

Felipe Peixoto Poulis

*Geometria de Weyl como representação do  
espaço-tempo*

Rio de Janeiro  
Novembro (2011)

Felipe Peixoto Poulis

*Geometria de Weyl como representação do  
espaço-tempo*

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Gravitação.

Orientador:

Prof. Dr. José Martins Salim

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Novembro (2011)

*Aos meus pais.*

# *Agradecimentos*

Para a conclusão deste trabalho gostaria de agradecer não somente às pessoas com quem convivi diretamente nos últimos quatro anos, mas também àquelas que, de alguma forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui tanto acadêmica quanto socialmente realizado.

Primeiramente, não poderia deixar de agradecer aos meus pais, Leonor de Ornelas Peixoto Poulis e Panayotis Poulis, aos quais devo toda minha educação e possibilidade de escolher livremente minha carreira. Aos meus demais familiares, por me proporcionarem um agradável ambiente de convívio e à todos que são próximos da família, pelos diversos encontros e momentos de descontração.

Aos meus vários amigos, desde os de longa data até os mais recentes. Entre eles eu cito: Luiz Gustavo J. M. de Souza, com o qual possuo quase vinte anos de amizade; meu inestimável amigo Saulo da Cruz Campos, o qual também agradeço imensamente a ajuda na revisão desta tese; sua adorável família: a mãe Marilene Campos, irmãos Diego e Tarso e o grande Ângelo Ceraldi, a quem devo valiosas conversas e ajudas em diversas ocasiões; o igualmente inestimável Augusto César Fadel, que, juntamente com Saulo, teve presença marcante nos últimos doze anos de minha vida e através do qual tive oportunidade de conhecer pessoas igualmente incríveis; sua mãe, Selma Fadel, que aturou ouvir nossas besteiras madrugada a dentro quase todos os finais de semana durante um bom tempo em sua casa, e seu pai, Nage Fadel, que financiava de muito bom grado o entretenimento de todas aquelas noites.

Através destes, tive o grande privilégio de conhecer e conviver com: Alexandre Fernandes, Bela Freitas, César Pádoa, Diego Freire, Elaine Favre, Elton Souza, Flávio e Felipe Favre, Gabriela Monteiro, Joana Salles, José Roberto Almuiña, Júlio Silva, Leonardo Dominguez, Orlando e Bete, Renata Reis, Sidália Pereira, Tadeu Freitas, seus pais, Ângelo e Isaura, Vitor Borges e seus pais, Mônica e Jorge, Wal Alves, Adriana Pereira, Bárbara Freitas, Helaine Prestes, seu pai Roberto, Luiz Monteiro, Marcelo Martins e Miriam Rodrigues.

Por meio destes, por sua vez, tive a felicidade de conhecer meus mais recentes e

queridos amigos: Alexandre Höfke, Bruno Borsatto, Cecília Dakowski, Daniel Kohler, Diogo Paris, Gustavo “Macedo” Corrêa, Júnior Gomes, Pina Otoni, Vanessa Cavalheiro, Vinícius Assumpção e Viviane Nogueira. Assim como a querida Carla C. Meira, a quem tenho grande estima e foi de grande ajuda quando precisei.

Devo agradecer também aos meus colegas e, muitos deles, amigos, alguns entre os quais conheço desde minha época de faculdade: Alvaro Iribarrem, Ambré Nicolai, André Gavini, André Lemos, Azucena Paz, Beatriz Siffert, Boiúna, Bruno Moraes, Carlos Zarro, Diego Pantoja, Eduardo Bittencourt, Eduardo Zambrano, Érico Goulart, Felipe Tovar, Gabriel Menezes, Grasielle Santos, Habib Dumet, Josephine Rua, Júnior Toniato, Luciana Hirsch, Marcela C. B. de Carvalho, Maria Borba, Mariana Lima, Marília Carneiro, Martín Aparício, Nilton Medeiros, Nuno Crokidakis, Pedro Bertussi, Rafael Aranha, Rafael Perez, Roberto Vilela, Rômulo Abreu, Sandro Vitenti, Stella Pereira, Thiago Caramês, Vicente Antunes e Victor Otoya.

Em especial, eu gostaria de agradecer a Leonardo de Souza Grigorio, com o qual dividi o mesmo apartamento por dois anos e cuja convivência foi extremamente agradável, divertida e harmoniosa. Agradeço também aos seus ótimos pais, Katharine e Gilberto Grigorio, os quais tenho profunda admiração, assim como a seu irmão Daniel e as amigas que fiz através deles, Cleonice de Assis e Ana Carolina Damélia.

Devo também um imenso agradecimento à Erika W. A. Rodrigues, por ter aparecido com seu quarto para alugar num momento extremamente oportuno, no qual já não tinha a menor esperança de encontrar algo. Agradeço pela sua convivência pacífica e tranquila, além de ser uma ótima pessoa. Assim como agradeço à sua família, composta por pessoas incríveis: a tia Christina, a prima Priscila e marido Ricardo; além do casal de amigos Itália e Marcos, e o vizinho Gérson. Também agradeço à Rosângela, por ter me indicado à Erika, e às ótimas cozinheiras, Neusa e Cátia.

Às entidades superiores que, acredito, fizeram-se presentes, não só no desenvolvimento desta tese, mas também em diversas outras ocasiões em que precisei.

Aos grandes professores que tive, desde a faculdade: Maria Antonieta, João Barcelos Neto, Clóvis Wotzasek, Herch Moysés Nussenzeig, Marcus Venicius, José Simões, Lígia Rodrigues, Nami Svaiter, Evaldo Curado, Nelson Pinto-Neto, Luiz Oliveira, José Helayël-Neto, entre outros.

Agradeço à todo o pessoal do CBPF, em particular, ao pessoal da CFC, entre os quais eu cito José de Almeida Ricardo, Elisabete Vicente de Souza e Myrian. Ao professor

José Abdalla Helayël-Neto por sua grande ajuda e boa vontade. Agradeço também, especialmente, a todo o pessoal do ICRA: suas secretárias, Luciene, Elizete, Priscila, Luzia e Mônica; seus pesquisadores, em especial: Mário Novello, Nelson Pinto-Neto, que já me ajudou incrivelmente, Luiz A. R. de Oliveira e Martin Makler.

Aos colaboradores e ex-integrantes do ICRA: Santiago Bergliaffa, Sérgio Jorás e Henrique Oliveira.

Um agradecimento muito especial ao meu grande orientador, José Martins Salim, a quem eu devo meus quase dez anos de formação em gravitação, através de uma convivência extremamente tranquila, pacífica, agradável e incrivelmente proveitosa. Por ser uma ótima pessoa e bastante paciente. Agradeço também pela sábia orientação desta tese e participação crucial na minha formação como físico.

Finalmente, devo agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, às Coordenações de Formação Científica e de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, assim como, novamente, aos meus pais, pelo apoio financeiro.

“Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς  
ἐφ’ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.”

*Euclides - Os Elementos de Geometria.*

# *Resumo*

Apresentamos argumentos a favor de uma descrição geométrica para o espaço-tempo, inserindo-o no contexto da geometria diferencial. Introduzimos seus elementos básicos e caracterizamos as geometrias riemannianas, usadas pela teoria da relatividade geral. Expomos os postulados desta quanto a caracterização da geometria de acordo com o conteúdo energético envolvido bem como para as propriedades cinemáticas das partículas teste. Caracterizamos o relógio óptico como instrumento de medida para se descrever o espaço-tempo e mencionamos a necessidade, decorrente do seu uso, de se considerar uma geometria mais geral do que a de Riemann, a saber, a de Weyl, para uma formulação deste tipo da gravitação. Neste contexto, redefinimos o conceito de tempo-próprio e fazemos a restrição ao caso integrável das geometrias de Weyl (WIST). Caracterizamos devidamente o espaço-tempo dos observadores em termos de uma métrica efetiva e realizamos a descrição cinemática de uma congruência de curvas nesse novo tipo de geometria. Formulamos nossa teoria de acordo com o princípio da ação mínima e estabelecemos um acoplamento com os demais campos físicos tal que a teoria manifesta uma simetria de calibre inédita entre as que descrevem a gravitação. Obtemos uma solução para o vácuo estático e esférico-simétrico na qual a necessidade de definição do tempo-próprio tal como fizemos se faz presente. Descrevemos o fenômeno do desvio para o vermelho a partir da aproximação da óptica geométrica do eletromagnetismo e consideramos sua manifestação em modelos cosmológicos, caso em que a associação de um conteúdo físico ao objeto geométrico introduzido por Weyl se torna evidente, como decorrência da invariância de calibre. Caracterizamos a fonte da geometria quanto ao seu regime termodinâmico e investigamos algumas possibilidades de associação dos elementos da variedade de Weyl com conteúdos físicos plausíveis. Damos início a tentativas de quebra da simetria de calibre da teoria através de uma dinâmica específica para cada um dos campos envolvidos. Entre elas, citamos trabalhos em que a mecânica quântica é obtida a partir de uma formulação geométrica em WIST, onde a geometria desempenha o papel do potencial quântico no formalismo de Bohm-de Broglie. Em seguida, consideramos a versão relativística do MOND, um modelo fenomenológico criado para resolver o problema das curvas de rotação anômalas. Neste caso, seu sucesso só é possível ao se alterar o acoplamento que postulamos e a solução não se mostrou satisfatória. Restabelecemos nosso acoplamento e passamos a tratar da aproximação de campo fraco da teoria das cordas. Suas soluções em modelos cosmológicos e para o vácuo estático e esférico-simétrico já foram obtidas e fornecem um universo sem singularidades e um buraco de minhoca. Em seguida, efetuamos uma troca de variáveis dinâmicas e mostramos como nossa formulação pode incorporar os mesmos resultados de qualquer teoria de campo escalar na relatividade geral. Concluimos que nossa teoria é conceitualmente mais consistente e fornece um modo bastante natural de se considerar campos escalares na gravitação. Finalizamos com a perspectiva de se continuar na busca por uma dinâmica apropriada aos objetos geométricos consistentemente com observações e mencionamos a possibilidade de tratar teorias em  $f(R)$  na nossa reformulação.

# *Abstract*

We present arguments for considering a geometrical description for space-time, placing it in the context of differential geometry. We introduce its basic elements and characterize the Riemannian geometries, which is used by the general relativity theory. We expose its postulates concerning the characterization of geometry according to the energy content involved and the kinematic properties of test particles. We characterize the light clock as a measuring tool to describe space-time and point out the need, resulting from its use, to consider a more general geometry for this type of formulation for gravitation than Riemann's, namely, Weyl geometry. In this context, we redefine the concept of proper-time and make the restriction to the integrable case of Weyl geometries (WIST). We adequately characterize the observers' space-time by means of an effective metric and describe a congruence of curves kinematically in this new kind of geometry. Our theory is formulated in light of the principle of least action and the coupling with other physical fields is established in such a way that the theory shows a gauge symmetry which is unprecedented among those describing gravitation. We obtain a static and spherically symmetric solution for the vacuum in which the need to define the proper-time the way we did is manifest. We describe the phenomenon of red-shift from the geometrical optics approach of electromagnetism and consider its manifestation in cosmological models, in which case the association of a physical content to the geometrical object introduced by Weyl becomes evident as a result of the gauge invariance. We characterize the source of geometry according to its thermodynamical regime and investigate some possible associations regarding Weyl manifold elements with acceptable physical content. We make attempts to break the gauge symmetry of the theory through a specific dynamics for each of the fields involved. Among them, we make references to some works in which quantum mechanics is obtained from a geometrical formulation in WIST, where geometry plays the role of quantum potential in the formalism of Bohm-de Broglie. Then, we consider the relativistic version of MOND, a phenomenological model created to solve the problem of the anomalous rotation curves. In this case, its success is only possible by changing the assumption with respect to the coupling, and the solution is not satisfactory. After reestablishing our coupling, we move on to deal with the weak field approximation of string theory. Its solutions for cosmological models and the spherically symmetric static vacuum have already been obtained and provide a universe without singularities and a wormhole. Afterwards, we exchange the dynamical variables and show how our formulation can incorporate the same results of any scalar field theory in general relativity. We conclude that our theory is conceptually more consistent and provides an extremely natural way to consider a scalar field in gravitation. At last, we present the perspective of carrying on with the search for an appropriate dynamics for the geometrical objects consistent with observations and mention the possibility of treating  $f(R)$  theories in our reformulation.

# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 11
<b>1 Descrição geométrica do espaço-tempo</b>	p. 20
1.1 Gravitação e espaço-tempo . . . . .	p. 20
1.2 Espaço-tempo e geometria diferencial . . . . .	p. 24
1.3 Relatividade geral . . . . .	p. 26
1.4 Caracterização dos instrumentos de medida . . . . .	p. 31
1.5 Abordagem axiomática e geometria de Weyl . . . . .	p. 34
1.5.1 Espaço-tempo de Weyl integrável . . . . .	p. 40
1.6 Congruência de curvas . . . . .	p. 43
<b>2 Formulação variacional</b>	p. 53
2.1 Ações para a geometria e partículas teste . . . . .	p. 53
2.2 Acoplamento com outros campos . . . . .	p. 54
2.3 Vácuo estático e esférico-simétrico . . . . .	p. 59
<b>3 Desvio para o vermelho</b>	p. 68
3.1 Eletromagnetismo invariante de calibre . . . . .	p. 68
3.2 Óptica geométrica . . . . .	p. 69
3.3 Desvio para o vermelho . . . . .	p. 71
3.4 Invariância de calibre em modelos cosmológicos . . . . .	p. 74
<b>4 Termodinâmica em WIST</b>	p. 76

4.1	Formulação invariante de calibre . . . . .	p. 76
4.2	Modelo cosmológico de FLRW em Riemann . . . . .	p. 83
4.3	Modelo anisotrópico . . . . .	p. 87
4.4	Modelo estático em equilíbrio . . . . .	p. 94
<b>5</b>	<b>Modelos não-invariantes</b>	p. 99
5.1	Campo escalar geométrico como potencial quântico . . . . .	p. 100
5.2	MOND geométrico . . . . .	p. 101
5.2.1	Modelo de Friedmann . . . . .	p. 113
5.3	WIST vindo da ação efetiva da teoria de cordas . . . . .	p. 115
5.4	WIST como teorias de campo escalar da RG . . . . .	p. 116
	<b>Conclusão</b>	p. 120
	<b>Apêndice A – Simetrias dos índices do tensor de Riemann em Weyl</b>	p. 124
	<b>Apêndice B – Aceleração relativa entre partículas vizinhas</b>	p. 128
	<b>Apêndice C – Cálculo explícito da invariância do redshift</b>	p. 131
C.1	Caso plano . . . . .	p. 131
C.2	Caso hiperbólico . . . . .	p. 134
C.3	Caso esférico . . . . .	p. 137
	<b>Referências</b>	p. 138

# *Introdução*

“Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ’ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.” Esta é a definição de reta segundo Os Elementos de Geometria, de Euclides (1). Numa tradução livre, podemos ter: “Linha reta são os pontos que repousam equilibradamente sobre si” (uns sobre os outros); ou então, “Linha reta são os pontos que se apóiam em si mesmos”; ou, numa outra tradução encontrada, “Linha reta são os pontos que caem sobre si”. Esta última expando claramente algo notável implícito nas outras, que é o recurso à atração gravitacional para se caracterizar o objeto geométrico denominado *linha reta*.

Na época de Euclides, a interação gravitacional era bastante óbvia e dispensava qualquer necessidade de explicação,<sup>1</sup> daí a liberdade que ele teve em fazer seu uso sem risco de comprometer o rigor de sua definição. O curioso é como sua leitura se inverteu ao longo do tempo, resultando numa descrição para a gravidade amparada justamente nas propriedades das retas.

Num panorama geral, podemos dizer que, com a evolução da geometria, em particular a perspectiva, ela ampliou seu domínio e extrapolou sua descrição ao próprio espaço físico o qual habitamos. Com isso, criou-se a ideia de que nos encontramos num espaço euclidiano. Posteriormente, este espaço foi questionado quanto ao seu significado físico e foi caracterizado de acordo com a inércia dos corpos no contexto da mecânica newtoniana. Entrou em cena, em seguida, a questão desta caracterização ser ou não absoluta.

Esta obteve uma solução dada por Einstein ao considerar as propriedades físicas locais da interação gravitacional e resultou na afirmação de que ela determina os referenciais inerciais em cada ponto. Neles, recuperamos a geometria pseudo-euclidiana introduzida pela relatividade especial e, globalmente, a geometria do espaço-tempo deixa de ser plana. Ela adquire uma curvatura e o campo gravitacional passa a ser caracterizado pelo chamado *desvio geodético*, que diz como geodésicas vizinhas tendem a se afastar ou se aproximar umas das outras. Estas nada mais são do que o conceito de reta numa geometria curva, sendo as quais os corpos livres de força tendem a seguir, pela teoria.

---

<sup>1</sup>De fato, o que precisava de justificativa era o porquê do céu não cair. Esta se fazendo através de Atlas, um dos deuses Titãs da mitologia grega, que fora condenado a sustentar os céus nos ombros para sempre.

Resumindo esta pequena introdução histórica, podemos dizer que a definição de reta de Euclides, baseada na noção natural que se tinha da interação gravitacional, ganhou, com o tempo, uma formulação matemática precisa, enquanto a gravidade passou a ser estudada e obteve uma formulação na qual é caracterizada, justamente, pelas propriedades geométricas do espaço-tempo, inferidas a partir do comportamento das “retas”.

Claro está que fomos bastante superficiais e que a caracterização do campo gravitacional envolve uma prescrição adequada de acordo com o conteúdo energético existente. Todavia, já estamos antecipando o caráter dinâmico do espaço-tempo atribuído pela gravitação de Einstein, que consiste numa formulação geométrica.

Neste trabalho, faremos a reafirmação de uma formulação deste tipo para a interação gravitacional, através de uma dinâmica para o espaço-tempo, porém, generalizando um de seus pressupostos.

A teoria de Einstein da gravitação, chamada de *Relatividade Geral* (RG), trata-se de uma teoria métrica para o espaço-tempo que, para satisfazer um de seus princípios, a saber, o de equivalência (descrito no próximo capítulo) restringe a classe de conexões ( $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ ) possíveis para sua descrição. Estas são os objetos que nos dizem como a geometria altera os vetores ao se deslocarem pela variedade.

Contudo, mesmo preservando o princípio de equivalência, a conexão ainda não adquire uma expressão definida, a qual foi estabelecida ao se impor que a geometria não altere o produto escalar entre dois vetores. Em particular, seus módulos não sofreriam alteração nenhuma vinda da geometria; as únicas alterações seriam em sua direção. Com isso, a conexão fica univocamente determinada em termos da métrica ( $g_{\alpha\beta}$ ) e temos as chamadas *geometrias de Riemann* (2), como representação do espaço-tempo na relatividade geral.

Esta teoria, tal como a relatividade especial já havia feito, rompe com os conceitos de espaço e tempo absolutos. De fato, o tempo deixa de ser considerado um parâmetro evolutivo e passa a fazer parte do contínuo espaço-temporal a quatro dimensões, sujeito às equações dinâmicas. Portanto, faz-se necessário caracterizar devidamente nossos instrumentos de medida de acordo com as propriedades desta formulação.

O método clássico para se fazer medidas nesta teoria consiste em se considerar o relógio óptico descrito na seção 1.4. Este, por sua vez, é a mesma construção usada na relatividade especial e baseia-se na emissão e recepção de raios luminosos para medir tempo e distância.

Porém, quando consideramos uma geometria curva, como na RG, existe uma tendência

deste relógio se desconfigurar, exigindo uma constante manutenção de suas propriedades. Isto torna-se praticamente impossível de se fazer e, portanto, temos um grande problema conceitual da teoria que é a de uma perfeita caracterização dos instrumentos que medem seus próprios objetos teóricos. A RG baseia-se num procedimento exaustivo de implementação de infinitos relógios ópticos sucessivos que, na prática, constitui apenas uma aproximação, dando uma boa medida somente em certos regimes.

Apesar deste problema, iremos adotar a mesma construção para fazermos as medidas na nossa reformulação. De fato, é justamente através dela que surge a motivação do nosso trabalho.

Baseando-se nestes instrumentos e considerando certos axiomas a respeito das trajetórias de partículas em queda livre e de raios luminosos,<sup>2</sup> Ehlers, Pirani e Schild (EPS) (3), seguidos de Woodhouse (4), mostraram que os relógios ópticos admitem como geometria mais geral para o espaço-tempo a desenvolvida por Weyl em 1918 (5) e que leva seu nome. Esta diferencia-se da riemanniana por permitir que os produtos escalares entre dois vetores, em particular, seus próprios módulos, sofram alterações decorrentes da geometria.

A motivação original de Weyl foi a de geometrizar o eletromagnetismo, visando unificá-lo com a gravitação. De acordo com sua proposta, a variação dos comprimentos dos vetores estaria associada ao potencial eletromagnético. Porém, sendo assim, Einstein argumentou que o espectro de emissão dos átomos dependeria de toda sua história e não poderíamos ser capazes de observar as linhas espectrais de um gás de forma bem definida. Isto, conseqüentemente, levou Weyl a abandonar a geometria que desenvolveu.

Os trabalhos posteriores de caracterização axiomática de EPS e Woodhouse, por sua vez, trazem novamente à tona este tipo de geometria. Sendo que, dessa vez, sua motivação é puramente geométrica, *i.e.*, o campo responsável pela variação dos comprimentos ( $\omega_\mu$ ) não está associado a nenhum campo físico conhecido. Ele é apenas mais um objeto usado para se caracterizar o espaço-tempo e surge naturalmente ao se fazer uso dos relógios ópticos. Neste caso, as objeções de Einstein não se aplicam.

Faremos, então, no capítulo 1, a descrição em detalhes de todo este formalismo. Iniciaremos apresentando motivações para se considerar a gravitação como uma propriedade geométrica do espaço-tempo e faremos a introdução da geometria riemanniana. Descreveremos o funcionamento do relógio óptico e faremos um estudo das propriedades da geometria de Weyl que se atribui ao espaço-tempo pelo uso deste instrumento de medida.

---

<sup>2</sup>Descritos por um eletromagnetismo invariante conforme, como o de Maxwell.

Será observada uma simetria de calibre presente na sua descrição e faremos a definição de tempo-próprio dos observadores de modo que ele reproduza todas as propriedades geométricas do espaço-tempo.

Por questões que colocaremos a seguir, será feita uma restrição a um caso particular das geometrias de Weyl, a saber, as integráveis (WIST). Nestas, a simetria de calibre permite a escolha de um específico que nos leva de volta à geometria riemanniana, em que a métrica, nesse caso, possui expressão equivalente a de um objeto que chamaremos de *métrica efetiva* ( $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ ). Esta define-se para qualquer calibre, em relação aos quais é simétrica, e mostraremos ser através dela que os observadores caracterizam a geometria.

Encerraremos o capítulo com uma descrição do comportamento de uma congruência de curvas neste tipo de geometria de Weyl integrável fornecendo toda a interpretação em termos de observáveis cinemáticos.

Matematicamente, tudo encontra-se muito bem descrito. Porém, para atribuímos uma dinâmica aos objetos geométricos, relacionando-os a um dado conteúdo energético, ainda carecemos de uma formulação variacional que contemple o caso mais geral da geometria de Weyl. O que temos é um formalismo deste tipo para seu caso particular integrável, o qual iremos, então, considerar no nosso trabalho. Ademais, é somente através dele que podemos compatibilizar o formalismo com outros já bem estabelecidos da física, como o de Hamilton-Jacobi (6).

Este caso integrável consiste numa restrição quanto à variação dos módulos dos vetores provocada pela geometria. Ele surge ao se impor que o módulo de qualquer vetor seja preservado após o percurso de uma trajetória fechada. Com isto, estabelecemos uma restrição ao campo que promove tal variação e esta passa a depender somente dos pontos inicial e final do percurso. No caso, o campo de Weyl passa a ser descrito por um campo escalar,  $\omega$ .

Introduzimos, então, a formulação variacional para as geometrias de Weyl em WIST no capítulo 2, bem como o acoplamento dos objetos geométricos com o conteúdo energético em questão. Diferentemente de qualquer outro já estabelecido, em particular, dos usados nos diversos trabalhos do nosso grupo neste tema (7–20), iremos estabelecer um tal que nossa formulação apresente uma simetria de calibre inédita entre as teorias da gravitação.

Esta simetria constitui, por si só, um grande avanço teórico e está associada à mesma transformação de calibre em relação à qual a geometria é invariante. Considerando-se que ela envolve uma transformação conforme na métrica, podemos obter uma compreensão

maior do papel desta última na gravitação.

Weyl (5) e Hoyle e Narlikar (21, 22), já haviam proposto que todas as teorias fundamentais da físicas sejam invariantes por transformações locais de escala (conforme). Em seguida, Bekenstein e Meisels (23) argumentaram que esta propriedade pode solucionar problemas conceituais profundos, como o proposto por Dirac (24) sobre a constante gravitacional ser ou não, de fato, uma constante. Portanto, podemos perceber a importância deste tipo de formulação e, embora tenha havido tentativas, nenhuma a fez nesse contexto das geometrias de Weyl, como fizemos.

Finalizamos o capítulo com uma solução analítica para o vácuo estático e esférico-simétrico. Ela manifesta, explicitamente, a liberdade de calibre presente na teoria e serve como um forte argumento para se considerar o espaço-tempo dos observadores como descrito pela métrica efetiva que definimos.

A ação original é invariante de calibre e, portanto, não devemos esperar que as medidas feitas possam determinar algum em particular. O espaço-tempo dos observadores deve acompanhar as mesmas propriedades geométricas da variedade e, portanto, ser igualmente invariante. Portanto, concluímos que a única descrição possível para tal é através da métrica efetiva que, sendo invariante, é univocamente determinada.

De acordo com nosso formalismo, não são somente os observáveis cinemáticos referentes ao movimento das partículas teste nesta geometria que devem ser invariantes. Uma vez que o acoplamento também preserva a simetria de calibre, os observáveis referentes ao conteúdo energético usado como fonte também devem apresentar a mesma invariância.

Para verificarmos isto, consideramos o caso do eletromagnetismo, que se mostrou perfeitamente de acordo com a simetria de calibre inclusive na presença de fontes, e estabelecemos a aproximação da óptica geométrica. A partir dela, caracterizamos o fenômeno do desvio para o vermelho (*redshift*) e verificamos sua invariância. Sendo assim, podemos atribuir parte deste efeito ao campo introduzido por Weyl.

A liberdade de calibre que temos na geometria permite transferir à este campo certas propriedades da métrica e continuarmos com a mesma situação. Desta forma, ele passa a adquirir uma verdadeira realidade física, por ser o responsável, em parte, dos observáveis da teoria.

No caso de modelos cosmológicos, temos a possibilidade notável de atribuir inteiramente à este campo todas as observações de desvio para o vermelho, como iremos concluir na seção 3.4 e mostraremos no apêndice C. Neste caso, portanto, o campo responsável por

gerar as variações do módulo dos vetores fica inteiramente associado ao fluido considerado.

Dada esta propriedade de se identificar o novo campo geométrico com diferentes fluidos, ou sistemas físicos, é interessante caracterizá-los em termos de quantidades termodinâmicas, o que será feito no capítulo 4. Veremos que, embora este campo não tenha nenhuma restrição *a priori*, a sua compatibilidade com situações físicas plausíveis, por sua vez, é mais delicada.

Consideraremos, neste capítulo, uma métrica efetiva correspondendo a um modelo cosmológico representado por um fluido perfeito e, pela alteração do campo de Weyl, iremos obter novas soluções correspondendo a conteúdos físicos completamente diferentes do original. Num dos casos, obteremos uma nova solução para a constante cosmológica, representando uma geometria anisotrópica.

Em todos os casos tratados até então, a simetria de calibre sempre se manteve e, conseqüentemente, podemos recuperar a relatividade geral com seus mesmos resultados. Deste modo, não oferecemos nenhuma alteração observacional que possa privilegiar nossa formulação. Sua distinção da RG tem sido apenas conceitual e de modo a torná-la teoricamente mais consistente.

Todavia, esta mesma liberdade de calibre decorre da introdução de um objeto teórico que, como percebemos, adquire uma autêntica realidade física. Logo, é bastante legítimo que ele possa ter uma dinâmica específica e, portanto, passaremos a investigar as possibilidades de se caracterizá-la consistentemente com observações.

Naturalmente, esta dinâmica poderá quebrar a simetria existente e determinará univocamente os objetos geométricos envolvidos. No entanto, a geometria permanecerá com suas mesmas propriedades e igualmente invariante frente às transformações de calibre. Sendo assim, a definição de tempo-próprio será preservada, bem como a interpretação da métrica efetiva.

Como primeiro exemplo de caracterização deste campo, iniciaremos o capítulo 5 citando os trabalhos de Novello, Salim e Falciano (19, 20) que consideraram um espaço de Minkowski na presença do campo de Weyl e um campo escalar. As equações dinâmicas obtidas neste sistema são exatamente idênticas às da mecânica quântica no formalismo de Bohm-de Broglie, tanto as relativísticas quanto as não-relativísticas. Nessa formulação dinâmica, o campo geométrico de Weyl faz o papel do potencial quântico e a função escalar corresponde à fase da função de onda da partícula escrita na forma polar.

Muito embora essa nova interpretação da mecânica quântica seja bastante interes-

sante, ela se dá num regime em que a forma específica da métrica é irrelevante, por resultar em correções de ordens de grandeza baixíssimas comparadas com as decorrentes do potencial quântico. Ademais, ela se dá na presença de um campo escalar caracterizando a partícula quântica e que determina toda a geometria. Para fazermos a comparação com a relatividade geral, passaremos a considerar somente as situações de vácuo e num regime em que todos os objetos considerados são de igual relevância.

Seguindo adiante, buscamos inspiração num grande problema existente na física teórica, que é o das curvas de rotação anômalas das galáxias (25). Estas consistem numa discrepância observada nas curvas de rotação dos corpos que orbitam o centro de uma galáxia (26) em relação às previsões teóricas de simulações de N-corpos dentro do modelo padrão da cosmologia (27), levando a concluir a existência de um conteúdo material maior do que se infere a partir de sua luminosidade, sendo a diferença atribuída à chamada *matéria escura*.

Um modelo bem sucedido para dar conta destas curvas, dispensando esta componente não observada, surgiu no início dos anos 80 consistindo numa fenomenologia chamada de MOND (MODified Newtonian Dynamics) (28–30). Ela surgiu, primeiramente, como uma alteração da segunda lei de Newton quando as acelerações envolvidas fossem muito menores do que um  $a_0$ , representando uma nova constante universal.<sup>3</sup> Posteriormente, ela passou a considerar apenas o potencial gravitacional que, por sua vez, resultando numa aceleração menor que  $a_0$  altera sua expressão newtoniana. Outros problemas teóricos fizeram com que ela sofresse modificações e, finalmente, resultasse numa formulação extremamente sofisticada denominada TeVeS (32).

Entre o MOND e esta última, houve uma formulação relativística chamada AQUAL, que nos serviu de inspiração. Esta baseia-se num acoplamento das partículas teste com um campo escalar e, na seção 5.2, fizemos a passagem deste modelo para nossa formulação da gravitação em WIST.

Infelizmente, a aproximação newtoniana da nossa teoria neste modelo não resultou em nenhuma alteração em relação à relatividade geral. Porém, ainda assim prosseguimos na tentativa de recuperar os resultados do AQUAL, o que foi possível somente através de uma alteração no acoplamento que postulamos com os campos de matéria. Num cenário cosmológico, a lagrangiana usada para o campo escalar nos fornece um universo sem singularidades.

---

<sup>3</sup>A validade da aproximação newtoniana da relatividade geral é assegurada (31), pois esta discrepância das curvas de rotação se dá em regimes de campos muito fracos.

Ainda que reproduza satisfatoriamente as curvas de rotação das galáxias, e resulte num modelo de universo eterno, o êxito do modelo se deu à custa de uma alteração do nosso acoplamento original. Mais ainda, não é somente através das órbitas dos corpos em torno da galáxia que se infere a necessidade da matéria escura. A mesma diferença entre a matéria visível e a inferida também se observa através das lentes gravitacionais (33–35), *i.e.*, a massa inferida de uma galáxia através deste efeito de lente é tão maior em relação à luminosa quanto ocorre nas curvas de rotação. No entanto, nem esse modelo, tampouco o AQUAL, provocam qualquer alteração nas trajetórias dos raios luminosos, comparadas com as previstas pela RG. Tivemos, portanto, que abandonar esta alternativa, apesar do esforço.

Outra proposta de dinâmica para o campo de Weyl surge a partir do regime de campo fraco da teoria de cordas (36–39). Neste caso, restabelecemos nosso acoplamento original e o princípio variacional resulta num sistema de equações para a métrica efetiva cujo tratamento já havia sido feito anteriormente, tanto num cenário cosmológico (11), quanto num estático e esférico-simétrico (40, 41). No primeiro, obteve-se um universo isento de singularidade, enquanto no segundo, uma solução de buraco de minhoca que, por acaso, já fora considerada anteriormente como modelo de partículas na relatividade geral (42–44).

As soluções consideradas foram para a métrica efetiva porque é justamente ela que caracteriza a geometria do espaço-tempo para os observadores, sendo, portanto, nossa variável de interesse. Chamamos a atenção, então, para a possibilidade de troca de variáveis dinâmicas, considerando a métrica efetiva no lugar da usual.

Na seção 5.4 mostramos como é possível estabelecer esta troca, no conjunto de variáveis dinamicamente independentes. Isto é, passamos a ter nossa ação total escrita não mais em termos do conjunto  $\{\omega, g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\}$  de variáveis dinâmicas, mas em termos de  $\{\omega, \tilde{g}_{\alpha\beta}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\}$ , igualmente independentes.

A grande vantagem disto é que podemos incorporar no nosso formalismo qualquer teoria de campo escalar na relatividade geral. Para tanto, basta fazermos a identificação da métrica usual desta com a nossa métrica efetiva, bem como identificar o campo escalar com o nosso  $\omega$ .

Embora a distinção conceitual entre as duas formulações seja imensa, operacionalmente são idênticas. Com isso, podemos antecipar os resultados de uma suposta lagrangiana para o campo de Weyl no nosso formalismo caso ela já tenha algum análogo da RG. As soluções para a métrica efetiva serão as mesmas encontradas para a usual neste caso análogo. No entanto, em nossa reformulação, o campo escalar usado é legítimo e surge

naturalmente de uma caracterização axiomática para a geometria do espaço-tempo.

Terminamos o capítulo 5 observando a importância dos campos escalares na física e que, embora sejam usados há décadas, especialmente na gravitação e cosmologia, (45–50), nunca houve uma detecção direta deles (51, 52).

Concluimos, portanto, que nossa teoria fornece uma alternativa para a relatividade geral axiomáticamente consistente e natural, criteriosamente bem estabelecida, dotada de uma invariância de calibre, de grande interesse teórico por si só, e que, quando considerada a possibilidade de quebra desta simetria, recupera os resultados de qualquer teoria de campo escalar da gravitação de Einstein.

Temos, como sequência natural deste trabalho, a busca por uma dinâmica adequada para o campo escalar de Weyl, consistentemente com as observações. Algo que, efetivamente, já se faz há décadas. No entanto, finalizamos com uma proposta alternativa de investigar as teorias de  $f(R)$  da gravitação (53–55) no formalismo variacional de Palatini, como meio de se determinar uma forma específica para o campo  $\omega$ . Assim como também, numa terceira abordagem, podemos considerar o análogo da reformulação que fizemos nessas teorias, *i.e.*, considerar uma espécie de teoria de  $f(R)$  com campo escalar, introduzindo dois graus de liberdade na RG: um através da forma da função  $f$ , e outra através da dinâmica para o campo  $\omega$ .

# 1 *Descrição geométrica do espaço-tempo*

Neste capítulo faremos um resumo de como surgiu a ideia de se descrever a interação gravitacional de forma geométrica, atribuindo um caráter dinâmico ao conceito unificado de espaço-tempo originado na relatividade especial. De forma igualmente sucinta, será feita uma introdução à descrição matemática do espaço-tempo tal como é feita na relatividade geral, baseando-se numa variedade riemanniana. Em seguida, caracterizaremos os instrumentos de medida e observaremos o problema conceitual dessa descrição da gravitação com essa construção de réguas e relógios. Também será justificada a consideração de uma variedade mais geral do que a de Riemann para a representação do espaço-tempo, a saber, a de Weyl, e feita uma descrição detalhada de suas propriedades, com uma redefinição do tempo-próprio.

## 1.1 Gravitação e espaço-tempo

Existem algumas razões para se considerar a interação gravitacional como uma propriedade do espaço-tempo. Apresentaremos, aqui, as motivações para tal assim como se encontram nas referências 2 e 56, sem o compromisso de reproduzir as verdadeiramente utilizadas por Einstein no desenvolvimento da RG.

Primeiramente, é necessário reconhecer que o espaço possui um significado físico por si só determinando uma classe de observadores para os quais as leis da mecânica newtoniana são válidas. Para demonstrar isso, Newton fez uso do seu famoso experimento do balde: seja um balde cheio d'água suspenso por uma corda retorcida deixado a girar; inicialmente, conforme a corda se estira, o balde gira relativamente à água e a superfície desta permanece plana; com o tempo, a viscosidade da água faz com que ela acompanhe a rotação do balde e sua superfície passa a ser de um parabolóide de revolução; por fim, o balde termina seu movimento e temos uma situação análoga a inicial, em que balde e

água possuem um movimento relativo, no entanto, a superfície da água permanece como um parabolóide de revolução. Isto mostra que não é o movimento relativo entre os dois que importa na descrição do fenômeno de deformação da superfície da água mas, sim, o movimento dela em relação ao espaço absoluto. Isto é, o espaço não pode ser considerado como um mero conjunto de possíveis posições simultâneas dos diferentes corpos, devendo ser reconhecido como uma verdadeira entidade física, manifestando-se através das *forças de inércia*. No caso do experimento, a rotação da água caracterizava um movimento acelerado em relação ao espaço e, por conseguinte, ela sofria o efeito da força centrífuga. Esta, sendo um exemplo de forças de inércia, existe somente em seu referencial. É sempre possível obter um outro onde elas desaparecem e, por isso, elas também são chamadas de *forças aparentes*. O espaço fica, então, caracterizado de forma absoluta como aquele em relação ao qual não existem essas forças inerciais, determinando uma classe de observadores movendo-se uniformemente um em relação ao outro os quais chamaremos, por brevidade, de *co-móveis com o espaço*.

Sendo, essas forças aparentes, decorrentes da inércia dos corpos, que é proporcional à massa dos mesmos, podemos estabelecer um critério para distinguí-las das forças verdadeiras. Isto é, caso seja observado um efeito universal nos corpos materiais considerados que seja proporcional às suas massas, pode-se desconfiar que trata-se de forças inerciais e que, por uma mudança adequada de observador, elas desapareceriam. Caso que ocorre com a já mencionada força centrífuga e também com a de Coriolis.

Outra força universal que atua em todos os corpos proporcionalmente às suas massas é a da gravidade. Propriedade, esta, reforçada pelos experimentos de Eötvös e Dicke (57). Dessa forma, é de se esperar que, assim como ocorre com as forças aparentes, existe a possibilidade de se efetuar uma mudança de observador de modo a anular o efeito desta interação.

De fato, a gravitação tem como propriedade o fato que, quando submetidos ao mesmo campo gravitacional, todos os corpos movem-se da mesma maneira, independentemente das suas massas, desde que suas condições iniciais sejam as mesmas. Isto permite uma analogia com os movimentos dos corpos livres de forças descritos por um observador não-inercial. Com efeito, se para um observador inercial os corpos livres de força realizam um movimento retilíneo uniforme, e considerando que inicialmente suas velocidades sejam as mesmas elas permanecerão iguais sempre, certamente, quando descritos por um observador não-inercial, todos deverão mover-se da mesma maneira. Portanto, as propriedades do movimento para um referencial não-inercial são as mesmas para um observador inercial

na presença de um campo gravitacional.

Para ilustrar essa analogia, Einstein fez uso do famoso experimento imaginário do elevador: seja um observador dentro de um elevador totalmente fechado, de modo que ele não possa fazer nenhuma medida exterior a este, e percebe que tudo o que se encontra ao seu redor sofre a ação de uma força proporcional à massa no sentido do chão. Para este observador, podem existir duas possibilidades: ou o elevador e todo seu conteúdo encontram-se sujeitos ao campo gravitacional de um corpo bastante massivo e extenso abaixo dos mesmos gerando a força detectada, ou o elevador está sendo puxado aceleradamente para cima de modo que a força proporcional à massa medida seja em virtude da inércia dos objetos no seu interior. Ambas as alternativas dão, igualmente, conta da força observada e não há resultado algum conhecido na mecânica que permita fazer qualquer distinção entre as duas possibilidades.

De forma semelhante, poderíamos anular o campo gravitacional do corpo bastante massivo abaixo do elevador deixando-o acelerar livremente sob seu efeito. As forças inerciais decorrentes dessa aceleração cancelariam identicamente as produzidas pelo corpo massivo.

Nos dois casos em que se consideraram as forças de inércia, seja para simular um campo gravitacional ou para anulá-lo, é necessário ter em mente que este procedimento somente vale localmente, pois os campos aos quais sistemas não-inerciais são equivalentes, quando não divergem no infinito, permanecem com um valor constante, diferentemente dos campos gravitacionais, que sempre vão a zero para grandes distâncias em relação aos corpos que os produzem. Desta forma, não é possível anular o campo gravitacional em todos os pontos do espaço,<sup>1</sup> somente na região em que ele pode ser considerado uniforme. É importante frisar que esta possibilidade de simular ou anular um campo só vale para a interação gravitacional, cuja força é proporcional às massas dos corpos que interagem.

Todavia, esta possibilidade, mesmo sendo local, permite uma revisão do conceito de espaço absoluto obtido a partir do experimento do balde de Newton. Afinal, deste concluímos que aquele se caracteriza pela ausência de forças inerciais ou, dito de outra forma, é aquele em que estas forças se anulam quando se considera a classe de observadores co-móveis em relação a ele. Porém, estas forças, por sua vez, são caracterizadas justamente pela possibilidade de se anulá-las através de uma troca de referencial adequada, uma vez que são proporcionais às massas, e estes novos referenciais considerados co-móveis com o espaço. Desta forma, pelo que acabamos de concluir sobre a interação gravitacional,

---

<sup>1</sup>Passaremos a nos referir ao espaço-tempo a partir da próxima seção.

ela se enquadra na mesma situação das outras forças inerciais e qualquer observador que anule seu campo poderia ser considerado co-móvel ao espaço. Teríamos, assim, trocado o conceito de espaço como sendo uma entidade física absoluta por um conceito relativo, uma vez que diferentes campos gravitacionais determinariam diferentes referenciais inerciais, e caracterizado pela sua distribuição de matéria.

Este é, justamente, o ponto de vista adotado por Mach para tratar a questão da existência ou não de um espaço absoluto, segundo o qual os possíveis sistemas referenciais são determinados pela matéria do universo. No caso do balde do Newton, além da água girar em relação ao eixo imaginário que cruza a Terra, ela também gira em relação à toda matéria que preenche o espaço, sendo esta rotação relativa a responsável pela deformação em sua superfície.

Entretanto, no caso do experimento do elevador de Einstein, uma possibilidade deixou de ser considerada para a distinção entre as duas alternativas para justificar a aceleração dos corpos no interior do elevador: a propagação de raios luminosos. Quando o experimento foi discutido, a equivalência entre as duas possibilidades consideradas residia no fato dos fenômenos mecânicos e gravitacionais serem igualmente descritos nelas duas. Porém, até a época do desenvolvimento da RG, a gravitação era considerada como uma interação que atuava somente em corpos massivos. Dessa forma, os raios luminosos, desprovidos de massa, não deveriam sofrer alteração nenhuma em suas trajetórias mesmo na presença de um campo gravitacional. Assim, teríamos uma possibilidade de distinguir entre as duas alternativas para justificar a aceleração dos corpos no interior do elevador. No caso deste ser içado, um raio de luz inicialmente horizontal passando de uma parede a outra claramente iria percorrer uma parábola e atingiria a segunda delas abaixo de onde saiu da primeira. Por outro lado, no caso em que houvesse um grande corpo massivo abaixo do elevador, a trajetória da luz seria inalterada.

Einstein estava tão convicto da equivalência entre as duas possibilidades que ousou fazer a audaciosa e inédita previsão: a de que os raios luminosos, de fato, sofrem alterações em suas trajetórias devidas a presença de um campo gravitacional. Isto sendo verdade e de acordo com o descrito no experimento do elevador iria consagrar a gravitação como uma propriedade do espaço, caracterizando diferentes observadores inerciais dependendo da configuração de matéria existente, ao mesmo tempo que consolidaria o *princípio de equivalência*, que diz que as duas situações descritas no experimento do elevador são fisicamente indistinguíveis, *i.e.*, os campos gravitacionais são (localmente) equivalentes a sistemas referenciais não-inerciais.

Levando adiante esta ideia, Einstein, finalmente, terminou a formulação da sua teoria da gravitação (RG) em 1915 e, em 1919, a deflexão da luz pelo campo gravitacional foi verificada, em pleno acordo com sua teoria, através de um eclipse solar observado na cidade cearense de Sobral.

## 1.2 Espaço-tempo e geometria diferencial

Seguindo adiante as considerações feitas na seção anterior, devemos observar que, tendo em mente os resultados da relatividade especial, não faz sentido tratar separadamente o espaço do tempo. Isto é, o que deve ser considerado como verdadeira entidade física não é o espaço tal como era concebido na física newtoniana clássica, mas, sim, o conceito unificado de espaço-tempo. À luz da teoria da relatividade especial, as forças inerciais e gravitacionais preservam as mesmas propriedades; logo, o que se concluiu a respeito da existência de um espaço absoluto passa a valer para o novo conceito de espaço-tempo. Assim, devemos ter este determinado pelas diferentes configurações de matéria existentes que, por conseguinte, determinam diferentes referenciais inerciais em cada ponto do espaço-tempo.

Na relatividade especial, temos a seguinte expressão que dá o quadrado da quantidade chamada de *intervalo*:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.1)$$

sendo invariante por transformações entre referenciais inerciais, *i.e.*, transformações de Lorentz.

Como discutido anteriormente, o campo gravitacional é tratado como uma força aparente, de modo que é localmente equivalente a um referencial não-inercial. Desta forma, ao considerar este referencial, devemos ter que, para ele, o intervalo deixa de ter a forma acima, passando a ter coeficientes como funções das coordenadas ou termos cruzados nas diferenciais. Por exemplo, passando para um sistema com rotação uniforme, temos as transformações de coordenadas

$$\begin{cases} x = x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t), \\ y = x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t), \\ z = z', \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $\Omega$  é a velocidade angular ao longo do eixo  $z$ . No novo sistema, o intervalo fica

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt, \quad (1.3)$$

que, independentemente da lei de transformação para a coordenada temporal, nunca poderá ser representado como uma soma dos quadrados das diferenciais das coordenadas.

Num caso geral, um referencial não-inercial tem o intervalo dado através de

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.4)$$

onde a quantidade simétrica nos índices  $g_{\alpha\beta}$ , chamada de *métrica*, é função das coordenadas espaço-temporais.

No caso do exemplo dado, ao efetuarmos a transformação de coordenadas inversa, recairíamos, naturalmente, na mesma expressão 1.1 e teríamos anulado em todos os pontos do espaço-tempo o campo ao qual o referencial não-inercial representado pelo intervalo 1.3 equivale. Como foi observado que não é possível anular o campo gravitacional em todos os pontos da variedade, devemos concluir que a 1.3 não passa de um espaço-tempo sem a presença de campo gravitacional, tratando-se, portanto, do espaço de Minkowski da relatividade especial, o que é óbvio em vista da forma como ela foi obtida. Assim como, no caso da presença de um campo gravitacional, a métrica  $g_{\alpha\beta}$  nunca poderá ser igual a de Minkowski ( $\eta_{\alpha\beta}$ ) em todos os pontos do espaço-tempo por uma transformação de coordenadas.

Temos, assim, a gravitação inserida no contexto da geometria diferencial, onde o campo gravitacional é caracterizado por uma curvatura na geometria do espaço-tempo induzida por uma métrica que, num caso geral, é dada em coordenadas curvilíneas e não pode ser igual à de Minkowski em todos os pontos.

A proposta da relatividade geral é de atribuir inteiramente a esta curvatura os fenômenos gravitacionais. Isto é, a ideia de “força gravitacional” atuando nos corpos numa geometria pseudo-euclidiana é substituída por corpos percorrendo trajetórias numa geometria curva, livres desta força. Estas trajetórias seriam aquelas em que o vetor tangente sofre apenas variações decorrentes da curvatura, representando a generalização de linha reta para estas variedades.

### 1.3 Relatividade geral

Uma vez que passamos a considerar uma geometria para o espaço-tempo mais geral do que a pseudo-euclidiana da relatividade especial, devemos estabelecer critérios para selecionar alguma das diversas possibilidades tratadas pela geometria diferencial. Isto porque uma geometria curva introduz uma nova quantidade geométrica independente,  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ , chamada de *conexão*, necessária para se comparar quantidades tensoriais em diferentes pontos da variedade cuja forma específica não é conhecida *a priori*.

Uma vez que diferentes pontos do espaço-tempo constituem espaços vetoriais distintos, devemos estabelecer como um vetor se comporta quando transportado de um ponto ao outro, *i.e.*, como a curvatura altera suas componentes, de modo que se possa comparar vetores em posições diversas. Para essa comparação, desejamos que as únicas alterações provocadas pelo deslocamento considerado sejam em virtude da curvatura e teremos, nesse caso, o que chamamos de *transporte paralelo*. A conexão surge ao se considerar um deslocamento infinitesimal de um vetor, por exemplo, contravariante, cujas componentes em  $x^{\alpha}$  são dadas por  $A^{\alpha}$  e, num ponto vizinho  $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$ , valem  $A^{\alpha} + dA^{\alpha}$ . Quando o submetemos a um transporte paralelo até o ponto  $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$ , este passará a valer  $A^{\alpha} + \delta A^{\alpha}$  e a diferença  $DA^{\alpha}$  entre os dois vetores neste mesmo ponto será

$$DA^{\alpha} = dA^{\alpha} - \delta A^{\alpha}. \quad (1.5)$$

Impondo que  $\delta(A^{\alpha} + B^{\alpha}) = \delta A^{\alpha} + \delta B^{\alpha}$ , para dois vetores  $A^{\alpha}$  e  $B^{\alpha}$  quaisquer, devemos ter uma dependência linear entre  $\delta A^{\alpha}$  e  $A^{\alpha}$ . Portanto, podemos escrever (56)

$$\delta A^{\alpha} = -\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} A^{\beta} dx^{\gamma}. \quad (1.6)$$

Substituindo na expressão anterior, ficamos com

$$DA^{\alpha} = \left( \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} A^{\beta} \right) dx^{\gamma}. \quad (1.7)$$

Caso a curva em questão seja parametrizada por  $\sigma$ , teremos

$$DA^{\alpha} = \left( \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} A^{\beta} \right) \frac{dx^{\gamma}}{d\sigma} d\sigma = u^{\gamma} \nabla_{\gamma} A^{\alpha} d\sigma = \frac{DA^{\alpha}}{D\sigma} d\sigma, \quad (1.8)$$

onde foram definidos o vetor tangente à curva,  $u^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{d\sigma}$ , e  $\frac{DA^{\alpha}}{D\sigma} \equiv u^{\gamma} \nabla_{\gamma} A^{\alpha}$  para qualquer

vetor  $A^\alpha$ , assim como a *derivada covariante* do vetor  $A^\alpha$ :

$$\nabla_\gamma A^\alpha \equiv \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha A^\beta. \quad (1.9)$$

Impomos, adicionalmente, a regra de Leibnitz para operadores diferenciais:  $D(AB) = ADB + BDA$ , onde  $A$  e  $B$  são objetos tensoriais de qualquer ordem; assim como a condição  $Df = df$  para o caso de uma função escalar,  $f$ , qualquer. Isto é, as funções escalares não sofrem alterações devidas à curvatura quando transportadas paralelamente. Com isso, para dois vetores  $A^\alpha$  e  $B_\alpha$  arbitrários, obtemos

$$B_\alpha DA^\alpha + A^\alpha DB_\alpha = D(A^\alpha B_\alpha) = d(A^\alpha B_\alpha) = B_\alpha dA^\alpha + A^\alpha dB_\alpha \Rightarrow \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow A^\alpha (DB_\alpha - dB_\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma B_\gamma dx^\beta) = 0 \quad \forall A^\alpha \quad (1.11)$$

$$\therefore DB_\alpha = \left( \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma B_\gamma \right) dx^\beta. \quad (1.12)$$

Definimos então,

$$\nabla_\beta B_\alpha \equiv \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma B_\gamma. \quad (1.13)$$

A generalização da derivada covariante para objetos tensoriais de ordem maior se encontra em (58) e é dada, para um tensor  $A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m}$  arbitrário, por:

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} + \sum_i \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_i} A^{\alpha_1 \dots \delta \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} - \\ &\quad - \sum_i \Gamma_{\gamma\beta_i}^\delta A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \delta \dots \beta_m}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde o índice  $\delta$  do tensor substitui os índices  $\alpha_i$  ou  $\beta_i$ .

Diferentemente dos outros objetos considerados até agora, a conexão que acabamos de introduzir não se trata de um tensor pois, sob uma transformação de coordenadas, pode-se mostrar (56) que suas componentes transformam-se como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta}. \quad (1.15)$$

Percebemos que, devido ao segundo termo do lado direito, a soma de duas conexões deixa de ser uma conexão.

Uma vez caracterizado o transporte paralelo de um vetor, vamos definir um vetor *paralelamente transportado* ao longo de uma curva como aquele que, em cada ponto dela, seja o mesmo obtido pelo seu transporte paralelo. Isto é, um campo vetorial tal que a 1.5 se anule. Sendo  $A^\alpha$  um vetor desse tipo, teremos, nesse caso,

$$\frac{DA^\alpha}{D\sigma} = u^\beta \nabla_\beta A^\alpha = 0 \quad (1.16)$$

Pelo que foi dito sobre o transporte paralelo, temos que as variações deste campo vetorial ao longo da variedade são somente decorrentes da geometria. Como nesta formulação da gravitação consideramos que a trajetória de uma partícula teste, quando livre de qualquer outra força, seja determinada exclusivamente pela geometria, devemos ter sua direção (vetor tangente) como um campo vetorial paralelamente transportado ao longo dela. De fato, como ficará claro mais adiante, a mesma curva é obtida quando o vetor tangente é proporcional ao seu transporte paralelo. Isto é, as trajetórias das partículas teste são caracterizadas pelas curvas cujos vetores tangente  $u^\alpha$  satisfazem a equação

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = f(x^\mu) u^\beta. \quad (1.17)$$

Tal curva é chamada de *geodésica* e representa a generalização de linha reta para espaços curvos, concordando com a ideia de ser aquela na qual o vetor tangente se propaga na sua própria direção. Mostraremos, mais à frente, que é sempre possível escolher um parâmetro,  $\tau$ , que anule a função  $f(x^\mu)$ . Neste caso, teremos

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{du^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (1.18)$$

e é somente em relação a este parâmetro que o comportamento da partícula é determinado exclusivamente pela geometria.

De acordo com o princípio de equivalência, deve existir um referencial inercial segundo o qual as trajetórias das partículas sejam linhas retas pelo menos localmente. Em seu sistema de coordenadas, devemos ter, então,

$$\frac{d^2 x'^\alpha}{d\tau^2} \doteq 0, \quad (1.19)$$

mostrando que a validade deste princípio impõe a existência de um sistema de coordenadas para cada ponto tal que, nele, a conexão seja nula. Chamaremos esse sistema de *localmente geodético* e a condição necessária e suficiente para sua existência é a simetria nos índices da conexão (56):  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \doteq \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ ; de onde conclui-se que, em qualquer sistema de coordenadas,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha. \quad (1.20)$$

De posse dessas definições, podemos calcular o resultado da variação num vetor ao percorrer uma trajetória infinitesimal fechada por transporte paralelo. Isto é, qual seria a variação provocada pela geometria num dado vetor,  $V^\gamma$ , ao retornar a um dado ponto após ter percorrido uma trajetória infinitesimal. Este cálculo encontra-se feito na Ref. 56 e o resultado é

$$R_{\beta\rho\lambda}^\gamma V^\beta = \nabla_\lambda \nabla_\rho V^\gamma - \nabla_\rho \nabla_\lambda V^\gamma \quad \forall V^\beta, \quad (1.21)$$

onde foi introduzido o *tensor de Riemann* que, resolvendo a expressão acima para a conexão, escreve-se como

$$R_{\beta\rho\lambda}^\gamma = \partial_\lambda \Gamma_{\beta\rho}^\gamma - \partial_\rho \Gamma_{\beta\lambda}^\gamma + \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma \Gamma_{\beta\rho}^\alpha - \Gamma_{\alpha\rho}^\gamma \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha. \quad (1.22)$$

Dada esta relação, podemos considerar um sistema localmente geodético e, nele,

$$\nabla_\mu R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha \doteq \partial_\mu R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha \doteq \partial_\mu \partial_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \partial_\mu \partial_\gamma \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha. \quad (1.23)$$

Com isso, é fácil verificar que

$$\nabla_\mu R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha + \nabla_\lambda R_{\beta\mu\gamma}^\alpha + \nabla_\gamma R_{\beta\lambda\mu}^\alpha \doteq 0. \quad (1.24)$$

Sendo esta soma um tensor nulo em um sistema de coordenadas, assim o será em qualquer outro. Logo, obtemos a chamada *identidade de Bianchi*:

$$\nabla_\mu R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha + \nabla_\lambda R_{\beta\mu\gamma}^\alpha + \nabla_\gamma R_{\beta\lambda\mu}^\alpha = 0. \quad (1.25)$$

Definimos, a partir de  $R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha$ , o *tensor de Ricci*, *escalar de Ricci* e o *tensor de Einstein* respectivamente por

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma}, \quad R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R. \quad (1.26)$$

Temos, também, o *tensor de Weyl* dado por

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} (R_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) + \frac{1}{2} (R_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} - R_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma}) + \frac{1}{6} R (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}). \quad (1.27)$$

Este tensor tem a propriedade de se anular pela contração de qualquer par de índices, representando a parte sem traço do tensor de Riemann. No caso em que a geometria considerada fornece um tensor de Weyl nulo, dizemos que ela é *conformalmente plana*.

Como dito anteriormente, a conexão não possui uma forma específica conhecida *a priori*. Para se estabelecer uma, devemos impor condições adicionais sobre a geometria. Para as variedades riemannianas, temos a imposição de que o produto escalar entre dois vetores paralelamente transportados não varia ao longo de qualquer curva considerada. Temos, assim,

$$\frac{D}{D\sigma} (g_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta}) = \frac{Dg_{\alpha\beta}}{D\sigma} A^{\alpha} B^{\beta} + \underbrace{\frac{DA^{\alpha}}{D\sigma}}_{=0} B_{\alpha} + \underbrace{\frac{DB^{\alpha}}{D\sigma}}_{=0} A_{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow \quad A^{\alpha} B^{\beta} u^{\gamma} \nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = 0 \quad \forall \quad A^{\alpha}, B^{\beta}, u^{\gamma} \quad (1.29)$$

$$\therefore \quad \nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} g_{\delta\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} g_{\alpha\delta} = 0. \quad (1.30)$$

Esta última pode ser resolvida para a conexão, resultando em (58)

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_{\beta} g_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\beta\delta} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma}), \quad (1.31)$$

onde foi introduzida a notação  $\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ .

As variedades riemannianas são caracterizadas, então, por uma métrica e conexão com as simetrias nos índices apresentadas acima, de modo que os produtos escalares entre vetores sejam preservados quando estes se deslocam paralelamente ao longo de uma curva.

Nas geometrias riemannianas, o tensor de Riemann possui as seguintes propriedades de simetria em seus índices:

$$R_{\gamma\beta\rho\lambda} = -R_{\gamma\beta\lambda\rho} = -R_{\beta\gamma\rho\lambda} = R_{\rho\lambda\gamma\beta}. \quad (1.32)$$

Tendo reconhecido o papel da métrica na interação gravitacional, é necessário estabelecer de que forma um dado conteúdo energético determina a curvatura do espaço-tempo em questão. Para a relatividade geral, Einstein considerou uma variedade riemanniana<sup>2</sup> e relacionou a métrica com o sistema físico considerado através da equação que leva seu nome:

$$G_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}, \quad \kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (1.33)$$

onde  $G$  é a constante de Newton da gravitação e adotaremos  $c = \kappa = 1$  daqui por diante.<sup>3</sup> Na equação acima,  $T_{\alpha\beta}$  é o tensor momento-energia do sistema em questão obtido a partir de sua lagrangiana da relatividade especial, fazendo a substituição da métrica de Minkowski pela de Riemann, e calculando

$$\sqrt{-g}T_{\alpha\beta} = \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}}, \quad (1.34)$$

onde  $g < 0$  é o determinante da métrica e  $\mathcal{L}$  a lagrangiana do sistema.

Em particular, para uma partícula teste, a substituição da métrica plana da relatividade especial pela riemanniana em sua ação resulta numa trajetória em que a integral do intervalo 1.4 é um extremo. Efetuando-se a variação desta integral e igualando a zero (56), obtemos a equação

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \quad (1.35)$$

que é a 1.18 com  $\tau = s$ .

## 1.4 Caracterização dos instrumentos de medida

Para completar a descrição da gravitação neste formalismo resta, portanto, estabelecer como as medidas são feitas na teoria. Para tanto, devemos definir nossas régua e relógios seguindo o critério clássico de serem rígidas e de compasso uniforme, respectivamente. No

---

<sup>2</sup>Por brevidade, passaremos a chamar de riemannianas as variedades pseudo-riemannianas

<sup>3</sup>Ocasionalmente, elas serão escritas explicitamente.

entanto, como observado em (59), a relatividade especial nos leva a abandonar o conceito de hastes sólidas como sendo rígidas, devendo-se dar preferência à pulsos de luz para se fazer as medidas de distâncias e intervalos de tempo.

Consideremos, por enquanto, que estamos no caso plano da relatividade especial. Construiremos nosso relógio óptico como sendo composto por dois espelhos que não absorvem luz, virados um para o outro, tendo um pulso luminoso preso entre eles de modo que seja refletido alternadamente. A medida de tempo,  $t$ , pode ser tomada como o número  $N$  de reflexões num deles quando o intervalo entre elas é unitário.

Esta construção é particularmente interessante pois, de acordo com a relatividade especial, a velocidade da luz não depende da fonte (no caso, os espelhos) nem dos observadores. Dessa forma, a uniformidade no compasso do relógio é garantida desde que os espelhos mantenham a mesma distância um do outro, assim como é importante não haver dispersão das ondas de luz para se preservar o intervalo de tempo entre os pulsos (59).

Passemos para a descrição de como se pode determinar o intervalo entre eventos através dessa construção. O funcionamento do relógio está ilustrado na Figura 1, onde os zigue-zagues são as linhas de universo do pulso luminoso e cada reflexão sua pode ser usada como medida de tempo. Consideremos, primeiramente, a situação da Fig. 1a: queremos medir o intervalo  $S_{AB}$  entre os eventos  $A(0, 0)$  da nossa geodésica de referência e  $B(x, t)$  de outra geodésica. Sendo  $x$  a distância espacial entre  $B(x, t)$  e o ponto  $A_B(0, t)$  o qual é simultâneo, e ocorrendo a um intervalo de tempo  $t$  do ponto  $A(0, 0)$ , o intervalo é dado por  $S_{AB}^2 = t^2 - x^2$ . O tempo gasto pelo raio luminoso tanto para ir de  $A_1(0, t_1)$  até  $B(x, t)$  quanto para voltar deste até  $A_2(0, t_2)$  é o mesmo e igual a  $x$  ( $c = 1$ ). Desta forma, temos  $t_1 = t - x$  e  $t_2 = t + x$  nos dando  $t_1 t_2 = (t - x)(t + x) = t^2 - x^2 = S_{AB}^2$ . Nesse caso, o intervalo será positivo, indicando que se trata de um tipo-tempo, como pode se verificar pela figura. No caso da Fig. 1b, o procedimento daria  $S_{AB} < 0$ , correspondendo a situação ilustrada de um intervalo tipo-espaco. Caso  $t_1 = 0$  obtemos, por sua vez, um intervalo tipo-luz, como se espera.

Na relatividade geral, iremos adotar o mesmo procedimento para se medir o intervalo entre dois eventos. Porém, como será mostrado mais adiante, a existência de uma curvatura faz com que os dois espelhos do relógio se afastem ou se aproximem um do outro ao percorrerem suas geodésicas, comprometendo o paralelismo exigido em suas linhas de universo, fenômeno que ocorre mesmo para distâncias infinitesimais entre os dois espelhos, quando a variação da distância é proporcional ao tensor de Riemann.

Para contornar esta dificuldade, devemos considerar a possibilidade descrita na Ref. 60

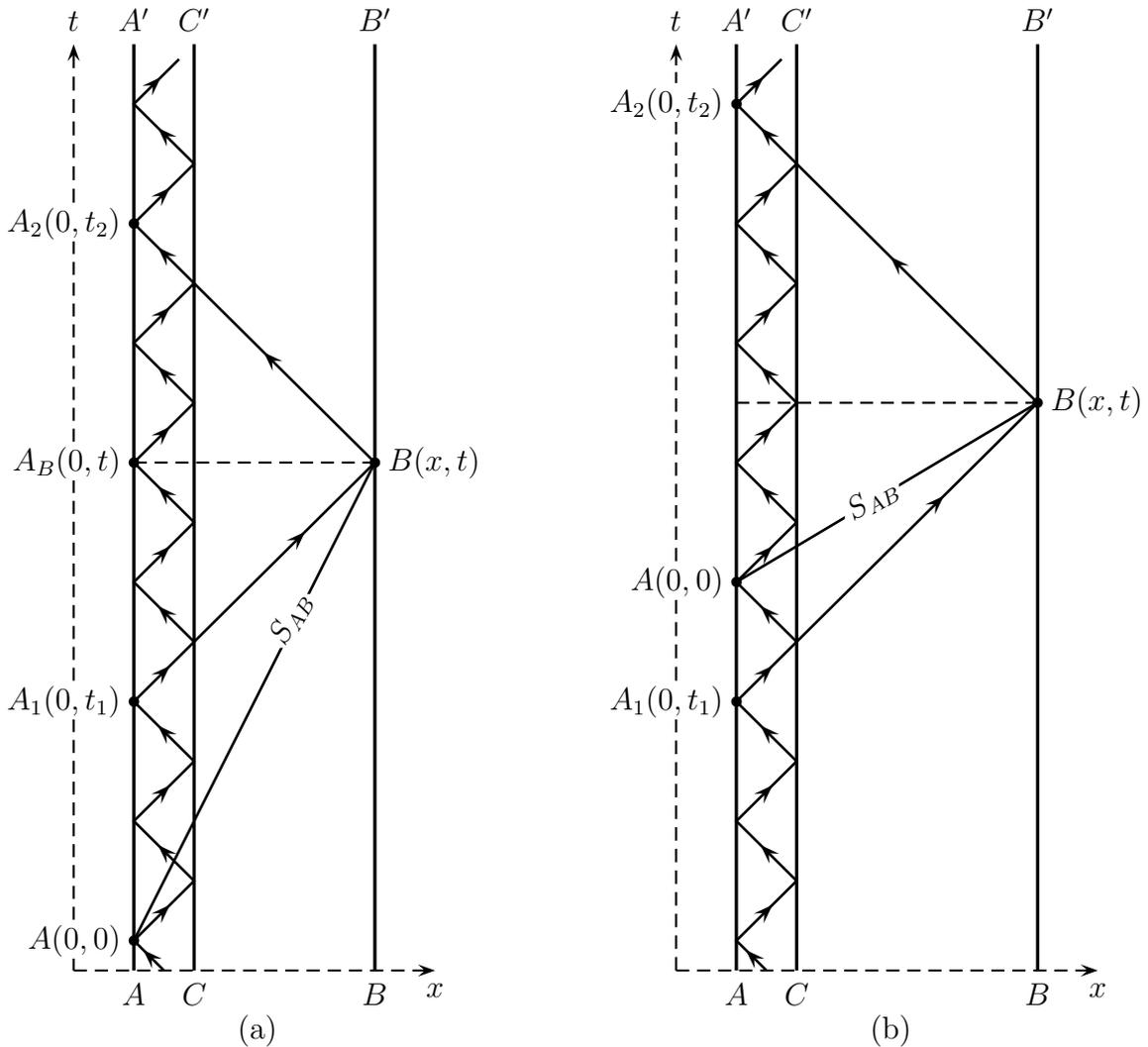


Figura 1: Método para a medição do intervalo  $S_{AB}$  entre os eventos  $A$  e  $B$  através de um relógio óptico.  $AA'$ ,  $CC'$  e  $BB'$  são as linhas de universo do observador  $A$ , do segundo espelho do seu relógio e do evento  $B$ , respectivamente. Em (a) temos um intervalo tipo tempo e em (b) um do tipo espaço.

de podermos preparar novos espelhos a intervalos de tempo arbitrariamente pequenos cujas geodésicas sejam todas inicialmente paralelas à do espelho de referência. Deste modo, o efeito da curvatura na distância entre eles é atenuado conforme o número  $N_R$  de relógios preparados aumenta. O valor obtido para a curvatura através do procedimento descrito nesta referência nos daria uma ideia de quão precisa são as medidas feitas com essa sucessão de relógios e, fazendo  $N_R$  suficientemente grande, podemos tornar seus erros tão pequenos quanto quisermos. Ao final do procedimento exaustivo de se preparar infinito espelhos, teríamos preservado o comprimento do relógio óptico e, conseqüentemente, seu compasso temporal.

Esta providência para se garantir a funcionalidade do relógio baseia-se numa possibi-

lidade bastante idealizada cuja aplicação prática não se garante em qualquer regime. Isto, por sua vez, exhibe uma deficiência da teoria em estabelecer como são feitas as medidas dos próprios objetos que ela considera e, portanto, resulta num inconsistência da RG. Ela, portanto, deve valer somente no regime em que o procedimento exaustivo de preparação de novos relógios pode ser garantido.

## 1.5 Abordagem axiomática e geometria de Weyl

Tendo estabelecida a construção da seção anterior como instrumento de medida para a caracterização do espaço-tempo, uma questão tratada por Ehlers, Pirani e Schild (EPS) na Ref. 3 foi a de obter o tipo de variedade que esse relógio óptico permite determinar com suas medidas. Isto é, partindo-se do princípio de que os observadores fazem suas medidas através deste aparelho, baseado na emissão e recepção de raios luminosos descritos por um eletromagnetismo invariante conforme como o de Maxwell, e considerando-se certos axiomas a respeito das trajetórias de partículas em queda livre, foi tratada a questão de se obter a geometria mais geral que este instrumento permite considerar.

Resumidamente, o tratamento feito por EPS é como segue: um conjunto  $M$  de pontos chamados *eventos* é estabelecido, onde se define dois subconjuntos unidimensionais associados às linhas de universo das partículas (chamadas simplesmente de *partículas*) e dos raios de luz. Estes tratam-se de partículas teste e pulsos de radiação eletromagnética suficientemente curtos, localizados e numa única direção. Postula-se a existência de situações como a ilustrada na Figura 1, onde um sinal de luz é emitido de uma partícula  $AA'$  em  $A_1$  em direção a outra partícula  $BB'$  onde é refletido em  $B$  e volta para  $AA'$  em  $A_2$ . A aplicação  $e : A_1 \rightarrow A_2$  é chamada de *eco* de  $BB'$  em  $AA'$ , e  $m : A_1 \rightarrow B$  é chamada de *mensagem* de  $AA'$  para  $BB'$ . Postulam-se os seguintes axiomas: toda partícula é uma variedade unidimensional bem comportada; qualquer eco entre duas partículas possui inversa e ambos são bem comportados; qualquer mensagem entre duas partículas é bem comportada.

Tal como  $AA'$  associa  $t_1$  e  $t_2$  a  $B$ , um outro observador  $DD'$  também poderá associar, analogamente,  $T_1$  e  $T_2$ . Dessa forma, o evento  $B$  fica associado a quatro números e introduzimos o *sistema de coordenadas radar*  $x_{AD} : B \rightarrow (t_1, t_2, T_1, T_2)$ . Postulando que é sempre possível realizar esse procedimento num subconjunto dos eventos e que  $x_{AD}$  é bem comportado em  $M$  e que qualquer outra aplicação  $x_{JK}$  relaciona-se com ela de forma bem comportada, obtemos que  $M$  constitui uma variedade quadridimensional.

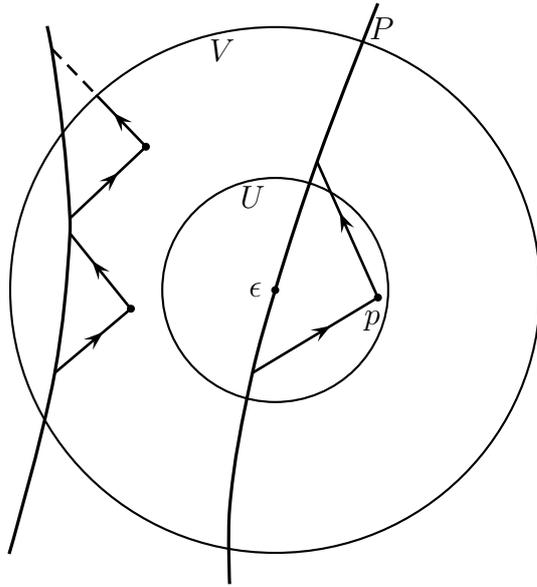


Figura 2: Cada evento  $\epsilon$  possui uma vizinhança  $V$  tal que qualquer evento dentro dela conecta-se a alguma partícula por no máximo dois raios luminosos contidos em  $V$ . Mais ainda, caso a partícula em questão,  $P$ , passe por  $\epsilon$ , então existe um subconjunto  $U$  de  $V$  tal que qualquer evento  $p$  em seu interior conecta-se a  $P$  por exatamente dois raios luminosos contidos em  $V$ .

Após se postular que os raios luminosos são curvas bem comportadas na variedade com direções de propagação variando suavemente de acordo com o ponto de emissão, um outro axioma estabelece que cada evento  $\epsilon$  possui uma vizinhança  $V$  tal que qualquer evento nela conecte-se a alguma partícula  $P$  por no máximo dois raios luminosos contidos em  $V$ . Mais ainda, caso  $P$  passe por  $\epsilon$ , existe uma outra vizinhança  $U \subset V$  tal que qualquer evento em  $U$  pode se conectar com  $P$  por exatamente dois raios luminosos contidos em  $V$  (veja a Figura 2). Postula-se, ainda, propriedades aos raios luminosos de modo a distinguir os vetores na variedade em tipo-nulo, tipo-espaco e tipo-tempo e com isso permitir a distinção de eventos passados, futuros ou simultâneos em relação a algum outro.

Ademais, postula-se a existência de um subconjunto especial de partículas cujas trajetórias são determinadas exclusivamente por algum evento ao longo de sua linha de universo e a respectiva direção desta. Tal postulado fornece a noção de referenciais inerciais e as referidas partículas encontram-se em queda livre. Um outro axioma garante que as trajetórias destas partículas, embora com direções sempre tipo-tempo, possam aproximar-se arbitrariamente do cone de luz formado pelos vetores tipo-luz em um determinado evento. Isto é, as velocidades das partículas, ainda que sempre menores que a da luz, podem ser arbitrariamente próximas dela.

Com base nestes axiomas deveras razoáveis e com bastante respaldo experimental, os resultados de EPS, posteriormente corroborados por Woodhouse (4), foram que a geometria mais geral que deve ser considerada para se descrever o espaço-tempo é a desenvolvida por Weyl (5), tendo a riemanniana como caso particular. Em verdade, EPS estabelecem ainda propriedades adicionais à propagação dos raios luminosos e partículas de modo que a geometria recaia na de Riemann, o que não iremos considerar neste trabalho. Iremos partir somente dos axiomas citados que nos levam a adotar as geometrias de Weyl para a descrição do espaço-tempo.

A proposta original de Weyl foi de geometrização do eletromagnetismo e, para isso, incluiu-se um objeto geométrico, associado ao campo eletromagnético, na descrição do espaço-tempo. No caso da abordagem axiomática de EPS e Woodhouse, este novo objeto surge naturalmente, sem nenhuma relação com qualquer campo físico conhecido, e assim o consideraremos nesta tese.

Diferentemente da geometria riemanniana, esta nova permite que vetores também alterem seus módulos ao percorrerem uma trajetória arbitrária na variedade por meio de transporte paralelo. Sendo  $A^\alpha$  este vetor, tal que  $l^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$ , e a curva parametrizada por  $\sigma$ , a proposta de Weyl é que tenhamos, no lugar da 1.28 (2, 5),

$$\frac{Dl}{D\sigma} = \frac{dl}{d\sigma} = \frac{l}{2}\omega_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \quad (1.36)$$

$$\therefore \frac{D}{D\sigma} (g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta) = \frac{Dg_{\alpha\beta}}{D\sigma} A^\alpha A^\beta + 2 \underbrace{\frac{DA^\alpha}{D\sigma}}_{=0} A_\alpha = l^2 \omega_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \quad \Rightarrow \quad (1.37)$$

$$\Rightarrow A^\alpha A^\beta u^\gamma \nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta \omega_\gamma u^\gamma \quad \forall A^\alpha, u^\gamma \quad (1.38)$$

$$\therefore \nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = \omega_\gamma g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = -\omega_\alpha g^{\mu\nu}. \quad (1.39)$$

Isto implica numa conexão dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\omega_\mu \delta_\nu^\alpha + \omega_\nu \delta_\mu^\alpha - g_{\mu\nu} \omega^\alpha) = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - W_{\mu\nu}^\alpha, \quad (1.40)$$

onde definimos

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) , \quad (1.41)$$

$$W_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} (\omega_{\mu}\delta_{\nu}^{\alpha} + \omega_{\nu}\delta_{\mu}^{\alpha} - g_{\mu\nu}\omega^{\alpha}) . \quad (1.42)$$

De agora em diante, usaremos o circunflexo para indicar que o objeto em questão é dado pela sua expressão riemanniana ou, equivalentemente, com  $\omega_{\mu} = 0$ .

Da 1.39, também podemos concluir que, para um vetor  $X^{\alpha}$  qualquer, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} (X_{\alpha}X^{\alpha}) &= \partial_{\beta} (X_{\alpha}X^{\alpha}) = X_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\alpha} + X^{\alpha}\nabla_{\beta}(g_{\alpha\gamma}X^{\gamma}) \\ &= X_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\alpha} + X^{\alpha}g_{\alpha\gamma}\nabla_{\beta}X^{\gamma} + X^{\alpha}X^{\gamma}\nabla_{\beta}g_{\alpha\gamma} \\ &= 2X_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\alpha} + X^{\alpha}X_{\alpha}\omega_{\beta} \\ \Rightarrow X_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\alpha} &= \frac{1}{2}\partial_{\beta} (X_{\alpha}X^{\alpha}) - \frac{1}{2}X^{\alpha}X_{\alpha}\omega_{\beta}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Analogamente,

$$X^{\alpha}\nabla_{\beta}X_{\alpha} = \frac{1}{2}\partial_{\beta} (X_{\alpha}X^{\alpha}) + \frac{1}{2}X^{\alpha}X_{\alpha}\omega_{\beta}. \quad (1.44)$$

Considerando a equação da geodésica 1.17, a 1.43 fornece

$$\begin{aligned} u^{\beta}u_{\alpha}\nabla_{\beta}u^{\alpha} &= u^{\beta} \left[ \frac{1}{2}\partial_{\beta} (u_{\alpha}u^{\alpha}) - \frac{1}{2}u^{\alpha}u_{\alpha}\omega_{\beta} \right] = fu_{\alpha}u^{\alpha} \\ \therefore f &= \frac{1}{2u^2} (u^{\beta}\partial_{\beta}u^2 - u^2u^{\beta}\omega_{\beta}) , \quad u^2 \equiv u^{\alpha}u_{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Sendo ela descrita por um parâmetro  $\sigma$  arbitrário, devemos ter, então,

$$u^{\beta}\partial_{\beta} = \frac{dx^{\beta}}{d\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \frac{d}{d\sigma} \quad (1.46)$$

$$\therefore u^{\beta}\nabla_{\beta}u^{\alpha} = \frac{1}{2u^2} \left( \frac{du^2}{d\sigma} - u^2u^{\beta}\omega_{\beta} \right) u^{\alpha}. \quad (1.47)$$

Particularmente significativo é o caso em que o lado direito desta equação se anula. Muito embora qualquer parâmetro sirva para se descrever a curva sem nenhuma violação

do postulado de Weyl 1.36, quanto ao significado físico, eles deixam de ser equivalentes. Como esta geometria se caracteriza pela alteração nos módulos dos vetores pelo simples transporte paralelo, isto é, aquele em que somente a curvatura provoca alterações nas componentes do vetor transportado, vemos que este é um efeito puramente geométrico. Portanto, de acordo com nossa proposta de associar a curvatura aos efeitos gravitacionais, devemos ter a mesma preocupação que tivemos na RG em preservar o comprimento do nosso relógio óptico para que a geometria seja devidamente medida. Dessa forma, o mesmo procedimento exaustivo empregado se faz necessário e, no regime de validade desta aproximação, teríamos estabelecido um aparelho adequado para as medidas e que, naturalmente, seria capaz de acusar essas variações nos módulos dos vetores.

Para um vetor sem nenhuma relação com a curva pela qual ele é transportado, esta preocupação com o parâmetro é irrelevante e não determina nenhum em particular. No entanto, quando o vetor em questão é a própria tangente à geodésica, a condição 1.36, que anula o lado direito da 1.47, não pode ser satisfeita para qualquer parâmetro, determinando o que chamamos de *tempo próprio*,  $\tau$ , fornecido pelo relógio do observador que faz as medidas. Temos, portanto, este parâmetro obtido a partir de

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \omega_\beta = 0, \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0. \quad (1.48)$$

Percebemos que tal parâmetro é o mesmo em relação ao qual as partículas livres de força são governadas exclusivamente pela geometria, em pleno acordo com a formulação que estamos desenvolvendo.

Esta definição original que acabamos de estabelecer para o tempo próprio está de acordo com a descrita nas Refs. 61 e 62 e será reforçada no caso integrável descrito na próxima seção, onde sua necessidade ficará evidente através da solução obtida para o vácuo.

Mais ainda, a partir da conexão 1.40, que garante todas as propriedades da variedade de Weyl, percebemos uma simetria frente à transformação de calibre

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} & \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = e^\Lambda g_{\mu\nu}, \\ \omega_\mu & \rightarrow \bar{\omega}_\mu = \omega_\mu + \partial_\mu \Lambda, \end{cases} \quad (1.49)$$

na descrição deste tipo de geometria. Portanto, não devemos esperar que qualquer observador ou fenômeno físico seja capaz de estabelecer qualquer distinção entre as funções

$\Lambda = \Lambda(x^\mu)$  escolhidas e, assim, devemos ter as descrições dos fenômenos e do espaço-tempo igualmente invariantes por essa transformação. Sendo assim, o tempo próprio adotado pelos observadores também deve estar de acordo com esta simetria. De fato, sendo aquele no qual o módulo da tangente à geodésica varia como na 1.48, após essa transformação passamos a ter

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{\tau}} \left( e^\Lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\tau}} \right) - e^\Lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\beta}{d\bar{\tau}} (\omega_\beta + \partial_\beta \Lambda) &= \\ &= e^\Lambda \left[ \frac{d}{d\bar{\tau}} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\tau}} \right) - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\beta}{d\bar{\tau}} \omega_\beta \right] = 0 \\ \therefore \frac{d}{d\bar{\tau}} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\tau}} \right) - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\beta}{d\bar{\tau}} \omega_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

onde  $\bar{\tau}$  é o resultado da transformação de calibre no tempo próprio e vemos que ambos satisfazem a mesma equação. Portanto, podemos concluir que  $\tau$  é invariante por essa transformação, refletindo devidamente as propriedades da geometria de Weyl.

Ademais, como observado na Ref. 61, somente com esse parâmetro podemos ter um sistema de coordenadas no qual a trajetória da partícula teste seja uma linha reta durante todo seu percurso, isto é,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \doteq 0, \quad (1.51)$$

caracterizando devidamente o referencial inercial desta geometria, de acordo com o discutido anteriormente.

Vejam, agora, como ficam os tensores de Riemann, Ricci, Einstein e o escalar de curvatura com a conexão de Weyl 1.40. Substituindo esta na 1.22 encontramos

$$R_{\beta\rho\lambda}^\gamma = \hat{R}_{\beta\rho\lambda}^\gamma - \hat{\nabla}_\lambda W_{\beta\rho}^\gamma + \hat{\nabla}_\rho W_{\beta\lambda}^\gamma + W_{\alpha\lambda}^\gamma W_{\beta\rho}^\alpha - W_{\alpha\rho}^\gamma W_{\beta\lambda}^\alpha. \quad (1.52)$$

Com relação às simetrias nos índices, exceto pela

$$R_{\beta\rho\lambda}^\gamma = -R_{\beta\lambda\rho}^\gamma, \quad (1.53)$$

que é evidente em virtude da 1.21, nenhuma das outras do caso riemanniano é preservada

em Weyl. No apêndice A são apresentados os termos deste tensor que violam cada uma delas e é mostrado que, assim como na geometria riemanniana, também temos

$$-R_{\gamma\rho\lambda}^{\beta}V_{\beta} = \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V_{\gamma} - \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V_{\gamma} \quad \forall V^{\beta}. \quad (1.54)$$

O tensor de Ricci, após a substituição de 1.42, dá

$$R_{\beta\lambda} = \hat{R}_{\beta\lambda} - \frac{3}{2}\hat{\nabla}_{\lambda}\omega_{\beta} + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{\beta}\omega_{\lambda} - \frac{1}{2}\omega_{\beta}\omega_{\lambda} + \frac{1}{2}g_{\beta\lambda}(\omega_{\alpha}\omega^{\alpha} - \hat{\nabla}_{\alpha}\omega^{\alpha}). \quad (1.55)$$

O escalar de curvatura, por sua vez, se escreve em termos do seu equivalente riemanniano como

$$R = \hat{R} - 3\hat{\nabla}_{\alpha}\omega^{\alpha} + \frac{3}{2}\omega_{\alpha}\omega^{\alpha}. \quad (1.56)$$

Finalmente, o tensor de Einstein é dado por

$$G_{\mu\nu} = \hat{G}_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\hat{\nabla}_{\nu}\omega_{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{\mu}\omega_{\nu} - \frac{1}{2}\omega_{\mu}\omega_{\nu} - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}\omega_{\alpha}\omega^{\alpha} - \hat{\nabla}_{\alpha}\omega^{\alpha}\right). \quad (1.57)$$

Percebemos que tanto este tensor quanto o de Ricci deixam de ser simétricos nos índices como na geometria riemanniana.

### 1.5.1 Espaço-tempo de Weyl integrável

Existe um caso particular da geometria de Weyl que surge ao se considerar a variação do comprimento de um vetor ao percorrer uma trajetória arbitrária por transporte paralelo. Vamos considerar que este vetor,  $A^{\mu}$ , tenha módulo  $l$  não-nulo. Sendo assim, a 1.36 nos dá

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \frac{1}{2} \int_{P_0}^{P_1} \omega_{\alpha} dx^{\alpha}, \quad (1.58)$$

$$\therefore l_1 = l_0 \exp\left(\frac{1}{2} \int_{P_0}^{P_1} \omega_{\alpha} dx^{\alpha}\right), \quad (1.59)$$

onde  $l_0$  e  $l_1$  são os módulos do vetor nos pontos inicial ( $P_0$ ) e final ( $P_1$ ) da trajetória,

respectivamente.

Vemos, com isso, que um mesmo vetor pode ter diferentes comprimentos no mesmo ponto dependendo do caminho que fez para chegar até ele. Isto é, os módulos dos vetores nos diferentes pontos não decorrem apenas de propriedades geométricas locais. Ou seja, os objetos da geometria de Weyl, em geral, não especificam univocamente os comprimentos dos vetores por si só, sendo necessário conhecer todo o caminho percorrido por ele até chegar em cada ponto.

Podemos impor que o módulo de um vetor paralelamente transportado ao longo da variedade dependa somente do ponto onde ele se encontra. Neste caso, a integral na exponencial da 1.59 não deve depender do caminho, sendo função apenas dos pontos inicial e final. Isto dá a conhecida condição de integrabilidade:

$$\omega_\alpha = \partial_\alpha \omega, \quad (1.60)$$

isto é, o campo geométrico de Weyl deve ser um gradiente. De fato, temos, assim, que

$$\frac{1}{2} \int_{P_0}^{P_1} \omega_\alpha dx^\alpha = \frac{1}{2} \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial \omega}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{1}{2} \int_{P_0}^{P_1} d\omega = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_0}{2} \quad (1.61)$$

$$\therefore l_1 = l_0 e^{\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{\omega_0}{2}} \Leftrightarrow l_0 e^{-\frac{\omega_0}{2}} = l_1 e^{-\frac{\omega_1}{2}} = \text{constante}, \quad (1.62)$$

onde  $\omega_0$  e  $\omega_1$  são os valores de  $\omega(x^\mu)$  nos pontos  $P_0$  e  $P_1$ , respectivamente.

Um espaço-tempo descrito por este caso particular da geometria de Weyl, que satisfaz a condição de integrabilidade 1.60, é chamado de *Espaço-tempo de Weyl Integrável* (WIST, da sigla em inglês). Concluimos que, nela, o produto  $e^{-\omega} l^2$  é uma constante em toda a variedade, nos dando, através da 1.62, uma forma bastante simples de se relacionar os módulos de um vetor nos pontos inicial e final de uma trajetória percorrida por transporte paralelo.

No próximo capítulo estaremos tratando da formulação variacional da gravitação nas geometrias de Weyl. No entanto, a dinâmica das partículas teste ainda carece de uma formulação desse tipo quando se considera o caso mais geral, no qual o vetor  $\omega_\mu$  não é, necessariamente, um gradiente. O caso particular de WIST, por sua vez, além de possuir um formalismo lagrangiano, também permite incorporar teorias já bem estabelecidas na física, tal como a de Hamilton-Jacobi (6). Portanto, de agora em diante iremos considerar somente o caso integrável desta geometria, com exceção de uma ou outra ocasião em que

se deixa claro o caso tratado.

Sendo assim, a equação 1.48 para o tempo próprio em WIST se escreve como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) - g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \frac{dx^\beta}{d\tau} \partial_\beta \omega &= \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) - g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \frac{d\omega}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left( e^{-\omega} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\therefore d\tau^2 = e^{-\omega} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.64)$$

Vemos que, para o observador em questão, a geometria do espaço-tempo é caracterizada por uma *métrica efetiva*

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-\omega} g_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = e^{\omega} g^{\mu\nu}, \quad (1.65)$$

a qual ele usa para fazer suas medidas. Tal fato pode ser verificado a partir da 1.39, que pode ser reescrita em WIST como

$$\nabla_\alpha (e^{-\omega} g_{\mu\nu}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\alpha (e^{\omega} g^{\mu\nu}) = 0, \quad (1.66)$$

mostrando que, no caso do campo  $\omega_\alpha$  ser um gradiente, temos uma conexão métrica para  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , como pode ser verificado a partir da 1.40, e a geometria é, de fato, equivalente a de Riemann com esta métrica efetiva.

Esta equivalência entre WIST e uma geometria de Riemann com uma métrica  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  é notável quando se leva em conta a transformação 1.49 neste caso particular, em que ela pode ser reescrita como

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} & \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = e^\Lambda g_{\mu\nu}, \\ \omega & \rightarrow \bar{\omega} = \omega + \Lambda \end{cases} \quad (1.67)$$

para uma função  $\Lambda(x^\mu)$  arbitrária. Com isso, podemos escolher  $\Lambda = -\omega$  e ficamos com um novo campo escalar geométrico  $\bar{\omega} = 0$ . Passamos, então, de uma geometria em WIST para uma verdadeira geometria riemanniana descrita por uma métrica  $\bar{g}_{\mu\nu} = e^\Lambda g_{\mu\nu} = e^{-\omega} g_{\mu\nu}$ , dando a mesma expressão para o tempo próprio dos observadores. Podemos, ainda, verificar facilmente a invariância de calibre deste parâmetro, como era de se esperar.

Para finalizar, tomemos a identidade de Bianchi (1.25) em WIST. Contraindo o índice

“ $\alpha$ ” com “ $\gamma$ ”, obtemos

$$\nabla_{\mu}R_{\beta\lambda} - \nabla_{\lambda}R_{\beta\mu} + \nabla_{\alpha}R_{\beta\lambda\mu}^{\alpha} = 0. \quad (1.68)$$

Contraindo, agora, com  $g^{\beta\lambda}$  e levando em conta as 1.39 e A.22 ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}R - 2\nabla_{\lambda}R_{\mu}^{\lambda} + \omega_{\mu}R - 2R_{\mu}^{\alpha}\omega_{\alpha} = 0 &\Leftrightarrow \nabla_{\alpha}\left(R_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha}R\right) = -\omega_{\alpha}\left(R_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha}R\right) \\ \therefore \nabla_{\alpha}G_{\mu}^{\alpha} = -G_{\mu}^{\alpha}\omega_{\alpha}. &\quad (1.69) \end{aligned}$$

Contraindo esta última com  $g^{\mu\gamma}$ , encontramos, finalmente,

$$\nabla_{\alpha}G^{\alpha\gamma} = -2G^{\alpha\gamma}\omega_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\alpha}(e^{2\omega}G^{\alpha\gamma}) = 0, \quad (1.70)$$

onde está claro que esta relação é válida somente em WIST. Sendo assim, poderíamos ter obtido este mesmo resultado levando-se em conta somente a simetria de calibre da teoria. Tendo em mente que os resultados devem permanecer os mesmo da relatividade geral com a métrica 1.65, vemos que a 1.70 não poderia ser diferente, pois a derivada covariante que aparece nela nada mais é do que a riemanniana com esta métrica efetiva e o resultado final pode ser reescrito como

$$\nabla_{\alpha}(\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\gamma\delta}G_{\beta\delta}) = 0. \quad (1.71)$$

Isto é, temos exatamente a mesma expressão da relatividade geral para a divergência do tensor de Einstein com  $\tilde{g}^{\alpha\beta}$  usado para levantar os índices.

## 1.6 Congruência de curvas

Dando continuidade à descrição da geometria de Weyl, passamos para o estudo de congruências de curvas numa geometria desse tipo. Entretanto, como esclarecido acima, iremos nos restringir ao caso do WIST. O tratamento feito segue o análogo riemanniano encontrado em (63).

Seja uma congruência de curvas definida pela função  $\gamma(\sigma, t)$  na variedade, onde  $\sigma$  é um parâmetro que descreve a curva e  $t$  um que serve para identificar as diferentes curvas

da congruência. Esta função é  $C^2$  em relação aos seus dois parâmetros.

Em um sistema de coordenadas local  $\{x^\alpha\}$ , a congruência terá coordenadas  $x^\alpha(\sigma, t)$  e tomando o parâmetro  $\sigma = \tau$ , o tempo próprio ao longo da uma particular curva, seu vetor tangente,  $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$  terá módulo

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = e^\omega g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = e^\omega. \quad (1.72)$$

Para o parâmetro  $t$ , este, por sua vez, define uma nova congruência cujos vetores tangentes terão por componentes  $Y^\alpha = \partial x^\alpha / \partial t$ .

Dois ponto vizinhos,  $P(\sigma_0, t_0) \in \gamma(\sigma, t_0)$  e  $Q(\sigma_0, t_0 + \Delta t) \in \gamma(\sigma, t_0 + \Delta t)$  definem um novo vetor, que denominaremos *vetor conexão*. Suas componentes são

$$Z^\alpha = \left. \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ t=t_0}} \Delta t, \quad (1.73)$$

e ele está associado à distância espaço-temporal entre os pontos  $P$  e  $Q$ . No entanto, é mais interessante considerar a distância espacial, determinada localmente por um observador que segue a curva  $\gamma(\sigma, t_0)$ . Esta nada mais é do que a projeção do vetor conexão  $Z^\alpha$  no espaço perpendicular à curva. Chamaremos esta grandeza de *vetor posição relativa*, e a representaremos por

$$\perp Z^\alpha \equiv h_\beta^\alpha Z^\beta, \quad (1.74)$$

$$h_\beta^\alpha \equiv \delta_\beta^\alpha - (u^\mu u_\mu)^{-1} u^\alpha u_\beta = \delta_\beta^\alpha - e^{-\omega} u^\alpha u_\beta, \quad (1.75)$$

onde o tensor  $h_\beta^\alpha$  definido acima projeta qualquer vetor no espaço perpendicular a um  $u^\alpha$  arbitrário. Isto é, para quaisquer vetores  $u^\alpha$  e  $X^\gamma$ , temos

$$u_\beta \perp X^\beta = u_\beta [\delta_\gamma^\beta - (u^\mu u_\mu)^{-1} u^\beta u_\gamma] X^\gamma = u_\gamma X^\gamma - (u^\mu u_\mu)^{-1} u_\beta u^\beta u_\gamma X^\gamma = 0. \quad (1.76)$$

Temos ainda que  $h_\beta^\alpha h_\gamma^\beta = h_\gamma^\alpha$ , como ocorre para qualquer operador de projeção.

Uma propriedade interessante dos vetores  $Z^\alpha$  e  $u^\alpha$  é que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^\beta} u^\beta &= \frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial t} \frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma} \Delta t \\
&= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \sigma \partial t} \Delta t = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t \partial \sigma} \Delta t = \frac{\partial x^\beta}{\partial t} \Delta t \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial \sigma} \\
&= \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} Z^\beta
\end{aligned} \tag{1.77}$$

e, dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
u^\beta \nabla_\beta Z^\alpha &= u^\beta \frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} Z^\gamma u^\beta = Z^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma Z^\beta \\
&= Z^\beta \nabla_\beta u^\alpha.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Sendo a congruência caracterizada pelas linhas de universo de partículas,  $\perp Z^\alpha$  será a distância física entre duas vizinhas. E a velocidade relativa, dada por  $\perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha$  está relacionada à  $Z^\alpha$  pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha &= u^\beta \nabla_\beta (h_\gamma^\alpha Z^\gamma) \\
\perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha &= h_\beta^\alpha u^\gamma \nabla_\gamma (h_\delta^\beta Z^\delta) = h_\beta^\alpha u^\gamma (Z^\delta \nabla_\gamma h_\delta^\beta + h_\delta^\beta \nabla_\gamma Z^\delta) \\
&= h_\beta^\alpha u^\gamma Z^\delta \nabla_\gamma h_\delta^\beta + h_\delta^\alpha \dot{Z}^\delta
\end{aligned} \tag{1.79}$$

onde  $\dot{X}^\alpha \equiv u^\beta \nabla_\beta X^\alpha \equiv \frac{D}{D\tau} X^\alpha$  para qualquer vetor  $X^\alpha$ . O primeiro termo do resultado final contém

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma h_\delta^\beta &= \nabla_\gamma (\delta_\delta^\beta - e^{-\omega} u^\beta u_\delta) = -[u^\beta \nabla_\gamma (e^{-\omega} u_\delta) + e^{-\omega} u_\delta \nabla_\gamma u^\beta] \\
\therefore h_\beta^\alpha u^\gamma Z^\delta \nabla_\gamma h_\delta^\beta &= -u^\gamma Z^\delta \underbrace{h_\beta^\alpha u^\beta}_{=0} \nabla_\gamma (e^{-\omega} u_\delta) - h_\beta^\alpha u^\gamma Z^\delta e^{-\omega} u_\delta \nabla_\gamma u^\beta = -h_\beta^\alpha Z^\delta e^{-\omega} u_\delta \dot{u}^\beta.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Já o termo  $\dot{Z}^\delta = u^\alpha \nabla_\alpha Z^\delta = Z^\alpha \nabla_\alpha u^\delta$  e obtemos

$$\begin{aligned}
\perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha &= h_\beta^\alpha (Z^\gamma \nabla_\gamma u^\beta - e^{-\omega} u_\gamma Z^\gamma \dot{u}^\beta) = h_\beta^\alpha (\nabla_\gamma u^\beta - e^{-\omega} u_\gamma \dot{u}^\beta) Z^\gamma \\
&= h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) Z^\gamma = h_\beta^\alpha h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma \\
&= h_\beta^\alpha h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) \perp Z^\delta.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Expressão que permanece válida mesmo no caso mais geral da geometria de Weyl.

Definimos

$$V^\alpha{}_\beta \equiv h_\gamma^\alpha h_\beta^\delta \nabla_\delta u^\gamma \tag{1.82}$$

$$\therefore \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha = V^\alpha{}_\beta \perp Z^\beta. \tag{1.83}$$

Esta expressão mostra que a velocidade de separação entre partículas vizinhas está relacionada ao vetor posição relativa por uma transformação linear. O tensor que determina essa transformação é a projeção, no referencial do observador, do quadri-gradiente de sua velocidade, correspondendo ao gradiente espacial dela.

A partir desta equação, podemos obter a aceleração relativa entre as partículas vizinhas, aplicando o operador  $\frac{D}{D\tau}$  na 1.81 e depois projetando. Este cálculo encontra-se feito no apêndice B e resulta em

$$\perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) = h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda \left[ R_{\rho\lambda\delta}^\beta u^\rho u^\delta + \nabla_\lambda \dot{u}^\beta - e^{-\omega} \dot{u}_\lambda \dot{u}^\beta \right] Z^\gamma. \tag{1.84}$$

No caso riemanniano ( $\omega_\alpha = 0$ ), esta expressão é conhecida como *equação de Jacobi*.

Caso as curvas em questão sejam geodésicas ( $\dot{u}^\alpha = 0$ ), esta equação se reduz a

$$\perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) = R_{\rho\gamma\delta}^\alpha u^\rho u^\delta Z^\gamma, \tag{1.85}$$

conhecida como *equação do desvio geodético*, dando a aceleração relativa entre duas partículas vizinhas que percorrem geodésicas em relação ao referencial inercial da que se desloca com velocidade  $u^\alpha$ .

Seguindo adiante nesse estudo, podemos obter a dinâmica para a matriz  $V^\alpha{}_\beta$  que transforma o vetor posição relativa na velocidade relativa. Façamos

$$\frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) = \frac{D}{D\tau} (V^\alpha{}_\beta \perp Z^\beta) = (V^\alpha{}_\beta)^\cdot \perp Z^\beta + V^\alpha{}_\beta u^\gamma \nabla_\gamma \perp Z^\beta.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) &= h_\delta^\alpha (V^\delta{}_\beta)^\cdot \perp Z^\beta + h_\delta^\alpha V^\delta{}_\beta u^\gamma \nabla_\gamma \perp Z^\beta \\ &= h_\delta^\alpha (V^\delta{}_\beta)^\cdot \perp Z^\beta + V^\alpha{}_\beta u^\gamma \nabla_\gamma \perp Z^\beta, \end{aligned} \quad (1.86)$$

onde, na passagem de uma linha para a outra, foi usado  $h_\delta^\alpha V^\delta{}_\beta = h_\delta^\alpha h_\gamma^\delta h_\beta^\lambda \nabla_\lambda u^\gamma = h_\gamma^\alpha h_\beta^\lambda \nabla_\lambda u^\gamma = V^\alpha{}_\beta$ . Temos, assim,

$$\begin{aligned} \perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) &= h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot Z^\gamma + h_\gamma^\alpha h_\beta^\lambda (\nabla_\lambda u^\gamma) u^\gamma \nabla_\gamma \perp Z^\beta \\ &= h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot Z^\gamma + h_\gamma^\alpha h_\epsilon^\lambda (\nabla_\lambda u^\gamma) h_\beta^\epsilon u^\gamma \nabla_\gamma \perp Z^\beta \\ &= h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot Z^\gamma + V^\alpha{}_\epsilon \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\epsilon \right) \\ &= h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot Z^\gamma + V^\alpha{}_\epsilon V^\epsilon{}_\gamma h_\beta^\gamma Z^\beta \\ &= h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot Z^\gamma + V^\alpha{}_\epsilon V^\epsilon{}_\gamma Z^\gamma. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Igualando esse resultado à B.12 e observando que a igualdade deve valer para qualquer  $Z^\gamma$ , concluímos que

$$h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot + V^\alpha{}_\epsilon V^\epsilon{}_\gamma - R^\alpha{}_{\rho\gamma\delta} u^\rho u^\delta - h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda \nabla_\lambda \dot{u}^\beta + \dot{u}^\alpha (e^{-\omega} \dot{u}_\alpha)^\cdot = 0, \quad (1.88)$$

que diz como a matriz  $V^\alpha{}_\beta$  evolui ao longo de uma determinada curva da congruência.

É importante observar que esta equação é, na verdade, uma identidade, pois se substituirmos a definição de  $V^\alpha{}_\beta$  dada em 1.82, todos os termos irão se cancelar identicamente. Esta é, então, uma equação cinemática para esta matriz e somente se torna uma equação dinâmica quando se substitui o tensor de Riemann obtido com a solução das equações de campo.

Passamos, agora, para a decomposição de  $V^\alpha{}_\beta$  em suas partes irredutíveis, *i.e.*, seu traço ( $\theta$ ), sua parte antissimétrica ( $\omega_{\alpha\beta}$ ) e a parte simétrica sem traço ( $\sigma_{\alpha\beta}$ ). Pode-se

mostrar facilmente que  $V_{\alpha\beta} = h_\alpha^\lambda h_\beta^\delta \nabla_\delta u_\lambda$ . Introduzindo a notação

$$M_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}) = M_{(\beta\alpha)}, \quad (1.89)$$

$$M_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (M_{\alpha\beta} - M_{\beta\alpha}) = -M_{[\beta\alpha]}, \quad (1.90)$$

$$\therefore M_{\alpha\beta} = M_{(\alpha\beta)} + M_{[\alpha\beta]}, \quad (1.91)$$

para qualquer tensor  $M_{\alpha\beta}$ , definimos, então, as partes irredutíveis de  $V_{\alpha\beta}$  como

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} &= V_{(\alpha\beta)}; & \theta &= \theta^\alpha{}_\alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta} \\ \omega_{\alpha\beta} &= V_{[\alpha\beta]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta}. \quad (1.92)$$

A partir destas definições, obtemos que

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \hat{\theta} - \frac{3}{2}u^\alpha\omega_\alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \\ \omega_{\alpha\beta} &= \hat{\omega}_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{\alpha\beta} = \hat{V}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}u^\gamma\omega_\gamma h_{\alpha\beta}. \quad (1.93)$$

Expressões, essas, que permanecem válidas mesmo no caso mais geral da geometria de Weyl e para qualquer normalização do vetor  $u^\alpha$ . No caso do WIST que estamos tratando e para a normalização escolhida, temos

$$\theta = h_\beta^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = \nabla_\alpha u^\alpha - e^{-\omega} u^\alpha u_\beta \nabla_\alpha u^\beta = \nabla_\alpha u^\alpha \quad (1.94)$$

e, com isso, podemos interpretar as partes irredutíveis de  $V_{\alpha\beta}$ .

Consideremos, por um momento, que estamos numa geometria riemanniana e queremos calcular a variação de um tri-volume perpendicular a uma curva da congruência. Sendo  $V^\alpha$  o vetor tangente às curvas parametrizado pelo tempo próprio ( $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 1$ ), o volume em questão é dado por  $v = \int_s V^\alpha ds_\alpha$ . Sua variação, então, será:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \oint V^\alpha ds_\alpha = \int_\Omega \partial_\alpha (\sqrt{-g}V^\alpha) d^4x = \int_\Omega \hat{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g}V^\alpha) d^4x = \\ &= \int_\Omega \sqrt{-g} \hat{\nabla}_\alpha V^\alpha d^4x = \int_\Omega \sqrt{-g} \hat{\theta} d^4x. \end{aligned} \quad (1.95)$$

onde o circunflexo em  $\theta$  é redundante e foi colocado para ressaltar que está calculado na versão riemanniana do tratamento feito.

Para  $\Omega$  muito pequeno, em um referencial inercial, e num sistema de coordenadas conveniente, teremos  $\Delta \mathbf{v} \simeq \hat{\theta} \mathbf{v} \Delta \tau$ . Consequentemente,

$$\frac{\frac{d\mathbf{V}}{d\tau}}{\mathbf{v}} = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ \Delta\mathbf{V} \rightarrow 0}} \frac{\frac{\Delta\mathbf{V}}{\Delta\tau}}{\mathbf{v}} = \hat{\theta}. \quad (1.96)$$

No entanto, como nossa geometria é invariante de calibre e possui uma geometria riemanniana com a métrica 1.65 como caso particular, basta recalcularmos as 1.95 e 1.96 com esta métrica para obtermos o resultado equivalente ao nosso estudo de congruências em WIST. Deste modo, teremos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \partial_{\alpha} (\sqrt{-\tilde{g}} u^{\alpha}) d^4x = \int_{\Omega} \nabla_{\alpha} (\sqrt{-\tilde{g}} u^{\alpha}) d^4x = \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{-\tilde{g}} \nabla_{\alpha} u^{\alpha} d^4x = \int_{\Omega} \sqrt{-\tilde{g}} \theta d^4x, \end{aligned} \quad (1.97)$$

e, analogamente,

$$\frac{\frac{d\mathbf{V}}{d\tau}}{\mathbf{v}} = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ \Delta\mathbf{V} \rightarrow 0}} \frac{\frac{\Delta\mathbf{V}}{\Delta\tau}}{\mathbf{v}} = \theta, \quad (1.98)$$

resultado que deve permanecer válido para qualquer calibre.

Vemos, então, que somente  $\theta$  está relacionado com a expansão de um tri-volume perpendicular à curva ao longo dela e, portanto, é chamado de *expansão*.

Para os outros termos, faremos a decomposição do vetor posição relativa em termos do seu comprimento medido por um observador,  $\delta l$ , e um vetor  $n^{\alpha}$  que dá sua direção ortogonal à  $u^{\alpha}$ . Temos, assim,

$$\perp Z^{\alpha} = n^{\alpha} \delta l, \quad (1.99)$$

$$u^{\alpha} n_{\alpha} = 0. \quad (1.100)$$

Sendo este vetor do tipo espaço, tanto seu módulo como seu comprimento medido por um observador serão negativos. Este, queremos que seja

$$e^{-\omega} g_{\alpha\beta} \perp Z^\alpha \perp Z^\beta = e^{-\omega} g_{\alpha\beta} h_\gamma^\alpha Z^\gamma h_\delta^\beta Z^\delta = e^{-\omega} h_{\alpha\beta} Z^\alpha Z^\beta = -(\delta l)^2, \quad (1.101)$$

$$\therefore n^\alpha n_\alpha = g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \frac{g_{\alpha\beta} \perp Z^\alpha \perp Z^\beta}{(\delta l)^2} = -\frac{h_{\alpha\beta} Z^\alpha Z^\beta}{e^{-\omega} h_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu} = -e^\omega. \quad (1.102)$$

Onde esta última implica que o comprimento de  $n^\alpha$  medido por um observador é unitário, como era de se esperar.

Inserindo a 1.99 na 1.83 ficamos com

$$\perp (\perp Z^\alpha)^\cdot = h_\beta^\alpha (n^\beta \delta l)^\cdot = (\delta l)^\cdot n^\alpha + h_\beta^\alpha \dot{n}^\beta \delta l = V^\alpha{}_\beta n^\beta \delta l = V^\alpha{}_\beta \perp Z^\beta \quad (1.103)$$

$$\Rightarrow \frac{(\delta l)^\cdot}{\delta l} n^\alpha + h_\beta^\alpha \dot{n}^\beta = V^\alpha{}_\beta n^\beta, \quad (1.104)$$

onde foi usada a relação  $h_\beta^\alpha n^\beta = n^\alpha$ . Contraindo a última equação com  $n_\alpha$  obtemos

$$-e^\omega \frac{(\delta l)^\cdot}{\delta l} + n_\beta \dot{n}^\beta = V_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \sigma_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta - \frac{e^\omega}{3} \theta, \quad (1.105)$$

$$n_\beta \dot{n}^\beta = n_\beta u^\alpha \nabla_\alpha n^\beta = 0, \quad (1.106)$$

$$\therefore \frac{(\delta l)^\cdot}{\delta l} = -e^{-\omega} \sigma_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + \frac{1}{3} \theta. \quad (1.107)$$

Onde a segunda equação se anula em virtude da 1.43. Substituindo a 1.107 na 1.104, ficamos com

$$\begin{aligned} h_\beta^\alpha \dot{n}^\beta &= V^\alpha{}_\beta n^\beta + e^{-\omega} \sigma_{\beta\gamma} n^\beta n^\gamma n^\alpha - \frac{1}{3} \theta n^\alpha \\ &= \omega^\alpha{}_\beta n^\beta + \sigma^\alpha{}_\beta n^\beta + e^{-\omega} \sigma_{\beta\gamma} n^\beta n^\gamma n^\alpha \\ &= [\omega^\alpha{}_\beta + \sigma^\alpha{}_\beta + e^{-\omega} \sigma_{\mu\nu} n^\mu n^\nu h_\beta^\alpha] n^\beta \end{aligned} \quad (1.108)$$

Vemos que  $\sigma_{\alpha\beta}$  altera o módulo e direção do vetor posição relativa, mas não o tri-volume perpendicular a curva. Este tensor, portanto, corresponde a um *cisalhamento* do tri-volume. O tensor  $\omega_{\alpha\beta}$ , por sua vez, altera somente a direção do vetor posição relativa, sem alterar o comprimento de  $\perp Z^\alpha$  e tampouco o tri-volume, correspondendo, portanto, à uma *rotação* rígida do tri-volume considerado.

A partir da 1.88, podemos obter as respectivas equações para cada uma das partes irreduzíveis da matriz  $V^\alpha{}_\beta$ . Estas se encontram como sendo

$$\dot{\theta} - \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta^2 - \nabla_\alpha \dot{u}^\alpha = R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta; \quad (1.109)$$

$$e^\omega h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta (e^{-\omega}\omega_{\gamma\delta})^\cdot - e^\omega h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta \nabla_{[\delta} (e^{-\omega}u_{\gamma]})^\cdot + 2\omega_{[\alpha\gamma}\sigma^\gamma{}_{\beta]} + \frac{2}{3}\omega_{\alpha\beta}\theta = 0; \quad (1.110)$$

$$\begin{aligned} e^\omega h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta (e^{-\omega}\sigma_{\gamma\delta})^\cdot + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}(\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}) + \omega_{\alpha\gamma}\omega^\gamma{}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^\gamma{}_\beta + \frac{2}{3}\sigma_{\alpha\beta}\theta + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \\ + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\nabla_\mu \dot{u}^\mu - e^\omega h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta \nabla_{(\delta} (e^{-\omega}u_{\gamma)})^\cdot + (e^{-\omega}u_\alpha)^\cdot (e^{-\omega}u_\beta)^\cdot = R_{\alpha\gamma\beta\delta}u^\gamma u^\delta. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Apenas para constar, mostraremos os resultados análogos quando se considera o caso mais geral da geometria de Weyl com um vetor tangente às curvas,  $V^\alpha$ , com módulo unitário, tal como o usado na 1.95. As B.12, 1.87 e 1.88, ficam, respectivamente,

$$\perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) = h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda \left[ R_{\rho\lambda\delta}^\beta V^\rho V^\delta + \nabla_\lambda \dot{V}^\beta - \dot{V}_\lambda \dot{V}^\beta + \dot{V}^\beta \omega_\lambda \right] Z^\gamma; \quad (1.112)$$

$$\perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) = h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot Z^\gamma + V^\alpha{}_\epsilon V^\epsilon{}_\gamma Z^\gamma; \quad (1.113)$$

$$h_\delta^\alpha h_\gamma^\beta (V^\delta{}_\beta)^\cdot + V^\alpha{}_\epsilon V^\epsilon{}_\gamma - h_\beta^\alpha R_{\rho\gamma\delta}^\beta V^\rho V^\delta - h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda \nabla_\lambda \dot{V}^\beta + h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda \dot{V}_\lambda \dot{V}^\beta - h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda \dot{V}^\beta \omega_\lambda = 0. \quad (1.114)$$

Novamente, esta última equação se trata de uma identidade e, portanto, espera-se que todos os seus termos contendo  $\omega_\alpha$  se cancelem identicamente. De fato, isto pode ser verificado ao se considerar as partes antissimétrica, simétrica sem traço e o traço desta equação. Estas se encontram como sendo

$$\dot{\hat{\theta}} + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}\hat{\sigma}^{\alpha\beta} - \hat{\omega}_{\alpha\beta}\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\hat{\theta}^2 - \hat{\nabla}_\alpha \hat{V}^\alpha = \hat{R}_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta; \quad (1.115)$$

$$h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta \hat{\omega}_{\gamma\delta} - h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta \hat{\nabla}_{[\delta} \hat{V}_{\gamma]} + 2\hat{\omega}_{[\alpha\gamma}\hat{\sigma}^\gamma{}_{\beta]} + \frac{2}{3}\hat{\omega}_{\alpha\beta}\hat{\theta} = 0; \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned}
& h_{\alpha}^{\gamma} h_{\beta}^{\delta} \hat{\sigma}_{\gamma\delta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} (\hat{\omega}_{\mu\nu} \hat{\omega}^{\mu\nu} - \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{\sigma}^{\mu\nu}) + \hat{\omega}_{\alpha\gamma} \hat{\omega}^{\gamma}_{\beta} + \hat{\sigma}_{\alpha\gamma} \hat{\sigma}^{\gamma}_{\beta} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{\theta} + \\
& + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \hat{R}_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \hat{\nabla}_{\mu} \hat{V}^{\mu} - h_{\alpha}^{\gamma} h_{\beta}^{\delta} \hat{\nabla}_{(\delta} \hat{V}_{\gamma)} + \hat{V}_{\alpha} \hat{V}_{\beta} = \hat{R}_{\alpha\gamma\beta\delta} V^{\gamma} V^{\delta}. \quad (1.117)
\end{aligned}$$

Exatamente as expressões já conhecidas para a geometria riemanniana. Nelas, não aparece nenhum termo contendo o campo vetorial de Weyl. Sendo estas, então, as expressões para uma congruência de curvas em Riemann, podemos verificar que, de fato, as encontradas para o caso do WIST, 1.109, 1.110 e 1.111, correspondem a estas acima substituindo a métrica delas pela nossa  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  definida em 1.65.

## 2 *Formulação variacional*

Uma vez apresentada a motivação para se tratar a gravitação no contexto da geometria diferencial, bem como introduzidos os correspondentes objetos matemáticos, passamos para a questão de se estabelecer sua formulação variacional de modo a obter a dinâmica para os objetos geométricos recém introduzidos de acordo com o conteúdo energético considerado. As ações que fornecem uma geometria em WIST e a dinâmica das partículas teste já são muito bem conhecidas e podem ser encontradas em diversas referências (7–20). Porém, a forma específica para o acoplamento dos objetos geométricos, em particular, o campo escalar de Weyl, com o conteúdo energético, sempre foi arbitrário e, diferentemente de qualquer outro já usado, iremos postular um de modo que a simetria presente na descrição deste tipo de geometria seja preservada. Com isso, teremos uma simetria de calibre inédita nas teorias da gravitação.

### 2.1 *Ações para a geometria e partículas teste*

As equações de Einstein 1.33 em WIST para o vácuo são facilmente obtidas efetuandose uma variação à Palatini (11) da ação

$$S = \int e^{-\omega} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.1)$$

em que a métrica e a conexão são tratadas como campos independentes. A variação da conexão dá precisamente a 1.40 com a condição  $\omega_\mu = \partial_\mu \omega$ , o que é necessário e suficiente para garantir que estamos em WIST. As variações da métrica e  $\omega$  dão, respectivamente:

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

$$R = 0. \quad (2.3)$$

Vemos que a variação de  $\omega$  dá uma equação redundante, uma vez que a 2.3 é a mesma que o traço da 2.2. Tal igualdade implica numa liberdade para uma das funções a se determinar e decorre da simetria de calibre da teoria, que admite soluções a menos de uma função arbitrária. Isto ficará claro mais adiante, quando estabeleceremos o acoplamento com outros campos físicos.

Para que uma partícula teste de massa  $m$  obedeça a equação da geodésica 1.47, devemos ter sua ação dada por (14)

$$S_p = \int 2m \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{e^{-\omega} g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds}} \delta^4(x - z(s)) ds d^4x. \quad (2.4)$$

Esta nada mais é do que a ação equivalente da RG com a métrica efetiva no lugar da usual. Desta forma, é natural que a equação resultante tenha a mesma dependência em  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  que a da relatividade geral tem em  $g_{\mu\nu}$  e, com isso, ficamos com a equação da geodésica em WIST.

## 2.2 Acoplamento com outros campos

Tendo introduzidas as formulações variacionais para a geometria e trajetórias das partículas teste no vácuo, devemos estabelecer agora como um dado conteúdo energético se acopla com os objetos geométricos de modo a produzir alterações na curvatura do espaço-tempo. Para isso, vejamos primeiramente como a simetria de calibre se manifesta nas lagrangianas introduzidas acima. Estas resultam numa conexão dada pela 1.40 com o campo  $\omega_\alpha$  satisfazendo a 1.60.

Considerando-se a métrica efetiva, não é difícil perceber que a conexão em WIST pode ser escrita como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\lambda} (\partial_\beta \tilde{g}_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma \tilde{g}_{\beta\lambda} - \partial_\lambda \tilde{g}_{\beta\gamma}). \quad (2.5)$$

Como já foi observado anteriormente, temos uma conexão métrica para  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ , onde o campo escalar de Weyl e a métrica sempre aparecem como na métrica efetiva. Desta forma, basta verificar que esta é invariante de calibre para concluirmos, de imediato, que a geometria também é.

Uma vez que a conexão é invariante, podemos notar da 1.22 que o tensor de Riemann também será, assim como o tensor de Ricci definido em 1.26. O escalar de Ricci, por sua

vez, se escreve como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-\Lambda} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-\Lambda} R, \quad (2.6)$$

não sendo, portanto, invariante de calibre. No entanto, o tensor de Einstein, por sua vez, apresenta a mesma invariância da geometria, pois

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{\Lambda} g_{\mu\nu} e^{-\Lambda} R = G_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

De fato, este pode ser reescrito como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{-\omega} g_{\mu\nu} e^{\omega} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

e vemos que, assim como a conexão e os tensores de Riemann e Ricci, o de Einstein também se escreve somente em termos da métrica efetiva, expondo sua invariância de modo mais evidente.

O mesmo ocorre com a equação da geodésica que, em WIST, se escreve como

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = \frac{1}{2} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \ln \left| \tilde{g}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right|, \quad (2.9)$$

$$d\sigma^2 = d\tau^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0. \quad (2.10)$$

Vemos que o tempo próprio, já dito invariante, escreve-se em termos de  $\omega$  e  $g_{\mu\nu}$  através da métrica efetiva e resulta numa equação também invariante para as geodésicas, onde, novamente, a métrica e o campo escalar  $\omega$  aparecem sempre como  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ .

Tendo reconhecido que estes campos geométricos sempre aparecem desta forma nas equações dinâmicas 2.2, 2.3, 2.5 e 2.10, assim como no tempo próprio, e que anulando o campo escalar  $\omega$  recaímos na RG, percebemos que as equações obtidas nada mais são do que as do caso riemanniano com a métrica efetiva no lugar da usual. De fato, como já mencionado, podemos usar a transformação de calibre para anular o campo escalar geométrico e passarmos para a gravitação de Einstein com a métrica transformada  $\bar{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}$  dando as mesmas expressões acima, as quais são equivalentes à qualquer calibre.

Esta simetria nas equações deve estar presente nas lagrangianas consideradas e, pelo

que foi dito acima, devemos esperar que elas não passam das usadas na RG com a substituição da métrica usual pela efetiva. No caso da lagrangiana das partículas teste, isto é evidente. Para a 2.1, notemos, primeiro, que o determinante da métrica efetiva  $\tilde{g} = e^{-4\omega}g$  e, com isso, esta ação fica

$$S = \int e^{-\omega} R \sqrt{-g} d^4x = \int e^{\omega} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} e^{-2\omega} \sqrt{-g} d^4x = \int \tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-\tilde{g}} d^4x. \quad (2.11)$$

Temos, assim, a ação de Einstein-Hilbert escrita com a métrica efetiva no lugar da usual,<sup>1</sup> justificando a simetria das equações decorrentes do princípio variacional, bem como a semelhança destas com as da relatividade geral com  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  no lugar de  $g_{\mu\nu}$ .

Feitas estas observações, fica bastante claro o acoplamento que iremos postular. Para nossa reformulação da gravitação de Einstein no contexto das geometrias de Weyl, tomamos as lagrangianas da RG e fazemos a substituição da métrica usual pela efetiva onde quer que ela apareça.<sup>2</sup> Isto é, nossa ação se escreve como

$$S = \int [R(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}) + \mathcal{L}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots)] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x, \quad (2.12)$$

onde  $\mathcal{L}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \sqrt{-\tilde{g}}$  é a lagrangiana de um sistema físico tal que  $\mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \dots) \sqrt{-g}$  é a sua equivalente da relatividade geral.

Esta teoria é manifestamente invariante de calibre e, conseqüentemente, suas soluções são determinadas a menos de uma função arbitrária. Como dito anteriormente, esta arbitrariedade resulta numa liberdade para uma das funções a se determinar e decorre de uma redundância nas equações cuja origem ficará evidente no que segue.

Aplicamos o princípio de Hamilton na ação acima: a variação da conexão nos dá WIST. A variação com respeito à métrica dá:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta S}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = [G_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}) + T_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots)] e^{\omega} \sqrt{-\tilde{g}} = 0$$

$$\Rightarrow G_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}) = -T_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \quad (2.13)$$

$$\therefore R(\tilde{g}^{\mu\nu}) = T(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots), \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>Lembrando que estamos adotando o procedimento variacional de Palatini, onde a conexão é tratada como um campo independente.

<sup>2</sup>Apresentamos este acoplamento primeiramente na IV Reunião Anual do ICRA (64) e, em seguida, no *8th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology* (65), ocasião em que C. Romero, coincidentemente, também o apresentou da mesma forma (66, 67).

onde definimos

$$T_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta [\mathcal{L}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \sqrt{-\tilde{g}}]}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}, \quad (2.15)$$

$$T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}; \quad (2.16)$$

variando  $\omega$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \omega} &= \frac{\delta S}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \frac{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}{\delta \omega} = [G_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}) + T_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots)] e^\omega g^{\mu\nu} \sqrt{-\tilde{g}} = 0 \\ &\Rightarrow R(\tilde{g}^{\mu\nu}) = T(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots), \end{aligned} \quad (2.17)$$

que é igual à 2.14. Com isso, temos mais funções a determinar do que equações e, portanto, uma indeterminação nas soluções.

Apesar disto, não devemos esperar que os observadores sejam capazes de distinguir diferentes soluções, pois isto representaria uma sensibilidade em relação ao calibre escolhido. De fato, se temos seus instrumentos de medida caracterizando o espaço-tempo através da métrica efetiva, que é invariante de calibre, o observador será indiferente às diversas soluções possíveis, pois esta é bem determinada através da 2.13, que nada mais é do que a equação de Einstein para a métrica efetiva.

Nossa teoria foi construída, em última análise, como uma reformulação da relatividade geral em Weyl dotada de uma simetria de calibre introduzida a partir da substituição da métrica usual pela efetiva. Tal substituição não passa de uma transformação conforme da métrica da relatividade geral e, pelo que estamos sugerindo, não deve trazer nenhuma alteração nos resultados da teoria. Esta métrica transformada, todavia, está sujeita às mesmas equações dinâmicas da anterior e é ela que deve fornecer os mesmos resultados anteriores à transformação. A liberdade que temos após a determinação da métrica efetiva é somente através da transformação de calibre 1.67 que consiste, além numa transformação conforme, numa outra no campo  $\omega$  que, justamente, compensa a da métrica.

Como discutido por Bekenstein e Meisels na Ref. 23, desde que Dirac (24) levantou a questão sobre a constante gravitacional ser ou não, de fato, uma constante, este problema tem sido um desafio para a física teórica. Porém, eles argumentam que isto pode ser solucionado levando-se em conta o princípio de que todas as equações fundamentais da física devem ser invariantes por transformações locais de escala. Princípio este primeiramente

proposto por Weyl (5) e Hoyle e Narlikar (21, 22). Portanto, é de um grande interesse teórico que se obtenha uma versão invariante conforme da gravitação. E, embora tenha havido algumas tentativas, nenhuma formulou a teoria em termos da geometria de Weyl onde a transformação de simetria ganha essa nova interpretação.

Nesse formalismo, podemos, ainda, incorporar os casos de acoplamento não-mínimo considerados na Ref. 68. Nestes, considera-se o *tensor eletromagnético*,  $F_{\mu\nu}$ , a partir do qual se constrói a lagrangiana para o eletromagnetismo, acoplado com a curvatura através das seguintes possibilidades, no contexto das geometrias riemannianas:  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$ ,  $R_{\alpha\beta}F^{\alpha\gamma}F_{\gamma}^{\beta}$  e  $RF^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ . Antes de fazer a passagem para o nosso formalismo, devemos observar que o tensor eletromagnético se escreve como

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha} = -F_{\beta\alpha}, \quad (2.18)$$

onde o campo fundamental  $A_{\alpha}$  é o *potencial eletromagnético* e não possui relação com os objetos geométricos. Desta forma,  $F_{\alpha\beta}$  é invariante de calibre, enquanto que

$$F_{\gamma}^{\beta} = g^{\beta\alpha}F_{\gamma\alpha} \rightarrow e^{-\Lambda}F_{\gamma}^{\beta}, \quad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\gamma\delta} \rightarrow e^{-2\Lambda}F^{\alpha\beta}. \quad (2.19)$$

Vemos que os acoplamentos citados, quando inseridos na ação e escritos explicitamente em termos da métrica, devem passar para o nosso formalismo como

$$\begin{aligned} S &= \int [\tilde{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\alpha\lambda}R_{\beta\gamma\delta}^{\lambda}\tilde{g}^{\alpha\rho}\tilde{g}^{\beta\sigma}F_{\rho\sigma}\tilde{g}^{\gamma\mu}\tilde{g}^{\delta\nu}F_{\mu\nu} + R_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\gamma\nu}F_{\mu\nu}\tilde{g}^{\beta\lambda}F_{\gamma\lambda} + \\ &\quad + \tilde{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\lambda}\tilde{g}^{\beta\rho}F_{\lambda\rho}F_{\alpha\beta} + \mathcal{L}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots)] \sqrt{-\tilde{g}}d^4x = \\ &= \int [e^{-\omega}R + e^{\omega}R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} + e^{\omega}R_{\alpha\beta}F^{\alpha\gamma}F_{\gamma}^{\beta} + e^{\omega}RF^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \\ &\quad + e^{-2\omega}\mathcal{L}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots)] \sqrt{-g}d^4x. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Esta, sendo escrita somente em termos de quantidades invariantes, assim também deverá ser, bem como qualquer outra equação decorrente do princípio variacional. Os termos usuais relativos ao acoplamento mínimo do eletromagnetismo, inclusive na presença de fontes, estão contidos em  $\mathcal{L}$  e serão tratados no próximo capítulo.

Tendo postulado o acoplamento com os demais campos físicos preservando a simetria de calibre da geometria, obtemos uma teoria que admite um função,  $\Lambda(x^{\mu})$ , arbitrária que,

por sua vez, não deve trazer nenhuma alteração nos observáveis quando comparados com a formulação riemanniana. Portanto, a indeterminação existente no sistema de equações não deve ser preocupante se tivermos caracterizadas adequadamente, de acordo com esta simetria, as observações ou medidas feitas.

Antes de partir para a caracterização destas, consideremos o exemplo da próxima seção que consiste numa solução para o vácuo exibindo explicitamente a liberdade mencionada para alguma das funções envolvidas. A definição de tempo próprio que fizemos será definitivamente consolidada ao impormos que a solução obtida deve ser invariante e dar os mesmos resultados da já conhecida solução do caso equivalente riemanniano.

### 2.3 Vácuo estático e esférico-simétrico

Vamos considerar o vácuo, descrito pela ação 2.1, e resolver suas equações para uma métrica estática com simetria esférica. Substituindo a 1.57 em WIST na 2.2, ficamos com

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_{\mu}\partial_{\nu}\omega + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\omega\partial_{\nu}\omega + g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}\partial^{\alpha}\omega\partial_{\alpha}\omega - \hat{\square}\omega\right) \quad (2.21)$$

onde  $\hat{\square}\omega \equiv g^{\mu\nu}\hat{\nabla}_{\mu}\partial_{\nu}\omega$  é o *d'Alembertiano* em Riemann do campo  $\omega$ . A equação 2.3, depois de substituir a 1.56 em WIST fornece

$$\hat{R} = 3\hat{\square}\omega - \frac{3}{2}\partial^{\alpha}\omega\partial_{\alpha}\omega, \quad (2.22)$$

que, como já foi dito, obtém-se do traço da 2.21.

Para a simetria em questão, temos a métrica e o campo escalar de Weyl dados por

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (2.23)$$

$$\omega = \omega(r), \quad (2.24)$$

onde passamos a escrever explicitamente a velocidade da luz,  $c$ .

Dada a redundância nas equações, temos apenas duas delas independentes, apesar das três funções envolvidas. Tomemos, então, as equações  $G_{00} = 0$  e  $G_{11} = 0$  dadas, respectivamente, por

$$\frac{B'}{rB} - \frac{1}{r^2B} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \omega' + \frac{2\omega'}{r} + \omega'' - \frac{1}{4} (\omega')^2, \quad (2.25)$$

$$-\frac{A'}{rB} + \frac{1}{r^2B} - \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{2} \frac{A'}{A} \omega' - \frac{2\omega'}{r} + \frac{3}{4} (\omega')^2, \quad (2.26)$$

onde, para uma função  $F(r)$  qualquer,  $F' \equiv \frac{dF}{dr}$ .

Temos, para esse sistema, a seguinte solução escrita em termos da função arbitrária  $\beta = \beta(r)$ , que reflete a simetria de calibre da teoria:

$$\omega = \frac{2}{3} \ln(r\beta^2) + \ln C_2, \quad (2.27)$$

$$A = C_1 C_2 (r\beta^2)^{\frac{2}{3}} - 2\beta^2, \quad (2.28)$$

$$B = \frac{9\beta^4 [C_1 C_2 (r\beta^2)^{\frac{2}{3}} - 2\beta^2]}{C_1 C_2 (r\beta^2)^{\frac{2}{3}} [r(\beta^2)' - 2\beta^2]^2}. \quad (2.29)$$

Esta solução é especialmente interessante pois evidencia de forma inequívoca a necessidade de se definir o tempo próprio como na 1.64, resultando na métrica efetiva 1.65 para o observador que faz medidas nesse espaço-tempo. Para vermos isso, calculemos as velocidades das órbitas circulares das partículas teste que seguem geodésicas na geometria descrita por essa solução.

Consideremos, primeiramente, a parametrização usual da RG e que a geometria caracterizada pelos instrumentos de medida do observador é descrita pela própria métrica  $g_{\mu\nu}$  não-invariante. Temos, então, para as velocidades destas partículas,

$$V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad \Rightarrow \quad V^\alpha V_\alpha = 1. \quad (2.30)$$

A equação da geodésica 1.47 com essa parametrização se escreve

$$V^\mu \nabla_\mu V^\alpha = -\frac{1}{2} V^\mu \omega_\mu V^\alpha \quad (2.31)$$

$$\therefore \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = -\frac{1}{2} \omega_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (2.32)$$

Considerando as coordenadas como funções de  $t$ , temos a relação

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 A - \frac{\dot{r}^2}{B} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2, \quad (2.33)$$

onde  $\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt}$  para qualquer  $F$ . Escrevendo  $\frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt}$ , a 2.32 fica

$$\frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{ds} \dot{x}^\alpha \right) + \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\frac{1}{2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \omega_\mu \dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha \quad (2.34)$$

$$\therefore \underbrace{-\frac{1}{2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2}_{\equiv T_1} \dot{x}^\alpha + \ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{1}{2} \omega_\mu \dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha, \quad (2.35)$$

onde o coeficiente de  $\dot{x}^\alpha$  definido acima se escreve como

$$T_1 = \frac{-c^2 A' \dot{r} - \frac{1}{B^2} B' \dot{r}^3 + \frac{1}{B} \dot{r} \ddot{r} + r \dot{r} \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \sin^2 \theta (r \dot{r} \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}) + r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}}{c^2 A - \frac{1}{B} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}. \quad (2.36)$$

As quatro equações que definem a geodésica ficam, então,

$$T_1 c = c \left( \frac{\omega'}{2} - \frac{A'}{A} \right) \dot{r}, \quad (2.37)$$

$$T_1 \dot{r} + \ddot{r} = -\frac{B}{2} \left( A' c^2 - \frac{B'}{B^2} \dot{r}^2 - 2r \dot{\theta}^2 - 2r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{B \omega'}{2} \left( A c^2 - \frac{\dot{r}^2}{B} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{2} \omega' \dot{r}^2, \quad (2.38)$$

$$T_1 \dot{\theta} + \ddot{\theta} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \omega' \dot{r} \dot{\theta}, \quad (2.39)$$

$$T_1 \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \omega' \dot{r} \dot{\varphi}. \quad (2.40)$$

Adotando as condições iniciais:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{r} = 0 \quad (2.41)$$

$$\therefore T_1 = \frac{vr\ddot{\varphi}}{c^2A - v^2}, \quad v \equiv r\dot{\varphi}, \quad (2.42)$$

e as equações 2.37–2.40 ficam:

$$\frac{vr\ddot{\varphi}}{c^2A - v^2} = 0, \quad (2.43)$$

$$\ddot{r} = -\frac{B}{2} \left( A'c^2 - \frac{2v^2}{r} \right) + \frac{B\omega'}{2} (Ac^2 - v^2), \quad (2.44)$$

$$\ddot{\theta} = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{vr\ddot{\varphi}}{c^2A - v^2} \cdot \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2A}{c^2A - v^2} \cdot \ddot{\varphi} = 0. \quad (2.46)$$

A 2.46 implica em  $\ddot{\varphi} = 0$ , concordando com a 2.43. A 2.45 diz que o movimento permanece no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Para o caso de uma órbita circular, temos  $\ddot{r} = 0$  e a 2.44 dá:

$$A'c^2 - \frac{2v^2}{r} = \omega' (Ac^2 - v^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{\omega'A - A'}{\omega' - \frac{2}{r}}. \quad (2.47)$$

Substituindo as soluções 2.27 e 2.28, encontramos, finalmente,

$$\frac{v^2}{c^2} = \beta^2. \quad (2.48)$$

Isto é, as velocidades das órbitas circulares de acordo com a distância radial é completamente arbitrária nessa geometria, sendo explicitamente dependente do calibre escolhido. Também pudera, pois consideramos uma geometria não-invariante para o espaço-tempo dos observadores, em desacordo com o discutido até então.

Nossa lagrangiana para o vácuo, assim como a das partículas teste, é simétrica em relação às transformações de calibre e, portanto, indiferentes a elas. Logo, não podemos ter um resultado dependente de uma função arbitrária, a menos que tenhamos definido erroneamente nossas medidas. Elas, como já mencionado, devem acompanhar a simetria da teoria e serem univocamente definidas, sem nenhuma arbitrariedade. Em particular, para este caso do vácuo estático e esférico-simétrico, devemos recuperar os mesmos resultados da já conhecida solução de Schwarzschild da RG, contemplada pelas transformações

de calibre. Para isso, consideremos, então, o tempo próprio adequadamente definido pela 1.64.

É importante perceber a diferença deste parâmetro em relação aos outros quanto ao significado físico. Este, como dissemos, está relacionado com as medidas do observador e caracteriza a geometria através da métrica efetiva. Isto é, as medidas feitas devem estar relacionadas a este parâmetro e como se fossem obtidas com o uso de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ . Isto é crucial para se obter corretamente as velocidades das órbitas circulares e, assim, consolidar a métrica efetiva induzida pelo tempo próprio como caracterização adequada do espaço-tempo dos observadores. Portanto, é quanto ao significado físico que se dá a peculiaridade deste parâmetro e isto ficará claro a seguir.

Vamos considerar que estejamos descrevendo a curva por esse tempo próprio. A velocidade das partículas, como já vimos, ficaria dada por

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad u^\alpha u_\alpha = e^\omega \quad (2.49)$$

$$\therefore \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.50)$$

Usando a 2.23, teremos

$$d\tau^2 = e^{-\omega} ds^2 = e^{-\omega} \left[ A(r)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (2.51)$$

e é nesse momento que o significado físico do tempo próprio se faz presente. Consideremos, por um breve momento, estas mesmas coordenadas caracterizando, novamente, o espaço-tempo. Parametrizando-as, outra vez, por  $t$ , obtemos,

$$\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = e^{-\omega} \left( c^2 A - \frac{\dot{r}^2}{B} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right). \quad (2.52)$$

Desta forma, estamos, simplesmente, ignorando o fator  $e^{-\omega}$  que distingue a métrica usual da efetiva na caracterização do tempo próprio e preservaríamos erroneamente o significado físico destas coordenadas como representando tempo e espaço. Prosseguindo da mesma forma, fazendo

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt}, \quad (2.53)$$

pode-se verificar que recairíamos no mesmo erro, obtendo, novamente, a 2.48.

Isto se deve à invariância da equação da geodésica 1.47 em relação ao parâmetro que descreve a curva. Neste caso, tendo ignorado o significado físico do tempo próprio, ele não passou de uma reparametrização que, como tal, não altera a equação. O que devemos alterar, portanto, é a interpretação das coordenadas espaço-temporais que estamos considerando, devendo ser levado em conta o fator  $e^{-\omega}$  que faz a correção devidamente.

Repare que a métrica efetiva 2.51 com as soluções encontradas permanece completamente indeterminada, devido à função  $\beta$  arbitrária. Portanto, não podemos obter nenhuma conclusão à respeito do significado físico das coordenadas ou do observador ao qual elas correspondem. Nós não podemos, sequer, determinar qualquer possibilidade para as coordenadas nas quais ele se encontra. Daí a indeterminação da velocidade das órbitas quando medidas por esse sistema de coordenadas.

Um observador, como já discutido, é sempre localmente inercial e, portanto, seu sistema de coordenadas é tal que a métrica em sua posição se dá pela de Minkowski. Isto é, a geometria caracterizada localmente por seus instrumentos de medida deve ser a plana da relatividade especial.

Devemos, então, obter novas coordenadas de modo que possamos interpretar seu significado a partir da métrica efetiva. Estas, caracterizando adequadamente as medidas feitas, não devem trazer nenhuma alteração em relação às da conhecida solução de Schwarzschild. Para fazermos isto, notemos que a 2.27 nos dá

$$\beta^2 = \frac{e^{\frac{3\omega}{2}}}{C_2^{\frac{3}{2}} r}, \quad (2.54)$$

que, substituindo nas soluções para  $A(r)$  e  $B(r)$ , resulta em

$$A = C_1 e^\omega - 2 \frac{e^{\frac{3}{2}\omega}}{C_2^{\frac{3}{2}} r} = e^\omega \left( C_1 - \frac{2e^{\frac{\omega}{2}}}{C_2^{\frac{3}{2}} r} \right), \quad (2.55)$$

$$B = \frac{4 \left( C_1 C_2^{\frac{3}{2}} e^\omega r - 2e^{\frac{3}{2}\omega} \right)}{C_1 C_2^{\frac{3}{2}} e^\omega r (\omega' r - 2)^2} = \frac{4 \left( C_1 - \frac{2}{C_2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}} r} \right)}{C_1 (\omega' r - 2)^2}. \quad (2.56)$$

O tempo próprio se escreve

$$d\tau^2 = e^{-\omega} A(r) c^2 dt^2 - \frac{e^{-\omega}}{B(r)} dr^2 - e^{-\omega} r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.57)$$

onde os elementos da métrica efetiva, após substituição das 2.55 e 2.56, resultam em

$$e^{-\omega} A = C_1 - \frac{2}{C_2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}} r}, \quad (2.58)$$

$$\frac{B}{e^{-\omega}} = \frac{4 \left( C_1 - \frac{2}{C_2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}} r} \right)}{C_1 \left( -r e^{-\frac{\omega}{2}} \frac{\omega'}{2} \cdot 2 + 2e^{-\frac{\omega}{2}} \right)^2} = \frac{1}{C_1} \frac{\left( C_1 - \frac{2}{C_2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}} r} \right)}{\left[ \left( e^{-\frac{\omega}{2}} r \right)' \right]^2}. \quad (2.59)$$

Fazendo, agora, as transformações

$$\bar{r} = e^{-\frac{\omega}{2}} r, \quad (2.60)$$

$$\bar{t} = C_1^{\frac{1}{2}} t, \quad (2.61)$$

e redefinindo  $C_2 = \left( \frac{c^2}{C_1 GM} \right)^{\frac{2}{3}}$ , o tempo próprio fica

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \left( C_1 - \frac{2}{C_2^{\frac{3}{2}} \bar{r}} \right) c^2 dt^2 - \left( C_1 - \frac{2}{C_2^{\frac{3}{2}} \bar{r}} \right)^{-1} C_1 (\bar{r}' dr)^2 - \bar{r}^2 d\Omega^2 = \\ &= \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 \bar{r}} \right) c^2 d\bar{t}^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 \bar{r}} \right)^{-1} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Recuperamos, assim, a solução de Schwarzschild univocamente determinada em termos das novas coordenadas. A partir desta expressão, podemos, facilmente, concluir que estas caracterizam o tempo, distância radial e ângulos de um observador que se encontra no infinito.

Repare que tal procedimento seria impossível de ser feito com a métrica usual 2.23. Isto é, não importa qual transformação de coordenadas fosse feita, ela continuaria sempre indeterminada e, portanto, nunca poderíamos associá-las a algum observador. Tal exemplo, portanto, comprova a necessidade de se considerar a métrica efetiva para caracterizar adequadamente a geometria em questão.

Tendo, agora, a devida interpretação das coordenadas como representando o espaço-tempo de um dado observador, podemos calcular as velocidades das órbitas circulares em termos delas. Façamos, em analogia à 2.52,

$$\left(\frac{d\tau}{d\bar{t}}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2\bar{r}}\right) c^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2\bar{r}}\right)^{-1} \left(\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}}\right)^2 - \bar{r}^2 \left(\frac{d\theta}{d\bar{t}}\right)^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\bar{t}}\right)^2. \quad (2.63)$$

Prosseguindo fazendo  $\frac{d}{d\tau} = \frac{d\bar{t}}{d\tau} \frac{d}{d\bar{t}}$  na 2.50 e definindo

$$V \equiv \bar{r} \frac{d\varphi}{d\bar{t}}, \quad (2.64)$$

obtemos o resultado esperado, igual ao da relatividade geral:

$$V^2 = \frac{GM}{\bar{r}}. \quad (2.65)$$

Este, poderia ser igualmente obtido fazendo a transformação 2.60 e 2.61 na 2.48. A partir da 2.54, temos

$$\beta^2 = \frac{e^\omega}{C_2^{\frac{3}{2}}\bar{r}} = e^\omega \frac{C_1 GM}{c^2\bar{r}} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{e^{-\omega} v^2}{C_1} = \frac{GM}{\bar{r}} \quad (2.66)$$

$$\therefore \frac{GM}{\bar{r}} = \frac{e^{-\omega} (r\dot{\varphi})^2}{C_1} = (e^{-\frac{\omega}{2}} r)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\bar{t}}\right)^2 = \bar{r}^2 \left(\frac{d\varphi}{d\bar{t}}\right)^2 = V^2, \quad (2.67)$$

concordando com a 2.65.

Esta questão da interpretação das coordenadas usadas como representando o tempo e o espaço pode ser revertida igualmente para a solução de Schwarzschild na própria relatividade geral. Para vermos isto, basta considerar as mesmas transformações 2.60 e 2.61 nesta solução. Obteríamos, novamente a 2.57 e, descrevendo as coordenadas em termos de  $t$ , encontraríamos outra vez a 2.48.

O cuidado com a interpretação das coordenadas, portanto, não é exclusividade das geometrias de Weyl, tampouco da nossa reformulação, e consideramos tê-la esclarecido face ao exposto.

Tendo, finalmente, formulado nossa teoria invariante de calibre com a devida caracterização do tempo próprio induzindo uma métrica efetiva a qual descreve apropriadamente

o espaço-tempo dos observadores, podemos reforçar o acoplamento utilizado. De fato, se para a passagem da geometria plana da relatividade especial para a curva da relatividade geral foi feita a troca da métrica de Minkowski pela usual, assegurando as propriedades da geometria riemanniana, no caso do WIST temos o uso da métrica efetiva igualmente justificado, uma vez que, neste caso, é esta que garante as propriedades deste tipo de geometria, em analogia à usual na RG.

Verificaremos, agora, a invariância de calibre nos demais observáveis da teoria.

## 3 *Desvio para o vermelho*

Um observável particularmente importante da teoria é o desvio para o vermelho (*redshift*), especialmente devido à sua utilidade em cosmologia. A partir deste, obtém-se informações sobre as propriedades globais do universo, bem como sua evolução. Este efeito consiste na variação do comprimento de uma onda eletromagnética emitida por uma fonte ao chegar no observador. Faremos, então, sua descrição desde a obtenção das equações do eletromagnetismo, introduzindo a óptica geométrica e definindo o comprimento de onda a partir da solução das equações de Maxwell nesse regime. Esta formulação se verificará como sendo invariante de calibre em pleno acordo com as propriedades desejadas para os observáveis adequadamente definidos no nosso formalismo. No caso de estarmos tratando de um modelo cosmológico, será mostrado que, devido à esta invariância de calibre, podemos atribuir qualquer observação de *redshift* inteiramente ao campo escalar geométrico.

### 3.1 Eletromagnetismo invariante de calibre

Adotando o acoplamento mínimo entre o campo gravitacional e o eletromagnético, a ação da relatividade geral para o eletromagnetismo na presença de fontes (2) transforma-se, no nosso formalismo, em

$$S = \int \left( \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} F_{\mu\nu} + 2A_\mu J^\mu \right) \sqrt{-\tilde{g}} d^4x = \int \left( \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2e^{-2\omega} A_\mu J^\mu \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.1)$$

O tensor eletromagnético,  $F_{\alpha\beta}$ , já foi introduzido e se escreve em termos do potencial eletromagnético,  $A_\alpha$ , como

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (3.2)$$

O termo de corrente,  $J^\mu$ , por sua vez, é dado por

$$J^\mu = J_0 u^\mu = J_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.3)$$

onde  $J_0 = J_0(x^\alpha)$  é a densidade de carga elétrica própria, *i.e.*, no referencial co-móvel com a fonte movendo-se com velocidade  $u^\mu$ . Verificamos, portanto, a invariância de calibre deste termo.

Efetuando a variação do potencial eletromagnético e igualando o resultado a zero, obtemos

$$\hat{\nabla}_\beta F^{\alpha\beta} = -e^{-2\omega} J^\alpha. \quad (3.4)$$

Não é difícil verificar, usando a antissimetria nos índices do tensor eletromagnético, que

$$\hat{\nabla}_\beta F^{\alpha\beta} = e^{-2\omega} \nabla_\beta (e^{2\omega} F^{\alpha\beta}) \quad (3.5)$$

$$\therefore \nabla_\beta (e^{2\omega} F^{\alpha\beta}) = -J^\alpha, \quad (3.6)$$

onde a última vem da 3.4 e vemos que a dinâmica para o potencial eletromagnético também é invariante de calibre, como era de se esperar. Isto fica bastante evidente quando reescrevemos a 3.6 como

$$\nabla_\beta (\tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} F_{\mu\nu}) = -J^\alpha, \quad (3.7)$$

que é dada estritamente em termos de quantidades invariantes.

## 3.2 Óptica geométrica

Seguindo as linhas das Refs. (69, 70), consideremos, agora, o campo eletromagnético,  $F_{\alpha\beta}$ , como um campo teste num espaço-tempo sem carga nem corrente, sendo, assim, solução das equações de Maxwell 3.6 para o vácuo:

$$\nabla_\beta (e^{2\omega} F^{\alpha\beta}) = 0. \quad (3.8)$$

O potencial eletromagnético  $A_\alpha$  é escolhido no calibre de Lorenz,<sup>1</sup> que no nosso formalismo, escreve-se como

$$\nabla_\alpha (e^\omega A^\alpha) = 0, \quad (3.9)$$

satisfazendo a simetria de calibre da geometria.

Supomos a existência de soluções do tipo

$$A_\alpha = g(\phi)\Phi_\alpha + \text{termos desprezíveis}, \quad (3.10)$$

onde  $g(\phi)$  é uma função arbitrária da fase  $\phi$  e varia rapidamente comparada com a amplitude  $\Phi_\alpha$ , de modo que

$$g'k_{[\alpha}\Phi_{\beta]} \gg g\nabla_{[\beta}\Phi_{\alpha]}, \quad (3.11)$$

onde  $g' \equiv \frac{\partial g}{\partial \phi}$  e definimos o *vetor de propagação*  $k_\alpha$  como

$$k_\alpha \equiv \nabla_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi \quad (3.12)$$

$$\therefore \nabla_\beta k_\alpha = \nabla_\alpha k_\beta. \quad (3.13)$$

A partir da 3.9 e considerando as derivadas de diferentes ordens da função  $g$  como linearmente independentes, devido à sua arbitrariedade, ficamos com

$$\nabla_\alpha (e^\omega g \Phi^\alpha) = g \nabla_\alpha (e^\omega \Phi^\alpha) + e^\omega g' k_\alpha \Phi^\alpha = 0 \quad \forall g, g' \quad (3.14)$$

$$\therefore \nabla_\alpha (e^\omega \Phi^\alpha) = \nabla_\alpha (\tilde{g}^{\alpha\beta} \Phi_\beta) = 0, \quad (3.15)$$

$$k_\alpha \Phi^\alpha = 0. \quad (3.16)$$

Substituindo, agora, a 3.10 na 3.8, ignorando os termos desprezíveis e igualando novamente a zero os coeficientes de  $g$ ,  $g'$  e  $g''$ , encontramos

---

<sup>1</sup>Este, refere-se ao calibre eletromagnético. Não confundir com o geométrico, da nossa reformulação.

$$e^\omega R_\beta^\alpha \Phi^\beta + g^{\beta\gamma} \nabla_\beta \nabla_\gamma (e^\omega \Phi^\alpha) = 0, \quad (3.17)$$

$$e^\omega k^\beta \nabla_\beta \Phi_\alpha = -\frac{1}{2} \Phi_\alpha \nabla_\beta (e^\omega k^\beta), \quad (3.18)$$

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \quad (3.19)$$

onde foram usadas as 3.15, 3.16 e 1.54.

Para o tratamento que segue, iremos usar somente esta última que, de acordo com a 1.44, implica em

$$k^\alpha \nabla_\beta k_\alpha = 0 \quad \therefore \quad k^\alpha \nabla_\alpha k_\beta = 0, \quad (3.20)$$

onde, para se obter a segunda equação, usou-se a 3.13 na primeira. Esta, por sua vez, contraindo com a métrica efetiva e considerando a 1.66, implica em

$$k^\alpha \nabla_\alpha (\tilde{g}^{\beta\gamma} k_\gamma) = k^\alpha \nabla_\alpha (e^\omega k^\beta) \equiv e^\omega k^\alpha \hat{\nabla}_\alpha k^\beta - e^\omega \omega^\beta \underbrace{k_\alpha k^\alpha}_{=0} = 0 \Leftrightarrow k^\alpha \hat{\nabla}_\alpha k^\beta = 0. \quad (3.21)$$

Percebemos que os raios de luz seguem geodésicas nulas cujos vetores tangentes são paralelamente transportados como se a variedade fosse riemanniana, e não de Weyl. Porém, isto não compromete de modo algum a simetria de calibre da teoria. A equação obtida sendo zero, implica que a expressão mais à esquerda da 3.21 pode ser reescrita com um fator  $e^\omega$  e, portanto, sendo facilmente verificada como invariante.

### 3.3 Desvio para o vermelho

Temos, então, para a aproximação da óptica geométrica que os raios luminosos seguem trajetórias cujos vetores tangentes são nulos e obedecem a equação da geodésica 3.21.

Esses raios possuem uma forma arbitrária dada pela função  $g$  e suas frequências,  $\nu$ , são determinadas pela taxa de variação no tempo da fase  $\phi$ . Temos, portanto, (58)

$$\nu = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = u^\alpha k_\alpha \quad (3.22)$$

como a frequência do raio luminoso medida por um observador com velocidade  $u^\alpha$ .

O *redshift*,  $z$ , é dado pelo quanto que o comprimento de onda,  $\lambda$ , da luz varia comparado com seu valor no momento da emissão e obtém-se a partir da relação acima como

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} \Rightarrow 1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{(k_\alpha u^\alpha)_e}{(k_\beta u^\beta)_o}, \quad (3.23)$$

onde os índices “e” e “o” referem-se aos eventos de “emissão” e “observação”, respectivamente. Esta relação é válida independentemente da separação entre o emissor e o observador e dá conta tanto do *redshift* Doppler quanto do gravitacional.

Façamos, agora, a seguinte decomposição de  $k^\alpha$ : consideramos um observador com quadrivelocidade  $u^\alpha$  e tomamos  $n^\alpha$  como sendo uma projeção de  $k^\alpha$  no seu referencial, dado por

$$n^\alpha \equiv \frac{1}{u^\gamma k_\gamma} h_\beta^\alpha k^\beta \Rightarrow n^\alpha n_\alpha = -e^{-\omega}, \quad n^\alpha u_\alpha = 0 \quad (3.24)$$

$$\therefore k^\alpha = u_\beta k^\beta (e^{-\omega} u^\alpha + n^\alpha). \quad (3.25)$$

Definido  $v$  como o parâmetro ao longo da geodésica nula,

$$k^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dv}, \quad (3.26)$$

podemos calcular a variação de  $u^\alpha k_\alpha$  num intervalo  $dv$  ao longo dela como sendo<sup>2</sup>

$$d(u^\alpha k_\alpha) = \hat{\nabla}_\beta (u^\alpha k_\alpha) k^\beta dv = \left( \hat{\nabla}_\beta u_\alpha \right) k^\alpha k^\beta dv + u_\alpha \underbrace{k^\beta \hat{\nabla}_\beta k^\alpha}_{=0} dv. \quad (3.27)$$

Das 1.92 e 3.25, podemos reescrevê-la como

$$d(u^\alpha k_\alpha) = (\theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + e^{-\omega} n^\alpha \dot{u}_\alpha) (u_\gamma k^\gamma)^2 dv. \quad (3.28)$$

Da 3.23, por sua vez, temos

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d(u^\alpha k_\alpha)}{(u^\beta k_\beta)} = -(\theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + e^{-\omega} n^\alpha \dot{u}_\alpha) u_\gamma k^\gamma dv, \quad (3.29)$$

que dá a variação do comprimento de onda ao longo de um pequeno incremento  $dv$  no

---

<sup>2</sup>Para o caso em que tanto o emissor quanto o observador seguem a velocidade única do fluido,  $u^\alpha$ .

parâmetro que descreve o raio luminoso.

Como discutido anteriormente, nenhuma observação deve ser dependente do calibre escolhido. Portanto, iremos verificar, agora, a invariância dos objetos que caracterizam o *redshift* sob a transformação 1.67. Vemos que as seguintes quantidades, a partir das suas definições, transformam-se como

$$d\tau = e^{-\omega} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow d\tau, \quad (3.30)$$

$$u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \rightarrow u^\alpha \quad \therefore \quad u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta \rightarrow e^\Lambda u_\alpha, \quad (3.31)$$

$$k_\alpha \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \rightarrow k_\alpha \quad \therefore \quad k^\alpha = g^{\alpha\beta} k_\beta \rightarrow e^{-\Lambda} k^\alpha. \quad (3.32)$$

Assim, temos

$$u^\alpha k_\alpha \rightarrow u^\alpha k_\alpha, \quad u_\alpha k^\alpha \rightarrow u_\alpha k^\alpha, \quad (3.33)$$

e confirmamos a invariância da 3.23. Para a equação 3.29 temos

$$h_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - e^{-\omega} u^\alpha u_\beta \rightarrow h_\beta^\alpha \quad \therefore \quad h_{\alpha\beta} \rightarrow e^\Lambda h_{\alpha\beta}, \quad h^{\alpha\beta} \rightarrow e^{-\Lambda} h^{\alpha\beta}, \quad (3.34)$$

$$n^\alpha = \frac{1}{(u^\gamma k_\gamma)} h_\beta^\alpha k^\beta \rightarrow e^{-\Lambda} n^\alpha \quad \therefore \quad n_\alpha \rightarrow n_\alpha, \quad (3.35)$$

e seus diferentes termos são transformados como

$$\theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha u_\beta \rightarrow e^{-2\Lambda} n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha (e^\Lambda u_\beta) = e^{-\Lambda} \theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad (3.36)$$

$$\dot{u}_\alpha n^\alpha e^{-\omega} \rightarrow e^{-\Lambda} \dot{u}_\alpha n^\alpha e^{-\omega}. \quad (3.37)$$

Dada a 3.33, resta apenas determinar a transformação de  $dv$ , que se obtém a partir da 3.26:

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{dv} \rightarrow e^{-\Lambda} k^\mu \quad \Leftrightarrow \quad dv \rightarrow e^\Lambda dv. \quad (3.38)$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{\lambda} &= -(\theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + e^{-\omega} n^\alpha \dot{u}_\alpha) u_\gamma k^\gamma dv \rightarrow \\ &\rightarrow - (e^{-\Lambda} \theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + e^{-\Lambda} e^{-\omega} n^\alpha \dot{u}_\alpha) u_\gamma k^\gamma e^\Lambda dv = \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

mostrando que a liberdade de calibre da nossa teoria permanece no *redshift*.

### 3.4 Invariância de calibre em modelos cosmológicos

Tomemos o modelo de Friedmann para as três curvaturas possíveis descrito no *calibre de Einstein* do nosso formalismo, *i.e.*, com  $\omega = 0$ :

$$d\tau^2 = ds^2 = d\eta^2 - a^2(\eta) [d\rho^2 + f^2(\rho)d\Omega^2], \quad (3.40)$$

onde  $f(\rho)$  é igual à  $\sin(\rho)$ ,  $\rho$  ou  $\sinh(\rho)$  para os casos esférico, plano e hiperbólico, respectivamente. O *redshift* pode ser calculado da 3.23 ou 3.29, onde as velocidades do observador e emissor são ambas iguais a

$$u^\alpha = (1, 0, 0, 0). \quad (3.41)$$

Agora, para  $k^\alpha$ , temos, nos três modelos,

$$k^\alpha = \frac{1}{a(\eta)} (1, \pm \frac{1}{a(\eta)}, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad k_\alpha = \frac{1}{a(\eta)} (1, \mp a(\eta), 0, 0) \quad (3.42)$$

$$\therefore k_\alpha u^\alpha = \frac{1}{a(\eta)} \Rightarrow 1 + z = \frac{a(\eta_o)}{a(\eta_e)}. \quad (3.43)$$

Esta expressão também pode ser obtida de 3.29, uma vez que temos nela

$$\theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -\frac{1}{a(\eta)} \frac{da(\eta)}{d\eta}, \quad \dot{u}_\alpha = 0, \quad u_\gamma k^\gamma dv = u_\gamma dx^\gamma = d\eta, \quad (3.44)$$

e a equação fica

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{a(\eta)} \frac{da(\eta)}{d\eta} d\eta \Rightarrow d(\ln \lambda) = d(\ln a) \quad \therefore \quad 1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(\eta_o)}{a(\eta_e)}. \quad (3.45)$$

Entretanto, sendo a métrica 3.40 conformalmente plana e, de acordo com o teorema de Weyl-Schouten, podemos efetuar transformações de coordenadas de modo a reescrevê-la como  $ds^2 = e^{-\Lambda} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  (veja o apêndice C). Feito isso, podemos realizar a transformação 1.67 e ficarmos, então, com uma geometria de Weyl onde  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ,  $\omega = \Lambda$  e termos a mesma expressão para o *redshift*. Isto é, temos agora a possibilidade de que as observações de *redshift* sejam atribuídas ao campo  $\omega$  de uma geometria de Weyl no espaço de Minkowski, não mais indicando uma curvatura ou evolução para a métrica, assim como também poderíamos fazer algo intermediário, *i.e.*, uma transformação de calibre que desse  $\omega \neq 0$  e  $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$  preservando igualmente os resultados.

Tal conclusão encontra-se em nossa publicação (65) e concorda com o indicado pelas Refs. 67 e 71.

## 4 *Termodinâmica em WIST*

No capítulo anterior, mostramos como o campo escalar geométrico pode estar associado ou, até mesmo, ser inteiramente responsável pelo *redshift* cosmológico. Uma vez que este relaciona-se com o fator de escala que, por sua vez, é caracterizado por um tensor momento-energia através das equações de Einstein, tal fato permite atribuir um significado físico ao fator conforme da métrica efetiva.

Faremos neste capítulo, portanto, a caracterização do tensor momento-energia quanto ao seu regime termodinâmico e nos restringiremos aos modelos cosmológicos. Apresentaremos o caso dos fluidos perfeitos na relatividade geral e mostraremos como a consideração de um novo campo  $\omega$  pode fazer a passagem entre geometrias que correspondem a fluidos completamente diferentes. De fato, será mostrado que as soluções obtidas podem até deixar de representar um universo satisfazendo o princípio cosmológico.

### 4.1 **Formulação invariante de calibre**

Nesta seção será desenvolvida uma formulação invariante de calibre para a termodinâmica contemplando processos dissipativos. O tratamento é análogo ao feito na relatividade geral que pode ser encontrado nas referências 72 e 73.

Consideremos, por simplicidade, um tensor momento-energia descrevendo um fluido simples, cujo estado é determinado pela sua velocidade,  $u^\alpha$ , o *número de partículas por unidade de volume*,  $n$ , e a energia interna específica (74, 75). Iremos supor que o fluido em questão encontra-se ligeiramente desviado do equilíbrio devido a perturbações no espaço-tempo. Estas, por sua vez, provocam o surgimento de termos dissipativos coexistindo com os de equilíbrio termodinâmico. Seja, então, a decomposição deste tensor momento-energia em suas partes irreduzíveis:

$$T_{\mu\nu} = \rho e^{-2\omega} u_\mu u_\nu - P h_{\mu\nu} + e^{-\omega} (q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu) + \pi_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (4.2)$$

$$P = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

$$q_\mu = h_\mu^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

$$\pi_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta T_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}. \quad (4.5)$$

Seus diferentes termos são denotados e interpretados como *densidade total de energia*,  $\rho$ , *pressão total*,  $P$ , *fluxo de calor*,  $q_\mu$ , e *pressão anisotrópica*,  $\pi_{\mu\nu}$ . Percebemos que os dois últimos termos acima são ortogonais à velocidade do fluido. Portanto, com exceção do primeiro termo da decomposição 4.1, todos os outros se anulam quando contraídos com  $u^\mu u^\nu$ .

Vejamos como eles se comportam frente às transformações de calibre. Primeiramente, notemos que o tensor momento-energia 2.15 transforma-se das seguintes maneiras:

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} \quad \therefore \quad T_\nu^\mu \rightarrow e^{-\Lambda} T_\nu^\mu, \quad T^{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\Lambda} T^{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Portanto, a partir das 4.2–4.5 e considerando as transformações 3.31, para a velocidade, e 3.34, para  $h_\beta^\alpha$ , temos

$$\rho \rightarrow \rho, \quad (4.7)$$

$$P \rightarrow e^{-\Lambda} P, \quad (4.8)$$

$$q_\mu \rightarrow q_\mu \quad \therefore \quad q^\mu \rightarrow e^{-\Lambda} q^\mu, \quad (4.9)$$

$$\pi_{\mu\nu} \rightarrow \pi_{\mu\nu} \quad \therefore \quad \pi_\nu^\mu \rightarrow e^{-\Lambda} \pi_\nu^\mu, \quad \pi^{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\Lambda} \pi^{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Para a separação em partes de *equilíbrio*,  $\bar{T}_{\mu\nu}$ , e *fora do equilíbrio* (ou *dissipativa*),  $\Delta T_{\mu\nu}$ , iremos considerar que esta última não contribui para a densidade de energia, enquanto o mesmo já não ocorre com a pressão total. Esta é considerada como resultado de uma *pressão isotrópica*,  $p$ , dada no equilíbrio, e uma *viscosidade volumar*,  $\pi$ , surgindo como termo dissipativo de acordo com o regime termodinâmico do fluido e, portanto, independente de  $p$ . A pressão total é, então, dada por

$$P = p - \pi . \quad (4.11)$$

Dada a possibilidade de existência da pressão isotrópica mesmo na ausência de viscosidade volumar, podemos concluir que cada uma delas transforma-se como a pressão total, *i.e.*,

$$p \rightarrow e^{-\Lambda} p , \quad \pi \rightarrow e^{-\Lambda} \pi . \quad (4.12)$$

Feito isso, escrevemos as partes de equilíbrio e dissipativa do tensor momento-energia como

$$\bar{T}_{\mu\nu} \equiv \rho e^{-2\omega} u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} , \quad (4.13)$$

$$\Delta T_{\mu\nu} \equiv e^{-\omega} (q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu) + \pi h_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} , \quad (4.14)$$

$$\therefore T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \Delta T_{\mu\nu} . \quad (4.15)$$

Podemos verificar a partir da 4.14, que, de fato,

$$u^\mu u^\nu \Delta T_{\mu\nu} = 0 , \quad (4.16)$$

concordando com a consideração feita de que este termo não contribui para a densidade total de energia.

Nesta descrição, temos duas possibilidades para a escolha da velocidade do fluido (73). Na primeira, ela representa um referencial co-móvel com o fluxo de energia, chamado de *referencial de Landau* (74). Nele, não há componente espacial para este fluxo e, portanto,  $q_\mu$  é zero. Para a outra possibilidade, a velocidade corresponde a um referencial co-móvel com o fluxo de partículas, conhecido como *referencial de Eckart* (76).

Seja, então, este fluxo escrito na presença de termos dissipativos como (73)

$$N^\mu = n u^\mu + \Delta N^\mu . \quad (4.17)$$

Definimos o número de partículas por unidade de volume através de

$$n = e^{-\omega} N^\mu u_\mu . \quad (4.18)$$

Substituindo a 4.17 nesta e lembrando que  $u^\alpha u_\alpha = e^\omega$ , obtemos

$$\Delta N^\mu u_\mu = 0. \quad (4.19)$$

Como a velocidade considerada representa um referencial co-móvel com o fluxo de partículas, não devemos ter projeção deste no espaço perpendicular a  $u^\alpha$ , *i.e.*,

$$N^\mu h_\mu^\alpha = 0 \quad (4.20)$$

$$\therefore \Delta N^\mu h_\mu^\alpha = 0, \quad (4.21)$$

onde esta veio da substituição da 4.17 na 4.20. Considerando, agora, a 4.19 nesta última, temos

$$\Delta N^\mu h_\mu^\alpha = \Delta N^\alpha - e^\omega u^\alpha \Delta N^\mu u_\mu = \Delta N^\alpha = 0. \quad (4.22)$$

Caracterizamos, assim, o referencial de Eckart, o qual iremos adotar daqui por diante, como sendo aquele em que, além da 4.16, temos

$$N^\mu = n u^\mu. \quad (4.23)$$

Consideremos, agora, a equação de Einstein 2.13 na 1.70 e levemos em conta a expressão 4.15. Teremos, assim,

$$\nabla_\nu (e^{2\omega} \bar{T}^{\mu\nu}) = -\nabla_\nu (e^{2\omega} \Delta T^{\mu\nu}). \quad (4.24)$$

Calculemos o lado esquerdo desta equação:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (e^{2\omega} \bar{T}^{\mu\nu}) &= \nabla_\nu [e^{2\omega} (\rho e^{-2\omega} u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu})] = \nabla_\nu (\rho u^\mu u^\nu - p e^{2\omega} h^{\mu\nu}) = \\ &= \dot{\rho} u^\mu + \rho \dot{u}^\mu + \rho u^\mu \nabla_\nu u^\nu - (\partial_\nu p) e^{2\omega} h^{\mu\nu} - p \underbrace{\nabla_\nu (e^{2\omega} g^{\mu\nu})}_{=e^{2\omega} g^{\mu\nu} \omega_\nu} + p \nabla_\nu (e^\omega u^\mu u^\nu) = \\ &= \dot{\rho} u^\mu + \rho \dot{u}^\mu + \rho u^\mu \nabla_\nu u^\nu - (\partial_\nu p) e^{2\omega} h^{\mu\nu} - p e^{2\omega} \omega^\mu + p e^\omega u^\mu u^\nu \omega_\nu + \\ &\quad + p e^\omega \dot{u}^\mu + p e^\omega u^\mu \nabla_\nu u^\nu. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Contraindo com  $u_\mu$ , obtemos:

$$\begin{aligned} u_\mu \nabla_\nu (e^{2\omega} \bar{T}^{\mu\nu}) &= e^\omega \dot{\rho} + \rho u_\mu \dot{u}^\mu + e^\omega \rho \nabla_\nu u^\nu + p e^\omega u_\mu \dot{u}^\mu + p e^{2\omega} \nabla_\nu u^\nu = \\ &= e^\omega \dot{\rho} + (\rho + e^\omega p) (u_\mu \dot{u}^\mu + e^\omega \nabla_\nu u^\nu) , \end{aligned} \quad (4.26)$$

sendo que, pela B.2,

$$u_\mu \dot{u}^\mu = u^\nu u_\mu \nabla_\nu u^\mu = 0 . \quad (4.27)$$

Substituindo a 1.94, temos, finalmente,

$$u_\mu \nabla_\nu (e^{2\omega} \bar{T}^{\mu\nu}) = e^\omega [\dot{\rho} + (\rho + e^\omega p) \theta] . \quad (4.28)$$

Através da 4.24, esta, por sua vez, implica em

$$\dot{\rho} + (\rho + e^\omega p) \theta = -e^{-\omega} u_\mu \nabla_\nu (e^{2\omega} \Delta T^{\mu\nu}) . \quad (4.29)$$

A partir da 4.23, definimos a taxa de criação de partículas,  $\psi$ , como (77–79)

$$\psi \equiv \nabla_\mu N^\mu = \dot{n} + n\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\dot{n}}{n} + \frac{\psi}{n} \quad (4.30)$$

$$\therefore \quad \dot{\rho} - (\rho + e^\omega p) \frac{\dot{n}}{n} + (\rho + e^\omega p) \frac{\psi}{n} = -e^{-\omega} u_\mu \nabla_\nu (e^{2\omega} \Delta T^{\mu\nu}) . \quad (4.31)$$

De modo a preservar a invariância da teoria sob transformações de calibre, vamos considerar que o número de partículas não é alterado por uma transformação desse tipo.

Tomemos, agora, a equação de Gibbs:

$$Tds = \frac{1}{n} d\rho + (\rho + \tilde{p}) d\left(\frac{1}{n}\right) . \quad (4.32)$$

Nela,  $s = s(\frac{\rho}{n}, \frac{1}{n})$  é a entropia por partícula (80) e vemos, pela sua dependência, que é invariante de calibre.

Quando estamos no contexto das geometrias de Riemann, na relatividade geral, a pressão de equilíbrio,  $\tilde{p}$ , usada nesta expressão é a mesma que se obtém da decomposição

análoga feita para o tensor momento-energia. Portanto, na nossa teoria, iremos considerar a expressão para a pressão isotrópica no calibre de Einstein, em que  $\bar{\omega} = 0$ , em seu lugar. Pela 4.12, teremos, com isso,  $\tilde{p} = e^\omega p$  e a equação de Gibbs se escreve, no nosso formalismo, como

$$Tds = \frac{1}{n}d\rho - (\rho + e^\omega p)\frac{dn}{n^2} \quad (4.33)$$

$$\therefore T\dot{s} = \frac{1}{n}\dot{\rho} - (\rho + e^\omega p)\frac{\dot{n}}{n^2}. \quad (4.34)$$

Tal escolha, invariante de calibre, além de estar de acordo com todo o formalismo desenvolvido até aqui, é respaldada pela equação da continuidade 4.29. Vemos, que o lado direito da 4.33 é igualmente invariante, levando a concluir que  $Tds$  e, conseqüentemente,  $T$  também devem ser da mesma forma.

Substituindo, agora, a 4.34 na 4.31, ficamos com

$$Tn\dot{s} + (\rho + e^\omega p)\frac{\dot{\psi}}{n} = -e^{-\omega}u_\mu\nabla_\nu(e^{2\omega}\Delta T^{\mu\nu}). \quad (4.35)$$

A partir da relação

$$Ts = \frac{1}{n}(\rho + e^\omega p) - \mu, \quad (4.36)$$

que leva a concluir que o *potencial químico*  $\mu$  (81) também é invariante, calculamos

$$T\nabla_\nu(nsu^\nu) = Tn\dot{s} + Ts\dot{\psi} = Tn\dot{s} + (\rho + e^\omega p)\frac{\dot{\psi}}{n} - \dot{\psi}\mu. \quad (4.37)$$

Com essa expressão, a 4.35 fica:

$$\nabla_\nu(nsu^\nu) + \frac{e^{-\omega}}{T}u_\mu\nabla_\nu(e^{2\omega}\Delta T^{\mu\nu}) = -\frac{\dot{\psi}\mu}{T} \quad (4.38)$$

$$\Rightarrow \nabla_\nu\left(nsu^\nu + \frac{e^\omega}{T}u_\mu\Delta T^{\mu\nu}\right) - e^{2\omega}\Delta T^{\mu\nu}\nabla_\nu\left(\frac{e^{-\omega}}{T}u_\mu\right) = -\frac{\dot{\psi}\mu}{T}. \quad (4.39)$$

Definindo o vetor *corrente de entropia*,  $s^\mu$ , e o vetor  $\beta_\mu$  como

$$s^\mu \equiv nsu^\mu + \frac{e^\omega}{T}u_\nu\Delta T^{\mu\nu}, \quad (4.40)$$

$$\beta_\mu \equiv \frac{e^{-\omega}}{T}u_\mu, \quad (4.41)$$

temos

$$\nabla_\mu s^\mu = e^{2\omega}\Delta T^{\mu\nu}\nabla_\nu\beta_\mu - \frac{\psi\mu}{T} = \quad (4.42)$$

$$= \frac{e^\omega}{T}\Delta T^{\mu\nu}\left(-u_\mu\omega_\nu + \nabla_\nu u_\mu - \frac{1}{T}u_\mu\partial_\nu T\right) - \frac{\psi\mu}{T}. \quad (4.43)$$

A partir das 1.92, podemos obter

$$\nabla_\nu u_\mu = \sigma_{\nu\mu} + \frac{1}{3}\theta h_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} + e^{-\omega}u_\nu\dot{u}_\mu + u_\mu\omega_\nu - e^{-\omega}u_\nu u_\mu u^\gamma\omega_\gamma \quad (4.44)$$

e, com ela, a equação 4.43 fica:

$$\nabla_\mu s^\mu = \frac{1}{T}\Delta T^{\mu\nu}\left[e^\omega\left(\sigma_{\nu\mu} + \frac{1}{3}\theta h_{\nu\mu} - \frac{1}{T}u_\mu\partial_\nu T\right) + u_\nu\dot{u}_\mu - u_\nu u_\mu u^\alpha\omega_\alpha\right] - \frac{\psi\mu}{T}. \quad (4.45)$$

Usando a 4.14 obtemos a *lei de balanço da entropia*:

$$\nabla_\mu s^\mu = e^\omega\left[\frac{\sigma_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu}}{T} + \frac{\theta\pi}{T} - (\partial_\mu T - e^{-\omega}T\dot{u}_\mu)\frac{q^\mu}{T^2}\right] - \frac{\psi\mu}{T}, \quad (4.46)$$

onde a fonte de entropia (lado direito) provoca uma diferença entre a que entra e sai (lado esquerdo) de um determinado volume infinitesimal.

A partir de agora, iremos considerar  $\psi = 0$ . Assim, para garantir a positividade da variação da entropia, devemos ter (72):

$$\pi_{\mu\nu} = \eta\sigma_{\mu\nu}, \quad (4.47)$$

$$\pi = \zeta\theta, \quad (4.48)$$

$$q_\mu = \chi h_\mu^\alpha (\partial_\alpha T - e^{-\omega}T\dot{u}_\alpha), \quad (4.49)$$

onde definimos os *coeficientes de viscosidade de distorção*,  $\eta$ , *viscosidade volumar*,  $\zeta$ , e

*condutividade térmica*,  $\chi$ . Estas relações devem ser satisfeitas independentemente dos valores das diferentes quantidades que aparecem nelas e, assim, a 4.46, finalmente, se escreve

$$\nabla_{\mu} s^{\mu} = e^{\omega} \left[ \frac{\pi_{\mu\nu} \pi^{\mu\nu}}{\eta T} + \frac{\pi^2}{\zeta T} - \frac{q_{\mu} q^{\mu}}{\chi T^2} \right]. \quad (4.50)$$

Para finalizar, notemos que, caso o campo de velocidades seja tal que o vetor  $\beta_{\mu}$  definido acima seja um vetor de Killing da geometria, *i.e.*,

$$\nabla_{(\nu} \beta_{\mu)} = 0, \quad (4.51)$$

não teremos divergência do fluxo de entropia, pois a 4.42 ficaria

$$\nabla_{\mu} s^{\mu} = e^{2\omega} \Delta T^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \beta_{\mu} = e^{2\omega} \Delta T^{\mu\nu} \nabla_{(\nu} \beta_{\mu)} = 0. \quad (4.52)$$

Uma vez que reformulamos a termodinâmica em relatividade geral no contexto das geometrias em WIST de acordo com sua simetria de calibre e caracterizamos o regime termodinâmico do fluido em questão, podemos passar para a questão de determinar qual fluido um particular campo escalar geométrico pode representar. Ou ainda, como diferentes campos  $\omega$  podem caracterizar diferentes situações físicas.

Na próxima seção, iremos apresentar modelos cosmológicos descritos pelos chamados fluidos perfeitos no calibre de Einstein. Sem efetuar nenhuma transformação de calibre, iremos substituir o campo escalar geométrico por um diferente de zero, de modo a investigar as possíveis alterações que ele pode provocar no fluido. Os resultados disso, por sua vez, quando no calibre de Einstein, podem, então, ser considerados novas soluções da relatividade geral.

## 4.2 Modelo cosmológico de FLRW em Riemann

Tomemos o modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) da relatividade geral. Nela, o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia do espaço-tempo é representado pela métrica obtida através do intervalo (82)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (4.53)$$

onde  $\epsilon$  vale  $-1$ ,  $0$  ou  $1$  para os casos de seção espacial hiperbólica, plana ou esférica, respectivamente.

Restringindo-nos, apenas por simplicidade, ao caso de seção plana, o intervalo pode ser reescrito em coordenadas cartesianas como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (4.54)$$

Como estamos, neste momento, numa geometria riemanniana, devemos utilizar os resultados obtidos até agora considerando  $\omega = 0$ . Desta forma, as equações de Einstein se resumem a

$$\hat{G}_0^0 = -3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\hat{T}_0^0 ; \quad (4.55)$$

$$\hat{G}_i^i = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\hat{T}_i^i \quad (i = 1, 2, 3) . \quad (4.56)$$

que mostram que o tensor momento-energia deve ser diagonal. Novamente, estamos sendo redundantes ao usar o circunflexo, que está colocado apenas para reforçar a ideia de que estamos considerando uma geometria riemanniana.

Tendo como campo de velocidades

$$V^\mu = \delta_0^\mu \quad \Leftrightarrow \quad V_\mu = \delta_\mu^0 \quad \therefore \quad V^\mu V_\mu = 1 , \quad (4.57)$$

a decomposição 4.1 quando substituída nas 4.55 e 4.56 resultam em

$$3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \rho ; \quad (4.58)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -P , \quad (4.59)$$

o que, por sua vez, mostra que apenas a densidade de energia e a pressão total são diferentes de zero.

Vamos considerar que o fluido está em equilíbrio termodinâmico e, portanto, uma ausência de fontes de entropia. Logo, devemos ter

$$\hat{\nabla}_\mu s^\mu = \Delta T^{\mu\nu} \hat{\nabla}_{(\nu} \beta_{\mu)} = 0, \quad \beta_\mu = \frac{1}{T} V_\mu, \quad (4.60)$$

que é satisfeita para uma das alternativas:

$$\Delta T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.61)$$

$$\hat{\nabla}_{(\nu} \beta_{\mu)} = \frac{1}{2T} \left[ \partial_0 g_{\mu\nu} - \frac{1}{T} (\delta_\mu^0 \partial_\nu T + \delta_\nu^0 \partial_\mu T) \right] = 0. \quad (4.62)$$

Porém, pode-se verificar que a segunda só é verdadeira se, e somente se,  $T$  e  $a(t)$  forem constantes. O que não representa uma situação aceitável. Concluimos, então, que a consideração feita requer a ausência de termos fora do equilíbrio no tensor momento-energia e, conseqüentemente, teremos  $P = p$ .

Consideraremos também uma equação de estado para o fluido do tipo

$$p = \lambda \rho, \quad \lambda < 1, \quad (4.63)$$

onde a imposição sobre o fator  $\lambda$  vem da exigência de que a velocidade do som nesse fluido não exceda a da luz (82):

$$V_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cte.}} < 1. \quad (4.64)$$

Substituindo a equação de estado 4.63 nas 4.58 e 4.59, encontramos as soluções

$$a(t) = a_0 t^N, \quad N \equiv \frac{2}{3(\lambda + 1)} \quad (\lambda \neq -1), \quad (4.65)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) \quad (\lambda = -1). \quad (4.66)$$

Onde  $a_0$  e  $\Lambda$  são constantes arbitrárias. As expressões para  $\rho$  e  $p$ , então, ficam

$$\frac{p}{\lambda} = \rho = \frac{3N^2}{t^2} \quad (\lambda \neq -1), \quad (4.67)$$

$$-p = \rho = \Lambda \quad (\lambda = -1). \quad (4.68)$$

Sobre a não existência de termos fora do equilíbrio no tensor momento-energia decorrente da hipótese de equilíbrio termodinâmico, devemos notar que as 4.47–4.49 continuam válidas. Sendo as quantidades cinemáticas para o campo de velocidades considerado, nesta geometria, dadas por

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{3N}{t} & (\lambda \neq -1) \\ \sqrt{3\Lambda} & (\lambda = -1) \end{cases}, \quad \hat{\sigma}_{\mu\nu} = \hat{\omega}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.69)$$

$$\dot{V}_\alpha = 0, \quad (4.70)$$

devemos ter, então,

$$\pi_{\mu\nu} = 0 = \eta \hat{\sigma}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.71)$$

$$\pi = 0 = \zeta \hat{\theta} = \begin{cases} 3\zeta N t^{-1} & (\lambda \neq -1) \\ \zeta \sqrt{3\Lambda} & (\lambda = -1) \end{cases} \Leftrightarrow \zeta = 0, \quad (4.72)$$

$$q_\mu = 0 = \chi h_\beta^\alpha (\partial_\alpha T - T \dot{u}_\alpha) = \chi (0, \vec{\nabla} T) \Leftrightarrow T = T(t). \quad (4.73)$$

Vemos que as 4.71 e 4.73 não determinam  $\eta$  nem  $\chi$  enquanto que a 4.72 implica que a hipótese de equilíbrio termodinâmico equivale a considerar que o fluido tenha  $\zeta = 0$ . Mais ainda, no caso em que  $\lambda = -1$ , o tensor momento-energia se escreve como

$$T_{\mu\nu} = \Lambda V_\mu V_\nu + \Lambda h_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (4.74)$$

cuja decomposição é a mesma para qualquer campo de velocidades. Isto é, qualquer que seja a velocidade  $u^\mu$  do fluido, as partes irredutíveis do tensor momento-energia serão sempre

$$-p = \rho = \Lambda, \quad \pi = 0, \quad \pi_{\mu\nu} = 0, \quad q_\mu = 0. \quad (4.75)$$

Dessa forma, para termos as 4.47–4.49 satisfeitas para todos esses campos, que resultam em diferentes expressões para as quantidades cinemáticas 1.93, devemos ter, necessariamente,

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \chi = 0. \quad (4.76)$$

Tal fluido, que possui as mesmas propriedades para todos os observadores e isento de qualquer coeficiente de viscosidade ou condutividade térmica, e cuja densidade de energia e pressão são constantes, dadas pela 4.68, representa o vácuo e é chamado de *constante cosmológica*.

Podemos, verificar, também, que não há produção de entropia decorrente da expansão do volume considerado. Sendo  $\omega = 0$ , a 4.34 se reescreve como

$$Tn\dot{s} = \dot{\rho} + (\rho + p)\hat{\theta}. \quad (4.77)$$

Para o caso em que  $\lambda = -1$  vemos de imediato que a entropia se mantém constante. Para os outros casos, temos

$$\dot{\rho} = -\frac{6N^2}{t^3}, \quad \rho + p = \frac{2N}{t^2}, \quad \hat{\theta} = \hat{\nabla}_\alpha V^\alpha = \frac{3N}{t} \quad (4.78)$$

$$\therefore Tn\dot{s} = \dot{\rho} + (\rho + p)\hat{\theta} = 0. \quad (4.79)$$

Resumindo, para um modelo cosmológico de FLRW com a equação de estado 4.63 podemos ter duas possibilidades:

- $a(t) = a_0 t^N$ : temos um fluido perfeito para um campo de velocidades  $V^\alpha = \delta_0^\alpha$ , com

$$p = \left(\frac{2}{3N} - 1\right)\rho = \frac{(2 - 3N)N}{t^2}, \quad \zeta = 0. \quad (4.80)$$

- $a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$ : temos uma constante cosmológica para qualquer campo de velocidades e

$$-p = \rho = \Lambda, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \chi = 0. \quad (4.81)$$

### 4.3 Modelo anisotrópico

Tendo esses resultados para o modelo cosmológico de FLRW em Riemann, que equivale a uma geometria em WIST com campo escalar geométrico nulo, partiremos para a investigação de como a consideração de um  $\omega$  diferente de zero altera a solução anterior. Isto é, não faremos uma transformação de calibre para deixarmos o de Einstein, pois isso

não alteraria nenhum resultado, dada a simetria que nossa teoria possui. O que faremos é considerar um novo campo escalar diferente do usado e descobrir que alterações ele pode provocar, com o intuito de obter um conhecimento maior sobre o papel do campo  $\omega$  nesta teoria.

Tomemos, então, a métrica de FLRW 4.54, agora em WIST, com

$$\omega = \omega(t, x), \quad (4.82)$$

$$u^\mu = e^{\frac{\omega}{2}} \delta_0^\mu \quad \Leftrightarrow \quad u_\mu = e^{\frac{\omega}{2}} \delta_\mu^0 \quad \therefore \quad u^\mu u_\mu = e^\omega. \quad (4.83)$$

Inicialmente, deixaremos em aberto as expressões para as funções  $a(t)$ , da métrica, e  $\omega(t, x)$ . Portanto, teremos o fluido considerado ainda indefinido. Mais adiante, iremos restringir a função presente na métrica para os casos descritos na seção anterior que, na ausência do campo escalar geométrico, representa um fluido perfeito. Porém, como ainda temos, nesse caso, a função  $\omega$  ainda em aberto, o fluido em questão permanece indefinido. A ideia, como dissemos no início desta seção, é considerar uma solução dada para um determinado campo escalar geométrico e investigar como que um outro diferente pode modificar a solução e, portanto, o fluido.

A partir da métrica 4.54 e das 4.82 e 4.83, obtemos

$$\dot{u}^\alpha \equiv u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = -\frac{e^\omega}{2a^2} \delta_1^\alpha \partial_1 \omega, \quad (4.84)$$

$$\dot{u}_\alpha \equiv u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = e^\omega \left( \delta_\alpha^0 \partial_0 \omega + \frac{1}{2} \delta_\alpha^1 \partial_1 \omega \right), \quad (4.85)$$

mostrando que o campo de velocidades normalizado a  $e^\omega$  deixa de ser geodético.

Poderíamos considerar um outro campo de velocidades que satisfizesse a equação da geodésica, porém isto resultaria em uma nova componente para o vetor  $u^\alpha$  e as equações que seguem ficariam consideravelmente difíceis de se tratar. Portanto, por simplicidade, iremos manter esse campo de velocidades aceleradas para nosso fluido.

Temos as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \quad (4.86)$$

$$T_{\mu\nu} = \rho e^{-2\omega} u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} + 2e^{-\omega} q_{(\mu} V_{\nu)} + \pi_{\mu\nu}. \quad (4.87)$$

Onde estamos supondo, *a priori*, que a viscosidade volumar ( $\pi$ ) é zero. Usando a 4.86 na decomposição 4.2–4.5 obtemos

$$\rho = e^\omega \left[ 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 3 (\partial_0 \omega) \frac{\dot{a}}{a} + \frac{3}{4} (\partial_0 \omega)^2 - \frac{1}{4} \frac{(\partial_1 \omega)^2}{a^2} + \frac{\partial_1^2 \omega}{a^2} \right], \quad (4.88)$$

$$p = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 (\partial_0 \omega) \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{4} (\partial_0 \omega)^2 + \partial_0^2 \omega + \frac{5}{12} \frac{(\partial_1 \omega)^2}{a^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial_1^2 \omega}{a^2}, \quad (4.89)$$

$$q_\mu = \delta_\mu^1 q_1, \quad q_1 = e^{\frac{\omega}{2}} \left( \partial_1 \partial_0 \omega + \frac{1}{2} \partial_0 \omega \partial_1 \omega - \partial_1 \omega \frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (4.90)$$

$$\pi_{\mu\nu} = \text{diag} (0, -2\pi_{22}, \pi_{22}, \pi_{22}), \quad \pi_{22} = -\frac{1}{6} [(\partial_1 \omega)^2 + 2\partial_1^2 \omega]. \quad (4.91)$$

Isto é, estamos efetuando uma decomposição do tensor momento-energia em termos das quantidades geométricas, através da equação de Einstein que, portanto, será naturalmente satisfeita. Pretendemos, com isso, encontrar soluções para  $a(t)$  e  $\omega(t, x)$  consistentes com a termodinâmica desenvolvida neste capítulo.

Dando prosseguimento, as quantidades cinemáticas obtidas nesse modelo são dadas por

$$\theta = 3e^{\frac{\omega}{2}} \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \partial_0 \omega \right), \quad (4.92)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = 0, \quad (4.93)$$

além da 4.85. Novamente, devemos ter as 4.47–4.49 satisfeitas. A 4.93 requer, pela 4.47, que

$$\pi_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\partial_1 \omega)^2 + 2\partial_1^2 \omega = 0. \quad (4.94)$$

Como não estamos considerando a existência de viscosidade volumar ( $\pi$ ), devemos ter, outra vez,

$$\zeta = 0. \quad (4.95)$$

A 4.49, por sua vez, com  $T = T(t, x)$ , resulta em

$$\partial_1 \partial_0 \omega + \frac{1}{2} \partial_0 \omega \partial_1 \omega - \partial_1 \omega \frac{\dot{a}}{a} = e^{-\frac{\omega}{2}} \chi \left( \partial_1 T - \frac{T}{2} \partial_1 \omega \right) = \chi \partial_1 (e^{-\frac{\omega}{2}} T). \quad (4.96)$$

Antes de seguir adiante com esta equação, consideremos a solução da 4.94 dada por

$$\omega(t, x) = 2 \ln \left| \frac{x}{2} + A(t) \right| + B(t), \quad (4.97)$$

onde  $A(t)$  e  $B(t)$  são funções arbitrárias. Substituindo, agora, na 4.96, temos

$$\chi \partial_1 (e^{-\frac{\omega}{2}} T) = \partial_1 \left[ 2 \left( \frac{\dot{B}}{2} - \frac{\dot{a}}{a} \right) \ln \left| \frac{x}{2} + A(t) \right| \right]. \quad (4.98)$$

Considerando  $\chi$  constante, ficamos com:

$$T(t, x) = \frac{2}{\chi} \left| \frac{x}{2} + A(t) \right| e^{\frac{B(t)}{2}} \left( \frac{\dot{B}}{2} - \frac{\dot{a}}{a} \right) \ln \left| \frac{x}{2} + A(t) \right| + \left| \frac{x}{2} + A(t) \right| \tau(t), \quad (4.99)$$

onde  $\tau(t)$  é uma função arbitrária.

Faremos, agora, a escolha

$$B(t) = 2 \ln a(t) + \ln B_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{B}}{2} - \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (4.100)$$

com  $B_0$  sendo uma constante arbitrária. Com isso as 4.90 e 4.96 nos dão

$$q_\mu = 0 \quad (4.101)$$

$$\therefore \chi \partial_1 (e^{-\frac{\omega}{2}} T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T(t, x) = \left| \frac{x}{2} + A(t) \right| \tau(t), & \forall \chi \neq 0; \\ \chi = 0. \end{cases} \quad (4.102)$$

Com essas escolhas feitas, somente “ $\rho$ ” e “ $p$ ” serão diferentes de zero e temos, pela 4.50, que não há produção de entropia, em vista das 4.94, 4.101 e da ausência de pressão

fora do equilíbrio. Com isso, o tensor momento-energia em questão representa um fluido dado por

$$\rho = \frac{3B_0}{4} \left[ (2a\dot{A})^2 - 1 \right], \quad (4.103)$$

$$p = -\frac{3}{4a^2 \left(\frac{x}{2} + A\right)^2} \left[ (2a\dot{A})^2 - 1 - \frac{8a}{3} \left(\frac{x}{2} + A\right) (a\dot{A}) \right]. \quad (4.104)$$

Sendo que a pressão de interesse termodinâmico é:

$$e^\omega p = -\frac{3B_0}{4} \left[ (2a\dot{A})^2 - 1 - \frac{8a}{3} \left(\frac{x}{2} + A\right) (a\dot{A}) \right]. \quad (4.105)$$

Este fluido, como já dissemos, satisfaz naturalmente as equações de Einstein para quaisquer  $A(t)$  e  $a(t)$ . O que temos, portanto, é um fluido indefinido cuja equação de estado é desconhecida. Iremos utilizar, a partir de agora, a termodinâmica desenvolvida neste capítulo de modo que estas funções arbitrárias possam corresponder a fluidos termodinamicamente plausíveis.

Tendo como motivação o modelo de FLRW em Riemann exibido na seção anterior, consideraremos

$$a(t) = a_0 t^N \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dt} = a_0^{\frac{1}{N}} N a^{(1-\frac{1}{N})}. \quad (4.106)$$

Escolha, esta, que foi mostrada estar associada a um fluido perfeito tal como em 4.80 na relatividade geral.

Dada essa escolha para  $a(t)$ , podemos obter a função  $a^{-1}$  tal que  $a^{-1}(a(t)) = t$ , e escrevemos  $A(t) = A(a^{-1}(a(t))) = A \circ a^{-1}(a(t)) \equiv \bar{A}(a(t))$ . Com isso, para garantirmos a positividade da densidade de energia, vemos da 4.103 que devemos ter:

$$2a\dot{A} = 2a\dot{a}\bar{A}' = 2a_0^{\frac{1}{N}} N a^{(2-\frac{1}{N})} \frac{d\bar{A}(a)}{da} = f(a(t)), \quad |f(a(t))| > 1 \quad (4.107)$$

$$\therefore \frac{d\bar{A}(a)}{da} = \frac{f(a(t)) a^{(\frac{1}{N}-2)}}{2a_0^{\frac{1}{N}} N} \quad (4.108)$$

No caso em que  $f(a(t)) = A_0$ , constante, ficamos com:

$$\frac{d\bar{A}(a)}{da} = \frac{A_0 a^{\left(\frac{1}{N}-2\right)}}{2a_0^{\frac{1}{N}} N} \Rightarrow \bar{A} = \begin{cases} \frac{A_0 a^{\left(\frac{1}{N}-1\right)}}{2a_0^{\frac{1}{N}}(1-N)} + A_1 & (N \neq 1), \\ \frac{A_0}{2a_0} \ln(A_1 a) & (N = 1). \end{cases} \quad (4.109)$$

onde  $A_1$  é uma constante arbitrária. Com isso, as 4.103 e 4.105 ficam:

$$\rho = \frac{3B_0}{4} (A_0^2 - 1) = -e^\omega p \quad (4.110)$$

e podemos verificar a ausência de produção de entropia, devida a variação do volume, através da 4.34.

Esta relação entre densidade de energia e pressão isotrópica corresponde a uma constante cosmológica no nosso formalismo, pois fazendo a passagem da ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica para a nossa formulação, temos

$$S = \int (e^{-\omega} R - 2e^{-2\omega} \Lambda) \sqrt{-g} d^4x \quad (4.111)$$

que, empregando o formalismo variacional à Palatini, nos dá

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda e^{-\omega} g_{\mu\nu} \Rightarrow T_{\mu\nu} = \Lambda e^{-\omega} g_{\mu\nu}. \quad (4.112)$$

Fazendo a decomposição 4.2–4.5 deste tensor momento-energia, vemos que os únicos termos que não se anulam são dados por

$$\rho = \Lambda, \quad (4.113)$$

$$p = -\Lambda e^{-\omega} \Rightarrow \rho = \Lambda = -e^\omega p, \quad (4.114)$$

exatamente como na 4.110, com

$$\Lambda = \frac{3B_0}{4} (A_0^2 - 1). \quad (4.115)$$

Mais ainda, pode-se verificar facilmente que essa decomposição é a mesma para qualquer campo de velocidades, sendo ele geodésico ou não. Isto pode ser visto através de

$$T_{\mu\nu} = \rho e^{-2\omega} u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} \equiv -p g_{\mu\nu} + \underbrace{(\rho + e^\omega p)}_{=0} e^{-2\omega} u_\mu u_\nu = \Lambda e^{-\omega} g_{\mu\nu}, \quad (4.116)$$

mostrando que o termo dependente do campo de velocidades se anula, nesse caso.

Vemos então que apesar de termos escolhido inicialmente um campo de velocidades não-geodético, as escolhas feitas para os campos  $\omega(t, x)$  e  $a(t)$  levaram a um tensor momento-energia correspondendo a uma constante cosmológica cuja decomposição é a mesma para qualquer campo de velocidades. Sendo assim, temos novamente a necessidade dos coeficientes de viscosidade de distorção, volumar e condutividade térmica se anularem. Isto é, assim como no equivalente riemanniano da relatividade geral 4.81, temos

$$-e^\omega p = \rho = \Lambda, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \chi = 0. \quad (4.117)$$

Curiosamente, a métrica efetiva desta solução, isto é, aquela utilizada na descrição do espaço-tempo por qualquer observador ou a que corresponde ao calibre de Einstein, se obtém de

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= e^{-\omega} dt^2 - e^{-\omega} a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= \frac{4}{B_0 (x \pm A_0 \eta)^2} (d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \end{aligned} \quad (4.118)$$

onde foi definido

$$d\eta^2 = \frac{dt^2}{a^2(t)} \quad (4.119)$$

e usadas as 4.97, 4.100, 4.106 e 4.109. Esta métrica difere completamente do caso da relatividade geral, onde temos 4.66 em 4.54 e o intervalo pode ser reescrito como

$$ds^2 = \frac{1}{\tau^2} (dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2), \quad (4.120)$$

com

$$dT^2 = \frac{12}{\Lambda} \frac{dt^2}{a^2(t)}, \quad (X, Y, Z) = \frac{12}{\Lambda} (x, y, z). \quad (4.121)$$

Sendo a métrica associada a este intervalo correspondente a uma solução homogênea e isotrópica para a constante cosmológica, somos levados a crer que a 4.118 não mais satisfaz o princípio cosmológico. No entanto, ao calcularmos os seguintes invariantes com esta métrica efetiva, obtemos

$$e^\omega R = 3B_0 (A_0^2 - 1) , \quad e^{2\omega} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \left[ \frac{3B_0}{2} (A_0^2 - 1) \right]^2 = \frac{3}{2} e^{2\omega} R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} ; \quad (4.122)$$

todos constantes, enquanto que os calculados com o tensor de Weyl são nulos, em virtude da métrica ser conformalmente plana. Portanto, aparentemente, ainda temos uma geometria homogênea.

Concluimos que a consideração de um novo campo escalar  $\omega$  permite a passagem de uma solução cosmológica correspondendo a um fluido perfeito, cujas propriedades dependem do campo de velocidades ao qual ele está submetido, para uma solução da constante cosmológica, cujas propriedades são as mesmas para qualquer observador. Isto, por sua vez, exhibe uma notável realidade física associada ao campo escalar geométrico distinta da métrica, permitindo interpretar como objeto teórico completamente independente e legítimo qualquer fator conforme nela.

## 4.4 Modelo estático em equilíbrio

Como foi observado no final da seção 4.1, também podemos garantir o equilíbrio termodinâmico caso tenhamos a 4.51 satisfeita. Tomemos, então, novamente, uma métrica do tipo FLRW para o caso plano:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) , \quad (4.123)$$

sendo que, agora, consideraremos um campo  $\omega = \omega(x^\alpha)$ , *i.e.*, dependendo de todas as coordenadas. O campo de velocidade que consideraremos será, outra vez,

$$u^\mu = e^{\frac{\omega}{2}} \delta_0^\mu \quad \Leftrightarrow \quad u_\mu = e^{\frac{\omega}{2}} \delta_\mu^0 \quad \therefore \quad u^\mu u_\mu = e^\omega . \quad (4.124)$$

Novamente, as funções envolvidas,  $a$  e  $\omega$ , estão em aberto e, portanto, o fluido associado permanece indeterminado.

Iremos, agora, considerar uma temperatura  $T = T(x^\alpha)$  e resolver a equação 4.51, que nos dá

$$\nabla_{(0}\beta_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_0 T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = T(x^i), \quad (4.125)$$

$$\nabla_{(0}\beta_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i (e^{-\frac{\omega}{2}} T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{\omega}{2}} T = F(t), \quad (4.126)$$

$$\nabla_{(i}\beta_j) \equiv 0, \quad (i \neq j) \quad (4.127)$$

$$\nabla_{(i}\beta_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_0 (e^{-\frac{\omega}{2}} a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{\omega}{2}} a = G(x^i). \quad (\text{n\~{a}o somado em } i) \quad (4.128)$$

Nelas,  $F(t)$  e  $G(x^i)$  são funções arbitrárias e concluímos que devemos ter

$$e^{-\frac{\omega}{2}} = \frac{F(t)}{T(x^i)} = \frac{G(x^i)}{a(t)} \quad \Rightarrow \quad F(t)a(t) = T(x^i)G(x^i). \quad (4.129)$$

Para satisfazermos esta última igualdade, devemos ter

$$F(t) = \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2}}}{a(t)}, \quad G(x^i) = \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2}}}{T(x^i)}, \quad (4.130)$$

onde  $\omega_0$  é uma constante arbitrária. Com isso, temos, a partir da 4.129,

$$e^{-\frac{\omega}{2}} = \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2}}}{T(x^i)a(t)} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2 \ln [T(x^i)a(t)] + \omega_0. \quad (4.131)$$

Portanto, impondo que  $\beta_\alpha$  seja um vetor de Killing, fixamos o campo  $\omega$  em termos da função  $a(t)$  e da temperatura que, para isso, deve depender apenas das coordenadas espaciais. Sendo assim, garantimos o equilíbrio termodinâmico, mesmo havendo fluxo de calor, pressão anisotrópica ou viscosidade volumar no tensor momento-energia.

As quantidades cinemáticas calculadas com estas expressões ficam dadas por

$$\theta = 3e^{\frac{\omega}{2}} \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \partial_0 \omega \right) = 0, \quad (4.132)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = 0. \quad (4.133)$$

Como foi dito, não há necessidade dos termos dissipativos do tensor momento-energia se anularem para garantirmos o equilíbrio termodinâmico ou, sequer, satisfazerem as condições 4.47–4.49 para garantir a positividade da variação de entropia, visto que a 4.42

se anula com a função  $\omega$  acima. Porém, consideremos, ainda assim, a validade destas condições.

A viscosidade volumar, neste caso, deve se anular ( $\pi = 0$ ) e o fluxo de calor obtido ao se considerar a equação de Einstein na 4.4, com esta expressão para  $\omega$ , anula-se identicamente. Por fim, façamos a pressão anisotrópica igual à zero. Substituindo-se a equação de Einstein na 4.5, obtemos

$$\nabla^2 T - 3\partial_i^2 T = 0, \quad (4.134)$$

$$\partial_i \partial_j T = 0 \quad (i \neq j). \quad (4.135)$$

A segunda implica que devemos ter  $T = T_1(x) + T_2(y) + T_3(z)$ , enquanto que a primeira implica que  $T_i = k(x^i)^2 + X_0^i x^i + T_{0i}$ , onde  $k$  e  $X_0^i = (x_0, y_0, z_0)$  são constantes e não há soma nos índices. Temos, então, como condição para não haver pressão anisotrópica, que

$$T(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2) + x_0 x + y_0 y + z_0 z + T_0, \quad T_0 = T_{01} + T_{02} + T_{03}. \quad (4.136)$$

Com isso, todos os termos fora do equilíbrio ficam iguais a zero. Para a densidade de energia,  $\rho$ , e pressão de equilíbrio (de interesse termodinâmico),  $e^\omega p$ , a substituição da equação de Einstein nas 4.2 e 4.3 (lembrando que  $P = p$ ) nos dão

$$\rho = 3e^{\omega_0} [4kT_0 - 3(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)] = \rho_0, \quad (\text{constante}) \quad (4.137)$$

$$e^\omega p = 4e^{\omega_0} kT - \rho_0. \quad (4.138)$$

Substituindo na 4.33 obtemos

$$T ds = 4e^{\omega_0} kT d\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow s = \frac{4e^{\omega_0} k}{n} + s_0, \quad (4.139)$$

onde  $s_0$  é uma constante de integração. Esta expressão para a entropia por partícula, usando a 4.138, pode ser reescrita em termos da densidade de energia e pressão isotrópica como

$$s = \frac{(\rho_0 + e^\omega p)}{nT} + s_0. \quad (4.140)$$

Substituindo esta na 4.36, obtemos para o potencial químico

$$\mu = -s_0 T. \quad (4.141)$$

Temos, então, todas as quantidades determinadas para uma função  $a(t)$  arbitrária, mostrando que qualquer solução cosmológica pode se transformar nesse fluido em equilíbrio termodinâmico apenas pela introdução de um fator conforme  $e^{-\omega}$  na métrica, com  $\omega$  dado pelas 4.131 e 4.136.

No entanto, a métrica efetiva deste caso se obtém de

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= e^{-\omega} [dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)] = e^{-\omega} a^2(t) \left( \frac{dt^2}{a^2(t)} - dx^2 - dy^2 - dz^2 \right) \\ &= \frac{e^{-\omega_0}}{T^2(x^i)} (d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \end{aligned} \quad (4.142)$$

onde substituímos a expressão para a função  $\omega$  e definimos

$$d\eta^2 = \frac{dt^2}{a^2(t)}. \quad (4.143)$$

Percebemos que, neste caso, o fator conforme fez a passagem de uma métrica homogênea, isotrópica e somente dependente do tempo numa estática e não-homogênea. Podemos verificar isso calculando-se o escalar de curvatura com a métrica efetiva, dado por

$$e^\omega R = -4 [3e^{\omega_0} kT(x, y, z) - \rho_0], \quad (4.144)$$

exibindo, explicitamente, sua dependência espacial.

Tal propriedade do campo escalar geométrico é notória e não deve causar surpresa, pois sua manifestação na teoria se dá, resumindo, através do fator conforme da métrica efetiva. No caso de modelos cosmológicos, considerando-se a possibilidade já mencionada de se escrever a métrica através de um fator conforme na de Minkowski, explicitado no apêndice C, a transição entre geometrias drasticamente diferentes pela multiplicação da

métrica por um novo fator conforme se torna perfeitamente compreensível. Por isso, podemos obter os exemplos acima representando sistemas físicos completamente distintos em que suas métricas diferem apenas por um fator desse e temos, como resultado deste capítulo, que não é o campo escalar geométrico que possui, por si só, um significado físico, mas, sim, qualquer fator conforme da métrica.

No nosso formalismo invariante de calibre, há a possibilidade do novo campo  $\omega$  incorporar todas as propriedades geométricas deste fator conforme. Neste caso, espera-se que a situação física seja mantida, uma vez que o tensor momento-energia é igualmente invariante. Logo, também é de se esperar que a caracterização do fluido quanto ao seu regime termodinâmico, por sua vez, seja preservada. Para obtermos, então, esta invariância, fez-se necessária esta reformulação da termodinâmica em WIST, dotada da mesma simetria de calibre da geometria.

Como nossa teoria é descrita por uma métrica efetiva  $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-\omega}g_{\mu\nu}$  que é invariante pelas transformações de calibre, podemos considerar a distinção da geometria numa parte, digamos, “puramente conforme” e outra “puramente tensorial”. A primeira associa-se ao novo campo escalar geométrico que, pelo que concluímos neste capítulo, adquire uma realidade física legítima. Uma vez que ele consiste num objeto teórico totalmente independente, podemos atribuí-lo a uma dinâmica específica e passamos a tratar as diferentes partes da geometria (conforme e tensorial) através de dinâmicas distintas.

Tal procedimento, que é inviável na relatividade geral, uma vez que ambas estas partes compõem o mesmo objeto teórico, será o objeto de estudo do próximo capítulo.

## 5 *Modelos não-invariantes*

Até aqui pudemos concluir a autêntica realidade física do campo escalar geométrico introduzido pelas geometrias de Weyl integrável que, face ao discutido no final do capítulo anterior, relaciona-se com a parte conforme da geometria. Entretanto, sua dinâmica permanece indeterminada, pois as lagrangianas do nosso formalismo foram construídas de modo a preservar a simetria de calibre da geometria e, conseqüentemente, resultam numa redundância nas equações.

Neste capítulo, consideraremos diferentes formas de se estabelecer uma dinâmica específica para este novo campo geométrico. Faremos isso através da introdução de uma lagrangiana para este campo de modo a quebrar a simetria da ação total e, com isso, deixar o sistema de equações totalmente determinado.

Apesar da quebra de simetria na dinâmica dos campos, isto não altera nossa definição de tempo-próprio e a conseqüente caracterização da métrica efetiva, pois isto decorre das propriedades geométricas que permanecem inalteradas. De fato, a mesma simetria de calibre se mantém para a geometria. Quando esta foi apresentada, no primeiro capítulo desta tese, em nenhum momento foi questionado o fato dos objetos envolvidos serem univocamente determinados ou não. Isto é, a simetria se manifesta para qualquer par  $(\omega, g_{\mu\nu})$  não importando a liberdade dinâmica de cada um deles.

A teoria consiste em estabelecer os objetos que caracterizam a geometria na qual os diferentes sistemas físicos se manifestam. Portanto, permanecendo a simetria na descrição geométrica, os fenômenos físicos devem se manter alheios às funções de calibre usadas. A quebra introduzida resulta apenas na determinação unívoca das funções envolvidas em termos das coordenadas. Uma vez feito isso, podemos sem nenhum problema, efetuar quantas transformações de calibre quisermos que a geometria continuará caracterizada da mesma forma.

## 5.1 Campo escalar geométrico como potencial quântico

Uma possibilidade interessante para a dinâmica do campo  $\omega$  é considerá-lo na presença de um campo escalar  $\varphi$  e, possivelmente, do campo eletromagnético descrito pelo seu potencial  $A_\mu$ . De acordo com a Ref. 20, temos a ação total para uma partícula quântica relativística dada por

$$S = \frac{1}{2c\kappa} \int \Omega^2 (\lambda^2 R + \mathcal{L}_\varphi) \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{L}_\varphi \equiv \frac{1}{\hbar} g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu \varphi - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left( \partial_\nu \varphi - \frac{e}{c} A_\nu \right) - \mu_0^2. \quad (5.2)$$

onde  $\lambda$  é uma constante a ser determinada,  $e$ , a carga elétrica da partícula e  $\mu_0 \equiv \frac{mc}{\hbar}$  seu comprimento de onda Compton inverso. O nosso campo escalar  $\omega = -2 \ln \Omega$ , nesse caso.

Efetuada-se a variação à Palatini desta ação, excluindo a métrica usual das variáveis independentes, a qual é dada pela de Minkowski, foi possível reproduzir perfeitamente a equação de Hamilton-Jacobi relativística para a mecânica quântica, onde o campo escalar  $\Omega = e^{-\omega/2}$  faz o papel do potencial quântico. Mostra-se, também, que seu limite não-relativístico resulta precisamente no sistema de equações do formalismo de Bohm-de Broglie da mecânica quântica, onde se considera a forma polar para a função de onda,  $\psi$ , da partícula na equação de Schrödinger. A função escalar  $\varphi$  corresponde, nesse caso, à fase de  $\psi$ .

A formulação da mecânica quântica não-relativística para uma partícula através das geometrias de Weyl integráveis, com o campo escalar geométrico fazendo o papel de potencial quântico, também pode ser obtida diretamente considerando-se uma forma adequada para a lagrangiana do campo  $\varphi$  (19).

Vemos, então, a grande potencialidade das geometrias de Weyl integráveis ao descrever e fornecer uma nova interpretação à mecânica quântica. Porém, neste caso, estamos considerando um campo adicional que descreve a partícula e a dinâmica para a métrica usual foi descartada, pois daria contribuições ínfimas.

Iremos tratar, a partir de agora, apenas de ações para o vácuo em que a métrica volta a dar contribuições consideráveis e o campo  $\omega$  adquire uma dinâmica ainda em aberto.

## 5.2 MOND geométrico

Uma vez que temos a possibilidade de atribuir uma dinâmica específica para o campo escalar geométrico, ficamos com a tarefa de escolher adequadamente qual ela deve ser, pois esta provocaria alterações em relação à RG na descrição do espaço-tempo e, conseqüentemente, nos observáveis da teoria. Portanto, devemos ter o cuidado de escolher uma lagrangiana para este novo campo cujos resultados estejam de acordo com as observações.

É bem sabido que a relatividade geral obteve grande êxito ao explicar diversos fenômenos desde a escala do sistema solar até as escalas cosmológicas. No entanto, existem observações que aparentam estar em desacordo com a teoria, entre elas, as das curvas de rotação das galáxias. Estas consistem no comportamento das velocidades de rotação dos objetos que compõem uma galáxia conforme eles se afastam do seu centro.

O perfil típico obtido pelas observações (26) encontra-se em grande desacordo com o previsto por simulações de N-corpos dentro do modelo padrão da cosmologia (27), apontando para a existência de um conteúdo material maior do que o inferido pela luminosidade da galáxia. Isto sugere a existência de uma componente extra na sua composição chamada de *matéria escura*, devendo ser neutra, não-emissora de radiação, com fraca interação, fora do modelo padrão da física de partículas e nunca detectada por aceleradores (25).

Estes fenômenos se dão em regimes de campo muito fraco, numa escala de energia, aceleração e intensidade dos campos bastante inferiores até mesmo para as consideradas válidas na aproximação newtoniana, na qual a RG recai assintoticamente (31). Mais ainda, dentro do cenário atual do modelo padrão, estima-se que essa matéria escura desconhecida represente aproximadamente 22% do conteúdo energético do universo (25), o que nos dá uma boa noção da dimensão do problema.

Uma alternativa para explicar estas observações surgiu no início dos anos 80 (28–30) e consiste em se considerar uma modificação na dinâmica newtoniana quando as acelerações envolvidas são menores do que uma dada constante fundamental,  $a_0$ . Esta fenomenologia denominou-se MOND (MODified Newtonian Dynamics) e mostrou-se muito bem sucedida ao reobter as curvas de rotação das galáxias de acordo com sua matéria visível (veja as Refs. 83 e 84 para artigos de revisão).

Porém, embora bastante eficaz, ela não passa de uma teoria efetiva, elaborada para atacar de forma pragmática o problema específico da matéria escura. Ademais, problemas teóricos levaram-na a sofrer correções resultando numa formulação extremamente sofisticada e pouco natural conhecida como TeVeS (32).

Nós, por outro lado, temos uma teoria perfeitamente bem estabelecida e axiomaticamente consistente fornecendo um grau de liberdade ainda indeterminado, ao qual tentaremos, agora, atribuir uma dinâmica de modo a reproduzir os mesmos resultados do MOND. Este, no decorrer das correções sofridas para se tornar teoricamente mais consistente, passou por uma formulação relativística chamada de AQUAL (32). O tratamento que faremos será bastante similar à esta formulação.

Façamos, então, a introdução de uma lagrangiana  $\mathcal{L}_\omega\sqrt{-\tilde{g}}$  na nossa ação em WIST na presença de uma fonte material descrita por  $\mathcal{L}_m\sqrt{-\tilde{g}}$ :

$$S = \int \left[ \frac{e^{-\omega}}{\kappa} R + \frac{e^{-2\omega}}{\kappa\lambda} \mathcal{L}_\omega(L) + e^{-2\omega} \mathcal{L}_m(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x, \quad (5.3)$$

onde voltamos a escrever explicitamente a constante de Einstein,  $\kappa$ . Nesta ação, o argumento  $L$  é dado por

$$L \equiv \lambda e^\omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega, \quad (5.4)$$

isto é, a lagrangiana que introduzimos é função do módulo do campo  $\omega_\mu$  calculado com a métrica efetiva. Vemos que este argumento,  $L$ , obedece nossa regra de se usar a métrica efetiva no lugar da usual, porém, devido às derivadas da função escalar, ele não é mais invariante de calibre. Afinal, após a transformação, temos

$$L \rightarrow \lambda \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu (\omega + \Lambda) \partial_\nu (\omega + \Lambda) = \lambda \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega + 2\lambda \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Lambda \partial_\nu \omega + \lambda \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda. \quad (5.5)$$

Esta será igual à  $L$  somente no caso da função de calibre ser uma constante.

Empregando o formalismo variacional de Palatini nesta ação, obtemos uma geometria em WIST com a seguinte equação para a variação da métrica:

$$G_{\mu\nu} = -\mathcal{L}'_\omega \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega + \frac{1}{2\lambda} \mathcal{L}_\omega e^{-\omega} g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{L}'_\omega \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial L}, \quad (5.7)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia da fonte. Do traço desta equação, obtemos

$$-R = -\mathcal{L}'_{\omega} g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\omega \partial_{\nu}\omega + \frac{2}{\lambda} \mathcal{L}_{\omega} e^{-\omega} - \kappa T. \quad (5.8)$$

A variação do campo  $\omega$ , por sua vez, nos dá

$$-R = -\mathcal{L}'_{\omega} g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\omega \partial_{\nu}\omega + \frac{2}{\lambda} \mathcal{L}_{\omega} e^{-\omega} - \kappa T + 2(\partial_{\nu} \mathcal{L}'_{\omega}) g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\omega + 2\mathcal{L}'_{\omega} \square\omega, \quad (5.9)$$

onde  $\square\omega = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \partial_{\nu}\omega$ , e vemos que ela já não é mais igual ao traço da equação de Einstein, dado pela 5.8. Igualando o escalar de curvatura obtido pelas duas variações, ficamos com a equação

$$\mathcal{L}'_{\omega} \square\omega + (\partial_{\nu} \mathcal{L}'_{\omega}) g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\omega = g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} (\mathcal{L}'_{\omega} \partial_{\mu}\omega) = 0 \quad (5.10)$$

$$\therefore \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_{\nu} (\mathcal{L}'_{\omega} \partial_{\mu}\omega) = \nabla_{\nu} (\mathcal{L}'_{\omega} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_{\mu}\omega) = 0. \quad (5.11)$$

Nosso sistema está, agora, totalmente determinado e consiste nas duas equações:

$$G_{\mu\nu} = -\mathcal{L}'_{\omega} \partial_{\mu}\omega \partial_{\nu}\omega + \frac{1}{2\lambda} \mathcal{L}_{\omega} e^{-\omega} g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

$$\nabla_{\nu} (\mathcal{L}'_{\omega} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_{\mu}\omega) = 0. \quad (5.13)$$

Como já dissemos, nosso tratamento é bastante semelhante a formulação relativística do MOND (AQUAL). Esta considera um campo escalar cuja lagrangiana apresenta comportamentos distintos nos regimes em que o argumento é maior ou menor que um determinado valor. Isto se faz com vista a distinguir dois regimes dentro da própria aproximação newtoniana da RG. Num, devem-se preservar os mesmos resultados da RG, noutro, devem-se obter correções na dinâmica obtida. Na nossa versão do modelo, identificaremos este campos escalar com  $\omega$ .

Estamos interessados apenas no regime de baixíssimas acelerações, nas quais se dá a discrepância em relação aos resultados teóricos para as curvas de rotação, portanto, iremos considerar somente o comportamento relativo a este regime para nossa lagrangiana. Segundo o AQUAL, devemos ter, neste caso (32),

$$\mathcal{L}_{\omega} = -\frac{2}{3} |L|^{\frac{3}{2}}, \quad (5.14)$$

a qual usaremos na aproximação newtoniana.

Seguindo as linhas da Ref. 85, consideraremos a métrica efetiva, que caracteriza o espaço-tempo dos observadores, como sendo dada por pequenas correções na métrica de Minkowski:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad |\epsilon_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (5.15)$$

$$\therefore \tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu}, \quad \epsilon_{\nu}^{\mu} = \eta^{\mu\alpha} \epsilon_{\alpha\nu}, \quad \epsilon^{\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha} \epsilon_{\alpha}^{\mu}, \quad (5.16)$$

onde estamos retendo apenas termos de primeira ordem em  $\epsilon_{\mu\nu}$ , que pode ser tratado como um tensor perante as transformações de Lorentz, sendo interpretado como um campo tensorial que provoca pequenas distorções na métrica plana da relatividade especial. Mais ainda, esta aproximação admite transformações de coordenadas do tipo

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\nu}), \quad |\xi^{\mu}(x^{\nu})| \ll 1, \quad |\partial_{\alpha} \xi^{\mu}| \ll 1. \quad (5.17)$$

Com elas, a métrica efetiva fica

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu} - \partial_{\alpha} \xi_{\beta} - \partial_{\beta} \xi_{\alpha} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon'_{\mu\nu}, \quad (5.18)$$

$$\epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} - \partial_{\alpha} \xi_{\beta} - \partial_{\beta} \xi_{\alpha}. \quad (5.19)$$

Este novo  $\epsilon'_{\mu\nu}$  satisfaz, ainda, a exigência de ser infinitesimal. Podemos considerar que as 5.17 constituem uma transformação de calibre, nas coordenadas, que preservam a validade da aproximação que estamos fazendo. Esta propriedade da aproximação será útil mais adiante.

Consideremos, agora, uma dependência apenas radial para o campo escalar geométrico, *i.e.*,  $\omega = \omega(r)$ , o argumento,  $L$ , da sua lagrangiana se torna, a partir da 5.4,

$$L = -\lambda |\vec{\nabla} \omega|^2, \quad |\partial_{\mu} \omega| \ll 1 \quad (5.20)$$

$$\therefore |L| = -L, \quad (5.21)$$

em que  $\lambda > 0$  e a imposição sobre  $\partial_{\mu} \omega$  surge por considerarmos que a contribuição deste

campo seja através de pequenas correções ao caso invariante de calibre. Com isso, a contração  $\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\omega$  torna-se de segunda ordem e é descartada. A 5.14, por sua vez, fica

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{2}{3}(-L)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \mathcal{L}'_\omega = \sqrt{\lambda}|\vec{\nabla}\omega|. \quad (5.22)$$

A conexão, nesta aproximação, escreve-se como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}(\partial_\nu\epsilon_{\mu\lambda} + \partial_\mu\epsilon_{\nu\lambda} - \partial_\lambda\epsilon_{\mu\nu}) = O(\epsilon_{\mu\nu}), \quad (5.23)$$

sendo, portanto, de primeira ordem em  $\epsilon_{\mu\nu}$ . A 5.13, agora, escreve-se

$$\nabla_\nu(\sqrt{\lambda}|\vec{\nabla}\omega|\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\omega) = \partial_\nu(\sqrt{\lambda}|\vec{\nabla}\omega|\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\omega) = -\vec{\nabla}(\sqrt{\lambda}|\vec{\nabla}\omega|\cdot\vec{\nabla}\omega) = 0 \quad (5.24)$$

cuja solução geral se dá por

$$\vec{\nabla}\omega = \omega_0\frac{\hat{r}}{r} \Leftrightarrow \omega = \omega_0\ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (5.25)$$

onde  $r_0$  e  $\omega_0$  são constantes e  $\hat{r}$  é um vetor unitário na direção radial. Percebemos que este termo está de acordo com nossa aproximação desde que consideremos grandes distâncias quando comparadas a  $\omega_0$ .

Para resolver a equação de Einstein nesta aproximação, calculemos os tensores de Riemann, Ricci e de Einstein em primeira ordem. Estes, encontram-se como sendo

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\mu\epsilon_{\alpha\beta} + \partial_\beta\partial_\alpha\epsilon_{\mu\nu} - \partial_\beta\partial_\mu\epsilon_{\nu\alpha} - \partial_\alpha\partial_\nu\epsilon_{\mu\beta}), \quad (5.26)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu\epsilon + \partial^\alpha\partial_\alpha\epsilon_{\mu\nu} - \partial^\alpha\partial_\mu\epsilon_{\nu\alpha} - \partial^\alpha\partial_\nu\epsilon_{\mu\alpha}), \quad (5.27)$$

$$R = \partial^\alpha\partial_\alpha\epsilon - \partial^\alpha\partial^\beta\epsilon_{\alpha\beta}, \quad (5.28)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu\epsilon + \partial^\alpha\partial_\alpha\epsilon_{\mu\nu} - \partial^\alpha\partial_\nu\epsilon_{\mu\alpha} - \partial^\alpha\partial_\mu\epsilon_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial_\alpha\epsilon + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\epsilon_{\alpha\beta}), \quad (5.29)$$

onde definimos

$$\partial^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta, \quad (5.30)$$

$$\epsilon \equiv \eta^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}. \quad (5.31)$$

Seja, agora, o tensor

$$\bar{\epsilon}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \epsilon \quad \Rightarrow \quad \bar{\epsilon} \equiv \eta^{\mu\nu} \bar{\epsilon}_{\mu\nu} = -\epsilon \quad (5.32)$$

$$\therefore \quad \epsilon_{\mu\nu} = \bar{\epsilon}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{\epsilon}. \quad (5.33)$$

Substituindo estas expressões na 5.29, encontramos

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\epsilon}_{\mu\nu} - \partial^\alpha \partial_\nu \bar{\epsilon}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\mu \bar{\epsilon}_{\nu\alpha} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} \right). \quad (5.34)$$

Dada a liberdade de escolha para a função infinitesimal  $\xi^\mu(x^\nu)$ , podemos sempre obter um calibre para as coordenadas tal que (85)

$$\partial_\mu \bar{\epsilon}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.35)$$

Nele, o tensor de Einstein fica, simplesmente,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \square \bar{\epsilon}_{\mu\nu}, \quad (5.36)$$

onde o operador d'Alembertiano nesta aproximação se escreve como  $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ .

Para o lado direito da 5.12, notemos que seus dois primeiros termos, pelas 5.20 e 5.22, são de terceira ordem em  $\partial_\mu \omega$  e, portanto, não contribuem para a nossa aproximação. A equação de Einstein se escreve, então, nesta aproximação,

$$\square \bar{\epsilon}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.37)$$

Devemos notar que não estaríamos tratando de pequenas perturbações no espaço plano da relatividade especial se o tensor momento-energia usado como fonte não fosse condizente com isso. Portanto, devemos ter, como fica claro pela equação acima, que este tensor deve ser de primeira ordem na nossa aproximação. Mais ainda, dadas as baixas

velocidades envolvidas, ele também satisfaz as desigualdades (85)

$$T_{00} \gg T_{0i} \gg T_{ij}. \quad (5.38)$$

Portanto, a equação predominante na 5.37 é

$$\square \bar{\epsilon}_{00} = -2\kappa T_{00}. \quad (5.39)$$

Para obtermos o lado direito desta, tomemos o tempo próprio, que nos dá

$$d\tau^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + \epsilon_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5.40)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d\tau}{dx^0} \right)^2 = \left( 1 - \beta^2 + \epsilon_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0} \right), \quad (5.41)$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \sqrt{\left| \eta_{ij} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^j}{dx^0} \right|}. \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.42)$$

Como a aproximação que estamos fazendo se dá num regime de baixas velocidades, desprezaremos termos em  $\beta^2$ , assim como em  $\beta\epsilon_{\mu\nu}$ . Obtemos, então,

$$\left( \frac{d\tau}{dx^0} \right)^2 = (1 + \epsilon_{00}). \quad (5.43)$$

Calculemos, agora,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{0\mu} u^\mu &= (\eta_{0\mu} + \epsilon_{0\mu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\eta_{0\mu} + \epsilon_{0\mu}) \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dx^0} = \\ &= (\eta_{0\mu} + \epsilon_{0\mu}) \left( 1 - \frac{\epsilon_{00}}{2} \right) \frac{dx^\mu}{dx^0} = \left( 1 + \epsilon_{0\mu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \right) \left( 1 - \frac{\epsilon_{00}}{2} \right) = 1 + \frac{\epsilon_{00}}{2}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Com isso, podemos obter para o primeiro termo da decomposição 4.1:

$$\rho e^{-2\omega} u_0 u_0 = \rho \tilde{g}_{0\mu} u^\mu \tilde{g}_{0\nu} u^\nu = \rho + \epsilon_{00} \rho. \quad (5.45)$$

Procedendo de forma análoga, obteremos que os demais termos vão com o produto de  $\epsilon_{00}$  com alguma componente da expansão, assim como ocorre com o segundo termo do resultado final acima. Porém, como dissemos que o próprio tensor momento-energia já é

de primeira ordem, vemos que devemos reter somente o único que não é multiplicado por  $\epsilon_{00}$ . Ficamos, então, com  $T_{00} = \rho$  e a 5.39 se escreve

$$\square \bar{\epsilon}_{00} = -2\kappa\rho. \quad (5.46)$$

Para finalizar, não devemos ter uma variação no tempo apreciável da fonte em questão, pois estamos considerando baixas velocidades. Portanto, nosso regime subentende que as derivadas no tempo das funções envolvidas sejam desprezíveis e ficamos, finalmente, com

$$\nabla^2 \bar{\epsilon}_{00} = 2\kappa\rho. \quad (5.47)$$

Seja, agora, esta fonte material correspondendo a uma partícula de massa  $M$  na origem. Sua densidade de energia nos dá

$$\nabla^2 \bar{\epsilon}_{00} = 2\kappa c^2 M \delta^3(r) \quad (5.48)$$

$$\therefore \bar{\epsilon}_{00} = -\frac{\kappa c^2 M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}. \quad (5.49)$$

A partir deste resultado, calculamos

$$\bar{\epsilon} = \eta^{00} \bar{\epsilon}_{00} = \bar{\epsilon}_{00} \quad (5.50)$$

$$\therefore \epsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\bar{\epsilon}_{00}}{2} = -\frac{\kappa c^2 M}{4\pi r}, \quad (\text{sem soma em } \alpha) \quad (5.51)$$

estas últimas sendo as únicas componentes não-nulas de  $\epsilon_{\mu\nu}$ . O tempo próprio, finalmente, se escreve

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.52)$$

$$x^\mu = (ct, x, y, z). \quad (5.53)$$

Claro, está, que o termo em  $M$  é de primeira ordem, valendo apenas para  $r$  grande.

Podemos, agora, obter a dinâmica das partículas teste que se encontram neste regime. A equação da geodésica é dada por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0. \quad (5.54)$$

O primeiro termo se reescreve como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d}{dx^0} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2}_{=0} \frac{dx^\alpha}{dx^0} + \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{1}{c^2 (1 + \epsilon_{00})} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2}, \quad (5.55)$$

onde o termo destacado se anula por se tratar da derivada em  $x^0$  da inversa da (5.43), que só depende das coordenadas espaciais. A parte que vai com a conexão, na equação da geodésica, escreve-se como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{1}{(1 + \epsilon_{00})} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dx^0} \frac{dx^\gamma}{dx^0}. \quad (5.56)$$

Retendo apenas termos de primeira ordem na aproximação, lembrando que a própria conexão já é desse tipo, ficamos apenas com o termo em  $\beta = \gamma = 0$  no somatório e, portanto,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{1}{(1 + \epsilon_{00})} \Gamma_{00}^\alpha. \quad (5.57)$$

A equação da geodésica, finalmente, escreve-se

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^\alpha. \quad (5.58)$$

Para  $\alpha = 0$ , nesta aproximação, temos uma identidade, enquanto que, para  $\alpha = i$ , temos  $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \partial_i \epsilon_{00}$  e a equação dá

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \vec{\nabla} \epsilon_{00} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}, \quad (5.59)$$

que é a mesma expressão newtoniana para a interação gravitacional.

Vemos, portanto, que a introdução da lagrangiana para o campo  $\omega$  dada pelas 5.14 e 5.4 não alterou em nada a dinâmica das partículas teste na aproximação newtoniana quando comparadas com os resultados obtidos pela RG. Desta forma, o perfil de rotação das galáxias permanece com a mesma previsão teórica e, portanto, em desacordo com as

observações.

Uma forma de tentar salvar o modelo e fazer com que a dinâmica para o campo escalar geométrico se manifeste na equação da geodésica consiste em alterar o acoplamento entre a lagrangiana de matéria, incluindo a das partículas teste, e a geometria. Tomemos, então, as ações do campo gravitacional e da partículas dadas por

$$S = \int \left[ \frac{e^{-\omega}}{\kappa} R + \frac{e^{-2\omega}}{\lambda\kappa} \mathcal{L}_\omega(L) + \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \dots) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} S_p &= \int 2m \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds}} \delta^4(x - z(s)) ds d^4x = \\ &= \int 2m \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{e^\omega \tilde{g}_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds}} \delta^4(x - z(s)) ds d^4x. \end{aligned} \quad (5.61)$$

A variação da conexão continua nos dando WIST, portanto, manteremos nossa definição de tempo-próprio. Com isso, podemos ver que as partículas seguirão geodésicas aceleradas na geometria descrita pela métrica efetiva. De fato, sua equação dinâmica agora se escreve

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = -W_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \frac{1}{2} \partial_\beta \omega \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (5.62)$$

onde  $W_{\beta\gamma}^\alpha$  encontra-se definido na 1.42. A variação da métrica, por sua vez, resulta em

$$G_{\mu\nu} = -\mathcal{L}'_\omega \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega + \frac{1}{2\lambda} \mathcal{L}_\omega e^{-\omega} g_{\mu\nu} - e^{-\omega} \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.63)$$

$$\therefore -R = -\mathcal{L}'_\omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega + \frac{2}{\lambda} \mathcal{L}_\omega e^{-\omega} - e^{-\omega} \kappa T, \quad (5.64)$$

onde o tensor momento-energia,  $T_{\mu\nu}$ , que aparece nela agora se trata do mesmo obtido no contexto da RG. Isto é, ele é o mesmo da 5.6 com a métrica usual no lugar da efetiva. Por fim, a variação do campo  $\omega$  nos dá

$$-R = -\mathcal{L}'_\omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega + \frac{2}{\lambda} \mathcal{L}_\omega e^{-\omega} + 2(\partial_\nu \mathcal{L}'_\omega) g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega + 2\mathcal{L}'_\omega \square \omega, \quad (5.65)$$

que, igualando à 5.64 resulta em

$$2g^{\mu\nu}\nabla_\nu(\mathcal{L}'_\omega\partial_\mu\omega) = -e^{-\omega}\kappa T \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\nu(\mathcal{L}'_\omega\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega) = -\frac{\kappa}{2}T. \quad (5.66)$$

Adotaremos, novamente, a aproximação newtoniana e, assim como no caso anterior, devemos ter

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\square\bar{\epsilon}_{\mu\nu}. \quad (5.67)$$

Para o lado direito da equação de Einstein 5.63, consideraremos a mesma expressão 5.14 para a lagrangiana do campo  $\omega$  e, assim como antes, faremos a suposição de que  $\partial_\mu\omega$  é infinitesimal. Mais ainda, estaremos supondo *a priori* que o próprio campo  $\omega$  é muito pequeno também. Desta forma, a equação de Einstein 5.63 fica

$$\square\bar{\epsilon}_{\mu\nu} = -2\kappa(1-\omega)T_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.68)$$

onde o termo em  $\omega T_{\mu\nu}$  foi descartado por ser de segunda ordem, uma vez que devemos considerar o tensor momento-energia muito pequeno. Este terá, novamente, a componente  $T_{00}$  superior às demais e, considerando-se as baixas velocidades envolvidas, teremos a equação predominante

$$\nabla^2\bar{\epsilon}_{\mu\nu} = 2\kappa\rho. \quad (5.69)$$

Outra vez, para uma partícula de massa  $M$  na origem, temos  $\rho = c^2 M\delta^3(r)$  e a solução da equação acima nos dá a já obtida 5.49:

$$\bar{\epsilon}_{00} = -\frac{\kappa c^2 M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (5.70)$$

$$\therefore \epsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\bar{\epsilon}_{00}}{2} = -\frac{2GM}{c^2 r}. \quad (\text{sem soma em } \alpha) \quad (5.71)$$

A 5.66 se escreve, agora,

$$\vec{\nabla} \left( \sqrt{\lambda} |\vec{\nabla}\omega| \cdot \vec{\nabla}\omega \right) = \frac{\kappa}{2}\rho = \frac{4\pi GM}{c^2}\delta^3(r), \quad (5.72)$$

cuja solução se dá por

$$\vec{\nabla}\omega = \sqrt{\frac{GM}{\sqrt{\lambda}c^2}} \frac{\hat{r}}{r} = \frac{2}{c^2} \sqrt{GMa_0} \frac{\hat{r}}{r}, \quad \sqrt{\lambda} \equiv \frac{c^2}{4a_0} \quad (5.73)$$

$$\Leftrightarrow \omega(r) = \frac{2}{c^2} \sqrt{GMa_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (5.74)$$

onde a constante  $\lambda$  foi redefinida em termos de uma nova,  $a_0$ , e  $r_0$  é outra constante de integração. Vemos, novamente, que  $\partial_\mu\omega$  é infinitesimal somente para  $r$  grande, comparado à  $\frac{2}{c^2}\sqrt{GMa_0}$ . Porém, devido a suposição feita *a priori* de que  $\omega$  também é, devemos ter  $a_0$  muito pequeno também. De fato, os resultados finais dão um valor para essa constante de tal ordem que, mesmo para as massas e raios típicos de uma galáxia<sup>1</sup> ainda temos a validade desta aproximação.

Para obtermos as trajetórias das partículas teste, tomemos a 5.62 neste regime. O seu lado esquerdo já vimos que se dá por (cf. 5.55 e 5.57)

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{1}{c^2(1+\epsilon_{00})} \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \frac{1}{(1+\epsilon_{00})} \Gamma_{00}^\alpha. \quad (5.75)$$

Os termos do lado direito, por sua vez, ficam:

$$W_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{1}{(1+\epsilon_{00})} \underbrace{W_{\beta\gamma}^\alpha}_{=O(\omega_\mu)} \frac{dx^\beta}{dx^0} \frac{dx^\gamma}{dx^0} = \frac{1}{(1+\epsilon_{00})} W_{00}^\alpha, \quad (5.76)$$

onde foram descartados termos em  $O(\omega_\mu\beta)$ ; enquanto para o segundo termo, temos

$$\frac{1}{2}\omega_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2(1+\epsilon_{00})} \omega_\beta \frac{dx^\beta}{dx^0} \frac{dx^\alpha}{dx^0} = \frac{1}{2(1+\epsilon_{00})} \omega_0 \frac{dx^\alpha}{dx^0}, \quad (5.77)$$

$$\omega_0 = \partial_0\omega = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}\omega_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0. \quad (5.78)$$

Finalmente, a equação para as trajetórias das partículas se escreve

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -c^2 (\Gamma_{00}^\alpha + W_{00}^\alpha). \quad (5.79)$$

Para  $\alpha = 0$  temos uma identidade, enquanto que  $\alpha = i$  nos dá  $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\partial_i\epsilon_{00}$ ,  $W_{00}^i = \frac{1}{2}\omega_i$  e

---

<sup>1</sup>Tomando a Via Láctea como referência, cuja massa e raio são de aproximadamente  $10^{12}M_\odot$  e  $5 \cdot 10^4$  anos-luz, respectivamente.

a equação fica

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \left( \vec{\nabla} \epsilon_{00} + \vec{\nabla} \omega \right) = - \left( \frac{GM}{r^2} + \frac{\sqrt{GMa_0}}{r} \right) \hat{r}. \quad (5.80)$$

A partir das distâncias nas quais as curvas de rotação começam a diferir do padrão newtoniano, somente o termo em  $a_0$  permanece na equação acima e recuperamos a fenomenologia do MOND. O valor obtido a partir das observações para essa nova constante é de  $a_0 \approx 10^{-10} m/s^2$  (32).

### 5.2.1 Modelo de Friedmann

Vejamos, agora, qual a evolução do fator de escala cosmológico decorrente desta lagrangiana introduzida para o campo  $\omega$ . Consideraremos, para isso, somente os termos geométricos, *i.e.*, trataremos do vácuo, e voltaremos a considerar a velocidade da luz unitária ( $c = 1$ ).

Tomemos a métrica efetiva dada por

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (5.81)$$

Considerando somente dependência temporal nas funções, temos

$$\omega = \omega(t) \quad \Rightarrow \quad L = \lambda \dot{\omega}^2 = |L| \quad (5.82)$$

$$\therefore \mathcal{L}_\omega = -\frac{2}{3} |L|^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \lambda^{\frac{3}{2}} |\dot{\omega}|^3, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{L}'_\omega = -\sqrt{L} = -\sqrt{\lambda} |\dot{\omega}|. \quad (5.84)$$

onde  $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$  para qualquer  $f$ . Com estas expressões, a 5.63, com  $T_{\mu\nu} = 0$ , escreve-se

$$-\frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + \epsilon) = \frac{2}{3} \sqrt{\lambda} |\dot{\omega}|^3, \quad (5.85)$$

$$\frac{2}{a} \ddot{a} + \frac{1}{a^2} (\dot{a}^2 + \epsilon) = \frac{1}{3} \sqrt{\lambda} |\dot{\omega}|^3. \quad (5.86)$$

Vemos que, pela primeira delas, devemos ter, necessariamente,  $\epsilon = -1$ . A 5.66, por sua vez, resulta em

$$2\ddot{\omega} + \frac{3}{a}\dot{a}\dot{\omega} = 0, \quad (5.87)$$

cuja solução é

$$a(t) = \frac{a_1}{\dot{\omega}^{\frac{2}{3}}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\omega} = \left[ \frac{a_1}{a(t)} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (5.88)$$

onde  $a_1 > 0$  é uma constante arbitrária. Substituindo, agora, a 5.85 na 5.86, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{a}\ddot{a} &= \frac{5}{9}\sqrt{\lambda}|\dot{\omega}|^3 = \frac{5}{9}\sqrt{\lambda} \left[ \frac{a_1}{a(t)} \right]^{\frac{9}{2}} \\ \therefore a^{\frac{7}{2}}\ddot{a} &= \frac{5\sqrt{\lambda}a_1^{\frac{9}{2}}}{18}, \end{aligned} \quad (5.89)$$

mostrando-nos que a aceleração do fator de escala é sempre positiva.

Inserindo a 5.88 na 5.85, concluímos que

$$\dot{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \left( \frac{2\sqrt{\lambda}a_1^{\frac{9}{2}}}{9} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (5.90)$$

lembrando que  $\epsilon = -1$ . Sendo a aceleração sempre positiva, esse valor para o fator de escala caracteriza um mínimo e, portanto, temos um modelo cosmológico com *bouncing* dotado de uma expansão eternamente acelerada para o vácuo.

Muito embora este modelo para a dinâmica do campo escalar geométrico seja bem sucedido em justificar as curvas de rotação anômalas das galáxias fornecendo, ademais, um modelo cosmológico para o vácuo isento de singularidade inicial e com expansão acelerada, coerente com a interpretação vigente sobre o estado atual do universo (86, 87), ele apresenta certas características que o tornam bastante desinteressante.

Primeiramente, tivemos que alterar nosso acoplamento com a matéria para podermos reproduzir a dinâmica do MOND. Isto viola drasticamente nossa formulação original e consideramos este caso, portanto, muito artificial. Mais ainda, nossa formulação geométrica para esta fenomenologia, a qual acaba por identificar-se com sua versão relativística AQUAL, considera algo implícito nesta que é a condição de  $|\omega| \ll 1$ . No entanto, pela solução encontrada, 5.74, vemos que, para isso, a distância da origem não pode ser muito maior do que o raio típico de uma galáxia. Concluímos, assim, que este modelo

possui um regime de validade restrito até um certo valor para  $r$  e, portanto, trata-se de uma teoria efetiva.

Além disso, este modelo altera somente as curvas de rotação das galáxias, enquanto a existência de matéria escura que se infere dessas medidas é igualmente obtida através do fenômeno de lente gravitacional (33–35). Este, por sua vez, é inalterado por este modelo, uma vez que, da métrica efetiva 5.52, obtém-se as geodésicas nulas dos raios luminosos exatamente como as previstas pela RG neste regime (88).

Sendo assim, por se tratar meramente de uma teoria efetiva que, para se fazer valer, teve que violar o acoplamento que estabelecemos para os campos materiais e ainda assim resolver apenas parcialmente o problema o qual se propôs a resolver, iremos abandonar este caso e seguir adiante considerando outra alternativa para a dinâmica do campo  $\omega$ .

### 5.3 WIST vindo da ação efetiva da teoria de cordas

Seguindo na tentativa de investigar possíveis lagrangianas para o campo escalar geométrico, inspiraremos-nos na ação efetiva da aproximação de baixas energias da teoria de cordas (36–39) na qual, além da métrica usual, temos um campo dilatônico o qual iremos identificar com o nosso  $\omega$ . Considerando a ação para o vácuo, temos

$$S = \int e^{-\omega} (R - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega) \sqrt{-g} d^4x. \quad (5.91)$$

Perceba que esta se trata de um caso particular da 5.3 na ausência da lagrangiana de matéria e com

$$\mathcal{L}_\omega(L) = -L. \quad (5.92)$$

Podemos, então, usar os resultados genéricos 5.6–5.11 para obter as equações resultantes da variação à Palatini da ação acima. A variação da conexão nos dá uma geometria em WIST, enquanto a da métrica nos dá

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega \quad (5.93)$$

$$\therefore R = g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega. \quad (5.94)$$

A variação de  $\omega$ , por sua vez, fornece

$$R = g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega + 2\Box\omega. \quad (5.95)$$

Igualando esta com a 5.94, ficamos com o seguinte par de equações para nossas variáveis:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega, \quad (5.96)$$

$$\Box\omega = 0. \quad (5.97)$$

Este sistema já foi estudado num contexto cosmológico, resultando num universo isento de singularidade (11), e no caso estático com simetria esférica, resultando numa solução de buraco de minhoca (40, 41) descrita pelo tempo próprio

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)} - r^2 d\Omega^2, \quad (5.98)$$

onde  $r_0$  é uma constante. Esta métrica, no contexto da relatividade geral, já havia sido estudada como caso particular de um modelo proposto por Ellis (42) para descrever partículas na relatividade geral, tratando-se, neste caso, das que possuem massa nula. Posteriormente outros seguiram no estudo desta mesma geometria (43, 44).

Muito embora este caso seja teoricamente mais interessante do que o anterior, não iremos nos ater a ele, pois estamos de posse de exemplos e argumentos suficientes para estabelecer uma simplificação operacional considerável. Esta nos permitirá antecipar resultados e, portanto, selecionar qual a melhor lagrangiana para o campo  $\omega$ , com base em resultados já conhecidos da relatividade geral.

## 5.4 WIST como teorias de campo escalar da RG

Como motivação da nossa proposta, tomemos o exemplo da última seção. Nele, temos uma ação que se escreve em termos da métrica efetiva como

$$S = \int (\tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega) \sqrt{-\tilde{g}} d^4x, \quad (5.99)$$

e resultou em equações dinâmicas que também podem ser escritas como

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega, \quad (5.100)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \partial_\nu \omega = 0. \quad (5.101)$$

Podemos perceber que a métrica usual aparece sempre acompanhada do fator  $e^{-\omega}$  (ou  $e^\omega$ , no caso da inversa) nestas equações. Tal fato é bastante compreensível no caso da 5.100, pois se trata da equação resultante da variação da métrica numa ação construída de acordo com nossa regra de acoplamento. Sendo assim, podemos efetuar sua variação como feito na 2.13 e todos os termos deverão continuar escritos em termos da métrica através de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ .

O interessante é que a segunda equação é exatamente a que se obtém a partir da variação do campo  $\omega$  como se ele fosse totalmente independente da métrica efetiva que aparece em sua lagrangiana. Isto, por sua vez, apesar de parecer estranho, também pode ser considerado aceitável. De fato, se na composição da métrica efetiva temos a métrica usual que é dinamicamente independente de  $\omega$ , podemos dizer que  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  também será independente deste campo e, como ocorreu neste exemplo, podemos tratá-los como campos dinâmicos independentes. O notável é que isto sempre ocorre. Isto é, a métrica efetiva na ação pode ser sempre considerada dinamicamente independente do campo escalar geométrico e, portanto, a equação dinâmica deste pode ser obtida ignorando sua presença na composição de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ .

Para vermos isto, consideremos uma lagrangiana genérica para o campo  $\omega$  tal como na 2.12, de modo que a ação total seja dada por

$$S = \int [R(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha) + \mathcal{L}_\omega(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots)] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x, \quad (5.102)$$

onde destacamos apenas a dependência na métrica efetiva da lagrangiana  $\mathcal{L}_\omega$ , que também depende de outros termos em  $\omega$  e suas derivadas. Façamos, então, a variação desta ação com respeito à métrica (usual) e igualemos à zero. Devemos obter:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta S}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = [G_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}) + t_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots)] e^\omega \sqrt{-\tilde{g}} = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}) = -t_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \end{aligned} \quad (5.103)$$

$$\therefore R(\tilde{g}^{\mu\nu}) = t(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots), \quad (5.104)$$

onde definimos  $t_{\mu\nu}$  como sendo o tensor momento-energia “efetivo” associado à lagrangiana do campo escalar  $\omega$ , *i.e.*,

$$t_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta [\mathcal{L}_\omega(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \sqrt{-\tilde{g}}]}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}, \quad (5.105)$$

$$t \equiv g^{\mu\nu} t_{\mu\nu}. \quad (5.106)$$

Para a variação de  $\omega$ , temos, agora,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \omega} &= \frac{\delta}{\delta \omega} \left[ R(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha) \sqrt{-\tilde{g}} \right] + \frac{\delta}{\delta \omega} \left[ \mathcal{L}_\omega(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \sqrt{-\tilde{g}} \right] = \\ &= \frac{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}{\delta \omega} \frac{\delta}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \left[ R(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha) \sqrt{-\tilde{g}} \right] + \frac{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}{\delta \omega} \frac{\delta}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \left[ \mathcal{L}_\omega(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \sqrt{-\tilde{g}} \right] + \\ &+ \left( \frac{\delta}{\delta \omega} \mathcal{L}_\omega(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \right)_{\tilde{g}^{\mu\nu}} \sqrt{-\tilde{g}} = 0 \end{aligned} \quad (5.107)$$

onde usamos a notação  $()_x$  para indicar que  $x$  não sofre a variação feita entre os parênteses. Substituindo a 5.105, obtemos

$$\left[ G_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}) + t_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \right] \frac{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}{\delta \omega} \sqrt{-\tilde{g}} + \left( \frac{\delta}{\delta \omega} \mathcal{L}_\omega(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \right)_{\tilde{g}^{\mu\nu}} \sqrt{-\tilde{g}} = 0, \quad (5.108)$$

que, usando a equação de Einstein 5.103, resulta em

$$\left( \frac{\delta}{\delta \omega} \mathcal{L}_\omega(\tilde{g}^{\mu\nu}, \dots) \right)_{\tilde{g}^{\mu\nu}} = 0. \quad (5.109)$$

Isto é, ficamos somente com a variação da lagrangiana do campo escalar geométrico, mantida a métrica efetiva constante. Os termos da variação devidos a  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  anulam-se em virtude da equação obtida pela variação da métrica. Isto verifica-se ter ocorrido nas equações 5.96 e 5.97 do exemplo usado, bem como nas 5.12 e 5.13.

Caso a lagrangiana em questão não obedeça o acoplamento postulado, como, por exemplo, a de matéria usada na 5.60, ela ainda pode ser contemplada por este procedimento. Para isso, basta substituirmos a identidade  $g_{\mu\nu} \equiv e^\omega \tilde{g}_{\mu\nu}$  nela e teremos passado de uma lagrangiana em desacordo com nosso acoplamento, eventualmente, sem nenhuma dependência em  $\omega$  sequer, para uma em termos de duas variáveis consideradas dinâmicas-

mente independentes. As equações resultantes devem ser as 5.103 e 5.109, como, de fato, ocorreu com as 5.63 e 5.66 quando mudamos o acoplamento da lagrangiana de matéria.

Esta substituição pode, inclusive, ser feita indiscriminadamente, por se tratar de uma identidade. Portanto, podemos sempre ter nossa ação escrita em termos do campo  $\omega$  e da métrica efetiva, os quais são tratados como variáveis dinâmicas independentes.

Como a métrica usada pelos observadores é, justamente, essa  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , é para ela que devemos obter nossas soluções. Sendo assim, pela forma que as equações 5.103 e 5.109 são escritas em termos dela, não é difícil perceber que os resultados serão os mesmos que se obtém na RG considerando-se um campo escalar  $\omega$  como fonte. Basta fazermos a identificação da métrica usual, no caso da RG, com a nossa métrica efetiva em WIST.

Dessa forma, incorporamos na nossa teoria os mesmos resultados para a geometria que se obtém na relatividade geral na presença de um campo escalar. Sendo este, no nosso caso, um campo legítimo que surge naturalmente da caracterização axiomática do espaço-tempo.

Os campos escalares têm um papel fundamental na física teórica (51), no entanto, sua consideração não reside em nenhuma detecção observacional ou experimental direta (51, 52). Eles são usados como um artifício teórico essencial para a descrição de diversos fenômenos, particularmente em cosmologia, seja para promover o período inflacionário do universo primordial ou para evitar a singularidade inicial (45–50), porém, sua existência sempre foi duvidosa.

Nossa reformulação da gravitação de Einstein em WIST, por outro lado, fornece os mesmos resultados dessas teorias de campos escalares, porém, através de um campo legítimo. Isto é, sua existência é naturalmente aceita pela construção axiomática da teoria, restando apenas determinar sua dinâmica consistentemente com as observações.

## *Conclusão*

Após termos apresentado as motivações para se tratar a gravitação geometricamente, como uma propriedade do espaço-tempo no qual habitamos e os fenômenos físicos se manifestam, estabelecemos o critério usado pela relatividade geral para selecionar o particular tipo de geometria que seria considerado na teoria. A saber, impusemos que a geometria não altera o módulos dos vetores ao longo da variedade, resultando no caso particular das geometrias de Riemann.

Dentro do contexto da RG, caracterizamos os relógios ópticos como instrumentos de medida com o qual os observadores descrevem a geometria do espaço-tempo. Estes instrumentos baseiam-se na emissão e recepção de raios luminosos para o seu funcionamento, sendo assim, mencionamos os trabalhos de caracterização axiomática de EPS e Woodhouse. Eles concluíram que, adotando estes relógios para se medir o intervalo entre dois eventos, é necessária a consideração da geometria de Weyl para o espaço-tempo, que possui a riemanniana como caso particular. Portanto, reforçamos a descrição geométrica da gravitação inserindo-a num contexto geométrico mais geral, por uma questão de consistência teórica.

Devido às variações nos comprimentos provocadas pela geometria nas variedades de Weyl, tivemos que redefinir o conceito de tempo-próprio dos observadores, para uma adequada caracterização das propriedades geométricas do espaço-tempo em que eles se encontram. Esta redefinição, por sua vez, manifesta uma simetria de calibre que também se encontra na descrição geométrica do espaço-tempo e, portanto, suas propriedades são perfeitamente transmitidas aos observadores.

Dentro deste contexto mais amplo das geometrias de Weyl, tivemos que nos restringir ao seu caso integrável por questões de formulação variacional e compatibilidade com teorias já existentes. A simetria de calibre, neste caso, permite a escolha de um em particular que nos leva de volta à geometria riemanniana da RG. Inspirados nessa propriedade, estabelecemos um acoplamento inédito na gravitação em WIST que preserva esta invariância e consideramos ser o mais natural.

Apesar desta simetria resultar numa indeterminação para os objetos geométricos con-

siderados, ressaltamos que uma apropriada caracterização das medidas feitas pelos observadores deve permanecer bem definida. Ademais a liberdade de calibre nos leva um passo adiante na compreensão das transformações conformes na gravitação. Estas, por sua vez, possuem um importante papel nas interações físicas e argumenta-se (5, 21, 22) que todas elas devam ser invariantes perante estas transformações locais de escala. No caso da gravitação, por exemplo, isto elucidaria a questão da constante gravitacional ser ou não, de fato, uma constante (23).

Obtivemos, em seguida, a solução para o vácuo estático e esférico-simétrico que esclarece a necessidade de se considerar o tempo-próprio tal como definimos para a caracterização da geometria pelos observadores. É somente através dele que se pode interpretar devidamente as coordenadas usadas e, conseqüentemente, obter medidas em acordo com a simetria da teoria, recuperando os resultados do caso equivalente da RG.

Com a intenção de se reobter a invariância de calibre nos demais observáveis, deu-se prosseguimento à descrição do fenômeno do desvio para o vermelho (*redshift*). Para isso, reobtivemos a óptica geométrica e definimos este efeito preservando devidamente a invariância de calibre. Tal propriedade acaba por permitir uma total atribuição deste efeito ao campo escalar geométrico, quando se trata de modelos cosmológicos, mais precisamente, das geometrias conformalmente planas.

Estes modelos cosmológicos caracterizam-se por diferentes fluidos representando o conteúdo energético do universo. Portanto, a possibilidade de suas propriedades estarem associadas ao novo campo escalar introduzido exhibe uma verdadeira realidade física que este possui. Face à isto, fizemos a caracterização da fonte das equações em termos de quantidades termodinâmicas de equilíbrio e dissipativas preservando a simetria de calibre já presente no tensor momento-energia. Com isso, pudemos interpretar diferentes campos  $\omega$  como representando situações físicas das mais variadas.

Uma vez reconhecida a realidade física deste novo campo, no sentido em que diferentes campos  $\omega$  para uma mesma métrica correspondem a situações físicas distintas, tratamos de buscar uma dinâmica específica para ele consistentemente com observações. Dada a liberdade para a escolha de sua lagrangiana, buscamos inspiração em outras teorias que consideram algum campo escalar e fizemos sua descrição de acordo com nossa reformulação.

A primeira consistiu numa descrição para a mecânica quântica (não-)relativística que já foi formulada baseando-se nas geometrias de Weyl integrável. As equações resultantes (ver as Refs. 19 e 20) mostraram-se idênticas às de Hamilton-Jacobi (não-)rela-

tivísticas com um termo a mais exprimindo o caráter quântico do sistema. No limite não-relativístico, recupera-se a formulação de Bohm-de Broglie, em que o campo escalar geométrico faz o papel de potencial quântico.

Em seguida, devido ao sucesso fenomenológico do MOND, investigamos a possibilidade de o reproduzirmos no nosso formalismo. Consideramos a mesma lagrangiana usada na versão relativística AQUAL e não obtivemos nenhuma alteração na aproximação newtoniana da teoria. Para que algum efeito decorrente da dinâmica para o campo escalar pudesse se fazer presente, tivemos que alterar o acoplamento que postulamos. Porém, além disto ser bastante artificial, no nosso formalismo, não resolve completamente o problema que a fenomenologia do MOND se propõe a resolver, a saber, o da matéria escura. Descartamos, portanto, esta opção e buscamos outro modelo existente tratando de algum campo escalar.

Nossa terceira alternativa foi considerar a teoria efetiva no regime de baixas energias da teoria de cordas. Todo o tratamento foi de acordo com nosso formalismo e obtivemos um modelo para a métrica efetiva exatamente análogo ao caso da relatividade geral na presença de um campo escalar com energia negativa. Este caso já fora estudado e fornece um modelo cosmológico sem singularidades (11) e um buraco de minhoca (40, 41). Neste último caso, a mesma solução já havia sido obtida em um outro contexto, consistindo num modelo para partículas na RG (42–44).

Muito embora este caso se apresente bastante promissor, preferimos chamar atenção para um fato notável do nosso modelo. Tratando-se de investigar alternativas para a dinâmica do novo campo geométrico, podemos incorporar ao nosso formalismo os diversos resultados já obtidos para teorias de campos escalares na RG. Para realizarmos isto, basta fazermos a identificação do campo escalar com o nosso  $\omega$  e transformar a métrica usual na efetiva. As soluções para esta, que é o nosso interesse, serão as mesmas da usual na RG com o campo escalar.

Estes campos são há muito tempo usados na física teórica como candidatos a se solucionar questões fundamentais existentes, porém sem nenhuma detecção direta, tratando-se apenas de um artifício para se resolver o problema. Obtivemos, então, uma fundamentação legítima para essa abordagem, em nosso formalismo, que consiste em considerar o campo escalar associado à variações provocadas pela geometria nos módulos dos vetores, tal como na 1.36.

Considerando-se o caso mais geral da geometria de Weyl nesta equação, podemos concluir que este efeito de variação dos módulos não ocorre nos vetores nulos. Portanto,

sempre que tivermos um eletromagnetismo invariante conforme resultando numa óptica geométrica em que os raios de luz são descritos por vetores de propagação nulos, podemos concluir que a geometria de Weyl não atua na sua descrição. De fato, podemos reobter a equação 3.21, que é invariante conforme, a partir da 1.44, mesmo no caso mais geral da geometria de Weyl. Portanto, percebemos que qualquer campo responsável pela variação nos módulos dos vetores preserva o mesmo comportamento dos raios luminosos. Não por acaso, foi possível obter as conclusões de EPS e Woodhouse sobre o espaço-tempo quando se considera um relógio óptico para sua caracterização. Da mesma forma, podemos compreender o caráter “escuro” desses campos, justificando a ausência de detecção direta: trata-se de um campo geométrico cuja manifestação se dá somente através da curvatura do espaço-tempo.

As possibilidades de prosseguimento na obtenção desta dinâmica específica é imensa e se une à uma prática de décadas na física.

Outra alternativa na obtenção de uma forma específica para o campo  $\omega$  é considerar as teorias de  $f(R)$  da gravitação (53–55). Quando se efetua o procedimento variacional à Palatini nelas, obtemos uma teoria em WIST cujo campo escalar geométrico é dado em termos da função  $f(R)$  e suas derivadas. A liberdade da formulação não está num campo escalar adicional, mas sim, numa dependência funcional em aberto na ação para o escalar de curvatura. Sendo, em todo caso, uma geometria em WIST, podemos usar os conceitos redefinidos nesse trabalho para interpretar os resultados dessas teorias alternativas da gravitação. Mais ainda, as teorias de  $f(R)$  no formalismo métrico são equivalentes a modelos de quintessência acoplada (89), onde se consideram campos escalares na RG e, pelos resultados desta tese, podem ser identificados com o campos escalar geométrico. Isto é, podemos fornecer também uma fundamentação geométrica para as teorias de  $f(R)$  no formalismo métrico. Podemos ainda considerar o análogo desta formulação para uma função arbitrária de  $e^\omega R$ , *i.e.*, uma teoria  $f(R)$  no formalismo de Palatini para o escalar de curvatura calculado com a métrica efetiva. Poderíamos, ademais, considerar uma nova lagrangiana para o campo  $\omega$  e, possivelmente, teríamos uma teoria equivalente às de  $f(R)$  com campo escalar.

Podemos perceber a dimensão da liberdade adquirida pela gravitação ao se considerar a geometria de Weyl como a descrição correta do espaço-tempo. Este trabalho, portanto, fornece um amplo cenário criteriosamente bem estabelecido onde se pode desenvolver diversas possibilidades de compatibilizá-la com as observações consistentemente.

## *APÊNDICE A – Simetrias dos índices do tensor de Riemann em Weyl*

O tensor de Riemann em Weyl, definido na 1.21, não possui as mesmas simetrias em seus índices que sua versão riemanniana. Isto é, com exceção da 1.53, nenhuma outra simetria está presente. No entanto, podemos decompor este tensor nos diferentes termos que apresentam alguma simetria e usar suas propriedades para obter resultados como a 1.54, entre outros. Isto será feito do mesmo modo que se encontra na Ref. 56, onde para isso, fez-se necessário escrever  $R_{\gamma\beta\rho\lambda}$  explicitamente em termos da métrica e suas derivadas. Temos, então, que expandir

$$R_{\gamma\beta\rho\lambda} = \hat{R}_{\gamma\beta\rho\lambda} - \hat{\nabla}_\lambda (g_{\gamma\mu} W_{\beta\rho}^\mu) + \hat{\nabla}_\rho (g_{\gamma\mu} W_{\beta\lambda}^\mu) + g_{\gamma\mu} W_{\alpha\lambda}^\mu W_{\beta\rho}^\alpha - g_{\gamma\mu} W_{\alpha\rho}^\mu W_{\beta\lambda}^\alpha \quad (\text{A.1})$$

em termos de  $\omega_\mu$  e suas derivadas. Isto porque as propriedades de simetria de  $\hat{R}_{\gamma\beta\rho\lambda}$  já são conhecidas:

$$\hat{R}_{\gamma\beta\rho\lambda} = -\hat{R}_{\gamma\beta\lambda\rho} = -\hat{R}_{\beta\gamma\rho\lambda} = \hat{R}_{\rho\lambda\gamma\beta}. \quad (\text{A.2})$$

Vejamos, então, que termo quebra a antissimetria de  $R_{\gamma\beta\rho\lambda}$  no primeiro par de índices. Primeiramente, notemos que da 1.40 temos, por um cálculo direto,

$$g_{\gamma\mu} W_{\alpha\lambda}^\mu = -g_{\alpha\mu} W_{\gamma\lambda}^\mu + \omega_\lambda g_{\alpha\gamma} \quad (\text{A.3})$$

$$\therefore g_{\gamma\mu} W_{\alpha\lambda}^\mu W_{\beta\rho}^\alpha - g_{\gamma\mu} W_{\alpha\rho}^\mu W_{\beta\lambda}^\alpha = g_{\alpha\mu} (W_{\gamma\rho}^\mu W_{\beta\lambda}^\alpha - W_{\gamma\lambda}^\mu W_{\beta\rho}^\alpha) + g_{\alpha\gamma} (\omega_\lambda W_{\beta\rho}^\alpha - \omega_\rho W_{\beta\lambda}^\alpha) \quad (\text{A.4})$$

Dessa forma, a A.1 se escreve como

$$R_{\gamma\beta\rho\lambda} = \hat{R}_{\gamma\beta\rho\lambda} + \underbrace{g_{\alpha\mu} (W_{\gamma\rho}^{\mu} W_{\beta\lambda}^{\alpha} - W_{\gamma\lambda}^{\mu} W_{\beta\rho}^{\alpha})}_{\text{antissimétrico em "}\gamma\beta\text{"}} + g_{\alpha\gamma} \omega_{\lambda} W_{\beta\rho}^{\alpha} - \hat{\nabla}_{\lambda} (g_{\alpha\gamma} W_{\beta\rho}^{\alpha}) - \\ - g_{\alpha\gamma} \omega_{\rho} W_{\beta\lambda}^{\alpha} + \hat{\nabla}_{\rho} (g_{\alpha\gamma} W_{\beta\lambda}^{\alpha}) \quad (\text{A.5})$$

Para seus quatro últimos termos, calculemos, primeiramente,

$$g_{\alpha\gamma} \omega_{\lambda} W_{\beta\rho}^{\alpha} - \hat{\nabla}_{\lambda} (g_{\alpha\gamma} W_{\beta\rho}^{\alpha}) = \frac{1}{2} [\omega_{\lambda} (\omega_{\beta} g_{\rho\gamma} + \omega_{\rho} g_{\beta\gamma} - \omega_{\gamma} g_{\beta\rho}) - \\ - g_{\rho\gamma} \hat{\nabla}_{\lambda} \omega_{\beta} + g_{\beta\gamma} \hat{\nabla}_{\lambda} \omega_{\rho} - g_{\beta\rho} \hat{\nabla}_{\lambda} \omega_{\gamma}] . \quad (\text{A.6})$$

Depois de simplificar, obtemos que

$$g_{\alpha\gamma} \omega_{\lambda} W_{\beta\rho}^{\alpha} - \hat{\nabla}_{\lambda} (g_{\alpha\gamma} W_{\beta\rho}^{\alpha}) - g_{\alpha\gamma} \omega_{\rho} W_{\beta\lambda}^{\alpha} + \hat{\nabla}_{\rho} (g_{\alpha\gamma} W_{\beta\lambda}^{\alpha}) = \\ = \frac{1}{2} \left[ \omega_{\lambda} (\omega_{\beta} g_{\rho\gamma} - \omega_{\gamma} g_{\rho\beta}) - (g_{\rho\gamma} \hat{\nabla}_{\lambda} \omega_{\beta} - g_{\rho\beta} \hat{\nabla}_{\lambda} \omega_{\gamma}) - \right. \\ \left. - \omega_{\rho} (\omega_{\beta} g_{\lambda\gamma} - \omega_{\gamma} g_{\lambda\beta}) + (g_{\lambda\gamma} \hat{\nabla}_{\rho} \omega_{\beta} - g_{\lambda\beta} \hat{\nabla}_{\rho} \omega_{\gamma}) \right] + \\ + \frac{1}{2} g_{\beta\gamma} \underbrace{(\hat{\nabla}_{\rho} \omega_{\lambda} - \hat{\nabla}_{\lambda} \omega_{\rho})}_{=(\partial_{\rho} \omega_{\lambda} - \partial_{\lambda} \omega_{\rho})} , \quad (\text{A.7})$$

onde percebe-se claramente que cada um dos termos entre parênteses nas duas primeiras linhas do lado direito são antissimétricos em “ $\gamma\beta$ ”. Temos, com isso, que o único termo que não possui esta propriedade é o último desta equação. Podemos escrever, então,

$$R_{\gamma\beta\rho\lambda} = A_{\gamma\beta\rho\lambda} + \frac{1}{2} g_{\beta\gamma} (\partial_{\rho} \omega_{\lambda} - \partial_{\lambda} \omega_{\rho}) , \quad (\text{A.8})$$

$$A_{\gamma\beta\rho\lambda} \equiv \hat{R}_{\gamma\beta\rho\lambda} + g_{\alpha\mu} (W_{\gamma\rho}^{\mu} W_{\beta\lambda}^{\alpha} - W_{\gamma\lambda}^{\mu} W_{\beta\rho}^{\alpha}) + \omega_{\lambda} \omega_{[\beta} g_{\rho\gamma]} + g_{\rho[\beta} \hat{\nabla}_{\lambda} \omega_{\gamma]} - \\ - \omega_{\rho} \omega_{[\beta} g_{\lambda\gamma]} - g_{\lambda[\beta} \hat{\nabla}_{\rho} \omega_{\gamma]} = -A_{\beta\gamma\rho\lambda} . \quad (\text{A.9})$$

Podemos, agora, obter a 1.54 a partir da 1.21. Temos

$$R_{\beta\rho\lambda}^{\gamma}V^{\beta} = \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V^{\gamma} - \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V^{\gamma} \Leftrightarrow V^{\beta}R_{\gamma\beta\rho\lambda} = g_{\gamma\beta}\nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V^{\beta} - g_{\gamma\beta}\nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V^{\beta}. \quad (\text{A.10})$$

Reescrevemos

$$\begin{aligned} g_{\gamma\beta}\nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V^{\beta} &= \nabla_{\lambda}(g_{\gamma\beta}\nabla_{\rho}V^{\beta}) - \omega_{\lambda}g_{\gamma\beta}\nabla_{\rho}V^{\beta} \\ &= \nabla_{\lambda}(\nabla_{\rho}V_{\gamma} - \omega_{\rho}g_{\gamma\beta}V^{\beta}) - \omega_{\lambda}g_{\gamma\beta}\nabla_{\rho}V^{\beta} \\ &= \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V_{\gamma} - V^{\beta}\nabla_{\lambda}(\omega_{\rho}g_{\gamma\beta}) - \omega_{\rho}g_{\gamma\beta}\nabla_{\lambda}V^{\beta} - \omega_{\lambda}g_{\gamma\beta}\nabla_{\rho}V^{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e a A.10 fica

$$\begin{aligned} V^{\beta}R_{\gamma\beta\rho\lambda} &= \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V_{\gamma} - \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V_{\gamma} - V^{\beta}\nabla_{\lambda}(\omega_{\rho}g_{\gamma\beta}) + V^{\beta}\nabla_{\rho}(\omega_{\lambda}g_{\gamma\beta}) \\ &= \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V_{\gamma} - \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V_{\gamma} - V^{\beta}\omega_{\rho}\omega_{\lambda}g_{\gamma\beta} - V^{\beta}g_{\gamma\beta}\nabla_{\lambda}\omega_{\rho} + V^{\beta}\omega_{\lambda}\omega_{\rho}g_{\gamma\beta} + V^{\beta}g_{\gamma\beta}\nabla_{\rho}\omega_{\lambda} \\ &= \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V_{\gamma} - \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V_{\gamma} + V^{\beta}g_{\gamma\beta}(\nabla_{\rho}\omega_{\lambda} - \nabla_{\lambda}\omega_{\rho}) \\ &= \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V_{\gamma} - \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V_{\gamma} + V^{\beta}g_{\gamma\beta}(\partial_{\rho}\omega_{\lambda} - \partial_{\lambda}\omega_{\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Usando a A.8, temos, então,

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}V_{\gamma} - \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}V_{\gamma} &= V^{\beta}R_{\gamma\beta\rho\lambda} - V^{\beta}g_{\gamma\beta}(\partial_{\rho}\omega_{\lambda} - \partial_{\lambda}\omega_{\rho}) \\ &= V^{\beta}A_{\gamma\beta\rho\lambda} - \frac{1}{2}V^{\beta}g_{\gamma\beta}(\partial_{\rho}\omega_{\lambda} - \partial_{\lambda}\omega_{\rho}) \\ &= -V^{\beta}A_{\beta\gamma\rho\lambda} - \frac{1}{2}V^{\beta}g_{\gamma\beta}(\partial_{\rho}\omega_{\lambda} - \partial_{\lambda}\omega_{\rho}) = -V^{\beta}R_{\beta\gamma\rho\lambda} \\ &= -R_{\gamma\rho\lambda}^{\beta}V_{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Assim como para seu equivalente riemanniano, apesar das simetrias dos índices do tensor de Riemann não serem preservadas.

Vamos, agora, decompor o tensor  $A_{\gamma\beta\rho\lambda}$  nas partes que preservam a simetria pela troca do primeiro com o segundo par de índices. Para isso, vamos definir

$$A_{\gamma\beta\rho\lambda}^1 \equiv g_{\alpha\mu} (W_{\gamma\rho}^\mu W_{\beta\lambda}^\alpha - W_{\gamma\lambda}^\mu W_{\beta\rho}^\alpha), \quad (\text{A.14})$$

$$A_{\gamma\beta\rho\lambda}^2 \equiv \omega_\lambda \omega_{[\beta} g_{\rho\gamma]} - \omega_\rho \omega_{[\beta} g_{\lambda\gamma]}, \quad (\text{A.15})$$

$$A_{\gamma\beta\rho\lambda}^3 \equiv g_{\rho[\beta} \hat{\nabla}_\lambda \omega_{\gamma]} - g_{\lambda[\beta} \hat{\nabla}_\rho \omega_{\gamma]}, \quad (\text{A.16})$$

$$\therefore A_{\gamma\beta\rho\lambda} = \hat{R}_{\gamma\beta\rho\lambda} + A_{\gamma\beta\rho\lambda}^1 + A_{\gamma\beta\rho\lambda}^2 + A_{\gamma\beta\rho\lambda}^3. \quad (\text{A.17})$$

Pode-se mostrar facilmente que

$$A_{\gamma\beta\rho\lambda}^1 = A_{\rho\lambda\gamma\beta}^1, \quad (\text{A.18})$$

$$A_{\gamma\beta\rho\lambda}^2 = A_{\rho\lambda\gamma\beta}^2. \quad (\text{A.19})$$

Assim, temos o tensor de Riemann decomposto como

$$R_{\gamma\beta\rho\lambda} = A_{\gamma\beta\rho\lambda}^S + A_{\gamma\beta\rho\lambda}^3 + \frac{1}{2} g_{\beta\gamma} (\partial_\rho \omega_\lambda - \partial_\lambda \omega_\rho) \quad (\text{A.20})$$

$$A_{\gamma\beta\rho\lambda}^S \equiv \hat{R}_{\gamma\beta\rho\lambda} + A_{\gamma\beta\rho\lambda}^1 + A_{\gamma\beta\rho\lambda}^2 = A_{\rho\lambda\gamma\beta}^S. \quad (\text{A.21})$$

No caso em que  $\omega_\mu = \partial_\mu \omega$  (WIST),  $A_{\gamma\beta\rho\lambda}^3 = A_{\rho\lambda\gamma\beta}^3$  e as simetrias do tensor de  $R_{\gamma\beta\rho\lambda}$  são exatamente as mesmas do seu equivalente riemanniano. Isto é,

$$R_{\gamma\beta\rho\lambda} = A_{\gamma\beta\rho\lambda}^S + A_{\gamma\beta\rho\lambda}^3 = -R_{\gamma\beta\lambda\rho} = -R_{\beta\gamma\rho\lambda} = R_{\rho\lambda\gamma\beta}. \quad (\text{WIST}) \quad (\text{A.22})$$

## ***APÊNDICE B – Aceleração relativa entre partículas vizinhas***

Para obtermos a aceleração relativa entre as partículas vizinhas de uma congruência de curvas, apliquemos o operador  $\frac{D}{D\tau}$  na 1.81 e depois façamos a projeção. Temos

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) &= \frac{D}{D\tau} [h_\beta^\alpha h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma] \\
 &= (h_\beta^\alpha)^\cdot h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma + h_\beta^\alpha (h_\delta^\lambda)^\cdot (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma + \\
 &\quad + h_\beta^\alpha h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta)^\cdot h_\gamma^\delta Z^\gamma + h_\beta^\alpha h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) (h_\gamma^\delta)^\cdot Z^\gamma + \\
 &\quad + h_\beta^\alpha h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta \dot{Z}^\gamma. \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

Antes de simplificar os diversos termos que aparecem nesta expressão, notemos que, das 1.43 e 1.44, temos:

$$u_\alpha \nabla_\beta u^\alpha = 0, \tag{B.2}$$

$$u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = e^\omega \omega_\beta = e^\omega \partial_\beta \omega = \partial_\beta (e^\omega). \tag{B.3}$$

Com isso, podemos, agora, calcular cada um dos termos de B.1:

$$\begin{aligned}
 (h_\beta^\alpha)^\cdot h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma &= - \left[ e^{-\omega} u^\alpha \dot{u}_\beta + u_\beta (e^{-\omega} u^\alpha)^\cdot \right] h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma \\
 &= -e^{-\omega} h_\delta^\lambda u^\alpha \dot{u}_\beta (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma - (e^{-\omega} u^\alpha)^\cdot h_\delta^\lambda \underbrace{(u_\beta \nabla_\lambda u^\beta)}_{=0} h_\gamma^\delta Z^\gamma \\
 &= -e^{-\omega} u^\alpha \dot{u}_\beta h_\delta^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) h_\gamma^\delta Z^\gamma, \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

onde estamos denotando  $\dot{u}_\beta \equiv u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta \neq g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha$ .

$$\begin{aligned}
h_{\beta}^{\alpha} (h_{\delta}^{\lambda})^{\cdot} (\nabla_{\lambda} u^{\beta}) h_{\gamma}^{\delta} Z^{\gamma} &= -h_{\beta}^{\alpha} \left[ e^{-\omega} u^{\lambda} \dot{u}_{\delta} + u_{\delta} (e^{-\omega} u^{\lambda})^{\cdot} \right] (\nabla_{\lambda} u^{\beta}) h_{\gamma}^{\delta} Z^{\gamma} \\
&= -e^{-\omega} h_{\beta}^{\alpha} \dot{u}_{\delta} \dot{u}^{\beta} h_{\gamma}^{\delta} Z^{\gamma};
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
h_{\beta}^{\alpha} h_{\delta}^{\lambda} (\nabla_{\lambda} u^{\beta})^{\cdot} h_{\gamma}^{\delta} Z^{\gamma} &= h_{\beta}^{\alpha} u^{\delta} (\nabla_{\delta} \nabla_{\lambda} u^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} \\
&= h_{\beta}^{\alpha} u^{\delta} \left( R_{\rho\lambda\delta}^{\beta} u^{\rho} + \nabla_{\lambda} \nabla_{\delta} u^{\beta} \right) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

onde foi usada a definição do tensor de Riemann 1.21. Nesta expressão, temos

$$\begin{aligned}
u^{\delta} (\nabla_{\lambda} \nabla_{\delta} u^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} &= \nabla_{\lambda} (u^{\delta} \nabla_{\delta} u^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} - (\nabla_{\lambda} u^{\delta}) (\nabla_{\delta} u^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} \\
&= (\nabla_{\lambda} \dot{u}^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} - Z^{\lambda} (\nabla_{\lambda} u^{\delta}) (\nabla_{\delta} u^{\beta}) + e^{-\omega} (\nabla_{\lambda} u^{\delta}) (\nabla_{\delta} u^{\beta}) u^{\lambda} u_{\gamma} Z^{\gamma} \\
&= (\nabla_{\lambda} \dot{u}^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} - u^{\lambda} (\nabla_{\lambda} Z^{\delta}) (\nabla_{\delta} u^{\beta}) + e^{-\omega} \dot{u}^{\delta} (\nabla_{\delta} u^{\beta}) u_{\gamma} Z^{\gamma} \\
&= (\nabla_{\lambda} \dot{u}^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} - \dot{Z}^{\delta} (\nabla_{\delta} u^{\beta}) + e^{-\omega} \dot{u}^{\delta} (\nabla_{\delta} u^{\beta}) u_{\gamma} Z^{\gamma},
\end{aligned} \tag{B.7}$$

onde foi usada a 1.78 na passagem da segunda para a terceira igualdade. Obtemos, assim, para a B.6,

$$\begin{aligned}
h_{\beta}^{\alpha} h_{\delta}^{\lambda} (\nabla_{\lambda} u^{\beta})^{\cdot} h_{\gamma}^{\delta} Z^{\gamma} &= h_{\beta}^{\alpha} \left[ (\nabla_{\lambda} \dot{u}^{\beta}) h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma} - \dot{Z}^{\delta} (\nabla_{\delta} u^{\beta}) + e^{-\omega} \dot{u}^{\delta} (\nabla_{\delta} u^{\beta}) u_{\gamma} Z^{\gamma} \right] + \\
&\quad + h_{\beta}^{\alpha} R_{\rho\lambda\delta}^{\beta} u^{\rho} u^{\delta} h_{\gamma}^{\lambda} Z^{\gamma}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Para o quarto termo da B.1, temos:

$$\begin{aligned}
h_{\beta}^{\alpha} h_{\delta}^{\lambda} (\nabla_{\lambda} u^{\beta}) (h_{\gamma}^{\delta})^{\cdot} Z^{\gamma} &= -h_{\beta}^{\alpha} h_{\delta}^{\lambda} (\nabla_{\lambda} u^{\beta}) \left[ \dot{u}^{\delta} e^{-\omega} u_{\gamma} + u^{\delta} (e^{-\omega} u_{\gamma})^{\cdot} \right] Z^{\gamma} \\
&= -e^{-\omega} h_{\beta}^{\alpha} (\dot{u}^{\lambda} - e^{-\omega} u^{\lambda} u_{\delta} u^{\rho} \nabla_{\rho} u^{\delta}) u_{\gamma} Z^{\gamma} \nabla_{\lambda} u^{\beta} \\
&= -e^{-\omega} h_{\beta}^{\alpha} \dot{u}^{\lambda} u_{\gamma} Z^{\gamma} \nabla_{\lambda} u^{\beta},
\end{aligned} \tag{B.9}$$

e, para o último, reescrevemos  $h_{\delta}^{\lambda} (\nabla_{\lambda} u^{\beta}) h_{\gamma}^{\delta} \dot{Z}^{\gamma}$  como

$$\begin{aligned}
h_\gamma^\lambda (\nabla_\lambda u^\beta) \dot{Z}^\gamma &= (\nabla_\lambda u^\beta) \dot{Z}^\lambda - u^\lambda u_\gamma (\nabla_\lambda u^\beta) \dot{Z}^\gamma = \\
&= (\nabla_\lambda u^\beta) \dot{Z}^\lambda - u_\gamma \dot{u}^\beta u^\alpha \nabla_\alpha Z^\gamma = (\nabla_\lambda u^\beta) \dot{Z}^\lambda - u_\gamma \dot{u}^\beta Z^\alpha \nabla_\alpha u^\gamma = \\
&= (\nabla_\lambda u^\beta) \dot{Z}^\lambda .
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Somando todos os termos, obtemos, depois de simplificar,

$$\frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) = \left[ -e^{-\omega} u^\alpha \dot{u}_\beta (\nabla_\delta u^\beta) + h_\beta^\alpha \left( -e^{-\omega} \dot{u}_\delta \dot{u}^\beta + \nabla_\delta \dot{u}^\beta + R_{\rho\delta\lambda}^\beta u^\rho u^\lambda \right) \right] h_\gamma^\delta Z^\gamma . \tag{B.11}$$

Fazendo a projeção no espaço perpendicular a  $u^\alpha$ , obtemos

$$\perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) = h_\beta^\alpha h_\gamma^\lambda \left[ R_{\rho\lambda\delta}^\beta u^\rho u^\delta + \nabla_\lambda \dot{u}^\beta - e^{-\omega} \dot{u}_\lambda \dot{u}^\beta \right] Z^\gamma , \tag{B.12}$$

que dá a aceleração relativa entre duas curvas vizinhas numa congruência.

## *APÊNDICE C – Cálculo explícito da invariância do redshift*

Na seção 3.4 foi obtido o *redshift* devido a variação do fator de escala num modelo cosmológico de FLRW, no calibre de Einstein, como sendo o mesmo para os três tipos de seção espacial. Esses modelos, sendo conformalmente planos, admitem um sistema de coordenadas em que são descritos por uma métrica consistindo numa função escalar multiplicando a de Minkowski. Estando, então, nesse sistema de coordenadas, podemos efetuar a transformação de calibre da nossa geometria e levar a métrica curva de FLRW na plana da relatividade especial. O campo escalar geométrico, que antes era nulo, passa a ter uma dependência espaço-temporal e, em virtude da invariância de calibre do *redshift*, devemos ter preservados os mesmos resultados. Este campo escalar seria, portanto, inteiramente responsável pelo efeito.

As transformações de coordenadas que levam a métrica de FLRW 3.40 na de Minkowski multiplicada por um fator conforme dependem da seção espacial considerada e, portanto, faremos o tratamento separadamente para cada caso. Exibiremos a transformação de coordenadas mencionada para cada um deles assim como obteremos as expressões para a velocidade do observador/emissor e do vetor de propagação do raio luminoso no novo sistema de coordenadas. Feito isso, faremos a transformação de calibre e verificaremos que esses vetores, de fato, transformam-se como colocado no final da seção 3.3. Com suas novas expressões, reobteremos o mesmo valor do calibre de Einstein para o *redshift* nos três casos de seção espacial.

### **C.1 Caso plano**

Para a transformação de coordenadas mencionada acima, queremos que ela permita a igualdade

$$ds^2 = d\eta^2 - a^2(\eta) [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2] = e^{-\Lambda(t)} [dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2]. \quad (\text{C.1})$$

Isto se consegue fazendo

$$dt = \frac{d\eta}{a(\eta)}, \quad (\text{C.2})$$

$$r = \rho, \quad (\text{C.3})$$

$$e^{-\Lambda(t)} = A^2(t) \quad (A \equiv a \circ \eta). \quad (\text{C.4})$$

Estas relações nos dão os seguintes elementos da matriz de transformação:

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{a(\eta)}, \quad \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \rho} = 1. \quad (\text{C.6})$$

Para sua inversa, temos,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = A(t), \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = 1. \quad (\text{C.8})$$

A partir delas, a velocidade do observador/emissor,  $u^\alpha$ , dado pela equação 3.41, e do vetor de propagação,  $k^\alpha$ , dado pela 3.42, escrevem-se, nessas novas coordenadas como

$$u'^\alpha = \left( \frac{1}{a(\eta)}, 0, 0, 0 \right) \Leftrightarrow u'_\alpha = (a(\eta), 0, 0, 0), \quad (\text{C.9})$$

$$k'^\alpha = \frac{1}{a^2(\eta)} (1, \pm 1, 0, 0) \Leftrightarrow k'_\alpha = (1, \mp 1, 0, 0). \quad (\text{C.10})$$

Após efetuarmos a transformação de calibre, devemos ter, de acordo com as 3.31 e 3.32, e considerando a C.4:

$$u'^{\alpha} \rightarrow U'^{\alpha} = (e^{\Lambda(t)/2}, 0, 0, 0) \Leftrightarrow u'_{\alpha} \rightarrow U'_{\alpha} = (e^{\Lambda(t)/2}, 0, 0, 0), \quad (\text{C.11})$$

$$k'^{\alpha} \rightarrow K'^{\alpha} = (1, \pm 1, 0, 0) \Leftrightarrow k'_{\alpha} \rightarrow K'_{\alpha} = (1, \mp 1, 0, 0). \quad (\text{C.12})$$

Dada a invariância de calibre da equação da geodésica para  $u^{\alpha}$ , 1.48, e da equivalente riemanniana para o vetor  $k^{\alpha}$ , 3.21, eles ainda devem obedecer as equações

$$\dot{U}'^{\alpha} = U'^{\beta} \nabla_{\beta} U'^{\alpha} = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$K'^{\alpha} \hat{\nabla}_{\alpha} K'^{\beta} = 0. \quad (\text{C.14})$$

A segunda delas é trivial de verificar, pois sendo a conexão riemanniana escrita, agora, com a métrica de Minkowski, ela se anula e a equação consiste apenas na contração de  $K'^{\alpha}$  com suas derivadas parciais. Sendo um vetor constante, o resultado não poderia ser outro. Para a primeira delas, basta perceber que nem a conexão nem a velocidade se alteram pela transformação. O resultado deve seguir necessariamente.

Vemos, então, que após a transformação de calibre, obtivemos novos vetores correspondendo a velocidades de observadores/emissores e de propagação de raios luminosos que, de fato, são dados pelas transformações obtidas no final da seção 3.3. A verificação da invariância de calibre do *redshift*, quando calculado através da 3.23, é imediata.

Para a expressão 3.29, notemos que, da 1.93, podemos escrever

$$\theta_{\alpha\beta} = \hat{\theta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} u^{\gamma} \omega_{\gamma}. \quad (\text{C.15})$$

A partir do novo operador de projeção transformado e usando a C.11, temos  $\hat{\theta}_{\alpha\beta} = 0$ . Portanto, ficamos com

$$\theta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} U^{\gamma} \partial_{\gamma} \Lambda. \quad (\text{C.16})$$

A transformação do vetor  $n^{\alpha}$ , dado pela 3.24, por sua vez, nos dá para a 3.29:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{e^{-\Lambda}}{2} (U^{\alpha} \partial_{\alpha} \Lambda) U_{\beta} dx'^{\beta} = -\frac{e^{-\Lambda}}{2} \left( e^{\frac{\Lambda}{2}} \frac{d\Lambda(t)}{dt} \right) e^{\Lambda/2} dt = -\frac{1}{2} d\Lambda. \quad (\text{C.17})$$

Substituindo a C.4, nesta, obtemos

$$d(\ln \lambda) = d(\ln A) , \quad (\text{C.18})$$

dando, novamente, para o *redshift*:

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{A(t_o)}{A(t_e)} = \frac{a(\eta_o)}{a(\eta_e)} , \quad (\text{C.19})$$

como esperávamos.

## C.2 Caso hiperbólico

Neste caso, queremos obter, por uma transformação de coordenadas, a igualdade

$$ds^2 = d\eta^2 - a^2(\eta) [d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega^2] = e^{-\Lambda(\eta(t,r))} [dt^2 - dr^2 - r^2d\Omega^2] . \quad (\text{C.20})$$

Isto se consegue fazendo:

$$r = e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} a(\eta) \sinh(\rho) , \quad (\text{C.21})$$

$$t = e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} a(\eta) \cosh(\rho) , \quad (\text{C.22})$$

ou

$$\rho = \text{atgh} \left( \frac{r}{t} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t+r}{t-r} \right) , \quad (\text{C.23})$$

$$e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} a(\eta) = \sqrt{t^2 - r^2} . \quad (\text{C.24})$$

Com a imposição adicional que

$$\frac{d\Lambda(\eta)}{d\eta} = -\frac{2}{a(\eta)} \frac{d}{d\eta} [a(\eta) + \sigma_0 \eta] \Leftrightarrow \frac{d}{d\eta} \left[ e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} a(\eta) \right] = -\sigma_0 e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} , \quad (\text{C.25})$$

onde  $\sigma_0 = \pm 1$ . Em outras ocasiões mais adiante, teremos novas arbitrariedades de sinais

nas expressões usadas. Portanto, denotaremos-las por  $\sigma_\alpha = \pm 1$  ( $\alpha = 0, \dots, 3$ ), onde cada uma delas pode assumir seus valores independentemente umas das outras.

Para os elementos da matriz de transformação, temos

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = -\sigma_0 e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} \cosh(\rho) = -\sigma_0 \frac{t}{a(\eta)}, \quad \frac{\partial t}{\partial \rho} = e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} a(\eta) \sinh(\rho) = r, \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = -\sigma_0 e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} \sinh(\rho) = -\sigma_0 \frac{r}{a(\eta)}, \quad \frac{\partial r}{\partial \rho} = e^{\frac{\Lambda(\eta)}{2}} a(\eta) \cosh(\rho) = t, \quad (\text{C.27})$$

onde foi usada a C.25 no cálculo das derivadas com respeito a  $\eta$ . Para a matriz inversa, temos os elementos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\sigma_0 \frac{t}{e^{\Lambda(\eta)} a(\eta)} = -\sigma_0 \frac{a(\eta)t}{t^2 - r^2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \sigma_0 \frac{r}{e^{\Lambda(\eta)} a(\eta)} = \sigma_0 \frac{a(\eta)r}{t^2 - r^2}, \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{r}{t^2 - r^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{t}{t^2 - r^2}, \quad (\text{C.29})$$

em que, para o cálculo das derivadas de  $\eta$ , partiu-se das C.24 e C.25, onde temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{\frac{\Lambda}{2}} a \right] = \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \underbrace{\frac{d}{d\eta} \left[ e^{\frac{\Lambda}{2}} a \right]}_{=-\sigma_0 e^{\frac{\Lambda}{2}}} \frac{\partial \eta}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\sigma_0 \frac{e^{-\frac{\Lambda}{2}} t}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (\text{C.30})$$

E, analogamente, foi feito para  $\frac{\partial \eta}{\partial r}$ .

Com eles, os vetores  $u^\alpha$  e  $k^\alpha$ , nessas novas coordenadas, ficam:

$$u^\alpha = -\sigma_0 \frac{e^{\frac{\Lambda}{2}}}{\sqrt{t^2 - r^2}}(t, r, 0, 0) \Leftrightarrow u'_\alpha = -\sigma_0 \frac{e^{-\frac{\Lambda}{2}}}{\sqrt{t^2 - r^2}}(t, -r, 0, 0), \quad (\text{C.31})$$

$$k'^\alpha = \frac{1}{a^2}(-\sigma_0 t + \sigma_1 r, -\sigma_0 r + \sigma_1 t, 0, 0) \Leftrightarrow k'_\alpha = \frac{e^{-\Lambda}}{a^2}(-\sigma_0 t + \sigma_1 r, \sigma_0 r - \sigma_1 t, 0, 0). \quad (\text{C.32})$$

Onde  $\sigma_1$  corresponde ao sinal escolhido para  $k^\alpha$  em 3.42.

Delas, após efetuarmos a transformação de calibre, devemos ter:

$$u'^{\alpha} \rightarrow U'^{\alpha} = -\sigma_0 \frac{e^{\frac{\Lambda}{2}}}{\sqrt{t^2 - r^2}}(t, r, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad u'_{\alpha} \rightarrow U'_{\alpha} = -\sigma_0 \frac{e^{\frac{\Lambda}{2}}}{\sqrt{t^2 - r^2}}(t, -r, 0, 0), \quad (\text{C.33})$$

$$\begin{aligned} k'^{\alpha} \rightarrow K'^{\alpha} &= \frac{1}{t^2 - r^2}(-\sigma_0 t + \sigma_1 r, -\sigma_0 r + \sigma_1 t, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad k'_{\alpha} \rightarrow K'_{\alpha} = \frac{1}{t^2 - r^2}(-\sigma_0 t + \sigma_1 r, \sigma_0 r - \sigma_1 t, 0, 0). \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Para verificarmos se este novo vetor  $U^{\alpha}$  ainda corresponde a uma geodésica na nova métrica transformada  $(\eta_{\mu\nu})$ , notemos que

$$U'^{\alpha} \nabla_{\alpha} U'^{\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + t \frac{\partial \Lambda}{\partial r} = \frac{d\Lambda}{d\eta} \left[ r \frac{\partial \eta}{\partial t} + t \frac{\partial \eta}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{C.35})$$

o que é verdadeiro em virtude da C.28.

Para verificar que o novo vetor  $K'^{\alpha}$  ainda obedece a equação C.14, consideremos todas as possibilidades de sinais arbitrários em sua expressão. Feito isso, vemos que ele pode ser reescrito como

$$K'^{\alpha} = \frac{\sigma_2}{t + \sigma_3 r}(1, -\sigma_3, 0, 0) \equiv k_{\sigma_2, \sigma_3}(1, -\sigma_3, 0, 0). \quad (\text{C.36})$$

A função  $k_{\sigma_2, \sigma_3}$  definida acima tem como argumento “ $t + \sigma_3 r$ ”, *i.e.*,  $k_{\sigma_2, \sigma_3} = k_{\sigma_2, \sigma_3}(t + \sigma_3 r)$ . Com isso, para que este vetor obedeça a equação da geodésica com a conexão riemanniana, que neste caso se anula, devemos ter:

$$\frac{\partial k_{\sigma_2, \sigma_3}}{\partial t} - \sigma_3 \frac{\partial k_{\sigma_2, \sigma_3}}{\partial r} = 0, \quad (\text{C.37})$$

o que pode ser facilmente verificado.

Voltando para sua expressão dada pela C.34, construímos o vetor  $\bar{n}^{\alpha}$  dado pela transformação de  $n^{\alpha}$  e, com ele, calculamos  $\theta_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha} \bar{n}^{\beta}$  que, depois de simplificado, fica

$$\begin{aligned}
\theta_{\alpha\beta}\bar{n}^\alpha\bar{n}^\beta &= \sigma_0 \frac{e^{-\frac{\Lambda}{2}}}{\sqrt{t^2 - r^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ t \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + r \frac{\partial\Lambda}{\partial r} \right] \right\} = \\
&= \sigma_0 \frac{e^{-\Lambda}}{a(\eta)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{d\Lambda}{d\eta} \left[ t \frac{\partial\eta}{\partial t} + r \frac{\partial\eta}{\partial r} \right] \right\} = \\
&= \sigma_0 \frac{e^{-\Lambda}}{a(\eta)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{d\Lambda}{d\eta} \left[ -\sigma_0 \frac{at^2}{t^2 - r^2} + \sigma_0 \frac{ar^2}{t^2 - r^2} \right] \right\} = \\
&= \sigma_0 \frac{e^{-\Lambda}}{a(\eta)} \left\{ 1 + \sigma_0 \frac{a(\eta)}{2} \frac{d\Lambda}{d\eta} \right\}, \tag{C.38}
\end{aligned}$$

onde foram usadas as C.24 e C.28. A partir da C.25, ficamos com:

$$\theta_{\alpha\beta}\bar{n}^\alpha\bar{n}^\beta = \sigma_0 \frac{e^{-\Lambda}}{a(\eta)} \left\{ 1 - \sigma_0 \left[ \frac{da(\eta)}{d\eta} + \sigma_0 \right] \right\} = -\frac{1}{a(\eta)} \frac{da(\eta)}{d\eta} e^{-\Lambda}, \tag{C.39}$$

em pleno acordo com as 3.36 e 3.44.

Sendo  $V$  o novo parâmetro  $v$  transformado, temos, agora

$$\begin{aligned}
U'_\alpha K'^\alpha dV &= U'_\alpha \frac{dx'^\alpha}{dV} dV = U'_\alpha dx'^\alpha = -\sigma_0 \frac{e^{\frac{\Lambda}{2}}}{\sqrt{t^2 - r^2}} (tdt - r dr) = \\
&= -\sigma_0 e^{\frac{\Lambda}{2}} d\sqrt{t^2 - r^2} = e^\Lambda d\eta; \tag{C.40}
\end{aligned}$$

também dentro do esperado e onde foram usadas as C.24 e C.25.

Com essas expressões, a 3.29 volta a nos dar a 3.45 e temos o resultado desejado.

### C.3 Caso esférico

Para o caso esférico, basta fazermos a mudança:

$$a(\eta) \rightarrow \pm ia(\eta), \tag{C.41}$$

$$\rho \rightarrow \pm i\rho, \tag{C.42}$$

na transformação usada no caso hiperbólico e seguirmos o tratamento da mesma forma. O resultado final, 3.45, se repete.

## *Referências*

- 1 EUCLIDES. *Euclid's Elements of Geometry*. 2. ed. Disponibilizado na Internet por: Richard Fitzpatrick, 2008. Edição bilíngue contendo o texto em grego de J. L. Heiberg (1883–1885) e a tradução para o inglês feita por Richard Fitzpatrick.
- 2 ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to general relativity*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1975.
- 3 EHLERS, J.; PIRANI, F. A. E.; SCHILD, A. The geometry of free fall and light propagation. In: O'RAIFEARTAIGH, L. (Ed.). *General Relativity – Papers in Honour of J. L. Synge*. Oxford: Clarendon Press, 1972. p. 63–84.
- 4 WOODHOUSE, N. M. J. The differentiable and causal structures of space-time. *Journal of Mathematical Physics*, v. 14, n. 4, p. 495–501, ago. 1973.
- 5 WEYL, H. *Space, Time, Matter*. 4. ed. New York: Dover Publications, Inc., 1961.
- 6 AUDRETSCH, J. Riemannian structure of space-time as a consequence of quantum mechanics. *Physical Review D*, v. 27, n. 12, p. 2872–2884, jun. 1983.
- 7 NOVELLO, M. Dirac's equation in a Weyl space. *Il Nuovo Cimento A*, v. 64, n. 4, p. 954–960, dez. 1969.
- 8 NOVELLO, M.; HEINTZMANN, H. Weyl integrable space-time: A model of our cosmos? *Physics Letters A*, v. 98, n. 1-2, p. 10–11, out. 1983.
- 9 OLIVEIRA, L. A. R. de. *Acoplamentos não-mínimos com a gravitação e espaços de Weyl integráveis*. Tese (Doutorado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1988.
- 10 ALVES, G. A. *Fótons não lineares: uma solução cosmológica não singular*. Dissertação (Mestrado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1986.
- 11 NOVELLO, M. et al. Geometrized instantons and the creation of the universe. *International Journal of Modern Physics D*, v. 1, n. 3-4, p. 641–677, dez. 1992.
- 12 KONSTANTINOV, M. Y.; MELNIKOV, V.; NOVELLO, M. Numerical investigation of integrable Weyl geometry in multidimensional cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, v. 4, n. 3, p. 339–355, jun. 1995.
- 13 SALIM, J. M.; SAUTÚ, S. L. Gravitational theory in Weyl integrable space-time. *Classical and Quantum Gravity*, v. 13, n. 3, p. 353–360, mar. 1996.
- 14 SAUTÚ, S. L. *Teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável*. Tese (Doutorado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1997.

- 15 SALIM, J. M.; SAUTÚ, S. L. Nonsingular inflationary cosmologies in Weyl integrable space-time. *Classical and Quantum Gravity*, v. 14, n. 10, p. 2833–2843, out. 1997.
- 16 SALIM, J. M.; FABRIS, J. C.; SAUTÚ, S. L. Inflationary cosmological solutions in Weyl integrable geometry. *Modern Physics Letters A*, v. 13, n. 12, p. 953–959, abr. 1998.
- 17 SALIM, J. M.; SAUTÚ, S. L. Spherically symmetric static solutions in Weyl integrable spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, v. 15, n. 1, p. 203–214, jan. 1998.
- 18 SALIM, J. M.; SAUTÚ, S. L. Gravitational collapse in Weyl integrable space-times. *Classical and Quantum Gravity*, v. 16, n. 10, p. 3281–3295, out. 1999.
- 19 FALCIANO, F. T.; NOVELLO, M.; SALIM, J. M. Geometrizing relativistic quantum mechanics. *Foundations of Physics*, v. 40, n. 12, p. 1885–1901, dez. 2010.
- 20 NOVELLO, M.; SALIM, J. M.; FALCIANO, F. T. On a geometrical description of quantum mechanics. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, v. 8, n. 1, p. 87–98, fev. 2011.
- 21 HOYLE, F.; NARLIKAR, J. V. Conformal invariance in physics and cosmology. In: REINES, F. (Ed.). *Cosmology, fusion and other matters: George Gamow memorial volume*. Boulder: Colorado Associated Universities Press, 1972.
- 22 HOYLE, F.; NARLIKAR, J. V. *Action-at-a-distance in Physics and Cosmology*. San Francisco: W. H. Freeman, 1974.
- 23 BEKENSTEIN, J. D.; MEISELS, A. Conformal invariance, microscopic physics, and the nature of gravitation. *Physical Review D*, v. 22, n. 6, p. 1313–1324, set. 1980.
- 24 DIRAC, P. A. M. A new basis for cosmology. *Proceedings of the Royal Society*, London, A165, p. 199–208, abr. 1938.
- 25 MARTINS, C. F. *The distribution of the dark matter in galaxies as the imprint of its Nature*. Tese (Doutorado em Física) — International School for Advanced Studies, Trieste, 2008.
- 26 SALUCCI, P.; BURKERT, A. Dark matter scaling relations. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 537, n. 1, p. L9–L12, jul. 2000.
- 27 NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. The structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*, v. 462, n. 2, p. 563–575, maio 1996.
- 28 MILGROM, M. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *The Astrophysical Journal*, v. 270, n. 2, p. 365–370, jul. 1983.
- 29 MILGROM, M. A modification of the newtonian dynamics: Implications for galaxies. *The Astrophysical Journal*, v. 270, n. 2, p. 371–383, jul. 1983.
- 30 MILGROM, M. A modification of the newtonian dynamics: Implications for galaxy systems. *The Astrophysical Journal*, v. 270, n. 2, p. 384–389, jul. 1983.

- 31 FUTAMASE, T.; SCHUTZ, B. F. Newtonian and post-newtonian approximations are asymptotic to general relativity. *Physical Review D*, v. 28, n. 10, p. 2363–2372, nov. 1983.
- 32 BEKENSTEIN, J. D. Relativistic gravitation theory for the modified newtonian dynamics paradigm. *Physical Review D*, v. 70, n. 8, p. 083509–(1–28), out. 2004.
- 33 NARAYAN, R.; BARTELMANN, M. Lectures on gravitational lensing. *SPIRES Conference*, n. C95/12/27, jun. 1996. Apresentado na *13th Jerusalem Winter School In Theoretical Physics: Formation Of Structure In The Universe*, realizada de 27 de dezembro de 1995 à 5 de janeiro de 1996 pela *The Hebrew University of Jerusalem: Inst. Advanced Studies* em Jerusalém, Israel. Versão digital em: arXiv:astro-ph/9606001.
- 34 BARTELMANN, M. Strong and weak lensing by galaxy clusters. In: BOWYER, S.; HWANG, C.-Y. (Ed.). *Matter and Energy in Clusters of Galaxies*. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2003. (ASP Conference Proceedings, v. 301), p. 255–270. Conferência realizada de 23 à 27 de abril de 2002 na National Central University, Chung-Li, Taiwan.
- 35 MASSEY, R.; KITCHING, T.; RICHARD, J. The dark matter of gravitational lensing. *Reports on Progress in Physics*, v. 73, n. 8, p. 086901, ago. 2010.
- 36 METSAEV, R. R.; TSEYTLIN, A. A. Order  $\alpha'$  (two loop) equivalence of the string equations of motion and the sigma model Weyl invariance conditions: Dependence on the dilaton and the antisymmetric tensor. *Nuclear Physics B*, v. 293, p. 385–419, 1987.
- 37 GASPERINI, M.; MAGGIORE, M.; VENEZIANO, G. Towards a non-singular pre-big-bang cosmology. *Nuclear Physics B*, v. 494, n. 1-2, p. 315–328, jun. 1997.
- 38 GASPERINI, M.; GIOVANNINI, M.; VENEZIANO, G. Cosmological perturbations across a curvature bounce. *Nuclear Physics B*, v. 694, n. 1-2, p. 206–238, ago. 2004.
- 39 GASPERINI, M. Late time effects of planck scale cosmology: Dilatonic interpretation of the dark energy field. In: MIELE, G.; LONGO, G. (Ed.). *Thinking, observing and mining the universe: Proceedings*. London: World Scientific, 2004. p. 153–160. Conferência realizada de 22 à 27 de setembro de 2003 em Sorrento, Itália.
- 40 POULIS, F. P. *Buracos de minhoca em modelos de universo eterno*. Dissertação (Mestrado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2007.
- 41 PINTO-NETO, N.; POULIS, F. P.; SALIM, J. M. Bounce and wormholes. *International Journal of Modern Physics A*, v. 24, n. 20-21, p. 4009–4020, ago. 2009.
- 42 ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, v. 14, n. 1, p. 104–118, jan. 1973.
- 43 CHETOUANI, L.; CLÉMENT, G. Geometrical optics in the Ellis geometry. *General Relativity and Gravitation*, v. 16, n. 2, p. 111–119, fev. 1984.
- 44 CLÉMENT, G. Scattering of klein-gordon and maxwell waves by an Ellis geometry. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 23, n. 4, p. 335–350, abr. 1984.

- 45 STAROBINSKII, A. A. Relict gravitation radiation spectrum and initial state of the universe. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 30, n. 11, p. 682–685, dez. 1979.
- 46 MUKHANOV, V. F.; CHIBISOV, G. V. Quantum fluctuations and a nonsingular universe. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 33, n. 10, p. 532–535, maio 1981.
- 47 GUTH, A. H. The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, v. 23, n. 2, p. 347–356, jan. 1981.
- 48 LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, v. 108, n. 6, p. 389–393, fev. 1982.
- 49 FALCIANO, F. T. *Modelos de universo não singular com campo escalar*. Tese (Doutorado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2008.
- 50 PEREZ, R. S. *Condições iniciais para inflação cosmológica*. Tese (Doutorado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2011.
- 51 BARCELÓ, C.; VISSER, M. Twilight for the energy conditions? *International Journal of Modern Physics D*, v. 11, n. 10, p. 1553–1560, dez. 2002.
- 52 WATSON, S. et al. Inflation without inflaton(s). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 11, p. 017, nov. 2007.
- 53 FARAONI, V.  $f(r)$  gravity: Successes and challenges. *SPIRES Conference*, n. C08/09/22.7, out. 2008. Apresentado na *18th SIGRAV Conference*, realizada de 22 à 25 de setembro de 2008 em Cosenza, Itália. Versão digital em: arXiv:0810.2602 [gr-qc].
- 54 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V.  $f(r)$  theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, v. 82, n. 1, p. 451–497, mar. 2010.
- 55 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S.  $f(r)$  theories. *Living Reviews in Relativity*, v. 13, n. 3, jun. 2010.
- 56 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 4. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003. (Course of theoretical physics, v. 2).
- 57 ROLL, P. G.; KROTKOV, R.; DICKE, R. H. The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, v. 26, n. 3, p. 442–517, fev. 1964.
- 58 WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1984.
- 59 BLOKHINTSEV, D. I. *Space and Time in the Microworld*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1973.
- 60 GRAVES, J. C. *The Conceptual Foundations of Contemporary Relativity Theory*. Massachusetts: The MIT press, 1971.
- 61 CHANDRA, R. Clocks in Weyl space-time. *General Relativity and Gravitation*, v. 16, n. 11, p. 1023–1030, nov. 1984.

- 62 PERLICK, V. Characterization of standard clocks by means of light rays and freely falling particles. *General Relativity and Gravitation*, v. 19, n. 11, p. 1059–1073, nov. 1987.
- 63 SALIM, J. M. *Monopólos Gravitacionais*. Dissertação (Mestrado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1976.
- 64 POULIS, F. P. *Formulação geométrica para o MOND e teoria invariante conforme da gravitação*. dez. 2010. Apresentado na IV Reunião Anual do ICRA. Evento realizado nos dias 6 e 7 de dezembro de 2010 no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brasil.
- 65 POULIS, F. P.; SALIM, J. M. Weyl geometry as characterization of space-time. In: MOSTEPANENKO, V. M.; NOVELLO, M. (Ed.). *The Proceedings of the 8th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology*. Edição virtual: World Scientific Publishing, 2011. (International Journal of Modern Physics: Conference Series, v. 3), p. 87–97. Seminário realizado de 30 de maio à 3 de junho de 2011 no Rio de Janeiro, Brasil.
- 66 ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General relativity and Weyl frames. *International Journal of Modern Physics A*, v. 26, n. 22, p. 3721–3729, set. 2011. Edição especial de artigos selecionados do *8th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology*. O mesmo encontra-se na Ref. 67.
- 67 ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General relativity and Weyl frames. In: MOSTEPANENKO, V. M.; NOVELLO, M. (Ed.). *The Proceedings of the 8th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology*. Edição virtual: World Scientific Publishing, 2011. (International Journal of Modern Physics: Conference Series, v. 3), p. 27–35. Seminário realizado de 30 de maio à 3 de junho de 2011 no Rio de Janeiro, Brasil.
- 68 NOVELLO, M.; SALIM, J. M. Nonlinear photons in the universe. *Physical Review D*, v. 20, n. 2, p. 377–383, jul. 1979.
- 69 ELLIS, G. F. R. Relativistic cosmology. In: SACHS, R. K. (Ed.). *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, course 47: General relativity and cosmology*. New York and London: Academic Press, 1971. p. 104–182. Escola realizada de 30 de junho à 12 de julho de 1969 em Varena, Lago Como, Itália. Reimpresso na Ref. 70.
- 70 ELLIS, G. F. R. Republication of: Relativistic cosmology. *General Relativity and Gravitation*, v. 41, p. 581–660, jan. 2009.
- 71 ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. Conformally flat spacetimes and Weyl frames. *arXiv:1101.5333 [gr-qc]*, jan. 2011.
- 72 SALIM, J. M. Termodinâmica em relatividade geral. In: NOVELLO, M.; PINTO-NETO, N.; BERGLIAFFA, S. E. P. (Ed.). *Programa Mínimo de Cosmologia*. Rio de Janeiro: Jauá Editora, 2010. cap. 4, p. 217–227.
- 73 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Application of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972.

- 74 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid mechanics*. London: Pergamon Press, 1959. (Course of theoretical physics, v. 6).
- 75 WEINBERG, S. Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe. *Astrophysical Journal*, v. 168, p. 175–194, set. 1971.
- 76 ECKART, C. The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid. *Physical Review*, v. 58, n. 10, p. 919–924, nov. 1940.
- 77 CALVÃO, M. O. *A riqueza termodinâmica das cosmologias de Robertson-Walker: uma ópera em três atos*. Tese (Doutorado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1991.
- 78 CALVÃO, M. O.; SALIM, J. M. Extended thermodynamics of Friedmann-Robertson-Walker models in the Landau-Lifshitz frame. *Classical and Quantum Gravity*, v. 9, n. 1, p. 127–135, jan. 1992.
- 79 CALVÃO, M. O. et al. Dissipative cosmology with decaying vacuum energy. *Physical Review D*, v. 45, n. 10, p. 3869–3872, maio 1992.
- 80 OLIVEIRA, H. P. de. *Um estudo em cosmologia e termodinâmica causal*. Dissertação (Mestrado em Física) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1986.
- 81 ISRAEL, W. Nonstationary irreversible thermodynamics: A causal relativistic theory. *Annals of Physics*, v. 100, n. 1–2, p. 310–331, set. 1976.
- 82 NOVELLO, M. Introdução à cosmologia. In: NOVELLO, M.; PINTO-NETO, N.; BERGLIAFFA, S. E. P. (Ed.). *Programa Mínimo de Cosmologia*. Rio de Janeiro: Jauá Editora, 2010. cap. 3, p. 149–215.
- 83 MILGROM, M. Mond—a pedagogical review. *Acta Physica Polonica B*, v. 32, n. 11, p. 3613–3627, nov. 2001.
- 84 SANDERS, R. H.; McGAUGH, S. S. Modified newtonian dynamics as an alternative to dark matter. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 40, p. 263–317, set. 2002.
- 85 SCHUTZ, B. F. *A first course in general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- 86 PERLMUTTER, S. et al. Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. *Nature*, v. 391, p. 51–54, jan. 1998.
- 87 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, maio 1998.
- 88 ROULET, E.; MOLLERACH, S. *Gravitational lensing and microlensing*. New Jersey: World Scientific Publishing Co., 2002.
- 89 AMENDOLA, L.; POLARSKI, D.; TSUJIKAWA, S. Are  $f(r)$  dark energy models cosmologically viable? *Physical Review Letters*, v. 98, n. 13, p. 131302, mar. 2007.