quad (4.42)$$

Não obstante, as matrizes $a_{mn}(J)$ podem ser degeneradas devido às simetrias de calibre do modelo Lagrangiano. Esse fato não representa grandes dificuldades para a obtenção do propagador haja visto que em tais casos, as fontes satisfazem vínculos de modo a inibir a propagação de modos não-físicos. Com isso em mente, pode-se verificar que o procedimento correto para a obtenção do propagador consiste em inverter qualquer submatriz (que denotamos por $A_{mn}(J)$) de dimensão igual ao posto da matriz $a_{mn}(J)$. Na prática, basta remover as colunas e linhas degeneradas de acordo com o número de graus de liberdade da simetria de calibre, inverter $A_{mn}(J)$ e saturá-la com fontes físicas para obter o propagador:

$$\Pi = i \sum_{\alpha\beta, mn, J} \mathcal{S}_\alpha^* A(J)_{mn}^{-1} P_{mn}(J)_{\alpha\beta} \mathcal{S}'_\beta. \quad (4.43)$$

Os modelos de teoria quântica de campos com propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo possuem polos nos propagadores dados pela forma geral,

$$\omega^2 - Q(k) = 0, \quad (4.44)$$

onde Q representa uma função polinomial ou racional do módulo do momento espacial k . Então, para cada modo propagante, exigimos que $Q(k) \geq 0$ para todo momento k , para garantir que este não seja um táquion. No limite de baixas energias, os termos que contém momento mais alto se tornam menos relevantes e a relação de dispersão se simplifica a

$$\omega^2 - c^2 k^2 = 0. \quad (4.45)$$

Neste caso, exigiremos que a velocidade de propagação seja positiva $c^2 \geq 0$.

Por outro lado, a condição para garantir a ausência de partículas fantasmas pode ser obtida de maneira análoga a análise realizada no Capítulo 2,

$$(-1)^P \text{tr} A(J, Q)_{mn}^{-1}|_{\text{polo}} > 0. \quad (4.46)$$

onde P é a paridade associada ao operador de spin e $A_{mn}^{-1}(J, Q)$ é a inversa da matriz $A_{mn}(J)$ com o polo $\omega^2 = Q(k)$ extraído. Conforme ressaltado anteriormente, a condição (4.46) transforma a análise das condições de unitariedade, que em geral é uma tarefa dispendiosa, num problema algébrico de analisar as matrizes de coeficientes.

Com essas considerações, podemos estabelecer um modelo geral da gravitação de Hořava-Lifshitz, explicitando somente os termos que afetam o propagador

$$S_{HL} = \int dt d^3x \sqrt{g} \mathcal{N} (\alpha K_{ij} K^{ij} + \beta K^2 + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_A), \quad (4.47)$$

onde os termos do potencial, que estão exclusivamente relacionados com a métrica espacial são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g &= a_1 R + b_1 R_{ij} R^{ij} + c_1 R^2 + a_2 \Delta R + b_2 R_{ij} \Delta R^{ij} \\ &+ c_2 R \Delta R + a_3 \Delta^2 R + \mu \mathcal{L}_{CS} + \lambda \mathcal{L}_{RC}, \end{aligned} \quad (4.48a)$$

e o termo tipo Chern-Simons lê

$$\mathcal{L}_{CS} = \epsilon^{ijk} \left(\Gamma_{ip}^l \partial_j \Gamma_{kl}^p + \frac{2}{3} \Gamma_{il}^q \Gamma_{jp}^l \Gamma_{kq}^p \right), \quad (4.48b)$$

enquanto o termo de Ricci-Cotton é escrito como

$$\mathcal{L}_{RC} = \epsilon^{ijk} R_{il} D_j R_k^l. \quad (4.48c)$$

O Lagrangiano relacionado com \mathcal{A}_i pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= r K^{ij} \nabla_i \mathcal{A}_j + s K \nabla_i \mathcal{A}^i + u_1 R \nabla_i \mathcal{A}^i + u_2 \Delta R \nabla_i \mathcal{A}^i \\ &+ \eta_1 \mathcal{A}_i \mathcal{A}^i + \eta_2 \mathcal{A}_i \Delta \mathcal{A}^i + \eta_3 \mathcal{A}_i \Delta^2 \mathcal{A}^i. \end{aligned} \quad (4.48d)$$

Devemos enfatizar, que nesse ponto, não vamos adotar a postura de evitar a discussão com os termos que violam a simetria P, T ou CPT. Julgamos interessante discutir como a presença desses termos modificam as relações de dispersão dos modos propagantes.

Dado o modelo Lagrangiano definido pela equação (4.47), podemos obter o operador de onda através de uma série de manipulações algébricas (incluindo integrações por partes), de modo a colocá-lo nos moldes da equação (4.40). Em sequência, decompomos o operador de onda na forma (4.41) com auxílio das identidades fornecidas no Apêndice C.

Algumas observações devem ser feitas. Para obtenção da matriz de coeficientes do setor de spin-1 pode-se notar que não há necessidade de decompor os modos propagantes nos graus de liberdade, já que não há contribuição dos termos que violam paridade nesse setor. Então, por simplicidade, utilizaremos os operadores que preservam paridade (4.35b). Por outro lado, os termos de Chern-Simons e Ricci-Cotton que violam paridade (equações (4.48b) e (4.48c)) afetam o setor de spin-2. Isso exige que utilizemos os operadores nos graus de liberdade (4.38b) nesse setor. Com isso em mente, escrevemos as matrizes de coeficientes do operador de onda,

$$a(2) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} (a - bk^2) k^2 & -ik^2 (\mu + \frac{1}{2} \lambda k^2) \sqrt{k^2} \\ ik^2 (\mu + \frac{1}{2} \lambda k^2) \sqrt{k^2} & \frac{\alpha}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} (a - bk^2) k^2 \end{pmatrix}, \quad (4.49a)$$

$$a(1) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}\omega^2 & -\alpha\omega\frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{2}} \\ -\alpha\omega\frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{2}} & \alpha k^2 \end{pmatrix}, \quad (4.49b)$$

$$a(0) = \begin{pmatrix} (\frac{\alpha}{2} + \beta)\omega^2 + \frac{1}{2}Ak^2 & \frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 & -\beta\omega\sqrt{2k^2} & \sqrt{2}(a - uk^2)k^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}si\omega k^2 \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega^2 & -(\alpha + \beta)\omega\sqrt{k^2} & \frac{1}{2}(r + s)i\omega k^2 \\ -\beta\omega\sqrt{2k^2} & -(\alpha + \beta)\omega\sqrt{k^2} & 2(\alpha + \beta)k^2 & -(r + s)ik^2\sqrt{k^2} \\ \sqrt{2}(a - uk^2)k^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}si\omega k^2 & -\frac{1}{2}(r + s)i\omega k^2 & (r + s)ik^2\sqrt{k^2} & 2\eta k^2 \end{pmatrix}, \quad (4.49c)$$

onde redefinimos alguns coeficiente para simplificar a notação:

$$a = a_1 - a_2k^2 + a_3k^4, \quad (4.50a)$$

$$b = b_1 - b_2k^2, \quad (4.50b)$$

$$c = c_1 - c_2k^2, \quad (4.50c)$$

$$u = u_1 - u_2k^2, \quad (4.50d)$$

$$\eta = \eta_1 - \eta_2k^2 + \eta_3k^4, \quad (4.50e)$$

$$A = a + (3b + 8c)k^2. \quad (4.50f)$$

Conforme mencionado no Capítulo 2, a estrutura de degenerescência das matrizes (4.49a)-(4.49c) fornece informações sobre as simetrias de calibre e os vínculos satisfeitos pelas fontes do modelo. Em particular, a matriz de spin-1 é degenerada e a 2^a e 3^a linha e coluna da matriz de spin-0 são proporcionais. Somando o resultado da expressão (2.28) para essas duas matrizes obtemos

$$\frac{\omega}{2}\mathcal{S}_j + k_i\mathcal{S}_{ij} = 0. \quad (4.51)$$

Como um teste de consistência, podemos verificar que para o caso da gravitação de Einstein-Hilbert, onde $\alpha = -\beta = a_1 = \frac{1}{16\pi G}$ e todos os outros coeficientes identicamente nulos, surge uma simetria adicional na matriz de spin-0: a 3^a e 4^a colunas ficam proporcionais. Isso provê outro vínculo para as fontes

$$\omega\mathcal{S} + k_i\mathcal{S}_i = 0 \quad (\text{apenas para E-H}). \quad (4.52)$$

Esse último resultado é compatível com o vínculo de conservação de fontes relativísticas $k_\mu\mathcal{S}^{\mu\nu} = 0$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) se for levado em conta que: (i) as contribuições dos campos h^{0i} e h^{i0} são dadas por N^i ; isso gera um fator 2 na decomposição dos coeficientes de matrizes, o que implica em um fator $\frac{1}{2}$ para a fonte \mathcal{S}_i e (ii) na expansão de campo fraco $\mathcal{N} = 1 + g$, e com a estrutura da decomposição ADM para ${}^4g_{00}$ implica que h^{00} é identificado com $2n$; isso traz um fator $\frac{1}{2}$ associado com a fonte \mathcal{S} .

De posse das matrizes de coeficientes, podemos realizar a análise espectral desse modelo conforme proposto no Capítulo 2. Por questão de clareza, realizaremos a discussão separadamente para cada modo de spin.

Setor de Spin-2

A matriz $a(2)$ da equação (4.49a) é não-degenerada. Para obter o propagador, basta inverter $a(2)$ conforme a equação (4.42):

$$a(2)^{-1} = \frac{1}{D_{(2)}} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}(a - bk^2)k^2 & -i(\mu + \frac{1}{2}\lambda k^2)k^2\sqrt{k^2} \\ i(\mu + \frac{1}{2}\lambda k^2)k^2\sqrt{k^2} & \frac{\alpha}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}(a - bk^2)k^2 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

onde o denominador é dado por $D_{(2)} = (\frac{\alpha}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}(a - bk^2)k^2)^2 - (\mu + \frac{1}{2}\lambda k^2)^2 k^6$. Pode-se observar que este possui dois polos na energia. Isso evidencia uma característica interessante dos termos com violação de paridade: ele permite que cada componente de spin ± 2 se propague independentemente, com diferentes relações de dispersão

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{\alpha} (a - bk^2) k^2 \pm \frac{2}{\alpha} \left(\mu + \frac{1}{2}\lambda k^2 \right) k^2 \sqrt{k^2}. \quad (4.54)$$

Adotando a postura de que a velocidade de propagação de todos os modos propagantes deve ser positiva (equação (4.45)), exigiremos que

$$c_{(2)}^2 = \frac{a_1}{\alpha} > 0. \quad (4.55)$$

A condição para ausência de fantasmas deve ser feita para cada polo $\omega_{\pm}^2 = Q_{\pm}(k)$. A equação (4.46) implica $1/\alpha > 0$ para ambos os casos. Então, a condição para ausência de táquions e fantasmas é dada por

$$\text{Spin-2 : } a_1 > 0; \alpha > 0. \quad (4.56)$$

A partir dessa análise, podemos concluir que termo de Chern-Simons (4.48b) e de Ricci-Cotton (4.48c) nesse caso não influencia as condições de unitariedade.

Setor de Spin-1

Já que a matriz coeficientes do setor de spin-1 é degenerada, utilizaremos a prescrição dada pela equação (4.43). Uma matriz não-degenerada pode ser obtida eliminando-se a 2ª linha e coluna. A respectiva inversa é dada por

$$A(1)^{-1} = \frac{2}{\alpha\omega^2}. \quad (4.57)$$

Aparentemente, esse modo possui um polo $\omega^2 = 0$, que poderia trazer dificuldades de interpretação. Mas, acontece que o coeficiente (4.57) está relacionado com o projetor $P_{11}^{hh}(1)_{ij,kl} = \frac{1}{2}(\theta_{ik}\omega_{jl} + \theta_{il}\omega_{jk} + \theta_{jk}\omega_{il} + \theta_{jl}\omega_{ik})$. Isso implica que o momento espacial k_i é contraído com a fonte \mathcal{S}_{ij} na expressão do propagador (4.43). Desta forma, utilizando o vínculo sobre as fontes (4.51), verifica-se que o resíduo no polo $\omega^2 = 0$ do propagador saturado com fontes físicas se anula identicamente. Portanto, devemos entender esse polo com um modo não-propagante.

Setor de Spin-0

A discussão do setor de spin-0 trouxe as discussões mais interessantes na literatura. A redução da simetria por difeomorfismos para a simetria por difeomorfismos que preservam a foliação possibilita a presença mais graus de liberdade propagantes na gravitação de Hořava-Lifshitz em comparação com a gravitação de Einstein-Hilbert. Justamente o setor de spin-0 da gravitação de Hořava-Lifshitz que possui “espaço” para esse novo modo propagante.

A 2ª e 3ª linha e coluna da matriz $a(0)$ (equação (4.49c)) são degeneradas. Obtemos $A(0)$ eliminando a 3ª linha e coluna de $a(0)$ (equação (4.49c)). A respectiva inversa é dada por

$$A(0)^{-1} = \frac{1}{D_0} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} & A_{13}^{(0)} \\ A_{12}^{(0)*} & A_{22}^{(0)} & A_{23}^{(0)} \\ A_{13}^{(0)*} & A_{23}^{(0)*} & A_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

em que

$$D_0 = \left\{ \left[\frac{1}{2} \alpha \eta (\alpha + 3\beta) - \frac{1}{8} k^2 (\alpha ((r+s)^2 + 2s^2) + 2\beta r^2) \right] \omega^2 + \left[\left(\frac{1}{2} A \eta - (a - uk^2)^2 \right) (\alpha + \beta) - \frac{1}{8} A k^2 (r+s)^2 \right] k^2 \right\} k^2 \omega^2, \quad (4.59a)$$

$$A_{11}^{(0)} = \left((\alpha + \beta) \eta - \frac{1}{4} (r+s)^2 k^2 \right) \omega^2 k^2, \quad (4.59b)$$

$$A_{12}^{(0)} = -\sqrt{2} \beta \eta \omega^2 k^2 - \frac{i}{\sqrt{2}} (r+s) \left(a - uk^2 + \frac{1}{2} s i \omega \right) \omega k^4, \quad (4.59c)$$

$$A_{13}^{(0)} = - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} i (s\alpha - r\beta) \omega + \frac{1}{\sqrt{2}} (a - uk^2) (\alpha + \beta) \right) \omega^2 k^2, \quad (4.59d)$$

$$A_{22}^{(0)} = (\alpha + 2\beta) \eta \omega^2 k^2 - \left(\frac{1}{2} s^2 \omega^2 + 2(a - uk^2)^2 - A \eta \right) k^4, \quad (4.59e)$$

$$A_{23}^{(0)} = -\frac{1}{4} i ((r+s)\alpha + 2r\beta) k^2 \omega^3 + (a - uk^2) \beta k^2 \omega^2 - \frac{1}{4} i A k^4 (r+s) \omega, \quad (4.59f)$$

$$A_{33}^{(0)} = \frac{1}{4} ((\alpha + 3\beta) \alpha \omega^2 + A (\alpha + \beta) k^2) \omega^2. \quad (4.59g)$$

Assim, chegamos a seguinte relação de dispersão para o modo propagante nesse setor de spin:

$$\omega^2 + \frac{\left(\frac{1}{2} A \eta - (a - uk^2)^2 \right) (\alpha + \beta) - \frac{1}{8} A k^2 (r+s)^2}{\frac{1}{2} \alpha \eta (\alpha + 3\beta) - \frac{1}{8} \left(\alpha ((r+s)^2 + 2s^2) + 2\beta r^2 \right) k^2} k^2 = 0. \quad (4.60)$$

No caso geral, o grande número de coeficientes arbitrários dificulta bastante a análise das condições para ausência de táquions e fantasmas e, inclusive, algumas situações intrigantes podem acontecer. Por exemplo, quando $\eta = u = 0$ e $r = -s \neq 0$ obtemos a relação de dispersão $\omega^2 + 4\frac{a^2}{r^2} = 0$, que é uma solução de energia constante e negativa.

Na ausência dos termos que violam CPT ($r = s = 0$), não temos maiores dificuldades em prosseguir com a análise. Nesse caso,

$$A(0)^{-1} = \frac{1}{D_{(0)}} \begin{pmatrix} 2\eta(\alpha + \beta) & -2\sqrt{2}\eta\beta & -\sqrt{2}a(\alpha + \beta) \\ -2\sqrt{2}\eta\beta & \frac{2\eta(\alpha + 2\beta)\omega^2 - (4a^2 - 2A\eta)k^2}{\omega^2} & 2a\beta \\ -a\sqrt{2}(\alpha + \beta) & 2a\beta & \frac{(\alpha + 3\beta)\alpha\omega^2 + (\alpha + \beta)Ak^2}{2k^2} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

com

$$D_{(0)} = \eta(\alpha + 3\beta)\alpha\omega^2 - (2a^2 - A\eta)(\alpha + \beta)k^2 \quad (4.62)$$

e a relação de dispersão dada por

$$\omega^2 - \frac{(2a^2 - A\eta)}{\eta} \frac{(\alpha + \beta)}{(\alpha + 3\beta)\alpha} k^2 = 0, \quad (4.63)$$

que é uma função racional do quadrado do momento espacial dado que $\eta = \eta(k^2)$ (equação (4.50e)). Esse resultado é compatível com a relação de dispersão apresentada na Referência [126].

Para pequenos valores de momento, a condição para a positividade da velocidade de propagação desse modo é dada por

$$c_{(0)}^2 = \frac{a_1(2a_1 - \eta_1)}{\eta_1} \frac{(\alpha + \beta)}{(\alpha + 3\beta)\alpha} > 0. \quad (4.64)$$

Já para obter a condição para ausência de fantasmas, tem que se analisar o resíduo da matriz de coeficientes no polo. Utilizando a relação de dispersão (4.63) verifica-se (através de um Sistema de Computação Algébrica, por exemplo) que $A(0)^{-1}|_{polo}$ possui para um autovalor não-nulo, que coincide com o respectivo traço. Portanto, a expressão (4.46) é válida:

$$\text{tr} A(0)^{-1}|_{polo} = \frac{(a^2 + 2\eta^2)(\alpha + \beta)^2 + 4\beta^2\eta^2}{\alpha\eta^2(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)} > 0. \quad (4.65)$$

Desta forma, a condição para ausência de fantasmas pode ser escrita como

$$\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta) > 0. \quad (4.66)$$

Unindo os resultados (4.64) e (4.66) com o resultado obtido no setor de spin-2 (equação (4.56)) deve-se impor que

$$\text{Spin-0: } (\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta) > 0; \quad \eta_1(2a_1 - \eta_1) > 0, \quad (4.67)$$

para ausência de táquions e fantasmas nesse setor.

Para fins comparativos, podemos reanalisar como a *condição de projetabilidade* afeta as estruturas das matrizes de coeficientes e, por conseguinte, os modos propagantes. A imposição de que o campo lapso não depende das variáveis espaciais $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t)$ implica que os termos da Lagrangiana quadrática contendo as perturbações do lapso, n , são derivadas totais. Isso significa que a 4ª linha e coluna da matriz de coeficientes de spin-0, se anula identicamente,

$$a(0)_p = \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\omega^2 + \frac{1}{2}Ak^2 & \frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 & -\beta\omega\sqrt{2k^2} & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega^2 & -(\alpha + \beta)\omega\sqrt{k^2} & 0 \\ -\beta\omega\sqrt{2k^2} & -(\alpha + \beta)\omega\sqrt{k^2} & 2(\alpha + \beta)k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Com essa simplificação, percebe-se que a matriz $a(0)_p$ é duplamente degenerada: a coluna 4 é nula e as colunas 2 e 3 são proporcionais. Uma submatriz de posto completo de $a(0)_p$ pode ser obtida eliminando a 3ª e 4ª linha e coluna,

$$A(0)_p = \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\omega^2 + \frac{1}{2}Ak^2 & \frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 & \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega^2 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Sua inversa é dada por

$$A(0)_p^{-1} = \frac{4}{D(0)_p\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega^2 & -\frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{2}}\omega^2 & \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\omega^2 + \frac{1}{2}Ak^2 \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

onde

$$D_{(0)p} = (\alpha + 3\beta) \alpha \omega^2 + (\alpha + \beta) A k^2. \quad (4.71)$$

fornece a relação de dispersão para o respectivo modo propagante. Para garantir que esse modo não seja um táquion, devemos impor que

$$c_{(0)p}^2 = -\frac{(\alpha + \beta) a_1}{(\alpha + 3\beta) \alpha} > 0. \quad (4.72)$$

Pode ser verificado explicitamente que $\text{Res} \left\{ A(0)^{-1} \right\} \Big|_{\text{polo}}$ é degenerada e, desta forma, seu único autovalor nulo coincide com o seu traço. Deve-se impor, então, que

$$\text{tr} \left(\text{Res} \left\{ A(0)^{-1} \right\} \Big|_{\text{polo}} \right) = \frac{2(\alpha + \beta)^2 + 4\beta^2}{\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)} > 0. \quad (4.73)$$

A única maneira de reconciliar as condições (4.72) e (4.73) seria impor $a_1 < 0$; mas, isso contradiz as condições de unitariedade impostas no setor de spin-2. Portanto, podemos inferir que a gravitação de Hořava-Lifshitz com a condição de projetabilidade não é compatível com a unitariedade em teoria de perturbação ao nível de árvore.

Uma maneira de contornar esse problema é incrementar o modelo com uma simetria de calibre Abelian, [112, 113, 139, 136] de modo a inibir a propagação do spin-0. Isso é possível com a introdução de um campo de calibre A e um campo auxiliar escalar ν , conhecido como prepotencial Newtoniano. Com essa abordagem, o modelo passa a ter o mesmo número de graus de liberdade que a gravitação de Einstein-Hilbert.

4.5 Aspectos do Modos Propagantes da Gravitação de Hořava-Lifshitz num Regime de Baixas Energias

Com os resultados gerais dos propagadores (equações (4.53), (4.57) e (4.61)), podemos contemplar alguns resultados no limite de baixas energias da teoria, onde os termos contendo derivadas espaciais de ordem superiores se tornam menos relevantes. Em tal situação, a ação para a gravitação de Hořava-Lifshitz não-projetável (4.47) pode ser simplificada para

$$S_{HL} = \int dt d^3x \sqrt{g} \mathcal{N} (\alpha K_{ij} K^{ij} + \beta K^2 + aR + \eta \mathcal{A}_i \mathcal{A}^i). \quad (4.74)$$

e as matrizes de coeficientes inversas do propagador para esse modelo simplificado são dadas por:

$$A(0)_{HL}^{-1} = \frac{1}{D(0)} \begin{pmatrix} 2\eta(\alpha + \beta) & -2\sqrt{2}\eta\beta & -\sqrt{2}a(\alpha + \beta) \\ -2\sqrt{2}\eta\beta & \frac{2\eta(\alpha + 2\beta)\omega^2 - 2a(2a - \eta)k^2}{\omega^2} & 2a\beta \\ -\sqrt{2}a(\alpha + \beta) & 2a\beta & \frac{(\alpha + 3\beta)\alpha\omega^2 + (\alpha + \beta)ak^2}{2k^2} \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

$$A(1)_{HL}^{-1} = \frac{2}{\alpha\omega^2}, \quad a(2)_{HL}^{-1} = \frac{2}{\alpha\omega^2 - ak^2}, \quad (4.76)$$

com $D(0) = \eta(\alpha + 3\beta) \alpha \omega^2 - a(2a - \eta)(\alpha + \beta) k^2$.

É instrutivo comparar os propagadores da gravitação de Hořava-Lifshitz (equações (4.75) e (4.76)) com os propagadores da gravitação de Einstein-Hilbert em coordenadas ADM e com o mesmo conjunto de operadores utilizados para a gravitação de Hořava-Lifshitz. Estes podem ser escritos como

$$A(0)_{EH}^{-1} = \frac{1}{\alpha k^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4k^2} (\omega^2 - k^2) \end{pmatrix}, \quad (4.77a)$$

$$A(1)_{EH}^{-1} = \frac{2}{\alpha \omega^2}, \quad a(2)_{EH}^{-1} = \frac{2}{\alpha (\omega^2 - k^2)}. \quad (4.77b)$$

Através das matrizes de coeficientes, somos capazes de estabelecer diferenças entre os dois modelos. Analisando a estrutura de polos dos propagadores, podemos concluir que os modos de spin-2 não-massivos se propagam em ambos os modelos, mas com velocidades de propagação distintas. Isso corresponde ao conhecido gráviton de helicidades ± 2 do modelo relativístico. Ambos os modelos coincidem por não terem modos dinâmicos no setor de spin-1. Porém, a gravitação de Hořava-Lifshitz possui um modo propagante no setor de spin-0, que está ausente na gravitação de Einstein-Hilbert.

Esse novo grau de liberdade pode levar a alguns efeitos inesperados. Um cenário semelhante acontece na gravitação massiva de Pauli-Fierz [134], em que há a presença de um modo massivo de spin-2. Para enriquecer a discussão, vamos considerar também a gravitação de Pauli-Fierz. Esta consiste em adicionar à Lagrangiana de Einstein-Hilbert, o termo de massa:

$$\mathcal{L}_{PF} = -\frac{\beta}{4} \left[(h_{\mu\nu})^2 - (h^\mu_\mu)^2 \right]. \quad (4.78)$$

Através do mesmo processo de decomposição ADM e do operador de onda na base de projetores, obtemos as seguintes matrizes de coeficientes da expansão do operador de onda:

$$a(0)_{PF}^{-1} = \frac{1}{3\beta^2 (\alpha (\omega^2 - k^2) - \beta)} \times \quad (4.79a)$$

$$\begin{pmatrix} 2\beta^2 & -2\sqrt{2}\beta (\alpha k^2 + \beta) & -2\sqrt{2}\alpha\beta\omega\sqrt{k^2} & \sqrt{2}\beta\alpha\omega^2 - \sqrt{2}\beta^2 \\ -2\sqrt{2}\beta (\alpha k^2 + \beta) & 4(\alpha k^2 + \beta)^2 & 4\alpha\omega (\alpha k^2 + \beta) \sqrt{k^2} & \beta (\alpha (\omega^2 - k^2) - \beta) - 2k^2\alpha^2\omega^2 \\ -2\sqrt{2}\alpha\beta\omega\sqrt{k^2} & 4\alpha\omega (\alpha k^2 + \beta) \sqrt{k^2} & +3\beta (\alpha (\omega^2 - k^2) - \beta) + 4k^2\alpha^2\omega^2 & 2\alpha\omega (\beta - \alpha\omega^2) \sqrt{k^2} \\ \sqrt{2}\alpha\beta\omega^2 - \sqrt{2}\beta^2 & \beta (\alpha (\omega^2 - k^2) - \beta) - 2k^2\alpha^2\omega^2 & 2\alpha\omega (\beta - \alpha\omega^2) \sqrt{k^2} & (\beta - \alpha\omega^2)^2 \end{pmatrix},$$

$$a(1)_{PF}^{-1} = \frac{2}{\beta (\alpha (\omega^2 - k^2) - \beta)} \begin{pmatrix} \alpha k^2 + \beta & \alpha\omega \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{2}} \\ \alpha\omega \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} (\alpha\omega^2 - \beta) \end{pmatrix}, \quad (4.79b)$$

$$a(2)_{PF}^{-1} = \frac{2}{\alpha (\omega^2 - k^2) - \beta}. \quad (4.79c)$$

Pela inspeção dos coeficientes das matrizes, nota-se a presença de um polo massivo $m^2 = \frac{\beta}{\alpha}$ em todos os setores de spin $SO(3)$. Essa análise realizada com operadores de projeção relativístico $SO(1,3)$, mostra que a gravitação de Pauli-Fierz possui 5 graus de liberdade propagantes, correspondendo ao spin-2 massivo em 4D.

Dito isso, estamos em condições de comparar a gravitação de Hořava-Lifshitz, Pauli-Fierz e Einstein-Hilbert numa situação de massas pontuais e estáticas acopladas a fontes de matéria relativística. Uma fonte pontual estática de massa M localizada na origem do sistema de coordenadas pode ser descrita por

$$\mathcal{S}_M^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = M\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta^3(\mathbf{x}). \quad (4.80)$$

Em termos das decomposição ADM, temos $\mathcal{S} = M\delta(\omega)$, $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{ij} = 0$. Os propagadores saturados com a fonte estática e fontes arbitrárias $\{\mathcal{S}', \mathcal{S}'_i, \mathcal{S}'_{ij}\}$ são dados por

$$-i\Pi_{HL} = M\delta(\omega) \frac{1}{(2a - \eta)k^2} \left\{ \left(\theta_{ij} - \frac{2\beta}{(\alpha + \beta)} \omega_{ij} \right) \mathcal{S}'_{ij} - \frac{1}{2} \mathcal{S}' \right\}, \quad (4.81a)$$

$$-i\Pi_{EH} = M\delta(\omega) \frac{1}{2\alpha k^2} \left\{ \theta_{ij} \mathcal{S}'_{ij} - \frac{1}{2} \mathcal{S}' \right\}, \quad (4.81b)$$

$$-i\Pi_{PF} = M\delta(\omega) \frac{1}{3(\alpha k^2 + \beta)} \left\{ \delta_{ij} \mathcal{S}'_{ij} - \mathcal{S}' \right\} \quad (4.81c)$$

para a gravitação de Hořava-Lifshitz, Einstein-Hilbert e Pauli-Fierz, respectivamente. No caso particular do limite Newtoniano, a energia de interação de uma fonte pontual de massa M' separada por uma distância R de um objeto de massa M é dada por (vide Figura 4.1):

$$E_{HL} = -\frac{1}{2(2a - \eta)} \frac{MM'}{R}, \quad E_{EH} = -\frac{1}{4\alpha} \frac{MM'}{R}, \quad E_{PF} = -\frac{1}{3\alpha} \frac{MM'}{R} \quad (\beta \rightarrow 0), \quad (4.82)$$

respectivamente para a gravitação de Hořava-Lifshitz, Einstein-Hilbert e Pauli-Fierz, considerando-se o limite não-massivo ($\beta \rightarrow 0$).

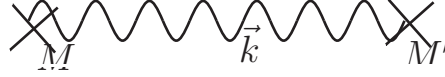


Figura 4.1: Potencial estático de uma interação gravitacional entre duas massas pontuais M e M' .

Por outro lado, para o cálculo com matéria eletromagnética relativística deve-se levar em conta que esta satisfaz a propriedade $\mathcal{S}'_{\mu}{}^{\mu} = 0$. Em termos das componentes ADM, a imposição de traço nulo para o tensor eletromagnético se escreve:

$$\frac{1}{2} \mathcal{S}'_{EM} + \delta_{ij} \mathcal{S}'^{ij}_{EM} = 0. \quad (4.83)$$

Usando a identidade (4.83) junto com o condição de conservação da fonte (4.51) pode-se mostrar que a energia de interação de uma massa pontual M com um fóton de energia E' , separados por uma distância R , em nível de árvore, é dada por (vide Figura 4.2):

$$E_{HL} = -\frac{1}{2a - \eta} \frac{ME'}{R}, \quad E_{EH} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{ME'}{R}, \quad E_{PF} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{ME'}{R} \quad (\beta \rightarrow 0), \quad (4.84)$$

respectivamente para a gravitação de Hořava-Lifshitz, Einstein-Hilbert e Pauli-Fierz, considerando-se o limite não-massivo ($\beta \rightarrow 0$).

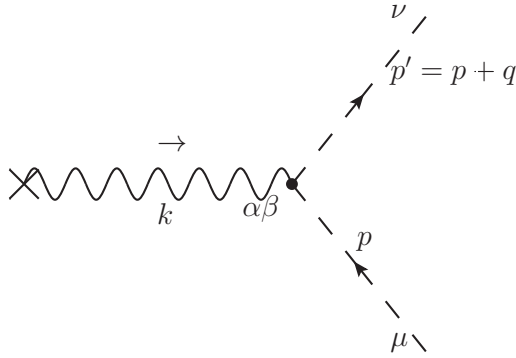


Figura 4.2: Processo de espalhamento de um fóton por uma massa pontual fixa.

Aparece um fator de 2 com relação ao valor da equação (4.82) para a gravitação de Hořava-Lifshitz e Einstein-Hilbert, mas um fator de $\frac{3}{2}$ para a gravitação de Pauli-Fierz (substituindo a massa pela energia total), conforme a Tabela 4.1. Isso implica que experimentos com fontes estáticas não podem distinguir a gravitação de Einstein-Hilbert com a versão não-projetável da gravitação de Hořava-Lifshitz ao nível de árvore, já que ambos experimentos fornecem os mesmos resultados a menos de uma constante multiplicativa.

	Einstein-Hilbert	Hořava-Lifshitz	Pauli-Fierz ($\beta \rightarrow 0$)
φ	$\frac{1}{4\alpha}$	$\frac{1}{2(2a-\eta)}$	$\frac{1}{3\alpha}$
A^μ	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2a-\eta}$	$\frac{1}{2\alpha}$

Tabela 4.1: Comparação com da constante de Newton efetiva para a gravitação de Einstein-Hilbert, Hořava-Lifshitz e Pauli-Fierz (no limite de massa nula) acoplada a um campo escalar e vetorial.

Já o modo de helicidade 0, no limite não-massivo da gravitação de Pauli-Fierz ($\beta \rightarrow 0$), não se desacopla da teoria. Se as constantes gravitacionais para os modelos de Pauli-Fierz e Einstein-Hilbert forem ajustadas para resultarem no mesmo potencial Newtoniano para a interação de escalares (equação (4.82)), aparece um fator de $\frac{3}{4}$ no ângulo de desvio da luz pelo sol, comparado com a previsão da gravitação de Einstein-Hilbert [140, 133, 132, 141] (equação (4.84)). Esse efeito pode ser explicado pela maneira diferente que os modos de helicidade ± 2 e helicidade 0 se acoplam com os campos escalares e vetoriais. Deve-se estar atento, no entanto, que esse aparente paradoxo, conhecido como descontinuidade vDVZ, aparece somente na abordagem perturbativa da versão linearizada da teoria. A análise não-perturbativa desses resultados, mostram que não há uma descontinuidade na teoria, conhecido como mecanismo de Vainshtein [142]. A Referência [135] apresenta uma revisão recente sobre esse assunto.

Nessa linha, pode-se procurar por um experimento dinâmico que possa desvendar efeitos experimentais do modo escalar extra na gravitação de Hořava-Lifshitz. Uma possibilidade interessante seria trabalhar um teste através do experimento do *pulsar gravitacional*. Este consiste de uma distribuição de massa esfericamente simétrica e harmonicamente pulsante. De fato, de acordo com o teorema de Birkhoff, é nula a radiação de qualquer fonte esfericamente simétrica na gravitação de Einstein-Hilbert [143]. Olhando os coeficientes dos propagadores da gravitação de Einstein-Hilbert (equações (4.77a)-(4.77b)) pode-se verificar que de fato este é o caso, já que o modo propagante da gravitação de Einstein-Hilbert está associado com um operador transversal $P(2)$ que se anula quando contraído com uma fonte esfericamente simétrica. A estrutura dos propagadores da gravitação de Hořava-Lifshitz leva a uma situação

diferente, porque possui modos propagantes associados a operadores longitudinais. Nesse caso apenas o modo de spin-0 produz energia radiante e, portanto, o teorema de Birkhoff não é válido para a versão não projetável da gravitação de Hořava-Lifshitz.

4.6 Conclusão

No presente capítulo, propusemos um conjunto ortonormal de operadores de projeção adequados para modelos de gravitação não-relativísticos da classe dos modelos de Hořava-Lifshitz, incluindo os modelos com termos de violação de paridade. Assim como apresentado nos capítulos anteriores, essa abordagem é vantajosa para se obter os propagadores, que em geral é uma tarefa dispendiosa, pois pode-se realizá-la de maneira sistemática, inclusive no que tange o tratamento das simetrias de calibre. Através dessa metodologia, foi possível determinar condições sobre os coeficientes de um modelo geral da gravitação de Hořava-Lifshitz, a fim de inibir a propagação de modos de táquions e fantasmas.

Em particular, reproduzimos um resultado existente na literatura que mostra que a versão projetável da gravitação de Hořava-Lifshitz apresenta necessariamente a propagação de um modo escalar fantasma. A versão não-projetável da teoria apresenta um espectro de partículas “saudável” às custas de um número muito grande de parâmetros livres da teoria. Por fim, a partir das expressões obtidas para os propagadores, obtivemos alguns resultados semi-clássicos para o acoplamento de um objeto estático com campo escalar e um campo vetorial. Isso permitiu distinguir algumas características do espectro da gravitação de Hořava-Lifshitz, Einstein-Hilbert e Pauli-Fierz.

Em conexão com a presente investigação, seria interessante considerar o acoplamento de férmions à gravitação de Hořava-Lifshitz. Dessa maneira, os modos de torção da gravitação podem ser excitados e essa incorporação pode trazer novos aspectos técnicos ao nosso tratamento. A extensão do nosso método para incluir torção na gravitação de Hořava-Lifshitz também é motivada pela possível produção e o consequente decaimento de grávitons massivos na escala TeV e, assim, comparar os nossos resultados com resultados de gravitação quântica em modelos que preservam a simetria de Lorentz [40, 41].

Outro ponto que merece uma atenção especial, são aspectos da gravitação de Hořava-Lifshitz além da aproximação de campo fraco [144]. Em particular, estabeleceu-se uma discussão bastante interessante na literatura ligada a soluções de buracos negros da gravitação de Hořava-Lifshitz [145]. A quebra de difeomorfismos pode exigir a revisão de alguns conceitos fundamentais estabelecidos na gravitação de Einstein-Hilbert. O fato das partículas terem relações de dispersão deformadas, pode implicar que perturbações de pequeno comprimento de onda, se propaguem com velocidades arbitrariamente altas. Isso incita a possibilidade de que a radiação da gravitação de Hořava-Lifshitz possa escapar de qualquer região dentro de um buraco negro [146]. Se for o caso, o próprio conceito de buraco negro estaria perdido. Além disso, o fato de que a teoria possui partículas com velocidade de propagação distintas, implica que cada partícula vê um horizonte distinto. Portanto, se a entropia for definida em termos da área do horizonte, esta será dependente da partícula em consideração [147]. Por fim, a própria obtenção das soluções requer cuidados adicionais. Como o teorema de Birkhoff não é satisfeito, as soluções esfericamente simétricas não são estáticas. E as soluções estáticas não são assintoticamente planas [146]. Além disso, a própria existência de soluções de buracos negros em rotação pode depender da classe de gravitação de Hořava-Lifshitz em que se está considerando [148, 149].

Capítulo 5

Reflexões Finais

Nesta tese apresentamos um método para o estudo de alguns aspectos perturbativos para modelos de gravitação com violação da simetria de Lorentz, a saber, os modelos com violação de Lorentz por um vetor de fundo e a gravitação de Hořava-Lifshitz. As principais conclusões desse trabalho que concernem esses assuntos específicos foram apresentadas no final de cada capítulo, respectivamente. Reservamos, portanto, este último capítulo para uma discussão geral sobre o problema da gravitação quântica.

Todo edifício de conhecimento científico existente sobre a vida, o universo e o tudo mais foi gerado por meio da cognição de cientistas sobre a realidade. Esta é sempre guiada por concepções fundamentalmente pessoais. Como um exemplo, podemos citar Einstein e a sua teoria da relatividade. Mesmo realizando uma revolução extraordinária, Einstein, um cientista fruto do tempo em que viveu, não teria como incorporar as lições da mecânica quântica, que foram aprendidas ao longo do século XX, na estrutura do espaço-tempo.

Cabe ao século XXI completar os passos dados pela concepção da mecânica quântica e a relatividade de Einstein para uma revolução que ainda não aconteceu: uma teoria de gravitação quântica. O fato que a relatividade geral apresentar resultados sem sentido físico, quando quantizada, faz repensar sobre aspectos mais fundamentais relacionados com a estrutura do tempo e do espaço. Podemos dizer que já se foram os bons tempos em que a humanidade se contentava em acreditar num espaço-tempo contínuo. Nesse contexto, coube a inúmeros pesquisadores propor programas audaciosos, cujos principais produtos foram a teoria de cordas e a gravitação quântica em laços. Ambos programas nos trouxeram novas ideias e visões para o problema da gravitação quântica, com inúmeras lições aprendidas.

A gravitação quântica em laços propõe rever a estrutura do espaço-tempo na escala de energia de Planck $E_P = (\hbar c^5/G)^{\frac{1}{2}} = 1,2 \times 10^{19}$ GeV. Como consequência das propriedades de quantização, chega-se invariavelmente a conclusões relevantes de que, por exemplo, espaço é discreto. Essa granularidade pode ter consequências relevantes no mundo macroscópico. Uma das melhores possibilidades é através do estudo de uma nova Física principalmente relacionadas a desvios de simetrias bem testadas experimentalmente: a simetria de Lorentz e a invariância por CPT.

A teoria de cordas é a única teoria candidata a gravitação quântica finita em cada ordem de perturbação potencialmente capaz de descrever as partículas do modelo padrão e as outras interações fundamentais. Dentre as lições aprendidas das teorias de cordas temos que o papel da mecânica quântica é tão relevante, que devemos estar dispostos a modificar a estrutura da relatividade geral de Einstein. Mesmo assim, depois de 30 anos da concepção das ideias originais, as promessas de uma teoria de unificação do modelo padrão de partículas

com a gravitação quântica, muitos pesquisadores da comunidade de Física de Altas Energias cansaram por esperar resultados, que até agora não podem ser provados experimentalmente, nem mesmo numa visão de longo prazo. É necessário a busca por novas ideias.

De fato, a Física destacou-se como um ramo da ciência capaz de fazer experimentações e previsões das teorias, e não apenas a catalogação dos fenômenos. Nesse sentido, colocar a simetria de Lorentz num pedestal inviolável, além de me parecer um erro, não se mostra uma concepção racional. Embora os modelos atualmente propostos precisam dessa hipótese para concordarem com os experimentos atuais, uma postura mais audaz seria tentar buscar entender teoricamente como a partir de um cenário de violação de Lorentz na escala de Planck, chegamos a uma simetria tão exata no mundo sensível.

Sugestões como o Modelo Padrão Estendido (de Kostelecký e colaboradores), a gravitação de Hořava-Lifshitz, gravitação quântica em laços, o modelo de velocidade da luz variável ou a existência de grandes dimensões extras me parece uma postura correta de fazer Física além do modelo padrão da Física de Partículas Elementares e do modelo padrão cosmológico. Apesar desses modelos não fornecerem um quadro-geral e completo para uma teoria unificada como se propõe a teoria de cordas (ou até a teoria M), estas estão dispostas a fazerem previsões físicas bem-definidas, refutáveis e falseáveis. Outra alternativa é explorar a possibilidade de produção e detecção de grávitons massivos na escala de energia do LHC (*Large Hadron Collider*) e, futuramente, no ILC (*International Linear Collider*). Devemos aproveitar esse momento da humanidade, em que grandes projetos de colaboração científica são largamente financiados por motivos tecnológicos, para obtermos sinais de uma física numa escala mais fundamental.

Durante os anos de desenvolvimento desse trabalho, muitas ideias foram discutidas e algumas não foram seguidas adiante. Dentre essas, destacamos duas linhas de pesquisa possivelmente interessantes, em conexão com modelos de gravitação com violação de Lorentz, que não foram suficientemente explorados na literatura: a gravitação de Myers-Pospelov e modelos de supergravidade com violação da simetria de Lorentz.

Myers e Pospelov [150] propuseram a introdução de operadores de dimensão 5, que modificam a relação de dispersão para escalares, férmions e campos vetoriais. Essa abordagem é fundamentalmente distinta da linha de pesquisa proposta por Coleman-Glashow [151] e Colladay-Kostelecký [25, 26], que consideram apenas operadores de dimensão 4 ou menor, como deformações relevantes para o modelo padrão. Como exemplo, consideremos uma possível deformação do eletromagnetismo de Maxwell:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\xi}{M_P}v^\mu F_{\mu\nu}(v \cdot \partial)v_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu}. \quad (5.1)$$

Essa ação serve de *toy-model* para o estudo das propriedades de operadores de ordem 5 [152], e suas possíveis implicações no modelo padrão. É possível estabelecer fortes restrições à magnitude do ξ por meio de experimentos de baixas energias [150]. Isso corrobora, novamente, a ideia que interações da escala de Planck e efeitos de gravitação quânticas podem confrontados com limites observacionais com a tecnologia disponível atualmente.

O termo de Myers-Pospelov pode ser escrito como algo que pode ser visto como uma inclusão do operador $(v \cdot \partial)^2$ no termo de Chern-Simons. Usando como analogia ao termo eletromagnético, podemos introduzir um termo de Myers-Pospelov gravitacional:

$$\mathcal{L}_{MP} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho(v \cdot \nabla)^2\left(\partial_\nu\Gamma_{\rho\kappa}^\sigma + \frac{2}{3}\Gamma_{\nu\alpha}^\sigma\Gamma_{\kappa\rho}^\alpha\right). \quad (5.2)$$

A presença do termo (5.2) como deformação da ação de Einstein-Hilbert pode trazer alterações significativas para a teoria. Baseados em alguns estudos preliminares, adiantamos que

esse termo traz modificações significativas ao espectro da teoria e que situações pouco convencionais para as relações de dispersões das partículas aparecem. Por isso, sugerimos um estudo mais criterioso de efeitos gravitacionais clássicos e dos possíveis consequências fenomenológicas advindas desse termo.

Outra possibilidade interessante tange a supergravidade com violação da simetria de Lorentz. Essa linha de investigação foi bastante explorada dentro do contexto das teorias de calibre abelianas supersimétricas. Em particular, foi proposta uma extensão supersimétrica minimal para a ação tipo Chern-Simons,

$$S_{CS} = \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\mu A_\nu F_{\rho\sigma}, \quad (5.3)$$

preservando a álgebra supersimétrica usual em (1+3)-dimensões nas Referências [111, 110]. Essa abordagem é fortemente motivada dada a origem dessa classe de modelos em teorias de cordas – teoria em que a supersimetria é um componente essencial. Isso incita uma discussão fundamental sobre as escalas de energia de quebra de supersimetria, E_{SUSY} , e da simetria de Lorentz, E_{VL} . Os trabalhos [111, 110, 153, 154] sugerem a possibilidade da violação da simetria de Lorentz através da condensação não-trivial de campos componentes advindo de teorias supersimétricas. Já Colladay et al. [155] e Farias et al. [156] propõe uma deformação da álgebra supersimétrica permitindo uma estrutura para a violação da simetria de Lorentz.

A fim de estabelecer uma hierarquia entre as escalas de energia E_{SUSY} e E_{VL} , sugerimos a investigação do papel das quebras de supersimetria e simetria de Lorentz numa escala de energia mais alta, onde os efeitos da supergravidade se tornam mais relevantes. A supergravidade pode ser entendida como a teoria de calibre para as simetrias do espaço-tempo e da supersimetria [157, 158, 159, 160, 161]. Nesse contexto, a tetrada, e_μ^a , e a conexão de spin, ω_μ^{ab} , podem ser vistos como os campos de calibre para as simetrias do espaço-tempo, enquanto o gravitino, ψ_μ^α (campo não-massivo real de spin 3/2), como campo de calibre da supersimetria. Portanto, julgamos conveniente, que seja realizado a supersimetrização do modelo de violação de Lorentz no formalismo de primeira ordem (em que a tetrada e a conexão de spin são considerados campos independentes):

$$\mathcal{L}_{CS} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} v_\delta (R_{\alpha\beta ab} \omega_\gamma^{ab} + \frac{2}{3} \omega_{ab}^c \omega_{\beta c}^a \omega_{\gamma a}^b), \quad (5.4)$$

e não no formalismo métrico como abordado nessa tese.

Para a realização dessa tarefa, um possível caminho é através do estudo da extensão supersimétrica do invariante topológico de Pontryagin,

$$\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu ab}^* R^{\mu\nu ab}, \quad (5.5)$$

onde $R_{\mu\nu ab}^* = \epsilon_{abcd} R_{\mu\nu}^{cd}$. Esse objeto está contido dentro do supermultiplete

$$\bar{W}_{ab} \otimes W^{ab}, \quad (5.6)$$

em que $W_{ab\alpha}$ é o supermultiplete de Weyl da supergravidade¹ [163, 164] e \otimes é o produto tensorial no entre supermultipletes (vide [159]). Porém, está demonstrado que, na camada

¹ O multiplete de Weyl $W_{ab\alpha}$ é um multiplete escalar da supergravidade de Einstein, que possui dois índices de Lorentz locais a, b e um índice espinorial α . Este contém a curvatura de Weyl na terceira componente conforme deduzido na Referência [162].

de massa, o invariante topológico supersimétrico de Pontryagin é idêntico ao invariante não-supersimétrico (5.5) [163]. Portanto, para obter a supersimetrização do termo (5.4), podemos deformar o supermultiplete $\bar{W}_{ab} \otimes W^{ab}$ com um supermultiplete escalar S ,

$$S\bar{W}_{ab} \otimes W^{ab}.$$

Esta tarefa foi realizada na Referência [165], com uma motivação e contexto completamente distinto do que estamos propondo. O multiplete escalar S pode atuar como um supercampo de fundo, cuja condensação dos campos componentes é responsável por uma violação da simetria de Lorentz. Para realizar esse programa, deve ser feita uma análise cuidadosa e criteriosa dos cálculos apresentados e estudar a estrutura da superálgebra de teoria. As consequências desse modelo podem elucidar alguns aspectos importantes acerca da estrutura das simetrias do espaço-tempo.

Apêndice A

Operadores de Projeção de Spin 3D e Relações Tensoriais

Nesse apêndice, listamos os operadores de projeção de spin em 3D que foram construídos no Capítulo 2 e algumas identidades satisfeitas por estes.

A.1 Operadores para Campos Vetoriais: $A - A$

Setor de Spin-0

- $P^{AA}(0)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

Setor de Spin-1

- $P_{11}^{AA}(+1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \rho_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$,
- $P_{22}^{AA}(-1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \sigma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

Identidades entre os Operadores

- $P^{AA}(1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = P_{11}^{AA}(+1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + P_{22}^{AA}(-1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

Identidades Tensoriais

$$\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = P^{AA}(0)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + P^{AA}(1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (\text{A.1})$$

$$k_{\hat{\mu}}k_{\hat{\nu}} = k^2 P^{AA}(0)_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}k^{\hat{\rho}} = i\sqrt{k^2} \left(P_{11}^{AA}(+1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - P_{22}^{AA}(-1)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right). \quad (\text{A.3})$$

A.2 Operadores para Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2: $h - h$

Setor de Spin-0

- $P_{11}^{hh}(0)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}\theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\theta_{\hat{\rho}\hat{\sigma}},$
- $P_{22}^{hh}(0)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\omega_{\hat{\rho}\hat{\sigma}},$
- $P_{12}^{hh}(0)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\omega_{\hat{\rho}\hat{\sigma}},$
- $P_{21}^{hh}(0)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\theta_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}.$

Setor de Spin-1

- $P_{11}^{hh}(+1)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}(\rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}),$
- $P_{22}^{hh}(-1)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \sigma_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}),$
- $P_{12}^{hh}(\pm 1)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\hat{\tau}\hat{\eta}\hat{\kappa}}\left(\rho_{\hat{\mu}}^{\hat{\tau}}\sigma_{\hat{\rho}}^{\hat{\eta}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\nu}}^{\hat{\tau}}\sigma_{\hat{\rho}}^{\hat{\eta}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \rho_{\hat{\mu}}^{\hat{\tau}}\sigma_{\hat{\sigma}}^{\hat{\eta}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \rho_{\hat{\nu}}^{\hat{\tau}}\sigma_{\hat{\sigma}}^{\hat{\eta}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\right)\frac{k^{\hat{\kappa}}}{\sqrt{k^2}},$
- $P_{21}^{hh}(\mp 1)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\hat{\tau}\hat{\eta}\hat{\kappa}}\left(\sigma_{\hat{\mu}}^{\hat{\eta}}\rho_{\hat{\rho}}^{\hat{\tau}}\omega_{\sigma\hat{\nu}} + \sigma_{\hat{\nu}}^{\hat{\eta}}\rho_{\hat{\sigma}}^{\hat{\tau}}\omega_{\hat{\rho}\hat{\nu}} + \sigma_{\hat{\nu}}^{\hat{\eta}}\rho_{\hat{\rho}}^{\hat{\tau}}\omega_{\sigma\hat{\mu}} + \sigma_{\hat{\nu}}^{\hat{\eta}}\rho_{\hat{\sigma}}^{\hat{\tau}}\omega_{\hat{\rho}\hat{\mu}}\right)\frac{k^{\hat{\kappa}}}{\sqrt{k^2}}.$

Setor de Spin-0

- $P_{11}^{hh}(+2)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \rho_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\rho_{\hat{\nu}\hat{\sigma}},$
- $P_{22}^{hh}(-2)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \sigma_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\sigma_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}.$

Identidades entre os Operadores

- $P^{hh}(1)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}(\theta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \theta_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \theta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \theta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\omega_{\hat{\mu}\hat{\rho}}) = P_{11}^{hh}(+1) + P_{22}^{hh}(-1),$
- $P^{hh}(2)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}(\theta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\theta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \theta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\theta_{\hat{\nu}\hat{\rho}} - \theta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\theta_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}) = P_{11}^{hh}(+2) + P_{22}^{hh}(-2).$

Identidades Tensoriais

$$\delta_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2}(\eta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \eta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\rho}}) = P^{hh}(2) + P^{hh}(1) + P_{11}^{hh}(0) + P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{A.4})$$

$$\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\eta_{\hat{\rho}\hat{\sigma}} = 2P_{11}^{hh}(0^s) + \sqrt{2}P_{12}^{hh}(0) + \sqrt{2}P_{21}^{hh}(0) + P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{A.5})$$

$$k_{\hat{\mu}}k_{\hat{\nu}}\eta_{\hat{\rho}\hat{\sigma}} + k_{\hat{\rho}}k_{\hat{\sigma}}\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \sqrt{2}k^2\left(P_{12}^{hh}(0) + P_{21}^{hh}(0)\right) + 2k^2P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{A.6})$$

$$k_{\hat{\mu}}k_{\hat{\rho}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + k_{\hat{\mu}}k_{\hat{\sigma}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + k_{\hat{\nu}}k_{\hat{\rho}}\eta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + k_{\hat{\nu}}k_{\hat{\sigma}}\eta_{\hat{\mu}\hat{\rho}} = 2k^2P^{hh}(1) + 4k^2P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{A.7})$$

$$k_{\hat{\mu}}k_{\hat{\nu}}k_{\hat{\rho}}k_{\hat{\sigma}} = k^4P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\rho}\hat{\mu}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} + \varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\rho}\hat{\nu}}\eta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\sigma}\hat{\mu}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\sigma}\hat{\nu}}\eta_{\hat{\mu}\hat{\rho}})k^{\hat{\kappa}} = \\ &2\sqrt{k^2}\left(P_{11}^{hh}(+2) - P_{22}^{hh}(-2) - P_{12}^{hh}(\pm 1) + P_{21}^{hh}(\mp 1)\right), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\rho}\hat{\mu}}k_{\hat{\nu}}k_{\hat{\sigma}} + \varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\rho}\hat{\nu}}k_{\hat{\mu}}k_{\hat{\sigma}} + \varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\sigma}\hat{\mu}}k_{\hat{\nu}}k_{\hat{\rho}} + \varepsilon_{\hat{\kappa}\hat{\sigma}\hat{\nu}}k_{\hat{\mu}}k_{\hat{\rho}})k^{\hat{\kappa}} = 2k^2\sqrt{k^2}\left(-P_{12}^{hh}(\pm 1) + P_{21}^{hh}(\mp 1)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Aqui, os índices $\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}$ dos operadores $P_{mn}^{hh}(J)_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ foram omitidos.

Apêndice B

Método Alternativo para Obtenção do Propagador

A obtenção dos propagadores para modelos gravitações com violação da simetria de Lorentz através de um vetor de fundo foi considerado na Referência [51], porém com a utilização de um método algébrico sem a decomposição em operadores nos graus de liberdade. Portanto, é válido verificar a consistência dos resultados obtidos com essa técnica distinta. Essa comparação pode ser feita notando-se que o operador de Chern-Simons gravitacional pode se escrito da forma:

$$S_{\mu\nu,\rho\sigma} = i\sqrt{k_*^2} \left[-2P_{14}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} + 2P_{41}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} - P_{23}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} + P_{32}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \right]. \quad (\text{B.1})$$

As expressões para $P_{mn}(2)$ foram definidas na Subseção 3.3.2.

Tal decomposição torna claro o fato, que não é tão óbvio a primeira vista, que o operador $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$ é composto de duas componentes irredutíveis:

$$\begin{aligned} (\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{2} (\tau_{\mu\rho} S_{\nu\sigma} + \tau_{\mu\sigma} S_{\nu\rho} + \tau_{\nu\rho} S_{\mu\sigma} + \tau_{\nu\sigma} S_{\mu\rho}) \\ &= -i\sqrt{k_*^2} \left[P_{23}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} - P_{32}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} (\theta\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{2} ((\theta_{\mu\rho} - \tau_{\mu\rho}) S_{\nu\sigma} + (\theta_{\mu\sigma} - \tau_{\mu\sigma}) S_{\nu\rho} + (\theta_{\nu\rho} - \tau_{\nu\rho}) S_{\mu\sigma} + (\theta_{\nu\sigma} - \tau_{\nu\sigma}) S_{\mu\rho}) \\ &= -2i\sqrt{k_*^2} \left[P_{14}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} - P_{41}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

em que S e τ são dados por 3.25 e 3.28d, respectivamente e $k_*^2 = (v \cdot k)^2 - v^2 k^2$. Além disso, pode-se mostrar que outros dois operadores chave, $(\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}^2$ e $(\theta\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}^2$, podem ser escritos em termos de θ , τ e S ou $P_{mn}(2)$, de acordo com a conveniência:

$$\begin{aligned} (\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}^2 &= k_*^2 \left[\frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho} \tau_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma} \tau_{\nu\rho} + \tau_{\mu\rho} \theta_{\nu\sigma} + \tau_{\mu\sigma} \theta_{\nu\rho}) - (\tau_{\mu\rho} \tau_{\nu\sigma} + \tau_{\mu\sigma} \tau_{\nu\rho}) \right] \\ &= k_*^2 \left[P_{22}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} + P_{33}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} (\theta\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}^2 &= k_*^2 [(\theta_{\mu\rho} - \tau_{\mu\rho})(\theta_{\nu\sigma} - \tau_{\nu\sigma}) + (\theta_{\mu\sigma} - \tau_{\mu\sigma})(\theta_{\nu\rho} - \tau_{\nu\rho})] - (S_{\mu\rho} S_{\nu\sigma} + S_{\mu\sigma} S_{\nu\rho}) \\ &= 4k_*^2 \left[P_{11}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} + P_{44}(2)_{\mu\nu,\rho\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Pode-se mostrar por inspeção direta que os operadores (B.2)-(B.5) satisfazem a seguinte tabela de multiplicação:

	$P(2)_{\rho\sigma,\kappa\lambda}$	$(\tau S)_{\rho\sigma,\kappa\lambda}$	$(\tau S)_{\rho\sigma,\kappa\lambda}^2$	$(\theta\tau S)_{\rho\sigma,\kappa\lambda}$	$(\theta\tau S)_{\rho\sigma,\kappa\lambda}^2$
$P(2)_{\mu\nu,\rho\sigma}$	$P(2)$	τS	$(\tau S)^2$	$\theta\tau S$	$(\theta\tau S)^2$
$(\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}$	τS	$(\tau S)^2$	$k_*^2 (\tau S)$	0	0
$(\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}^2$	$(\tau S)^2$	$k_*^2 (\tau S)$	$k_*^2 (\tau S)^2$	0	0
$(\theta\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}$	$\theta\tau S$	0	0	$(\theta\tau S)^2$	$4k_*^2 (\theta\tau S)$
$(\theta\tau S)_{\mu\nu,\rho\sigma}^2$	$(\theta\tau S)^2$	0	0	$4k_*^2 (\theta\tau S)$	$4k_*^2 (\theta\tau S)^2$

Tabela B.1: Tabela de multiplicação dos operadores no setor de spin-2

Restringindo a discussão para o setor de spin-2 somente, o problema de calcular os propagadores é reduzido à resolução de um problema de álgebra linear

$$\left(xP(2) + y\tau S + z(\tau S)^2 + u\theta\tau S + v(\theta\tau S)^2 \right) (aP(2) + bS(2)) \equiv P(2), \quad (\text{B.6})$$

na qual a Tabela B.1 é bastante útil. A solução geral desse problema é dada por:

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{b}{b^2 k_*^2 - a^2}, \quad z = -\frac{1}{a} \frac{b^2}{b^2 k_*^2 - a^2}, \quad u = \frac{b}{4b^2 k_*^2 - a^2}, \quad v = -\frac{1}{a} \frac{b^2}{4b^2 k_*^2 - a^2}. \quad (\text{B.7})$$

Para o operador de onda (3.51) tem-se que $a = \frac{1}{2}k^2 (\alpha + \beta k^2)$ e $b = \frac{1}{4} (\mu k^2 + \lambda k^4)$. Portanto esse resultado coincide com o resultado obtido pelo método da base de projetores ortogonais realizado na Seção 3.4.

Deve-se notar que, sem a definição de uma base ortonormal de operadores, existem algumas ambiguidades em se escolher os blocos fundamentais que fecham a álgebra de operadores, tal como na Tabela B.1. Dessa maneira, tal procedimento pode resultar em operadores redundantes que põe em risco a tarefa de inverter o operador de onda adequadamente. Outro fato é que mesmo de posse dos propagadores, o uso de uma base não ortonormal pode causar dificuldades na interpretação dos modos propagantes. Conforme discutido na Seção 3.5, a base de operadores nos graus de liberdade permite a separação do propagador em setores independentes. Isso torna a identificação e interpretação física dos modos propagantes mais direta.

Apêndice C

Relações Tensoriais entre Operadores de Projeção para Gravitação de Hořava-Lifshitz

Com o intuito de auxiliar o uso dos operadores em graus de liberdade e $SO(3)$ para gravitação de Hořava-Lifshitz, listamos algumas identidades satisfeitas por esses. A fim de evitar que a notação fique carregada, alguns índices dos operadores serão omitidos.

C.1 Operadores para Campos Vetoriais: $N^i - N^i$

Identidade entre os Operadores

$$P^{NN}(1)_{ij} = P_{33}^{NN}(1^{++})_{ij} + P_{44}^{NN}(1^{--})_{ij}. \quad (\text{C.1})$$

Identidades Tensoriais

$$\delta_{ij} = P_{33}^{NN}(0)_{ij} + P^{NN}(1)_{ij}, \quad (\text{C.2a})$$

$$k_i k_j = k^2 P_{33}^{NN}(0)_{ij}, \quad (\text{C.2b})$$

$$\varepsilon_{ijk} k^k = \sqrt{k^2} \left(P_{12}^{NN}(1^{++})_{ij} - P_{21}^{NN}(1^{--})_{ij} \right). \quad (\text{C.2c})$$

C.2 Operadores para Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2: $h - h$

Identidade entre os Operadores

$$P^{hh}(1)_{ij,kl} = P_{11}^{hh}(1^{++}) + P_{22}^{hh}(1^{--}), \quad (\text{C.3a})$$

$$P^{hh}(2)_{ij,kl} = P_{11}^{hh}(2^{++}) + P_{22}^{hh}(2^{--}). \quad (\text{C.3b})$$

Identidades Tensoriais

$$\delta_{ij,kl} = 12 (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = P^{hh}(2) + P^{hh}(1) + P_{11}^{hh}(0) + P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{C.4a})$$

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = 2P_{11}^{hh}(0) + \sqrt{2}P_{12}^{hh}(0) + \sqrt{2}P_{21}^{hh}(0) + P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{C.4b})$$

$$k_i k_j \delta_{kl} + k_k k_l \delta_{ij} = \sqrt{2}k^2 \left(P_{12}^{hh}(0) + P_{21}^{hh}(0) \right) + 2k^2 P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{C.4c})$$

$$k_i k_k \delta_{jl} + k_i k_l \delta_{jk} + k_j k_k \delta_{il} + k_j k_l \delta_{ik} = 2k^2 P^{hh}(1) + 4k^2 P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{C.4d})$$

$$k_i k_j k_k k_l = k^4 P_{22}^{hh}(0), \quad (\text{C.4e})$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{pki}\delta_{jl} + \varepsilon_{pkj}\delta_{il} + \varepsilon_{pli}\delta_{jk} + \varepsilon_{pdj}\delta_{ik}) k^p = \\ & 2\sqrt{k^2} \left(2P_{12}^{hh}(2^{-+}) - 2P_{21}^{hh}(2^{+-}) - P_{12}^{hh}(1^{+-}) + P_{21}^{hh}(1^{-+}) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.4f})$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{pki}k_j k_l + \varepsilon_{pkj}k_i k_l + \varepsilon_{pli}k_j k_k + \varepsilon_{pdj}k_i k_k) k^p = \\ & 2k^2 \sqrt{k^2} \left(-P_{12}^{hh}(1^{+-}) + P_{21}^{hh}(1^{-+}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4g})$$

C.3 Operadores entre Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2 e Campos Vetoriais: $h - N$

Identidades Tensoriais

$$P^{hN}(1^+)_{i,j,k} = P_{13}^{hN}(1^{++}) + P_{24}^{hN}(1^{--}), \quad (\text{C.5a})$$

$$\delta_{ij}k_k = \sqrt{2k^2}P_{13}^{hN}(0) + \sqrt{k^2}P_{23}^{hN}(0), \quad (\text{C.5b})$$

$$\frac{1}{2}(k_i\delta_{kj} + k_j\delta_{ki}) = \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{2}} \left(P_{13}^{hN}(1^{++}) + P_{24}^{hN}(1^{--}) \right) + \sqrt{k^2}P_{23}^{hN}(0^{++}). \quad (\text{C.5c})$$

C.4 Operadores entre Campos Vetoriais e Campos Tensoriais Simétricos de Rank-2: $N - h$

Identidades Tensoriais

$$P^{Nh}(1^+)_{i,jk} = P_{31}^{Nh}(1^{++}) + P_{42}^{Nh}(1^{--}), \quad (\text{C.6a})$$

$$k_i\delta_{jk} = \sqrt{2k^2}P_{31}^{Nh}(0) + \sqrt{k^2}P_{32}^{Nh}(0), \quad (\text{C.6b})$$

$$\frac{1}{2}(k_j\delta_{ik} + k_k\delta_{ij}) = \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{2}} \left(P_{31}^{Nh}(1^{++}) + P_{42}^{Nh}(1^{--}) \right) + \sqrt{k^2}P_{32}^{Nh}(0). \quad (\text{C.6c})$$

Apêndice D

Publicações vinculadas a tese

- C. A. Hernaski, B. Pereira-Dias, A. A. Vargas-Paredes, *Extending the Spin Projection Operators for Gravity Models with Parity-Breaking in 3-D*, Phys. Lett. **A374**, 3410-3415 (2010), arXiv:1001.2784 [hep-th]
- J. A. Helayël-Neto, C. A. Hernaski, B. Pereira-Dias, A. A. Vargas-Paredes, V. J. Vasquez-Otoya, *Chern-Simons Gravity with (Curvature)²- and (Torsion)²-Terms and A Basis of Degree-of-Freedom Projection Operators*, Phys. Rev. D **82**, 064014 (2010), arXiv:1005.3831 [hep-th]
- B. Pereira-Dias, C. A. Hernaski, and J. A. Helayël-Neto, *Probing the effects of Lorentz-symmetry violating Chern-Simons and Ricci-Cotton terms in higher derivative gravity*, Phys. Rev. D **83**, 084011 (2011), arXiv:1009.5132 [hep-th]
- A. Accioly, J. Helayel-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati, B. Pereira-Dias, *Some interesting features of new massive gravity*, Class. Quant. Grav. **28**, 225008 (2011), arXiv:1108.0889 [hep-th]
- B. Pereira-Dias, C. A. Hernaski, J. A. Helayel-Neto, *Considerations on the Graviton Excitation Modes of Hořava-Lifshitz Gravity*, JHEP **1203**, 013 (2012), arXiv:1111.5345 [hep-th]
- A. Accioly, B. Pereira-Dias, C. A. Hernaski, J. Helayel-Neto, *New class of Spin Projection Operators for 3D models*, Phys. Rev. D **86**, 105046 (2012), arXiv:1207.5044 [hep-th]

Referências Bibliográficas

- [1] John Collins, Alejandro Perez, Daniel Sudarsky, Luis Urrutia, and Hector Vucetich, “Lorentz invariance and quantum gravity: an additional fine-tuning problem?” *Phys.Rev.Lett.* **93**, 191301 (2004), [arXiv:gr-qc/0403053 \[gr-qc\]](#).
- [2] John Collins, Alejandro Perez, and Daniel Sudarsky, “Lorentz invariance violation and its role in quantum gravity phenomenology,” (2006), [arXiv:hep-th/0603002 \[hep-th\]](#).
- [3] Rodolfo Gambini, Saeed Rastgoo, and Jorge Pullin, “Small Lorentz violations in quantum gravity: do they lead to unacceptably large effects?” *Class.Quant.Grav.* **28**, 155005 (2011), [arXiv:1106.1417 \[gr-qc\]](#).
- [4] A. Ashtekar, “New Variables for Classical and Quantum Gravity,” *Phys.Rev.Lett.* **57**, 2244–2247 (1986).
- [5] Carlo Rovelli, “Loop quantum gravity,” *Living Rev.Rel.* **1**, 1 (1998), [arXiv:gr-qc/9710008 \[gr-qc\]](#).
- [6] Thomas Thiemann, “Lectures on loop quantum gravity,” *Lect.Notes Phys.* **631**, 41–135 (2003), [arXiv:gr-qc/0210094 \[gr-qc\]](#).
- [7] Fay Dowker, Joe Henson, and Rafael D. Sorkin, “Quantum gravity phenomenology, Lorentz invariance and discreteness,” *Mod.Phys.Lett.* **A19**, 1829–1840 (2004), [arXiv:gr-qc/0311055 \[gr-qc\]](#).
- [8] Carlo Rovelli and Simone Speziale, “Reconcile Planck scale discreteness and the Lorentz-Fitzgerald contraction,” *Phys.Rev.* **D67**, 064019 (2003), [arXiv:gr-qc/0205108 \[gr-qc\]](#).
- [9] G. Amelino-Camelia, John R. Ellis, N.E. Mavromatos, Dimitri V. Nanopoulos, and Subir Sarkar, “Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts,” *Nature* **393**, 763–765 (1998), [arXiv:astro-ph/9712103 \[astro-ph\]](#).
- [10] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin, “Nonstandard optics from quantum space-time,” *Phys.Rev.* **D59**, 124021 (1999), [arXiv:gr-qc/9809038 \[gr-qc\]](#).
- [11] Jorge Alfaro, Hugo A. Morales-Tecotl, and Luis F. Urrutia, “Quantum gravity corrections to neutrino propagation,” *Phys.Rev.Lett.* **84**, 2318–2321 (2000), [arXiv:gr-qc/9909079 \[gr-qc\]](#).
- [12] Jorge Alfaro, Hugo A. Morales-Tecotl, and Luis F. Urrutia, “Loop quantum gravity and light propagation,” *Phys.Rev.* **D65**, 103509 (2002), [arXiv:hep-th/0108061 \[hep-th\]](#).
- [13] Jorge Alfaro, Hugo A. Morales-Tecotl, and Luis F. Urrutia, “Quantum gravity and spin 1/2 particles effective dynamics,” *Phys.Rev.* **D66**, 124006 (2002), [arXiv:hep-th/0208192 \[hep-th\]](#).

- [14] V. Alan Kostelecky and Stuart Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys.Rev.* **D39**, 683 (1989).
- [15] John R. Ellis, N. E. Mavromatos, and Dimitri V. Nanopoulos, “Quantum gravitational diffusion and stochastic fluctuations in the velocity of light,” *Gen.Rel.Grav.* **32**, 127–144 (2000), [arXiv:gr-qc/9904068 \[gr-qc\]](#).
- [16] John R. Ellis, K. Farakos, N. E. Mavromatos, Vasiliki A. Mitsou, and Dimitri V. Nanopoulos, “Astrophysical probes of the constancy of the velocity of light,” *Astrophys.J.* **535**, 139–151 (2000), [arXiv:astro-ph/9907340 \[astro-ph\]](#).
- [17] John R. Ellis, N. E. Mavromatos, Dimitri V. Nanopoulos, and G. Volkov, “Gravitational recoil effects on fermion propagation in space-time foam,” *Gen.Rel.Grav.* **32**, 1777–1798 (2000), [arXiv:gr-qc/9911055 \[gr-qc\]](#).
- [18] John R. Ellis, N. E. Mavromatos, and Dimitri V. Nanopoulos, “How large are dissipative effects in noncritical Liouville string theory?,” *Phys.Rev.* **D63**, 024024 (2001), [arXiv:gr-qc/0007044 \[gr-qc\]](#).
- [19] Nathan Seiberg and Edward Witten, “String theory and noncommutative geometry,” *JHEP* **9909**, 032 (1999), [arXiv:hep-th/9908142 \[hep-th\]](#).
- [20] Shiraz Minwalla, Mark Van Raamsdonk, and Nathan Seiberg, “Noncommutative perturbative dynamics,” *JHEP* **0002**, 020 (2000), [arXiv:hep-th/9912072 \[hep-th\]](#).
- [21] Sean M. Carroll, Jeffrey A. Harvey, V. Alan Kostelecky, Charles D. Lane, and Takemi Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys.Rev.Lett.* **87**, 141601 (2001), [arXiv:hep-th/0105082 \[hep-th\]](#).
- [22] Carl E. Carlson, Christopher D. Carone, and Richard F. Lebed, “Bounding noncommutative QCD,” *Phys.Lett.* **B518**, 201–206 (2001), [arXiv:hep-ph/0107291 \[hep-ph\]](#).
- [23] Alexey Anisimov, Tom Banks, Michael Dine, and Michael Graesser, “Comments on noncommutative phenomenology,” *Phys.Rev.* **D65**, 085032 (2002), [arXiv:hep-ph/0106356 \[hep-ph\]](#).
- [24] C.P. Burgess, James M. Cline, E. Filotas, J. Matias, and G.D. Moore, “Loop generated bounds on changes to the graviton dispersion relation,” *JHEP* **0203**, 043 (2002), [arXiv:hep-ph/0201082 \[hep-ph\]](#).
- [25] Don Colladay and V. Alan Kostelecky, “CPT violation and the standard model,” *Phys.Rev.* **D55**, 6760–6774 (1997), [arXiv:hep-ph/9703464 \[hep-ph\]](#).
- [26] Don Colladay and V. Alan Kostelecky, “Lorentz violating extension of the standard model,” *Phys.Rev.* **D58**, 116002 (1998), [arXiv:hep-ph/9809521 \[hep-ph\]](#).
- [27] V. Alan Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys.Rev.* **D69**, 105009 (2004), [arXiv:hep-th/0312310 \[hep-th\]](#).
- [28] Petr Horava, “Membranes at Quantum Criticality,” *JHEP* **0903**, 020 (2009), [arXiv:0812.4287 \[hep-th\]](#).
- [29] Petr Horava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys.Rev.* **D79**, 084008 (2009), [arXiv:0901.3775 \[hep-th\]](#).
- [30] Stefano Liberati and Luca Maccione, “Lorentz Violation: Motivation and new constraints,” *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* **59**, 245–267 (2009), [arXiv:0906.0681 \[astro-ph.HE\]](#).

- [31] K.S. Stelle, “Classical Gravity with Higher Derivatives,” [Gen.Rel.Grav.](#) **9**, 353–371 (1978).
- [32] K.S. Stelle, “Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity,” [Phys.Rev.](#) **D16**, 953–969 (1977).
- [33] Stanley Deser and P. van Nieuwenhuizen, “One Loop Divergences of Quantized Einstein-Maxwell Fields,” [Phys.Rev.](#) **D10**, 401 (1974).
- [34] Pankaj Jain and Sukanta Panda, “Two graviton production at $e^+ e^-$ and hadron hadron colliders in the Randall-Sundrum model,” [JHEP](#) **0403**, 011 (2004), [arXiv:hep-ph/0401222](#) [hep-ph].
- [35] Cyril Cartier, Ruth Durrer, and Marcus Ruser, “On graviton production in braneworld cosmology,” [Phys.Rev.](#) **D72**, 104018 (2005), [arXiv:hep-th/0510155](#) [hep-th].
- [36] Zhou Ya-Jin, Ma Wen-Gan, Han Liang, and Zhang Ren-You, “Associated production of graviton with $e^+ e^-$ pair via photon-photon collisions at a linear collider,” [Phys.Rev.](#) **D76**, 054003 (2007), [arXiv:0708.1195](#) [hep-ph].
- [37] Kaoru Hagiwara, Partha Konar, Qiang Li, Kentarou Mawatari, and Dieter Zeppenfeld, “Graviton production with 2 jets at the LHC in large extra dimensions,” [JHEP](#) **0804**, 019 (2008), [arXiv:0801.1794](#) [hep-ph].
- [38] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G.R. Dvali, “The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” [Phys.Lett.](#) **B429**, 263–272 (1998), [arXiv:hep-ph/9803315](#) [hep-ph].
- [39] Lisa Randall and Raman Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” [Phys.Rev.Lett.](#) **83**, 3370–3373 (1999), [arXiv:hep-ph/9905221](#) [hep-ph].
- [40] C.A. Hernaski, A.A. Vargas-Paredes, and J.A. Helayel-Neto, “A Discussion on Massive Gravitons and Propagating Torsion in Arbitrary Dimensions,” [Phys.Rev.](#) **D80**, 124012 (2009), [arXiv:0905.1068](#) [hep-th].
- [41] Carlos A. Hernaski, *Novos Cenários Efetivos para Gravitação Quântica: Torção Dinâmica e Grávitons Massivos na Escala do LHC, Tese de Doutorado* (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2011).
- [42] R. J. Rivers, “Lagrangian theory for neutral massive spin-2 fields,” [Il Nuovo Cimento](#) **34**, 386–403 (1964).
- [43] P. Van Nieuwenhuizen, “On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation,” [Nucl.Phys.](#) **B60**, 478–492 (1973).
- [44] Donald E. Neville, “A Gravity Lagrangian With Ghost Free Curvature**2 Terms,” [Phys.Rev.](#) **D18**, 3535 (1978).
- [45] E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, “New Ghost Free Gravity Lagrangians with Propagating Torsion,” [Phys.Rev.](#) **D21**, 3269 (1980).
- [46] C.A. Hernaski, B. Pereira-Dias, and A.A. Vargas-Paredes, “Extending the Spin Projection Operators for Gravity Models with Parity-Breaking in 3-D,” [Phys.Lett.](#) **A374**, 3410–3415 (2010), [arXiv:1001.2784](#) [hep-th].

- [47] J.A. Helayel-Neto, C.A. Hernaski, B. Pereira-Dias, A.A. Vargas-Paredes, and V.J. Vasquez-Otoya, “Chern-Simons Gravity with (Curvature)²- and (Torsion)²-Terms and A Basis of Degree-of-Freedom Projection Operators,” *Phys.Rev.* **D82**, 064014 (2010), [arXiv:1005.3831 \[hep-th\]](#).
- [48] B. Pereira-Dias, C.A. Hernaski, and J.A. Helayel-Neto, “Probing the Effects of Lorentz-Symmetry Violating Chern-Simons and Ricci-Cotton Terms in Higher Derivative Gravity,” *Phys.Rev.* **D83**, 084011 (2011), [arXiv:1009.5132 \[hep-th\]](#).
- [49] J.L. Boldo, L.M. de Moraes, and J.A. Helayel-Neto, “Comments on topologically massive gravity with torsion,” *Class.Quant.Grav.* **17**, 813–823 (2000), [arXiv:hep-th/9903127 \[hep-th\]](#).
- [50] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, and J. A. Helayel-Neto, “Aspects of causality and unitarity and comments on vortexlike configurations in an abelian model with a Lorentz breaking term,” *Phys.Rev.* **D67**, 085021 (2003).
- [51] J.L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, L.M. de Moraes, C.A.G. Sasaki, and V.J. Vasquez Otoya, “Graviton Excitations and Lorentz-Violating Gravity with Cosmological Constant,” *Phys.Lett.* **B689**, 112–115 (2010), [arXiv:0903.5207 \[hep-th\]](#).
- [52] J.A. Helayel-Neto, L.M. Moraes, and V.J. Vasquez, “Discussing Quantum Aspects of Higher-Derivative 3D-Gravity in the First-Order Formalism,” *Eur.Phys.J.* **C67**, 311–319 (2010), [arXiv:1002.0526 \[hep-th\]](#).
- [53] Antonio Accioly, Jose Helayel-Neto, Esley Scatena, Jefferson Morais, Rodrigo Turcati, *et al.*, “Some interesting features of new massive gravity,” *Class.Quant.Grav.* **28**, 225008 (2011), [arXiv:1108.0889 \[hep-th\]](#).
- [54] Antonio Accioly, José Helayel-Neto, Bruno Pereira-Dias, and Carlos Hernaski, “New class of spin projection operators for 3D models,” *Phys. Rev. D* **86**, 105046 (Nov 2012), [arXiv:1207.5044 \[hep-th\]](#).
- [55] B. Pereira-Dias, C.A. Hernaski, and J.A. Helayel-Neto, “Considerations on the Graviton Excitation Modes of Horava-Lifshitz Gravity,” *JHEP* **1203**, 013 (2012), [arXiv:1111.5345 \[hep-th\]](#).
- [56] Birne Binengar, “Relativistic Field Theories In Three-dimensions,” *J.Math.Phys.* **23**, 1511 (1982).
- [57] M.I. Katsnelson and K.S. Novoselov, “Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics,” *Solid State Commun.* **143**, 3 (2007), [arXiv:cond-mat/0703374 \[cond-mat.mes-hall\]](#).
- [58] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge: Cambridge University Press, 1994).
- [59] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Topologically Massive Gauge Theories,” *Annals Phys.* **140**, 372–411 (1982).
- [60] T. D. Lee and G. C. Wick, “Negative Metric and the Unitarity of the S Matrix,” *Nucl.Phys.* **B9**, 209–243 (1969).
- [61] T. D. Lee and G. C. Wick, “Finite Theory of Quantum Electrodynamics,” *Phys.Rev.* **D2**, 1033–1048 (1970).

- [62] Benjamin Grinstein, Donal O’Connell, and Mark B. Wise, “The Lee-Wick standard model,” *Phys.Rev.* **D77**, 025012 (2008), [arXiv:0704.1845 \[hep-ph\]](#).
- [63] Ezequiel Alvarez, Leandro Da Rold, Carlos Schat, and Alejandro Szynkman, “Electroweak precision constraints on the Lee-Wick Standard Model,” *JHEP* **0804**, 026 (2008), [arXiv:0802.1061 \[hep-ph\]](#).
- [64] Christopher D. Carone and Richard F. Lebed, “A Higher-Derivative Lee-Wick Standard Model,” *JHEP* **0901**, 043 (2009), [arXiv:0811.4150 \[hep-ph\]](#).
- [65] Christopher D. Carone, “Higher-Derivative Lee-Wick Unification,” *Phys.Lett.* **B677**, 306–310 (2009), [arXiv:0904.2359 \[hep-ph\]](#).
- [66] Emidio Gabrielli, “On the dynamical breaking of chiral symmetry: A New mechanism,” *Phys.Rev.* **D77**, 055020 (2008), [arXiv:0712.2208 \[hep-ph\]](#).
- [67] Feng Wu and Ming Zhong, “The TeV Scale Lee-Wick Fields out of Large Extra Dimensional Gravity,” *Phys.Rev.* **D78**, 085010 (2008), [arXiv:0807.0132 \[hep-ph\]](#).
- [68] Feng Wu and Ming Zhong, “The Lee-Wick fields out of gravity,” *Phys.Lett.* **B659**, 694–697 (2008), [arXiv:0705.3287 \[hep-ph\]](#).
- [69] Andreas Rodigast and Theodor Schuster, “No Lee-Wick Fields out of Gravity,” *Phys.Rev.* **D79**, 125017 (2009), [arXiv:0903.3851 \[hep-ph\]](#).
- [70] Benjamin Grinstein, Donal O’Connell, and Mark B. Wise, “Massive vector scattering in Lee-Wick gauge theory,” *Phys.Rev.* **D77**, 065010 (2008), [arXiv:0710.5528 \[hep-ph\]](#).
- [71] Thomas E.J. Underwood and Roman Zwicky, “Electroweak Precision Data and the Lee-Wick Standard Model,” *Phys.Rev.* **D79**, 035016 (2009), [arXiv:0805.3296 \[hep-ph\]](#).
- [72] Christopher D. Carone and Reinard Primulando, “Constraints on the Lee-Wick Higgs Sector,” *Phys.Rev.* **D80**, 055020 (2009), [arXiv:0908.0342 \[hep-ph\]](#).
- [73] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K. Townsend, “Massive Gravity in Three Dimensions,” *Phys.Rev.Lett.* **102**, 201301 (2009), [arXiv:0901.1766 \[hep-th\]](#).
- [74] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K. Townsend, “More on Massive 3D Gravity,” *Phys.Rev.* **D79**, 124042 (2009), [arXiv:0905.1259 \[hep-th\]](#).
- [75] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K. Townsend, “On Higher Derivatives in 3D Gravity and Higher Spin Gauge Theories,” *Annals Phys.* **325**, 1118–1134 (2010), [arXiv:0911.3061 \[hep-th\]](#).
- [76] Roel Andringa, Eric A. Bergshoeff, Mees de Roo, Olaf Hohm, Ergin Sezgin, *et al.*, “Massive 3D Supergravity,” *Class.Quant.Grav.* **27**, 025010 (2010), [arXiv:0907.4658 \[hep-th\]](#).
- [77] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, Jan Rosseel, Ergin Sezgin, and Paul K. Townsend, “More on Massive 3D Supergravity,” *Class.Quant.Grav.* **28**, 015002 (2011), [arXiv:1005.3952 \[hep-th\]](#).
- [78] Masashi Nakasone and Ichiro Oda, “On Unitarity of Massive Gravity in Three Dimensions,” *Prog.Theor.Phys.* **121**, 1389–1397 (2009), [arXiv:0902.3531 \[hep-th\]](#).
- [79] Ibrahim Gullu and Bayram Tekin, “Massive Higher Derivative Gravity in D-dimensional Anti-de Sitter Spacetimes,” *Phys.Rev.* **D80**, 064033 (2009), [arXiv:0906.0102 \[hep-th\]](#).

- [80] Haji Ahmedov and Alikram N. Aliev, “Exact Solutions in D-3 New Massive Gravity,” *Phys.Rev.Lett.* **106**, 021301 (2011), [arXiv:1006.4264 \[hep-th\]](#).
- [81] S. Deser, “Ghost-free, finite, fourth order D=3 (alas) gravity,” *Phys.Rev.Lett.* **103**, 101302 (2009), [arXiv:0904.4473 \[hep-th\]](#).
- [82] Ichiro Oda, “Renormalizability of Massive Gravity in Three Dimensions,” *JHEP* **0905**, 064 (2009), [arXiv:0904.2833 \[hep-th\]](#).
- [83] Mark B. Wise, “The Lee Wick Standard Model,” *Int.J.Mod.Phys.* **A25**, 587–596 (2010), [arXiv:0908.3872 \[hep-ph\]](#).
- [84] Stanley Deser and R. Jackiw, “Higher derivative Chern-Simons extensions,” *Phys.Lett.* **B451**, 73–76 (1999), [arXiv:hep-th/9901125 \[hep-th\]](#).
- [85] Antonio Accioly, “Quadratic gravity theories in (2+1)-dimensions and the topological Chern-Simons term,” *Phys.Rev.* **D67**, 127502 (2003).
- [86] Antonio Accioly, “Can one cure the nonunitarity of three-dimensional quadratic gravity using a topological Chern-Simons term?,” *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **127**, 100–104 (2004).
- [87] Brian Whitt, “Fourth Order Gravity as General Relativity Plus Matter,” *Phys.Lett.* **B145**, 176 (1984).
- [88] Antonio Accioly, Jose Helayel-Neto, Jefferson Morais, Esley Scatena, and Rodrigo Turcati, “Investigations in massive D-3 gravity,” *Phys.Rev.* **D83**, 104005 (2011).
- [89] Sean M. Carroll, George B. Field, and Roman Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys.Rev.* **D41**, 1231 (1990).
- [90] Ralf Lehnert, “CPT and Lorentz-symmetry breaking: A Review,” Em *Di Domenico, A. (Ed.): Handbook on neutral kaon interferometry at a Phi-factory*, 131–154(2006), [arXiv:hep-ph/0611177 \[hep-ph\]](#).
- [91] O.W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance,” *Phys.Rev.Lett.* **89**, 231602 (2002), [arXiv:hep-ph/0201258 \[hep-ph\]](#).
- [92] L. Fonda and G. C. Ghirardi, *Symmetry Principles in Quantum Physics* (Marcel Dekker Inc., 1970).
- [93] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos, and M. T. D. Orlando, “Violação da Simetria de Lorentz,” *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 57–64 (2007).
- [94] R. Jackiw and S.Y. Pi, “Chern-Simons modification of general relativity,” *Phys.Rev.* **D68**, 104012 (2003), [arXiv:gr-qc/0308071 \[gr-qc\]](#).
- [95] R. Jackiw, “Four-dimensional Einstein theory extended by a three-dimensional Chern-Simons term,” (2003), [arXiv:gr-qc/0310115 \[gr-qc\]](#).
- [96] Sean M. Carroll and George B. Field, “Is there evidence for cosmic anisotropy in the polarization of distant radio sources?,” *Phys.Rev.Lett.* **79**, 2394–2397 (1997), [arXiv:astro-ph/9704263 \[astro-ph\]](#).
- [97] C. Adam and Frans R. Klinkhamer, “Causality and radiatively induced CPT violation,” *Phys.Lett.* **B513**, 245–250 (2001), [arXiv:hep-th/0105037 \[hep-th\]](#).

- [98] Stephon Alexander and Nicolas Yunes, “Chern-Simons Modified General Relativity,” *Phys.Rept.* **480**, 1–55 (2009), [arXiv:0907.2562 \[hep-th\]](#).
- [99] A.F. Ferrari, M. Gomes, J.R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, *et al.*, “Lorentz violation in the linearized gravity,” *Phys.Lett.* **B652**, 174–180 (2007), [arXiv:hep-th/0609222 \[hep-th\]](#).
- [100] C. Furtado, J.R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A.F. Santos, “Dynamical Chern-Simons modified gravity and Friedmann-Robertson-Walker metric,” (2010), [arXiv:1005.1911 \[hep-th\]](#).
- [101] Haji Ahmedov and Alikram N. Aliev, “Decoupling and Reduction in Chern-Simons Modified Gravity,” *Phys.Lett.* **B690**, 196–200 (2010), [arXiv:1003.3148 \[hep-th\]](#).
- [102] Umit Ertem, “Generalized Chern-Simons Modified Gravity in First-Order Formalism,” (2009), [arXiv:0912.1433 \[gr-qc\]](#).
- [103] Mingzhe Li, Yi-Fu Cai, Xiulian Wang, and Xinmin Zhang, “*CPT* Violating Electrodynamics and Chern-Simons Modified Gravity,” *Phys.Lett.* **B680**, 118–124 (2009), [arXiv:0907.5159 \[hep-ph\]](#).
- [104] Stephon Alexander and Nicolas Yunes, “Chern-Simons Modified Gravity as a Torsion Theory and its Interaction with Fermions,” *Phys.Rev.* **D77**, 124040 (2008), [arXiv:0804.1797 \[gr-qc\]](#).
- [105] Marcelo Botta Cantcheff, “Einstein-Cartan formulation of Chern-Simons Lorentz Violating Gravity and Holographic Structure,” *Phys.Rev.* **D78**, 025002 (2008), [arXiv:0801.0067 \[hep-th\]](#).
- [106] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov, “A proposal for covariant renormalizable field theory of gravity,” *Phys.Lett.* **B691**, 60–64 (2010), [arXiv:1004.3613 \[hep-th\]](#).
- [107] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov, “Covariant power-counting renormalizable gravity: Lorentz symmetry breaking and accelerating early-time FRW universe,” *Phys.Rev.* **D83**, 023001 (2011), [arXiv:1007.4856 \[hep-th\]](#).
- [108] J.K. Webb, J.A. King, M.T. Murphy, V.V. Flambaum, R.F. Carswell, *et al.*, “Indications of a spatial variation of the fine structure constant,” *Phys.Rev.Lett.* **107**, 191101 (2011), [arXiv:1008.3907 \[astro-ph.CO\]](#).
- [109] V. Alan Kostelecky and Matthew Mewes, “Astrophysical Tests of Lorentz and *CPT* Violation with Photons,” *Astrophys.J.* **689**, L1–L4 (2008), [arXiv:0809.2846 \[astro-ph\]](#).
- [110] A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, *et al.*, “Remarks on the causality, unitarity and supersymmetric extension of the Lorentz and *CPT* violating Maxwell-Chern-Simons model,” *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **127**, 105–109 (2004), [arXiv:hep-th/0305089 \[hep-th\]](#).
- [111] H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, and A.L.M.A. Nogueira, “Supersymmetric extension of the Lorentz and *CPT* violating Maxwell-Chern-Simons model,” *Phys.Rev.* **D68**, 065030 (2003), [arXiv:hep-th/0304166 \[hep-th\]](#).
- [112] Petr Horava and Charles M. Melby-Thompson, “General Covariance in Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys.Rev.* **D82**, 064027 (2010), [arXiv:1007.2410 \[hep-th\]](#).

- [113] Petr Horava, “General Covariance in Gravity at a Lifshitz Point,” *Class.Quant.Grav.* **28**, 114012 (2011), [arXiv:1101.1081 \[hep-th\]](#).
- [114] Gerard 't Hooft and M.J.G. Veltman, “One loop divergencies in the theory of gravitation,” *Annales Poincare Phys.Theor.* **A20**, 69–94 (1974).
- [115] Steven Weinberg, “Ultraviolet Divergences In Quantum Theories Of Gravitation,” Em: Hawking, S.W., Israel, W. (Eds.): *General Relativity – An Einstein Centenary Survey*. Cambridge, Cambridge University Press, 790–831(1980).
- [116] E. M. Lifshitz, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **11**, 255–269 (1941).
- [117] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner, “The Dynamics of general relativity,” (1962), [arXiv:gr-qc/0405109 \[gr-qc\]](#).
- [118] Thomas P. Sotiriou, Matt Visser, and Silke Weinfurtner, “Quantum gravity without Lorentz invariance,” *JHEP* **0910**, 033 (2009), [arXiv:0905.2798 \[hep-th\]](#).
- [119] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, “Consistent Extension of Horava Gravity,” *Phys.Rev.Lett.* **104**, 181302 (2010), [arXiv:0909.3525 \[hep-th\]](#).
- [120] Diego Blas, Oriol Pujolas, and Sergey Sibiryakov, “Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy,” *JHEP* **1104**, 018 (2011), [arXiv:1007.3503 \[hep-th\]](#).
- [121] Ian Kimpton and Antonio Padilla, “Lessons from the decoupling limit of Horava gravity,” *JHEP* **1007**, 014 (2010), [arXiv:1003.5666 \[hep-th\]](#).
- [122] Tao Zhu, Fu-Wen Shu, Qiang Wu, and Anzhong Wang, “General covariant Horava-Lifshitz gravity without projectability condition and its applications to cosmology,” *Phys.Rev.* **D85**, 044053 (2012), [arXiv:1110.5106 \[hep-th\]](#).
- [123] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* (Cambridge University Press, 1996).
- [124] Domenico Orlando and Susanne Reffert, “On the Renormalizability of Horava-Lifshitz-type Gravities,” *Class.Quant.Grav.* **26**, 155021 (2009), [arXiv:0905.0301 \[hep-th\]](#).
- [125] Miao Li and Yi Pang, “A Trouble with Horava-Lifshitz Gravity,” *JHEP* **0908**, 015 (2009), [arXiv:0905.2751 \[hep-th\]](#).
- [126] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, “On the Extra Mode and Inconsistency of Horava Gravity,” *JHEP* **0910**, 029 (2009), [arXiv:0906.3046 \[hep-th\]](#).
- [127] Kazuya Koyama and Frederico Arroja, “Pathological behaviour of the scalar graviton in Horava-Lifshitz gravity,” *JHEP* **1003**, 061 (2010), [arXiv:0910.1998 \[hep-th\]](#).
- [128] Horatiu Nastase, “On IR solutions in Horava gravity theories,” (2009), [arXiv:0904.3604 \[hep-th\]](#).
- [129] Gianluca Calcagni, “Detailed balance in Horava-Lifshitz gravity,” *Phys.Rev.* **D81**, 044006 (2010), [arXiv:0905.3740 \[hep-th\]](#).
- [130] Christos Charmousis, Gustavo Niz, Antonio Padilla, and Paul M. Saffin, “Strong coupling in Horava gravity,” *JHEP* **0908**, 070 (2009), [arXiv:0905.2579 \[hep-th\]](#).

- [131] Shinji Mukohyama, “Horava-Lifshitz Cosmology: A Review,” *Class.Quant.Grav.* **27**, 223101 (2010), [arXiv:1007.5199 \[hep-th\]](#).
- [132] V.I. Zakharov, “Linearized gravitation theory and the graviton mass,” *JETP Lett.* **12**, 312 (1970).
- [133] H. van Dam and M.J.G. Veltman, “Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields,” *Nucl.Phys.* **B22**, 397–411 (1970).
- [134] M. Fierz and W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field,” *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A173**, 211–232 (1939).
- [135] Kurt Hinterbichler, “Theoretical Aspects of Massive Gravity,” *Rev.Mod.Phys.* **84**, 671–710 (2012), [arXiv:1105.3735 \[hep-th\]](#).
- [136] Alan M. da Silva, “An Alternative Approach for General Covariant Horava-Lifshitz Gravity and Matter Coupling,” *Class.Quant.Grav.* **28**, 055011 (2011), [arXiv:1009.4885 \[hep-th\]](#).
- [137] Alan M. da Silva, *Gravidade quântica com simetria de Lifshitz, Tese de Doutorado* (Universidade de São Paulo, 2011).
- [138] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations* (Cambridge, Cambridge University Press, 2005).
- [139] Ahmad Borzou, Kai Lin, and Anzhong Wang, “Detailed balance condition and ultraviolet stability of scalar field in Horava-Lifshitz gravity,” *JCAP* **1105**, 006 (2011), [arXiv:1103.4366 \[hep-th\]](#).
- [140] Y. Iwasaki, “Consistency condition for propagators,” *Phys.Rev.* **D2**, 2255–2256 (1970).
- [141] P. Van Nieuwenhuizen, “Radiation of massive gravitation,” *Phys.Rev.* **D7**, 2300–2308 (1973).
- [142] A.I. Vainshtein, “To the problem of nonvanishing gravitation mass,” *Phys.Lett.* **B39**, 393–394 (1972).
- [143] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics* (Academic Press: New York, 1967).
- [144] H. Lu, Jianwei Mei, and C.N. Pope, “Solutions to Horava Gravity,” *Phys.Rev.Lett.* **103**, 091301 (2009), [arXiv:0904.1595 \[hep-th\]](#).
- [145] Alex Kehagias and Konstadinos Sfetsos, “The Black hole and FRW geometries of non-relativistic gravity,” *Phys.Lett.* **B678**, 123–126 (2009), [arXiv:0905.0477 \[hep-th\]](#).
- [146] Enrico Barausse, Ted Jacobson, and Thomas P. Sotiriou, “Black holes in Einstein-aether and Horava-Lifshitz gravity,” *Phys.Rev.* **D83**, 124043 (2011), [arXiv:1104.2889 \[gr-qc\]](#).
- [147] Elias B. Kiritsis and Georgios Kofinas, “On Horava-Lifshitz ‘Black Holes’,” *JHEP* **1001**, 122 (2010), [arXiv:0910.5487 \[hep-th\]](#).
- [148] Hyung Won Lee, Yong-Wan Kim, and Yun Soo Myung, “Slowly rotating black holes in the Horava-Lifshitz gravity,” *Eur.Phys.J.* **C70**, 367–371 (2010), [arXiv:1008.2243 \[hep-th\]](#).
- [149] Enrico Barausse and Thomas P. Sotiriou, “A no-go theorem for slowly rotating black holes in Horava-Lifshitz gravity,” (2012), [arXiv:1207.6370 \[gr-qc\]](#).

- [150] Robert C. Myers and Maxim Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” [Phys.Rev.Lett. **90**, 211601 \(2003\)](#), [arXiv:hep-ph/0301124 \[hep-ph\]](#).
- [151] Sidney R. Coleman and Sheldon L. Glashow, “High-energy tests of Lorentz invariance,” [Phys.Rev. **D59**, 116008 \(1999\)](#), [arXiv:hep-ph/9812418 \[hep-ph\]](#).
- [152] T. Mariz, J.R. Nascimento, and A. Yu. Petrov, “On the perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms,” [Phys.Rev. **D85**, 125003 \(2012\)](#), [arXiv:1111.0198 \[hep-th\]](#).
- [153] H. Belich, G.S. Dias, J.A. Helayel-Neto, F.J.L. Leal, W. Spalenza, *et al.*, “An Investigation of the K_F -type Lorentz-Symmetry Breaking Gauge Models in $N = 1$ -Supersymmetric Scenario,” (2010), [arXiv:1009.1326 \[hep-th\]](#).
- [154] Jose A. Helayel-Neto, H. Belich, G.S. Dias, F.J.L. Leal, and W. Spalenza, “A Discussion on the role of fermionic supersymmetric partners in Lorentz-symmetry breaking,” [PoS ICFI2010, 032 \(2010\)](#).
- [155] Don Colladay and Patrick McDonald, “Vector Superfields and Lorentz Violation,” [Phys.Rev. **D83**, 025021 \(2011\)](#), [arXiv:1010.1781 \[hep-ph\]](#).
- [156] C.F. Farias, A.C. Lehum, J.R. Nascimento, and A. Yu. Petrov, “On the superfield supersymmetric aether-like Lorentz-breaking models,” [Phys.Rev. **D86**, 065035 \(2012\)](#), [arXiv:1206.4508 \[hep-th\]](#).
- [157] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity* (Princeton Univ. Press, 1992).
- [158] Peter C. West, *Introduction to supersymmetry and supergravity* (World Scientific, 1990).
- [159] P. Van Nieuwenhuizen, “Lectures in Supergravity Theory,” Lectures In Supergravity Theory, In *Cargese 1978, Proceedings, Recent Developments In Gravitation*, 519–548(1978).
- [160] P. Van Nieuwenhuizen, “Supergravity,” [Phys.Rept. **68**, 189–398 \(1981\)](#).
- [161] C. N. Ferreira, J. A. Helayël-Neto, L. R. U. Manssur, and M. E. X. Guimarães, *Introdução a Supergravidade: Notas de Aula* (1999).
- [162] S. Ferrara and P. Van Nieuwenhuizen, “Structure of Supergravity,” [Phys.Lett. **B78**, 573 \(1978\)](#).
- [163] P.K. Townsend and P. van Nieuwenhuizen, “Anomalies, Topological Invariants and the Gauss-bonnet Theorem In Supergravity,” [Phys.Rev. **D19**, 3592 \(1979\)](#).
- [164] S. Ferrara and M. Villasante, “Curvatures, Gauss-bonnet And Chern-simons Multiplets In Old Minimal $N=1$ Supergravity,” [J.Math.Phys. **30**, 104 \(1989\)](#).
- [165] S. Cecotti, S. Ferrara, and M. Villasante, “Linear Multiplets and Super Chern-Simons Forms in 4D Supergravity,” [Int.J.Mod.Phys. **A2**, 1839 \(1987\)](#).