

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS – MCT

**EJEÇÃO DE MASSA EM
PROTO-ESTRELAS DE NÊUTRON
INDUZIDA POR ESCAPE
DE NEUTRINOS**

Luís Gustavo de Almeida

Rio de Janeiro

À Alessandra, ao Júnior, à Carmem, ao João e à Elande

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Sérgio José Barbosa Duarte, por seu apoio, incentivo e (principalmente) paciência constantes para comigo durante as épocas de dificuldades — quando soube me ouvir mesmo quando os problemas iam além do projeto.

Ao meu co-orientador Hilário Antônio Rodrigues Gonçalves do CEFET cuja participação essencial e especial tornou possível este projeto. Com certeza, sem ele teríamos tido muito mais dores de cabeça.

Aos professores Sebastião Alves Dias, José Abdalla Helayël-Neto, Lígia Maria Coelho de Souza Rodrigues, Itzhak Roditi e a todos os outros professores com quem fiz aula no CBPF.

Agradeço também ao amigo das horas incertas, Henrique Monteiro Felício, que muito me incentivou quando entrei para o CBPF.

Aos meus amigos e colegas do CBPF.

À minha orientadora durante a graduação em Astronomia que teve um papel decisivo em minha carreira acadêmica: Professora Sueli Aparecida Guillens.

Aos colegas alunos e professores do Observatório do Valongo que tiveram que me aturar durante a graduação.

Aos amigos e colegas do Alojamento Estudantil da UFRJ que desde a graduação me incentivaram e me apoiaram nos momentos mais difíceis, sem os quais este trabalho com certeza teria sido mais penoso.

À CAPES pelo suporte financeiro parcial dado a este projeto.

Por último, mas não menos importante, aos meus familiares que tanto apoio me deram.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um cálculo hidrodinâmico efetivo para investigar a possibilidade de ejeção de massa durante a fase de resfriamento por neutrinos da proto-estrela de nêutron. Ao se difundirem através do meio denso, os neutrinos transferem momenta às partículas do meio, o que pode induzir a ejeção de massa da proto-estrela de nêutron. Um cálculo dinâmico simplificado é empregado de modo a determinar a quantidade de matéria ejetada e as propriedades do objeto compacto deixado para trás, como um caroço denso remanescente. É provável que a ejeção de massa induzida por neutrinos possa levar à formação direta de uma estrela de quarks pura, i. e., uma estrela compacta composta por matéria de quarks (u, d) ou (u, d, s) desconfinados. Resolvendo a evolução dinâmica do sistema, a energia interna e a pressão do meio são descritas por uma equação de estado que incorpora as fases hadrônica e de quarks, assim como a fase de coexistência entre ambas as fases. As equações de estado desse regime supra-nuclear são apropriadamente conectadas às outras descrevendo diferentes regimes sub-nucleares de densidade. O conjunto de equações de movimento acoplado a um tratamento esquemático para o transporte de neutrinos ao longo do meio denso das camadas é resolvido numericamente para sistemas com massas distintas. A opacidade de neutrinos implementada é obtida de um modelo que cobre a fase mista hadron-quark assim como cada fase pura separadamente.

Palavras-chave: neutrinos — proto-estrela de nêutron

Abstract

In this work we present an effective hydrodynamical calculation to investigate the possibility of mass ejection during the protoneutron star neutrino cooling phase. When diffusing across the dense medium, the neutrinos transfer momenta to the medium particles, which may induce a mass ejection by the protoneutron star. A simplified dynamical calculation is employed in order to determine the amount of matter ejected and the properties of the compact object left behind, as a remnant dense core. It is feasible that the mass ejection induced by neutrinos may lead to the direct formation of a pure quark-star, i. e., a compact star composed by deconfined (u, d) or (u, d, s) quark matter. In solving the dynamical evolution of the system, the internal energy density and pressure of the medium are described by an equation of state which incorporates the quark and hadronic phases as well as the coexisting phase. The equations of state of this supra-nuclear regime is properly linked with others describing the different sub-nuclear regimes of density. The set of equations of motion coupled to a schematic treatment to the neutrino transport along the dense medium of the shells is numerically solved for systems with different masses. The neutrino opacity implemented is taken from a model which covers the mixed hadron-quark phase and for each pure phase separately.

Keywords: neutrinos — protoneutron star

Sumário

Introdução	xii
1 Evolução Estelar e Estrelas de Nêutron	1
1.1 Estágios Iniciais	1
1.1.1 A Fase Pré-Estelar	2
1.1.2 A Estrela Formada	3
1.1.3 O Teorema de Russel-Vogt	4
1.2 Estágios Finais	5
1.2.1 Gigante Vermelha	5
1.2.2 Anã Branca	6
1.2.3 Supernova	7
1.2.4 Estrela de Nêutron	12
1.2.5 Buraco Negro	15
2 Grandezas Associadas ao Transporte de Neutrinos na Matéria Densa	17
2.1 Intensidade–Brilho de Neutrinos	17
2.2 A Intensidade Média	20
2.3 Fluxo	21
2.3.1 O Fluxo Vetorial	22
2.3.2 A Quantidade H_ν	22
2.3.3 Luminosidade	23
2.4 Absorção e Emissão de Neutrinos	23
2.4.1 Absorção	23
2.4.2 Emissão e Emissividade	24
2.4.3 O Coeficiente Microscópico de Absorção	27
2.4.4 A Aproximação de Atmosfera Cinza	28
2.5 Seções de Choque e Taxas de Reações	29
2.6 Processos Fundamentais e a Regra de Ouro de Fermi	31
2.6.1 Regra de Ouro para Decaimentos	32

2.6.2	Regra de Ouro para Espalhamentos Inelásticos	32
2.7	Opacidade de Neutrinos	33
2.8	O Transporte Efetivo de Neutrinos	36
3	Equação de Estado de Meios Estelares Densos Degenerados	37
3.1	Equação de Estado na Aproximação para $T \cong 0$	38
3.2	A Equação de Estado no Regime Subnuclear	40
3.2.1	A Correção Eletrostática	41
3.2.2	Regime Subnuclear sem Nêutrons Livres	42
3.2.3	Regime Subnuclear com Nêutrons Livres	44
3.2.4	A Constituição Bariônica do Meio	50
3.3	A Equação de Estado no Regime Hadrônico	52
3.3.1	O Modelo QHD – I	53
3.3.2	A Aproximação de Campo Médio	56
3.3.3	Modelo de Walecka Não-Linear	61
3.3.4	Hadrodinâmica Quântica – II	62
3.4	O Modelo de Sacola do M.I.T.	66
3.4.1	A Equação de Estado no Regime de Quarks	68
4	A Evolução da Proto-Estrela de Nêutron	71
4.1	A Dinâmica Efetiva de Duas Camadas com Difusão de Neutrinos	72
4.2	As Equações de Movimento	72
5	Difusão de Neutrinos e Luminosidade	78
5.1	Transporte Efetivo de Momenta por Neutrinos	78
5.2	O Acoplamento entre a Dinâmica Efetiva do Meio e a Luminosidade de Neutrinos	79
6	Resultados e Conclusões	88
6.1	A Evolução Dinâmica do Sistema: Efeitos Hidrodinâmicos versus Vento de Neutrinos	88
6.2	A Preparação das Condições Iniciais	89
6.3	Efeitos Hidrodinâmicos Vs Vento de Neutrinos	90
6.3.1	Pressão e Opacidade não-nulas	91
6.3.2	Pressão de Neutrinos nula e Opacidade não-nula	95
6.4	Pressão de Neutrinos não-nula e Opacidade nula	96
6.5	Conclusões	97
6.6	Perspectivas Futuras	98

A O Diagrama H-R	102
A.1 Magnitude, Cor e Luminosidade	102
A.2 Classe Espectral e Cor	104
A.3 O Diagrama Hertzsprung-Russell	105
B Polítropos	107
C A Equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff	112
C.1 A Métrica de Schwarzschild	112
C.2 Potencial Gravitacional e Equilíbrio Hidrostático	114
Referências Bibliográficas	115

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de Diagrama HR. Como vemos, as estrelas se apresentam em grupos diversos, entre os quais o que mais se sobressai é o que chamamos de seqüência principal. Tal nome é uma escolha óbvia quando analisamos o fato de que cerca de 90% das estrelas passam 90% de sua vida nesse grupo. As definições das variáveis utilizadas nos eixos são definidas no Apêndice A.	2
1.2	As camadas do caroco se formam concentricamente formando uma estrutura semelhante à de uma cebola	4
1.3	Curvas de Luz de supernovas de Tipo I e Tipo II	9
1.4	Comparação de curvas de luz de supernovas Tipos II-L e II-P	11
1.5	A frente de recombinação se expande até as camadas mais internas reduzindo a opacidade dessas camadas, permitindo que as mesmas possam ser observadas.	11
1.6	Um pulsar é uma estrela de nêutron cujo eixo de rotação não coincide com seu eixo magnético. A rotação da estrela em alta velocidade somada a esse desalinhamento dos eixos faz com que o sinal recebido seja intermitente, semelhante a um farol piscando, porém em altíssimas velocidades.	13
1.7	Quando uma estrela de nêutron recebe matéria de um disco de acreção, eventualmente atinge-se a temperatura necessária para a ocorrência de reações termonucleares. Durante tais explosões são liberadas grandes quantidades de raios X.	14
2.1	Fluxo de Energia através de uma área ΔA	18
2.2	Fluxo de Energia através de uma área $\Delta A \cos \theta$	19
2.3	O Fluxo de Energia em relação à normal \hat{n}	21
2.4	A intensidade do feixe incidente I_ν sempre sofre alguma redução dI_ν ao atravessar um meio material.	23
2.5	Elemento de volume com massa dm	25
2.6	A intensidade do feixe incidente $I_\nu(0)$ recebe um acréscimo ao atravessar o meio material. O acréscimo é devido à emissão própria do meio.	26

3.1	Equação de estado para diversos regimes de densidade. Na Região I temos a presença de núcleos imersos num gás de elétrons. Na Região II núcleos imersos num gás de elétrons e nêutrons; aqui podemos dividir duas equações de estado diferentes, a linha pontilhada representa a equação de estado com neutrinos confinados enquanto a linha contínua representa a equação sem os neutrinos confinados. Na Região III temos a presença de matéria nuclear. Na Região IV temos a fase com quarks desconfinados.	69
4.1	O modelo de duas camadas. Embora haja transferência de massa entre as camadas, a massa total constante é um vínculo importante do sistema. . .	73
5.1	Gráfico da opacidade versus temperatura. A opacidade foi obtida a partir do modelo proposto na Ref. [45].	82
5.2	Representação de uma casca esférica dentro de uma esfera homogênea. Os neutrinos fluem de dentro do volume da casca em direção à superfície. O número médio de neutrinos que chegam à superfície é diretamente proporcional à probabilidade de um neutrino percorrer a distância $(R_1 - r)$ sem colidir.	83
5.3	Representação de uma casca esférica dentro de uma segunda camada dentro da esfera homogênea. Novamente os neutrinos fluem de dentro do volume da casca em direção à superfície em R_2 . Porém, desta vez o número médio de neutrinos que chegam à superfície em R_2 é diretamente proporcional à probabilidade de um neutrino percorrer a distância $R_2 - r$ sem colidir. . .	85
6.1	A ejeção da segunda camada de cada uma das massas totais consideradas é evidente para o caso em que tomamos $\alpha = 1$. Na Figura (a) vemos que a camada-1 permanece com raio aproximadamente constante ao longo do tempo, sendo também praticamente o mesmo para as três massas consideradas. Já o comportamento dinâmico da camada-2 é dependente da massa total inicial do sistema. Na Figura (b) vemos um detalhe do <i>bounce</i> da camada-2 e podemos observar melhor a curva evolutiva do raio da camada-1 durante a reversão do movimento da camada-2 para cada uma das diferentes massas.	91
6.2	Na Figura (a) vemos a evolução somente das camadas externas para os diferentes sistemas com suas respectivas massas totais. Desta vez utilizamos diversos valores de α . Na Figura (b) vemos o detalhe do <i>bounce</i> da camada-2, observamos que mesmo em escalas de tempo extremamente pequenas os valores escolhidos para α não interferem na reversão do movimento da camada-2 e sua ejeção.	92

6.3	Nas Figuras (a), (b) e (c) temos respectivamente as curvas evolutivas dos caroços de $1.2M_{\odot}$, $1.4M_{\odot}$ e $1.6M_{\odot}$. As curvas para diferentes α 's sempre se sobrepõem, demonstrando que a transferência de massa entre as camadas também é independente de α . A Figura (d) compara a evolução da massa da camada-2, para o caso $\alpha = 1$, dos diferentes sistemas. É interessante o efeito manifesto da não-linearidade das equações de massa que traduzem a evolução do sistema. Observe-se que no início da evolução o sistema de massa total $1.6M_{\odot}$ possui mais massa na camada-2 que o de $1.4M_{\odot}$ (como era de se esperar). Entretanto, $0.1ms$ após o início do escape dos neutrinos esta situação se inverte e o segundo passa a ter mais massa na camada a ser ejetada que o primeiro, para no final apresentarem massas similares.	93
6.4	Na Figura (a) vemos a evolução dos raios das camadas externas das diferentes estrelas de nêutrons consideradas e suas respectivas massas totais, onde utilizamos todos os α 's sobrepostos. Na Figura (b) temos as curvas das massas da camada 2 para cada caroço com os α 's sobrepostos. Novamente concluímos que a variação de α não afeta dinamicamente o sistema.	94
6.5	Na Figura (a) vemos a evolução das massas das camadas externas dos diferentes caroços considerados e suas respectivas massas totais, onde utilizamos $\alpha = 1$. Na Figura (b) temos as curvas das massas da camada 2 para cada caroço com $\alpha = 1$	95
6.6	Na Figura (a) temos a evolução somente das camadas externas dos diferentes caroços considerados e suas respectivas massas totais. Desta vez não precisamos nos preocupar com α , pois a opacidade é muito baixa neste caso e qualquer correção seria imperceptível. Na Figura (b) temos as curvas evolutivas das massas externas. Como vemos, tanto os raios quanto as massas oscilam em torno de valores médios aproximadamente constantes no tempo, ou seja, neste caso o sistema também se mantém em equilíbrio.	96

Lista de Tabelas

3.1	Octeto bariônico: \vec{J}_S é o spin, $\vec{\tau}$ o isospin, τ_3 a terceira componente do isospin e S a estranheza.	50
3.2	Divisões da QHD	52
3.3	Campos da QHD	53
3.4	Problemas com QHD-I	61
3.5	Equações de estado que utilizamos nos três regimes de densidade	68
6.1	Percentual de massa ejetada por cada caroço	98
A.1	Características que definem cada classe espectral e a temperatura superficial (T_S) associada a cada classe. As classes R e N são algumas vezes combinadas numa classe única, C . As classes W , R , N e S são extremamente raras, por isso, muitos autores as omitem	105

Introdução

*“Somente os extremamente
sábios e os extremamente
estúpidos é que não mudam.”*

Confúcio

Neste trabalho pesquisamos a possibilidade de ejeção de matéria de uma proto-estrela de nêutron induzida pelos neutrinos que escapam do meio muito denso e que foram gerados e aprisionados no processo da formação da estrela de nêutron. Este fluxo de neutrinos que acompanha o resfriamento de uma estrela de nêutron recém formada é conhecido como vento de neutrinos. Embora a interação do neutrino com a matéria ordinária seja desprezível, em meios muito densos tal interação se torna relevante. Desta forma, pretendemos verificar se parte da matéria da camada externa do caroço remanescente de uma supernova de Tipo II pode ser ejetada pela deposição de momentum e energia pela difusão dos neutrinos que saem do interior, extremamente denso, de uma proto-estrela de nêutron.

O estudo da formação das estrelas de nêutron indica que sua composição varia ao longo da estrutura. Estima-se que em sua crosta, uma estrela de nêutron possui densidade próxima da densidade nuclear de equilíbrio, com uma composição de núcleos exóticos (ricos em nêutrons) num mar de nêutrons com alguns prótons e permeado por um gás de elétrons livres. No interior profundo superdenso talvez haja um plasma de quark-glúon, e a região intermediária apresenta uma composição de hádrons e léptons onde a densidade é menor, porém ainda supra-nuclear.

Em geral, mesmo em meios astrofísicos estelares a opacidade de neutrinos é desprezível, entretanto, em situações de altíssima densidade como o interior de uma estrela de nêutron recém formada, ocorre o aprisionamento temporário dos neutrinos produzidos em seu interior. Esta situação de confinamento, deve-se à opacidade de neutrinos que passa a ser significativa. Eventualmente ocorre a difusão dos neutrinos que carregam energia da região central do caroço, remanescente da estrela, “resfriando” o sistema. A saída dos neutrinos leva a uma despressurização do interior da estrutura e a uma instabilidade da mesma, que passa a se contrair e evoluir hidrodinamicamente. Em nosso

trabalho adotamos um modelo de duas camadas para descrever a evolução hidrodinâmica do caroço. Consideramos que há deposição de momento dos neutrinos que saem para a camada externa do caroço, possibilitando a ejeção de matéria dessa região. Um aspecto importante que afeta a evolução hidrodinâmica do sistema é o endurecimento da equação de estado do caroço interno devido à presença dos neutrinos ali aprisionados. Mostraremos neste trabalho que este endurecimento tem papel fundamental na eficiência da ejeção de massa.

Para traduzir as diferentes composições do meio ao longo da estrutura de uma estrela de nêutron, cinco equações de estado obtidas para diferentes regimes de densidade são utilizadas em nosso trabalho.

Utilizamos neste trabalho a aproximação de $T \cong 0$ (estrela “fria”), o que é razoável, pois a energia de Fermi de uma estrela de nêutron é muito maior do que sua temperatura efetiva, permitindo-nos o uso de tal aproximação. Porém, em $T \cong 0$ os íons do sistema formam uma rede cristalina e é necessário introduzir uma correção eletrostática (vide Refs. [6, 26]).

Para o regime de densidades subnucleares sem nêutrons livres, utilizamos a equação de estado apresentada na Ref. [19]. Neste regime de densidades os elétrons dão a principal contribuição à pressão do sistema, permitindo inclusive que se despreze as contribuições das outras partículas. O gás de elétrons é tratado, em primeira aproximação, como um gás de Fermi degenerado. Esta equação de estado não contempla nêutrons livres, portanto foi aplicada ao regime de densidades menores que a densidade limiar de gotejamento de nêutrons.

Já no regime de densidades subnucleares com nêutrons livres e sem neutrinos aprisionados no meio, utilizamos a equação de estado apresentada na Ref. [20], que considera os núcleos distribuídos numa rede cristalina imersa em um gás degenerado de elétrons relativísticos e num gás degenerado de nêutrons livres não-relativísticos. Neste regime de densidades os nêutrons, que interagem fortemente, reduzem a tensão superficial dos núcleos promovendo sua dissociação. À medida que a densidade vai aumentando nesse regime, a contribuição dos nêutrons livres para a pressão do sistema vai se tornando cada vez mais relevante, não podendo mais ser desprezada em comparação com a contribuição do gás de elétrons.

Para o regime de matéria nuclear com neutrinos confinados utilizamos a equação de estado da Ref. [28], entretanto, tal equação de estado foi utilizada para a determinação das condições iniciais necessárias às simulações computacionais da evolução dinâmica do sistema, como veremos no Capítulo 6.

Para o estudo da faixa hadrônica de densidades utilizamos uma generalização do modelo de Walecka [29], que foi desenvolvido para a descrição da matéria nuclear densa, conhecido como *Hadrodinâmica Quântica* (ou QHD do inglês *Quantum Hadrodynam-*

ics), um modelo quântico relativístico aplicado a um sistema de muitos corpos. Tal modelo é aplicado à matéria nuclear e a partir dele obtemos a equação de estado. Neste modelo, a interação nuclear entre prótons e nêutrons, ou bárions mais pesados, deve-se à troca de mésons, conhecidos como σ , ω e ρ .

Para a fase de plasma de quark-glúon utilizamos, como na Ref. [36], o modelo de sacola do M.I.T. modificado com a incorporação dos efeitos dos neutrinos aprisionados, (vide também Refs. [34, 35, 37]).

Para discutir a questão da ejeção de massa destas estrelas recém formadas, várias simulações de evolução hidrodinâmica foram realizadas. No cálculo incorporamos o acoplamento da hidrodinâmica com o transporte dos neutrinos, onde uma abordagem simplificada para o transporte foi introduzida com base num tratamento estatístico de difusão dos neutrinos.

Estudamos a possibilidade de ejeção de massa para diferentes massas estelares, e para variações da opacidade dos neutrinos. É importante salientar que a partir dos parâmetros das equações de estado, estes são os dois únicos parâmetros livres de nosso cálculo.

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

A fim de situarmos a formação das estrelas de nêutron dentro da evolução estelar, no Capítulo 1 discorremos resumidamente a teoria de *Evolução Estelar*. Descrevendo o processo de formação estelar, assim como as fases pós-sequência principal, nos detendo um pouco mais no itens sobre supernovas e sobre estrelas de nêutron.

No Capítulo 2 descrevemos sucintamente os transportes de radiação e de neutrinos a fim de apresentar as equações básicas necessárias ao estudo do transporte de energia pelos neutrinos (o que é discutido em mais detalhes no Capítulo 5).

No interior da proto-estrela de nêutron coexistem, em camadas distintas, meios com diferentes densidades, portanto, torna-se necessário utilizar diferentes equações de estado para tais meios, como mencionamos anteriormente. Portanto no Capítulo 3 discutimos as equações de estado utilizadas em nosso trabalho para os diferentes regimes de densidade.

Visando obter as equações de movimento que regem a hidrodinâmica do interior de uma proto-estrela de nêutron, no Capítulo 4 utilizamos uma descrição lagrangeana do caroço de uma proto-estrela de nêutron onde utilizamos um modelo de duas camadas para o caroço. Apresentamos o modelo de duas camadas utilizado para descrever a dinâmica do caroço ao longo de seu resfriamento. A partir desse modelo obtemos as equações de movimento que para as camadas da estrela de nêutron.

No Capítulo 5 descrevemos a abordagem utilizada para descrever o transporte de neutrinos e definimos a luminosidade de neutrinos das camadas, assim como a dependência desta luminosidade com relação à opacidade do meio. Mostramos, então, o

acoplamento entre a luminosidade de neutrinos e as equações de movimento obtidas no capítulo anterior, tal acoplamento permite uma descrição aproximada da fase de resfriamento.

De modo a investigar a importância das contribuições individuais do vento de neutrinos e do bounce hidrodinâmico, no Capítulo 6 apresentamos os resultados obtidos a partir de três cenários distintos: no primeiro consideramos os efeitos puramente hidrodinâmicos promovidos pela presença de uma componente de pressão associada ao gás de neutrinos atuando em conjunto com a opacidade de neutrinos; no segundo desprezamos os efeitos hidrodinâmicos devidos à pressão do gás de neutrinos, porém levando em conta a opacidade de neutrinos; e, por fim, no terceiro cenário consideramos apenas os efeitos puramente hidrodinâmicos atuando sobre o caroço, desprezando a opacidade de neutrinos.

As conclusões foram surpreendentes ao demonstrarem que a ejeção de massa é possível somente no terceiro caso: quando ambos os elementos (a pressão e a opacidade de neutrinos) atuam em conjunto; porém não ocorre quando tais elementos concorrem em separado, mesmo nos limites extremos de realce de cada um deles. De acordo com nossos resultados, a luminosidade de neutrinos só consegue induzir a ejeção de matéria se a pressão do gás de neutrinos promover um endurecimento da equação de estado da camada-1, permitindo a reversão do movimento da camada-2 e ejetando matéria.

Ainda neste capítulo também apresentamos nossas perspectivas para trabalhos futuros continuando a linha de pesquisa seguida neste trabalho.

No Apêndice A introduzimos o diagrama H-R e o sistema de classificação espectral das estrelas. O diagrama H-R é muito utilizado no estudo das estrelas correlacionando-as de acordo com suas respectivas classes espectrais e temperaturas.

No Apêndice B descrevemos brevemente o modelo de fluidos politrópicos, que é um modelo muito utilizado em astrofísica para descrever os interiores estelares.

No Apêndice C apresentamos a equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (ou simplesmente TOV) utilizada, em geral, para descrever a estrutura de estrelas de nêutron sob uma métrica relativística esférica.

Capítulo 1

Evolução Estelar e Estrelas de Nêutron

O estudo da evolução estelar é de fundamental importância na astrofísica pois as estrelas não são objetos estáticos; ao contrário, elas evoluem. São imensas massas de gás quente auto-gravitantes sustentadas pela fornalha nuclear em seu núcleo. As estrelas começam suas vidas como nuvens de gás e poeira, contraindo-se, e evoluem de proto-estrelas, através de uma fase de ignição nuclear, até chegar na seqüência principal. Na seqüência principal as estrelas passam a maior parte de sua vida fundindo hidrogênio em hélio. Após a queima de sua reserva de hidrogênio, a estrela evolui rapidamente para fora da seqüência principal encaminhando-se para seu fim como uma anã branca ou num evento de supernova que pode deixar como remanescentes uma estrela de nêutron, uma estrela de quark ou um buraco-negro. Entretanto, a evolução das estrelas é tão lenta que, em curtos intervalos de tempo, podemos considerá-las aproximadamente estáticas. Isso nos permite investigar sua evolução ao longo de estágios sucessivos dos quais falaremos abaixo.

1.1 Estágios Iniciais

Nuvens de matéria interestelar compostas basicamente de hidrogênio e pequenos grãos de poeira são os berçários das estrelas. Uma estrela inicia sua existência como uma gigantesca nuvem de gás e poeira. O movimento desordenado na nuvem gera flutuações de densidade que levam a nuvem a se condensar sob sua própria atração gravitacional. Inicialmente é formado um núcleo levemente mais denso que o resto da nuvem e vai acretando material da nuvem.

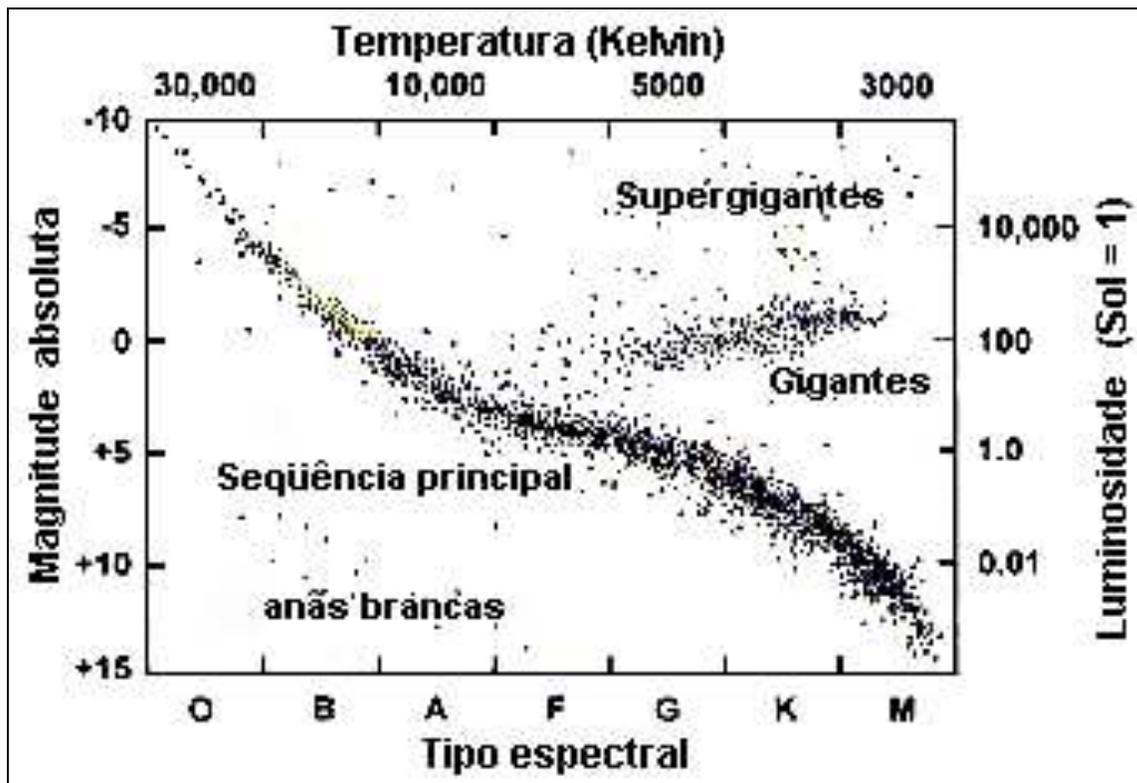


Figura 1.1: Exemplo de Diagrama HR. Como vemos, as estrelas se apresentam em grupos diversos, entre os quais o que mais se sobressai é o que chamamos de seqüência principal. Tal nome é uma escolha óbvia quando analisamos o fato de que cerca de 90% das estrelas passam 90% de sua vida nesse grupo. As definições das variáveis utilizadas nos eixos são definidas no Apêndice A.

1.1.1 A Fase Pré-Estelar

Eventualmente a nuvem acaba colapsando sob sua própria auto-gravitação. A nuvem começa o colapso de dentro para fora, o material na região central colapsa primeiro e o material externo permanece estacionário. O colapso ocorre, então, nas regiões externas ao núcleo. A taxa de acreção de massa no núcleo cresce com a temperatura inicial da nuvem. Leva cerca de 10^5 a 10^6 anos para acumular o equivalente a uma massa solar no núcleo da nuvem. A energia potencial gravitacional é convertida em energia térmica aquecendo a superfície da proto-estrela a até milhões de Kelvin. O caroço que se forma no centro é o que chamamos de “proto-estrela”. A proto-estrela não é uma estrela propriamente dita, pois não apresenta ainda reações nucleares em seu interior, mas pode ser considerada um “embrião” de estrela. A frente de choque na superfície da proto-estrela aquece o gás a milhões de Kelvin e o gradiente de temperatura formado faz com que o gás irradie e esfrie. Entretanto, a alta opacidade da nuvem em volta da proto-estrela impede que a radiação saia, impossibilitando a observação

do nascimento de uma proto-estrela. Essa mesma radiação também reduz a taxa de acreção do material para a proto-estrela.

A temperatura continua a subir à medida que a proto-estrela ganha massa e contrai. Como a contração da proto-estrela é lenta, o teorema do virial se torna uma boa aproximação podendo supor-se que a metade da energia gravitacional é convertida em energia cinética e a outra metade é irradiada. A pressão e a densidade crescem tanto que a proto-estrela se torna opaca e o equilíbrio termodinâmico é estabelecido localmente, com o campo de radiação sendo descrito por uma temperatura relacionada à energia cinética do gás. Pouca radiação escapa, pois a maior parte é gasta na ionização da nuvem. Quando esta já está bastante ionizada, os elétrons livres passam a exercer importante contribuição na pressão do gás freando o colapso e o equilíbrio hidrostático também é estabelecido.

À medida que a proto-estrela contrai sob sua auto-gravitação, a temperatura continua a subir rapidamente no interior, aumentando o gradiente de temperatura entre as camadas centrais e as externas! Surge então uma zona convectiva entre o caroço e a superfície da proto-estrela. O caroço vai aumentando com a acreção de massa, mas a proto-estrela continua contraindo-se e “espremendo” a zona convectiva. Normalmente, os núcleos de hidrogênio são impedidos de se fundir devido à barreira Coulombiana, em torno de 1MeV . Entretanto, quando a temperatura da proto-estrela atinge temperaturas da ordem de 10^6K , passa a haver tunelamento da barreira Coulombiana possibilitando a ocorrência de reações termonucleares¹. É o nascimento da estrela propriamente dita! Com o início das reações termonucleares, a estrela pára de se contrair e atinge uma configuração de equilíbrio hidrodinâmico. A estrela começa, então, sua vida na seqüência principal.

1.1.2 A Estrela Formada

Depois que todo o hidrogênio do caroço é consumido, uma camada de hidrogênio continua sendo queimada em torno do caroço isotérmico até que a temperatura seja grande o suficiente para iniciar a queima do hélio no caroço. A queima de hélio produz um caroço de carbono. Quando um elemento se exaure, se a temperatura for grande o suficiente, inicia-se a queima do elemento seguinte. Cascas concêntricas vão se formando à medida que cada elemento é sintetizado, o núcleo passa a ter uma estrutura semelhante à de uma cebola (ver Figura 1.2). A queima de elementos continua até o ferro, quando as reações nucleares então cessam, pois a fusão do ferro em elementos

¹ Como é a movimentação térmica das moléculas que permite o efeito de tunelamento quântico, a fusão que ocorre nos interiores estelares é chamada de “fusão termonuclear”.

mais pesados é endotérmica².

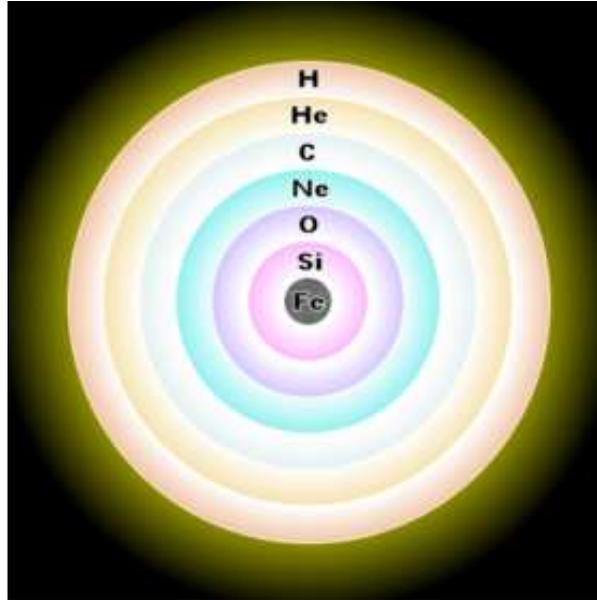


Figura 1.2: As camadas do caroço se formam concentricamente formando uma estrutura semelhante à de uma cebola

1.1.3 O Teorema de Russel-Vogt

Como dissemos acima, quando a síntese de um elemento cessa, começa a síntese do elemento seguinte **se a temperatura for grande o suficiente!** A temperatura a que uma estrela pode chegar, por sua vez, depende da massa inicial da nuvem que origina a proto-estrela. Em 1920, Heinrich Vogt e Henry Norris Russel propuseram o chamado teorema de Russel-Vogt, sem qualquer base matemática, que afirma que para dada massa total e composição química, existe uma e somente uma solução para as equações básicas de estrutura estelar.

De acordo com o Teorema de Russell-Vogt:

Se uma estrela se encontra em equilíbrio hidrostático e térmico, e se toda sua energia deriva de reações nucleares, então sua estrutura é única e completamente determinada por sua massa total e pela distribuição dos diversos elementos químicos em seu interior. Em outras palavras, as propriedades com as quais a estrela nasce, massa e composição, são justamente as propriedades que determinam sua estrutura.

² Elementos mais pesados que o ferro não são produzidos nas reações de fusão e sim em supernovas, sobre as quais falaremos mais adiante na Seção 1.2.3.

Ou seja, o último elemento a ser sintetizado é definido pela configuração inicial da estrela. Quando todo combustível nuclear é consumido, a estrela em geral termina sua vida como uma anã branca ou num evento de supernova.

1.2 Estágios Finais

Quando toda energia proveniente de reações nucleares cessa, a estrela se encaminha para o fim de sua trajetória evolutiva. Nesta seção consideraremos os possíveis estágios finais da estrela.

Durante as reações termonucleares muitos raios gama liberados no caroço produzem pares elétron-pósitron que se aniquilam produzindo pares neutrino-antineutrino. A perda de neutrinos aumenta muito com a temperatura. A perda é tão grande nesse estágio que as etapas seguintes de queima de elementos ocorrem cada vez mais rápido, como oxigênio em um ano e silício em uma semana. Quando um dos elementos combustíveis é exaurido, o caroço se contrai até atingir a temperatura necessária para iniciar a próxima etapa de queima. Em alguns casos a perda de calor em um estágio seguinte é tão grande que pode ocasionar a re-expansão das camadas mais externas da estrela, eventualmente até ejetando matéria para o exterior da estrela.

A cessação da fusão nuclear sinaliza o fim do estágio luminoso da estrela. A fusão termonuclear ocorre durante a maior parte da vida de uma estrela e a época de sua cessação depende de sua massa inicial (conferir o Teorema de Russell-Vogt). Só estrelas massivas ($M \gtrsim 8M_{\odot}$) chegam a produzir ferro nas reações de fusão. Estas estrelas massivas podem terminar suas vidas como estrelas de nêutron ou buracos-negros. Em estrelas menos massivas a combustão é mais lenta e não chega à síntese do ferro. Estas estrelas terminam suas vidas como anãs brancas.

1.2.1 Gigante Vermelha

As gigantes vermelhas não estão entre os estágios finais das estrelas mas precedem o estágio de anã branca, portanto é interessante comentarmos brevemente este que é um importante estágio intermediário das estrelas de baixa massa.

Em termos de tamanho físico o caroço isotérmico de hélio degenerado nunca é muito grande. Assim, a evolução pós-seqüência principal de uma estrela de pouca massa pode ser vista como o processamento de material estelar além da zona de queima, com o hélio resultante sendo acumulado em um pequeno volume com peso molecular médio muito maior (o caroço pode atingir densidades da ordem de $10^6 g.cm^{-3}$). A densidade caindo logo acima do caroço de hélio levará a um aumento da temperatura (que passa a ser da ordem de $10^8 K$), de modo que os mecanismos de geração de

energia nuclear possam suprir a energia necessária para suportar a estrela através do processo triplo- α . Entretanto, um aumento na temperatura central levaria a um aumento do gradiente de temperatura e a um conseqüente aumento da luminosidade. A luminosidade aumentada, por sua vez, provoca a expansão do envelope externo da estrela, diminuindo o gradiente de temperatura. O equilíbrio é estabelecido com uma temperatura de camada superior com gradiente de temperatura e luminosidade um pouco maiores. O processo continua até que o gradiente de temperatura exceda o gradiente adiabático. Então o envelope externo inteiro se tornará convectivo ficando com a menor temperatura que uma estrela pode ter – segundo modelos teóricos de Hayashi & Hoshi (limite de Hayashi).

O aumento no tamanho físico do envelope diminui a temperatura superficial e, portanto, aumenta a opacidade radiativa nas camadas externas. Isso promove a redução da eficiência do transporte radiativo e assegura a formação da zona convectiva externa. O envelope externo agora passa a se comportar como um polítropo de índice $n = 1.5$ aproximadamente (ver Apêndice B sobre polítropos).

A estrela agora é totalmente convectiva. A redução contínua do suprimento de hidrogênio disponível na região de queima na camada, que se torna extremamente fina, leva a um aumento contínuo na temperatura de camada acompanhado de um aumento da luminosidade. Com a zona convectiva externa comportando-se como um polítropo e carregando eficientemente a energia para a superfície, a perda de energia é novamente limitada pela fotosfera e a estrela se expande rapidamente para acomodar o fluxo de energia aumentado.

1.2.2 Anã Branca

Há basicamente duas propostas para a teoria sobre anãs brancas. A primeira leva em conta que um gás relativístico degenerado se comporta como um polítropo (ver Apêndice B) e explora as implicações desse fato. A segunda proposta é a de investigar detalhadamente a física específica da equação de estado e criar modelos a partir dos resultados obtidos.

A ejeção de uma nebulosa planetária durante as fases finais da evolução de uma estrela de baixa massa deixa um caroço quente e degenerado de carbono e oxigênio exposto ao meio interestelar. Embora o caroço possa ter uma massa em torno de $0.1M_{\odot}$ até pouco mais de $1M_{\odot}$ o futuro do caroço será independente de sua massa. Enquanto a variação das variáveis de estado passa por regiões de degenerescência, através de regiões de degenerescência parcial até uma casca superficial não-degenerada, as propriedades básicas da estrela podem ser compreendidas se tratarmos as estrelas como polítropos.

Sabemos observacionalmente que uma anã branca remanescente da evolução estelar

tem em torno de uma massa solar confinada em um volume de dimensões planetárias e, portanto, terá um densidade da ordem de $\rho = 10^6 g.cm^{-3}$. Algumas anãs brancas têm densidades centrais maiores do que $10^7 g.cm^{-3}$. Uma colher de chá do material que as constitui pesaria 50 toneladas na Terra!

Se assumirmos que o gás é totalmente ionizado (estado de plasma), então a energia típica de um elétron será em torno de $0.1 MeV$ para um gás totalmente degenerado. Se o caroço estelar estivesse a uma temperatura de $10^7 K$, um íon típico teria uma energia em torno de $1 KeV$. Como as densidades de energia são como pressões, ainda que as densidades para elétrons e íons apresentassem os mesmos valores numéricos, a pressão de elétrons ainda dominaria. De fato, como um íon típico produz muitos elétrons, a pressão de elétrons é sempre muito maior. Conseqüentemente a estrutura será determinada, em grande parte, pela pressão de elétrons e os íons poderão ser ignorados. Entretanto, Hamada e Salpeter (ver Ref. [2]) demonstraram que para densidades em torno de $10^8 g.cm^{-3}$ a energia de Fermi do “mar” de elétrons se torna tão alta que aumenta também a probabilidade de ocorrência do decaimento beta inverso e alguns dos elétrons “desaparecem” dentro dos prótons dos núcleos. Isso força a redução do limite de massa além do que se esperaria para um gás puramente degenerado. Além disso, a energia térmica dos íons é perdida permitindo que a estrela brilhe.

Apesar de não haver concordância entre muitas previsões teóricas devido às incertezas na modelagem da convecção e na taxa de reação $C(\alpha, \gamma)O$ o limite superior de massa não é determinante para se dizer qual a percentagem de estrelas que terminam sua vida como anãs brancas. Estimativas modernas indicam que nascem muitas estrelas de baixa massa e poucas estrelas massivas sendo que para cada estrela de $10M_{\odot}$ nascem 250 estrelas de $1M_{\odot}$.

A energia que a estrela emite durante toda a seqüência de esfriamento das anãs brancas até entrar em equilíbrio térmico com o universo (tornando-se uma anã negra), é a quantidade de energia que a estrela produziu ao longo de todas as fases evolutivas anteriores. A estrela está literalmente apenas esfriando.

As anãs brancas são o produto final da evolução estelar para cerca de 95-98% de todas as estrelas.

1.2.3 Supernova

Quando uma grande estrela explode, ela libera muito de sua matéria no espaço interestelar. Por alguns dias ela se torna tão brilhante quanto uma galáxia (algumas até mais!). É o evento a que chamamos de *supernova*. A matéria ejetada se esfria e, posteriormente, pode vir a se tornar matéria-prima para a formação de novos sistemas estelares.

Acredita-se que alguns desses sistemas que venham a se formar se desenvolvam como famílias de estrelas e planetas (tal como é nosso sistema solar). Isto explica a existência em nosso meio dos elementos mais pesados que o ferro, pois tais elementos não podem ser produzidos por fusão termonuclear no caroço do núcleo estelar, e sim durante as explosões de supernovas. Ou seja, de acordo com essa teoria, devemos nossa própria existência a uma ou mais supernovas que explodiram a bilhões de anos atrás.

A *supernova* (ou abreviadamente SN), com plural *supernovae* (abreviado como SNe), representa a explosão catastrófica que marca o fim da vida de certas estrelas. Uma massa de uma a dez massas solares é ejetada a velocidades da ordem de dez por cento da velocidade da luz. A energia correspondente é comparável à energia de ligação gravitacional de uma estrela e, portanto, evidencia que a estrela fica severamente, se não completamente, comprometida.

Algumas SNe podem produzir remanescentes compactos como estrelas de nêutron e buracos-negros. Elas também podem liberar restos extensos que são ejetados para fora e conduzem ondas de choque para o meio interestelar. Essa energia pode ajudar a formar novas estrelas e, em algumas circunstâncias, pode “soprar” matéria totalmente para fora de galáxias quentes.

Devido a seus grandes brilhos, as SNe podem ser usadas para determinar distâncias e ajudam a determinar a idade, forma e dinâmica do universo.

Dos estudos de SNe em outras galáxias, Minkowski classificou dois tipos básicos, baseado na presença ou não de hidrogênio no espectro observado, chamados de :

1. **Tipo I:** caracterizado pela ausência de hidrogênio no espectro e é hoje dividido nos seguintes subtipos:
 - a) **Tipo Ia:** (subgrupo que compreende 80% das SNe de Tipo I), em geral são explosões de estrelas antigas (seu tempo estimado de vida é da ordem de 10^9 anos) e de baixa massa (algo em torno de $3 - 8M_{\odot}$). Esta é uma classe extremamente homogênea de objetos. Na fase de brilho máximo, seu espectro apresenta fortes linhas de absorção de silício. A luminosidade máxima é bem definida, principalmente se considerarmos separadamente as SNe de galáxias *latetype* (mais brilhantes) e *early-type* (menos brilhantes). No cenário “standard”, esta SN ocorre em sistemas binários, onde uma anã branca de carbono/oxigênio acreta a massa da estrela secundária, eventualmente atinge o limite de Chandrasekhar ($1.44M_{\odot}$) e explode em uma reação termonuclear. A reação ocorre quando a queima de seu carbono e oxigênio é disparada, produzindo elementos mais próximos do ferro. Um importante isótopo produzido é o ^{56}Ni que decai para ^{56}Co , que por sua vez decai para

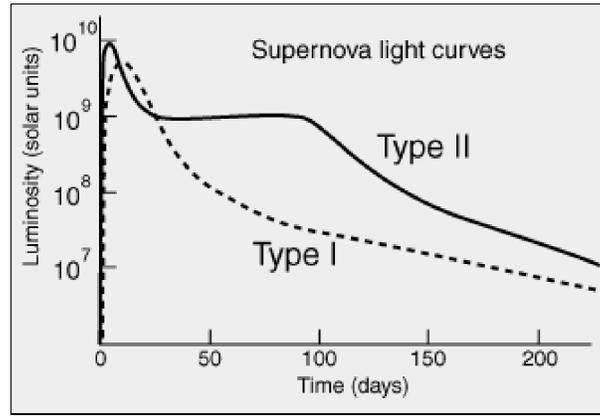


Figura 1.3: Curvas de Luz de supernovas de Tipo I e Tipo II

^{56}Fe . Esses decaimentos liberam raios gama da ordem de MeV e pósitrons que potencializam a curva de luz óptica.

- b) **Tipo Ib:** Tais SNe têm linhas fortes de hélio e pouco silício durante o máximo. Os progenitores dessas SNe (assim como as de Tipo Ic) são estrelas maciças que colapsam.
 - c) **Tipo Ic:** Espectro semelhante ao Tipo Ib, mas sem as linhas proeminentes de hélio.
2. **Tipo II:** O que define as SNe deste tipo é o fato de que exibem a linha $\text{H}\alpha$ de forma proeminente. Exceto pelo hidrogênio, seu espectro é similar às SNe de Tipo Ib/c, mas, assim como a luminosidade máxima, há uma grande variedade. Estas SNe ocorrem devido ao colapso do caroço de estrelas no intervalo $10 - 30M_{\odot}$.

Como anãs brancas com massa máxima, a massa de Chandrasekhar, as estrelas do Tipo Ia são essencialmente idênticas e, portanto, sofrem explosões quase idênticas. A homogeneidade observada do Tipo Ia tem apontado para uma origem na explosão de anãs brancas constituídas principalmente de carbono e oxigênio. Sabemos hoje que as do Tipo Ia não são todas exatamente idênticas, mas o princípio básico se mantém. A idéia é a de que uma estrela mais massiva orbitando em um sistema binário onde a companheira é uma anã branca pode, eventualmente, perder massa para a companheira menor. Caso parte da atmosfera da estrela maior fique a uma distância da anã menor do que o raio de Roche (ou limite de Roche) da anã, parte dessa atmosfera pode ser atraída pela anã branca que passa então a “canibalizar” a companheira maior. Quando a soma da massa acretada com a massa original da anã se torna maior do que o limite de Chandrasekhar surgem as condições para a ocorrência de novas reações nucleares conforme a Ref. [9]. Neste processo, carbono (ou possivelmente hélio) é queimado sob

condições altamente degeneradas e uma substancial fração da estrela é consumida no processo.

O produto final dessa queima nuclear é o Fe, que é bastante abundante no espectro óptico das SNe do Tipo I. Outra característica marcante na diferenciação de Tipos I e II é o fato de que as SNe de Tipo I não apresentam linhas de hidrogênio no espectro observado, enquanto as de Tipo II apresentam tais linhas. Isso se deve ao fato de que as anãs binárias acima citadas geralmente queimam todo o hidrogênio acretado da estrela maior convertendo-o em hélio antes da explosão de supernova. Daí a ausência dessas linhas nos espectros do Tipo I.

Quando a explosão de uma estrela massiva tem energia superior a $\sim 10^{52}$ erg (medido através da largura das linhas de emissão) chamamos de **hipernova**. Neste caso, o colapso do caroço pode resultar em um buraco-negro e estar associado ao fenômeno de *Gamma Ray Burst* (GRB - ou, numa tradução livre, *Pulso de Raios Gama*). Possivelmente estas explosões não têm simetria esférica.

O estudo de eventos do Tipo Ia não é o objetivo deste trabalho. Neste trabalho o que nos interessa realmente são os Tipos II, Ib e Ic pois é nesses tipos de eventos que nasce o objeto de nossa pesquisa: uma proto-estrela de nêutron que dará origem a uma estrela de nêutron.

As estrelas que produzem eventos de supernova que nos interessam são estrelas cuja vida é de curta duração, portanto, devem ser estrelas massivas. As massas das estrelas que produzem tais eventos são estimadas como sendo da ordem de dez ou talvez trinta a cinquenta massas solares. Devemos observar que deve haver um limite máximo de massa acima do qual a estrela colapsa num buraco negro (sobre o qual falaremos mais adiante) – entretanto tal limite superior de massa ainda é discutido até hoje e não está definido com exatidão.

Uma explosão massiva de neutrinos é a primeira evidência de que uma supernova de caroço colapsado ocorreu. Ela é seguida, algumas horas depois, por uma onda de choque atravessando a estrela e liberando radiação eletromagnética inicialmente num flash ultravioleta. A supernova se torna visível em comprimentos de onda ópticos e se expande, com a ascensão inicial da curva de luz como resultado do aumento da área superficial combinada com um decréscimo relativamente lento da temperatura. O pico de luz ocorre quando a temperatura das camadas externas começa a cair.

Há duas categorias de explosões de supernova Tipo II, as quais foram classificadas em 1973 por Barbon *et al.* [5] levando em consideração a forma da curva de luz – um gráfico de luminosidade versus tempo – que se segue à explosão. As SNe de Tipo II-L mostram uma curva com declínio constante, quase linear (daí a letra L). Já as de Tipo II-P apresentam curvas com um período de declínio mais lento permanecendo brilhantes por mais tempo mesmo após ter passado por seu brilho máximo. A curva

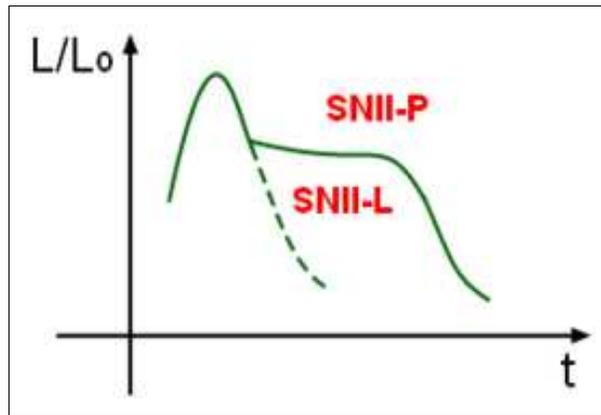


Figura 1.4: Comparação de curvas de luz de supernovas Tipos II-L e II-P

apresenta uma estrutura como um platô (o que justifica a letra P), seguida por um decaimento normal (ver Figura 1.4).

Os picos de luz nas supernovas de Tipo II-L são aproximadamente uniformes enquanto os picos das do Tipo II-P apresentam grande dispersão, isso deve-se possivelmente a diferenças nos raios das estrelas progenitoras.

As supernovas de Tipo II acusam a presença de hidrogênio em seu espectro, acredita-se que a existência do platô esteja associada à profundidade do envelope de hidrogênio. As de Tipo Ib e Ic, embora raras, são também supernovas de caroço colapsante, mas não apresentam em seu espectro linhas de Hidrogênio e Hélio (para as de Tipo Ic). Como resultado, esses tipos de supernova aparentam ser pobres desses elementos.

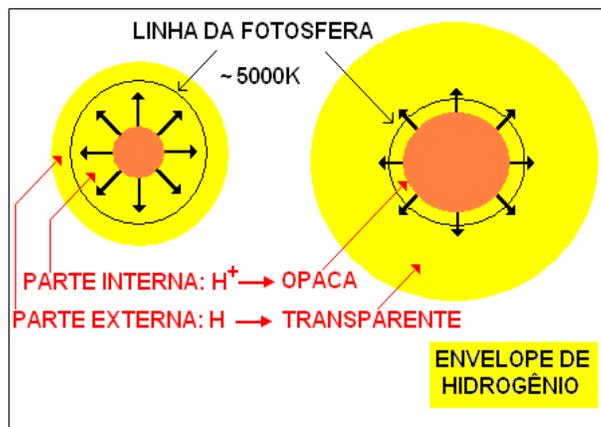


Figura 1.5: A frente de recombinação se expande até as camadas mais internas reduzindo a opacidade dessas camadas, permitindo que as mesmas possam ser observadas.

O começo do platô corresponde a uma mudança na opacidade da camada externa da estrela explodida. Como a onda de choque produzida pelo colapso do caroço se propaga

para fora atravessando a estrela, ela aquece o envelope externo da estrela a até $10^5 K$ ionizando todo o hidrogênio. O hidrogênio ionizado possui opacidade alta para os fótons, a radiação proveniente das partes internas não consegue escapar. Somente os fótons das camadas mais externas são observáveis. Depois de algumas semanas, entretanto, as camadas mais externas da estrela esfriam o suficiente para que o hidrogênio ionizado possa se recombinar para formar hidrogênio neutro. Nas supernovas de caroço colapsante a temperatura crítica para a recombinação do hidrogênio gira em torno de $4 - 6 \times 10^3 K$. Embora o hidrogênio ionizado seja opaco à radiação eletromagnética, o hidrogênio neutro é transparente para muitos comprimentos de onda, e esta frente de recombinação onde a opacidade muda é conhecida como fotosfera da estrela. Uma vez que o hidrogênio comece a se recombinar, os fótons das regiões mais quentes, e mais internas, do envelope de hidrogênio poderão escapar e será possível observar essas regiões mais profundas da atmosfera estelar (ver Figura 1.5).

À medida que a estrela continua se expandindo, forçando a fotosfera mais e mais para dentro da estrela, sucessivas regiões internas vão esfriando até a temperatura de recombinação. Desde que essa temperatura se mantenha essencialmente constante à medida que a fotosfera avança através do envelope de hidrogênio, um platô é criado na curva de luz.

É interessante lembrar que as próprias supernovas de Tipo II-L bem observadas são poucas em relação às de Tipo II-P e existe muita controvérsia sobre serem uma classe distinta de objetos. Alguns astrônomos acreditam que as SN Tipo II-L não apresentam fase de platô simplesmente porque seu envelope de hidrogênio seria muito menor.

Outra característica relacionada à fase de platô é a luminosidade. Nessa fase o brilho é maior nas estrelas que produzem muito níquel, e ambas as características estão ligadas a explosões de energias mais intensas e velocidades de ejeção maiores. Depois que a frente de recombinação ultrapassa o envelope de hidrogênio, a fase de platô (quando existe) termina, e as curvas de luz das supernovas de Tipo II acabam com um formato de “cauda” radioativa. Isso é potencializado pela conversão de ^{56}Co em ^{56}Fe e tem a mesma forma para todas as supernovas de caroço colapsante.

1.2.4 Estrela de Nêutron

Estrelas de nêutron são pequenas estrelas compactas com densidades da ordem de $10^{15} g.cm^{-3}$ e raios da ordem de $10 km$. São compostas basicamente de nêutrons e um pequeno percentual de prótons e elétrons. Estes enormes “núcleos” ricos em nêutrons são mantidos pela gravitação e requerem uma massa mínima da ordem de um décimo de uma massa solar. Também foi proposto, com base na Ref. [49] um limite máximo para tais objetos inicialmente de $0.7M_{\odot}$ na Ref. [50], entretanto, estimativas mais modernas

(vide Ref. [8]) indicam que esse limite seja da ordem de duas a três massas solares. Estrelas de nêutron, com mais massa do que esse limite superior, tendem a entrar em colapso e podem originar buracos-negros.

Estrelas de nêutron se formam, em geral, em explosões de SNe de Tipo II quando estrelas massivas – da ordem de dez ou mais massas solares – esgotam seu combustível nuclear depois de queimá-lo por milhões de anos. Se o caroço de ferro no centro da estrela esgotada excede o limite de uma massa solar e meia, a estrela sofre um colapso gravitacional em alguns segundos e tem uma morte violenta.

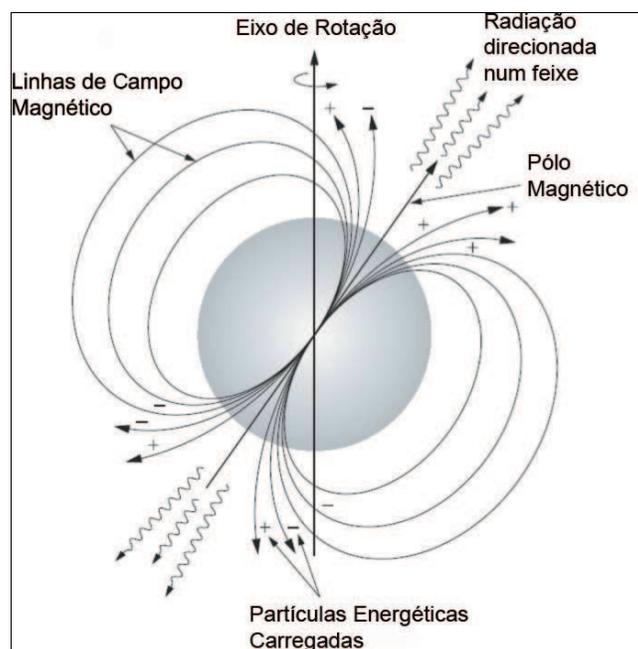


Figura 1.6: Um pulsar é uma estrela de nêutron cujo eixo de rotação não coincide com seu eixo magnético. A rotação da estrela em alta velocidade somada a esse desalinhamento dos eixos faz com que o sinal recebido seja intermitente, semelhante a um farol piscando, porém em altíssimas velocidades.

Quando ocorre o colapso do caroço de ferro, os prótons dos núcleos de ^{56}Fe capturam elétrons e se convertem em nêutrons. Cada reação cria um neutrino. Quando o colapso atinge a densidade de núcleos atômicos, a força nuclear forte passa a ter uma componente repulsiva. O resultado do aumento da pressão é que a contração cessa. Uma grande quantidade de energia é liberada na formação de uma estrela de nêutron. Esta energia é cerca de mil vezes mais do que o necessário para expelir as camadas externas da estrela – as quais contêm cálcio, oxigênio, carbono e hélio – e qualquer envelope externo de hidrogênio. O problema é que muito da energia produzida no colapso se perde para os neutrinos que podem facilmente se difundir para fora da recém-nascida estrela de nêutron e passam “através” da matéria colapsada.

Algumas estrelas de nêutron com alta rotação apresentam um desalinhamento entre seu campo magnético B e seu eixo de rotação Ω . Elas emitem radiação de dipolo na forma de ondas de rádio que parecem pulsos que se alternam – como as luzes de um farol (ver Figura 1.6) – quando o feixe chega à Terra com a frequência de rotação da estrela de nêutron. Tais estrelas são chamadas de pulsares, pois a radiação que recebemos vem em “pulsos”. Pulsares de rádio foram primeiramente descobertos por Bell e Hewish em 1967. Desde então milhares de pulsares já foram catalogados.

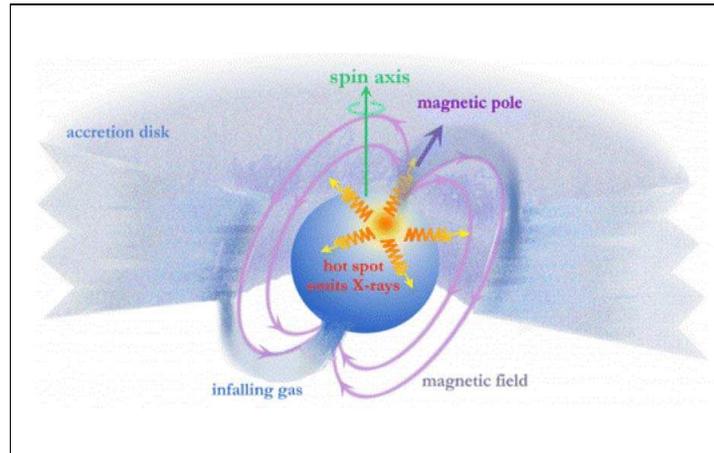


Figura 1.7: Quando uma estrela de nêutron recebe matéria de um disco de acreção, eventualmente atinge-se a temperatura necessária para a ocorrência de reações termonucleares. Durante tais explosões são liberadas grandes quantidades de raios X.

Pulsares de Raios X e Emissores de Pulsos de Raios Gama (do inglês *Gamma Ray Bursters*), segundo alguns teóricos, são estrelas de nêutron potencializadas por discos de acreção (ver Figura 1.7). As erupções de raios X seriam explosões termonucleares devidas à acreção de matéria pela superfície de uma estrela de nêutron. Depois de acumular hidrogênio durante horas, a pressão e a temperatura se tornariam suficientes para disparar uma explosão termonuclear que seria vista como uma erupção de raios X. A energia envolvida é da ordem das energias de ligação nucleares típicas ($\sim 7MeV$ por átomo de hidrogênio). A acreção lenta de uma companheira de baixa massa gera um fundo contínuo de raios X. Existem outros modelos para explicar estes fenômenos, porém não os analisaremos pois abordar tais modelos fugiria aos objetivos deste trabalho.

Recentemente uma subclasse de pulsares de raios X foi descoberta. Uma *magnetar* (contração no inglês de *magnetic star*) é uma estrela de nêutron cuja energia do campo magnético excede todas as outras fontes de energia, inclusive a rotação. Em alguns casos o campo magnético pode ser da ordem de $10^{15}Gauss$ – motivo pelo qual tais objetos foram apropriadamente batizados de *magnetars* – o que torna as magnetars os

objetos com os mais intensos campos magnéticos conhecidos.

As magnetars foram inicialmente propostas para explicar as propriedades dos *repetidores de raios gama moles* [10] (ou SGR, do inglês *soft gamma repeaters*). SGR são fontes de erupções curtas, e repetitivas, de raios Y (da ordem de $\sim 100\text{KeV}$).

Os SGR possuem períodos de atividade eruptiva (bursts), pontuada por longos períodos de inatividade. Ocasionalmente (talvez a cada século) eles emitem intensas e gigantescas erupções de radiação Y podendo atingir energias da ordem de vários MeV cujas intensidades na Terra chegam a ser maiores do que qualquer outra fonte de raios cósmicos [11].

1.2.5 Buraco Negro

Numa definição sucinta, buraco negro é uma região do espaço na qual toda matéria colapsou e da qual nenhum objeto material, luz ou sinal de qualquer tipo consegue escapar. Em outras palavras, uma região na qual o campo gravitacional é tão intenso que não deixa nada escapar.

Os atuais modelos de buraco negro são baseados na *Teoria da Relatividade Geral*, na qual pode ser demonstrado que se uma quantidade qualquer de matéria for suficientemente comprimida – tal que fique contida dentro de um raio crítico conhecido como raio de Schwarzschild – nenhum sinal pode escapar dela.

Um buraco negro surgiria se uma quantidade de matéria fosse comprimida dentro de seu raio de Schwarzschild, e a vizinhança do buraco negro – conhecida como horizonte de eventos – seria uma esfera com esse raio. Nada que caísse lá dentro jamais poderia escapar novamente.

É importante ressaltar que o buraco negro não é um objeto sólido, é uma região do espaço cujo raio depende apenas da matéria que caiu em seu interior. O que acontece com a matéria depois não depende do tamanho do buraco, e qualquer matéria que caia em seu interior só servirá para aumentar o raio do buraco.

Buracos negros se formam como o resultado do colapso de muitas estrelas massivas quando estas esgotam seu combustível nuclear ao final de seus ciclos de vida. Muitas estrelas colapsam até formar objetos compactos densos – como é o caso das anãs brancas e das estrelas de nêutron, discutidas nas seções anteriores – porém, muitas estrelas massivas podem continuar a colapsar até que toda sua matéria esteja comprimida em um ponto de densidade infinita conhecido como singularidade. Mas antes que isso aconteça toda a matéria colapsante terá passado dentro de seu raio de Schwarzschild, formando um buraco negro e desaparecendo para sempre.

Alguns buracos negros parecem ter origens não-estelares. Grandes nuvens de gás ou um grande número de estrelas poderia colapsar em buracos negros super-massivos no

centro de quasares e em sistemas galácticos que parecem estar explodindo. Outro tipo de buracos negros não-estelares foi proposto pelo físico britânico Stephen Hawking, de acordo com sua teoria vários mini-buracos negros primordiais teriam se formado na época do Big Bang.

Capítulo 2

Grandezas Associadas ao Transporte de Neutrinos na Matéria Densa

Embora o tratamento dedicado à propagação dos neutrinos neste trabalho seja mais simplificado que uma abordagem de transporte, aqui apresentamos as linhas gerais desta descrição com o objetivo de estabelecer a definição formal das grandezas envolvidas no problema.

Não é nossa intenção escrever um tratado sobre transporte radiativo pois a literatura sobre o assunto já é bastante extensa. Pretendemos apenas lançar os fundamentos conceituais mínimos para uma compreensão da teoria de opacidade antes de adentrar o assunto que realmente nos interessa: **o escape de neutrinos e a resposta da opacidade do meio denso ao fluxo de neutrinos**. Portanto, os conceitos apresentados neste capítulo sobre transporte radiativo são meramente introdutórios.

A *emissividade* e a *opacidade* são parâmetros de transferência radiativa intrínsecos ao sistema material estudado. Discorreremos mais sobre esses parâmetros nas seções seguintes.

Em um sistema material constituído principalmente de elétrons altamente degenerados (ou seja, quando a energia térmica, $k_B T$, desses elétrons é considerada muito baixa em comparação com a energia de Fermi do sistema), tais elétrons não se comportam efetivamente como espalhadores do fluxo de neutrinos e nem mesmo como absorvedores.

2.1 Intensidade–Brilho de Neutrinos

Intuitivamente entendemos *intensidade* como uma medida de brilho. Fisicamente, o que se percebe é a “quantidade” de energia passando por unidade de tempo ao longo de um feixe de raios oriundos de uma pequena fração da superfície (emissora) considerada.

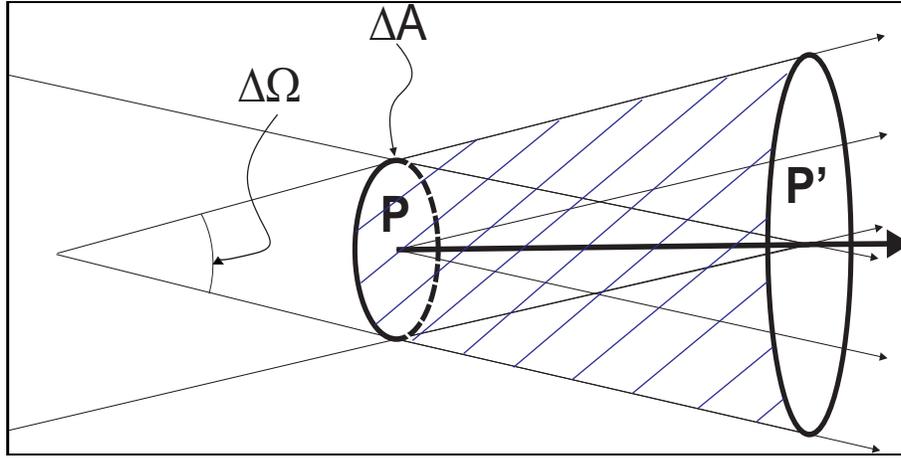


Figura 2.1: Fluxo de Energia através de uma área ΔA

Se ΔA é a superfície da esfera interceptada pelo cone de um ângulo sólido $\Delta\Omega$, então

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2}.$$

Vamos agora definir a *intensidade específica*. Seja dado um ponto P e uma direção $\overline{PP'}$ (conferir a Figura 2.2 mais adiante), consideremos a quantidade de energia atravessando em um dado intervalo de tempo Δt uma superfície ΔA em torno de P e em direções quase paralelas a $\overline{PP'}$. Adicionalmente, consideremos apenas o intervalo de frequências entre ν e $\nu + \Delta\nu$.

Se denominarmos ΔE_ν a quantidade de energia entre as frequências ν e $\nu + \Delta\nu$ atravessando no tempo Δt a área ΔA no interior do ângulo sólido $\Delta\Omega$, a razão de ΔE_ν para o produto $\Delta\nu\Delta t\Delta A\Delta\Omega$ tem um limite definido, à medida que as quantidades $\Delta\nu$, Δt , ΔA e $\Delta\Omega$ aproximam-se de zero. Este limite é a *intensidade específica*¹ I_ν da radiação de frequência ν no ponto P na direção normal a ΔA :

$$I_\nu = \lim_{\substack{\Delta\nu \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta A \rightarrow 0 \\ \Delta\Omega \rightarrow 0}} \frac{\Delta E_\nu}{\Delta\nu\Delta t\Delta A\Delta\Omega}. \quad (2.1)$$

Se a direção $\overline{PP'}$ que define o ângulo sólido $\Delta\Omega$, estiver orientada por um ângulo θ em relação à normal ΔA , teremos a representação da Figura 2.2. Neste caso, a energia que imerge no ângulo sólido $\Delta\Omega$ é oriunda de raios restritos à área projetada normalmente à $\overline{PP'}$, ou seja, $\Delta A \cos \theta$, de modo que a energia ΔE_ν , nas frequências

¹Usualmente suprimimos o adjetivo *específica* a menos que seja necessário para evitar ambigüidades.

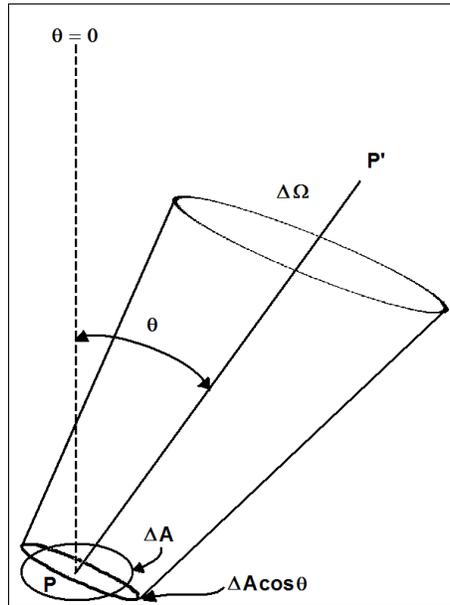


Figura 2.2: Fluxo de Energia através de uma área $\Delta A \cos \theta$

entre ν e $\nu + \Delta\nu$, que atravessa no tempo Δt a superfície ΔA , na direção definida por θ para o interior do ângulo sólido $\Delta\Omega$, define:

$$I_\nu = \lim_{\substack{\Delta\nu \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta A \rightarrow 0 \\ \Delta\Omega \rightarrow 0}} \frac{\Delta E_\nu}{\Delta\nu \Delta t \Delta A \cos \theta \Delta\Omega}. \quad (2.2)$$

Neste caso o fator $\cos \theta$ expressa o fato de que os raios que contribuem para ΔE_ν estão restritos à área projetada $\Delta A \cos \theta$. Esta é a **definição geral de intensidade**.

É importante comentar que no limite $\Delta\Omega \rightarrow 0$, o ângulo sólido considerado torna-se infinitesimal e **o feixe de radiação deixa de ser divergente**. Portanto, a intensidade, sendo especificada por unidade de ângulo sólido, **é independente da distância à fonte**.

No caso mais geral possível, a intensidade é uma função de posição \vec{r} , direção definida pelo vetor unitário \hat{n} , e tempo:

$$I_\nu = I_\nu(\vec{r}, \hat{n}, t).$$

Se $\partial I_\nu / \partial t = 0$ o campo de radiação é dito *estacionário*. Este é o caso da maioria dos objetos astronômicos.

Há dois exemplos de campos de radiação muito importantes em Astrofísica:

- Isotrópico: $I_\nu(\vec{r})$ independe da direção

- Com simetria axial: $I_\nu(\vec{r}, \theta)$ independe do ângulo azimutal φ .

Chamamos de *intensidade bolométrica* (ou integrada) a intensidade somada sobre todos os valores de frequência:

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu. \quad (2.3)$$

Devido à necessidade de se especificar o ângulo sólido na definição da equação (2.2), a intensidade só pode ser definida e/ou medida para objetos que apresentem um diâmetro angular finito para o observador.

2.2 A Intensidade Média

Formalmente a intensidade média é definida como o *momento de ordem-zero*, com respeito à direção, da intensidade. Também podemos considerá-la como o valor médio das intensidades em um dado ponto. As contribuições $I_\nu d\Omega$ de todas as direções são somadas e divididas pelo ângulo sólido contido em uma esfera:

$$J_\nu(\vec{r}) = \frac{\oint I_\nu(\vec{r}, \hat{n}) d\Omega}{\oint d\Omega},$$

ou seja

$$J_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\vec{r}, \hat{n}) d\Omega. \quad (2.4)$$

Consideremos agora uma superfície dA através da qual flui energia através feixes de neutrinos oriundos de todas as direções. A energia oriunda de um ângulo sólido particular $d\Omega$, no intervalo de frequência $d\nu$, no intervalo de tempo dt , é dada pela equação (2.2)

$$dE_\nu = I_\nu dA \cos \theta d\Omega d\nu dt,$$

esta energia está contida em um volume $dV_\theta = (dA \cos \theta) c dt$, logo:

$$dE_\nu = \frac{I_\nu}{c} d\Omega dV_\theta d\nu.$$

Desta forma, a densidade de energia contida neste volume, com frequência ν , pode ser obtida somando-se a contribuição de todas as direções:

$$\begin{aligned} \mu_\nu &= \oint \frac{\partial^2 E_\nu}{\partial V_\theta \partial \nu} = \frac{1}{c} \oint I_\nu d\Omega \\ \mu_\nu &= \frac{4\pi}{c} J_\nu, \end{aligned} \quad (2.5)$$

diretamente relacionada à intensidade média, que fisicamente representa portanto uma medida da quantidade de energia irradiante associada a um determinado ponto no interior de um campo de radiação.

2.3 Fluxo

Formalmente o fluxo é definido como o *momento de primeira-ordem* de I_ν , com respeito à direção. Podemos também defini-lo como a medida da energia líquida que flui através de uma área ΔA , por intervalo de tempo Δt , por intervalo espectral $\Delta\nu$, em um determinado ponto, em uma dada direção.

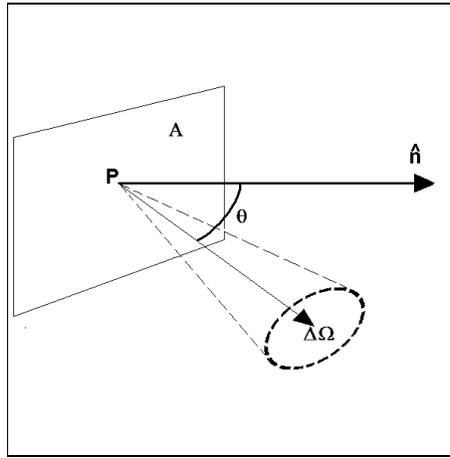


Figura 2.3: O Fluxo de Energia em relação à normal \hat{n}

Consideremos a Figura 2.3, onde representamos uma superfície A e uma normal \hat{n} à mesma. Se I_ν é a intensidade da radiação em P , fluindo na direção $\Delta\Omega$, então o limite dado na equação (2.2) nos permite concluir que a radiação correspondente a este ângulo sólido contribui com uma quantidade dF_ν dada por

$$dF_\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega, \quad (2.6)$$

que é a energia atravessando A por unidade de tempo, por unidade de frequência $d\nu$. Para obtermos o fluxo total em relação à normal \hat{n} somamos as contribuições de todos os ângulos sólidos

$$F_\nu = \oint I_\nu \cos \theta d\Omega. \quad (2.7)$$

Uma forma equivalente de definição do fluxo é

$$F_\nu = \lim_{\substack{\Delta\nu \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta A \rightarrow 0}} \sum \frac{\Delta E_\nu}{\Delta\nu \Delta t \Delta A}, \quad (2.8)$$

onde o somatório representa todas as contribuições infinitesimais de energia ΔE_ν . Podemos também escrever

$$F_\nu = \frac{\oint dE_\nu}{\Delta\nu\Delta t\Delta A}. \quad (2.9)$$

2.3.1 O Fluxo Vetorial

Muitas vezes é conveniente definir uma grandeza vetorial $\vec{F}_\nu(\hat{n})$ associada ao fluxo (que é escalar por definição), de tal forma que o valor numérico da quantidade de energia fluindo, por unidade de tempo e por intervalo de frequência, através de uma superfície arbitrária orientada pelo vetor unitário \hat{n} seja dado por

$$\begin{aligned} F_\nu(\hat{n}) &= \hat{n} \cdot \vec{F}_\nu \\ &= \oint I_\nu(\hat{n}') (\hat{n} \cdot \hat{n}') d\Omega_{\hat{n}'} \equiv \oint I_\nu \cos\theta d\Omega \\ &= \hat{n} \cdot \oint I_\nu(\hat{n}') \hat{n}' d\Omega_{\hat{n}'}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

de modo que definimos

$$\vec{F}_\nu = \oint I_\nu(\hat{n}') \hat{n}' d\Omega_{\hat{n}'}, \quad (2.11)$$

que é independente da direção \hat{n} .

2.3.2 A Quantidade H_ν

Normalmente, na literatura de transporte radiativo define-se a quantidade H_ν como

$$\begin{aligned} H_\nu &\equiv \frac{\oint I_\nu \cos\theta d\Omega}{\oint d\Omega} \\ H_\nu &= \frac{1}{4\pi} F_\nu, \end{aligned} \quad (2.12)$$

a conveniência da equação (2.12) está no fato de poder eliminar o fator 4π em algumas equações.

2.3.3 Luminosidade

A luminosidade é definida como a quantidade total de energia irradiada por segundo em todas as frequências e é dada pela relação

$$\frac{L}{4\pi R^2} = F_0 \equiv \int_0^\infty F_\nu d\nu. \quad (2.13)$$

2.4 Absorção e Emissão de Neutrinos

A passagem de um feixe de neutrinos através de um meio material é marcada pela interação dos mesmos com os constituintes do meio. As partículas do feixe serão absorvidas, emitidas e espalhadas continuamente, à medida que se movem em direção a uma fronteira física, na qual poderão escapar do meio material e se propagar em direção ao observador.

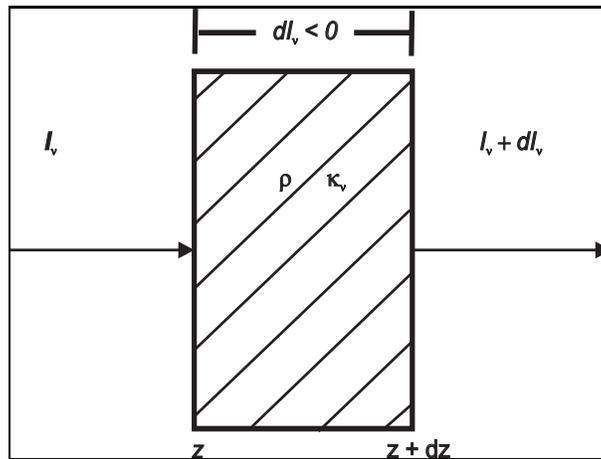


Figura 2.4: A intensidade do feixe incidente I_ν sempre sofre alguma redução dI_ν ao atravessar um meio material.

Na interação do feixe com a matéria, energia pode ser removida ou cedida por uma grande variedade de processos físicos. Estes processos envolvem transições quânticas de estado de sistemas complexos que participam da constituição do meio e modificações das partículas materiais com as quais o feixe interage. Em primeira ordem, é possível tratar o problema de absorção e emissão desconsiderando a natureza quântica da matéria através de *coeficientes macroscópicos*, os quais definiremos a seguir.

2.4.1 Absorção

Consideremos radiação de neutrinos atravessando uma camada de um meio material, com espessura dz , na direção \hat{z} , conforme mostrado na Figura 2.4. A intensidade

incidente em um dos lados da camada será diminuída pela interação com a matéria, e emergirá do outro lado com um valor menor. A quantidade de energia absorvida é proporcional tanto à intensidade incidente quanto à espessura da camada, de modo que escrevemos

$$dI_\nu = -k_\nu I_\nu dz, \quad (2.14)$$

onde denotamos a constante de proporcionalidade por k_ν , o chamado *coeficiente de absorção*, expresso na equação (2.14) em cm^{-1} . O uso mais difundido, entretanto é o da constante κ_ν multiplicada pela densidade ρ do meio material, de modo que

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu dz, \quad (2.15)$$

onde fizemos

$$k_\nu = \kappa_\nu \rho. \quad (2.16)$$

O produto $\kappa_\nu \rho$ tem dimensão de $[cm^{-1}]$, portanto κ_ν tem dimensões de $[cm^2.g^{-1}]$. Desta forma, κ_ν é chamado de *coeficiente de absorção por massa*. Doravante só utilizaremos este coeficiente quando nos referirmos a *coeficiente de opacidade*.

Integrando a equação (2.15) entre os limites 0 e z da lâmina material, sem perda de generalidade, temos

$$\begin{aligned} \ln I_\nu|_0^z &= - \int_0^z \kappa_\nu \rho dz \\ I_\nu(z) &= I_\nu(0) e^{- \int_0^z \kappa_\nu \rho dz}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

que é a equação usual de decaimento exponencial, onde a constante de decaimento é a integral do coeficiente de absorção por massa através da trajetória em questão.

2.4.2 Emissão e Emissividade

Consideremos uma emissão isotrópica oriunda de um volume elementar com massa dm (ver Figura 2.5). Consideremos a quantidade de energia irradiada por grama de material, nas frequências entre ν e $\nu + d\nu$, para o interior do ângulo sólido $d\Omega$, no intervalo de tempo dt , de modo que:

$$dE_\nu = (j_\nu d\nu dt d\Omega)(\rho dAdl), \quad (2.18)$$

onde j_ν é o *coeficiente de emissão por massa*, com dimensões $[erg.hz^{-1}.s^{-1}.sr^{-1}.g^{-1}]$.

Considerando, como na Figura 2.5, que o ângulo sólido $d\Omega$ está dirigido na direção

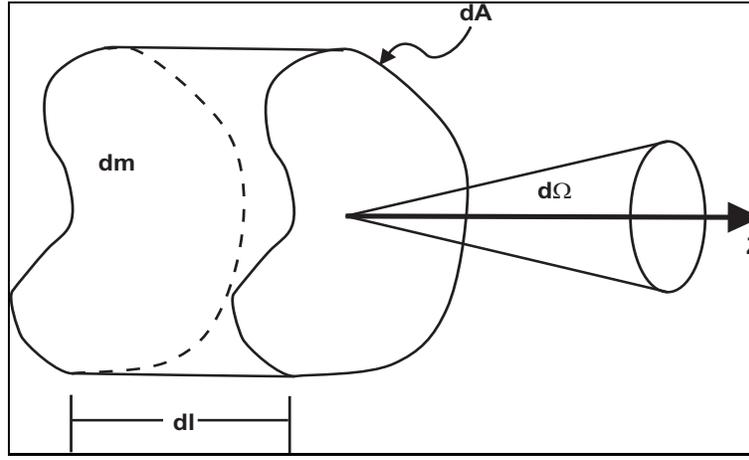


Figura 2.5: Elemento de volume com massa dm .

\hat{z} , lembramo-nos da definição de intensidade dada pela equação (2.1)

$$dE_\nu = I_\nu d\nu dt d\Omega dA,$$

e escrevemos a contribuição do elemento de volume para a intensidade emitida na direção $d\Omega$.

$$dI_\nu = j_\nu \rho dz, \quad (2.19)$$

uma vez que estamos considerando a contribuição de **um** elemento de volume; a intensidade total na direção considerada recebe a contribuição de todos os elementos de volume da linha de visada. A expressão acima é similar à equação (2.14), e, juntas elas podem ser utilizadas para contabilizar as perdas e ganhos na passagem de radiação por um elemento de volume, caracterizado por ρ e dz . Vamos agora considerar um exemplo ilustrativo simples que evidencia de forma clara o significado físico dos dois processos.

Seja um paralelepípedo de comprimento L , uniforme, no interior do qual κ_ν e j_ν sejam constantes (Figura 2.6). Escrevemos as contribuições relativas às energias absorvida e emitida no interior do paralelepípedo

$$\begin{aligned} dI_{\nu_{ABS}} &= -\kappa_\nu \rho I_\nu dz \\ dI_{\nu_{EM}} &= j_\nu \rho dz, \end{aligned}$$

de modo que $dI_\nu = dI_{\nu_{EM}} + dI_{\nu_{ABS}}$, e portanto

$$dI_\nu + \kappa_\nu \rho I_\nu dz = j_\nu \rho dz, \quad (2.20)$$

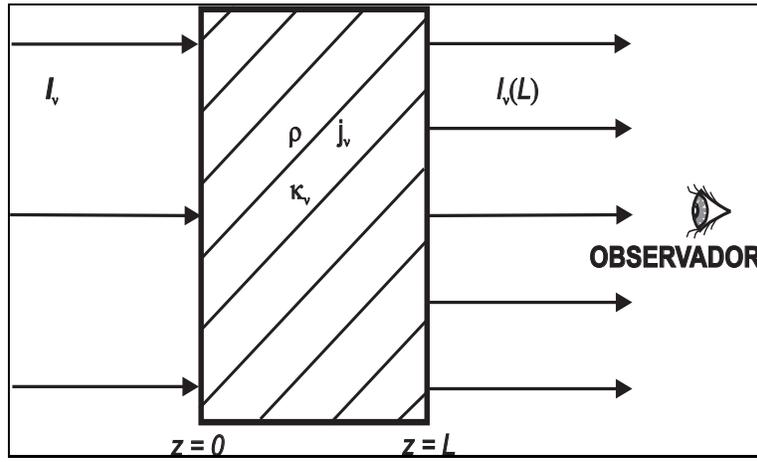


Figura 2.6: A intensidade do feixe incidente $I_\nu(0)$ recebe um acréscimo ao atravessar o meio material. O acréscimo é devido à emissão própria do meio.

multiplicamos pelo fator de integração $e^{\kappa_\nu \rho z}$ de modo que

$$e^{\kappa_\nu \rho z} (dI_\nu + \kappa_\nu \rho I_\nu dz) = d(e^{\kappa_\nu \rho z} I_\nu) = j_\nu \rho e^{\kappa_\nu \rho z} dz.$$

Integramos esta equação entre os valores de contorno do problema:

$$I_\nu(L) e^{\kappa_\nu \rho L} - I_\nu(0) = \int_0^L j_\nu \rho e^{\kappa_\nu \rho z} dz,$$

e dividimos a equação acima por $e^{\kappa_\nu \rho L}$:

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\kappa_\nu \rho L} + \int_0^L j_\nu \rho e^{-\kappa_\nu \rho(L-z)} dz. \quad (2.21)$$

Examinando atentamente esta equação, percebemos que a intensidade emergente do paralelepípedo em $z = L$ é composta de duas parcelas. A primeira parte consiste simplesmente da radiação incidente em $z = 0$ atenuada pela profundidade óptica total do paralelepípedo, e como tal representa uma fração da intensidade original. A segunda parcela corresponde às contribuições devidas à emissão de energia para cada posição z , atenuada pelo termo exponencial de absorção relativo à distância $(L - z)$ que tal radiação percorrerá no interior do paralelepípedo. Cada uma dessas contribuições deve ser somada ao longo de z .

A integração da equação (2.21) pode ser prontamente realizada e o resultado é:

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\kappa_\nu \rho L} + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} (1 - e^{-\kappa_\nu \rho L}). \quad (2.22)$$

Mencionamos dois casos limites de importância:

1. $\kappa_\nu \rho L \ll 1$ neste caso a absorção é desprezível, de modo que $e^{-\kappa_\nu \rho L} \rightarrow 1 - \kappa_\nu \rho L$, e o paralelepípedo é essencialmente transparente à radiação: este é o caso conhecido como *opticamente fino*, e temos

$$I_\nu(L) \cong I_\nu(0) + j_\nu \rho L, \quad (2.23)$$

o qual deriva diretamente da equação (2.19). Na ausência de absorção, a radiação emergente é composta da radiação incidente, inalterada, acrescida das contribuições ao longo da distância L .

2. $\kappa_\nu \rho L \gg 1$ neste caso a opacidade é muito elevada, e as regiões afastadas da borda não contribuirão de forma apreciável, à radiação emergente, devido ao forte fator atenuante $e^{-\kappa_\nu \rho(L-z)}$. Somente as regiões próximas da borda contribuirão para a radiação observada. Este é o caso *opticamente espesso*, e a equação limite torna-se:

$$I_\nu(L) \cong \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (2.24)$$

Interpretamos intuitivamente esta equação considerando que somente aquelas regiões aproximadamente dentro de um *livre caminho médio*, de distância da borda, são importantes. Uma vez que o livre caminho médio é igual ao inverso do coeficiente de absorção, temos

$$I_\nu(L) = j_\nu \cdot \frac{1}{\kappa_\nu} = j_\nu \rho \cdot \frac{1}{\kappa_\nu \rho} = j_\nu \rho \cdot \bar{l},$$

onde \bar{l} é o livre caminho médio. Desse modo, a intensidade emergente no caso opticamente espesso é tão somente a contribuição de emissão correspondente a uma distância \bar{l} da borda. Observe que $I_\nu(L)$ independe da intensidade incidente.

2.4.3 O Coeficiente Microscópico de Absorção

Ao tratarmos a absorção no contexto do transporte radiativo, lançamos mão de *coeficientes macroscópicos* que descrevem o fenômeno de absorção meramente como devido a uma *extinção* de parte do conteúdo energético de um dado feixe de radiação. Esta extinção se verifica pela diminuição da intensidade associada ao feixe de radiação considerado. As limitações intrínsecas do tratamento meramente macroscópico são superadas com a consideração da natureza física dos processos de absorção e a introdução dos *coeficientes microscópicos de absorção* os quais serão definidos nesta seção.

Vários fatores interferem diretamente na capacidade de um meio material de oferecer resistência à passagem de radiação. Podemos dividi-los em duas classes:

1. **Fatores Macroscópicos:** são os fatores que dependem das propriedades termodinâmicas do meio, tais como: pressão, temperatura, composição química, etc.
2. **Fatores Quânticos:** são os fatores que dependem das propriedades microscópicas do meio, sendo definidos pelo processo de interação fundamental do feixe com os elementos constituintes do meio.

Dentre os do segundo tipo, destaca-se a *seção de choque quântica* para um dado evento (absorção, espalhamento, etc). Essa seção de choque mede o percentual estatístico de vezes em que uma partícula do meio num dado estado quântico interage efetivamente com uma partícula do feixe. As probabilidades para a ocorrência de eventos entre partículas devem ser calculadas quantum-mecanicamente ou medidas em laboratório.

O coeficiente de absorção macroscópico por massa, expresso dimensionalmente em $[cm^2.g^{-1}]$, está relacionado com a *seção de choque*, com dimensões de $[cm^2]$, pela relação:

$$\kappa_\nu(i)\rho = \sigma_\nu(i)N(\rho), \quad (2.25)$$

onde $N(\rho)$ representa a densidade volumétrica de partículas-alvo capazes de absorver neutrinos com uma energia de frequência ν através do processo físico i .

A opacidade total k_ν na frequência ν é então obtida somando-se sobre todos os processos de tipo i .

$$k_\nu^{total} = \sum_i k_\nu(i). \quad (2.26)$$

2.4.4 A Aproximação de Atmosfera Cinza

Um modelo não realista, mas útil, é o de atmosfera cinza. A aproximação consiste em considerar uma opacidade média na frequência para traduzir a interação dos neutrinos com o meio. Ou seja

$$\kappa_\nu \equiv \bar{\kappa}, \quad \text{para } \forall \nu.$$

O modelo da atmosfera cinza, embora não real, é útil numa primeira aproximação quando se utiliza métodos iterativos para integrar as equações de transporte mais complexas e realistas. No nosso estudo de propagação de neutrinos no meio denso faremos uso desta aproximação. Portanto, os coeficientes de opacidade relativos a neutrinos doravante terão seus índices dissociados da frequência e o índice ν passará a ser referir apenas a neutrinos. Ou seja, quando escrevermos $F_{\nu i}$, por exemplo, estaremos nos referindo diretamente ao fluxo integrado de neutrinos numa dada camada i , e não

ao fluxo dependente de uma dada frequência ν como é comum na literatura sobre transporte radiativo.

2.5 Seções de Choque e Taxas de Reações

A interação ou colisão entre duas partículas é usualmente descrita em termos da seção de choque de colisão. Embora a seção de choque tenha dimensão de área, ela pode ser definida como: “*Uma medida associada à probabilidade de que um encontro entre partículas resulte na ocorrência de um processo fundamental*”.

A taxa de reação é: “*A probabilidade por unidade de tempo de que duas partículas (a) e (X) interajam através de um dado canal (i)*”.

O equilíbrio energético nos dá a energia liberada em cada processo; se considerarmos a reação genérica



o princípio de conservação de energia demanda a igualdade:

$$E_{aX} + (M_a + M_X) c^2 = E_{bY} + (M_b + M_Y) c^2, \quad (2.28)$$

onde E_{aX} é a energia cinética do centro de massa de a e X , e E_{bY} é energia cinética do centro de massa de b e Y . Com a energia liberada por reação E_{free} sendo dada por,

$$E_{free} = E_{bY} - E_{aX} = [(M_a + M_X) - (M_b + M_Y)] c^2, \quad (2.29)$$

e com o número de reações por unidade de volume por segundo, podemos calcular a energia liberada por unidade de volume por segundo. Para isto, precisamos definir a seção de choque da reação, σ . Na nossa reação genérica a seção de choque é definida como:

$$\sigma (cm^2) = \frac{\text{número de reações/núcleo} \times \text{unidade de tempo}}{\text{número de partículas incidentes/cm}^2 / \text{unidade de tempo}}. \quad (2.30)$$

O nome seção de choque advém da unidade, área, e porque o número de reações pode ser calculado assumindo-se que a partícula-alvo X tem uma área σ e que uma reação ocorre sempre que uma partícula a atinge aquela área.

A interação entre as partículas durante a colisão depende não só das partículas *incidente* e *alvo* (canal de entrada), mas também das partículas que *saem* após a colisão (canal de saída). Se a energia for grande o suficiente, pode ser que não tenhamos só uma colisão *elástica* (por exemplo: $e + p \longrightarrow e + p$), mas sim uma variedade de colisões *inelásticas* (por exemplo: $e + p \longrightarrow e + p + \gamma$, ou $e + p + \pi^0$, ou ainda $\nu_e + \Lambda$). Para cada

processo i entre duas partículas há uma seção de choque (exclusiva) σ_i . No entanto, algumas vezes o que interessa é apenas a seção de choque total (inclusiva) dada por

$$\sigma_{tot} = \sum_i \sigma_i. \quad (2.31)$$

Supondo que a partícula-alvo X tem uma densidade N_X , a taxa de reação por unidade de volume será dado pelo produto σN_X e pelo fluxo de partículas a do feixe. Supondo que o fluxo de partículas a do feixe é dado pelo produto da velocidade v do feixe pela densidade N_a de partículas do feixe, ou seja, o fluxo é vN_a , a taxa de reações será então dada por

$$r = \sigma(v) v N_a N_X \frac{1}{1 + \delta_{aX}}, \quad (2.32)$$

onde δ_{aX} é o delta de Kronecker ($\delta_{aa} = 1$, $\delta_{aX} = 0$, se $a \neq X$). Este último fator leva em conta que não devemos contar duplamente processos de interação feixe-alvo quando estes são constituídos de partículas idênticas. A velocidade v é a velocidade relativa entre as partículas a e X . Se temos o feixe incidindo sobre um gás em equilíbrio termodinâmico, existe um espectro de velocidades $\phi(v)$, definido de modo que

$$\int_0^\infty \phi(v) dv = 1. \quad (2.33)$$

Neste caso, $\phi(v)dv$ representa a probabilidade de que a velocidade relativa esteja no intervalo v e $v + dv$, e a taxa de reação total, por unidade de volume será dada por:

$$r_{aX} = N_a N_X \frac{1}{1 + \delta_{aX}} \int_0^\infty v \sigma_{aX}(v) \phi(v) dv = N_a N_X \langle \sigma v \rangle \frac{1}{1 + \delta_{aX}}. \quad (2.34)$$

Quando o alvo é um sistema composto, a excitação de um estado i com uma largura energética natural Γ_i , pelo princípio da incerteza este estado decairá em um tempo τ_i , definido como

$$\Gamma_i \tau_i = \hbar. \quad (2.35)$$

A probabilidade de decaimento pelo canal i é dada por:

$$P_i = \frac{1/\tau_i}{\sum_j (1/\tau_j)} = \frac{\tau}{\tau_i}, \quad (2.36)$$

onde

$$\tau \equiv \left(\sum_j \frac{1}{\tau_j} \right)^{-1}, \quad (2.37)$$

é o tempo de vida médio total do sistema, tendo por base a largura total de decaimento

$$\Gamma = \sum_j \Gamma_j. \quad (2.38)$$

Deste modo, a probabilidade de decaimento pelo canal i pode ser expressa como:

$$P_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}. \quad (2.39)$$

Portanto, o fator $\Gamma_a \Gamma_b / \Gamma \Gamma$ nos dá a probabilidade de reagir $a + X$, resultando em $b + Y$.

$$\langle \sigma v \rangle_{ab} = \langle \sigma v \rangle_{aX} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma^2}. \quad (2.40)$$

2.6 Processos Fundamentais e a Regra de Ouro de Fermi

Para o cálculo de seções de choque e taxas de reações (como as taxas de decaimento, por exemplo), devemos calcular dois elementos fundamentais:

1. A *amplitude* (\mathcal{M}) da transição entre estados inicial e final do sistema em interação que contém toda a informação *dinâmica* que pode ser obtida através dos diagramas de Feynman, utilizando as “Regras de Feynman” apropriadas à interação em questão; e
2. A densidade de estados finais acessível no *espaço de fase* disponível. O espaço de fase dispõe apenas da informação cinemática dependendo das massas, energias e momenta das partículas participantes.

Segundo a *Regra de Ouro de Fermi*, a taxa de transição para um dado processo é determinada pela:

$$\text{taxa de transição} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times (\text{espaço de fase}). \quad (2.41)$$

A dedução da Regra de Ouro de Fermi num contexto não relativístico pode ser obtida em textos de mecânica quântica, enquanto que para a versão relativística deve-se consultar livros de teoria quântica de campos.

2.6.1 Regra de Ouro para Decaimentos

Supondo o decaimento de uma partícula 1 em várias outras partículas 2, 3, 4, ..., n

$$1 \longrightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n.$$

A taxa de decaimento é dada pela expressão,

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[\left(\frac{cd^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \dots \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 \dots - p_n), \quad (2.42)$$

onde $p_i = (E_i/c, \mathbf{p}_i)$ é o quadri-momentum da i -ésima partícula (com massa m_i , tal que $E_i^2 - \mathbf{p}_i^2 c^2 = m_i^2 c^4$).² A função delta de Dirac assegura a conservação de energia e momentum visto que ela é igual a zero exceto quando $p_1 = p_2 + p_3 + \dots + p_n$. A partícula que decai está supostamente em repouso: $p_1 = (m_1 c, \mathbf{0})$. S é um produto de fatores estatísticos $(j!)^{-1}$ para cada grupo de j partículas idênticas no estado final.

A equação (2.42) determina a taxa *diferencial* de decaimento em que o momentum tridimensional da partícula 2 está dentro do intervalo $d^3\mathbf{p}_2$ em torno do valor \mathbf{p}_2 , o momentum tridimensional da partícula 3 está dentro do intervalo $d^3\mathbf{p}_3$ em torno do valor \mathbf{p}_3 , e assim sucessivamente. Para obter a taxa de decaimento total devemos integrar a equação (2.42) sobre todos os momenta.

$$\Gamma = \frac{S}{(2)^n \hbar m_1} \frac{c^{n-1}}{(2\pi)^{3n-7}} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3 \dots E_n} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 \dots - p_n) d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 \dots d^3\mathbf{p}_n. \quad (2.43)$$

Em geral, a amplitude \mathcal{M} é uma função de energia-momentum $(E_1, p_1; E_2, p_2; \dots)$, e não pode ser explicitada fora da integral.

2.6.2 Regra de Ouro para Espalhamentos Inelásticos

Suponhamos que duas partículas 1 e 2 colidam, produzindo as partículas 3, 4, ..., n :

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4 + \dots + n.$$

A seção de choque é dada pela expressão

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{cd^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \dots \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \dots - p_n), \quad (2.44)$$

²É interessante notar que E_i pode ser tratada como uma função de \mathbf{p}_i : $E_i = c\sqrt{m_i^2 c^2 + \mathbf{p}_i^2}$

onde, assim como no caso anterior, $p_i = (E_i/c, \mathbf{p}_i)$ é o quadri-momentum da i -ésima partícula (com massa m_i), $E_i = c\sqrt{m_i^2 c^2 + \mathbf{p}_i^2}$ e S é um produto de fatores estatísticos $(j!)^{-1}$ para cada grupo de j partículas idênticas no estado final. Aqui a função delta também assegura a conservação de momentum e energia.

A equação (2.44) determina a seção de choque diferencial, onde o momentum tridimensional da partícula 3 está dentro do intervalo $d^3\mathbf{p}_3$ em torno do valor \mathbf{p}_3 , o momentum tridimensional da partícula 4 está dentro do intervalo $d^3\mathbf{p}_4$ em torno do valor \mathbf{p}_4 , e assim sucessivamente.

2.7 Opacidade de Neutrinos

As seções de choque do neutrino são de fundamental importância nos modelos estelares para a determinação das taxas de ocorrência de reações envolvendo neutrinos tanto no colapso estelar de uma pré-supernova como na explosão. Neste trabalho destacamos o papel destas interações $\nu - \text{meio}$ no resfriamento de estrelas de nêutron remanescentes de explosão.

Seções de choque de absorção descrevem reações onde um neutrino incidente é absorvido, como por exemplo na captura de neutrinos por nêutron onde um elétron é criado e o nêutron (que pode estar ligado a uma estrutura nuclear ou mesmo livre) é transformado em um próton. As seções de choque podem ser escritas em termos de fatores que levam em conta características da estrutura nuclear e fatores cinemáticos vezes os elementos de matriz nucleares que carregam a informação da estrutura onde ocorre a transformação próton-nêutron. Em geral, todos os fatores podem ser calculados com acurácia (exceto estes elementos de matriz).

As seções de choque para espalhamento neutrino-elétron podem ser calculadas usando a teoria eletrofraca padrão. Os resultados dependem do sabor do neutrino incidente: neutrinos eletrônicos são espalhados muito mais fortemente do que os muônicos e os tauônicos.

Correntes neutras não consideram sabor. As seções de choque para interações com correntes neutras não dependem do tipo de neutrino.

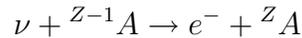
O exemplo de captura de neutrinos por núcleos é de bastante interesse do ponto de vista não só astrofísico, mas também para experimentos de detecção laboratoriais na Terra. Não poderíamos deixar de citar aqui que grandes contribuições foram obtidas para o estudo dos neutrinos na observação de neutrinos solares e de neutrinos de reatores.

A importância dos neutrinos solares está no fato de que seu imenso fluxo proveniente do Sol nos permite investigar e entender melhor a “fonte” da energia solar. A grande

opacidade do interior estelar aos fótons só permite que visualizemos as camadas mais externas das estrelas, isto também ocorre com o Sol. Desta forma, a detecção de neutrinos nos fornece grandes informações sobre os processos que ocorrem no interior solar.

Atualmente, também encontra-se em andamento um projeto para a construção de um laboratório experimental destinado à detecção de neutrinos nas vizinhanças das instalações nucleares de Angra dos Reis. Para maiores informações sobre o projeto vide (Anjos, *et al.*, 2006) na Ref. [18]

Os experimentos para a detecção de neutrinos possuem baixa taxa de contagem porque as seções de choque para interações com a matéria são pequenas. As transições que dominam as taxas do evento previsto para todos os experimentos projetados satisfazem as então chamadas regras de seleção *permitidas* em que o spin nuclear muda de 0 para 1 sem modificar a paridade. A seção de choque para a captura permitida de neutrinos, simbolizada pelo processo



é

$$\sigma = (\pi c^3 \hbar^4)^{-1} [G_V^2 \langle 1 \rangle^2 + G_A^2 \langle \sigma \rangle^2] P_e W_e F(eZ, W_e). \quad (2.45)$$

Aqui Z é o número atômico do núcleo final (com número de massa A), W é a energia do elétron que é produzido, P_e é o momentum do elétron. Os coeficientes G_V e G_A são as constantes de acoplamento usuais para interação fraca. A quantidade $F(Z, W_e)$ é conhecida na teoria de decaimento- β como *Função de Fermi* representa a probabilidade aumentada (diminuída) de um elétron (pósitron) ser encontrado no núcleo carregado relativo à probabilidade uniforme de uma onda plana. Discutiremos as Funções de Fermi mais adiante.

A intensidade da reação é representada pela combinação dos elementos nucleares de matriz

$$\zeta = [G_V^2 \langle 1 \rangle^2 + G_A^2 \langle \sigma \rangle^2],$$

onde $\langle 1 \rangle$ e $\langle \sigma \rangle$ são os elementos de matriz padrão reduzidos entre os estados nucleares final e inicial.

A distribuição angular dos elétrons recuperados pode ser medida. Para absorção de neutrino é obtida através da expressão,

$$P(\theta) = \left[1 + \left(\frac{v_e}{c} \right) \alpha \cos \theta \right], \quad (2.46)$$

onde v_e é a velocidade de recuperação dos elétrons e o parâmetro α de assimetria é

dado por

$$\alpha = \frac{\langle 1 \rangle^2 - \frac{1}{3} (G_A/G_V)^2 \langle \sigma \rangle^2}{\langle 1 \rangle^2 + (G_A/G_V)^2 \langle \sigma \rangle^2}. \quad (2.47)$$

É conveniente substituir os elementos de matriz na equação (2.45) pelo produto de um fator do espaço de fase, f , e um tempo de vida de decaimento, $t_{\frac{1}{2}}$. Tal grandeza, $ft_{\frac{1}{2}}$, é definida pela relação

$$\frac{1}{\left(ft_{\frac{1}{2}}\right)_{I' \rightarrow I}} = \frac{[G_V^2 \langle 1 \rangle^2 + G_A^2 \langle \sigma \rangle^2]}{[2\pi^3 \ln 2 (\hbar/m_e c)^7 m_e^2 c^3]}, \quad (2.48)$$

onde I e I' são, respectivamente, os spins dos estados nucleares inicial e final. Para decaimentos permitidos, $I - I' = 0, \pm 1$. A quantidade $ft_{\frac{1}{2}}$ costuma ser usada como padrão na medida da intensidade de uma transição de decaimento- β e é determinada pelo intervalo entre os vetores de estado iniciais e finais. A função $f(Z, W)$ reflete o espaço de fase disponível. Há uma relação de simetria, derivada dos coeficientes de Clebsch-Gordon da transição, que permite obter o valor de $ft_{\frac{1}{2}}$ para absorção de neutrino a partir do valor medido em laboratório em experimento de decaimento- β . A relação é

$$\frac{(2I + 1)}{\left(ft_{\frac{1}{2}}\right)_{I \rightarrow I'}} = \frac{(2I' + 1)}{\left(ft_{\frac{1}{2}}\right)_{I' \rightarrow I}}. \quad (2.49)$$

Assim, a equação (2.45) pode ser re-escrita em termos de $ft_{\frac{1}{2}}$ como

$$\sigma \equiv \sigma_0 \langle \omega_e^2 G(Z, \omega_e) \rangle, \quad (2.50)$$

onde

$$\sigma_0 = \frac{1.206 \times 10^{-42}}{\left(ft_{\frac{1}{2}}\right)_{I \rightarrow I'}} \left[\frac{(2I' + 1)}{(2I + 1)} \right] Z cm^2 \quad (2.51)$$

e

$$G(Z, \omega_e) \equiv (p_e F(Z, W_e) / 2\pi \alpha Z \omega_e), \quad (2.52)$$

onde $\omega_e \equiv W_e/m_e c^2$ é a energia do elétron produzido (em unidades de massa do elétron) e p_e é o momentum do elétron (em unidades de $m_e c$).

A quantidade $G(Z, \omega_e)$ inclui apenas efeitos físicos nucleares (exceto para o tamanho nuclear finito) e tem dois limites simples. Para energias eletrônicas pequenas comparadas à massa de repouso do elétron, G é aproximadamente igual à unidade. Para energias eletrônicas grandes comparadas a $m_e c^2$, G é aproximadamente igual a $(2\pi \alpha Z)^{-1}$.

2.8 O Transporte Efetivo de Neutrinos

Em nosso tratamento efetivo para o transporte de neutrinos no meio denso de uma estrela de nêutron, devemos analisar com cuidado o que já sabemos sobre as propriedades dos neutrinos. Observe-se que o livre caminho médio de um neutrino na água é da ordem de 1 bilhão de raios solares, o que significa que estes praticamente não interagem com a matéria em seu estado normal. Os neutrinos produzidos nos interiores de estrelas da seqüência principal (a exemplo dos neutrinos solares) ainda escapam da estrela quase sem interação alguma com a matéria estelar. A única exceção comumente discutida ocorre a temperaturas e densidades elevadíssimas, como as que podem ser alcançadas num caroço implodido de supernova. Devido a essa escassez de interações, a emissão de neutrinos favorece uma despressurização do interior estelar. Apesar de apresentar alguma similaridade com o transporte de fótons, a propagação de um fluxo de neutrinos num meio denso é bem distinta.

Na luminosidade de fótons, a energia estelar precisa ser transportada até a superfície antes de ser emitida e a taxa de transporte de energia é proporcional ao gradiente de temperatura na estrela. O estudo de luminosidades de fótons demanda um tratamento baseado no formalismo do transporte propriamente dito, pois o livre caminho médio do fóton é muito pequeno justificando uma modelagem que divida o meio estudado em várias camadas com opacidades diferenciadas. As perdas de neutrinos, entretanto, representam um esvaziamento local no estoque de energia, fora do equilíbrio termodinâmico com interações tão escassas com o meio que mesmo um tratamento de transporte constitui uma aproximação grosseira.

Outro aspecto peculiar na luminosidade de neutrinos é que ela não é facilmente observada. Diferente da luminosidade de fótons, ela não é determinada por observações como um dos caracteres a serem explicados pelos modelos estelares. Muito pelo contrário; a luminosidade de neutrinos precisa ser calculada a partir do modelo da estrela em questão, e a acurácia da luminosidade de neutrinos será obtida através dos efeitos que ocorrem na evolução observável das estrelas. Sabe-se que certos estágios da evolução estelar dependem criticamente da estrutura interna das estrelas através da física detalhada dos mecanismos de produção de neutrinos. Desta forma, o conhecimento dos processos de emissão de neutrinos tem contribuído mais no sentido de confirmar nossa compreensão da estrutura e evolução estelares do que para obter características observacionais dos objetos astrofísicos,

Capítulo 3

Equação de Estado de Meios Estelares Densos Degenerados

A equação que relaciona densidade, temperatura, composição e pressão é chamada de equação de estado e sua forma funcional é relativamente diferente em regimes de temperatura-densidade diferentes.

Neste capítulo estudaremos os principais regimes em uma estrela de nêutron e suas respectivas equações de estado.

As partículas quânticas são classificadas como férmions ou bósons. Tal classificação se baseia no princípio de exclusão de Pauli. Os férmions de um sistema não podem ocupar um mesmo estado quântico (ter números quânticos idênticos), e isto é expresso através do princípio de exclusão. Já os bósons não obedecem ao princípio de exclusão – podem estar em diferentes estados com diferentes números de partículas em cada estado ou todas as partículas num mesmo estado. Isto acarreta numa grande diferença de comportamento do sistema.

A energia de um sistema é dada por

$$E = \sum_n^k N_n E_n,$$

onde N_n é o número de partículas no nível n (número de ocupação do nível n) e k é o número total de níveis de energia disponíveis.

Pelo fato desses férmions terem spin $\frac{1}{2}$, que possui duas projeções ($m_s = +\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$), podemos ter apenas 2 férmions num mesmo nível de energia, com projeções de spin (m_s) diferentes, assim os férmions vão ocupando os níveis de energia 2 a 2, mesmo que a energia do sistema seja a mínima (esta observação levou ao princípio de exclusão de Pauli).

Com os bósons ocorre diferente. No estado fundamental todos podem ocupar o

nível mais baixo de energia e por isso não estão sujeitos ao princípio de exclusão. Esta diferença de comportamento reflete-se na energia dos dois sistemas. Para o sistema de bósons, supondo que a energia do sistema seja mínima, todos estão no nível 1, então:

$$E = \sum_{n=1}^1 N_n E_n = N_1 E_1 = n E_1. \quad (3.1)$$

Para o sistema de férmions, só

$$E = \sum_{n=1}^k N_n E_n = N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 + \dots + N_k E_k, \quad (3.2)$$

onde há uma grande diferença em relação ao sistema de bósons.

O comportamento dos férmions de estar num mesmo estado de energia, apenas com projeções de spin diferentes, é chamado degenerescência de spin. Esta degenerescência gera uma pressão de spin (devida ao princípio de exclusão), e esta, até certo limite, contrabalança a força gravitacional em algumas estrelas não permitindo o colapso. No caso da estrela de nêutron, são férmions degenerados que, através do princípio da exclusão de Pauli, contrabalançam a pressão gravitacional, através da pressão de spin.

3.1 Equação de Estado na Aproximação para $T \cong 0$

Em geral, nos sistemas fermiônicos há um nível máximo permitido de energia para as partículas. A energia desse nível é chamada de **energia de Fermi** E_F e não depende do número de partículas povoando esse nível. Esta definição torna-se importante quando comparamos a energia de Fermi com a energia média de cada nível do sistema.

Num sistema de N partículas idênticas (com N grande), estas ocuparão $N/2$ níveis de energia de $n = 1$ até $n = N/2$, até o nível de Fermi¹. Um cálculo unidimensional para E_0 resulta em:

$$E_0 = \frac{h^2}{8mL^2}, \quad (3.3)$$

onde h é a constante de Planck, m a massa do férmion e L é a largura do poço de potencial. A energia de Fermi será a energia do nível $n = N/2$ ($E_n = n^2 E_0$)

$$E_F = \frac{h^2}{32m} \left(\frac{N}{L} \right)^2, \quad (3.4)$$

que depende da densidade linear de partículas (N/L). A energia média é a energia total

¹ Se N for ímpar, devemos calcular com $(N + 1)/2$, pois o número de níveis é o mesmo para o último nível preenchido ou semi-preenchido.

dividida pelo número de partículas:

$$E_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N/2} 2E_0 n^2, \quad (3.5)$$

que para $N/2 \gg 1$ resulta em:

$$E_m = \frac{1}{3} E_F. \quad (3.6)$$

Quando N for grande, os níveis de energia ficam muito próximos uns dos outros e isto permite-nos aproximar por um contínuo. Desta forma, não teremos mais níveis de energia discretos, mas um certo número de partículas dentro de um intervalo dE com energia entre E e $E + dE$. Surge, então, a necessidade de se definir uma *densidade de estados*, e o número de ocupação (que dava o número de partículas num certo nível) agora terá um sentido probabilístico, e será uma função, também chamada de *fator de Fermi* ou *distribuição de Fermi*.

Em $T \cong 0$, como vimos, todos os níveis abaixo do nível de Fermi estão ocupados, e os níveis acima não são ocupados, assim, o número de ocupação abaixo de E_F será 1 e acima de E_F igual a 0.

Para $T \neq 0$ E_n passa a depender de T e o número de ocupação do nível n é:

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{(E_n - E_F)/k_B T} + 1} \quad (3.7)$$

e a energia de Fermi em três dimensões ($T \cong 0$):

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.8)$$

que, analogamente ao caso unidimensional, depende da densidade de partículas que agora é a densidade volumétrica. É também importante definir a temperatura de Fermi:

$$E_F = k_B T_F \implies T_F = \frac{E_F}{k_B}. \quad (3.9)$$

Fazendo (3.9) na (3.7) obtemos

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{-E_F/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{-T_F/T} + 1}, \quad (3.10)$$

portanto, se $T \ll T_F$, $\langle N_n \rangle \rightarrow 1$, então o sistema com $T \neq 0$ se comporta como se $T = 0$.

Desta forma, antes de se fazer qualquer cálculo com gás de Fermi a temperatura finita ($T \neq 0$) será útil comparar a temperatura do sistema com sua temperatura de

Fermi, pois para $T \ll T_F$ podemos aplicar as equações para $T \cong 0$ e desde já sabemos que o efeito da temperatura não será significativo nas propriedades macroscópicas desses sistemas, quando comparado com os cálculos efetuados para $T \cong 0$.

3.2 A Equação de Estado no Regime Subnuclear

Para densidades até a fase de gotejamento de nêutrons, $\rho \approx 4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$, consideramos que a matéria fria estelar é composta por uma rede de núcleos e um gás de elétrons relativísticos. Neste regime, a equação de estado BPS – Baym, Pethick e Sutherland [19] é usada. No próximo regime, o subnuclear com nêutrons gotejados, duas equações foram usadas, a equação BBP – Baym, Bethe e Pethick [20] se não considerarmos os neutrinos confinados e a GB – Gudmundsson e Buchler [28] se considerarmos os neutrinos confinados.

Em 1931 Chandrasekhar parametrizou a equação de estado de um gás de férmions livres (vide Refs. [21, 22]) obtendo as relações:

$$P = \frac{gc^2}{6\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{\epsilon} dp = \frac{gm^4c^5}{2\hbar^3} \phi(x), \quad (3.11)$$

$$\epsilon = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} \epsilon p^2 dp = \frac{gm^4c^5}{2\hbar^3} \chi(x), \quad (3.12)$$

com

$$n_p = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{g}{6\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 x^3, \quad (3.13)$$

$$x \equiv \frac{p_F}{mc}, \quad (3.14)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \ln \left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad (3.15)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x (1+2x^2) (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \ln \left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}. \quad (3.16)$$

onde g é a degenerescência (para elétrons devemos fazer $g = 2$), n_p é o número de partículas por unidade de volume, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , e p_F é o momento de Fermi da partícula. Além disso fizemos $m = m_e$ onde m_e é a massa do elétron.

De acordo com a Ref. [23] para um plasma neutro completamente ionizado, composto por íons com número de massa A e número atômico Z , o número de elétrons por unidade de volume pode ser escrito como

$$n_e = \frac{Y_e \rho}{m_B},$$

onde $Y_e = Z/A$ é o número de elétrons por bárion, m_B a massa de repouso dos bárions e ρ a densidade de massa.

3.2.1 A Correção Eletrostática

No estado fundamental do sistema ($T = 0$) a distribuição das cargas positivas não é homogênea pois os íons tendem a formar uma rede cristalina. Devemos, então, introduzir algum tipo de correção eletrostática na equação de estado para os elétrons (ver Ref. [26]). Neste trabalho utilizaremos o modelo de *Wigner-Seitz* (ver Ref. [6]), onde a rede cristalina é modelada como um conjunto de células esféricas idênticas de raio r_0 . No centro de cada esfera há um núcleo e z elétrons uniformemente distribuídos. O volume de cada célula unitária é igual a $4\pi r_0^3/3 = 1/n_N$, onde n_N representa o número de núcleos por unidade de volume.

Tomando a carga eletrônica como e , para uma distribuição esférica e homogênea podemos escrever

$$q = -Ze \frac{r^3}{r_0^3},$$

também podemos tomar a interação eletrostática entre os elétrons como sendo

$$E_{e,e} = \int_0^{r_0} \frac{q dq}{r} = \frac{3Z^2 e^2}{5r_0}.$$

Através de uma integração análoga, obtemos a interação entre os elétrons e íons

$$E_{e,i} = Ze \int_0^{r_0} \frac{dq}{r} = -\frac{3Z^2 e^2}{2r_0}.$$

Desta forma, a energia eletrostática por célula é

$$E_R = E_{e,e} + E_{e,i} = -\frac{9Z^2 e^2}{10r_0}. \quad (3.17)$$

Usando-se a relação $n_e = Zn_N$ para eliminar r_0 em favor de n_e na equação anterior, podemos escrever

$$\frac{E_R}{Z} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} Z^{\frac{2}{3}} e^2 n_e^{\frac{2}{3}}, \quad (3.18)$$

que nos fornece a correção da energia eletrostática por elétron.

A correspondente correção da pressão pode ser obtida da relação

$$P_R = n_e^2 \frac{\partial (E_R/Z)}{\partial n_e}. \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.18) na equação (3.19) e realizando a devida derivação,

obtemos

$$P_R = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} Z^{\frac{2}{3}} e^2 n_e^{\frac{4}{3}}. \quad (3.20)$$

Em geral, em regimes de baixas densidades tais correções são desprezíveis e podem ser ignoradas. Entretanto, tais correções tornam-se necessárias para alta densidades. Para $\rho \approx 10^{11} g.cm^{-3}$, por exemplo, a correção eletrostática na densidade de energia do gás de elétrons é da ordem de 15%.

É interessante lembrar também que, além da redução na energia e na pressão dos elétrons, a organização dos núcleos numa rede cristalina influencia, também, a composição química da matéria estelar.

3.2.2 Regime Subnuclear sem Nêutrons Livres

No regime subnuclear a matéria compõe-se essencialmente de núcleos imersos num mar de elétrons, e a interdistância média entre os núcleos,

$$r = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} R_0$$

é bem maior que o raio nuclear, R_0 . Para $\rho = 10^7 g.cm^{-3}$ temos, por exemplo, $r \approx 300R_0$. Portanto, a interação dominante é a eletromagnética.

O regime subnuclear sem nêutrons livres cobre justamente a faixa que vai de $500 g.cm^{-3}$ (onde o gás de elétrons é a componente determinante da pressão e densidade de energia) até a densidade limiar para o gotejamento de nêutrons ($\rho \cong 10^{11} g.cm^{-3}$).

Neste regime, o gás de elétrons pode ser tratado, em primeira aproximação, como um gás de Fermi degenerado. Vamos supor que a matéria estelar seja composta por núcleos de massa A e número atômico Z . Seja n_N a densidade de núcleos por unidade de volume e n_e a densidade de elétrons por unidade de volume. Podemos escrever a densidade de energia do sistema por unidade de volume como

$$\varepsilon(A, Z, n_N) = n_N M(A, Z) c^2 + n_N \varepsilon_R + \varepsilon_e(n_e), \quad (3.21)$$

onde $M(A, Z)c^2$ representa a energia do núcleo (A, Z) , englobando a energia de repouso dos nucleons, ε_e a energia dos elétrons por unidade de volume e ε_R a energia eletrostática da rede por núcleo (negativa).

O valor obtido a partir da Ref. [27] e adotado para a energia da rede (tipo *bcc*) na Ref. [19] é:

$$\varepsilon_R = -1,819620 \frac{Z^2 e^2}{a^2}, \quad \text{onde } a \equiv \left(\frac{2}{n_N} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.22)$$

A densidade de energia do gás de elétrons é dada pela equação (3.12)

$$\varepsilon_e = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \chi(x), \quad (3.23)$$

onde m_e é a massa do elétron.

Podemos exprimir cada termo da equação (3.21) em função apenas de Z , A e n_B , onde n_B é o número de bárions por unidade de volume, utilizando as relações:

$$n_N = \frac{n_B}{A} \quad \text{e} \quad n_e = \frac{Z}{A} n_B. \quad (3.24)$$

Desta forma, para um dado valor de densidade bariônica podemos determinar o núcleo que minimiza a energia do sistema. Tal minimização pode ser operacionalizada supondo-se que Z e A são variáveis contínuas e resolvendo as equações

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)_{A, n_B} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} \right)_{Z, n_B} = 0. \quad (3.25)$$

Com a composição química e a energia do estado fundamental conhecidas, a pressão pode ser obtida através da relação

$$P = n_B^2 \frac{\partial(\varepsilon/n_B)}{\partial n_B}, \quad (3.26)$$

que com a equação (3.21), fornece

$$P = P_e + \frac{1}{3} n_N \varepsilon_R, \quad (3.27)$$

onde P_e é a pressão parcial de elétrons dada por

$$P_e = n_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial n_e} - \varepsilon_e = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \phi(x). \quad (3.28)$$

A equação de estado de Baim *et al.* não incorpora nêutrons livres, devendo portanto ser aplicada ao regime de densidades menores que a densidade limiar de gotejamento de nêutrons. Para determinar a densidade de gotejamento de nêutrons introduzimos na equação (3.21) a densidade de energia dos nêutrons livres e, a seguir, minimizamos a energia total também em relação à fração de nêutrons livres Y_n , definida por

$$Y_n = \frac{n_n}{n_B},$$

onde n_n é o número de nêutrons livres por unidade de volume. Verifica-se que

$$n_e = \frac{Z}{A}(1 - Y_n)n_B.$$

Agora, a grandeza a ser extremizada é

$$\varepsilon(A, Z, n_N) = n_N M(A, Z)c^2 + n_N \varepsilon_R + \varepsilon_e(n_e) + \varepsilon_n(n_e), \quad (3.29)$$

onde $\varepsilon_n(n_e)$ é a densidade de energia dos nêutrons livres. Derivando a equação (3.29) em relação a Y_n e igualando a zero, obtemos

$$\epsilon_F^{(n)} = \frac{M(A, Z)c^2 + Z\epsilon_F^{(e)} + 4Z\varepsilon_R/3n_e}{A}, \quad (3.30)$$

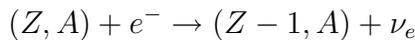
onde $\epsilon_F^{(n)}$ e $\epsilon_F^{(e)}$ são as energias de Fermi dos nêutrons e dos elétrons, respectivamente. Se $\epsilon_F^{(n)} \geq m_n c^2$, onde m_n é a massa do nêutron, os nêutrons passam a preencher um espectro contínuo de energia. Portanto, da equação anterior, vemos que o gotejamento de nêutrons é ditado pela condição

$$M(A, Z)c^2 \geq Am_n c^2 - Z\epsilon_F^{(e)} - 4Z\varepsilon_R/3n_e. \quad (3.31)$$

A densidade limiar para o gotejamento de nêutrons estabelecida pelos autores é igual a $4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$ onde ocorre a predominância do nuclídeo ^{118}Kr .

3.2.3 Regime Subnuclear com Nêutrons Livres

Quando nêutrons começam a ser liberados por núcleos ricos em nêutrons resultantes tanto da captura eletrônica



quanto por reações de foto-emissão de nêutrons, a matéria estelar entra no assim chamado regime subnuclear com nêutrons livres (com a densidade dentro do intervalo $4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3} \lesssim \rho \lesssim 2.8 \times 10^{14} g.cm^{-3}$).

Ao longo desta fase a matéria se apresenta, inicialmente, com núcleos ricos em nêutrons distribuídos numa rede cristalina e imersos num gás uniforme de elétrons relativísticos degenerados e num gás de nêutrons não-relativísticos degenerado. Os nêutrons livres, por sua vez, vão tornando-se mais abundantes à medida que a matéria vai se comprimindo. Como os nêutrons interagem fortemente, ao contrário dos elétrons, eles tendem a reduzir a tensão superficial dos núcleos e patrocinar sua dissociação.

Os cálculos realizados (ver Ref. [20]) são semelhantes aos da Seção 3.2.2. A diferença básica está na inclusão da interação entre os nucleons nos cálculos e na forma de se determinar a energia dos núcleos.

A densidade de energia é escrita como

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon(A, Z, n_N, n_n, V_N) \\ &= n_N(W_N + W_R) + (1 - V_N n_N)\varepsilon_n(n_n) + \varepsilon_e(n_e),\end{aligned}\quad (3.32)$$

onde n_N é o número de núcleos por unidade de volume (densidade de núcleos), n_n a densidade de nêutrons livres, n_e a densidade de elétrons e V_N o volume do núcleo. Quando a pressão do gás de nêutrons externos aos núcleos aumenta, V_N diminui, devendo ser tratado, então, como variável. W_N representa a energia do núcleo, incluindo a energia de repouso, W_R a energia da rede cristalina por núcleo, ε_n a densidade de energia do gás de nêutrons e ε_e a densidade de energia do gás de elétrons. $V_N n_N$ corresponde à fração de volume ocupado pelos núcleos, enquanto que $1 - V_N n_N$ dá a fração de volume ocupado pelos nêutrons livres.

Podemos, então definir a densidade de nêutrons como

$$n_n \equiv \frac{N_n}{V_n} = \frac{N_n}{V(1 - V_N n_N)},\quad (3.33)$$

onde N_n é o número total de nêutrons livres, V_n o volume ocupado por eles e V é o volume do sistema. Como consequência, a densidade bariônica é dada por

$$n_B = A n_N + (1 - V_N n_N) n_n.\quad (3.34)$$

A condição de neutralidade de carga da matéria estelar nos dá

$$n_e = Z n_N.\quad (3.35)$$

Para obter a configuração de equilíbrio devemos minimizar ε fixando n_B , entretanto, ε é função de cinco variáveis e, portanto, precisamos de quatro condições de equilíbrio independentes para minimizar ε .

Primeiro minimizamos ε em relação a A , fixando $Z n_N$ (o número de prótons num dado volume unitário), $A n_N$, $n_N(A - Z)$ (o número de nêutrons nos núcleos), $n_N V_N$ (a fração do volume ocupado pelos núcleos), n_n e o número de nêutrons livres $n_n(1 - V_N n_N)$. Desta forma, teremos ε_n e ε_e também fixos. Definimos agora

$$x \equiv \frac{Z}{A},\quad (3.36)$$

a condição descrita acima se expressa por

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{W_N + W_R}{A} \right)_{x, An_N, V_N n_N, n_n} = 0, \quad (3.37)$$

ou seja, a energia por nucleon deve ser mínima dentro dos núcleos.

A segunda condição é imposta pela estabilidade beta dos núcleos, relacionada com a variação de Z

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)_{A, n_N, V_N, n_n} = 0. \quad (3.38)$$

Entretanto

$$\frac{\partial}{\partial Z} \varepsilon_e(n_e) = \frac{d\varepsilon_e}{dn_e} \frac{\partial n_e}{\partial Z} = \mu_e n_N, \quad (3.39)$$

onde utilizamos a equação (3.35). μ_e é o potencial químico dos elétrons. Comparando as equações (3.32), (3.38) e (3.39), obtemos

$$\mu_e = -\frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A, n_N, V_N, n_n}. \quad (3.40)$$

Já o potencial químico dos nêutrons nos núcleos é dado por

$$\mu_n^{(N)} = \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n}, \quad (3.41)$$

que é a energia mínima necessária para adicionar um nêutron ao núcleo.

Analogamente, para os prótons, temos

$$\begin{aligned} \mu_p^{(N)} &= \frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A-Z, n_N, V_N, n_n} \\ &= \frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A, n_N, V_N, n_n} + \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

Substituindo as equações (3.40) e (3.41) na equação (3.42), e resolvendo a equação resultante para μ_e , obtemos a condição de equilíbrio beta na forma usual

$$\mu_e = \mu_n^{(N)} - \mu_p^{(N)}. \quad (3.43)$$

Essa condição equivale a dizer que não deve haver nenhum custo de energia para transferir um nêutron do gás para o núcleo. Isto implica em minimizar ε em relação a A , fixando-se Z , n_N , V_N e n_B , ou seja,

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} \right)_{Z, n_N, V_N, n_B} = 0. \quad (3.44)$$

Como n_B não é independente das demais variáveis, a equação (3.44) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_B} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial A} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_n}\right)_{Z, n_N, V_N, A} = 0. \quad (3.45)$$

A partir da equação (3.34)

$$\frac{\partial n_n}{\partial A} = -\frac{n_N}{1 - V_N n_N}. \quad (3.46)$$

Já a energia do núcleo por unidade de volume ocupado pelo gás de nêutrons é dada por

$$\frac{n_N V}{V_n} W_N = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} W_N. \quad (3.47)$$

A energia do núcleo e ε_n variam quando o núcleo goteja um nêutron. Sendo assim, o potencial químico dos nêutrons livres deve ser definido por

$$\mu_n^{(G)} = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} + \frac{d\varepsilon_n}{dn_n}. \quad (3.48)$$

Como W_R não depende de n_B , a equação (3.45) pode ser reescrita na forma

$$n_N \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n} = \frac{n_N^2}{1 - V_N n_N} n_N \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} + n_N \frac{d\varepsilon_n}{dn_n}, \quad (3.49)$$

usando-se a equação (3.32). Comparando as equações (3.41) e (3.48) obtemos

$$\mu_n^{(N)} = \mu_n^{(G)}. \quad (3.50)$$

A quarta e última condição de equilíbrio vem da minimização de ε em relação a V_N , fixando-se Z , A , n_N , e $N_n/V = n_n(1 - V_N n_N)$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V_N}\right)_{Z, A, n_N, N_n/V} = 0, \quad (3.51)$$

ou

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V_N}\right)_{Z, A, n_N, n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} = 0. \quad (3.52)$$

Aplicando a equação (3.52) na equação (3.32)

$$\frac{\partial}{\partial V_N} (W_N + W_R)_{Z, A, n_N, n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} + \frac{1 - V_N n_N}{n_N} \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \frac{d\varepsilon}{dn_n} - \varepsilon_n = 0. \quad (3.53)$$

Entretanto

$$P^{(N)} \equiv -\frac{\partial}{\partial V_N} (W_N + W_R)_{Z,A,n_N,n_n}, \quad (3.54)$$

e

$$\frac{\partial n_n}{\partial V_N} = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} n_n. \quad (3.55)$$

Portanto,

$$-P^{(N)} + n_n \frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} + n_n \frac{d\varepsilon}{dn_n} - \varepsilon_n = 0. \quad (3.56)$$

Da equação (3.48) temos

$$\frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} = \mu_n^{(G)} - \frac{d\varepsilon_n}{dn_N}. \quad (3.57)$$

Substituindo na equação (3.55)

$$P^{(N)} = n_n \mu_n^{(G)} - \varepsilon_n. \quad (3.58)$$

No entanto, a pressão do gás de nêutrons é definida por

$$P_n = n_n \mu_n^{(G)} - \varepsilon_n. \quad (3.59)$$

E portanto

$$P^{(N)} = P_n, \quad (3.60)$$

o que expressa o balanço entre a pressão dos núcleos e a pressão externa do gás de nêutrons.

As quatro condições de equilíbrio deduzidas determinam completamente a composição química da matéria em função da densidade. Entretanto, a aplicação de tais condições implica que se especifique W_N , W_R , ε_n e ε_n . Apresentaremos as expressões obtidas pelos autores da Ref. [20] sem deduzí-las²

A energia dos núcleos é escrita como

$$W_N(A, Z, V_N, n_n) = A [(1 - x)m_n c^2 + x m_p c^2 + W(k, x)] + W_C(A, Z, V_N, n_n) + W_S(A, Z, V_N, n_n), \quad (3.61)$$

onde $W_C(A, Z, V_N, n_n)$ é a energia coulombiana, $W_S(A, Z, V_N, n_n)$ a energia superficial

²A dedução de tais expressões é extensa e fugiria aos objetivos deste trabalho, para maiores detalhes conferir as Refs. [20] e [25].

e o termo de volume $W(k, x)$ depende de n_B , através da relação

$$n_B \equiv \frac{2k^3}{3\pi^2}, \quad (3.62)$$

onde k é o número de onda e x a fração relativa de prótons definida na equação (3.36). Incluindo os efeitos da interação nucleon-nucleon através do potencial de Reid, os autores obtiveram, para $x = \frac{1}{2}$

$$W(k, \frac{1}{2}) = -\omega_0 + \frac{1}{2}K \left(1 - \frac{k}{k_0}\right)^2, \quad (3.63)$$

onde $\omega_0 \approx 16MeV$, k_0 é o número de onda que está associado à densidade de saturação ($k_0 \approx 1.4fm^{-1}$) e K a incompressibilidade ($\approx 135MeV$).

Utilizando $W(k, x)$ na determinação da densidade de energia do gás de nêutrons, para o qual $x = 0$, temos

$$\varepsilon_n = n_n [W(k_n, 0) + m_n c^2], \quad (3.64)$$

onde

$$n_n \equiv \frac{2k_n^3}{3\pi^2}. \quad (3.65)$$

O termo de superfície $W_S(A, Z, V_N, n_n)$, é construído de modo que $W_S = 0$ quando a densidade do gás de nêutrons e a densidade no interior dos núcleos são iguais, sendo dado por

$$W_S = \frac{\sigma (W_{ext} - W_{int})}{\omega_0} \left(1 - \frac{n_{ext}}{n_{int}}\right)^{\frac{2}{3}} A^{\frac{2}{3}}, \quad (3.66)$$

onde σ é um parâmetro ajustado pelos dados experimentais, n_{int} e n_{ext} são as densidades de nêutrons no interior dos núcleos e fora dos núcleos, respectivamente, $W_{int} \equiv W(n_{int})$ e $W_{ext} \equiv W(n_{ext})$.

A energia coulombiana, já incluída a correção eletrostática da rede cristalina, é dada por

$$W_{C+L} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_N} \left(1 - \frac{r_N}{r_0}\right)^2 \left(1 + \frac{r_N}{2r_0}\right), \quad (3.67)$$

onde r_N é o raio do núcleo e r_0 o raio da célula esférica definida na Seção 3.2.1.

A pressão obtida é

$$P = P_n + P_e + P_L, \quad (3.68)$$

onde P_n é a pressão do gás de nêutrons, P_e é a pressão do gás de elétrons e P_L é a

pressão da rede, dada por

$$P_L = n_N^2 \left(\frac{\partial W_L}{\partial n_N} \right)_{A,Z,n_N,n_n} . \quad (3.69)$$

Quando $\rho = 4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$, a pressão da matéria é devida quase que totalmente à pressão do gás de elétrons e $P_n/P \approx 0$, mas quando $\rho = 1.5 \times 10^{12} g.cm^{-3}$, $P_n/P \approx 0.20$, e para $\rho = 1.5 \times 10^{13} g.cm^{-3}$, $P_n/P \approx 0.80$.

3.2.4 A Constituição Bariônica do Meio

Em alguns experimentos de colisões de íons pesados observa-se o surgimento de bárions constituídos por um quark diferente daqueles que formam os nucleons (o up e o down) esse quark é chamado strange (estranho), e introduz-se um novo número quântico, a estranheza. Estes bárions, que possuem o quark estranho, são também chamados de híperons. Podemos formar oito bárions com diferentes combinações dos três quarks mais leves, (up, down, strange, ou, u, d, s), sendo dois nucleons e seis híperons (ver Tabela 3.1).

Tabela 3.1: Octeto bariônico: \vec{J}_S é o spin, $\vec{\tau}$ o isospin, τ_3 a terceira componente do isospin e S a estranheza.

Bárion	Massa (MeV)	Composição	\vec{J}_S	$\vec{\tau}$	τ_3	S	Carga
p	938,28	uud	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	1
n	939,57	udd	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
Λ	1115,6	uds	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0
Σ^+	1189,4	uus	$\frac{1}{2}$	1	+1	-1	-1
Σ^0	1192,5	uds	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
Σ^-	1197,3	dds	$\frac{1}{2}$	1	-1	-1	1
Ξ^0	1314,9	uss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-2	0
Ξ^-	1321,3	dss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-1

Acredita-se que tais bárions também surjam sob as altas densidades e energias das estrelas de nêutron.

Eis alguns exemplos de colisões geradoras de bárions mais pesados:

$$\bar{p} + p \longrightarrow \bar{\Lambda} + \Lambda$$

$$K^- + p \longrightarrow \Sigma^- + \pi^+$$

$$\pi^- + p \longrightarrow \Lambda + K^0.$$

Também ocorrem outras reações que propiciam a formação desses bárions:

1. Equilíbrio β , dentro das estrelas de nêutron há nêutrons sofrendo decaimento β , mas há também a reação inversa, ou seja, há um equilíbrio ao qual chamamos equilíbrio β

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e;$$

2. Decaimento de elétrons e káons em múons e neutrinos, contribuindo assim para o resfriamento da estrela³

$$e^- \rightleftharpoons \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$K \longrightarrow 2\gamma$$

$$K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$K^+ + \mu^- \longrightarrow \mu^- + \mu^+ + \nu_\mu \longrightarrow 2\gamma + \nu_\mu;$$

3. Reações envolvendo a interação forte, lembrando que devido ao momento de Fermi elevado os nêutrons não se encontram degenerados

$$n + n \rightleftharpoons n + K + \Lambda$$

$$p + p \rightleftharpoons p + K^+ + \Lambda$$

$$n + n \rightleftharpoons n + K^- + \Sigma^+;$$

4. Com a queda de temperatura, muitas das reações ocasionadas pela interação forte deixam de ocorrer, no entanto os híperons continuam a ser formados através da interação fraca

$$n + p + \mu^- \longrightarrow p + \Sigma^- + 2\gamma + \nu_\mu$$

$$n + n + \mu^- \longrightarrow n + \Sigma^- + 2\gamma + \nu_\mu.$$

³ A queda de temperatura estelar faz com que algumas reações deixem de ocorrer, mas a interação forte está sempre presente entre os hádrons.

Devemos levar em conta a ocorrência de espalhamentos e sucessivos decaimentos que produzem novas partículas, completando a lista do octeto bariônico. Muitos dos neutrinos nessas reações escapam. Também pode haver emissão de raios X resultando numa queda maior da temperatura que pode chegar a $10^8 K$ em um mês. Devido à emissão de fótons, a temperatura superficial pode cair até $10^5 K$.

3.3 A Equação de Estado no Regime Hadrônico

A Hadrodinâmica Quântica ou QHD (do inglês Quantum Hadro-Dynamics), foi proposta em 1974 por Walecka [29]. Assim como a Eletrodinâmica Quântica ou QED (do inglês Quantum Electro-Dynamics) descreve as interações entre partículas carregadas através da troca de fótons a QHD é uma teoria com o objetivo de descrever a interação entre hádrons através da troca de mésons massivos. Hádrons são partículas que interagem através da força forte (nêutrons, prótons, mésons, etc). As estrelas de nêutron são formadas por bárions interagindo através da força forte, ou seja, são compostas por hádrons que interagem entre si. Como a matéria nas estrelas de nêutron é diferente da matéria nuclear, em densidade (principalmente) e em seus constituintes, aplicaremos as interações hadrônicas através de uma generalização do modelo proposto por Walecka.

Há duas subdivisões da QHD que diferenciam-se pelos mésons admitidos no sistema:

Tabela 3.2: Divisões da QHD

MODELO	MÉSONS
QHD – I	σ, ω
QHD – II	$\sigma, \omega, \pi, \rho$

Essa teoria alcançou grande sucesso devido ao fato da mesma descrever de forma bastante simples a energia de ligação da matéria nuclear como um efeito relativístico que “desliga” a atração produzindo um mínimo para a energia de ligação na energia e densidade corretas em contrapartida com modelos não relativísticos que precisavam de cálculos elaborados para dar conta desses números. No entanto, a compressibilidade da matéria nuclear obtida a partir dessa teoria é muito alta se comparada com a compressibilidade extraída de dados do “modo de respiração” – ressonância monopolar nuclear, muito importante para os estudos da evolução estelar. Portanto, modificações capazes de produzir uma descrição mais adequada da compressibilidade foram propostas.

Estes modelos serão aqui utilizados para obtenção de uma equação de estado para a matéria bariônica à temperatura zero, isto é, no estado fundamental, no contexto

da aproximação de campo médio, que reduz as equações de um sistema de muitos corpos para um sistema de poucas equações. Faremos agora uma breve apresentação do modelo de Walecka. Como é usual, consideraremos daqui por diante $\eta = c = 1$.

3.3.1 O Modelo QHD – I

Na hadrodinâmica quântica considera-se que os nucleons não possuem estrutura interna, ou seja, eles são vistos como partículas fundamentais. Por isso a interação entre nucleons é descrita por acoplamento dos campos dos nucleons com os campos dos mésons. Pelo fato dos mésons σ e ω possuírem isospin zero, eles não distinguem entre prótons e nêutrons. Por isso vamos utilizar a terminologia “nucleon”, pelo fato de estas partículas (prótons e nêutrons) terem massas muito próximas e, a menos da carga elétrica, elas são muito semelhantes. Neste modelo o méson σ é o responsável pela parte atrativa da força nuclear, que domina a longa distância (na escala nuclear) e o méson ω pela parte repulsiva, em curtas distâncias. A fim de construir a densidade lagrangiana para esse sistema, devemos observar as características das partículas na tabela acima. Escrevendo os termos para cada partícula, bem como termos de interação, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B) \psi - \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - m_\sigma^2 \sigma^2] \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu + g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Nesta lagrangiana, podemos distinguir um termo para os nucleons livres, um para os mésons σ e outro para os mésons ω , além dos termos de interação, $g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu$ e $g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma$. Além disso

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \quad (3.71)$$

é um tensor antissimétrico. A partir da equação (3.70), onde as coordenadas generali-

Tabela 3.3: Campos da QHD

CAMPOS	SPIN	ISOSPIN	PARTÍCULA	MASSA
Ψ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Nucleon	m_B
σ	0	0	Méson escalar - isoscalar	m_σ
ω	1	0	Méson vetorial - isoscalar	m_ω
π	0	1	Méson pseudoescalar - isovetorial	m_π
ρ	1	1	Méson vetorial - isovetorial	m_ρ

zadas são, ψ , σ e ω_ν , obtemos as equações de movimento:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (3.72)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.73)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0. \quad (3.74)$$

A energia do sistema é obtida através do tensor energia-momentum, proveniente dos estudos de mecânica dos meios contínuos:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_i \partial_\nu \phi_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \right) \quad (3.75)$$

onde o índice i soma todas as coordenadas generalizadas e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico dado por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

A partir da equação de Dirac livre ou com interação [30], é possível obter a expressão:

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0, \quad (3.77)$$

ou seja:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (3.78)$$

que é a equação da continuidade, portanto o termo entre parênteses é uma corrente bariônica que é conservada. Analisando as equações anteriores, vemos que a equação (3.72) é uma equação de Klein-Gordon com fonte escalar, e a equação (3.73) é uma equação de Proca cuja fonte é a corrente bariônica conservada:

$$j^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \quad (3.79)$$

pois obedece a equação da continuidade:

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \quad (3.80)$$

Já a equação (3.74) é uma equação de Dirac com interação. As equações (3.72), (3.73) e (3.74) são equações diferenciais acopladas sem solução exata, sendo necessário utilizar algum método de aproximação. Utilizaremos a aproximação de campo mé-

dio neste trabalho. Porém, antes desse procedimento vamos obter o tensor energia-momentum (ver Ref. [32]) desse sistema:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\partial_\lambda \sigma \partial^\lambda \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} - m_\omega^2 \omega_\lambda \omega^\lambda \right] g_{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\nu \omega^\lambda F_{\lambda\mu}. \quad (3.81)$$

Outra relação útil (ver Ref. [24]), é que, para um fluido uniforme, o valor médio do tensor $T_{\mu\nu}$ é dado por

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (3.82)$$

onde ε é a densidade de energia do fluido, P a pressão e $u_\mu = (1, \mathbf{u})$ o quadri-vetor velocidade associado ao movimento do fluido. Portanto, para um fluido uniforme em repouso, valem as relações:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (3.83)$$

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ij} \rangle. \quad (3.84)$$

Em outras palavras, conhecendo os campos poderemos obter a pressão e a densidade de energia do sistema, que são as equações de estado do sistema.

Apartir da equação de Dirac, obtém-se uma solução geral para ψ que no formalismo de segunda quantização tem a seguinte forma:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha} \left[f_{\alpha} A_{\alpha} + \tilde{f}_{\alpha} B_{\alpha}^{\dagger} \right], \quad (3.85)$$

onde V é o volume do sistema, A_{α} é o operador de aniquilação para partículas, B_{α}^{\dagger} é o operador de criação para antipartículas, f_{α} e \tilde{f}_{α} são bases escolhidas de acordo com a conveniência de cada problema. Para a equação (3.74) uma base adequada é a onda plana. Pelo fato de estudarmos apenas o estado fundamental ($T = 0$), não levaremos em consideração as antipartículas. A notação utilizada $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$ deixa claro que ψ é um operador, e a quantização é proveniente das regras de anticomutação obedecidas pelos operadores de criação e aniquilação:

$$\{A_{\alpha}, A_{\alpha'}^{\dagger}\} = \{B_{\alpha}, B_{\alpha'}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\alpha'} \quad (3.86)$$

$$\{A_{\alpha}, B_{\alpha'}\} = \{A_{\alpha}^{\dagger}, B_{\alpha'}^{\dagger}\} = 0. \quad (3.87)$$

Isto também pode ser aplicado aos campos dos mésons, com as devidas modificações mas não será feito porque utilizaremos a aproximação de campo médio e, como veremos, ela apenas “quantiza” o campo dos nucleons. O estado fundamental do sistema $|F\rangle$ é construído arranjando os nucleons nos níveis de energia até o nível de Fermi, de acordo com o princípio da exclusão de Pauli:

$$|F\rangle = \prod_{\alpha}^{p_F} A_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle, \quad (3.88)$$

onde p_F é o momento de Fermi e $|0\rangle$ é o estado de vácuo ou estado de mais baixa energia, tal que:

$$A_{\alpha} |0\rangle = B_{\alpha} |0\rangle = 0. \quad (3.89)$$

Deste modo, para calcularmos o valor médio de um certo observável, um operador \hat{O} no estado fundamental, fazemos:

$$O = \langle \hat{O} \rangle = \langle F | \hat{O} | F \rangle. \quad (3.90)$$

3.3.2 A Aproximação de Campo Médio

Na literatura encontramos diferentes procedimentos denominados de “aproximação de campo médio” ou “mean field theory” (MFT - teoria de campo médio), por isso vamos descrever o que utilizaremos.

Quando a densidade de bárions aumenta, tal que o número de quanta trocados entre os nucleons for intenso o suficiente para que as flutuações quânticas sejam desprezíveis, os campos mesônicos comportam-se como campos clássicos. Assim, os nucleons movem-se como partículas independentes e interagem através de um campo médio comum a todos. Com isto, o problema de muitos corpos reduz-se a um problema de um corpo sob a influência de um potencial efetivo.

No modelo utilizado, os observáveis são os nucleons, enquanto os mésons são virtuais, e isso implica na inexistência de correntes mesônicas. Por isso, os campos dos mésons não são quantizados, são eliminadas as flutuações quânticas, e sem tais flutuações eles tornam-se clássicos. Os campos mesônicos são substituídos por campos médios que não dependem do espaço-tempo, apenas da densidade bariônica. Considerando simetria esférica, não deve haver direção preferencial na matéria bariônica (espaço isotrópico). Assim, para que haja simetria por translação e rotação devemos remover os componentes vetoriais do campo $\omega^{\mu} = (\omega_0, \vec{\omega})$, tal que:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = 0. \quad (3.91)$$

Também considera-se que o sistema seja estático para os campos mesônicos (isto remove a dinâmica do problema):

$$\partial_\mu \sigma = 0 \quad (3.92)$$

$$\partial_\mu \omega_\mu = 0. \quad (3.93)$$

Estas considerações eliminam as correntes mesônicas, mas devemos lembrar que elas não se aplicam aos bárions, não eliminando a corrente bariônica, que como vimos é conservada. O campo dos nucleons é tratado como um operador e é quantizado. Assim, o resultado é:

$$\sigma(x_\mu) \rightarrow \langle \sigma(x_\mu) \rangle \equiv \sigma_0 \quad (3.94)$$

$$\omega_\mu(x_\mu) \rightarrow \langle \omega_\mu(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \omega_0, \quad (3.95)$$

onde a notação evidencia a não dependência do espaço-tempo⁴ e $\delta_{\mu 0}$ é apenas para eliminar a parte vetorial quando o quadri-vetor ω_μ aparecer nas equações, restando apenas o campo ω_0 .

Com efeito, nessa aproximação de campo médio, a densidade lagrangiana (3.70) torna-se:

$$\mathcal{L}_{ACM} = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \quad (3.96)$$

e o tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu}^{ACM} = \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma_0^2 - m_\omega^2 \omega_0^2] g_{\mu\nu} + \langle i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \rangle. \quad (3.97)$$

A densidade de energia e a pressão ficam:

$$\varepsilon_{ACM} = \langle i\bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle + \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma_0^2 - m_\omega^2 \omega_0^2] \quad (3.98)$$

$$P_{ACM} = -\frac{1}{3} \langle i\bar{\psi} (\vec{\gamma} \cdot \nabla) \psi \rangle - \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma_0^2 - m_\omega^2 \omega_0^2]. \quad (3.99)$$

As equações de movimento obtidas anteriormente (3.72), (3.73) e (3.74), agora

⁴Não confundir esta notação com o valor médio de uma função, que resulta em um número, isto é, uma constante.

tornam-se:

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (3.100)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle \quad (3.101)$$

$$[(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma_0 \omega_0) - (m_B - g_\sigma \sigma_0)] \psi = 0. \quad (3.102)$$

Definindo a densidade escalar

$$\rho_S \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rangle = \langle F | \psi^\dagger \gamma^0 \psi | F \rangle \quad (3.103)$$

e a densidade bariônica (número de bárions por volume)

$$\rho_B \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \langle F | \psi^\dagger \psi | F \rangle, \quad (3.104)$$

podemos re-escrever as equações (3.100) e (3.101) como

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_S \quad (3.105)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B, \quad (3.106)$$

onde está explícito que os mésons devem ser massivos (m_σ e $m_\omega \neq 0$) e mostra sua dependência com a densidade.

Podemos verificar na equação (3.102) que o campo σ_0 atua na massa do nucleon, diminuindo-a com a interação, por isso, podemos definir uma “massa efetiva” dada por

$$m_B^* = m_B - g_\sigma \sigma_0. \quad (3.107)$$

O primeiro termo das equações (3.98) e (3.99) é calculado através da equação (3.102) conforme a Ref. [30], desta forma

$$\begin{aligned} \langle i\bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle &= \langle \bar{\psi} [i\vec{\gamma} \cdot \nabla + g_\omega \gamma_0 \omega_0 + m_B^*] \psi \rangle \\ &= \langle \bar{\psi} (i\vec{\gamma} \cdot \nabla + m_B^*) \psi \rangle + \langle \bar{\psi} (g_\omega \gamma_0 \omega_0) \psi \rangle \\ &= \langle \psi^\dagger (i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \nabla + \gamma^0 m_B^*) \psi \rangle + \langle \psi^\dagger (g_\omega \omega_0) \psi \rangle \\ &= \langle F | \psi^\dagger (i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \nabla + \gamma^0 m_B^*) \psi | F \rangle + \langle F | \psi^\dagger (g_\omega \omega_0) \psi | F \rangle. \end{aligned} \quad (3.108)$$

O que resulta em⁵:

$$\langle F|\psi^\dagger (i\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \nabla + \gamma^0 m_B^*) \psi|F\rangle = \gamma \int_0^{p_F} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} \quad (3.109)$$

$$\langle F|\psi^\dagger (g_\omega\omega_0) \psi|F\rangle = g_\omega\omega_0 \langle F|\psi^\dagger\psi|F\rangle = g_\omega\omega_0\rho_B, \quad (3.110)$$

onde γ é a degenerescência de spin e isospin, que para matéria simétrica⁶ (número igual de prótons e nêutrons) vale 4. Como o sistema está no estado fundamental ($T = 0$), a densidade bariônica, no contínuo, é simplesmente a integral de uma função degrau.

$$\rho_B = \gamma \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta\sqrt{p_F^2 - p^2} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{\gamma p_F^3}{6\pi^2}. \quad (3.111)$$

O cálculo do primeiro termo da pressão na equação (3.108) de acordo com a Ref. [30] resulta em:

$$\langle -i\bar{\psi}(\vec{\gamma} \cdot \nabla) \psi \rangle = \langle \psi^\dagger (i\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi \rangle = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \quad (3.112)$$

e a densidade escalar

$$\rho_S = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p. \quad (3.113)$$

Com as equações (3.105), (3.106) e (3.107), podemos re-escrever as equações (3.98) e (3.99) como:

$$\varepsilon_{ACM} = \frac{1}{2} [m_\omega^2\omega_0^2 + m_\sigma^2\sigma_0^2] + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} d^3p \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} \quad (3.114)$$

$$P_{ACM} = \frac{1}{2} [m_\omega^2\omega_0^2 - m_\sigma^2\sigma_0^2] + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \quad (3.115)$$

⁵Lembremos que aqui utilizamos o sistema natural de unidades onde: $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$

⁶Este modelo não permite a descrição de matéria assimétrica, veremos adiante que para isso é necessário incluir o méson ρ .

ou

$$\varepsilon_{ACM} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 + \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} d^3p \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} \quad (3.116)$$

$$P_{ACM} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p. \quad (3.117)$$

Para determinar a massa efetiva podemos efetuar dois tipos de cálculo: através da minimização de ε em relação a σ_0 :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_0} \right)_{\omega_0, p_F} = 0 \quad (3.118)$$

ou através da substituição das equações (3.105) e (3.113) na equação (3.107). Em ambos os casos, obtém-se:

$$m_B^* = m_B - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p, \quad (3.119)$$

que é uma equação transcendental (deve ser resolvida numericamente). E então podemos numericamente encontrar os valores da densidade de energia e pressão.

As constantes g_σ e g_ω são ajustadas utilizando-se as propriedades da matéria nuclear no ponto de saturação [30]: a energia de ligação por nucleon (B/A) e o momento de Fermi (p_F):

$$-\frac{B}{A} = - \left(\frac{\varepsilon}{\rho_B} - m_B \right) = 15.75 MeV \quad (3.120)$$

$$p_F = 1.42 fm^{-1}. \quad (3.121)$$

Também são importantes a incompressibilidade nuclear (K) e a energia de simetria (ε_{sym}):

$$K(\rho_0) = 9\rho_0^2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_B^2} \right]_{\rho_B = \rho_0} \quad (3.122)$$

$$\varepsilon_{sym} = \frac{1}{2} \rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_3=0} \right] = \frac{1}{6} \frac{p_F^2}{\sqrt{p_F^2 + m_B^{*2}}}, \quad (3.123)$$

onde

$$\rho_3 = \rho_p - \rho_n \quad (3.124)$$

é igual a zero para a matéria simétrica, do modelo QHD-I, sendo ρ_p e ρ_n as densidades de prótons e nêutrons.

A Tabela 3.4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com QHD-I e os valores esperados:

Tabela 3.4: Problemas com QHD-I

	m_B^*/m_B	K (MeV)	ε_{sym}
Esperado	0.7 a 0.8	210 ± 30	27 a 36
QHD-I	0.556	540	22.1

Percebe-se discrepância nos valores da massa efetiva, incompressibilidade e energia de simetria, indicando que o modelo QHD-I precisa ser melhorado.

3.3.3 Modelo de Walecka Não-Linear

Além de corrigir o valor da incompressibilidade K e da massa efetiva m_B^* , no ponto de saturação, são introduzidos na lagrangiana do modelo QHD-I termos não lineares no campo do méson σ , conforme a Ref. [31]. Em termos do formalismo de Feynmann, isso significa incluir termos de auto-interação desse campo, que são correções quânticas. A lagrangiana não-linear (NL) tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{1}{3!}k\sigma^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma^4, \quad (3.125)$$

onde k e λ são constantes ajustadas a fim de obterem-se melhores valores para K e m_B^* no ponto de saturação da matéria nuclear. Esta modificação altera a equação de movimento (3.72) para:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2}k\sigma^2 + \frac{1}{6}\lambda\sigma^3 = g_\sigma \bar{\psi}\psi. \quad (3.126)$$

Usando a aproximação de campo médio:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2}\sigma_0^2 - \frac{\lambda}{6m_\sigma^2}\sigma_0^3 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2}\rho_S \quad (3.127)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2}\rho_B. \quad (3.128)$$

A densidade de energia e pressão do sistema, em relação às equações (3.114) e

(3.115), tornam-se:

$$\varepsilon_{ACM} = \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 + \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 + \frac{k}{6}\sigma_0^3 + \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} d^3p \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} \quad (3.129)$$

$$P_{ACM} = \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 - \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 - \frac{k}{6}\sigma_0^3 - \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \quad (3.130)$$

e a massa efetiva fica

$$m_B^* = m_B + \frac{k}{2m_\sigma^2 g_\sigma} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\lambda}{6m_\sigma^2 g_\sigma} (m_B - m_B^*)^3 - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_S. \quad (3.131)$$

3.3.4 Hadrodinâmica Quântica – II

Até o presente, as equações apresentadas apenas descrevem interações entre núcleons, mais especificamente, interações do tipo próton-próton e nêutron-nêutron. Os mésons σ e ω não fazem distinção entre prótons e nêutrons, por isso não descrevem a interação próton-nêutron. Para tal, deve-se incluir o méson ρ , que permite a descrição da matéria assimétrica, sendo o responsável por corrigir o valor da energia de simetria do modelo QHD-I. O méson π na aproximação de campo médio tem contribuição nula, de acordo com a Ref. [30], por isso não será considerado. O méson ρ é um vetor-isovetor, o termo correspondente na lagrangiana para a propagação é uma lagrangiana de Proca:

$$-\frac{1}{4}\vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu, \quad (3.132)$$

e para a interação deve conter o isospin a fim de permitir a interação entre prótons e nêutrons ou, de maneira mais geral, entre partículas em diferentes estados de isospin:

$$g_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu (\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) \psi, \quad (3.133)$$

onde $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu - g_\rho (\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$ e a notação $\vec{\rho}^\mu$ indica ser um quadri-vetor no espaço-tempo e vetor no espaço de isospin (isospin = 1), pois o méson ρ é um tripleto⁷ de quadrivetores:

$$\vec{\rho}^\mu = \begin{pmatrix} \rho_1^0 & \rho_1^x & \rho_1^y & \rho_1^z \\ \rho_2^0 & \rho_2^x & \rho_2^y & \rho_2^z \\ \rho_3^0 & \rho_3^x & \rho_3^y & \rho_3^z \end{pmatrix}.$$

A lagrangiana do modelo QHD-II com termos não-lineares, sem o méson π , é dada

⁷Isto é, existem três estados de carga, positivo, negativo e neutro.

por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3!} k \sigma^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{2} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu. \end{aligned} \quad (3.134)$$

A partir da lagrangiana da equação (3.134), obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{6} \lambda \sigma^3 = g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (3.135)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \quad (3.136)$$

$$\partial_\mu \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{\rho}^\nu = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi \quad (3.137)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0. \quad (3.138)$$

Seguindo o mesmo procedimento a fim de aplicar a aproximação de campo médio, a invariância por translação e rotação implica em:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \langle \rho_{(i)}^\mu \rangle = 0, \quad (3.139)$$

onde $i, \mu = 1, 2, 3$ (parte espacial), e a invariância por rotação em relação ao eixo \hat{z} no espaço de isospin:

$$\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_2 \rangle = 0, \quad (3.140)$$

restando apenas τ_3 , assim:

$$\langle \rho_1^0 \rangle = \langle \rho_2^0 \rangle = 0 \quad (3.141)$$

e a operação de τ_3 em $|F\rangle$ resulta em:

$$\tau_3 |F\rangle = \frac{1}{2} (N_p - N_n) |F\rangle. \quad (3.142)$$

Com efeito, a aproximação de campo médio simplifica o problema porque efetivamente apenas leva em conta a parte temporal do méson ρ neutro, onde definimos

$\langle \rho_0^3 \rangle \equiv \rho_{03}$. Então:

$$\sigma(x_\mu) \rightarrow \langle \sigma(x_\mu) \rangle \equiv \sigma_0 \quad (3.143)$$

$$\omega_\mu(x_\mu) \rightarrow \langle \omega_\mu(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \omega_0 \quad (3.144)$$

$$\rho_\mu^{(j)}(x_\mu) \rightarrow \langle \rho_\mu^{(j)}(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \delta^{j3} \rho_{03}. \quad (3.145)$$

Com isto as equações de movimento (3.135) a (3.138) são simplificadas:

$$m_\sigma^2 \rho_0 + \frac{1}{2} k \sigma_0^2 + \frac{1}{6} \lambda \sigma_0^3 = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (3.146)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \bar{\psi} | \gamma^0 \psi \rangle \quad (3.147)$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = g_\rho \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle \quad (3.148)$$

$$[i \gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - g_\rho \gamma^0 \tau_3 \rho_{03} - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0. \quad (3.149)$$

Porém, agora temos:

$$\rho_S \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \bar{\psi}_p \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n \psi_n \rangle = \rho_S^p + \rho_S^n \quad (3.150)$$

$$\rho_S^i = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{F_i}} \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3 p \quad , \quad i = p, n \quad (3.151)$$

$$\rho_B \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = \langle \bar{\psi}_p^\dagger \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n^\dagger \psi_n \rangle = \rho_p + \rho_n \quad (3.152)$$

$$\rho_i = \frac{\gamma}{6\pi^2} p_{F_i}^3 \quad , \quad i = p, n, \quad (3.153)$$

estando a equação (3.153) em acordo com a equação (3.152) apenas com a diferença de que agora temos duas distribuições: uma para prótons e outra para nêutrons, e também:

$$\rho_3 \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle = \frac{1}{2} (\langle \bar{\psi}_p^\dagger \psi_p \rangle - \langle \bar{\psi}_n^\dagger \psi_n \rangle) = \frac{1}{2} (\rho_p - \rho_n), \quad (3.154)$$

onde a equação (3.154) está de acordo com as equações (3.142) e (3.124).

Com isto, as equações para os campos podem ser escritas:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6m_\sigma^2} \lambda \sigma_0^3 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_S \quad (3.155)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B \quad (3.156)$$

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \rho_3. \quad (3.157)$$

Novamente podemos escrever a lagrangiana de campo médio e, através do tensor energia-momentum definido na equação (3.75), obtemos as equações de estado:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ACM} &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \left(\sum_{i=n,p} \int_0^{p_{F_i}} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} d^3p \right) \\ &+ \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \rho_{03}^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 + \frac{k}{6} \sigma_0^3 + \frac{\lambda}{24} \sigma_0^4 \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} P_{ACM} &= \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \left(\sum_{i=n,p} \int_0^{p_{F_i}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \right) \\ &+ \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \rho_{03}^2 - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 - \frac{k}{6} \sigma_0^3 - \frac{\lambda}{24} \sigma_0^4, \end{aligned} \quad (3.159)$$

lembrando que neste caso $\gamma = 2$, referindo-se somente à degenerescência de spin. Com a inclusão do méson π , há uma modificação no cálculo da energia de simetria:

$$\varepsilon_{sym} = \frac{1}{2} \rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} = \frac{g_\rho^2}{12\pi^2 m_\rho^2} p_F^3 + \frac{1}{6} \frac{p_F^2}{\sqrt{p_F^2 + m_B^{*2}}}, \quad (3.160)$$

onde g_ρ e m_ρ deixam em evidência a importância do méson ρ neste cálculo, se compararmos com a equação (3.123). Como o número de parâmetros aumentou, agora é possível melhorar os resultados do modelo em relação aos valores esperados, mesmo sendo a energia de simetria calculada para matéria simétrica, onde o méson ρ não atua. Este modelo é aplicado em núcleos atômicos para descrever a interação forte entre os nucleons, que são bárions. Pelo fato de numa estrela de nêutron haver bárions interagindo através da força nuclear forte, será feita uma generalização da hadrodinâmica quântica com o intuito de aplicá-la em tais objetos celestes.

Os momenta de Fermi dos nucleons são obtidos através do potencial termodinâmico (Ω):

$$\Omega = E - TS - \sum_{i=p,n} \mu_i N_i, \quad (3.161)$$

onde E é a energia, T a temperatura, S a entropia, μ o potencial químico e N o número de partículas. Os índices referem-se a prótons e nêutrons. O potencial termodinâmico também pode ser obtido através do cálculo da função de partição. No estado fundamental, $T = 0$, e tendo apenas partículas, a função distribuição é uma função

degrau. De acordo com a Ref. [33]:

$$\Omega = \int \left(\frac{1}{2} [(\nabla\sigma_0)^2 - (\nabla\omega_0)^2 - (\nabla\rho_{03})^2] - V_{ef} \right) d^3r, \quad (3.162)$$

onde

$$V_{ef} = \frac{1}{2} \left[m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{2}{3!} k \sigma_0^3 + \frac{2}{4!} \lambda \sigma_0^4 - m_\omega^2 \omega_0^2 - m_\rho^2 \rho_{03}^2 \right] + \sum_i \left[\mu_i \rho_i - \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\sqrt{p^2 + m_i^{*2}} + g_\omega \omega_0 + g_\rho \tau_{3i} \rho_{03} \right) \right]. \quad (3.163)$$

Minimizando Ω em relação a p_{F_p} e p_{F_n} , obtém-se:

$$p_{F_p}^2 \left(\sqrt{p_{F_p}^2 + m_p^{*2}} + g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} - \mu_p \right) = 0 \quad (3.164)$$

$$p_{F_n}^2 \left(\sqrt{p_{F_n}^2 + m_n^{*2}} + g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} - \mu_n \right) = 0, \quad (3.165)$$

onde $p_{F_p} = p_{F_n} = 0$ ou para p_{F_p} e p_{F_n} diferentes de zero, obtemos:

$$\mu_p = \sqrt{p_{F_p}^2 + m_p^{*2}} + g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} = 0 \quad (3.166)$$

$$\mu_n = \sqrt{p_{F_n}^2 + m_n^{*2}} + g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} \quad (3.167)$$

ou

$$p_{F_p} = \sqrt{\left(\mu_p - g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} \right)^2 - m_p^{*2}} \quad (3.168)$$

$$p_{F_n} = \sqrt{\left(\mu_n - g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} \right)^2 - m_n^{*2}}. \quad (3.169)$$

3.4 O Modelo de Sacola do M.I.T.

A grande incerteza teórica na descrição da fase de quarks (até mesmo para decidir sobre a sua existência) é, sem dúvida, a equação de estado. Não sabemos como é a equação de estado num intervalo grande de densidades (desde aproximadamente umas poucas vezes a densidade de equilíbrio nuclear ρ_0 até dezenas de vezes ρ_0) as quais são possivelmente atingidas numa estrela de nêutron. Até hoje, infelizmente, não existe nenhuma teoria que cubra esse intervalo de densidades com relação aos graus de liberdade dos quarks. Na Ref. [35] mostrou-se que os efeitos do meio aumentam a

energia por bárion da matéria de quarks (com estranheza incluída) tornando portanto a fase de quarks menos favorável do ponto de vista energético. A razão física para um aumento de energia por bárion é a dependência da massa efetiva com a densidade deduzida. Ela aumenta com o aumento da densidade.

Nesse trabalho usaremos uma variação desse modelo para o cálculo da equação de estado. Espera-se que a transição para matéria de quarks ocorra quando a matéria nuclear for comprimida tanto que seus constituintes hadrônicos se sobrepõem uns aos outros. Nestas circunstâncias, quarks em diferentes hádrons podem se intercambiar livremente e os graus de liberdade da matéria ficam sendo os dos quarks. A matéria fica então melhor descrita por quarks que constituem os hádrons, do que por hádrons. Devemos enfatizar que a densidade de matéria nuclear ($\rho = 1 \times 10^{14}$) é só um pouco menor que a da matéria hadrônica ($\rho = 2.8 \times 10^{14}$). Hádrons no núcleo estão quase se sobrepondo e basta uma pequena compressão para que a transição ocorra.

A teoria de quarks e glúons, a cromodinâmica quântica (ou QCD) contém dois aspectos fundamentais: liberdade assintótica e confinamento. Esses dois aspectos são incorporados ao modelo de sacola da seguinte maneira:

–**dentro da sacola** as interações não são consideradas (ou são tratadas com teoria de perturbação de ordem mais baixa);

–**fora da sacola** quarks não existem como partículas livres. Isto é alcançado, dando-se ao vácuo uma densidade de energia constante \mathbb{B} que mantém quarks e glúons confinados em pequenas regiões do espaço.

O modelo de sacola tem sido usado para descrever a matéria de quarks e glúons não apenas dentro dos hádrons, como também em qualquer volume fechado finito. É por isso que usamos este modelo nas estrelas de nêutron. A diferença de energia entre o estado fundamental do vácuo físico até o vácuo QCD dentro da sacola é alcançado adicionando-se o termo.

No modelo de sacola, a equação de estado para o plasma de quarks e glúons livres é dada por:

$$P = \frac{1}{3}(\varepsilon - 4\mathbb{B}) \quad (3.170)$$

$$\varepsilon_P = \frac{N_c N_f}{\pi^2} \left(\frac{7}{60} \pi^4 T^4 + \frac{1}{20} \pi^2 T^2 \mu_q^2 + \frac{\mu_q^4}{4} \right) + \frac{4}{15} N_g \pi^2 T^4 + \mathbb{B}, \quad (3.171)$$

onde N_f é o número de sabores de quarks leves, N_c o número de cores e N_g o número de glúons no plasma. T é a temperatura que só foi incluída aqui por erudição, visto que estamos utilizando a aproximação de $T = 0$ (vide a Seção 3.1).

3.4.1 A Equação de Estado no Regime de Quarks

O modelo de sacola de quarks com massa efetiva é uma técnica usada para descrever de forma não perturbativa interações complexas e efeitos do meio como modos coletivos em sistemas de muitas partículas. A idéia básica é que as partículas de tais sistemas adquirem uma massa efetiva devido à interação com o resto do sistema. Adotando o esquema de quasi-partículas, efeitos do meio foram recentemente incorporados na equação de estado dos quarks no contexto do modelo de sacola do M.I.T. A massa efetiva aparece como um polo do propagador do quark iterado (e portanto não perturbativo) para potenciais químicos finitos, o qual é calculado na aproximação de densidade alta.

O resultado desse cálculo é uma massa efetiva para os quarks dependente do potencial químico da seguinte maneira:

$$m_f^* = \frac{m_f}{2} + \sqrt{\frac{m_f^2}{4} + \frac{g^2 \mu_f^2}{6\pi^2}}, \quad (3.172)$$

onde g é a constante de acoplamento forte para o plasma de quarks e glúons, μ_f é o potencial químico dos quarks, $f = u, d, s$ e $m_u = m_d = 0$ e $m_s = 150 \text{ MeV}$ são as massas correntes adotadas para os quarks.

Tabela 3.5: Equações de estado que utilizamos nos três regimes de densidade

Região	Densidade (g.cm-3)	Estrutura	Equação de Estado
I	$2 \times 10^3 < \rho < 4.3 \times 10^{11}$	Rede cristalina; núcleos leves e gás de elétrons.	BPS
II	$4.3 \times 10^{11} < \rho < 3 \times 10^{13}$	Rede cristalina; núcleos pesados, gás de elétrons relativísticos e gás de nêutrons (\pm neutrinos).	BBP e GB
III	$3 \times 10^{13} < \rho < 5 \times 10^{15}$	Nucleons relativísticos, mésons, múons, elétrons (\pm neutrinos).	QHD
IV	$\rho > 5 \times 10^{15}$	Quarks e glúons desconfina-dos.	Modelo de sacola do MIT

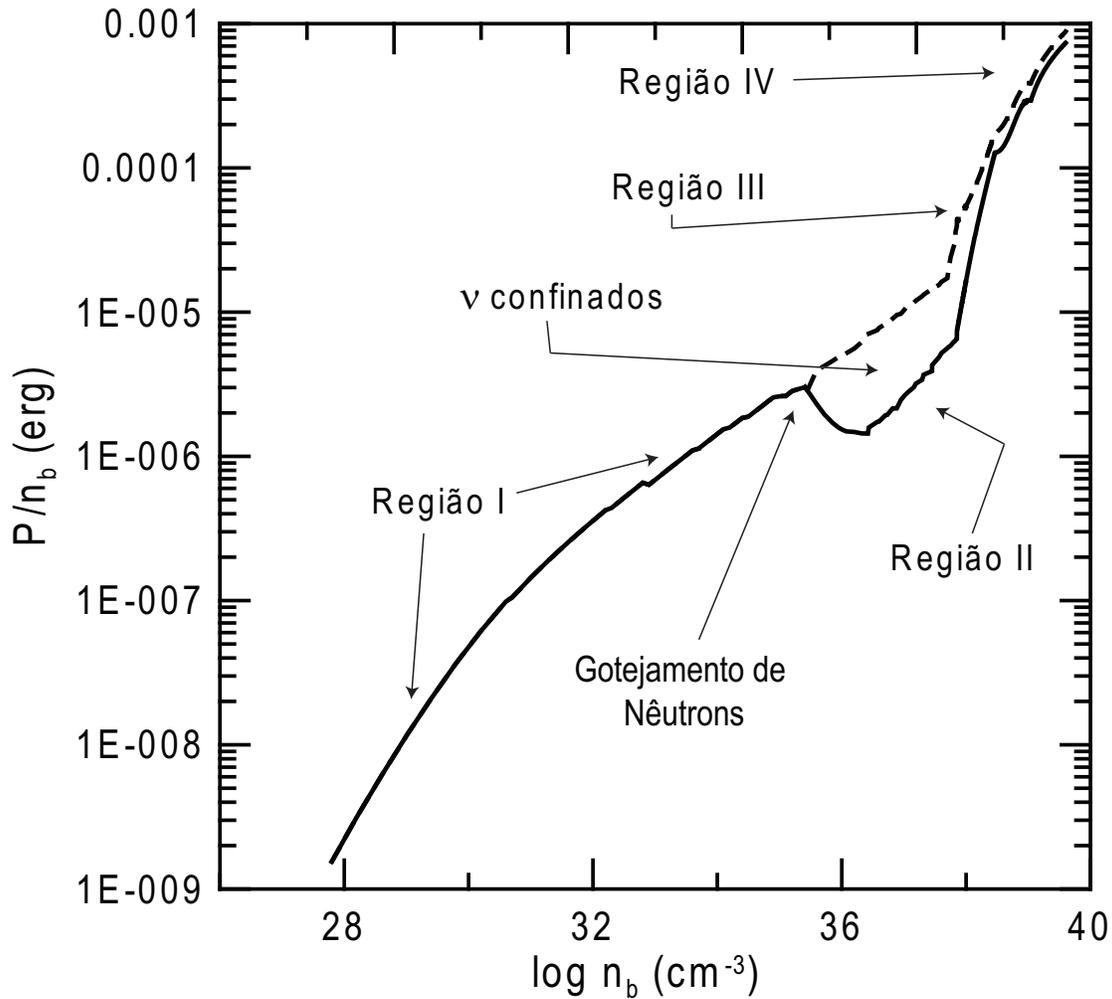


Figura 3.1: Equação de estado para diversos regimes de densidade. Na Região I temos a presença de núcleos imersos num gás de elétrons. Na Região II núcleos imersos num gás de elétrons e nêutrons; aqui podemos divisar duas equações de estado diferentes, a linha pontilhada representa a equação de estado com neutrinos confinados enquanto a linha contínua representa a equação sem os neutrinos confinados. Na Região III temos a presença de matéria nuclear. Na Região IV temos a fase com quarks desconfinados.

Podemos notar que as massas efetivas aumentam com a constante de acoplamento e também com o potencial químico. Esse é então, dentro deste esquema, o resultado das interações. O último ingrediente do modelo é a constante de sacola fenomenológica \mathbb{B} introduzida da maneira usual e que supostamente simula a influência do confinamento e corresponde à diferença de energia entre o vácuo perturbativo dentro da fase de quarks desconfinada e o vácuo verdadeiro fora dela.

As equações de balanço químico na fase de quarks são dadas também pela equação

$$\mu_j = q_j \mu_n - q_e (\mu_e - \mu_{\nu_e}),$$

com

$$j = u, d, s.$$

Podemos explicitar estas equações como:

$$\mu_u = \frac{1}{3}\mu_n - \frac{2}{3}(\mu_e - \mu_{\nu_e})$$

e

$$\mu_d = \mu_s = \frac{1}{3}\mu_n + \frac{1}{3}(\mu_e - \mu_{\nu_e}).$$

Ao somarmos estas duas equações, obtemos uma relação fundamental entre o potencial químico dos nêutrons e os potenciais químicos dos quarks, dada por

$$\mu_n = \mu_u + 2\mu_d.$$

Em termos dos graus de liberdade da fase de quarks, é possível escrevermos também

$$\mu_u = \mu_d - \mu_e + \mu_{\nu_e}.$$

Nesta fase, a conservação da carga bariônica é dada por

$$\rho = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s),$$

que deve ser satisfeita consistentemente com a conservação da carga elétrica que se expressa pela equação

$$\frac{1}{3}(2n_u - n_d - n_s) - n_e - n_{\mu} = 0,$$

lembrando que o modelo quando utilizado para descrever o meio estelar envolve a densidade de leptons presentes.

Notemos também que a conservação da fração leptônica total para a fase de quarks tem a mesma expressão da fase de hádrons.

Finalmente, as expressões da pressão e da densidade de energia para esta fase [36] são dados por

$$\begin{cases} P_Q = -\mathbb{B} + \sum_f P_f + \sum_l (P_l + P_{\nu_l}) \\ \varepsilon_Q = -P_Q + \sum_f \mu_f n_f + \sum_l \mu_l n_l + \sum_l \mu_{\nu_l} n_{\nu_l} \end{cases}, \quad (3.173)$$

onde P_f é a pressão de gás de férmions livres e \mathbb{B} é a constante de sacola, $l = e^-, \mu^-$ e $f = u, d, s$. Neste trabalho utilizamos a constante de sacola $\mathbb{B} = 150 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$.

Capítulo 4

A Evolução da Proto-Estrela de Nêutron

Após a explosão de supernova temos como remanescente um caroço formado de prótons, nêutrons e outros hádrons permeado por um mar leptônico, formando um gigantesco “hipernúcleo” eletricamente neutro, conforme a Ref. [40]. Esse caroço é chamado de proto-estrela de nêutron. Foi a captura dos elétrons pelos prótons presentes que promoveu a neutronização da estrela fazendo com que ela passasse a ser composta basicamente de nêutrons ao fim do processo. Como consequência da captura de elétrons por prótons não restou apenas um gás de nêutrons, mas neutrinos também foram produzidos durante a neutronização do meio. Como a densidade alcançada pode alcançar valores da ordem de dezenas de ρ_0 , os neutrinos ficam aprisionados no meio por alguns segundos. Estes neutrinos completamente fora do equilíbrio eventualmente escapam produzindo o chamado *vento de neutrinos*. Por interagirem pouco com a matéria, tais neutrinos roubam grande parte da energia do interior estelar promovendo a despressurização e o resfriamento desta (o assim chamado “cooling”). Apesar de ser muito pequena, a probabilidade de os neutrinos interagirem com partículas materiais é não-nula, sobretudo pela alta densidade do meio. Lembramos que os neutrinos só interagem com outras partículas através da força fraca¹.

Nas densidades em questão a opacidade do caroço aos neutrinos é suficientemente alta para mantê-los “confinados” dentro do caroço por alguns instantes. Isso ocorre porque o aumento da densidade do caroço reduz o livre caminho médio do neutrino aumentando assim a probabilidade do neutrino colidir com alguma partícula antes de sair do caroço.

¹Dados recentes dão conta de que a massa do neutrino é não-nula. Portanto deve haver interação gravitacional, mas como os mesmos dados estipulam uma massa máxima muito baixa em comparação com as massas dos hádrons considerados neste trabalho podemos considerar tal interação desprezível e tratar o neutrino como partícula não-massiva e sujeito somente à interação fraca.

Como a possibilidade de interação existe, é também plausível que os neutrinos embora roubem energia do caroço também depositem momenta nas camadas mais externas da estrela de nêutron. O nosso objetivo neste trabalho é investigar a possibilidade de o vento de neutrinos gerar uma componente de aceleração por deposição de momenta nas regiões externas do caroço permitindo a ejeção de matéria dessas regiões. A princípio utilizaremos um modelo efetivo de apenas duas camadas (caroço interno e caroço externo) para simular computacionalmente os efeitos do vento de neutrinos na região externa do caroço.

Ao mesmo tempo, a saída dos neutrinos despressuriza o interior profundo levando a uma instabilidade gravitacional e uma evolução hidrodinâmica do sistema. O tratamento efetivo adotado neste trabalho para a descrição desta fase será apresentada nas próximas seções.

4.1 A Dinâmica Efetiva de Duas Camadas com Difusão de Neutrinos

Dependendo da escala de tempo de difusão, os neutrinos podem escapar do meio através de um processo de transporte lento ou rápido ao longo da evolução hidrodinâmica do caroço da proto-estrela de nêutron. Para descrever esta fase dividimos o sistema em duas camadas homogêneas, representando esquematicamente os caroços interno e externo. Também incluímos as massas das camadas no conjunto de coordenadas lagrangianas do sistema para ter uma visão clara da transferência de massa e energia entre as caroços interno e externo.

4.2 As Equações de Movimento

Considerando uma Lagrangiana efetiva de duas camadas para representar a evolução dinâmica dos caroços interno e externo podemos tentar reproduzir, em sua forma mais simples, a variação das grandezas hidrodinâmicas do sistema (densidade, pressão, campo de velocidades, fluxo interno de matéria), e desta maneira obter uma visão clara das transferências de massa e energia entre os caroços interno e externo ao longo da evolução do sistema.

Segundo este modelo a Lagrangiana efetiva do sistema é escrita como

$$\mathcal{L} \left(R_1, R_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{M}_1 \right) = K - W - E, \quad (4.1)$$

onde K representa a energia cinética das camadas, W a energia gravitacional do sis-

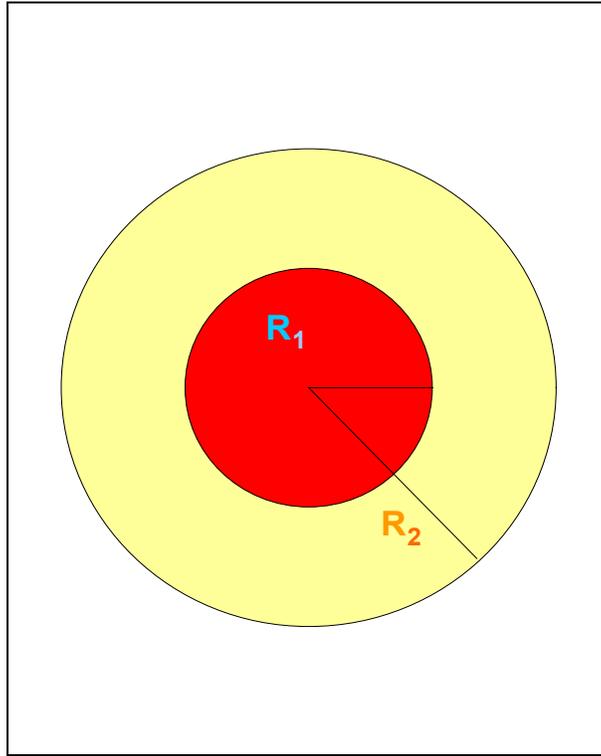


Figura 4.1: O modelo de duas camadas. Embora haja transferência de massa entre as camadas, a massa total constante é um vínculo importante do sistema.

tema, e E é a energia interna do meio estelar. Os raios dos caroços interno e externo são, respectivamente R_1 e R_2 , sendo M_1 e M_2 são as massas correspondentes. Como a massa total M deve se conservar, temos o vínculo

$$M - (M_1 + M_2) = 0, \quad (4.2)$$

o que implica

$$\dot{M}_1 = -\dot{M}_2 \quad (4.3)$$

Apesar de a massa total permanecer constante, incluímos a massa de uma das camadas como coordenada generalizada pois há transferência de massa de uma camada para outra. Também é possível haver escape do caroço externo, se a configuração das velocidades permitir.

A energia cinética de cada casca é dada por

$$K_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i v_i^2(\mathbf{r}) dV, \quad (4.4)$$

onde V_i é o volume de cada casca, ρ_i é a densidade de massa dependente do tempo, e,

$v_i(r)$ é a velocidade de matéria em um dado ponto a uma distância r do centro.

Para determinar o campo de velocidades dentro de cada casca resolvemos a equação de continuidade da massa, dada por

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Integrando a (4.5) obtemos o campo de velocidade para o interior de cada casca. Para a camada interna obtemos

$$v_1(r) = \left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{\dot{M}_1}{3M_1} \right) r. \quad (4.6)$$

Enquanto para a camada externa

$$v_2(r) = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^2 - R_1^2} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) + \frac{\dot{M}_1}{3M_2} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) + \frac{R_1^2}{r^2} \dot{R}_1. \quad (4.7)$$

Usamos como condição de contorno para o centro da camada interna e para a fronteira de descontinuidade entre as camadas em $r = R_1$ as respectivas equações:

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 \\ \rho_1 [v_1(R_1) - \dot{R}_1] = \rho_2 [v_2(R_1) - \dot{R}_1], \end{cases} \quad (4.8)$$

onde a segunda equação nada mais é que a condição de Hugoniot-Rankine para a conservação do fluxo de matéria através da descontinuidade, conforme a Ref. [41].

Como vemos na equação (4.6) o campo de velocidade da camada interna depende linearmente da variável radial, ou seja, durante o colapso o caroço interno apresenta uma evolução homóloga.

Também é interessante notar a existência de uma descontinuidade no campo de velocidade em $r = R_1$ dada por

$$\Delta v = v_1(R_1) - v_2(R_1) = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\dot{M}_1}{4\pi R_1^2} \quad (4.9)$$

que é proporcional ao fluxo instantâneo de massa através da superfície do caroço interno. Observe-se que quando $\rho_1 > \rho_2$ e $\dot{M}_1 > 0$, há fluxo da camada externa para a camada interna, o que assemelha-se à propagação de uma onda de choque emergente quando o regime é supersônico.

Resolvendo-se a equação (4.4) tendo em conta a (4.6) e a (4.7), obtemos a energia

cinética total do sistema na forma quadrática

$$K = \frac{1}{2} \left[T_{11} \dot{R}_1^2 + T_{22} \dot{R}_2^2 + T_{33} \dot{M}_1^2 + 2T_{12} \dot{R}_1 \dot{R}_2 + 2T_{13} \dot{R}_1 \dot{M}_1 + 2T_{23} \dot{R}_2 \dot{M}_1 \right] \quad (4.10)$$

onde os T_{ij} são dados por

$$T_{11} = \frac{3}{5} \left[\frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)^3} M_2 + M_1 \right] \quad (4.11)$$

$$T_{12} = \frac{9x^2}{10} \frac{x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)^3} M_2 \quad (4.12)$$

$$T_{13} = -\frac{1}{5} \left[3(x-1) \frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 1}{3(1 + x + x^2)^2} + 1 \right] R_1 \quad (4.13)$$

$$T_{22} = \frac{3x^3}{5} \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 5}{(1 + x + x^2)^3} M_2 \quad (4.14)$$

$$T_{23} = -\frac{3x^2(x-1)}{5} \frac{x^2 + 3x + 1}{2(1 + x + x^2)^2} R_1 \quad (4.15)$$

$$T_{33} = \frac{1}{15} \left[\frac{(x-1)^2}{M_2} \frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)} + \frac{1}{M_1} \right] R_1^2 \quad (4.16)$$

com

$$x \equiv \frac{R_2}{R_1} \quad (4.17)$$

A energia potencial gravitacional Newtoniana é

$$W = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[M_1^2 + f(x) M_2^2 + \frac{5}{2} g(x) M_1 M_2 \right] \quad (4.18)$$

onde

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{(1 + x + x^2)^2} \quad (4.19)$$

$$g(x) = \frac{x + 1}{1 + x + x^2} \quad (4.20)$$

e G é a constante gravitacional. O primeiro e o segundo termos nos colchetes na (4.18) representam as energias potenciais de auto-gravitação dos caroços interno e externo, respectivamente. Já o terceiro, é um termo de interação gravitacional entre ambas as camadas.

A energia interna total é dada por

$$E = \frac{M_1 \varepsilon_1}{\rho_1} + \frac{M_2 \varepsilon_2}{\rho_2} \quad (4.21)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são as densidades volumétricas de energia interna das respectivas camadas. Estas energias internas e as respectivas pressões são especificadas pela equação de estado apropriada – conforme discutimos anteriormente no Capítulo 3.

Desta forma, podemos escrever as equações de movimento da Lagrangiana (4.1) como

$$T_{11}\ddot{R}_1 + T_{12}\ddot{R}_2 + T_{13}\ddot{M}_1 = Q_1 + B_1 + H_1 \quad (4.22)$$

$$T_{21}\ddot{R}_1 + T_{22}\ddot{R}_2 + T_{23}\ddot{M}_1 = Q_2 + B_2 + H_2 \quad (4.23)$$

$$T_{31}\ddot{R}_1 + T_{32}\ddot{R}_2 + T_{33}\ddot{M}_1 = Q_3 + B_3 + H_3 \quad (4.24)$$

onde os Q_i são as forças generalizadas dependentes das velocidades dadas por

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} x T'_{11} \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} (2T'_{12} + xT'_{22}) \dot{R}_2^2 - \frac{1}{2} (2T_{33} - xT'_{33}) \dot{M}_1^2 - T'_{11} \dot{R}_1 \dot{R}_2 \right] \quad (4.25)$$

$$Q_2 = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} (T'_{11} + 2xT'_{12}) \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} T'_{22} \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} T_{33} \dot{M}_1^2 + xT'_{22} \dot{R}_1 \dot{R}_2 \right] \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} Q_3 = & \left[\frac{1}{2M_2} \left(\frac{3}{5} M - T_{11} \right) - \frac{1}{R_1} (T_{13} - xT'_{13}) xT'_{11} \right] \dot{R}_1^2 \\ & - \frac{1}{R_1} \left(T'_{23} + \frac{1}{2} \frac{R_1}{M_2} T_{22} \right) \dot{R}_2^2 - \frac{1}{2M_2} \left(T_{33} - \frac{1}{5} M \frac{R_1^2}{M_1^2} \right) \dot{M}_1^2 \\ & - \frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1}{M_2} T_{12} + T_{23} + T'_{13} - xT'_{23} \right) \dot{R}_1 \dot{R}_2 \\ & - \frac{1}{R_1} (2T_{33} - xT'_{33}) \dot{M}_1 \dot{R}_1 - \frac{1}{R_1} T'_{33} \dot{M}_1 \dot{R}_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $T'_{ij} \equiv \partial T_{ij} / \partial x$

Os termos B_i nas (4.22) – (4.24) são forças gravitacionais dadas por

$$B_1 = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1^2} M_2 \left[M_1^2 + f_1(x) M_2 + \frac{5}{2} g_1(x) M_1 \right] \quad (4.28)$$

$$B_2 = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1^2} M_2 \left[f_2(x) M_2 + \frac{5}{2} g_2(x) M_1 \right] x^{-2} \quad (4.29)$$

$$B_3 = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[2 \left(\frac{M_1}{M_2} - f(x) \right) M_2 + \frac{5}{2} g(x) (M_2 - M_1) \right] \quad (4.30)$$

onde

$$f_1(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)^3} \quad (4.31)$$

$$f_2(x) = x^3 \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 5}{(1 + x + x^2)^3} \quad (4.32)$$

$$g_1(x) = \frac{2x + 1}{(1 + x + x^2)^2} \quad (4.33)$$

$$g_2(x) = x^3 \frac{x+2}{(1+x+x^2)^2} \quad (4.34)$$

E as forças de pressão são dadas por

$$H_1 = 4\pi(p_1 - p_2)R_1^2 \quad (4.35)$$

$$H_2 = 4\pi p_2 R_2^2 \quad (4.36)$$

$$H_3 = \frac{\varepsilon_2 + p_2}{\rho_2} - \frac{\varepsilon_1 + p_1}{\rho_1} \quad (4.37)$$

A densidade de energia interna e a pressão do meio são descritas por uma equação de estado que incorpora as fases hadrônica e de quarks, assim como a fase mista de coexistência de hádrons e quarks. A fase de quarks é tratada no contexto do modelo de sacola do MIT, e a fase hadrônica na aproximação de campo médio relativístico não-linear de Walecka. Na construção da transição de fase hadron-quark consideramos uma conservação de carga consistente para cargas eletromagnéticas, bariônicas e leptônicas. Estas equações de estado estão apropriadamente ligadas a outras que descrevem a matéria estelar em diferentes regimes de densidades subnucleares. Para densidades até o ponto de evaporação do nêutron ($\rho \simeq 4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$) assumimos que a matéria estelar fria é composta por um conjunto de núcleos e um gás de elétrons relativístico descrito por [19] conforme vimos na Seção 3.2.2. Para o regime subnuclear de maior densidade com nêutrons evaporados a equação de estado é dada por [20], se há ausência de neutrinos conforme vimos na Seção 3.2.3, e por [28] se há presença de neutrinos.

Para a integração numérica da dinâmica estelar, como veremos em mais detalhes na Seção 6.1, utilizamos para a preparação das condições iniciais uma equação de estado com neutrinos confinados. Ao iniciar o procedimento numérico substituímos esta equação de estado por uma onde supomos o fim do equilíbrio beta e ignoramos quaisquer acoplamentos diretos do gás de neutrinos com a equação de estado. O gás de neutrinos é tratado então como um gás livre degenerado relativístico e a densidade de neutrinos ainda aprisionados no meio passa a ser governada por equações de evolução independentes da evolução hidrodinâmica do meio. Entretanto, a pressão dos neutrinos ainda aprisionados é considerada como uma pressão parcial de um gás de neutrinos adicionada à pressão do restante do meio.

Capítulo 5

Difusão de Neutrinos e Luminosidade

Na seção anterior vimos o tratamento utilizado para a análise da dinâmica das duas camadas, mas não vimos como essa dinâmica se acopla à luminosidade da radiação de neutrinos. No próximo item discutiremos brevemente o transporte de momenta dos neutrinos, depois faremos a ligação entre a evolução dinâmica das camadas e a luminosidade dos neutrinos.

5.1 Transporte Efetivo de Momenta por Neutrinos

O transporte de momenta por neutrinos foi proposto por Schramm e Arnett em 1975. Supondo simetria esférica, o modelo considera uma aceleração por unidade de massa dada por

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2} + \frac{Fk_\nu}{c} \quad (5.1)$$

onde F representa o fluxo de energia dos neutrinos, k_ν a opacidade do meio aos neutrinos e c a velocidade da luz. Observando que o terceiro termo do lado direito da equação (5.1) dá uma contribuição positiva para a aceleração, levando a uma expansão se

$$\frac{Fk_\nu}{c} > \frac{Gm}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}, \quad (5.2)$$

isto é, se a luminosidade de neutrinos for maior que um certo valor crítico, definido por

$$L_\nu = \frac{4\pi Gm}{k_\nu}, \quad (5.3)$$

conhecido como *limite de Eddington*. No entanto, é importante ressaltar que uma grande opacidade aos neutrinos enfraquece enormemente o transporte de momenta por eles, pelo fato de L_ν depender do inverso da opacidade.

5.2 O Acoplamento entre a Dinâmica Efetiva do Meio e a Luminosidade de Neutrinos

O conjunto de equações de movimento da Seção 4.2 é resolvido numericamente acoplado a um tratamento esquemático para o transporte de neutrinos ao longo do meio denso das camadas. A partir da segunda Lei de Newton, a contribuição que um neutrino dá para a aceleração de uma camada i é obtida aproximadamente por

$$d\ddot{R}_{\nu_i} = \frac{1}{\Delta m_i} \frac{\Delta p_{\nu_i}}{\Delta t}, \quad (5.4)$$

onde Δm_i é a massa de um elemento de volume da i -ésima camada que recebe momentum do neutrino incidente, Δt é o intervalo de tempo de duração da reação e Δp_{ν_i} é o momentum cedido pelo neutrino para a camada. Reescrevendo o momentum em função da energia cedida pelo neutrino ΔE_{ν_i} , temos

$$d\ddot{R}_{\nu_i} \cong \frac{1}{c\Delta m_i} \frac{\Delta E_{\nu_i}}{\Delta t}, \quad (5.5)$$

onde aproximamos a velocidade do neutrino como c que é a velocidade da luz.

Se considerarmos que a seção de choque é para o neutrino o que a área ΔA é para a equação (2.8) podemos, comparando a equação (5.5) com a equação (2.13) e com a equação (2.8), reescrever a equação (5.5) em função do fluxo da camada

$$\ddot{R}_{\nu_i} = \frac{1}{c\Delta m_i} F_{\nu_i} \sigma_{\nu_i}, \quad (5.6)$$

onde F_{ν_i} é o fluxo de neutrinos e σ_{ν_i} é a seção de choque (total) de neutrino ao interagir com a camada i .

Embora a notação seja parecida com a da equação (2.8) F_{ν_i} se refere ao fluxo **integrado em frequência** (conforme a equação (2.13)) pois não consideramos dependência de frequência para o neutrino (caso cinzento).

Ainda conforme a equação (2.13), podemos reescrever a equação (5.6) em função da luminosidade

$$\ddot{R}_{\nu_i} = \frac{\sigma_{\nu_i}}{\Delta m_i} \frac{L_{\nu_i}}{4\pi c R_i^2}. \quad (5.7)$$

Finalmente, considerando que o coeficiente de absorção por massa tem dimensões de seção de choque por massa podemos aproximar

$$\kappa_{\nu_i} \cong \frac{\sigma_{\nu_i}}{\Delta m_i},$$

onde o coeficiente de opacidade total para cada camada foi obtido a partir da Ref. [45]. Com isso, a equação (5.7) fica

$$\ddot{R}_{\nu_i} = \frac{\kappa_{\nu_i} L_{\nu_i}}{4\pi c R_i^2}. \quad (5.8)$$

A equação (5.8) é de fundamental importância neste trabalho, pois é ela que vincula a dinâmica e a luminosidade. As equações de movimento são integradas isoladamente, pois a luminosidade de neutrinos não entra na lagrangiana utilizada para se obter as equações de movimento. Mas não podemos desprezar a contribuição da luminosidade dos neutrinos à aceleração, desta forma a equação (5.8) é introduzida como uma aceleração Euleriana, pois faz o vínculo entre dinâmica e luminosidade sem entrar na lagrangiana geradora das equações de movimento.

Resta agora encontrar um modelo para a luminosidade de neutrinos. Podemos, de uma forma geral, escrever

$$L_{\nu_i} = - \sum_j \frac{dE_{\nu_i}}{dt}, \quad (5.9)$$

onde \dot{E}_{ν_i} é a taxa de energia perdida por unidade de tempo pela camada i através de neutrinos.

A variação de energia pode ser obtida adotando um valor médio de energia por neutrino para cada camada $\bar{\epsilon}_{\nu_i}$ e obtendo o número médio de neutrinos que atravessa a superfície de cada camada por unidade de tempo $\Delta N_{\nu_i}/\Delta t_i$. É importante lembrarmos que não estamos nos referindo à variação do número médio de neutrinos na camada, mas sim ao número médio de neutrinos que **atravessam a superfície** de cada camada. Com isso, teremos

$$L_{\nu_i} = -\bar{\epsilon}_{\nu_i} \frac{\Delta N_{\nu_i}}{\Delta t_i}. \quad (5.10)$$

Para o cálculo do número de neutrinos em cada camada partimos de uma aproximação de difusão em cada camada

$$\frac{dN_{\nu_1}}{dt} \cong - \frac{\Delta N_{\nu_1}}{\Delta t_1} \quad (5.11)$$

$$\frac{dN_{\nu_2}}{dt} \cong - \frac{\Delta N_{\nu_2}}{\Delta t_2} + \frac{\Delta N_{\nu_1}}{\Delta t_1}, \quad (5.12)$$

ou

$$\frac{dN_{\nu_1}}{dt} \cong - \frac{\Delta N_{\nu_1}}{\tau_1} \quad (5.13)$$

$$\frac{dN_{\nu_2}}{dt} \cong - \frac{\Delta N_{\nu_2}}{\tau_2} + \frac{\Delta N_{\nu_1}}{\tau_1}. \quad (5.14)$$

O termo ΔN_{ν_i} representa a quantidade de neutrinos que atravessa a i -ésima camada e τ_1 e τ_2 , os tempos de difusão de neutrinos nas camadas 1 e 2, respectivamente, são construídos a partir do *random walk* de forma que

$$\tau_1 \equiv \frac{R_1^2}{c\lambda_{\nu_1}} \quad (5.15)$$

$$\tau_2 \equiv \frac{R_2^2 - R_1^2}{c\lambda_{\nu_2}}. \quad (5.16)$$

Os livres caminhos médios são obtidos a partir da relação já bem conhecida

$$\lambda_{\nu_i} \equiv \frac{1}{\kappa_{\nu_i}\rho_{\nu_i}}, \quad (5.17)$$

onde κ_{ν_i} é o coeficiente de **opacidade total** dos neutrinos, ou seja, está associado tanto à probabilidade de espalhamento quanto à de absorção. Os valores obtidos para κ_{ν_i} foram construídos a partir do modelo apresentado na Ref. [45] (ver Figura 5.1). Devemos comentar aqui que tais opacidades se referem a um modelo estelar com temperatura finita porém suficientemente baixa para justificar sua utilização em nosso modelo de estrela fria ($T = 0$). Entretanto, para manter a consistência de nosso modelo, introduziremos um fator α adimensional de correção (em primeira ordem) para as opacidades obtidas da Ref. [45], ou seja faremos uma transformação de variáveis da forma $\kappa_{\nu_i}\rho_i \rightarrow \alpha\kappa_{\nu_i}\rho_i$. Até aqui ainda não conhecemos o intervalo que contém os possíveis valores de α , para determiná-lo podemos escrever α em termos de τ cujo intervalo de possíveis valores nos é conhecido ($0.5 \lesssim \tau \lesssim 10$). Ou seja

$$\tau_i = \frac{D_i^2}{c\lambda_{\nu_i}} = \frac{\alpha\kappa_{\nu_i}\rho_i D_i^2}{c} \quad (5.18)$$

$$\alpha = \frac{c\tau_i}{\kappa_{\nu_i}\rho_i D_i^2}. \quad (5.19)$$

Note-se que fizemos, nas relações acima, $\lambda_{\nu_i} = (\alpha\kappa_{\nu_i}\rho_i)^{-1}$, $D_1^2 \equiv R_1^2$ e $D_2^2 \equiv (R_2^2 - R_1^2)$. Desta forma teremos o intervalo aproximado $0.6 \lesssim \alpha \lesssim 12$ obtido através da introdução dos valores limites de τ na equação (5.19).

Analogamente devemos introduzir a correção para a opacidade na componente de aceleração devida ao vento de neutrinos dada na equação (5.8)

$$\ddot{R}_{\nu_i} = \frac{\alpha\kappa_{\nu_i}L_{\nu_i}}{4\pi cR_i^2}. \quad (5.20)$$

O segundo termo à direita da equação (5.12) representa os neutrinos que saem da

camada 1 e chegam à camada 2. Cabe também lembrar que estamos considerando que a acomodação desses neutrinos à camada 2 é **instantânea**. Ou seja, quando eles chegam à camada 2 esta se re-homogeniza instantaneamente.

Resta agora obter os ΔN_i 's. Primeiro devemos lembrar que a densidade de probabilidade normalizada de uma partícula não colidir ao percorrer uma dada distância δr num dado meio é

$$P_{COL} = \frac{e^{-\frac{\delta r}{\lambda_i}}}{\lambda_i}, \quad (5.21)$$

onde λ_i é definido como o livre caminho médio da partícula na i -ésima camada.

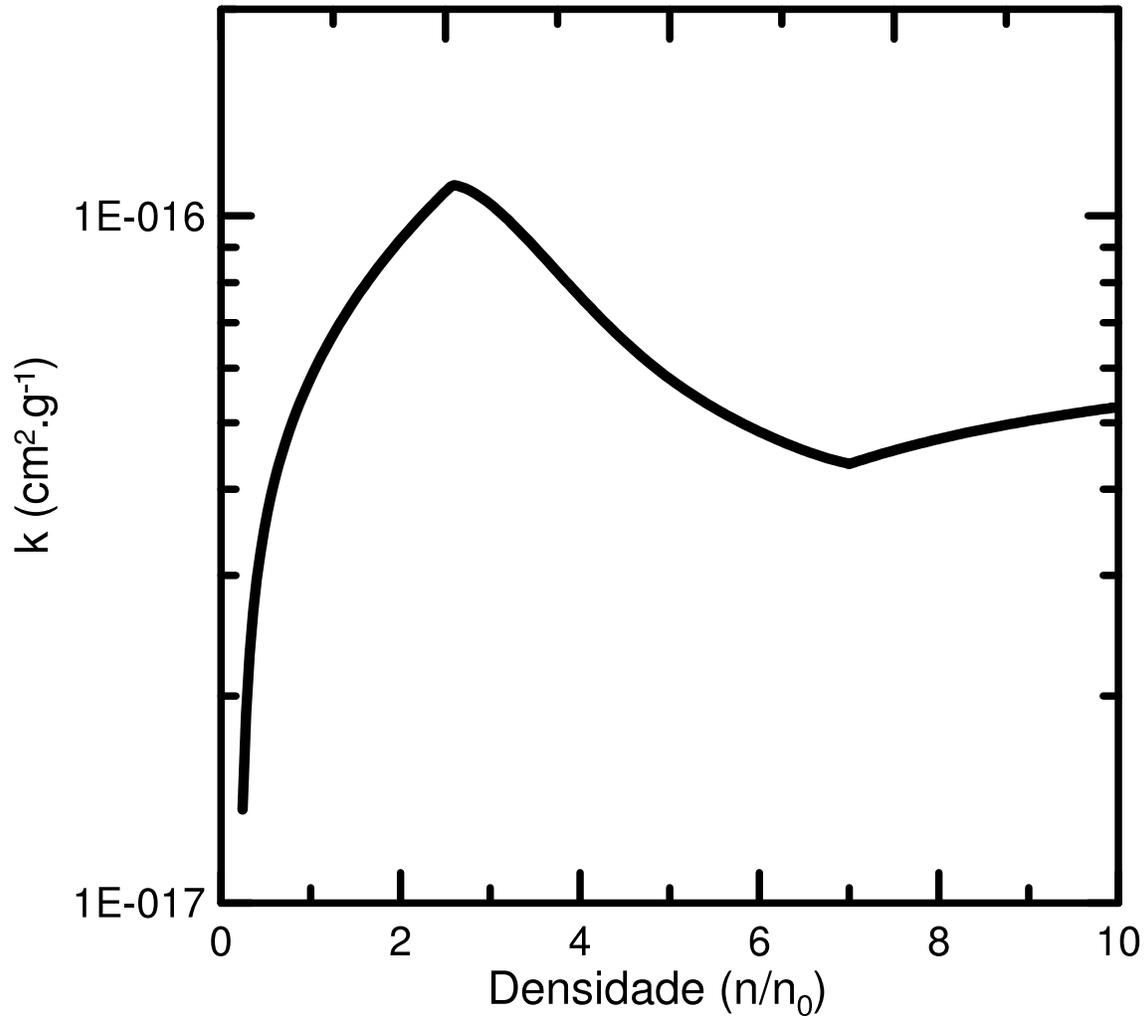


Figura 5.1: Gráfico da opacidade versus temperatura. A opacidade foi obtida a partir do modelo proposto na Ref. [45].

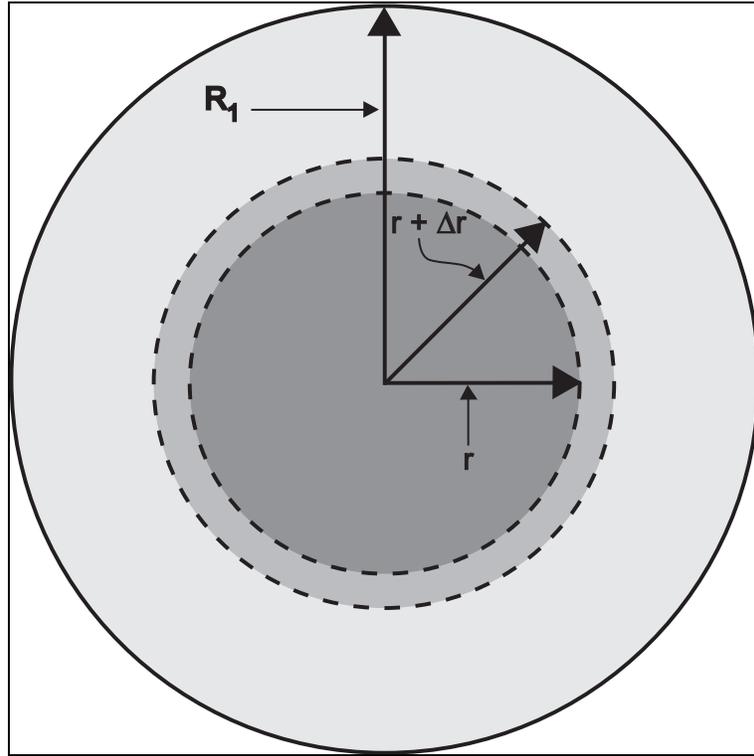


Figura 5.2: Representação de uma casca esférica dentro de uma esfera homogênea. Os neutrinos fluem de dentro do volume da casca em direção à superfície. O número médio de neutrinos que chegam à superfície é diretamente proporcional à probabilidade de um neutrino percorrer a distância $(R_1 - r)$ sem colidir.

Desta forma, a probabilidade de a partícula não colidir ao percorrer uma distância de uma posição r até outra posição $r + \Delta r$ será

$$\varphi(r) = \int_r^{r+\Delta r} \frac{e^{-\frac{r'}{\lambda_i}}}{\lambda_i} dr'. \quad (5.22)$$

Para maiores detalhes, conferir a abordagem utilizada nas Refs. [42, 43] onde cálculos semelhantes foram feitos para aprisionamento de fótons. Embora estejamos pesquisando neutrinos, e não fótons, os cálculos das probabilidades de colisão e de não-colisão foram semelhantes.

Vamos agora supor uma esfera homogênea de raio R_1 em cujo interior há uma densidade homogênea de neutrinos n_{ν_1} (ver Figura 5.2).

Consideremos agora uma casca esférica fina de raio $r < R_1$ e espessura $\Delta r \ll r$ concêntrica à esfera. O número médio de neutrinos que deixam a casca esférica e chegam à superfície da esfera é dado pelo produto do número total de neutrinos que saem da casca pela probabilidade de um neutrino sair da casca e chegar à superfície

sem colidir

$$\begin{aligned}\bar{N}_{\nu_1} &= 4\pi r^2 n_{\nu_1} \Delta r \int_r^{R_1} dr' \frac{1}{\lambda_{\nu_1}} e^{-\frac{r'}{\lambda_{\nu_1}}} \\ \bar{N}_{\nu_1} &= 4\pi r^2 n_{\nu_1} e^{-\frac{R_1-r}{\lambda_{\nu_1}}} \Delta r\end{aligned}\quad (5.23)$$

onde λ_{ν_1} é o livre caminho médio do neutrino no meio 1.

O número médio de neutrinos que conseguem atravessar a distância entre a casca e a superfície da esfera depende da probabilidade de os neutrinos não colidirem ao longo do percurso, mas para nossos propósitos isso deve ser contabilizado em todo o volume da esfera. Devemos então realizar o somatório das contribuições para o fluxo de neutrinos oriundas de várias cascas esféricas, fazemos esse somatório ao longo de todo o volume da esfera variando o raio r das cascas de 0 a R_1 . No limite onde Δr seja muito pequeno podemos aproximar o somatório numa integral

$$\Delta \bar{N}_{\nu_1} = \int_0^{R_1} 4\pi n_{\nu_1} r^2 e^{-\frac{R_1-r}{\lambda_{\nu_1}}} dr.$$

Integrando por partes

$$\Delta \bar{N}_{\nu_1} = 4\pi n_{\nu_1} \left[\lambda_{\nu_1} R_1^2 - 2\lambda_{\nu_1}^2 R_1 + 2\lambda_{\nu_1}^3 \left(1 - e^{-\frac{R_1}{\lambda_{\nu_1}}} \right) \right] \quad (5.24)$$

onde n_{ν_1} é a densidade volumétrica de neutrinos na camada-1. Ou seja

$$n_{\nu_1} \equiv \frac{3N_{\nu_1}}{4\pi R_1^3}$$

Através da equação (5.24), podemos obter a taxa de variação do número de neutrinos na superfície da camada 1 e reescrever a equação (5.13) a partir da equação (5.24)

$$\frac{dN_{\nu_1}}{dt} = -\frac{\Delta \bar{N}_{\nu_1}}{\tau_1}. \quad (5.25)$$

Vamos agora considerar uma camada esférica de raios R_1 e R_2 , porém sobreposta à esfera anterior. Vamos obter o fluxo de neutrinos que atravessam a distância $(R_2 - R_1)$ sem colidir. Para isso vamos imaginar uma nova casca esférica fina de raio r e espessura $\Delta r \ll r$ como a do caso anterior (ver Figura 5.3). Porém, desta vez temos uma outra condição de contorno, que é $R_1 < r < R_2$.

O número médio de neutrinos, oriundos da casca fina de raio r , que atravessam a distância $(R_2 - r)$ e chegam à superfície sem colidir é diretamente proporcional

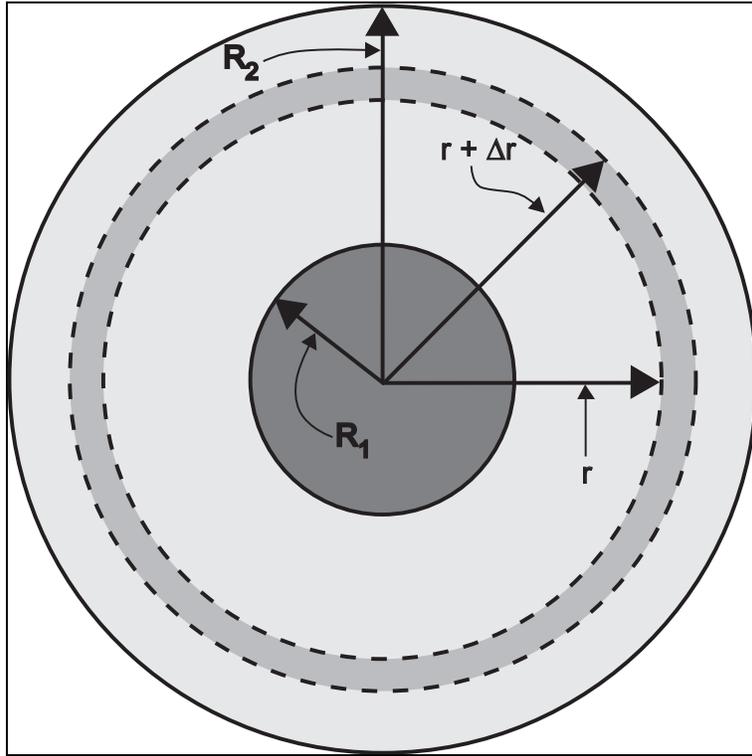


Figura 5.3: Representação de uma casca esférica dentro de uma segunda camada dentro da esfera homogênea. Novamente os neutrinos fluem de dentro do volume da casca em direção à superfície em R_2 . Porém, desta vez o número médio de neutrinos que chegam à superfície em R_2 é diretamente proporcional à probabilidade de um neutrino percorrer a distância $R_2 - r$ sem colidir.

à probabilidade individual de um deles não colidir no caminho percorrido. Ou seja devemos pegar tal probabilidade e multiplicar pelo número de neutrinos que saem da casca esférica rumo à superfície da camada 2, desta forma obteremos o valor médio de neutrinos que chegam à superfície sem colidir ao longo do percurso.

$$\begin{aligned}\bar{N}_{\nu_2} &= 4\pi r^2 n_{\nu_2} \Delta r \int_r^{R_2} dr'' \frac{1}{\lambda_{\nu_2}} e^{-\frac{r''}{\lambda_{\nu_2}}} \\ \bar{N}_{\nu_2} &= 4\pi r^2 n_{\nu_2} e^{-\frac{R_2-r}{\lambda_{\nu_2}}} \Delta r.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Para obter o valor médio total de neutrinos que atravessam a superfície da camada 2, devemos realizar outro somatório considerando considerando as contribuições para o fluxo de neutrinos oriundas de cascas concêntricas distribuídas ao longo do volume da camada 2, ou seja cujos raios variam de R_1 a R_2 . Analogamente ao caso anterior, quando a espessura das cascas for muito pequena aproximamos o somatório numa

integral com r variando de R_1 a R_2 .

$$\Delta \bar{N}_2 = \int_{R_1}^{R_2} dr 4\pi n_{\nu_2} r^2 e^{-\frac{R_2-r}{\lambda_{\nu_2}}}.$$

A integração é praticamente idêntica à do caso anterior, portanto podemos repetir os passos mudando apenas os índices referentes ao meio 2 e os limites de integração

$$\begin{aligned} \Delta \bar{N}_{\nu_2} = 4\pi n_{\nu_2} \left[\lambda_{\nu_2} \left(R_2^2 - R_1^2 e^{-\frac{(R_2-R_1)}{\lambda_{\nu_2}}} \right) - 2\lambda_{\nu_2}^2 \left(R_2 - R_1 e^{-\frac{(R_2-R_1)}{\lambda_{\nu_2}}} \right) \right. \\ \left. + 2\lambda_{\nu_2}^3 \left(1 - e^{-\frac{(R_2-R_1)}{\lambda_{\nu_2}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Podemos agora reescrever a equação (5.12) a partir da equação (5.24) e da equação (5.27)

$$\frac{dN_{\nu_2}}{dt} = -\frac{\Delta \bar{N}_{\nu_2}}{\tau_2} + \frac{\Delta \bar{N}_{\nu_1}}{\tau_1}. \quad (5.28)$$

Por fim, devemos agora derivar uma equação para a energia média de neutrinos dependente da densidade da camada. A energia $\bar{\epsilon}_{\nu_i}$ utilizada na equação (5.10) é definida como

$$\bar{\epsilon}_{\nu_i} \equiv \frac{E_{\nu_i}}{N_{\nu_i}}. \quad (5.29)$$

A energia do gás de neutrinos da camada i pode ser obtida pela integral

$$E_{\nu_i} = \int_V \int_0^{p_{F\nu_i}} \frac{\gamma}{h^3} \epsilon d^3 p d^3 r,$$

onde $p_{F\nu_i}$ é o momento de Fermi do gás de neutrinos da camada 1, $\gamma = 1$ e $\epsilon = pc$.

Integrando

$$\begin{aligned} E_{\nu_i} &= \frac{c}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_{V_i} \int_0^{p_{F\nu_i}} p^3 dp d^3 r \\ &= \frac{4\pi c}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{V_i p_{F\nu_i}^4}{4}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Dividindo ambos os lados por V_i

$$\frac{E_{\nu_i}}{V_i} = \frac{p_{F\nu_i}^4 c}{8\pi^2 \hbar^3}. \quad (5.31)$$

Comparando a equação (5.29) com a equação (5.31) obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{\nu_i} &= \frac{E_{\nu_i}}{V_i} \frac{V_i}{N_{\nu_i}} \\ \bar{\epsilon}_{\nu_i} &= \frac{V_i}{N_{\nu_i}} \frac{p_{F_{\nu_i}}^4 c}{8\pi^2 \hbar^3}.\end{aligned}\quad (5.32)$$

Lembrando que a densidade *média* volumétrica de neutrinos da camada i é

$$n_{\nu_i} \equiv \frac{N_{\nu_i}}{V_i}, \quad (5.33)$$

a equação (5.32) fica

$$\bar{\epsilon}_{\nu_i} = \frac{1}{n_{\nu_i}} \frac{p_{F_{\nu_i}}^4 c}{8\pi^2 \hbar^3}. \quad (5.34)$$

Entretanto, para calcular n_{ν_i} precisamos primeiro calcular N_{ν_i} . Podemos obter N_{ν_i} através da integral

$$\begin{aligned}N_{\nu_i} &= \int_0^{p_{F_{\nu_i}}} \int_{V_i} \frac{1}{h^3} d^3r d^3p = \frac{4\pi V_i}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{p_{F_{\nu_i}}} p^2 dp \\ N_{\nu_i} &= \frac{V_i p_{F_{\nu_i}}^3}{6\pi^2 \hbar^3}.\end{aligned}\quad (5.35)$$

Substituindo a equação (5.35) na equação (5.33)

$$n_{\nu_i} = \frac{p_{F_{\nu_i}}^3}{6\pi^2 \hbar^3}. \quad (5.36)$$

Comparando a equação (5.36) com a equação (5.34) a energia média por neutrino fica

$$\bar{\epsilon}_{\nu_i} = \frac{3c}{4} p_{F_{\nu_i}}. \quad (5.37)$$

Substituindo as equações (5.25), (5.28) e (5.37) na equação (5.10) obtemos o sistema

$$L_{\nu_1} = 3\pi n_{\nu_1} \frac{E_{F_{\nu_1}}}{\tau_1} \left[\lambda_{\nu_1} R_1^2 - 2\lambda_{\nu_1}^2 R_1 + 2\lambda_{\nu_1}^3 \left(1 - e^{-\frac{R_1}{\lambda_{\nu_1}}} \right) \right] \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}L_{\nu_2} &= 3\pi n_{\nu_2} \frac{E_{F_{\nu_2}}}{\tau_2} \left[\lambda_{\nu_2} \left(R_2^2 - R_1^2 e^{-\frac{(R_2-R_1)}{\lambda_{\nu_2}}} \right) + \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda_{\nu_2}^2 \left(R_2 - R_1 e^{-\frac{(R_2-R_1)}{\lambda_{\nu_2}}} \right) + 2\lambda_{\nu_2}^3 \left(1 - e^{-\frac{(R_2-R_1)}{\lambda_{\nu_2}}} \right) \right] \quad (5.39)\end{aligned}$$

onde $E_{F_{\nu_i}}$ é a energia de Fermi para o gás de neutrinos da i -ésima camada.

Capítulo 6

Resultados e Conclusões

*“Não há nada que seja maior
evidência de insanidade do que
fazer a mesma coisa dia após
dia e esperar resultados
diferentes.”*

Einstein, A.

6.1 A Evolução Dinâmica do Sistema: Efeitos Hidrodinâmicos versus Vento de Neutrinos

Conforme vimos nos Capítulos 4 e 5, a simulação que realizamos leva em conta não apenas as equações de movimento apresentadas na Seção 4.2 mas também acopla essas mesmas equações à luminosidade de neutrinos e à opacidade do meio aos mesmos. Veremos neste capítulo os resultados obtidos para: a evolução dinâmica do sistema; os efeitos deste acoplamento na aceleração devida à luminosidade de neutrinos; e, os aspectos da evolução hidrodinâmica do meio considerado.

Na aplicação do modelo levamos em consideração, inicialmente, um caroço típico de $1.4M_{\odot}$, composto de hádrons imersos em um gás de elétrons e neutrinos degenerados. Como forma de obter a configuração inicial do sistema descrito pela lagrangiana dada na equação (4.1), determinamos a energia total e buscamos a configuração de energia mínima variando os raios das camadas e suas respectivas massas, com isso obtivemos: $R_1 \approx 1.01 \times 10^6 \text{ cm}$, $R_2 \approx 1.35 \times 10^6 \text{ cm}$ e $M_1 \approx 0.75M_{\odot}$. Tais condições foram obtidas numericamente utilizando uma equação de estado que leva em conta o confinamento de neutrinos no sentido de determinar uma situação típica de proto-estrela de nêutrons. Adotamos uma fração leptônica inicial dada por $Y_l = 0.4$, ou seja, um valor típico na

literatura sobre confinamento de neutrinos.

Em seguida utilizamos os mesmos procedimentos para diferentes massas com o objetivo de verificar a variação de nossos resultados face à mudança da massa total do sistema (que é um parâmetro de entrada para nossos cálculos). Ou seja, comparamos os resultados obtidos a partir de uma estrela de nêutrons típica com aqueles obtidos para estrelas menos massivas e mais massivas que o protótipo tomado.

Uma perturbação plausível ao equilíbrio da configuração inicial do sistema e que simula o início do escape de neutrinos foi introduzida para análise de sua evolução dinâmica, modificamos ligeiramente a equação de estado supondo que os neutrinos aprisionados no sistema não se encontram mais em equilíbrio beta e introduzimos uma equação de estado que leva em conta apenas a pressão parcial de neutrinos remanescentes do escape. Ou seja, a evolução do sistema é considerada **sem o confinamento de neutrinos**. A integração numérica das equações de movimento (equações (4.22) à (4.24) na Seção 4.2) do sistema contempla a presença de neutrinos aprisionados. A pressão (equações (4.35) à (4.37)) é resolvida simultaneamente às equações que regem o escape de neutrinos (equações (5.25) e (5.28)).

É importante chamar a atenção para um aspecto bastante relevante, o da escolha de um modelo evolutivo lagrangiano para o sistema. Abstraindo-se os processos de perda de neutrinos e seu acoplamento pela aceleração euleriana introduzida nas equações de movimento (ver equação (5.8)), a evolução do meio respeita estritamente a conservação de energia total do sistema, a partir da condição inicial perturbada. Assim, o modelo lagrangiano efetivo utilizado permite analisar nesta situação a transferência de energia entre as camadas sob as diferentes formas: gravitacional, cinética e interna. Com a introdução da perda de neutrinos do sistema, sendo a mesma traduzida por um transporte efetivo não contemplado na lagrangiana do sistema, claro é que a energia nesta situação não se conserva, mas sua perda é controlada pela solução do escape dos neutrinos resolvido pela equação de perda acoplada à hidrodinâmica lagrangiana do sistema.

6.2 A Preparação das Condições Iniciais

Para determinar a evolução dinâmica das camadas da proto-estrela de nêutrons precisamos determinar as condições iniciais do sistema. Ou seja, é necessário determinar os valores das coordenadas generalizadas R_1 , R_2 e m_1 , e das velocidades generalizadas \dot{R}_1 , \dot{R}_2 e \dot{m}_1 para o instante $t = 0$. Neste modelo a massa total m do caroço é constante ao longo do tempo.

Para a determinação da configuração inicial foi utilizada uma equação de estado

que leva em conta a presença de neutrinos completamente confinados e em equilíbrio beta com os bárions e léptons presentes no sistema, estabeleceu-se uma fração leptônica inicial do sistema igual a 0.4 (típica do meio denso de um caroço de supernova que originou a proto-estrela de nêutrons). Essa equação, dentro dessas condições de equilíbrio beta, fornece o número inicial de neutrinos no sistema.

6.3 Efeitos Hidrodinâmicos Vs Vento de Neutrinos

Uma análise preliminar de nossos resultados denunciou que dois aspectos concorrentes do processo eram determinantes para a discussão da quantidade de matéria ejetada ao final do resfriamento por neutrinos (cooling) da proto-estrela de nêutrons. O primeiro deles decorre do fato de que os neutrinos remanescentes contribuem para a pressão do meio, endurecendo a equação de estado. Em consequência, a reversão do movimento de queda do caroço externo é mais eficaz, tendo em conta o aumento da incompressibilidade do meio devido à presença dos neutrinos ainda aprisionados. Este é o conhecido efeito hidrodinâmico de quique (“bounce”) da camada externa. Temos também a força devida à pressão de radiação exercida pelo vento de neutrinos que escaparam (esta última força, em princípio, depende da opacidade do meio aos neutrinos, κ_ν).

Aqui explicitamos situações limites onde pudemos avaliar a relevância de cada um desses elementos, atuando de forma isolada e conjuntamente:

1. $P_\nu \neq 0$ e $\kappa_\nu \neq 0$ — Neste caso consideramos ambos os elementos atuando em conjunto.
2. $P_\nu = 0$ e $\kappa_\nu \neq 0$ — Para estimar a relevância do vento de neutrinos atuando isoladamente sem introduzir a pressão devida aos neutrinos que ainda não escaparam.
3. $P_\nu \neq 0$ e $\kappa_\nu \cong 0$ — Este caso é praticamente o inverso do anterior, ou seja, tentamos estimar relevância da pressão dos neutrinos que ainda não escaparam.
4. $P_\nu = 0$ e $\kappa_\nu = 0$ — É o caso trivial. Teoricamente, sem a pressão de neutrinos e sem o vento de neutrinos o sistema deve permanecer em equilíbrio pois as condições iniciais já são preparadas de modo a deixar o sistema numa configuração de energia mínima.

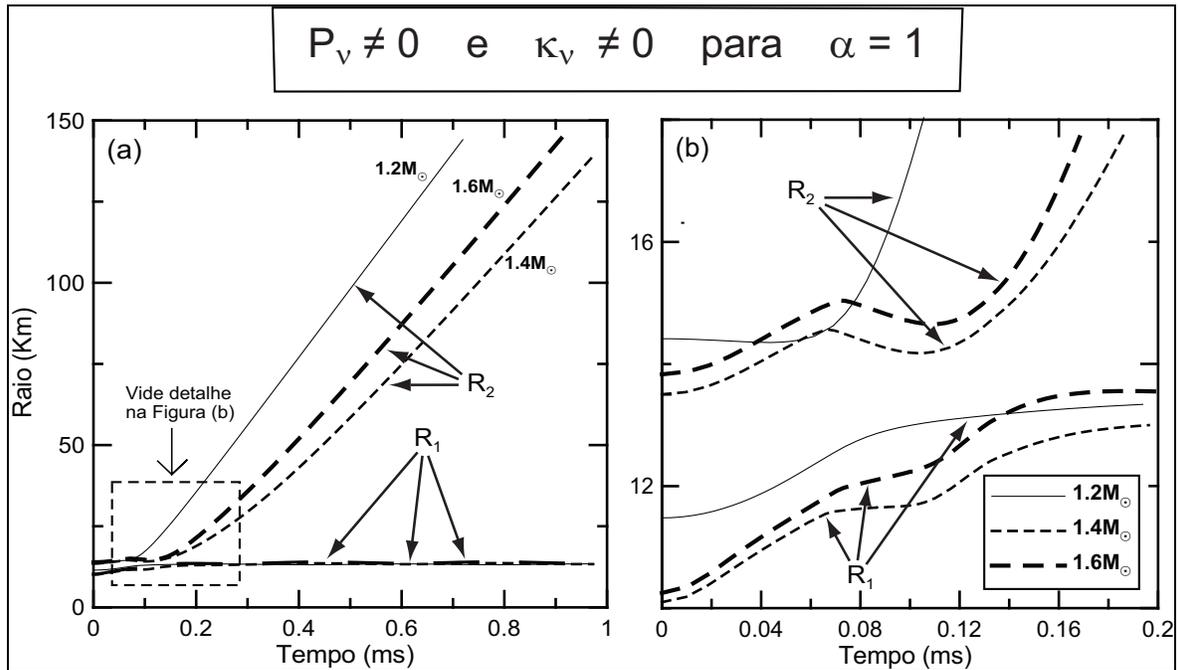


Figura 6.1: A ejeção da segunda camada de cada uma das massas totais consideradas é evidente para o caso em que tomamos $\alpha = 1$. Na Figura (a) vemos que a camada-1 permanece com raio aproximadamente constante ao longo do tempo, sendo também praticamente o mesmo para as três massas consideradas. Já o comportamento dinâmico da camada-2 é dependente da massa total inicial do sistema. Na Figura (b) vemos um detalhe do *bounce* da camada-2 e podemos observar melhor a curva evolutiva do raio da camada-1 durante a reversão do movimento da camada-2 para cada uma das diferentes massas.

6.3.1 Pressão e Opacidade não-nulas

Esta é a situação mais importante de nossos resultados. Aqui consideramos os efeitos dos dois elementos destacados acima atuando em conjunto. Por simplicidade, inicialmente escolhemos $\alpha = 1$ na análise dos gráficos deste caso. Vale lembrar que as estimativas mais modernas prevêem um tempo médio de difusão dos neutrinos dentro do intervalo $0.5s \leq \tau_\nu \leq 10s$, no meio denso em questão. Dentro dessa estimativa obtivemos na Seção 5.2 que α deve estar contido dentro no intervalo $0.6 \lesssim \alpha \lesssim 12$.

Na Figura 6.1-(a) vemos a evolução dos raios das camadas ao longo do tempo, onde observamos que quando pressão e vento de neutrinos atuam em conjunto há ejeção da camada-2. Na parte (b) detalhamos o momento em que se inicia a reversão do colapso (o *bounce*) da camada-2 para diferentes massas.

É interessante notar que se a inclinação assintótica da curva evolutiva do raio da camada-2 (velocidade da superfície da camada), quando ejetada, é menor para a proto-estrela de nêutrons de massa típica ($1.4M_\odot$) que para aquele menos massivo

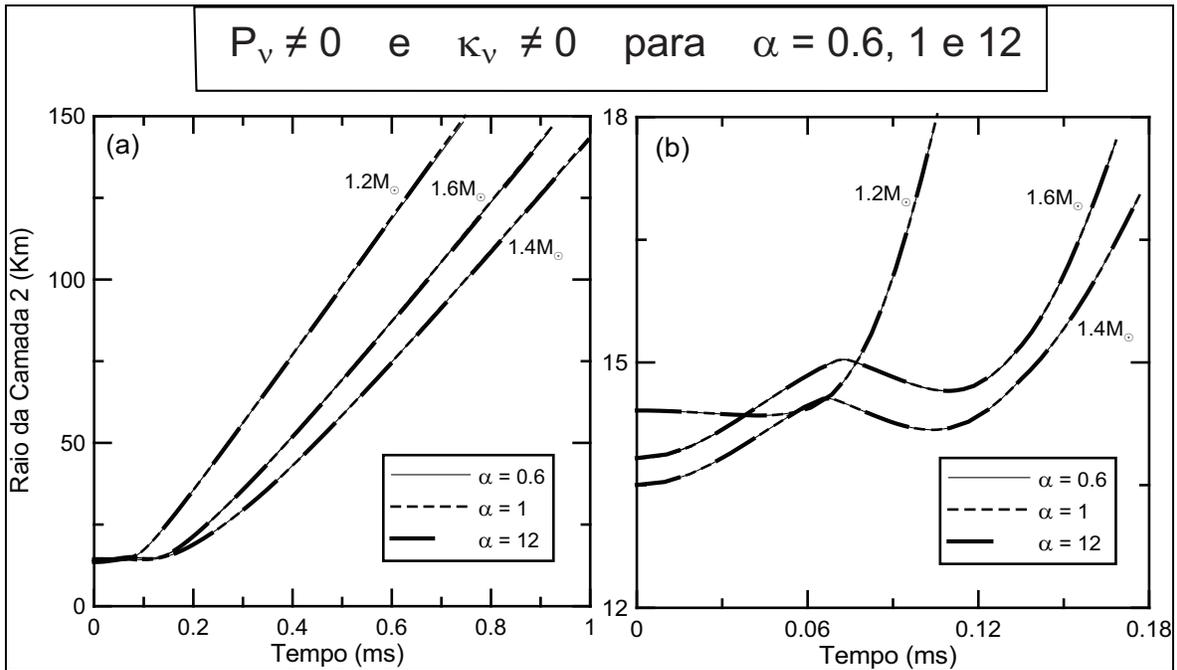


Figura 6.2: Na Figura (a) vemos a evolução somente das camadas externas para os diferentes sistemas com suas respectivas massas totais. Desta vez utilizamos diversos valores de α . Na Figura (b) vemos o detalhe do *bounce* da camada-2, observamos que mesmo em escalas de tempo extremamente pequenas os valores escolhidos para α não interferem na reversão do movimento da camada-2 e sua ejeção.

($1.2M_\odot$), enquanto o sistema mais massivo ($1.6M_\odot$) apresenta velocidades assintóticas da camada-2 menores do que as de um sistema típico. Ou seja, deve haver uma inclinação assintótica máxima (velocidade mínima da camada-2 na ejeção).

Como trabalhamos aqui com escalas de tempo de milissegundos, podemos afirmar numa primeira aproximação que as populações de neutrinos nesta escala são aproximadamente constantes. Deste modo, podemos considerar que a pressão de neutrinos também é aproximadamente constante. Devido ao fato de que α não interfere na evolução do sistema quando varia dentro do intervalo definido na Seção 5.2.

Na Figura 6.2 vemos que para qualquer valor da escala de opacidade estabelecida pelo parâmetro α , tomado dentro do intervalo de interesse, a ejeção da camada externa é processada com as mesmas características. Isto é, a variação do valor de α dentro do intervalo **não introduz mudanças de comportamento, perceptíveis, nas curvas evolutivas dos raios**. Em nossas simulações determinamos que somente correções para α da ordem de 10^{-3} (ou menos) influenciariam perceptivelmente no comportamento dinâmico do sistema. Entretanto, tais valores estão completamente fora do intervalo de interesse para nosso problema, tendo em conta os valores de τ_ν (tempo médio de difusão de neutrinos) estimados para a matéria supranuclear. Ou

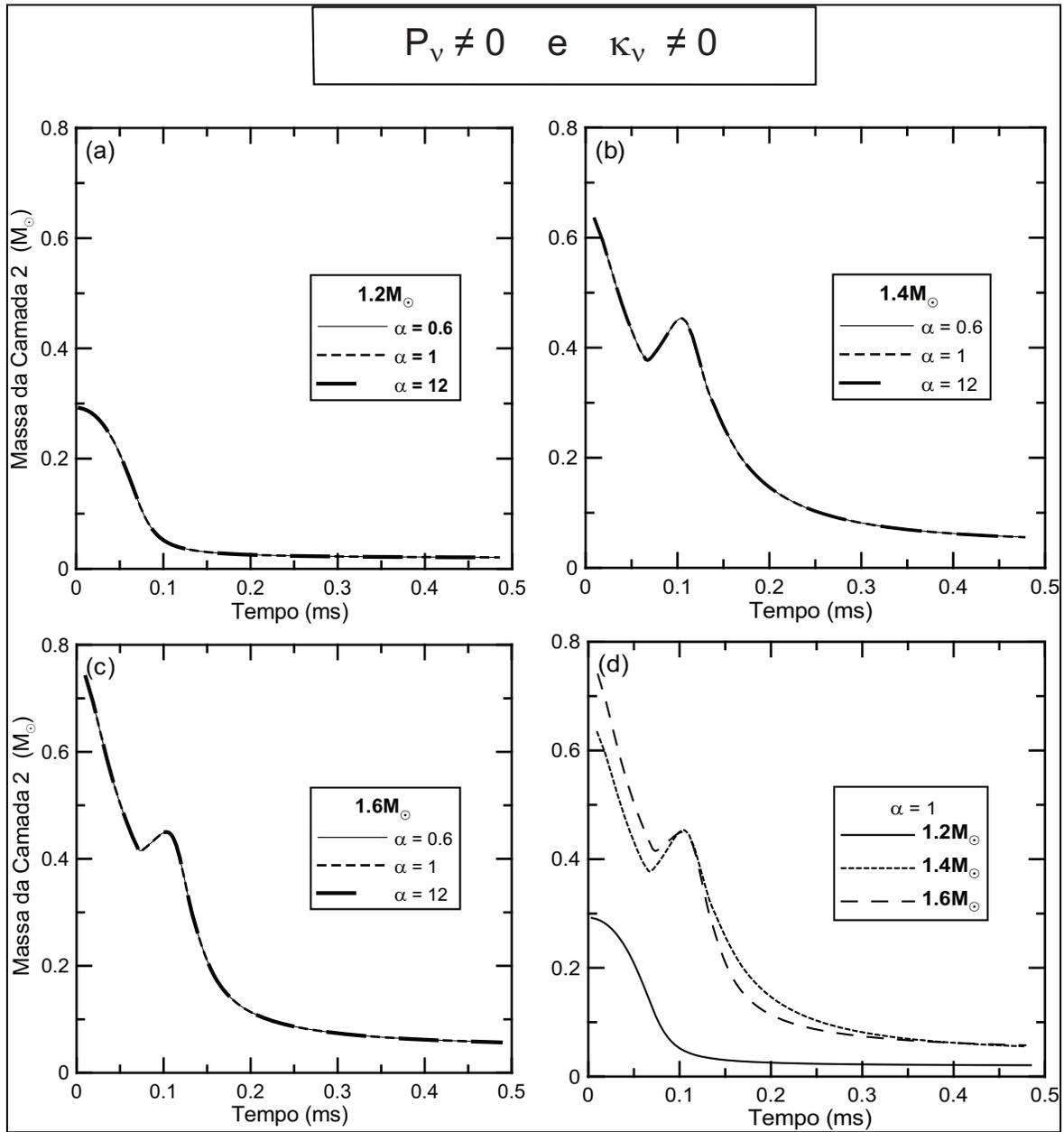


Figura 6.3: Nas Figuras (a), (b) e (c) temos respectivamente as curvas evolutivas dos caroços de $1.2M_\odot$, $1.4M_\odot$ e $1.6M_\odot$. As curvas para diferentes α 's sempre se sobrepõem, demonstrando que a transferência de massa entre as camadas também é independente de α . A Figura (d) compara a evolução da massa da camada-2, para o caso $\alpha = 1$, dos diferentes sistemas. É interessante o efeito manifesto da não-linearidade das equações de massa que traduzem a evolução do sistema. Observe-se que no início da evolução o sistema de massa total $1.6M_\odot$ possui mais massa na camada-2 que o de $1.4M_\odot$ (como era de se esperar). Entretanto, $0.1ms$ após o início do escape dos neutrinos esta situação se inverte e o segundo passa a ter mais massa na camada a ser ejetada que o primeiro, para no final apresentarem massas similares.

seja, valores realistas de α não influenciam perceptivamente a evolução dinâmica do sistema, portanto seria válido tomarmos (por simplicidade) $\alpha = 1$ em análises futuras.

Na Figura 6.3 podemos observar que a massa ejetada também independe da correção da opacidade. Embora não haja um acoplamento direto entre a aceleração promovida pelos neutrinos e a dinâmica das massas, devido ao caráter fortemente não-linear das equações dinâmicas, poderia ocorrer uma influência indireta do parâmetro de escala da opacidade de neutrinos sobre a evolução das massas das camadas. Entretanto, fica explícito nas Figuras 6.3-(a), (b) e (c) que este não é o caso e que o parâmetro α introduzido não afeta perceptivelmente os raios nem as massas das camadas. Também podemos observar na Figura 6.3-(d) o efeito manifesto da não-linearidade das equações de massa que traduzem a evolução do sistema. Observe-se que no início da evolução o sistema de massa total $1.6M_{\odot}$ possui mais massa na camada-2 que o de $1.4M_{\odot}$ (como era de se esperar), entretanto, após o início do escape dos neutrinos esta situação se inverte e o segundo passa a ter mais massa na camada a ser ejetada que o primeiro, para no final apresentarem massas similares.

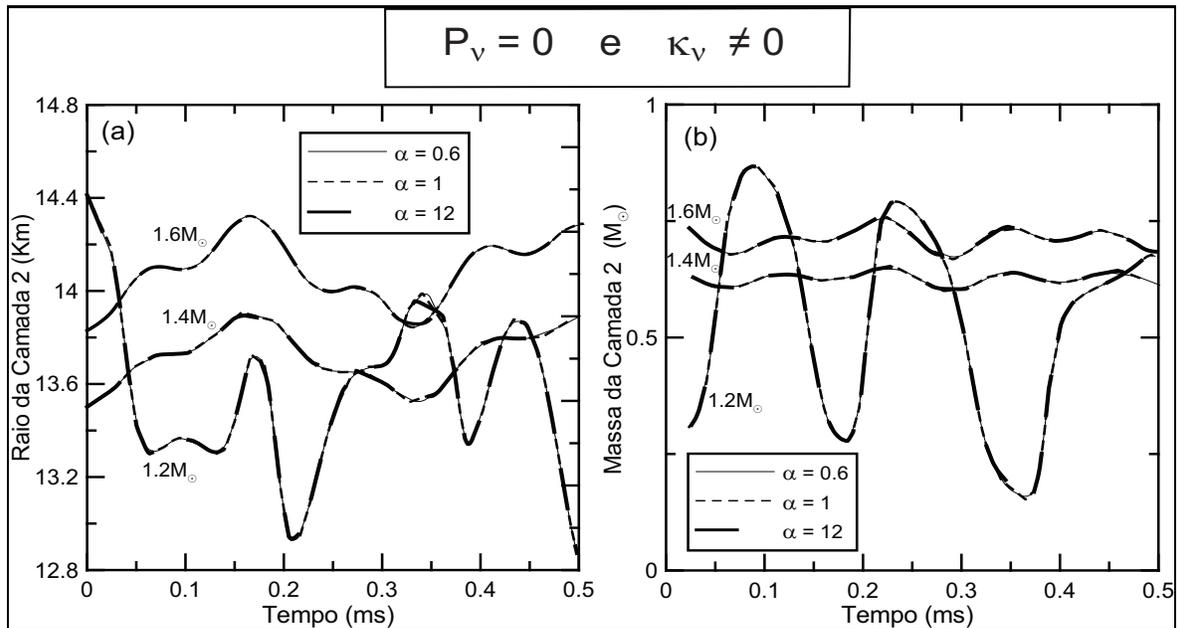


Figura 6.4: Na Figura (a) vemos a evolução dos raios das camadas externas das diferentes estrelas de nêutrons consideradas e suas respectivas massas totais, onde utilizamos todos os α 's sobrepostos. Na Figura (b) temos as curvas das massas da camada 2 para cada caroço com os α 's sobrepostos. Novamente concluímos que a variação de α não afeta dinamicamente o sistema.

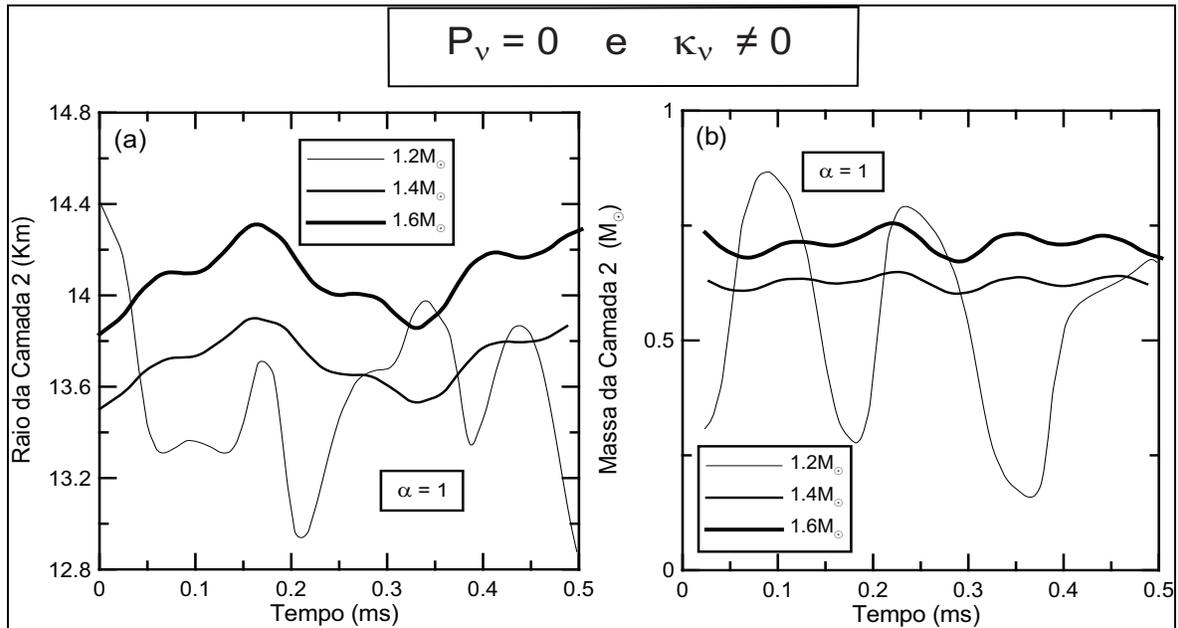


Figura 6.5: Na Figura (a) vemos a evolução das massas das camadas externas dos diferentes caroços considerados e suas respectivas massas totais, onde utilizamos $\alpha = 1$. Na Figura (b) temos as curvas das massas da camada 2 para cada caroço com $\alpha = 1$.

6.3.2 Pressão de Neutrinos nula e Opacidade não-nula

Agora vamos tentar quantificar a importância do vento de neutrinos para a ejeção de massa sem efeitos perturbativos puramente hidrodinâmicos. Desta forma, removemos a contribuição da pressão de neutrinos para a aceleração do sistema e deixamos apenas a opacidade e a luminosidade de neutrinos atuarem perturbativamente na aceleração das camadas.

Conforme podemos ver na Figura 6.4, o vento de neutrinos age perturbativamente sobre as camadas do caroço, entretanto o melhor ajuste para o gráfico de cada camada é uma reta. Ou seja, tanto os raios como as massas das camadas variam em torno de um valor médio que é aproximadamente constante. Portanto podemos dizer que o sistema permanece em equilíbrio para grandes períodos de tempo¹. Como vemos, o vento de neutrinos sozinho não é capaz de ejetar massa do caroço.

¹Não esquecendo que quando nos referimos a grandes períodos de tempo estamos nos referindo a tempos ainda dentro da escala do tempo de difusão.

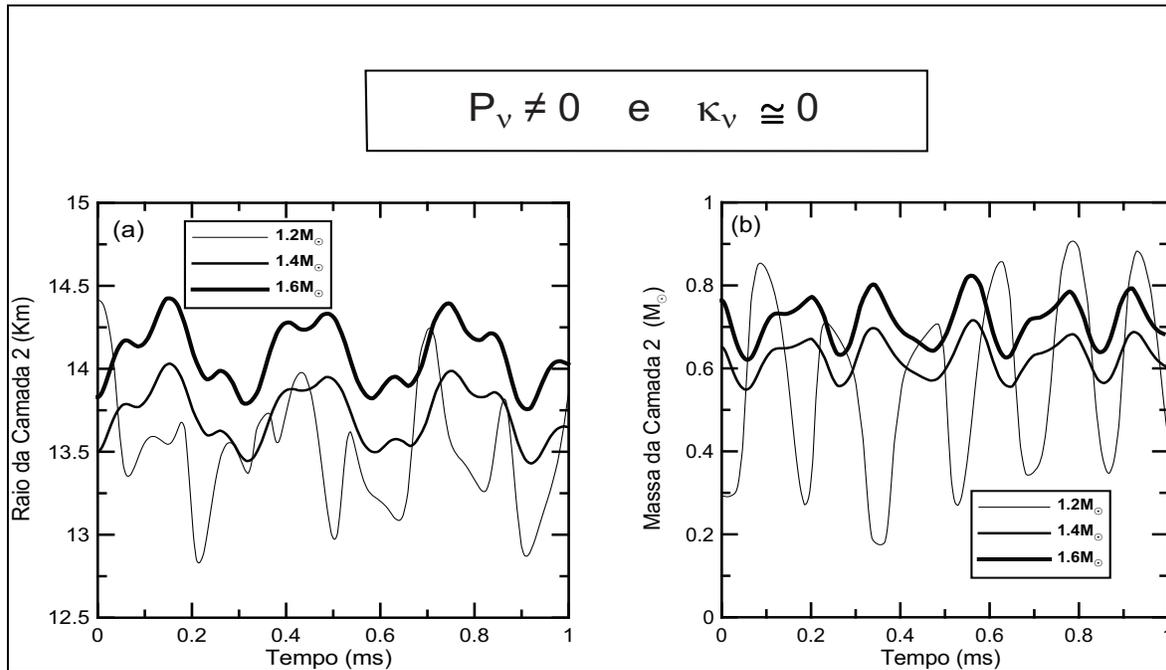


Figura 6.6: Na Figura (a) temos a evolução somente das camadas externas dos diferentes caroços considerados e suas respectivas massas totais. Desta vez não precisamos nos preocupar com α , pois a opacidade é muito baixa neste caso e qualquer correção seria imperceptível. Na Figura (b) temos as curvas evolutivas das massas externas. Como vemos, tanto os raios quanto as massas oscilam em torno de valores médios aproximadamente constantes no tempo, ou seja, neste caso o sistema também se mantém em equilíbrio.

6.4 Pressão de Neutrinos não-nula e Opacidade nula

Aqui desconsideramos a opacidade, fazendo² $\kappa_\nu \approx 0$, porém deixamos presente no cálculo da pressão do meio a pressão parcial do gás de neutrinos que não escaparam. Como não há opacidade para os neutrinos, estes fluem livremente e não há contribuição para a aceleração Euleriana descrita na equação (5.20). Portanto não temos nenhuma força advinda do vento de neutrinos favorecendo a ejeção da camada-2.

Inicialmente acreditávamos que talvez pudesse haver uma ejeção puramente hidrodinâmica, ou seja, sem o depósito de momento pelo vento de neutrinos nas regiões externas, mas podendo (pela incompressibilidade da equação de estado da energia interna) ser transformado em energia cinética da camada-2 permitindo-lhe o escape do colapso gravitacional. Por isso, é importante incluir esse caso para analisar a importân-

²Como vimos na Seção 5.2 o livre caminho médio dos neutrinos na i -ésima camada é inversamente proporcional à opacidade de neutrinos da camada ($\lambda_i \propto \kappa_{\nu_i}^{-1}$). Isso implica que teríamos uma divisão por zero ao calcular λ_i para um meio sem opacidade. Sem perda qualitativa para o modelo, utilizamos um fator multiplicativo da ordem de 10^{-5} para reduzir a opacidade de tal forma que a mesma se tornasse desprezível e pudéssemos assumí-la como nula.

cia isolada da pressão hidrodinâmica devida ao gás de neutrinos. Mais adiante veremos que a pressão até desempenha um papel importante na ejeção de massa, porém ela decai muito rapidamente quando a opacidade é nula, pois os neutrinos que deveriam manter essa pressão escapam livremente à velocidade da luz. Desta forma a pressão também decai rapidamente e não há tempo de transferir a energia necessária para o escape de massa.

6.5 Conclusões

Como vimos, tanto a pressão de neutrinos quanto o vento de neutrinos isoladamente não são capazes, de promover ejeção de massa do sistema. A eficácia da ejeção de massa só pode ser garantida quando ambos os elementos estão presentes. Dos resultados expostos acima, podemos concluir:

1. $P_\nu \neq 0$ e $\kappa_\nu \neq 0$ — Neste caso consideramos os dois efeitos (vento de neutrinos e “bounce” hidrodinâmico) atuando em conjunto. Os neutrinos aprisionados saem numa difusão “lenta”³ e a pressão dos mesmos endurece a equação de estado da camada-1 o suficiente para que a camada-2 ricocheteie no caroço interno, quando a transferência de momentum pelo vento de neutrinos é mais eficaz. Isto porque a opacidade de neutrinos na camada-2 funciona como elemento impeditivo à fuga dos neutrinos. Ou seja, tanto o “endurecimento” da equação de estado como o vento de neutrinos, na ocasião da reversão do movimento da camada-2, trabalham favoravelmente ao escape da mesma.
2. $P_\nu = 0$ e $\kappa_\nu \neq 0$ — Neste caso desprezamos a contribuição dos neutrinos aprisionados para a equação de estado do meio. A equação de estado é mais “mole” que no caso anterior, não permitindo uma transferência de energia elástica tão eficaz por ocasião do “bounce” da camada-2. O vento de neutrinos possivelmente não passa de um efeito meramente perturbativo, até porque a camada-2 não atinge densidades suficientemente altas para que a sua opacidade desempenhe o mesmo papel que na situação anterior.
3. $P_\nu \neq 0$ e $\kappa_\nu \cong 0$ — A transferência de momentum é desprezada, a difusão é mais rápida que no primeiro caso considerado e os neutrinos escapam sem contribuir significativamente para a pressão, não promovendo o endurecimento da equação de estado durante o bounce da camada-2.

³Nos dos interiores estelares densos a velocidade de difusão dos neutrinos são apenas próximas de c . É neste sentido que nos referimos ao neutrino saindo “lentamente” do interior do caroço da proto-estrela de nêutrons.

Como vemos, só o ítem 1 nos leva a uma ejeção de massa do sistema. Ao ser ejetada a camada-2 leva parte da massa da estrela, nossos cálculos deram conta de uma perda da ordem de 3% da massa inicial de uma estrela de nêutrons típica (para maiores detalhes vide Tabela 6.1). Aqui não consideramos a hipótese de que talvez parte da camada-2 não alcance a velocidade de escape e caia de volta no caroço remanescente, ou seja, a camada-2 se despedaçaria em camadas mais finas onde algumas continuariam seu caminho para fora do caroço enquanto outras cairiam de volta. Entretanto, para considerar esta possibilidade seria necessário um cálculo hidrodinâmico mais refinado com n -camadas, o que está em nossos planos como próxima etapa em nossas pesquisas. Um cálculo com n -camadas pode vir a introduzir correções no valor ejetado.

Tabela 6.1: Percentual de massa ejetada por cada caroço

Massa do Caroço	Percentual de Massa Ejetada
$1.2M_{\odot}$	1.60%
$1.4M_{\odot}$	3.03%
$1.6M_{\odot}$	2.90%

6.6 Perspectivas Futuras

Como complementação a este trabalho, gostaríamos de introduzir novos elementos ao dar continuidade à nossa pesquisa, aqui seguem algumas idéias que pretendemos implementar eventualmente nos nossos desenvolvimentos futuros:

1. **Tratamento menos efetivo para evolução hidrodinâmica do meio.** Com n -camadas o tratamento hidrodinâmico seria mais realista e talvez haja uma correção no valor encontrado para a ejeção de matéria. Em nosso modelo consideramos a troca de massas entre as camadas, entretanto é possível que parte da camada 2 volte a cair no caroço antes de atingir a velocidade de escape. Apesar de um modelo mais realista poder apresentar correções importantes, acreditamos que também validará os resultados gerais que foram obtidos neste trabalho com um modelo mais simplificado.
2. **Correções relativísticas para a descrição da cinemática do sistema.** O termo cinemático da lagrangiana efetiva utilizada deveria ser modificado uma vez que obtivemos velocidades relativísticas para os raios das camadas. A equação da continuidade de massa dentro das camadas re-analizada deixando o campo de velocidade no interior das mesmas compatível com uma descrição relativística.

3. **Correções na gravitação da configuração inicial.** O tratamento do termo de gravitação para a lagrangiana efetiva do sistema poderia ter considerado uma correção quasi-newtoniana mesmo dentro de uma descrição dinâmica num espaço plano. Esta seria uma melhoria bastante viável do modelo apresentado.
4. **Correções de relatividade geral para o modelo efetivo.** A energia gravitacional foi descrita de forma puramente newtoniana, quando na verdade correções no contexto da relatividade geral deveriam ser contempladas. Isto é o que se faz, por exemplo, na discussão de situações estáticas para obtenção da estrutura de estrelas de nêutrons (vide Apêndice C). Claro é que a situação estática apresenta solução muitíssimo mais simples que o caso dinâmico. Em nosso caso deveríamos obter uma expressão para um tensor momento-energia efetivo resolvendo a equação de Einstein para obter a evolução dos parâmetros da métrica utilizada.
5. **Considerações sobre a temperatura do sistema e sua compatibilização com a opacidade de neutrinos.** Neste trabalho desprezamos completamente a temperatura do meio e utilizamos um cálculo de opacidade de neutrinos por um modelo microscópico que leva em conta uma temperatura finita do meio (vide Ref. [45]). Portanto, para uma melhor utilização desta opacidade deveríamos considerar a evolução da temperatura do meio, acoplada às demais equações de movimento do sistema.
6. **Quark-novae em nosso modelo.** Para proto-estrelas de nêutrons muito massivas o caroço central é dominado pelo plasma de quarks e glúons. Este é revestido por uma pequena crosta hadrônica, mantida em separado do caroço por um intenso campo elétrico e pela configuração de cargas da superfície dos dois meios. A neutralidade global da matéria nas duas regiões impõe essa configuração de carga e campo responsável por manter o plasma fora do contato direto com a matéria hadrônica. Este tipo de sistema bem se enquadra no modelo de sistema tratado em nosso trabalho — uma proto-estrela de duas camadas bem caracterizada. O estudo da ejeção de massa por este tipo de sistema referido na literatura como quark-novae poderia justificar a existência de puras estrelas de quarks. Nosso modelo pode fazer uma estimativa da massa das estrelas remanescentes deste processo.
7. **Inclusão da emissividade de neutrinos.** Desconsideramos aqui a produção de neutrinos ao longo da evolução do sistema. O tratamento desta questão requer o estudo mais detalhado dos processos de produção envolvendo todo o elenco

de hádrons presentes e até mesmo a produção de neutrinos via processos fundamentais no plasma. Esta produção deveria entrar na equação dinâmica que rege a população de neutrinos no tempo como um termo de fonte dependente da densidade e composição do meio.

8. **Obtenção de uma relação *Massa Ejetada* \times *Massa do Caroço*.** Pretendemos verificar a possibilidade de que talvez haja uma relação entre a massa total ejetada da camada-2 e a massa inicial total da proto-estrela de nêutron. Neste trabalho, o formalismo efetivo de duas camadas nos permitiu obter as estimativas de massa ejetada apresentadas na Tabela 6.1, entretanto, tal estimativa constitui um limite máximo para o valor a ser ejetado. No primeiro ítem desta seção propusemos como perspectiva futura a utilização de um modelo de n -camadas com o qual obteríamos valores mais precisos para nossas estimativas, entretanto, é possível obter uma correção mais simples analisando o campo de velocidades dentro da segunda camada após a explosão.

De acordo com a Ref. [48] o campo de velocidades dentro da camada-2 para um dado r arbitrário é

$$v_2(r) = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) + \frac{\dot{M}_1}{3M_2} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) + \frac{R_1^2}{r^2} \dot{R}_1 \quad (6.1)$$

que pode ser reescrita na forma mais simplificada

$$v_2(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r^2}, \quad (6.2)$$

onde,

$$\alpha = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{\dot{M}_1}{3M_2}$$

$$\beta = -R_1^3 \left(\frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^3 - R_1^3} \right) - \frac{R_2^3 \dot{M}_1}{3M_2} + R_1^2 \dot{R}_1.$$

A velocidade de escape pode ser obtida a partir da comparação da energia cinética de uma partícula teste de massa m na posição r dentro da camada-2 e sua energia potencial gravitacional no infinito, onde desprezamos os efeitos gravitacionais e de arraste que possam vir a ser produzidos pelo meio material na região da camada-2 contida entre r e R_2

$$v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (6.3)$$

Desta forma, teremos ejeção de massa quando o campo de velocidades obedecer a relação

$$\alpha r + \frac{\beta}{r^2} \geq v_e(r) \quad (6.4)$$

que pode ser reescrita como

$$\alpha r^3 - \sqrt{2GM}r^{3/2} + \beta \geq 0. \quad (6.5)$$

Obtendo as raízes da equação (6.5) teremos seis possíveis raízes para r , das quais uma pode ser o valor mínimo de r fisicamente viável (contido entre R_1 e R_2), para que haja ejeção de massa. Para tanto, basta utilizar a relação

$$M_{ej} = M_2 - M(r_{min}), \quad (6.6)$$

onde definimos r_{min} como sendo o raio mínimo para que a matéria atinja velocidade de escape e M_{ej} como a massa ejetada corrigida para a região contida em $R_2 < r < r_{min}$.

Apêndice A

O Diagrama H-R

Falaremos brevemente sobre o Diagrama Hertzsprung-Russell, um instrumento de pesquisa muito poderoso que serve de elo entre as teorias de evolução estelar e de estrutura estelar. Ele permite o estudo das estrelas pela análise de suas características fundamentais como temperatura efetiva e luminosidade. Descreveremos, também, as grandezas envolvidas nestes diagramas.

A.1 Magnitude, Cor e Luminosidade

Os conceitos de magnitude, cor e luminosidade estelar estão relacionados ao brilho da estrela. *Brilho aparente* é um termo utilizado para determinar o quão brilhante uma estrela parece ser para um observador da Terra. O brilho de uma estrela é geralmente medido utilizando-se a *escala de magnitudes*. Quando medimos uma estrela, o fluxo obtido depende da sensibilidade espectral do equipamento, ou seja, do conjunto telescópio + filtro + detector. Se chamarmos de $\Phi(\lambda)$ a eficiência espectral do equipamento, normalizada, teremos a seguinte equação para o fluxo observado:

$$F_{OBS} = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) F(\lambda) d\lambda \simeq F(\lambda_0) \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) d\lambda, \quad (A.1)$$

onde $F(\lambda_0)$ é o fluxo no comprimento de onda efetivo do filtro. Um sistema de magnitudes é definido por seu $\Phi(\lambda)$ e por uma constante (m_C) da integração acima — ver equação (A.2). Um exemplo de sistema muito usado é o sistema *UBV*, desenvolvido por Harold Lester Johnson (1921-1980) e William Wilson Morgan (1906-1994) em 1951, que define magnitudes em três bandas espectrais: *U* de ultraviolet (ultravioleta), *B* de blue (azul), e *V* de visual (equivalente ao espectro amarelo). Essas magnitudes têm seus comprimentos de onda efetivos em 3600Å, 4200Å e 5500Å respectivamente.

Assim, a magnitude aparente na banda V , por exemplo, é:

$$m_V = -2.5 \log F_V + m_C. \quad (\text{A.2})$$

Para determinar a constante (m_C) do sistema, utilizam-se estrelas padrões, ou seja, estrelas que têm magnitudes bem determinadas.

$$m = M + 5 \log \left(\frac{d}{10} \right). \quad (\text{A.3})$$

Definimos como *magnitude absoluta* a magnitude aparente de uma estrela a uma distância de 10pc. A relação entre magnitude absoluta M , magnitude aparente m e a distância d , em parsecs, é dada por:

$$d = 10^{(m-M+5)/5}. \quad (\text{A.4})$$

Esta equação pode ser invertida para obter a distância em *parsecs*, supondo-se que a magnitude absoluta e a aparente sejam conhecidas.

Ao falarmos de escalas de magnitudes, é necessário definir também o que vem a ser *índice de cor*. Em qualquer sistema de magnitudes multicolor define-se o índice de cor como a razão entre os fluxos em duas bandas diferentes, ou equivalentemente, como a diferença entre duas magnitudes do sistema. Por exemplo, subtraindo a magnitude V da magnitude B temos o índice de cor $B - V$, subtraindo a magnitude B da magnitude U temos o índice de cor $U - B$, e assim por diante. Os índices de cor são importantes para determinar a temperatura das estrelas. Os índices de cor têm valores típicos de décimos ou centésimos de magnitudes.

A *luminosidade* de uma estrela é a potência emitida pela superfície da estrela em todos os comprimentos de onda. Ela pode ser representada pela integral

$$L(R) = 4\pi R^2 \int_0^{\infty} F_\nu d\nu, \quad (\text{A.5})$$

onde F_ν é o fluxo de energia emitida pela superfície da estrela num comprimento de onda ν . Uma aproximação razoável é supor que a estrela emita como um corpo negro com uma temperatura efetiva superficial T_{eff} . Nessa aproximação, podemos utilizar a Lei de Stefan-Boltzmann para obter a relação

$$L(R) = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, a luminosidade aumenta com o tamanho e a temperatura efetiva da es-

trela.

Aqui devemos tomar cuidado com a interpretação física da temperatura efetiva. Até onde sabemos, podemos considerar uma boa aproximação tratar as estrelas como corpos-negros, **mas elas não são!** Uma estrela pode ser dividida em várias camadas concêntricas com diferentes temperaturas associadas a essas camadas. Em geral, as camadas mais externas são as mais frias pois são as que irradiam a energia luminosa que deixa as estrelas. Entretanto, como tais camadas possuem temperaturas diferentes, as emissões de radiação associadas a cada camada serão diferentes. Mesmo considerando que cada camada irradie como um corpo negro, a curva de emissão de uma camada será diferente da de outra camada devido à diferença de temperatura entre estas camadas. Desta forma, a curva de emissão que recebemos de uma estrela não é uma planckiana¹, mas sim um somatório de planckianas associadas a camadas independentes com temperaturas diferentes. Sendo assim, surge a questão: como interpretar a temperatura efetiva da estrela se o que recebemos não é a emissão de um corpo-negro? Na realidade, interpretamos a temperatura efetiva como a temperatura associada a um corpo negro que tivesse uma emissão total igual à da estrela. Ou seja, a temperatura efetiva está associada à emissão total da estrela, independente do formato da curva de radiação recebida.

A luminosidade também pode ser definida em termos de uma lei de conservação da energia

$$L(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \epsilon dr, \quad (\text{A.7})$$

onde ϵ é a energia liberada por unidade de massa por unidade de tempo. Sua forma diferencial é

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Classe Espectral e Cor

A função mais importante de um sistema de classificação é fornecer um painel geral de referência no qual os objetos estudados possam ser encaixados. Uma estatística baseada num esquema de classificação pode fornecer pistas que nos permitam compreender a natureza intrínseca dos objetos em estudo. O sistema de classificação mais utilizado associa a temperatura com letras na seqüência *O B A F G K M (S R N)*²,

¹Por “planckiana” definimos a curva de emissão de radiação de um corpo que tem uma temperatura uniforme T que está em equilíbrio termodinâmico com seu próprio campo de radiação, (corpo-negro), e é dada pela Lei de Planck.

²Há vários mnemônicos utilizados para se memorizar a seqüência, mas o mais comum (em inglês) é: ‘*Oh, Be A Fine Girl, Kiss Me Sweetly Right Now*’

onde as estrelas da classe O são as mais quentes e as da classe M são as mais frias. As classes entre parênteses são associadas a temperaturas equivalentes às classes K e M , entretanto diferem na composição química (ver Tabela A.1).

Tabela A.1: Características que definem cada classe espectral e a temperatura superficial (T_S) associada a cada classe. As classes R e N são algumas vezes combinadas numa classe única, C . As classes W , R , N e S são extremamente raras, por isso, muitos autores as omitem

Letra	T_S (K)	Características Especiais
W	> 40.000	Muitas linhas de emissão
O	30.000	Linhas de emissão e absorção
B	20.000	He e H dominantes
A	10.000	H dominante
F	7.000	Ca dominante
G	6.000	Muitos metais presentes
K	4.000	Linhas metálicas muito fortes
M	3.000	Complexa devido à presença de moléculas
S	2.600	ZiO e TiO dominantes
R	2.600	C dominante
N	2.500	C dominante

A.3 O Diagrama Hertzsprung-Russell

No início do século XX o trabalho de dois astrônomos *Ejnar Hertzsprung* e *Henry Norris Russell* levou à construção do que hoje chamamos de *Diagrama Hertzsprung-Russell* (ou simplesmente *diagrama H-R*). Podemos citar aqui dois tipos de diagramas H-R: o *observacional*, no qual plota-se a magnitude absoluta (ou a aparente) de um conjunto de estrelas contra suas classes espectrais (ou índices de cor); e o diagrama *teórico* que utiliza a luminosidade em função da temperatura efetiva (ou da temperatura superficial).

Quando os primeiros diagramas H-R foram feitos a grande surpresa foi que os pontos do gráfico não só se distribuíam de maneira não homogênea, como também os pontos representativos das estrelas, em sua grande maioria, se concentravam ao longo de uma faixa larga numa das contra diagonais dos gráficos. Também foi notada a presença de grupos menores, porém destacadamente colocados em relação à grande faixa. A essa

grande faixa deu-se o nome de *Seqüência Principal*. A interpretação dada dentro da teoria de evolução estelar é que as estrelas passam em torno de 90% de sua vida na Seqüência Principal.

Os grupos menores estão associados a outras fases da evolução da estrela que foram discutidas no Capítulo 1. O diagrama H-R é de grande importância na ligação entre a teoria da evolução estelar e a estrutura estelar.

Durante o aquecimento, mesmo antes do início das reações termonucleares, o objeto já começa a emitir radiação térmica. No entanto, durante a fase de proto-estrela a densidade da região central aumenta muito e o caroço central que se forma vai se tornando cada vez mais opaco à radiação térmica. Como conseqüência, quase toda radiação proveniente da emissão térmica de uma estrela é proveniente de suas camadas mais externas. Ou seja, não é possível “ver” o interior de uma estrela, pois a radiação emitida pelas camadas mais internas é impedida de sair devido à opacidade das camadas internas. O que vemos é o resultado da emissão térmica das camadas mais externas que receberam essa energia das camadas mais internas.

Um erro muito comum, quando se começa a estudar o diagrama H-R é pensar que as estrelas da Seqüência Principal a percorrem ao longo de sua evolução. Isto não ocorre. Na realidade, cada estrela possui associada a ela uma trilha evolucionária que deverá percorrer ao longo de sua vida. A forma dessa trilha deverá depender apenas da massa e composição iniciais da estrela (conferir o teorema de Russell-Vogt na Seção 1.1.3). Quando a trilha de uma estrela em contração gravitacional intercepta a Seqüência Principal, a estrela atinge um ponto de sua vida em que será estável por um longo período de tempo. Isto é assegurado observacionalmente pelo fato de que 90% de todas as estrelas residem na Seqüência Principal (ou próximas desta), e, portanto, devem estar utilizando sua mais eficiente e prolífica fonte de energia – a fusão de hidrogênio em hélio. Atualmente acredita-se que os processos nucleares começam pouco antes da estrela chegar à Seqüência Principal.

Chamamos de fase de pré-seqüência principal o período de proto-estrela, ou seja, quando ainda não há reações de fusão termonuclear e a única fonte de energia para a emissão de radiação térmica é a gravitação, como conseqüência do teorema do virial.

Apêndice B

Polítropos

Se a pressão puder ser escrita como uma função da densidade somente, $P = P(\rho)$, então a estrutura da estrela depende *somente* das equações de equilíbrio hidrostático e continuidade da massa. Em particular, se a dependência da pressão com a densidade em todos os pontos do interior estelar satisfizer a relação

$$P = K\rho^{(n+1)/n}, \quad (\text{B.1})$$

com K e n constantes, a configuração é chamada de um *polítropo*. As equações de equilíbrio hidrostático e continuidade da massa podem ser reduzidas a uma equação diferencial de segunda ordem, dividindo-se a equação de equilíbrio hidrostático por ρ , multiplicando por r^2 e, então, derivando-se em relação a r os dois lados:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho, \quad (\text{B.2})$$

que é a equação de Poisson. Se definirmos variáveis adimensionais

$$\rho(r) \equiv \rho_c \theta^n(r), \quad (\text{B.3})$$

e

$$r \equiv a\xi, \quad (\text{B.4})$$

onde $\rho_c = \rho(r = 0)$ é a densidade central e a constante a dada pela equação

$$a = \left[\frac{(n+1) K \rho_c^{(1/n-1)}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.5})$$

e a (B.2) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (\text{B.6})$$

Essa equação é chamada de equação de Lane-Emden, em honra ao físico americano Jonathan Homer Lane, que derivou a equação do equilíbrio hidrostático em 1869 e ao físico suíço Robert Emden. Modelos correspondentes às soluções dessa equação, para um certo valor de n , são chamados de polítropos de índice n . A pressão será dada por

$$P(r) = K \rho_c^{(1+1)/n} \theta^{1+n} = P_c \theta^{1+n}. \quad (\text{B.7})$$

Se a equação de estado do material for a de um gás ideal com temperatura T , teremos

$$P = \frac{\rho}{\mu} N_A k T, \quad (\text{B.8})$$

onde k é a constante de Boltzmann, μ é o peso molecular médio, e N_A é o número de Avogadro.

Então

$$P(r) = K' T^{n+1}(r) \quad (\text{B.9})$$

e

$$T(r) = T_c \theta(r), \quad (\text{B.10})$$

com

$$K' = \left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^{n+1} K^{-n} \quad (\text{B.11})$$

e

$$T_c = K \rho_c^{1/n} \left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^{-1}. \quad (\text{B.12})$$

Portanto, para um polítopo com equação de estado de gás ideal e constante, θ mede a temperatura.

Finalmente, o fator de escala radial é dado por

$$a^2 = \left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^2 \frac{(n+1) T_c^2}{4\pi G P_c} = \frac{(n+1) K \rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}. \quad (\text{B.13})$$

As condições de contorno

$$\begin{cases} \rho(r=0) = \rho_c \\ \frac{dP}{dr} = 0 \end{cases} \quad ; \text{ para } r=0$$

se traduzem em

$$\begin{cases} \theta(\xi = 0) = 1 \\ \theta'(0) \equiv \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

Se o índice politrópico n e a densidade central ρ_c forem dados, podemos integrar a equação de Lane-Emden (B.6) numericamente do centro até uma distância $r = R$ onde $P = 0$. Se chamarmos de ξ_1 a variável radial onde $\theta(\xi_1) = 0$ para $r = R$, obtemos para R

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \xi_1. \quad (\text{B.14})$$

Dessa forma, especificando K , n e ρ_c ou P_c , obtemos o raio R .

Existem soluções analíticas para $n = 0, 1$ e 5 . Para um valor geral de n são necessárias soluções numéricas.

Para $n = 0$ o sistema equivale a uma esfera de densidade constante, e

$$\theta_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}; \text{ com } \xi_1 = \sqrt{6}. \quad (\text{B.15})$$

Neste caso

$$P_c = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (\text{B.16})$$

Para $n = 1$ a solução θ_1 é a função *sinc*

$$\theta_1(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}; \text{ com } \xi_1 = \pi, \quad (\text{B.17})$$

onde a densidade é dada por $\rho = \rho_c\theta$ e a pressão por $P = P_c\theta^2$.

Para $n = 5$ a densidade central é finita, mas o raio tende a infinito

$$\theta_5(\xi) = \left[1 + \frac{\xi^2}{3} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.18})$$

com $\xi_1 \rightarrow \infty$. Embora o raio tenda a infinito, a massa é finita. As soluções de interesse se restringem ao intervalo $0 \leq n \leq 5$, pois para um índice $n > 5$ a massa também tende a infinito.

A massa contida em uma esfera de raio r pode ser obtida pela equação de continuidade da masa

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr,$$

em termos de ξ

$$dM(\xi) = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^\xi \xi^2 \theta^n d\xi.$$

Comparando com a equação (B.6) vemos que podemos substituir θ^n por

$$\theta^n = -\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right).$$

Desta forma obtemos

$$M(\xi) = 4\pi a^3 \rho_c (-\xi^2 \theta')_{\xi},$$

onde

$$(-\xi^2 \theta')_{\xi} \equiv \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\theta=\xi}.$$

A massa total passa a ser dada, então, por

$$M = M(\xi_1),$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{n+1}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{P_c^{3/2}}{\rho_c^2} (-\xi^2 \theta')_{\xi_1}. \quad (\text{B.19})$$

Resolvendo a equação (B.19) para P_c obtemos

$$P_c = \frac{1}{4\pi(n+1)} \frac{GM^2}{(\theta')_{\xi_1}^2 R^4},$$

$$P_c = \frac{8.952 \times 10^{14}}{4\pi(n+1)} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-4} \text{ dina.cm}^{-4}. \quad (\text{B.20})$$

Para um gás ideal

$$T_c = \frac{1}{(n+1)} \frac{G\mu}{(-\xi\theta')_{\xi_1}} \frac{M}{N_A k R},$$

$$T_c = \frac{2.293 \times 10^7}{(n+1)} \frac{\mu}{(-\xi\theta')_{\xi_1}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) K. \quad (\text{B.21})$$

Para cada valor de n podemos obter K em função de M e R :

$$K = \left[\frac{4\pi}{\xi^{n+1} (-\theta')^{n-1}} \right]_{\xi_1}^{\frac{1}{n}} \frac{G}{n+1} M^{1-1/n} R^{-1+3/n}. \quad (\text{B.22})$$

Quando $n = 3$, K se torna dependente apenas de M .

Uma outra quantidade útil é a densidade média

$$\frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} = \frac{1}{3} \left(\frac{\xi}{-\theta'} \right)_{\xi_1} \quad (\text{B.23})$$

Os valores de n que nos interessam são $n = 3/2$, para o caso de um gás completamente degenerado mas não relativístico, $P_e \propto \rho^{5/3}$, que também é o caso de um gás ideal

completamente convectivo, e $n = 3$ para um gás totalmente relativístico $P_e \propto \rho^{4/3}$.

Apêndice C

A Equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff

A estrutura de uma estrela de nêutron é geralmente descrita (no caso de simetria esférica) por uma equação extraída da relatividade geral utilizando-se a métrica de Schwarzschild.

Os aspectos microscópicos da constituição do sistema, com o auxílio da mecânica estatística e da física de hádrons, levam à construção do tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$. A Equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV), (ver Refs. [49] e [50]) faz a conexão entre estes aspectos microscópicos e a estrutura da estrela.

C.1 A Métrica de Schwarzschild

Boa parte do progresso inicial na Relatividade Geral foi feito considerando uma métrica altamente simétrica que simplifica o tensor de Einstein. Vamos então considerar a métrica mais geral que exibe simetria esférica. Isto é, certamente, consistente com nossa suposição original de estrelas simétricas.

Se tomarmos as coordenadas esféricas usuais r , θ , φ , e t representar a coordenada temporal então a distância entre dois pontos nesta métrica poderá ser escrita como

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 + \frac{e^{\alpha(r)}dt^2}{c^2} \quad (\text{C.1})$$

onde $\lambda(r)$ e $\alpha(r)$ são funções arbitrárias da coordenada radial r . Precisamos também fazer outras suposições a respeito da estrela em questão, para manter a consistência com a suposição inicial de simetria esférica. Vamos assumir que o material da estrela obedece a uma equação de estado que não exibe tensões transversais, tal que todos os elementos não-diagonais do tensor de energia-stress sejam iguais a zero e os três

primeiros elementos espaciais sejam iguais ao equivalente material da densidade de energia. A quarta componente diagonal deve ser justamente a densidade material, tal que (adotando $c=1$)

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = -\frac{P}{3}; T^{44} = \rho \quad (\text{C.2})$$

onde P é a pressão do gás constituinte do sistema, traduzido pela sua equação de estado.

Se tomarmos o tensor métrico especificado pela métrica (C.1), obteremos das equações de Einstein

$$\begin{cases} e^{-\lambda} \left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G P \\ e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G \rho \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

A linha em α e λ denota diferenciação com respeito a r . A solução deve valer para todo o espaço, inclusive para fora da estrela onde $P=\rho=0$. Se tomarmos como contorno da estrela $r=R$, então para $r>R$ teremos as equações métricas de Schwarzschild

$$\begin{cases} e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\alpha(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

que tem soluções

$$e^{-\lambda(r)} = 1 + \frac{A}{r} \quad \text{e} \quad e^{-\alpha(r)} = B \left(1 + \frac{A}{r} \right) \quad (\text{C.5})$$

onde A e B são constantes de integração arbitrárias determinadas pelas condições de contorno. Para r muito grande é necessário que o tensor métrico vá além do espaço plano euclidiano, ou seja

$$\lim_{\delta r \rightarrow \infty} e^{\lambda(r)} = \lim_{\delta r \rightarrow \infty} e^{\alpha(r)} = 1 \quad (\text{C.6})$$

e $B = 1$. A integral de linha em torno do objeto precisa fornecer período e distância consistentes com a terceira lei de Kepler, significando que A está relacionado à massa Newtoniana do objeto. Mais especificamente

$$A = -\frac{2GM}{c^2} \quad (\text{C.7})$$

que é conhecido como *raio de Schwarzschild*.

C.2 Potencial Gravitacional e Equilíbrio Hidrostático

Podemos escrever

$$e^{\alpha(r)} \approx 1 + \alpha(r) \approx 1 + \frac{2GM}{r} \quad (\text{C.8})$$

também sabemos que

$$\alpha(r) = 2\Omega \quad (\text{C.9})$$

onde Ω é o potencial newtoniano a grandes distâncias. O parâmetro $\alpha(r)$ exerce a função de um potencial na métrica de Schwarzschild. Podemos, então, obter a solução para a primeira equação da (C.3) para sua derivada parcial e obter

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{G [M(r) + 4\pi r^3 P]}{r [r - 2GM(r)]} \quad (\text{C.10})$$

Mesmo em uma métrica não-euclideana deveríamos ter o resultado razoável

$$\nabla P = -\tilde{\rho} \nabla \Omega \quad (\text{C.11})$$

onde $\tilde{\rho}$ é a densidade de massa total local tal que a densidade de matéria, ρ , precisa ser acrescida por P para incluir a massa da energia cinética do gás (conforme Ref. [7]).

Combinando a equação (C.10) e a equação (C.11) obtemos

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G [\rho + P] [M + 4\pi r^3 P]}{r (r - 2GM)} \quad (\text{C.12})$$

onde a equação (C.12) é a conhecida equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (ou simplesmente TOV) do equilíbrio hidrostático.

Referências Bibliográficas

- [1] Burbidge, E. M., Burbidge, G. R., Fowler, W. A., & Hoyle, F., 1957, *Mod. Phys.*, **29**, 547.
- [2] Hamada, T. & Salpeter, E. E., 1961, *Astrophys. J.*, **134**, 6381.
- [3] Baade, W., & Zwicky, F., 1934, *Phys. Rev.*, **45**, 138.
- [4] Weiler, K. W. & Sramek, R. A., 1988, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **26**, 295.
- [5] Barbon, R., Ciatti, F. & Rosino, L., 1973, *Astron. Astrophys.*, **29**, 57.
- [6] Shapiro, S.L. & Teukolsky, S.A., 1983, “*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*”, John Wiley & Sons, U. S. A.
- [7] Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A., 1973, *Gravitation*, W. H. Freeman & Co., U. S. A.
- [8] Bombaci, I., 1996, *Astron. Astrophys.*, **305**, 871.
- [9] Hoyle, F. & Fowler, W. A., 1960, *Astrophys. J.*, **132**, 565.
- [10] Thompson, C. & Duncan, R.C., 1995, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **275**, 255.
- [11] Hurley, K. et al, 1999, *Nature*, **397**, 41.
- [12] Hirata, K. et al, 1987, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1490.
- [13] van Riper K., 1982, *Astrophys. J.*, **257**, 793.
- [14] Bionta, R. M. et al, 1987, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1494.
- [15] Dai, Z., Peng, Q. & Lu, T., 1995, *Astrophys. J.*, **440**, 815.
- [16] Anand, J. D., Goyal, A., Gupta, V. K. & Singh, S., 1997, *Astrophys. J.*, **481**, 954.
- [17] Keränen, P., Ouyed, R. & Jaikuma, P., 2005, *Astrophys. J.*, **618**, 485.
- [18] Anjos, J. C., et al., 2006, *Braz. J. Phys.*, **36-4a**, 1118.

- [19] Baym, G., Pethick, C. & Sutherland, P., 1971, *Astrophys. J.*, **170**, 299.
- [20] Baym, G., Bethe, H. & Pethick, C., 1971, *Nuc. Phys.*, **A175**, 225.
- [21] Chandrasekhar, S., 1931, *Phyl. Mag.*, **11**, 592.
- [22] Chandrasekhar, S., 1931, *Astrophys. J.*, **74**, 81.
- [23] Chiu, H. Y., 1968, “*Stellar Physics*”, Vol. I, Blaisdel Publishing Co., U. S. A.
- [24] Weinberg, S., 1972, “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley & Sons, U. S. A.
- [25] Gonçalves, H. A. R., 1995, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF).
- [26] Salpeter, E. E., 1961, *Astrophys. J.*, **140**, 796.
- [27] Horsfall, R. A. C. & Maradudin, A. A., 1960, *Math. Phys.*, **1**, 395.
- [28] Gudmundsson, E. H. & Buchler, J. R., 1980, *Astrophys. J.*, **238**, 717.
- [29] Walecka J. D., 1974, *Ann. Phys.*, **83**, 491.
- [30] Serot, B. D. & Walecka, J. D., 1986, *Adv. Nuc. Phys.*, Plenum Press, **v. 16**, U. S. A.
- [31] Boguta, J. & Bodmer, A. R., 1977, *Nucl. Phys. A*, **292**, 413.
- [32] Lurié, D., 1968, “*Particles and Fields*”, Interscience Publishers, U. S. A.
- [33] Menezes, D. P. & Providência, C., 1999, *Nucl. Phys. A*, **650**, 283.
- [34] Jaffe, R.L., 1975, *Phys. Rev.*, **D11**, 1953.
- [35] Li G. Q., Lee C. H. e Brown G., 1997, *Nucl. Phys. A*, **625**, 372.
- [36] Schertler, K., Greiner, C. & Thoma, M. H., 1997, *Nucl. Phys. A*, **616**, 654.
- [37] Grynberg, S. E., 2000, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).
- [38] Grynberg, S. E., Rodrigues, H., Nemes, M.C., Chiapparini, M., Duarte, S. B., Blin, A. & Hiller, B., 2000, *Phys. Rev.*, **D62**, 12300.
- [39] Cavagnoli, R., 2005, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).
- [40] Glendenning, N. K., 1985, *Astrophys. J.*, **293**, 479.

- [41] Zeldovich, Y. B. & Raizer, Y. P., “*Elements of Gasdynamics and the Classical Theory of Shock Waves*”, 1966, Academic Press, U. S. A.
- [42] Holstein, T., 1947, *Phys. Rev.*, **72**, 1212.
- [43] Pereira, A. R. F. A., 2007, Tese de Doutorado, Universidade do Minho, Portugal.
- [44] Chiapparini, M., Rodrigues, H. & Duarte, S. B., 1996, *Phys. Rev.*, **C54**, 936.
- [45] Steiner, A. W., Prakash, M. & Lattimer, J. M., 2001, *Phys. Lett. B*, **509**, 10.
- [46] Woosley, S. E. & Baron, E., 1992, *Astrophys. J.*, **391**, 228.
- [47] Woosley, S. E., Wilson, J. R., Mathews, G., Meyer, B. & Hoffman, R. D., 1994, *Astrophys. J.*, **433**, 229.
- [48] Gonçalves, H. A. R., 1995, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF).
- [49] Tolman, R. C., 1939, *Physical Review*, **55**, 364.
- [50] Oppenheimer, J. R. & Volkoff, G. M., 1939, *Physical Review*, **55**, 374.